УДК 531.8 + 62 – 50

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ І МЕТОДУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДВОЛАНКОВИМ МАНІПУЛЯТОРОМ

Мирослав Демидюк[1], Віталій Демидюк[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів;
[2]ТОВ "ДевКрафт", м. Львів

Дволанковий маніпулятор під дією керувань u_1, u_2 (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію: за заданий час T переносить вантаж із початкового положення (α_0, β_0) в задане кінцеве (α_T, β_T), де (α, β) – кути відхилення ланок маніпулятора. Швидкості ланок маніпулятора на початку та в кінці операції вважаємо нульовими.

Для моделювання руху маніпулятора використовуємо плоску систему двох твердих тіл з ідеальними циліндричними шарнірами. Формулюємо задачу оптимального керування: визначити керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які забезпечать виконання маніпулятором заданої транспортної операції з мінімальним значенням квадратичного функціонала $\Phi = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)]dt$. Введений функціонал характеризує енерговитрати на виконання транспортної операції.

Для розв'язання задачі використовуємо метод параметричної оптимізації [1] та метод на основі принципу максимуму Понтрягіна [2]. Перший із них зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування, а другий дає необхідні умови оптимальності шуканих керувань. Одержану задачу нелінійного програмування розв'язуємо числовими процедурами мінімізації функції багатьох змінних. Числова реалізація методу Понтрягіна ґрунтується на мінімізації за початковими значеннями спряжених змінних квадратичної нев'язки – відхилення отриманих термінальних значень основних змінних від їхніх заданих значень. Розв'язок відповідної Пі-системи будуємо методом Рунге – Кутти.

У методі параметричної оптимізації узагальнені координати маніпулятора подаємо як $q_i = P_i(t) + G_i(t)$, $P_i(t) \equiv \sum_{k=0}^{3} p_{ik} t^k$, $G_i(t) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} g_{ik}(t)$, $i = 1, 2$, де $\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – коефіцієнти параметризації за системою заданих базових функцій $\{g_{ik}(t)\}_{k=1}^{n_i}$, $g_{ik} \in C^2[0, T]$; n_i – заданий параметр. Коефіцієнти $\{p_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ визначаємо з граничних умов транспортної операції, а $\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – під час розв'язання задачі нелінійного програмування. Цю задачу отримуємо після підставлення

параметризованих узагальнених координат у рівняння руху маніпулятора і перетворення цільового функціонала $\Phi[u_1, u_2]$ у функцію багатьох змінних.

Зазначені методи були використані для розв'язання сформульованої вище задачі оптимального керування для дволанкового маніпулятора з конкретними значеннями конструктивних параметрів та характеристик транспортної операції. Алгоритм методу параметричної оптимізації реалізували для таких наборів базових функцій: а) тригонометричні функції; б) поліноми Чебишева (першого роду); в) поліноми Лежандра; г) поліноми Лагерра. Отримані чотири субоптимальні динамічні процеси порівнювали з оптимальним процесом, побудованим із використанням принципу максимуму Понтрягіна. Близькість динамічних процесів оцінювали в межах середньо-квадратичного відхилення. Для характеристики ω величину оцінки $V[\omega]$, що виражає близькість функцій $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $\omega_4(t)$, побудованих відповідно методом параметричної оптимізації з наборами базових функцій (а)–(г) та методом максимуму Понтрягіна, розраховували за формулами

$$V[\omega] \equiv \frac{\sigma}{s}100\,,\ \sigma^2 = \frac{1}{4}\int_0^T \sum_{k=1}^{4} [\bar{\omega}(t) - \omega_k(t)]^2 dt\,,\ \bar{\omega} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\omega_k(t)\,,\ s^2 = \frac{1}{4}\int_0^T \sum_{k=1}^{4}\omega_k^2(t)dt$$

Для розглядуваного маніпулятора отримали такі оціночні величини (у відсотках): $V[\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, u_1, u_2] = [0.01, 0.14, 0.77, 0.05, 0.11, 0.96, 0.28, 1.21]$, де крапкою позначено диференціювання за часом t.

1. *Демидюк М.В., Гошовська Н.В.* Параметрична оптимізація транспортних операцій дволанкового маніпулятора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 4. – С. 142–152.
2. *Демидюк М.В., Демидюк В.М.* Використання методу Понтрягіна у задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором // Математика в сучасному технічному університеті: праці VIII міжн. наук.-практ. конф. (Київ, 27–28 грудня 2019). – 2020. Вінниця: Вид. ФОП Кушнір Ю.В. – С. 51–55.

COMPARISSON OF THE PARAMETRIC OPTIMIZATION METHOD AND THE POTRYAGIN MAXIMUM METHOD CONCERING A PROBLEM ON THE OPTIMAL CONTROL OF A TWO-LINK MANIPULATOR

We investigate a problem of optimal control of a two-link manipulator. The manipulator transfers a cargo under control stimuli (torques in the joints) within a horizontal plane. Assume the initial and final position of the manipulator and the duration of the movement to be given. The quality of the control is estimated with a quadratic functional. We compare the solutions obtained by the method of parametric optimization and the method based on the Pontryagin maximum principle. In the method of parametric optimization, the angular coordinates of the manipulator are represented as the sum of a cubic polynomial and a finite orthogonal functions series. The coefficients of the polynomial are determined from the boundary conditions of the manipulator, the coefficients of the finite series are determined in the form of a solution of the corresponding problem of nonlinear programming. The numerical implementation of the Pontryagin's method is based on the minimization of the standard deviation. Constructed optimal processes are identical.