УДК 539.3

# ТРИВИМІРНЕ ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА

Віктор Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів

При вивчені пружної рівноваги елементів конструкцій за умов комплексної дії силових навантажень та розподіленої температури виникає потреба використовувати аналітичне подання розв'язку рівнянь термопружності у найбільш простому вигляді. Розглянуто тривимірний квазістатичний термопружний стан ортотропного тіла в декартовій системі координат $x_1$, $x_2$, $x_3$. Використано співвідношення Дюгамеля – Неймана [1] і записано вирази напружень через деформації і відому температуру

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{3} B_{jk}\varepsilon_k - \beta_j T , \quad \tau_{kj} = G_{kj}\gamma_{kj} , \; k \neq j , \quad j = 1,2,3 , \tag{1}$$

де $B_{jk}$ – характеристики жорсткості ортотропного матеріалу [2], $T(x,y,z)$ – відома різниця температур, яка задовольняє рівняння

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0, \tag{2}$$

$\alpha_j$, $\beta_j$ – коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення [1].

Підставлено подання (1) у відомі рівняння рівноваги та записано основні рівняння термопружного тіла в лінійній постановці

$$L_j u_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\left( D_{jk} \frac{\partial}{\partial x_2} u_k + D_{jm} \frac{\partial}{\partial x_3} u_m - \beta_j T \right) = 0 , \; m \neq k \neq j , \tag{3}$$

які були спрощені після виключення з рівнянь (3) одного з переміщень

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L_j^1 u_j - \frac{\partial}{\partial x_j} L_k^1 u_k = (\beta_j D_{km} - \beta_k D_{jm}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j} , \;\; m \neq k \neq j , \tag{4}$$

де оператори $L_j$, $L_j^1$, а коефіцієнти $D_{jk}$ описані в [2].

Якщо оператори $L_j^1$ не еквівалентні між собою: $L_j^1 \neq c L_m^1$, $j \neq m$, $c \in \mathbb{R}$, то розв'язок систем рівнянь (3), (4) матиме вигляд

$$\mathrm{u_j} = \prod_{k \neq j} \mathrm{L_k^1} \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + \beta_j D_{km} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{\mathrm{j}} , \quad j = 1,2,3 , \tag{5}$$

де функція $\Phi$ описана в [2], а функції $T_{\mathrm{j}}$ визначаються із трьох рівнянь

$$\beta_1 D_{23} L_1^1 T_1 - \beta_m D_{1j} L_m^1 T_m = (\beta_1 D_{23} - \beta_m D_{1j}) T\,,\ m = 2,3\,,\ j \neq 1, m\,,$$

$$\beta_1 L_1^1 T_1 = \beta_1 T - D_{12} D_{13} \left( \beta_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} \right). \qquad (6)$$

Використано подання переміщень (5) і знайдено деформації

$$\varepsilon_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \prod_{i \neq j} L_i^1 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Phi + \beta_j D_{km} \frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2}, \quad j = 1,2,3\,,$$

$$\gamma_{ni} = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} L_m^1 \left( L_n^1 + L_i^1 \right) \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} \left( \beta_n D_{im} T_n + \beta_i D_{nm} T_i \right), \quad n \neq i,\ m \neq i, n\,, \quad (7)$$

а із співвідношень (1) визначені компоненти напружень.

Розглянуто термопружний стан прямокутної призми, під дією температури і силового навантаження, заданого на торцях. Її напружений стан записано у вигляді розвинення за власними функціями, які на торцях призми описуються повною системою неортогональних функцій. Знайдено характеристичне рівняння для визначення власних значень. Використано рівняння (2) і розроблено методику розв’язання системи рівнянь (6).

Використовуючи знайдені розв’язки, розроблено аналітично-числовий алгоритм розв’язання крайової задачі теорії термопружності для ортотропного тіла, який базується на апроксимації напруженого стану скінченною сумою неортогональних функцій і запропонованому способі зведення задоволення всіх крайових умов до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми. Обчислено за формулами (1), (7) компоненти деформацій та напружень.


1. *Новацкий В*. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Revenko V. P*. Presentation of a general 3D solution of equations of elasticity theory for a wide class of orthotropic materials // Scientific journal of the TNTU. – 2019. – № 3 (95) – P. 49–54.


## THREE-DIMENSIONAL REPRESENTATION OF A SOLUTION TO THE EQUATIONS OF A THERMOELASTICITY PROBLEM FOR AN ORTHOTROPIC BODY

*The method for representing a solution of the equations of the theory of elasticity for a wide class of orthotropic thermoelastic materials is mathematically substantiated. The equations contain nine coefficients that depend on elastic orthotropic constants and three coefficients of thermal expansion. The reduction of finding a temperature particular solution of the equilibrium equations to the integration of three partial differential equations is proposed. A method for solving the proposed equations for an orthotropic thermosensitive prism was developed by the method of separation of variables. An analytical-numerical algorithm for satisfying the boundary conditions on the surface of a prism using generalized quadratic forms has been developed.*