УДК 539.3

ПРО МЕТОД ПРОДОВЖЕННЯ КРАЙОВИХ УМОВ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Володимир Острик

Інститут прикладної фізики НАН України, м. Суми

Для знаходження розв'язків плоских задач теорії пружності в областях, обмежених двома парами різних координатних ліній, пропонується використовувати розв'язки простіших задач для областей, обмежених однією парою координатних ліній, із додатковим заданням крайових умов вихідної задачі за межами області. Метод ілюструється знаходженням розв'язків наступних крайових задач теорії пружності для чвертьплощини, півсмуги та прямокутника.

1. На межі пружної чвертьплощини $0 \le x < \infty$, $0 \le y < \infty$ задано нормальні та дотичні напруження, тобто зформульовано першу крайову задачу теорії пружності для чвертьплощини. Чвертьплощину розглянуто як граничний випадок прямокутника, коли дві його суміжні сторони віддалені на нескінченність. Розв'язок цієї задачі відшукується у формі розв'язку першої крайової задачі для півплощини $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$ через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі [3]. Крайові функції з променю $0 \le x < \infty$, $y = 0$ продовжуються на промінь $-\infty < x < 0$, $y = 0$ та вважаються невідомими. Для їх знаходження шляхом задоволення крайових умов на промені $0 \le y < \infty$, $x = 0$ отримано комплексне інтегральне рівняння типу згортки Мелліна [1]. Розв'язок інтегрального рівняння знайдено із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна [7]. Отримано вирази для напружень у кожній точці чвертьплощини та показано, що вони збігаються з відомими [4].

2. У півсмузі $0 \le x < \infty$, $-h \le y \le h$ розв'язуєтся бігармонічне рівняння із заданою на межі півсмуги шуканою фукцією та її нормальною похідною, причому останні набувають нульових значень на променях $0 \le x < \infty$, $y = \pm h$. Розв'язок подається у вигляді розв'язку бігармонічної задачі для смуги $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le h$ через інтеграли Фур'є з продовженням крайових умов на промені $-\infty < x < 0$, $y = \pm h$. Невідомі функції на цих променях після задоволення крайових умов на торці півсмуги $-h \le y \le h$, $x = 0$ визначаються із системи інтегральних рівнянь, яка перетворюється до комплексного функціонального рівняння відносно певних функціоналів шуканих функцій. До такого самого функціонального рівняння зводится бігармонічна задача для півсмуги за методом однорідних розв'язків [6]. Отже, в цій задачі метод продовження розкриває зміст невідомих коефіцієнтів у методі однорідних розв'язків і слугує додатковим обґрунтуванням можливості подання розв'язку задачі для півсмуги у вигляді розвинення за системою власних функцій для смуги. Функціональне рівняння розв'язано зведенням до нескінченної системи алгебричних рівнянь методом Бубнова – Гальоркіна. Отриманий методом

редукції розв’язок системи алгебричних рівнянь порівнюється з розв’зком розглядуваної задачі, знайденим методом Папковича [2, 5]. Значення шуканої функції, обчислені різними методами, збігаються до четвертого знаку.

3. Розглянуто бігармонічну задачу для півсмуги з криволінійним краєм: $\varphi(y) \le x < \infty$, $-h \le y \le h$. Із застосуванням методу продовження показано, що подання розв’язку цієї задачі у вигляді розвинення за власними функціями можливо тільки за виконання умов $\varphi(h) = \varphi(-h)$, $\varphi(y) > \varphi(\pm h)$, тобто коли криволінійний край міститься всередині півсмуги з прямолінійним торцем. Аналогічно попередньому задача зводиться до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

4. Розглянуто бігармонічну задачу для прямокутника $-a \le x \le a$, $-h \le y \le h$. Отримано подання розв’язку у такій самій формі, як і за методом однорідних розв’язків. Методом Бубнова – Гальоркіна функціональне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

1. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. – Москва: Наука, 1978. – 286 с.
2. *Мелешко В.В., Токовий Ю.В.* Про алгоритм П. Ф. Папковича у методі однорідних розв’язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 69–83.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
4. *Острик В.І.* Симетрія інверсії розв’язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.
5. *Папкович П.Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. – 1940. – **27**. – С. 335–339.
6. *Прокопов В.К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

ON THE METHOD OF CONTINUATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

To find solutions of plane problems of the theory of elasticity in domains bounded by two pairs of different coordinate lines, it is proposed to use solutions of simpler problems for domains bounded by one pair of coordinate lines, with additional setting of boundary conditions of the initial problem outside the domain. The method is illustrated by finding solutions of boundary value problems of the theory of elasticity for a quarter plane, a half strip and a rectangle.