

УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ФОРМ ОТВОРІВ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ ЗА ДВОВІСНОГО РОЗТЯГУ ТА ЗСУВУ

Михайло Саврук, Володимир Кравець, Андрій Чорненко

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів

Задачі оптимізації форм елементів конструкцій належать до обернених задач теорії пружності з невідомими межами [1]. Розглянемо задачу теорії пружності для нескінченної квазіортотропної пластини [2] з гладким отвором, контур  $L$  якого є вільним від навантажень, а пластина на нескінченності зазнає двовісного розтягу у взаємно перпендикулярних напрямках напруженнями  $p$  і  $q$  та зсуву  $\tau$ . Напрямки осей  $x$  і  $y$  декартової системи координат вибрано вздовж головних осей ортотропії. Матеріал пластини є квазіортотропним [3, 4]. Для плоского напруженого стану таких матеріалів маємо основний параметр ортотропії  $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$ , де  $E_x, E_y$  – модулі пружності вздовж осей  $x$  і  $y$ . Для ізотропного матеріалу  $\gamma = 1$ . Необхідно знайти форму отвору  $L$ , у всіх точках якого контурні напруження (нормальні напруження в напрямі дотичної) набувають сталих значень  $\sigma_s(t) = c = \text{const}$ ,  $t \in L$ . Такі отвори назвемо оптимальними. Не завжди існують розв'язки таких задач, тому розглядаємо лише такі навантаження, для яких оптимальні отвори існують.

*Пряма задача.* Першу основну задачу плоскої теорії пружності для нескінченного квазіортотропного тіла з гладким отвором розв'язуватимемо методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Знайшовши граничні значення комплексних потенціалів і задовольнивши з їх допомогою нульові крайові умови для напружень на контурі отвору, отримаємо СІР задачі, яке записане у математичній площині  $z_1 = x + iy$  і має вигляд [1, 2]. Тут і надалі індекс «1» позначає запис відповідних величин у площині  $z_1$ . Для вільний від навантажень отворів контурні напруження визначаємо на основі першого інваріанту тензора напружень за співвідношенням [1]

$$\sigma_s = 2 \operatorname{Im} \{g'_1(t_1)\} [(1 - \gamma^2) \operatorname{Re} \{d\bar{t}_1 / dt_1\} - (1 + \gamma^2)], \quad t_1 \in L_1, \quad (1)$$

де  $g'_1(t_1)$  – шукана функція [2].

*Оптимізація форми отвору.* Розв'язавши СІР для контура  $L$ , знайдемо напруження (1) в  $n$  вузлових точках  $\omega(\xi_j)$ ,  $\xi_j = 2\pi(j-1)/n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Розглянемо функціонал середньоквадратичного відносного відхилення напружень (1) від усередненого значення [1]

$$F[\mathbf{P}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ (\sigma_s[\omega(\mathbf{P}, \xi_j)] - \bar{\sigma}_s) / \bar{\sigma}_s \right\}^2, \quad \bar{\sigma}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_s(\xi_j), \quad (2)$$

де  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_M)$  набір параметрів задачі оптимізації, за допомогою яких визначатимемо  $M$ -параметричне рівняння контуру  $t = \omega(\mathbf{P}, \xi) \xi \in [0; 2\pi]$ , записано на основі обмежених тригонометричних рядів. Мінімізуючи функціонал (2) за параметрами  $P_m, m = 1, \dots, M$ , знаходимо такі їх значення, за яких напруження  $\sigma_s(\xi)$  вирівнюються по всьому контуру.

Досліджено вплив параметра ортотропії  $\gamma$  матеріалу квазіортотропної пластини за двовісного розтягу ( $\sigma_y = p = \sigma, \sigma_x = q = 0.75\sigma$ ) та зсуву ( $\tau = 0.25\sigma$ ) на нескінченності на форми оптимальних отворів (їх верхні половини – рис. 1) та розподіли напружень (1) вздовж контурів колових (штрихові лінії) та оптимальних (суцільні) отворів (рис. 2). Тут лінії 1-5 відповідають величинам  $\gamma = 1; 1.5; 2; 2.5; 3, n = 64, M = 10$ .

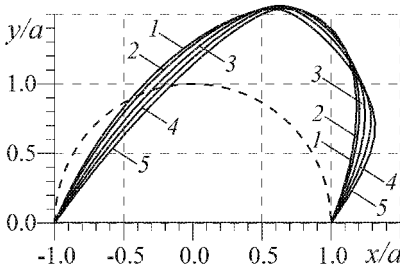


Рис. 1

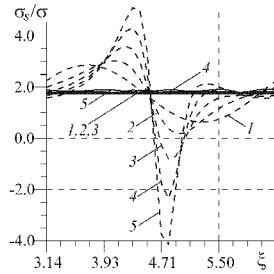


Рис. 2

Параметр  $\gamma$  істотно впливає на розподіли контурних напружень на краю заданого колового отвору (рис. 2). На форми оптимальних отворів цей параметр впливає менше (рис. 1), однак навіть відносно невелика зміна форми отвору призводить до значного збурення розподілу напружень  $\sigma_s$ .

1. Саврук М.П., Кравець В.С., Чорницький А.Б. Визначення оптимальних форм отворів у квазіортотропній пластині за двовісного розтягу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2021. – 57, № 2. – С. 24–31.
2. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress concentration at notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.

#### DETERMINATION OF OPTIMAL HOLE SHAPES IN A QUASI-ORTHOTROPIC PLATE UNDER BIAxIAL TENSION AND SHEAR

*Based on the solutions of the plane problems of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with a hole an analytical-numerical algorithm for determining the optimal shape of the hole (with a minimum stress concentration) for biaxial plate tension and shear is constructed. The solution of the inverse problems with unknown shapes of the holes is reduced to minimizing the multiparametric functional of the standard deviations of tensile stresses along the contours of the holes from their given values. The shapes of optimal holes in a quasi-orthotropic plate for different biaxial tension and shear loading at infinity and levels of material orthotropy are found.*