

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Дмитро Бойко, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Побудова аналітичних розв'язків задач термопружності для композитних тіл є основною розрахунку і оцінки їх реологічних експлуатаційних якостей. Внаслідок анізотропії, притаманної переважній більшості композитів, отримання таких розв'язків, особливо у випадку загального просторового формулювання відповідних задач термопружності, виявляється значно складнішим, ніж для ізотропних тіл [1]. Зокрема, відмінність пружних модулів матеріалу в різних просторових напрямках істотно ускладнює вивчення локальних ефектів від місцевих теплових навантажень поверхні досліджуваних тіл, коли шуканий розв'язок з віддаленням від навантаженої ділянки повинен асимптотично згасати. Для побудови розв'язків з такими властивостями за допомогою методу відокремлення змінних слід володіти повною інформацією про тип і кратність власних чисел ключових рівнянь відповідних задач термопружності. Для анізотропних матеріалів ці власні числа виражаються через коефіцієнти ключових рівнянь, що визначені співвідношеннями між пружними модулями, внаслідок чого має місце галуження залежностей власних чисел від коефіцієнтів рівняння.

Один з найпростіших типів просторової анізотропії є трансверсально ізотропні тіла, що володіють площиною ізотропії, всі напрямки в якій є еквівалентними щодо макроскопічних властивостей матеріалу [1]. Незважаючи на порівняно невелику кількість пружних модулів трансверсально ізотропних матеріалів, побудова розв'язків тривимірних задач термопружності з коректною асимптотикою для необмежених або напівобмежених трансверсально ізотропних тіл є складною проблемою математичної фізики [2].

В [3] запропоновано підхід до розв'язування просторової задачі термопружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору, що знаходиться під впливом локальних силових та теплових навантажень на його межі, паралельній до площини ізотропії матеріалу. З використанням методу безпосереднього інтегрування [4] вихідні рівняння зведено до системи ключових рівнянь для окремих компонент тензора напружень. Не зважаючи на те, що отримано явні розв'язки поставленої задачі, залишається незручність вибору форми розв'язку в залежності від співвідношень між пружними мо-

дулями конкретного трансверсально ізотропного матеріалу. У [5] зроблено спробу подолання цього ускладнення шляхом побудови універсальної щодо властивостей матеріалу форми розв'язку за допомогою зведення задачі до інтегральних рівнянь другого роду. Втім, для деяких трансверсально ізотропних матеріалів підхід до побудови розв'язку в [5] виявився не надто ефективним через повільнішу збіжність. У ці доповіді розвинуто стратегію роботи [5] щодо підвищення ефективності числової реалізації розв'язків просторової задачі термопружності для трансверсально ізотропного півпростору.

1. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 417 с.
2. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
3. *Токовуу Yu., Boiko D., Gao C.* Three-dimensional thermal-stress analysis of semi-infinite transversely isotropic composites // Trans. Nanjing Univ. Aeronautics Astronautics. – 2021. – **38**, No. 1. – P. 18–28.
4. *Токовуу Yu. V., Kalynyak B. M., Ma C. C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach / In R. B. Hetnarski (ed.) // Encyclopedia of Thermal stresses. – Dordrecht: Springer, 2014. – 7. – P. 3350–3356.
5. *Токовий Ю.В., Бойко Д.С.* Інтегральні рівняння тривимірної задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 83–92.

### **ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN AN ELASTIC TRANSVERSELY ISOTROPIC HALFSPACE**

*A technique for the efficient analysis of thermal stresses in an elastic half-space is developed for the general three-dimensional formulation. The original thermoelasticity problem is reduced to an integral equation of the second kind, which then is solved by means of an advanced semi-analytic procedure.*