

УДК 621.372.061:517.3

ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Ярослав П'янило, Назарій Лопух

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м.Львів

З геологічних досліджень відомо, що газонафтоносні пласти мають незначну товщину (порядку декількох десятків метрів) та значні розміри в горизонтальних напрямках (декілька десятків квадратних кілометрів) [1]. В більшості випадків пласти є близькими до горизонтальних. Нехтуючи градієнтом тиску за вертикальною координатою, рівняння моделі запишеться так

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 4mhq_{st}. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) на границі Γ_2 області Ω задовольняє крайову умову Неймана та умову на Ω_* : $p(x_i, y_i, t^j) = p_{i,j}$, $(x_i, y_i) \in \Omega_*$; Γ_2 – зовнішня границя області Ω ; Ω_* – підмножина області Ω , яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j , j – часовий індекс.

Необхідно знайти розв'язок $p(x, y, t)$ рівняння (1) за відомими значеннями тиску $p(x_i, y_i, t_0)$ у заданих точках середовища та умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі $M = \int_V \rho dv$, де V – об'єм сховища.

Числова модель базується на методі скінченних елементів у поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому під інтервалі [1–3]. Дробова похідна наближається за схемою Грюнвальда – Летнікова на проміжку $[0, \tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t), \quad c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j},$$

де $c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}$, $c_j^{(\alpha)} = (1 - (1 + \alpha) / j) c_{j-1}^{(\alpha)}$, $c_1^{(\alpha)} = -\alpha (\Delta t)^{-\alpha}$.

При побудові способу визначення значення порядку дробової похідної необхідно використовувати заміряні дані. Фізичний зміст дробової похідної за часом – це врахування особливостей історії процесу. Достатньо стабіль-

ною величиною при відбиранні газу є сумарний його об'єм або маса. На практиці об'єм вибраного із сховища газу облікується достатньо точно. Тому за критерій вибору порядку дробової похідної доцільно вибрати масу або об'єм відібраного газу.

Маса газу, який міститься в циліндрі висотою h радіуса r для довільного часу, визначається за формулою

$$M(t) = \rho v = \pi h \int_0^a \frac{p(\alpha, r, t) r^2}{zRT} dr .$$

За проміжок часу $t \in [t_0, t_1]$ маса відібраного газу буде

$$M[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} M(t) dt = \pi h \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \frac{p(\alpha, r, t) r^2}{zRT} dr dt . \quad (2)$$

Тут α – порядок дробової похідної. З іншого боку, масу видобутого газу M_v можна визначити за замірними приладами. Оскільки поведінка тиску суттєво залежить від порядку дробової похідної, то корінь рівняння (2) відносно α дає можливість визначити значення порядку дробової похідної α .

1. *Лонух Н., Притула М., Притула Н., П'янило Я.* Розрахунок початково-граничних умов у задачах фільтрації газу в пористих середовища // Вісник національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 638. – С. 239–243.
2. *Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J.* Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition. – John Wiley & Sons, 2002. – 736 p.
3. *Zhang L., Wang G., Song G.* On mixed boundary value problem of impulsive semilinear evolution equations of fractional order // Boundary Value Problems. – 2012. –17. – P. 1–8.

DETERMINATION OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE ORDER FOR SIMULATION OF GAS FILTRATION IN POROUS ENVIRONMENT

Gas filtration is modeled with a nonlinear differential equation in partial derivatives. Methods of solving of the equation are discussed. Computer experiment basing on real-experiment-extracted input physical and geometrical parameters is performed and its results are analyzed. The received results agree well with the corresponding experimental data.