УДК 519.614

НЕЛІНІЙНІ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ДОСЛІДЖЕННЯХ НЕЄДИНОСТІ РОЗВЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТНЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Петро Савенко

Інститут прикланих проблем мехагіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглядається узагальнення методу неявних функцій для розв'язування нелінійних багатопараметричних ($m \geq 2$) спектральних задач у випадку голоморфних оператор-функцій, визначених у банахових просторах. Запропоновано новий чисельний метод, який полягає у розв'язуванні системи $m-1$ диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку з відповідною початковою умовою. Подано числові приклади розв'язування двопараметричних і трипараметричних спектральних задач.

Покладається, що оператор-функція $\mathbf{A}(\cdot):\mathbf{\Lambda}\to\mathbf{L}(E,V)$ визначена у комплексних банахових просторах E і V, а векторний параметр $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ належить до області $\mathbf{\Lambda}\subset\mathbb{C}^m$. Кожному значенню параметра $\boldsymbol{\lambda}$ ставиться у відповідність оператор $A(\boldsymbol{\lambda})\in\mathbf{L}(E,V)$.

Розглядається проблема власних значень вигляду

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})x\equiv\mathbf{A}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)x=0,$$

в якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})\in\mathbf{\Lambda}$ і відповідні власні вектори $x^{(0)}\in E$, $x^{(0)}\neq 0$, такі, що $\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})x^{(0)}=0$. Доведено теорему існування, з'ясовано основні властивості спектра таких задач.

Нехай функція $F(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ є неперервною і має неперервну частинну похідну F'_{λ_k} в околі точки $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})$; $F(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})=0$, а $F'_{\lambda_k}(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})\neq 0$. Тоді рівняння

$$F(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=0 \tag{1}$$

згідно з теоремою про неявну функцію [4], має один і тільки один корінь, який прямує до $\lambda_k=\varphi_k(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_{k-1}^{(0)},\lambda_{k-2}^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)})$, коли λ_1, λ_2, …, λ_{k-1}, λ_{k-2}, …, λ_m відповідно прямують до $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, …, $\lambda_{k-1}^{(0)}$, $\lambda_{k-2}^{(0)}$, …, $\lambda_m^{(0)}$.

Прирівнюючи до нуля похідну від лівої частини рівняння (1), як від складної функції, одержуємо систему $m-1$ рівнянь із частинними похідними першого порядку, яка описує неявно задану поверхню функцією $\lambda_k=\lambda_k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_{k-2},\dots,\lambda_m)$:

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\lambda_1} = -\frac{\partial F/\partial\lambda_1}{\partial F/\partial\lambda_k}, \cdots, \frac{\partial\lambda_k}{\partial\lambda_{k-1}} = -\frac{\partial F/\partial\lambda_{k-1}}{\partial F/\partial\lambda_k},$$
$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\lambda_{k+1}} = -\frac{\partial F/\partial\lambda_{k+1}}{\partial F/\partial\lambda_k}, \cdots, \frac{\partial\lambda_k}{\partial\lambda_m} = -\frac{\partial F/\partial\lambda_m}{\partial F/\partial\lambda_k}.$$

Функція $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_m)$ у точці $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ повинна задовольняти початкову умову.

Для знаходження розв’язків узагальненої задачі Коші можна застосовувати однокрокові методи типу Рунґе – Кутта.

Найбільш повно досліджено застосування двопараметричних нелінійних спектральних задач. Зокрема:

– при дослідженні проблеми неєдиності розв’язків при чисельному розв’язування двоточкової крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром у коефіцієнтах та крайових умовах [2];
– при дослідженні галуження та біфуркації розв’язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, що виникають в теорії синтезу випромінюючих систем [3].

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
2. *Савенко П. О., Процах Л. П.* Чисельне розв’язування двоточкової крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 48–56.
3. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.

NONLINEAR MULTIPARAMETRIC SPECTRAL PROBLEMS IN INVESTIGATIONS OF NON-UNIQUENESS SOLUNIONS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

The generalization of the method of implicit functions for solving nonlinear multiparametric spectral problems in the case of holomorphic operator-functions defined in Banach spaces is considered. A new numerical method is proposed, which consists in solving a system of equations with partial derivatives of the first order with the corresponding initial conditions.