УДК 539.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ніна Антоненко[1], Ірина Ткаченко[2]

[1]Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя;
[2]Запорізький національний університет, м. Запоріжжя

Розглядається багатошарова плита, що складається з n пружних, однорідних та невагомих шарів. На спільних межах шарів виконуються умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів [2]. На верхній та нижній межах плити задано напруження та температуру. Необхідно знайти термо-напружено-деформівний стан у всіх точках плити в рамках осесиметричної деформації.У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат [1].

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z,1}(\rho,0)=\sigma(\rho)\,,\quad \tau_{\rho z,1}(\rho,0)=\tau(\rho)\,,\quad T_1(\rho,0)=f(\rho)\,,$$

$$\sigma_{z,n}(\rho,h_n)=\tilde{\sigma}(\rho)\,,\quad \tau_{\rho z,n}(\rho,h_n)=\tilde{\tau}(\rho)\,,\quad T_n(\rho,h_n)=\tilde{f}(\rho)\,,$$

де $\sigma(\rho)$, $\tilde{\sigma}(\rho)$, $\tau(\rho)$, $\tilde{\tau}(\rho)$, $f(\rho)$, $\tilde{f}(\rho)$ – відомі функції.

Умови на спільних межах шарів плити:

$$\sigma_{z,k+1}(\rho,0)=\sigma_{z,\mathrm{k}}(\rho,h_k)\,,\quad \tau_{\rho z,k+1}(\rho,0)=\tau_{\rho z,k}(\rho,h_k)\,,$$

$$u_{z,k+1}(\rho,0)=u_{z,k}(\rho,h_k)\,,\quad u_{\rho,k+1}(\rho,0)=u_{\rho,k}(\rho,h_k)\,,$$

$$k_{T,k}\frac{\partial T_k(\rho,h_k)}{\partial z}=\frac{1}{R_k}\left(T_{k+1}(\rho,0)-T_k(\rho,h_k)\right),$$

$$k_{T,k+1}\frac{\partial T_{k+1}(\rho,0)}{\partial z}=k_{T,k}\frac{\partial T_k(\rho,h_k)}{\partial z}\,,$$

де R_k – коефіцієнти теплового опору, $k_{T,k}$ – коефіцієнти теплопровідності шарів, $k=1,\ldots,n$.

Відомо [1], що трансформанти Ганкеля напружень, переміщень та температури k-го шару можна подати у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій α_k, β_k, γ_k, δ_k, η_k, ε_k цього шару, які пов'язані з трансформантами напружень, переміщень та температури в точках верхньої межі шару. Якщо ввести допоміжний шар з номером $n+1$ та вважати, що на спільній межі n-го та $(n+1)$-го шарів виконуються умови ідеального теплового та механічного контактів, то за допомогою методу функцій податливості отримаємо формули для знаходження допоміжних функцій та функцій податливості шарів плити:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1} + D_k \eta_k + E_k \eta_{n+1}, \ \varepsilon_k = -r_k \eta_k + F_k \eta_{n+1},$$

$$\bar{\alpha}_{k+1} = \left(M_{11,k} + M_{12,\mathrm{k}} A_k\right)\bar{\alpha}_k + M_{12,k} B_k \bar{\alpha}_{n+1} + \\ + \left(M_{12,k} D_k + M_{13,\mathrm{k}}\right)\eta_k + \left(M_{12,k} E_k + M_{14,\mathrm{k}}\right)\eta_{n+1},$$

$$\eta_{k+1} = \left(C_k + L_k p S_k - r_k \left(S_k + L_k p C_k\right)\right)\eta_k + \left(S_k + L_k p C_k\right) F_k \eta_{n+1},$$

де $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^{\mathrm{T}}$, $S_k = \operatorname{sh} p_k$, $C_k = \operatorname{ch} p_k$, $L_k = R_k k_{T,k}$; r_k, F_k та елементи матриць A_k, B_k, D_k, E_k – функції податливості плити, компоненти яких залежать лише від механічних, теплових та геометричних характеристик шарів, $M_{ij,k}$ – відомі матриці, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 4$, $k = 1, \ldots, n$.

Функції $\bar{\alpha}_1 = (\bar{\sigma}(p), \bar{\tau}(p))^{\mathrm{T}}$, $\eta_1 = \bar{f}(p)$, $\bar{\alpha}_{n+1} = (\bar{\bar{\sigma}}(p), \bar{\bar{\tau}}(p))^{\mathrm{T}}$, $\eta_{n+1} = \bar{\bar{f}}(p)$ знаходять з крайових умов задачі, а решту функцій – за наведеними вище формулами. Після підстановки отриманих допоміжних функцій у вирази для трансформант напружень, переміщень і температури та застосування до них оберненого перетворення Ганкеля відповідного порядку, отримаємо розв’язок поставленої задачі.

1. *Величко І.Г.,Ткаченко І.Г.* Осесиметрична мішана задача термопружності для багатошарової основи // Динамические системы. – 2009. – Вип. 26. – С. 3–12.
2. *Немиш Б.Ю.* Об аналитическом решении одного класса трехмерных задач термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин // Прикладная механика. – 1999. – **35**, № 6. – С. 95–103.

ON AN APPROACH TO SOLVING THE AXISYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A MULTILAYER PLATE WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

The compliance function method is proposed for the solution of axisymmetric stationary problem of thermoelasticity for a multilayer plate with non-ideal thermal contact between its layers. The recurrence relations for the auxiliary functions and the compliance functions of the plate neighboring layers were constracted.