

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕРМОМЕХАНІКИ - 2021

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ МІЖНАРОДНОЇ
КОНФЕРЕНЦІЇ ТА МІНІ-СИМПОЗИУМІВ



МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України,
доктора фізико-математичних наук, професора
Ярослава Йосиповича Бурака



МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ

до 85-річчя від дня народження
доктора технічних наук, професора
Юрія Михайловича Коляна



ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ

до 85-річчя від дня народження
доктора фізико-математичних наук, професора
Василя Михайловича Вігака

ЛЬВІВ - 2021

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

До 30-річчя Незалежності України

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕРМОМЕХАНІКИ – 2021

**ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ
МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
ТА МІНІ-СИМПОЗИУМІВ**

Під загальною редакцією
академіка НАН України Р.М. Кушніра,
д.ф.-м.н. Ю.В. Токового

ЛЬВІВ – 2021

Сучасні проблеми термомеханіки – 2021: збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів / за заг. ред. Р. М. Кушніра і Ю. В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2021. – 215 с.

Збірник містить наукові праці, присвячені актуальним проблемам сучасної теоретичної та прикладної термомеханіки і суміжних галузей. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021», яка проходила 15–17 вересня 2021 р. у Львові. В рамках конференції відбулися міні-симпозіуми «Математичне моделювання в механіці зв'язаних полів» (до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України, д.ф.-м.н., професора Ярослава Йосиповича Бурака), «Математичні методи механіки і термомеханіки» (до 85-річчя від дня народження д.т.н., професора Юрія Михайловича Коляна), «Оптимізація в термомеханіці» (до 85-річчя від дня народження д.ф.-м.н., професора Василя Михайловича Вігака).

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

Редактори: академік НАН України Р.М. Кушнір,
д.ф.-м.н., ст.н.с. Ю.В. Токовий

Заступники редакторів: д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевич,
д.ф.-м.н., проф. Г.Т. Сулим,
д.ф.-м.н., ст.н.с. А.В. Ясінський

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н., ст.н.с. В.С. Пакош,
к.ф.-м.н. О.М. Вовк

Члени редколегії: академіки НАН України: д.ф.-м.н., проф. В.Л. Богданов, д.т.н., проф. Я.М. Григоренко, д.ф.-м.н., проф. В.Т. Грінченко, д.т.н., проф. Л.М. Лобанов, д.ф.-м.н., проф. І.О. Луковський, д.ф.-м.н., проф. В.Л. Макаров, д.т.н., проф. Ю.М. Мазцевитий, д.ф.-м.н., проф. З.Т. Назарчук, д.т.н., проф. В.В. Харченко; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. О.Є. Андрейків, д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренко, д.т.н., проф. В.С. Гудрамович, д.ф.-м.н., проф. Я.О. Жук, д.ф.-м.н., проф. Я.Я. Рушицький, д.т.н., проф. П.В. Ясній; д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.Д. Дробенко, д.ф.-м.н., проф. А.П. Дзюба, д.ф.-м.н., проф. І.І. Дияк, д.ф.-м.н., проф. В.Г. Карнаухов, д.ф.-м.н., проф. Л.В. Курпа, д.ф.-м.н., проф. В.В. Лобода, д.ф.-м.н., проф. О.Г. Ніколаєв, д.ф.-м.н., проф. Я.М. Пастернак, д.ф.-м.н., проф. В.Г. Попов, д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.В. Процюк, д.т.н., ст.н.с. Я.Д. П'янило, д.ф.-м.н., проф. М.П. Саврук, д.ф.-м.н., проф. І.К. Сенченков, д.ф.-м.н., проф. П.О. Стеблянко, д.ф.-м.н., проф. Є.Я. Чапля, д.т.н., проф. В.І. Шваб'юк.

Рецензенти: член-кореспондент НАН України І.М. Дмитрах,
д.ф.-м.н., проф. П.П. Костробій

Ухвалено до друку Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (протокол № 6 від 8.07.2021)

ISBN 978-966-02-9661-9
(електронне видання)

© Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS
OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Dedicated to the 30th Anniversary of Independence of Ukraine

CURRENT PROBLEMS OF THERMOMECHANICS – 2021

**COLLECTION OF SCIENTIFIC PAPERS
PRESENTED AT THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC
CONFERENCE AND MINISYMPOSIA**

Edited by

Roman M. Kushnir, Acad. NAS of Ukraine,
and Yuriy.V. Tokovyy, Dr. of Sci.

LVIV – 2021

Current Problems of Thermomechanics – 2021: Collection of the Scientific Papers Presented at the International Scientific Conference and Minisymposia / Edited by R.M. Kushnir and Y.V. Tokovyy // Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2021. – 215 p.

This proceedings book contains scientific papers covering current trends in the nowadays theoretical and applied thermomechanics and related topics. The papers were the subject matter of the discussions during the International Conference «Current Problems of Thermomechanics – 2021», held on September 15–17, 2021 in L'viv. Within the framework of the conference, there were three mini-symposia organized, i.e., «Mathematical Modeling in Mechanics of Coupled Fields» (dedicated to the 90th Birth Anniversary of Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor Yaroslav Burak), «Mathematical Methods in Mechanics and Thermomechanics» (dedicated to the 85th Birth Anniversary of Doctor of Technical Sciences, Professor Yuriy Kolyano), and «Optimization in Thermomechanics» (dedicated to the 85th Birth Anniversary of Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor Vasyl Vihak).

The book may be useful to scientists, PhD students, post-graduate students, masters and students of relevant specialties.

Editors-in-Chief: R.M. Kushnir, Acad. NAS of Ukraine,
Y.V. Tokovyy, Dr. of Sci.

Deputy Editors-in-Chief: O.R. Hachkevych, Dr. of Sci., Prof.,
H.T. Sulym, Dr. of Sci., Prof.,
A.V. Yasinskyy, Dr. of Sci.

Board Secretaries: V.S. Pakosh, Ph.D.,
O.M. Vovk, Ph.D.

Board Members: Academicians of NAS of Ukraine: V.L. Bodanov, Y.M. Grigorenko, V.T. Grinchenko, L.M. Lobanov, I.O. Lukovskyy, V.L. Makarov, Y.M. Matsevytyy, Z.T. Nazarchuk, V.V. Kharchenko;

Corresponding members of NAS of Ukraine: O.Y. Andreykiv, O.Y. Grigorenko, V.S. Gudramovich, Y.O. Zhuk, J.Y. Rushchysky, P.V. Yasniy;

B.D. Drobenko, A.P. Dzyuba, I.I. Dyyak, V.H. Karnaukhov, L.V. Kurpa, V.V. Loboda, O.G. Nikolayev, Y.M. Pasternak, V.H. Popov, B.V. Protsyuk, Y.D. Pyanylo, M.P. Savruk, I.K. Senchenkov, P.O. Steblyanko, Y.Y. Chaplya, V.I. Shvabyuk.

Reviewer: I.M. Dmytrakh, Corresponding Member of NAS of Ukraine,
P.P. Kostrobiiy, Prof., Dr. of Sci.

Approved for publication by the Academic Council of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine (Meeting Record No. 6, July 8, 2021)

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

(міні-симпозіум до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України,
д. ф.-м. н., проф. Ярослава Йосиповича БУРАКА)

Ярослав Йосипович Бурак	15
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.00b.pdf	
Анатолій Камінський, Михайло Дудик, Юлія Решітник, Володимир Феньків: Модель зрушення міжфазної тріщини під дією стискального навантаження, паралельного до її берегів.....	17
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.01.pdf	
Ольга Чернуха, Юрій Білушак, Анастасія Чучвара: Апроксимація граничної умови на невідомому часовому інтервалі при моделюванні процесів конвективної дифузії у промислових фільтрах води.....	19
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.02.pdf	
Анастасія Чучвара, Ольга Чернуха, Юрій Білушак: Математичне моделювання дифузії домішкової речовини у двофазній випадково неоднорідній смузі за рівномірного розподілу кульових включень.....	21
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.03.pdf	
Юлія Сенік: Вплив нелінійності модулів пружності на поверхневі напруження.....	23
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.04.pdf	
Тарас Нагірний, Костянтин Червінка: До моделювання впливу домішок на модулі пружності.....	25
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.05.pdf	
Олександр Григоренко, Ігор Лоза: Коливання неоднорідних порожнистих п'єзокерамічних куль.....	27
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.06.pdf	
Наталія Вайсфельд, Зінаїда Журавльова: Плоска псевдостатична задача поропружності для півплощини.....	29
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.07.pdf	
Анатолій Булат, Олександр Круковський, Вікторія Круковська: Розв'язування зв'язаних задач для забезпечення безпеки гірничих робіт у вугільних шахтах.....	31
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.08.pdf	
Олександр Михайл, Алла Шевельова, Володимир Лобода: Модель зони передруйнування для електропровідної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі.....	33
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.09.pdf	
Олександр Поліщук, Михайло Яджак: Деякі загальні підходи до розв'язування алгоритмічно складних задач моделювання в механіці зв'язаних полів.....	35
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.10.pdf	

Володимир Асташкін, Олексій Онишко, Богдан Боженко, Аніда Станік-Беслер: Дослідження впливу силового навантаження на фазовий склад і напружений стан біметалевої консолі, одному з шарів якої притаманна пам'ять форми.....	37
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.11.pdf	
Тетяна Бардин, Богдан Дробенко: Напружено-деформований стан контактних біметалевих термоперетворювачів.....	39
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.12.pdf	
Богдан Дробенко, Марта Марцінків: Оцінювання вогнетривкості елементів конструкцій засобами математичного моделювання.....	41
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.13.pdf	
Олександр Андрейків, Ірина Долінська, Святослав Настасяк: Моделювання заповільненого руйнування елементів конструкцій довготривалого експлуатування з урахуванням деградації їх матеріалів.....	43
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.14.pdf	
Богдан Дробенко, Степан Будз: Оцінювання міцності та експлуатаційного ресурсу елементів енергообладнання з урахуванням деградації матеріалу, пошкоджень і технологій ремонту.....	45
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.15.pdf	
Богдан Дробенко, Михайло Марчук, Микола Хом'як, Володимир Сіренко, Дмитро Клименко, Володимир Харченко: Комп'ютерне моделювання процесів деформування складних конструкцій ракетно-космічної техніки.....	47
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.16.pdf	
Михайло Саврук, Любов Онишко, Олексій Кваснюк: Коефіцієнти інтенсивності напружень для лінзоподібного отвору в анізотропному тілі за антиплоскої деформації.....	49
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.17.pdf	
Вадим Гудрамович, Етері Гарт, Олег Марченко: Моделювання впливу підкріплення видовженого еліптичного отвору на концентрацію напружень у сферичній оболонці.....	51
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.18.pdf	
Тарас Голубець: Механотермодифузійні процеси при симетричному мікрохвильовому опроміненні пористої зволоженої пластини.....	53
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.19.pdf	
Роман Івасько, Наталія Мельник, Роман Мусій, Стефан Моринь: Моделювання термомеханічної поведінки двошарових електропровідних тіл за імпульсних електромагнітних дій.....	55
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.20.pdf	
Георгій Сулим, Ярослав Пастернак, Юрій Михалюк: Математичне моделювання впливу просторових оболонкових включень у термомагнітоелектропружних тілах.....	57
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.21.pdf	

Ярослав Жук, Олександр Остос: Вплив попередніх напружень на оцінку робоздатності за тепловим критерієм еластомерної прямокутної пластини.....	59
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.22.pdf	
Олександр Максимук, Юрій Сачук, Юлія Музичук: Контактні задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі.....	61
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.23.pdf	
Ярослав П'янило, Михайло Петрус: Побудова та дослідження емпіричних формул для обчислення параметрів фізичних процесів.....	63
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.24.pdf	
Ярослав П'янило, Валентина Собко: Дослідження впливу порядку дробової похідної на розв'язок крайових задач в базисі біортогональних многочленів.....	65
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.25.pdf	
Ярослав П'янило: Визначення радіуса живлення робочої свердловини.....	67
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.26.pdf	
Юлія Глущенко, Костянтин Хорошев: Двовимірна задача електропружності для півпростору з отворами та тріщинами у випадку дії електричного поля.....	69
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.27.pdf	
Мирослав Прутула, Зоя Прутула: Метод ідентифікації параметрів математичної моделі системи пласт – газозбірний пункт підземних сховищ газу.....	71
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.28.pdf	
Мирослав Прутула, Назар Прутула: Методи аналізу потоків на зважених графах.....	73
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.29.pdf	
Ольга Грицина: Варіаційне формулювання задач локально градієнтної електро-термомеханіки.....	75
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.30.pdf	
Ольга Грицина, Оксана Кравчишин, Леся Постолак: Професор Василь Чекурін: науковець і наставник.....	77
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.31.pdf	
Василь Перепічка, Іван Шацький: Фрикційний розігрів пружного стержня в ударній хвилі скруту.....	79
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.32.pdf	
Томаш Волчанські, Олександр Гачкевич, Тереза Козакевич, Володимир Кукареко: Методика встановлення значень питомих об'ємів фазових складових у сталевих пластинах за нагріву рухомими джерелами тепла.....	81
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.33.pdf	
Томаш Волчанські, Тереза Козакевич, Роман Кушнір, Валентин Можаровський: До моделювання способів нагріву-охолодження в термомеханіці сталевих тіл за врахування фазових перетворень.....	83
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.34.pdf	
Богдана Гайвась, Адріан Торський, Вероніка Дмитрук: Моделювання процесу сушіння пористої деревини циліндричної форми.....	85
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.35.pdf	

Роман Івасько, Карен Казарян, Аніда Станік-Беслер, Дмитро Тарлаковський: Математичне моделювання фізико-механічних процесів у металізованій феритовій пластині, зумовлених об'ємними магнітостатичними хвилями..... 87
<http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.36.pdf>

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ

(міні-симпозіум до 85-річчя від дня народження доктора технічних наук, професора **Юрія Михайловича КОЛЯНА**)

Юрій Михайлович Коляно	91
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.00k.pdf	
Ольга Кирилова, Всеволод Попов: Напружений стан нескінченного циліндра довільного перерізу з дефектами різного типу при коливаннях позовжнього зсуву.....	93
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.01.pdf	
Андрій Мішарін, Оксана Литвин, Всеволод Попов: Визначення напруженого стану в околі тунельних дефектів з перерізом у вигляді ламаних при взаємодії з хвилями позовжнього зсуву.....	95
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.02.pdf	
Ніна Антоненко, Ірина Ткаченко: Про один підхід до розв'язання осесиметричної задачі термопружності для шаруватої плити з неідеальним тепловим контактом між шарами.....	97
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.03.pdf	
Віктор Шевчук: Дослідження термонапруженого стану системи півпростір – багатошарове покриття з тріщиною під покриттям за конвективного теплообміну.....	99
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.04.pdf	
Володимир Острик: Про метод продовження крайових умов у задачах теорії пружності.....	101
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.05.pdf	
Віктор Ревенко: Тривимірне подання розв'язку рівнянь задачі термопружності для ортотропного тіла.....	103
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.06.pdf	
Роман Кушнір, Оксана Вовк, Тетяна Соляр: Дослідження теплового стану контактуючих термочутливих тіл за фрикційного нагрівання.....	105
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.07.pdf	
Наталія Городецька, Інна Старовойт, Тетяна Щербак: Енергія розсіяного поля в півшарі зі змішаними граничними умовами на торці.....	107
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.08.pdf	
Ігор Махоркін, Ірина Литвин: Про один підхід до аналітично-числового визначення статичного термопружного стану шаруватих структур простої геометрії з термозалежними фізико-механічними характеристиками.....	109
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.09.pdf	

Галина Гарматій, Богдан Калиняк: Неусталений термопружний стан термочутливого порожнистого тришарового циліндра за умов складного теплообміну.....	111
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.10.pdf	
Ігор Скородинський: Усталений режим деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії рівномірно розподіленого циклічного навантаження.....	113
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.11.pdf	
Роман Тучапський: Розрахунок локально навантажених тонких конічних панелей на основі теорії Кірхгофа – Лява та деяких уточнених теорій.....	115
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.12.pdf	
Борис Процюк: Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих циліндрів і куль.....	117
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.13.pdf	
Merab Svanadze: Potential method in the coupled linear theory of thermoelasticity of materials with double porosity.....	119
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.14.pdf	
Ігор Прокопишин: Методи декомпозиції області для задачі про термомеханічний контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів.....	121
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.15.pdf	
Ігор Прокопишин, Іван Прокопишин, Ольга Соляр: Числове дослідження контактної взаємодії двох пружних тіл за наявності покриття дискретної структури.....	123
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.16.pdf	
Микола Махоркін: Вплив інерційності матеріалу на параметри граничної рівноваги циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною.....	125
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.17.pdf	
Андрій Сенік: Моделювання впливу теплового потоку на пружний стан термочутливого тіла.....	127
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.18.pdf	
Валентин Можаровський, Володимир Кукареко, Олександр Кушнеров: Реалізація математичних моделей визначення температури для шару на пружному півпросторі.....	129
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.19.pdf	
Олександр Демидов, Всеволод Попов: Моделювання та дослідження напруженого стану в скінченних циліндрах частково відшарованих від жорсткої основи при раптовому крутному навантаженні.....	131
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.20.pdf	
Леся Постолакi, Василь Дяків: Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесиметричних задачах теорії пружності для порожнистого циліндра.....	133
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.21.pdf	
Георгій Сулим, Ярослав Пастернак, Тетяна Третяк: Ефективні термомеханічні характеристики композитних матеріалів із нитковим наповненням.....	135
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.22.pdf	

Христина Середницька: Математична модель термопружної поведінки тіла з урахуванням поздовжньої теплопровідності берегів тріщини.....	137
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.23.pdf	
Олег Савицький, Олександр Трофимчук, Олександр Гомілко: Динамічна контактна задача для пористопружного насиченого рідиною шару ґрунту при вертикальних коливаннях прямокутного штампу з непро- никною для порової рідини підшовою.....	139
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.24.pdf	
Михайло Марчук, Володимир Харченко, Микола Хом'як, Віра Пакош: Ефективні термопружні модулі дискретних композиційних шарів у рамках моделі ортотропного матеріалу.....	141
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.25.pdf	
Роман Андрійчук, Ярослав Кунець: Динамічна взаємодія пружного середо- вища з тонким п'єзокерамічним включенням за осесиметричного кру- чення композиту.....	143
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.26.pdf	
Ярослав Кунець, Валерій Матус, Віктор Міщенко, Василь Пороховсь- кий: Поширення згинних хвиль у тонкій пластині із ансамблем випадково розташованих включень.....	145
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.27.pdf	
Ярослав Кунець, Валерій Матус, Юлія Максимів, Роман Рабош: Поши- рення хвиль поблизу тонкого металічного прошарку у п'єзоелектрич- ному тілі.....	147
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.28.pdf	
Олександр Гачкевич, Роман Мусій, Наталія Мельник, Карен Казарян: Термомеханіка електропровідних пластин за дії імпульсних електро- магнітних полів.....	149
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.29.pdf	
Георгій Сулим: Ігор Миколайович Турчин (16.01.1966 – 5.01.2021). Попе- редній підсумок творчих здобутків.....	151
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.30.pdf	
Любов Гаєвська, Микола Гачкевич, Борис Чорний, Адріан Торський: Методика визначення температури в двошарових оболонках за кубіч- ного її розподілу по товщині шарів.....	153
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.31.pdf	
Галина Василько: Нестационарна змішана задача теплопровідності для пів- безмежного порожнистого циліндра.....	155
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.32.pdf	
Сергій Пискунов, Олексій Шкриль, Роман Остапенко: Оцінка несучої здатності кругових тіл з дефектами за умов температурного наванта- ження.....	157
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.33.pdf	
Кирил Васильєв, Георгій Сулим: Пружна рівновага кусково-однорідних ортотропних тіл з тріщинами за поздовжнього зсуву.....	159
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.34.pdf	

Тетяна Шопа, Ольга Тужеляк: Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною включень довільної конфігурації за врахування розподіленого навантаження на поверхні пластини.....	161
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.35.pdf	
Олександр Кривий, Юрій Морозов: Фундаментальні розв'язки для неоднорідного трансверсально-ізотропного простору.....	163
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.36.pdf	
Уляна Жидик, Володимир Флячок: Розрахунок неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок на динамічні температурні навантаження.....	165
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.37.pdf	
Ярослав Григоренко, Лілія Рожок: Рівновага нетонких еліптичних циліндричних оболонок при дії невісесиметричного локального навантаження.....	167
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.38.pdf	
Богдан Дробенко, Євгеній Ірза: Відпал структурно неоднорідних тіл.....	169
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.39.pdf	

ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ

(до 85-річчя від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора **Василя Михайловича Вігака**)

Василь Михайлович Вігак	173
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.00v.pdf	
Богдан Калиняк: Умови відсутності термонапружень у неоднорідному порожнистому циліндрі скінченної довжини та способи їх реалізації.....	175
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.01.pdf	
Богдан Дробенко: Оптимізація за напруженнями конструкцій складної форми.....	177
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.02.pdf	
Анатолій Ясінський, Людмила Токова, Юрій Токовий: Оптимізація керування статичним термонапруженим станом плоскодеформованого півпростору.....	179
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.03.pdf	
Наталія Сметанкіна, Альона Меркулова, Дмитро Меркулов, Сергій Місюра: Оптимізація проектування захисної оболонки атомної електростанції при імпульсному навантаженні.....	181
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.04.pdf	
Микола Юзв'як: Використання функцій Вігака для розв'язання задач теорії пружності та термопружності в напруженнях.....	183
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.05.pdf	
Юрій Токовий, Надія Заводовська, Марта Бобик: Дослідження осесиметричних теплових та термонапружених полів у радіально-неоднорідних порожнистих циліндрах.....	185
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.06.pdf	
Мирослав Демидюк, Віталій Демидюк: Порівняння методу параметричної оптимізації і методу максимуму Понтрягіна в задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором.....	187
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.07.pdf	

Богдан Дробенко, Олександр Гачкевич: Рациональні режими високо температурної індукційної обробки феромагнітних тіл.....	189
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.08.pdf	
Ярослав П'янило, Назарій Лопух: Визначення значення порядку дробової похідної при моделювання фільтрації газу в пористих середовищах.....	191
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.09.pdf	
Михайло Саврук, Володимир Кравець, Андрій Чорненко: Визначення оптимальних форм отворів у квазіортотропній пластині за двовісного розтягу та зсуву.....	193
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.10.pdf	
Петро Савенко: Нелінійні багатопараметричні спектральні задачі в дослідженнях неєдності розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь.....	195
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.11.pdf	
Олександр Гачкевич, Орест Гуменчук, Анджей Маринович, Ростислав Терлецький: Оптимізація термомеханічних процесів в кусково-однорідних тілах за теплового опромінення.....	197
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.12.pdf	
Микола Стащук: Мікротріщина на продовженні ядра краєвої дислокації.....	201
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.13.pdf	
Любов Гасвська, Микола Гачкевич, Олександр Гачкевич, Анна Козярьска: Оптимізація режимів відпалу термочувливих скляних елементів конструкцій при нагріві конвективним способом і джерелами тепла.....	203
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.14.pdf	
Сергій Фуркало, Володимир Сіренко, Катерина Логінова: Сучасні методи моделювання теплового стану елементів конструкції ракетних комплексів при експлуатації.....	205
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.15.pdf	
Дмитро Клименко, Володимир Бабуров, Тетяна Дьяченко: Прогнозування руйнівного навантаження гладких паливних баків ракет-носіїв на прикладі єдиного паливного відсіку.....	207
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.16.pdf	
Ольга Тужеляк: Поперечні коливання ортотропної пластини з отворами за мішаних крайових умов та дії розподіленого навантаження на поверхні.....	209
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.17.pdf	
Юрій Токовий, Лілія Гайдук: Аналіз напруженого стану кільцевих пластин за локального навантаження межі.....	211
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.18.pdf	
Дмитро Бойко, Юрій Токовий: Дослідження термонапружень у пружному трансверсально ізотропному півпросторі.....	213
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.19.pdf	
Леся Сеньків, Василь Дяків: Дослідження напруженого стану спіральної циліндричної оболонки під дією поля температурних дисторсій.....	215
http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.20.pdf	

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

міні-симпозіум до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента
НАН України, доктора фізико-математичних наук,
професора **Ярослава Йосиповича БУРАКА**

MATHEMATICAL MODELING IN MECHANICS OF COUPLED FIELDS

mini-symposium dedicated to the 90th Anniversary of Corresponding
Member of the NAS of Ukraine, Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Professor **Yaroslav BURAK**

ЯРОСЛАВ ЙОСИПОВИЧ БУРАК

(15.03.1931 – 15.06.2011)

Ярослав Йосипович Бурак народився 15 березня 1931 р. в с. Підгороднє Золочівського району Львівської області. В 1953 році закінчив фізико-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка за спеціальністю «механіка». В 1953–1955 рр. працює інженером у лабораторії фотопружності Інституту машинознавства і автоматики АН України. В 1955–1958 рр. навчається в аспірантурі Львівського політехнічного інституту за спеціальністю «опір матеріалів».



Під час навчання в аспірантурі Я. Й. Бурак займається узагальненням класичних моделей деформування призматичних стержнів в умовах поперечного згину. За результатами цих досліджень у 1960 році він захищає дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Почавши у 1958 р. в Інституті машинознавства і автоматики АН України (з 1964 р. – Фізико-механічний інститут АН України) співпрацю з Я.С. Підстригачем, розробляє методи побудови розв'язків динамічних задач теорії пружності й термопружності з врахуванням мультипольової структури. Одержані результати дозволили в 1970 р. захистити дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а в 1976 р. – отримати звання професора. В 1985 р. його обрано членом-кореспондентом АН України.

Починаючи з другої половини 1960-х років, Я.Й. Бурак працює над побудовою фізико-математичних моделей діелектричних та електропровідних неферромагнітних пружних тіл. Уперше в світовій літературі, використовуючи уявлення про тензорний характер локального розподілу електричних зарядів, він отримує повну систему рівнянь для опису процесів деформування та поляризації діелектриків. У випадку електропровідних неферромагнітних пружних тіл, виходячи з основних положень термодинаміки нерівноважних процесів і механіки суцільного середовища, побудовано математичну модель, у рамках якої кількісно описано механічні, теплові та електромагнітні процеси з врахуванням поля електродного потенціалу.

Тоді ж, спільно з Е.І. Григолюком і Я.С. Підстригачем, Я.Й. Бурак розробляє теоретичні основи і методи оптимізації термонапруженого стану деформованих тіл для створення раціональних режимів високотемпературної локальної обробки зварних елементів тонкостінних конструкцій. Прикладні результати цих досліджень були впроваджені у виробництво та покладені в основу Міжгалузевого стандарту зонального відпуску зварних тонкостінних конструкцій.

Необхідність дослідження температурних полів і напружень при індукційній термообробці привела до створення теорії та методів термомеханіки електро-

провідних тіл, які перебувають під дією зовнішніх усталених та квазіусталених електромагнітних полів. У подальшому роботи у галузі оптимізації розвивались у напрямку розробки раціональних технологій термообробки при виготовленні електровакуумних та електроннопроменевих приладів, а також заварюванні дефектів та під'єднанні відводів на діючих магістральних нафтопроводах.

Під керівництвом Я.Й. Бурака розвинуто методи дослідження магнітотермопружних процесів у неферромагнітних неполяризованих електропровідних тілах при періодичних у часі комплексних навантаженнях; процесу деформації багатокомпонентних твердих тіл з врахуванням алотропних перетворень, теплопровідності й дифузії, а також фізико-механічних процесів у напівпровідникових системах з використанням багатоконтинуумного підходу. Значний доробок складають розробки локально-градієнтного термодинамічного підходу до побудови моделей нелінійної термомеханіки.

Наукова спадщина Я. Й. Бурака складає 8 наукових монографій, понад 300 наукових публікацій, 5 авторських свідоцтв про винаходи. В 1975 році за розробку і впровадження в практику оптимальних режимів зонального відпускання зварних швів в конструкціях оболонкового типу йому було присуджено Державну премію України у галузі науки і техніки. В 1982 році присвоєно почесне звання «Заслужений діяч науки України», а в 1999 році за дослідження, присвячені розробці математичних моделей і методів розв'язування крайових задач термомеханіки електропровідних континуальних систем присуджено премію НАН України ім. М.М. Крилова.

Я. Й. Бурак здійснював широку науково-організаційну роботу як завідувач відділу (1969–1995 рр. – Фізико-механічний інститут АН України, Львівський філіал математичної фізики Інституту математики АН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України), науковий керівник Центру математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України (з 1995 р.), заступник голови спеціалізованої вченої ради з захисту докторських та кандидатських дисертацій при ІППММ НАН України (з 1977 р.), член ради Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти та науки України, член редколегій журналів «Математичні методи і фізико-механічні поля», «Машинознавство», «Вісник Львівського університету» та «Волинський математичний вісник». Він був дійсним членом Наукового товариства ім. Т. Шевченка, член Президії Національного комітету з теоретичної та прикладної механіки України і Європейського механічного товариства «Euromech».

Плідну наукову роботу Я. Й. Бурак поєднував з педагогічною діяльністю. Упродовж 35 р. він викладав у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, був заступником завідувача та завідувачем спільної з ІППММ НАН України кафедри математичного моделювання цього університету. Серед його учнів 6 докторів та 35 кандидатів наук. Зусиллями Я. Й. Бурака, його колег та учнів у Львові створено наукову школу з проблем континуально-термодинамічного моделювання та оптимізації нелінійних локально нерівноважних систем.

УДК 539.375

МОДЕЛЬ ЗРУШЕННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ ПІД ДІЄЮ СТИСКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ПАРАЛЕЛЬНОГО ДО ЇЇ БЕРЕГІВ

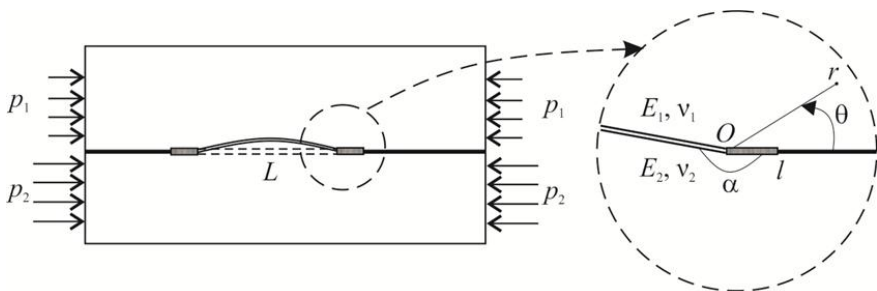
Анатолій Камінський¹, Михайло Дудик², Юлія Решітнік², Володимир Феньків²

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ;

² Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань

Однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла є вивчення руйнування тіл при стисканні. До проблем цього класу відноситься задача про зрушення тріщини при стисканні тіла у напрямку, паралельному до її берегів. За такого навантаження відсутність сингулярності напружень (коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють нулю) в околі вершини тріщини виключає можливість використання критеріїв лінійної механіки руйнування.

У цій роботі досліджено модель початкового етапу процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. Модель базується на припущенні про спільний вигин берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу, у поєднанні з їх фрикційним контактом. Ці процеси призводять до концентрації напружень з наступним утворенням маломасштабних зон передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершин (див. рисунок), що на даному етапі допускає застосування традиційних методів дослідження умов зрушення тріщини в рамках лінійної механіки руйнування.



Моделюючи зону передруйнування лінією розриву нормального переміщення, з використанням методу Вінера – Гопфа отримано розв'язок задачі про розрахунок параметрів цієї зони. Знайдено співвідношення, що визначають довжину і розходження меж зони. За допомогою деформаційного критерію сформульовано умову появи мікротріщини в зоні передруйнування, яку

використано для розрахунку граничного навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини, та для дослідження залежності розмірів мікротріщини від навантаження. Запропоновано модель механізму зрушення початкової тріщини і подальшого руйнування тіла при стисканні, яка передбачає злиття тріщини зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. Аналогічний механізм зрушення міжфазної тріщини в умовах зсувних навантажень розглянуто в [1].

В рамках моделі виконано числовий розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування і мікротріщини, з аналізу яких зроблено такі висновки:

- Дія стискального навантаження вздовж плоскої межі розділу матеріалів кусково-однорідного тіла, що містить міжфазну тріщину, призводить до відхилення берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу на кут, який зростає зі збільшенням навантаження.
- Довжина зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі і розходження її меж нелінійно зростають зі збільшенням стискального навантаження. Відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони і величина цього розходження майже прямо пропорційні до довжини зони передруйнування.
- Після досягнення критичного розходження берегів зони передруйнування відбувається утворення мікротріщини, довжина якої зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування. При цьому порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з початковою тріщиною.
- Утворення зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень біля вершини тріщини, що можна усунути деструкцією матеріалу в околі вершини тріщини.

1. Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А. Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 95–108.

A MODEL OF THE INITIATION OF AN INTERFACE CRACK UNDER THE ACTION OF COMPRESSIVE LOAD IN-PARALLEL TO ITS FACES

The initial stage of the fracture process of a piecewise homogeneous body under compression along a flat interface of materials, containing an interface crack, is considered. An analytical evaluation of the parameters of a small-scale pre-fracture zone in the joint material near the tips has been performed. The value of zone boundaries divergence was found. It was used later in the deformation criterion for the formation of a secondary microcrack in it. The mechanism of a crack start is proposed, which provides its merging with a growing microcrack under an increasing load.

УДК 517.958:532.72

АПРОКСИМАЦІЯ ГРАНИЧНОЇ УМОВИ НА НЕВІДОМОМУ ЧАСОВОМУ ІНТЕРВАЛІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ПРОМИСЛОВИХ ФІЛЬТРАХ ВОДИ

Ольга Чернуха, Юрій Білушак, Анастасія Чучвара

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Для розрахунку ефективної роботи фільтрів, їхніх оптимальних геометричних параметрів, сорбційної здатності та тривалості роботи, як правило, використовують комп'ютерне моделювання, розв'язуючи числовими методами нелінійні задачі фільтрації питних або стічних вод. Разом з тим для аналізу впливу пористості, сорбційних властивостей та геометричних параметрів фільтра на довговічність його роботи доцільно отримати аналітичні розв'язки аналогічних задач у лінеаризованому варіанті опису процесів сорбції. З іншого боку залишається невирішеною проблема встановлення граничної умови «на виході» фільтра води. Проте можливе проведення експериментів з визначення концентрації забруднення або потоків домішки через нижню границю тіла.

Ця робота стосується моделювання функціонування двошарових фільтрів води на основі фізико-математичної моделі конвективної дифузії домішкової речовини з урахуванням сорбції частинок на скелет, коли водний розчин є двокомпонентним, а тіло – двошаровим. При цьому запропонована схема визначення граничної умови на нижній поверхні фільтра на основі апроксимаційних процедур експериментальних даних концентрації забруднення на цій границі з урахуванням невідомого часу виходу функції на усталений режим [1].

Розглянуто випадок, коли шукана функція концентрації на границі виходить на стаціонарний режим. Маючи набір експериментальних вимірювань концентрації забруднення на нижній границі фільтра можемо побудувати апроксимаційну функцію. Знайдемо апроксимаційний поліном з використанням методу найменших квадратів для оптимального визначення параметрів апроксимаційної функції.

Нехай задано експериментальні дані (таб. 1) з кількістю вимірів $n = 9$.

Таблиця 1

t	0.02	0.06	0.1	0.14	0.18	0.22	0.26	0.3	0.34
$F(t) \times 10^{-10}$	0.014	0.015	0.02	0.033	0.65	0.98	1.24	1.29	1.3

Ці дані апроксимовано поліномом п'ятої степені $F(t) = a_0 t^5 + a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t + a_5$, де $a_0 = 14279.09$, $a_1 = -13097.26$, $a_2 = 4130.9845$, $a_3 = -507.1611$, $a_4 = 23.5284217$, $a_5 = -0.2867113$.

Апроксимуючий поліном, отриманий методом найменших квадратів, має вигляд

$$f(a_1, \dots, a_5) = \sum_{i=1}^n \left(F(t_i) - \sum_{k=0}^5 a_k t^{5-k} \right)^2 \xrightarrow{\{a_k\} \in \mathbb{R}} \min.$$

Дані, обчислені за результатами апроксимації многочленом п'ятої степені, наведено в табл. 2.

Хоча вважається, що поліномом п'ятої степені адекватно апроксимується неперервна функція в рівномірній метриці, для отримання точнішого результату апроксимації можна підняти степінь многочлена до 7 або 9, або вибрати нелінійну апроксимаційну функцію (для даного випадку, наприклад, \arctg) і застосувати метод вирівнювання [2]. При цьому необхідно враховувати, що апроксимаційна функція має бути зручною при подальшому застосуванні методу інтегральних перетворень, у тому числі – неklasичних.

Правий кінець відрізка апроксимації, насправді, є невідомим. Відповідно є невідомим момент часу припинення експериментальної серії. Враховуючи мету дослідження, тобто встановлення параметрів роботи фільтра, використано існування часу насичення фільтра, тобто втрату сорбційної здатності. Після часу насичення, який теж є невідомим, в тілі відбувається лише процес конвективної дифузії частинок забруднення, а процес очищення забрудненого розчину припиняється, відповідно потрібно завершити роботу фільтра. Для оцінки зверху функції концентрації на нижній границі тіла та визначення наближеного часу насичення розв'язана спрощена задача конвективної дифузії (тобто без урахування сорбції) за тих самих контактних та крайових умов і граничної умови на потік.

Визначено час виходу на стаціонарний режим, розв'язуючи нерівність, що мінімізує різницю між концентраціями в біжучий момент часу і в часі насичення з наперед заданою точністю.

1. *Chernukha O., Bilushchak Y., Pakholok B.* System approach to mathematical description of transport processes with chemical reaction in multiphase multicomponent body / Proc. IEEE 2nd Int. Conf. SAIC – 2020. – P. 144-149.
2. *Milovanovic G.* Numerical methods and approximation theory. – Niš: University of Niš, 1984. – 199 p.

APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITION AT UNKNOWN TIME-INTERVAL FOR MODELING THE CONVECTIVE DIFFUSION PROCESSES IN INDUSTRIAL WATER FILTERS

An algorithm for estimating the values of the sought function (concentration of pollution) at the lower boundary of the filter on the basis of the approximation of experimental data is proposed. It is taken into account that the right end of the approximation segment is unknown.

Таблиця 2

t	$F(t) \times 10^{+10}$
0.02	0.011991
0.04	0.075284
0.06	0.032869
0.08	-0.02488
0.1	-0.04143
0.12	0.011382
0.14	0.138851
0.16	0.328874
0.2	0.794095
0.22	1.007464
0.24	1.170693
0.26	1.266956
0.3	1.274275
0.32	1.251132
0.34	1.30359

УДК 517.958:532.72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ У ДВОФАЗНІЙ ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ СМУЗІ ЗА РІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛУ КУЛЬОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Анастасія Чучвара, Ольга Чернуха, Юрій Білушак

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

При оцінці властивостей композиційних матеріалів, визначенні оптимальних характеристик експлуатації складних інженерних конструкцій, прогнозуванні поширення забруднюючих речовини, тощо, важливу роль відіграє дослідження процесів перенесення, що відбуваються у структурах з внутрішніми неоднорідностями. Водночас точне розташування включень у тілі, зокрема, у вигляді пор чи зерен, може бути невідомим, що призводить до необхідності розгляду структури як випадково неоднорідної, а тому прямий опис процесів масоперенесення є неможливим.

Залежно від специфічних властивостей, які необхідно дослідити, існують різні підходи до моделювання фізичних процесів у неоднорідних структурах. Зокрема, в останні роки широкої популярності набули методи решіток Больцмана, випадкового блукання [1, 2], тощо. Зазначимо, що на практиці для структур з внутрішніми неоднорідностями є характерним стрибок концентрації домішки на границях контакту фаз, тоді як у згаданих методах умова неідеального контакту не накладається, що є певним спрощенням відповідної моделі. Ця робота присвячена дослідженню дифузії домішки у двофазній смузі з випадково розташованими кульовими включеннями за явного врахування величини стрибків шуканої функції та її похідної на міжфазних границях [3, 4].

Розглянуто дифузію домішки у шарі товщини z_0 , що містить кульові включення одного сорту. Координати розташування включень вважаємо невідомими, але прийнято, що вони розташовані за рівномірним законом розподілу, тобто використано модель двофазного випадково неоднорідного шару, який складається з матеріалу основної фази (матриці) та включень сферичної форми. Прийнято, що об'ємна частка матриці є набагато більшою, ніж об'ємна частка включення ($v_0 \gg v_1$), а коефіцієнти дифузії та густини є сталими в об'ємі кожної фази.

Концентрація домішки $c_j(\vec{r}, t)$ в області $(V^{(j)})$, $j = 0, 1$, визначається як

$$\rho_j \frac{\partial c_j(\vec{r}, t)}{\partial t} = d_j \left(\frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \right), \quad \vec{r} \in (V^{(j)}), \quad t \in [0; \tau], \quad \tau < \infty,$$

де ρ_j – густина області ($V^{(j)}$); d_j – кінетичний коефіцієнт переносу в цій області, $j = 0, 1$.

У початковий момент часу домішкова речовина в тілі є відсутньою, на верхній границі тіла підтримується постійне значення концентрації домішкової речовини, а на нижній границі вона дорівнює нулю.

Вихідну крайову задачу зведено до рівняння дифузії, що описує концентрацію мігруючої домішки для тіла в цілому та явно враховує величину стрибків шуканої функції та її похідної на міжфазних границях. При цьому стрибок коефіцієнта дифузії на границях «матриця – включення» подано добутком абсолютної величини стрибка коефіцієнта на нормалі, побудованій до поверхні кулі у деякій біжучій точці. Побудовано нове інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній контактній крайовій задачі дифузії. Його розв'язок знайдено методом ітерування у вигляді інтегрального ряду Неймана. Усереднення стохастичного поля концентрації домішки проведено за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу кульових включень. Показано, що за явного врахування стрибка функції концентрації та її похідної у випадковому операторі збуреного рівняння дифузії, розрахункова формула для усередненої концентрації домішкової речовини, що мігрує у двофазному тілі з кульовими включеннями, містить додатковий доданок. Досліджено вплив цього доданка на значення усередненої концентрації домішки в тілі для різних значень вхідних параметрів задачі.

1. *LaBolle E.M., Quastel J., Fogg E.G., Gravner J.* Diffusion processes in composite porous media and their numerical integration by random walks: Generalized stochastic differential equations with discontinuous coefficients // *Water Resources Research.* – 2000. – **36**, No. 3. – P. 651–662.
2. *Yong Y., Lou X., Li S., Yang C., Yin X.* Direct simulation of the influence of the pore structure on the diffusion process in porous media // *Computers & Mathematics with Applications.* – 2014. – **67**, No. 2. – P. 412–423.
3. *Чернуха О.Ю., Білуцак Ю.І., Чувчара А.С.* Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних структурах. – Львів: Растр–7, 2016. – 262 с.
4. *Чернуха О., Білуцак Ю.* Математичне моделювання усередненого поля концентрації у випадкових шаруватих структурах з урахуванням стрибків шуканої функції на міжфазних границях // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 1. – С. 62–74.

MATHEMATICAL MODELING ADMIXTURE DIFFUSION IN A TWO-PHASE RANDOMLY NONHOMOGENEOUS STRIP WITH A UNIFORM DISTRIBUTION OF SPHERICAL INCLUSIONS

The diffusion of admixture particles in a two-phase strip with randomly located spherical inclusions is investigated. A solution of the initial contact-boundary value problem is obtained in the form of Neumann series and the dependence of the averaged field of concentration on the medium characteristics is established.

УДК 539.3

ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТІ МОДУЛІВ ПРУЖНОСТІ НА ПОВЕРХНЕВІ НАПРУЖЕННЯ

Юлія Сенік

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто ізотропний електропровідний неферромагнітний твердий шар, що займає область $-\ell \leq x \leq \ell$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Шар в цілому є електронейтральним, його поверхні є вільними від зовнішнього силового навантаження і на них задано сталі значення густини ρ_a , відмінне від відлікового значення ρ_* , що є характерним для безмежного однорідного середовища.

Використано наступну ключову систему рівнянь для визначення густини ρ , електричного потенціалу φ та компонент тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{rr} - \frac{\nu}{E} \sigma \right) = -\frac{d^2}{dx^2} (a_m(\rho - \rho_*) + a_0^{\omega} \varphi), \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \varphi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_*) = 0, \quad \frac{d^2 \rho}{dx^2} - \xi^2 (\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $d_{\sigma m}$ – інтенсивність джерел маси, a_m , a_0^{ω} , $a_{\omega\omega}$, $a_{m\omega}$, ε_0 , ξ – сталі. Приймаємо, що $E = E_0(\rho / \rho_*)^{\beta_e}$, $\nu = \nu_0(\rho / \rho_*)^{\beta_n}$, де E_0 , ν_0 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла у відліковому стані, β_e , β_n – сталі.

Систему рівнянь (1) доповнено умовою електронейтральності тіла,

$$\int_{-\ell}^{\ell} \omega(x) dx = 0, \quad (2)$$

де $\omega(x) = (a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \varphi) / \varepsilon_0$ – електричний заряд, умовами

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \rho = \rho_a, \quad \varphi = \varphi_a, \quad (3)$$

на поверхнях $x = \pm \ell$ шару та умовами рівності нулю головних вектора та моменту зусиль у поперечних перерізах $y = \text{const}$, $z = \text{const}$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{yy} dx = 0, \int_{-\ell}^{\ell} x \sigma_{yy} dx = 0, \int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{zz} dx = 0, \int_{-\ell}^{\ell} x \sigma_{zz} dx = 0. \quad (4)$$

Отримавши розв'язок задачі (1) – (4), вивчено поверхневі напруження. Зокрема встановлено, що поверхневим напруженням у тілі властивий тришкальний ромірний ефект. Урахування нелінійності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона суттєво впливає на точність отриманих результатів

1. *Нагірний Т., Червінка К.* Основи механіки локально неоднорідних пружних тіл. Основи наномеханіки II. – Львів: Растр-7, 2014. – 168 с.
2. *Nahirnyj T.S., Senyk Y.A., Tchervinka K.A.* Modeling local non homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2014. – 1, No 2. – С. 214–223.

INFLUENCE OF NONLINEARITY OF ELASTIC MODULES ON SURFACE STRESSES

A problem for a deformable electroconductive non-ferromagnetic layer is considered on the basis of the mathematical model of locally non-homogeneous solids. The study of density, thermodynamic electrical potential, electricity charge and components of stress tensor in the layer is performed. As a result of the research, a number of conclusions have done regarding the feasibility of taking into account the dependence from elasticity characteristics of the material on density.

УДК 539.3

ДО МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДОМІШОК НА МОДУЛІ ПРУЖНОСТІ

Тарас Нагірний¹, Костянтин Червінка²

¹ Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

² Львівський національний університет ім. Івана Франка, м. Львів

В рамках моделі локально неоднорідного твердого розчину [1] запропоновано підхід, що дозволяє враховувати вплив домішок на модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона. Підхід базується на врахуванні залежності від густини скелету локальних модулів пружності, тобто коефіцієнтів у поданні вільної енергії у просторі базових параметрів стану. Таку залежність прийнято у вигляді [2]

$$E = E_*(\rho_0 / \rho_{0*})^{\beta_E}, \quad \nu = \nu_*(\rho_0 / \rho_{0*})^{\beta_\nu},$$

де E , ν – локальні модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; ρ_0 – густина скелету; β_E , β_ν – сталі; зірочкою відзначено величини у тілі віднесення.

Для ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона (далі модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона) приймаємо загальноприйняте їх означення:

- чисельне значення модуля Юнга дорівнює відношенню інтенсивності зовнішнього силового навантаження до відносного видовження тіла, спричиненого цим навантаженням, у напрямку дії навантаження;
- коефіцієнт Пуассона є відношенням поперечного скорочення до поздовжнього видовження, спричинених дією силового навантаження.

В рамках моделі враховано структурну неоднорідність матеріалу та геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла, характерними розмірами яких є відповідно ξ_m^{-1} та ξ_s^{-1} .

Вивчення впливу домішок на модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона проведено на прикладі двокомпонентного шару (область $|x| \leq \ell$), який при $y \rightarrow \pm\infty$ перебуває під дією силового навантаження $\vec{F} = (0, 2\sigma_a \ell, 0)$. Приймаємо, що на його вільних від силового навантаження поверхнях $x = \pm\ell$ задано постійні, відмінні від нуля значення густин скелету ρ_{0a} та домішок ρ_{1a} .

На основі одержаного розв'язку записано формули для модуля Юнга E_{ef} та коефіцієнта Пуассона ν_{ef} . Встановлено, що наявність домішок не змінює якісно залежності модуля Юнга від товщини шару. Вплив домішок на

$E_{ef}, \nu_{ef} \in$ більшим у товстих шарах. Для E_{ef} це ілюструють графіки на рис. 1, на якому показано залежність E_{ef}/E_* від параметра $\xi_m l$ для $a = -0.1$, $\rho_{0a}/\rho_{0*} = 0.5$, $\rho_{1a}/\rho_{1*} = 0.02$, $\xi_s/\xi_m = 0.2, 1.8$ (криві 1,2), $\beta_E = 1$, $\beta_\nu = 0.5$ (тут a – параметр, що характеризує вплив густини домішок на густину скелету). Штрихові лінії відповідають шару без домішки.

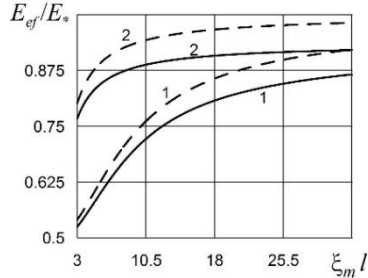


Рис. 1

Залежність $E_{ad} = |E_{ef} - E'_{ef}| / E'_{ef}$ (E'_{ef} – модуль Юнга бездомішкового шару) від параметрів β_E, β_ν для $\nu_* = 0.33$, $\rho_{0a}/\rho_{0*} = 0.5$, $\rho_{1a}/\rho_{1*} = 0.02$, $a = -0.1$, $\xi_s/\xi_m = 0.6$, $\xi_m l = 3, 6, 20$ (криві 1–3) наведено на рис. 2, 3. На рис. 2 взято $\beta_\nu = 0$, а на рис. 3 прийнято $\beta_E = 1$.

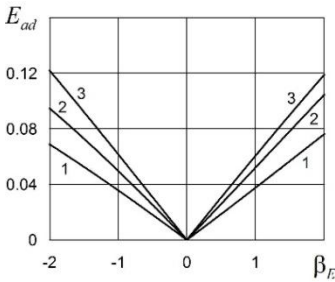


Рис. 2

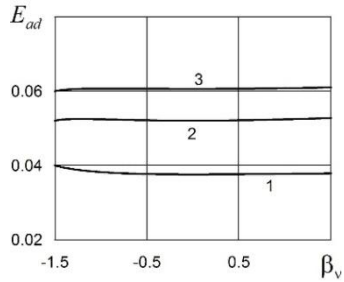


Рис. 3

Відзначаємо зростання впливу домішок зі збільшенням параметра β_E в області $\beta_E > 0$ і практичну незмінність значення E_{ad} зі зміною параметра β_ν .

1. *Bozhenko B., Nahirnyj T., Tchervinka K.* To modeling admixtures influence on the size effects in a thin film // *Math. model. and comput.* – 2016. – **3**, No. 1. – P. 12–22.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // *Int. J. Eng. Sci.* – 2015. – **91**. – P. 49–62.

ON THE MODELLING OF THE ADMIXTURE EFFECT IN THE ELASTIC MODULI

Within the framework of the model of locally heterogeneous solid solution, an approach is presented that allows to take into account the admixtures effect on Young's modulus and Poisson's ratio. The approach is based on the dependence of the local elastic moduli on the skeleton density. The regularities of the effects are studied on the example of the layer.

УДК 393.3

КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КУЛЬ

Олександр Григоренко¹, Ігор Лопа²

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ;

² Національний транспортний університет, м. Київ

Розглянуто задачу про власні неосесиметричні коливання неоднорідної порожнистої п'єзокерамічної кулі. Матеріал кулі може мати два типи неоднорідності: куля є шаруватою, або виготовленою з функціонально градієнтного матеріалу. Внутрішня та зовнішня поверхні кулі є вільними від механічних навантажень та вкритими тонкими короткозамкненими електродами. Компоненти вектора розв'язку шукаємо у вигляді розвинення у ряди за сферичними функціями:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cccc} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} & \Phi \\ u_r & u_\theta & u_\varphi & D_r \end{array} \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda T_r^k(r) & \lambda T_{r\theta}^k(r) & \lambda T_{r\varphi}^k(r) & h \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_0}} \Phi^k(r) \\ hu_r^k(r) & hu_\theta^k(r) & hu_\varphi^k(r) & \sqrt{\epsilon_0 \lambda} D_r^k(r) \end{array} \right\} S_n^m(\theta, \varphi) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

Такий вибір вектора розв'язку дозволяє перейти від вихідної задачі у частинних похідних до крайової задачі зі змінними коефіцієнтами у звичайних диференціальних рівняннях

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R},$$

з крайовими умовами

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = 0.$$

Для розв'язання отриманої крайової задачі застосовано стійкий метод дискретної ортогоналізації. Наведено результати чисельного аналізу даної задачі. Досліджено вплив фактора неоднорідності на динамічні та кінематичні характеристики власних коливань кулі.

OSCILLATION OF INHOMOGENIOUS HOLLOW PIEZOCERAMIC SPHERES

A problem on the nonaxisymmetric natural vibrations of a hollow inhomogeneous piezoceramic sphere is considered basing on the three-dimensional electroelasticity theory.

Separation of variables and series of the components of the mechanical and electric displacements were used. As a result, the original three-dimensional problem, which was governed by partial differential equations with variable coefficients, is reduced to a boundary-value problem governed by the ordinary differential equations. An inhomogeneous boundary-value problem is obtained for the case of forced vibrations. This problem is solved by a stable discrete-orthogonalisation method. The influence of the geometric and electric parameters on the kinematic (mechanical displacement and electrostatic potential) and dynamic (mechanical stress and electric displacement) characteristics was analyzed. Different variants of polarized piezoceramic materials are considered. Once more significant attention is paid to validation of the reliability of the results obtained by numerical calculations.

УДК 539.3

ПЛОСКА ПСЕВДОСТАТИЧНА ЗАДАЧА ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Наталя Вайсфельд, Зінаїда Журавльова

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, м. Одеса

Розглянуто плоску півплощину $y > 0$ з поро пружного матеріалу. На грані $y = 0$ діє навантаження інтенсивності $\ell(x)$ та виконуються умови осушення [1]:

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = \ell(x)\theta(t), \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0, \quad p \Big|_{y=0} = 0. \quad (1)$$

Тут $p(x, y, t)$ – тиск рідини, що знаходиться у порах, $\sigma_y(x, y, t)$, $\tau_{xy}(x, y, t)$ – нормальне та дотичне напруження твердого каркасу відповідно, $\theta(t)$ – функція Хевісайда.

Початкову умову визначаємо за припущення, що на початку навантаження рідина не може залишати півплощину:

$$\left(\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + S_p p \right) \Big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Тут α – коефіцієнт Біо, S_p – запам'ятованість простору пор.

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини усередині півплощини, що задовільняють умови (1) – (2) та рівняння виду [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha}{G} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) - \frac{S_p}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $u(x, y, t) = u_x(x, y, t)$, $v(x, y, t) = u_y(x, y, t)$ – переміщення твердого каркасу, $\kappa = 3 - 4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, k – коефіцієнт проникності.

Вихідну задачу (1) – (3) зводимо до одновимірної перетворенням Лапласа з параметром s за часом t та повного нескінченного перетворення Фур'є з параметром γ за змінною x . Одновимірну задачу в просторі трансформант сформульовано у векторному вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{I} \bar{y}_{s\gamma}''(y) - \mathbf{R} \bar{y}_{s\gamma}'(y) + \mathbf{P} \bar{y}_{s\gamma}(y) = 0, \\ (1 - \mu) v'_{s\gamma}(0) - i\gamma \mu u_{s\gamma}(0) = \frac{1 - 2\mu}{2G} \ell_{s\gamma}, \\ u'_{s\gamma}(0) - i\gamma v_{s\gamma}(0) = 0, \quad p_{s\gamma}(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Тут \mathbf{I} – одинична матриця, $\bar{y}_{s\gamma}(y) = \begin{pmatrix} u_{s\gamma}(y) \\ v_{s\gamma}(y) \\ p_{s\gamma}(y) \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2i\gamma}{\kappa - 1} & 0 \\ \frac{2i\gamma}{\kappa + 1} & 0 & \frac{\alpha}{G} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \\ 0 & \frac{\alpha s}{k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\gamma^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} & 0 & \frac{\alpha i\gamma}{G} \\ 0 & -\gamma^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} & 0 \\ \frac{\alpha s i\gamma}{k} & 0 & -\gamma^2 - \frac{s S_p}{k} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок задачі (4) будується за допомогою апарату матричного диференціального числення [3]. У результаті отримано точний розв'язок вихідної задачі.

1. Cheng A. H.-D. Poroelasticity / Hassanizadeh S.M. (ed.) // Theory and applications of transport in porous media. – Springer, 2016. – 27. – 877 p.
2. Verruijt A. An introduction to soil dynamics / Bear J. (ed.) // Theory and applications of transport in porous media. – Springer, 2010. – 24. – 433 p.
3. Понов Г. Я. Точные решения некоторых красивых задач механики деформируемого твёрдого тела. – Одесса: Астропринт, 2013. – 424 с.

PLANE PSEUDO-STATIC PROBLEM OF POROELASTICITY FOR A SEMI-PLANE

A plane pseudo-static problem of poroelasticity for a semi-plane is solved with the help of integral transforms method and matrix differential calculation. The exact solution of the problem was derived.

УДК 622.831:622.267.5

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ БЕЗПЕКИ ГІРНИЧИХ РОБІТ У ВУГІЛЬНИХ ШАХТАХ

Анатолій Булат, Олександр Круковський, Вікторія Круковська

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, м. Дніпро

Вуглепородний масив є багатофазною системою, що складається з твердого скелету та флюїдів, які містяться в тріщинно-поровому просторі. Втручання призводить до порушення рівноваги цієї системи і ініціює розвиток деформаційних і фільтраційних процесів. Їх перебіг відбувається одночасно зі взаємним впливом: деформування порід призводить до формування проникної області навколо гірничих виробок, зміна тиску флюїдів і зміна властивостей порід при зволоженні впливають на напружений стан. Тому при дослідженні багатьох аспектів безпеки ведення гірничих робіт необхідно розглядати не окремі процеси, а їх сукупність.

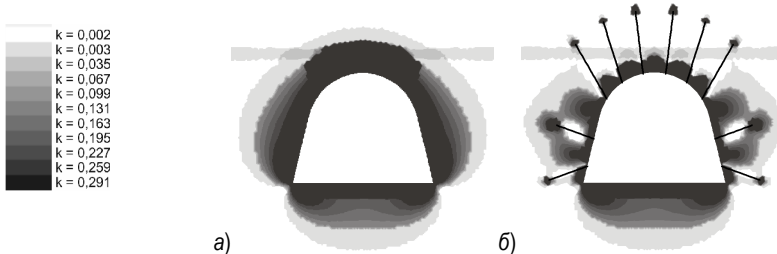


Рис. 1. Проникність порід навколо виробки а) з рамним та б) з анкерним кріпленням

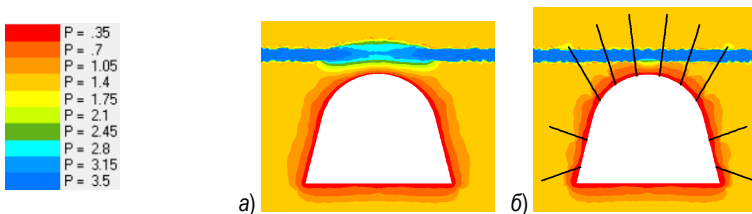


Рис. 2. Тиск води, виробка а) з рамним та б) анкерним кріпленням

В ІГТМ НАН України із застосуванням чисельних методів моделювання зв'язаних процесів вирішуються наступні проблеми:

- проведення і підтримка виробок в складних умовах (газоносні, обводнені (рис. 1, 2) та викидонебезпечні вугільні пласти і породи) [1-3];
- прогнозування газовиділення і водопритливів при проведенні гірничих виробок і веденні очисних робіт (в тому числі при високих швидкостях

посування лави та поблизу тектонічних порушень);

- забезпечення безпеки ведення гірничих робіт за газовим фактором і за газодинамічними явищами [4];
- забезпечення безпеки при гасінні підземних пожеж (фільтрація пожежних газів крізь бар'єрні цілики) [5];
- корозійне руйнування бетонних споруд під впливом шахтних вод [6];
- застосування технологічних впливів на масив (дегазація вуглепородного масиву і видобуток метану, нагнітання води у вугільні пласти, установка сталевих та ін'єкційних анкерів, вибух шпурових зарядів під час буровибухового способу проведення виробок) [7, 8].

1. Булат А.Ф., Круковская В.В. Компьютерное моделирование фильтрации метана в подработанном горном массиве в трехмерной постановке // Геотехническая механика. – 2005. – 57. – С. 3– 12.
2. Krukovska V.V., Vynohradov Y. Water stability influence of host rocks on the process of water filtration into mine working with frame and roof-bolting support // Essays of Mining Science and Practice 2019. E3S Web of Conferences, 2019. – 109. – 00041.
3. Krukovskiy O., Krukovska V.V., Wen Zhang. Outburst cavity formation in the working face driven along the outburst-prone coal seam // II International Conference Essays of Mining Science and Practice 2020. E3S Web of Conferences, 2020. – 168. – 00052.
4. Krukovska V.V. Numerical analysis of influence of coal bed moisture on outburst hazard // Science and society, patterns and trends of development: Abstr. XVI Int. Scientific and Practical Conference, 2021. – P. 233– 236.
5. Круковский А.П., Круковская В.В. Напряженное состояние и фильтрационная проницаемость барьерных целиков вблизи изолированного пожарного участка // Геотехническая механика. – 2018. – 142. – С. 3–12.
6. Skipochka S., Krukovskaya V. Grebenyuk S. Investigation of the Deepened Concrete Constructions State in the Process of Operation of Mine Water Spillway // 22nd World Mining Congress, 2011. – I. – P. 367– 377.
7. Bulat A.F., Krukovskiy O.P., Krukovska V.V., Zberovskiy V.V. Simulation of coal deformation and two-phase fluid filtration during water injection in coal seams with different injection techniques // International Conference on the Cooperation and Integration of Industry, Education, Research and Application, 2020. – P. 81–85.
8. Круковская В.В., Круковский А.П. Численное моделирование связанных процессов, происходящих при нагнетании упрочняющего состава в трещиноватый массив с помощью инъекционных анкерів // Геотехническая механика, 2019. – 149. – С. 100–10.

THE SOLVING OF COUPLED PROBLEMS ON ENSURING THE MINING SAFETY IN COAL MINES

When studying many aspects of mining safety, it is necessary to consider the complexity of physical and technological processes. At IGTM NAS of Ukraine, using numerical methods for simulation of coupled processes, the following problems are solved: driving and supporting mine workings in difficult geological conditions; forecasting gas and water inflows; ensuring the safety of mining operations by the gas factor, by gas-dynamic phenomena, when extinguishing underground fires; destruction of concrete structures under the influence of mine water; using of technological influences on the coal-rock massif.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ ТРІЩИНИ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Олександр Михаїл, Алла Шевельова, Володимир Лобода

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

Вивчається плоска деформація електропровідної тріщини між двома п'єзоелектричними півпросторами. Біматеріал є поляризованим у паралельному до берегів тріщини напрямку ортогонально до її фронту і навантажений віддаленими нормальними та зсувними напруженнями та електричним полем, співнаправленим з напрямом поляризації матеріалів. Вважається, що електромеханічні поля не змінюються вздовж осі координат, співнаправлених з фронтом тріщини. Використовуються спеціальні подання електромеханічних величин за допомогою кусково-аналітичних функцій, формулюється задача лінійного спряження, розв'язок якої вказує на осцилюючу особливість у вершинах тріщини. Для усунення цієї особливості на продовженні тріщини вводиться зона передруйнування, у якій приймається неперервність нормального напруження і переміщення та стрибок дотичного переміщення при постійному зсувному напруженні τ_s . Для цього випадку формулюються комбінована крайова задача Діріхле – Рімана та задача Гільберта, для яких знаходяться аналітичні розв'язки. Виведено аналітичні вирази для конкретних механічних та електричних параметрів. Довжина зони передруйнування знаходиться з необхідних додаткових умов, виконання яких призводить до трансцендентного рівняння та забезпечує плавне закриття тріщини. Розкриття тріщини, коефіцієнти інтенсивності зсувного напруження та електричного поля в правій вершині зони передруйнування, а також довжина цієї зони знаходяться для різних комбінацій матеріалів, різних навантажень та різних величин зсувного напруження в зоні передруйнування і представляються у вигляді таблиць та графіків.

THE PRE-FRACTURE ZONE MODEL FOR AN ELECTRICALLY CONDUCTIVE CRACK IN A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL

An electrically conductive crack at the interface of two piezoelectric half-spaces is considered. The direction of the materials polarization and the external electric fields are parallel to the crack faces. The shear pre-fracture zone is introduced at the crack continuation. The problem is reduced to the combinations of Dirichlet-Riemann and Hilbert problems which are solved analytically. The pre-fracture zone length and other required fracture mechanical parameters are found.

УДК 519.681.5+539.3

ДЕЯКІ ЗАГАЛЬНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНО СКЛАДНИХ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

Олександр Поліщук, Михайло Яджак

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Використання паралельних обчислень є одним із найважливіших факторів прискорення обчислювального процесу під час розв'язання алгоритмічно складних задач (АСЗ) [5]. До АСЗ будемо відносити перш за все ті, що потребують для свого розв'язання значних обчислювальних ресурсів, а також задачі, розв'язок яких потрібно одержувати в режимі реального часу [4]. Для ефективної реалізації паралельних методів та алгоритмів обчислень розвиваються, поширюються та стають загальнодоступними програмні (мови програмування високого рівня Fortran, Delphi, C, C++, C#, Java, Python, Go, Ada, Ruby, Eiffel тощо; сервіси паралельного програмування MPI, OpenMP, TBB, CSP, CUDA; бібліотеки виконання паралельних завдань) та апаратні (комп'ютери з багатоядерним процесором, кластерні системи, гібридні архітектури з використанням прискорювачів NVIDIA GPUs, співпроцесорів Intel Xeon Phi [3]; розподілені обчислювальні середовища [6]) засоби.

Задачі моделювання різноманітних процесів у механіці зв'язаних полів є алгоритмічно складними, оскільки зазвичай є нелінійними, тривимірними та залучають до розгляду об'єкти зі складною геометрією. Прикладами таких задач є задачі електромагнітотермомеханіки для моделювання термомеханічних процесів, задачі моделювання процесів деформування елементів конструкцій за інтенсивних термосилових навантажень, задачі аналізу напружено-деформованого стану плоских середовищ з включеннями різної жорсткості тощо. Нелінійність, складна геометрична форма досліджуваних об'єктів та їх включень суттєво утруднюють використання аналітичних підходів під час розв'язання таких задач, тому потрібно застосовувати універсальні чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів або метод скінченних різниць (МСР). Однак, поряд із розробкою та застосуванням ефективних послідовних обчислювальних схем потрібно широко використовувати і можливості розпаралелювання обчислень.

Розглянемо доволі загальні підходи до розпаралелювання, які ґрунтуються на паралелізмі за даними, а також геометричному та функціональному паралелізмі. Підхід до розпаралелювання на підставі паралелізму даних називається декомпозицією за даними. Він є доволі тривіальний і може бути використаний у разі, коли нам потрібно розв'язати одну і ту ж задачу при різних наборах вхідних даних. Такий підхід дозволяє за час розв'язання одного варіанту задачі одержати розв'язок для декількох її варіантів. Геометричним па-

ралелізмом володіють, наприклад, задачі, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних [1]. Вони зазвичай розв'язуються з допомогою МСЕ або МСР. Для дискретних аналогів цих задач характерними є локально-обмежені взаємодії між вузлами сітки, що покриває область розв'язання. А це дозволяє розбити цю область на підобласті і обчислення в кожній з них "доручити" окремому процесору (ядру, обчислювальному вузлу). Підхід до розпаралелювання на основі геометричного паралелізму називається декомпозицією області розв'язання і є ефективним за умови, що обчислювальна складність кожної із підзадач є приблизно однаковою. Функціональний паралелізм – це паралелізм груп операцій, об'єднаних за функціональною ознакою. Підхід до розпаралелювання на підставі функціонального паралелізму називається функціональною декомпозицією. Тривіальним прикладом функціональної декомпозиції є декомпозиція задачі на чотири такі підзадачі: введення початкових даних, опрацювання їх, виведення результатів, візуалізація результатів. Паралелізм тут досягається унаслідок одночасного виконання чотирьох підзадач і створення "конвеєра" між ними.

Зазначимо, що більшість задач моделювання зводяться до розв'язання СЛАР великої розмірності з розрідженими матрицями. Розроблено цілу низку ефективних методів, які використовують багаторівневу модель паралельних обчислень, для розв'язання таких систем на сучасних суперкомп'ютерах [2].

1. Горбаль С.И., Яджак М.С. Численное решение уравнений переноса зарядов в полупроводниковых приборах // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – № 34. – С. 89–94.
2. Попов О.В. Комп'ютерні методи дослідження математичних моделей з розрідженими структурами даних. Автореферат дисертації ... д. ф.-м. н., спеціальність 01.05.02. – К.: Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2021. – 32 с.
3. Список суперкомп'ютерів світу. – Режим доступу: www.top500.org.
4. Яджак М.С. Високопаралельні алгоритми та засоби для розв'язання задач масових арифметичних і логічних обчислень. Автореферат дисертації ... д. ф.-м. н., спеціальність 01.05.03. – К.: КНУ імені Тараса Шевченка, 2009. – 33 с.
5. Яджак М.С., Поліщук О.Д., Тютюнник М.І. Оптимізація методики комплексного оцінювання складних систем на підставі паралельних обчислень // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – 6, № 4. – С. 347–356.
6. Polishchuk O., Polishchuk D., Tyutyunyk M., Yadzhak M. Big data processing in complex hierarchical network systems II: computer environments and parallelization // AASCIT Communications. – 2016. – 3, No. 3. – P. 119–124.

SOME GENERAL APPROACHES TO SOLVING ALGORITHMICALLY COMPLEX SIMULATION PROBLEMS IN THE MECHANICS OF COUPLED FIELDS

An overview of general approaches to the numerical solution of problems of modeling processes and phenomena in the mechanics of coupled fields based on the use of parallel calculations is proposed. These approaches can be used to solve other algorithmically complex problems of science and technology.

УДК 539.3:536.424

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ФАЗОВИЙ СКЛАД І НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІМЕТАЛЕВОЇ КОНСОЛІ, ОДНОМУ З ШАРІВ ЯКОЇ ПРИТАМАННА ПАМ'ЯТЬ ФОРМИ

Володимир Асташкін¹, Олексій Онишко¹, Богдан Боженко², Аніда Станік-Беслер²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

² Політехніка Опольська, м. Ополье, Республіка Польща

В сучасній техніці широко застосовують деталі машин і механізмів, виготовлені на основі сплавів, в яких у певному діапазоні температур відбувається фазове мартенситне перетворення. Такі матеріали в літературі прийнято називати сплавами з пам'яттю форми. Раніше [1] за участю авторів з використанням методів механіки суцільного середовища і термодинаміки нерівноважних процесів, а також результатів експериментальних матеріалознавчих досліджень, розроблено математичну модель кількісного опису термомеханічних процесів у тілах з таких матеріалів. У даній роботі з використанням цієї моделі досліджено напружений стан і зміну фазового складу двошарової консолі, в якій для матеріалу одного з шарів притаманний ефект пам'яті форми.

Розглянуто біметалеву консоль товщини $2h$ ($-h \leq y \leq h$), і довжини ℓ ($0 \leq x \leq \ell$) що знаходиться під дією згинальної сили P , прикладеної до кінця консолі. Один із шарів консолі (шар I – область $-h \leq y \leq y_0$) виготовлений зі сплаву з пам'яттю форми, а другий (шар II – область $y_0 \leq y \leq h$) – із конструкційної сталі. Приймається, що у початковому стані матеріал шару I перебуває в аустенітній фазі (відносний вміст мартенситу $\Xi = 0$). Температура T консолі вважається постійною.

За розглядуваного стану в частині $-h \leq y \leq y_1$ шару I відбувається фазове перетворення і відповідно утворюється суміш аустеніту і мартенситу. В частині $y_1 \leq y \leq y_0$ фазовий склад залишається незмінним ($\Xi = 0$). При цьому розподіл напружень в консолі описується виразом

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{ED_2x}{(1+\nu)D_1\ell} b_2(y-y_1), & -h \leq y \leq y_1, \\ \frac{Ex}{(1-\nu^2)\ell} b_1(y-y_1), & y_1 \leq y \leq y_0, \\ \frac{E_0x}{(1-\nu_0^2)\nu} (b_0(y-y_0) + b_1(y_0-y_1)), & y_0 \leq y \leq h. \end{cases}$$

Після зняття навантаження ($P = 0$) фазовий стан, досягнутий в шарі I на попередньому етапі, не змінюється. Тому в консолі виникають залишкові напруження

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \left((a_2^* + b_2^* y) + \frac{D_3}{D_1} b_2 (y - y_1) \right) \frac{x}{\ell}, & -h \leq y \leq y_1, \\ \frac{E}{1-\nu^2} (a_1^* + b_1^* y) \frac{x}{\ell}, & y_1 \leq y \leq y_0, \\ \frac{E_0}{1-\nu_0^2} (a_0^* + b_0^* y) \frac{x}{\ell}, & y_0 \leq y \leq h. \end{cases}$$

На основі отриманих аналітичних розв'язків виконано числові розрахунки розподілу залишкових напружень по товщині консолі, один з шарів якої виготовлений із сталі 60Г, а другий – із нікеліду титану. Розглянуто різні співвідношення між товщинами шарів.

Виявлено істотний вплив фазового перетворення на розподіл залишкових напружень за товщиною консолі. Результати проведених досліджень можуть бути використані при розробці режимів експлуатації двошарових функціональних елементів машин і механізмів, одна зі складових частин яких виготовлена з матеріалу з пам'яттю форми.

1. Асташкин В., Боженко Б., Будз С., Оньшико А. Моделирование с использованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций термомеханических процессов в твердых телах при технологическом нагреве // Projektowanie procesów i systemów technologicznych. – Lublin: Societas Scientarium Lublinensis, 2003. – С. 164–170.

STUDY OF THE INFLUENCE OF FORCE LOADING ON THE PHASE AND STRESS STATE OF A BIMETAL CONSOLE, ONE OF THE LAYERS OF WHICH EXHIBITS THE SHAPE MEMORY

On the basis of a model for quantitative description of a thermomechanical behavior of shape memory materials built with using the methods of solid mechanics and thermodynamics of non-equilibrium processes, the phase composition and stress state of two-layer console made of steel and nitinol under action of the bending force and after its removal is analyzed. The calculations made for the various ratios between the thicknesses of layers. It is shown that under such conditions there occurs variable thickness distribution of martensite in the layer, resulting in the formation of inhomogeneous residual stress-strained state.

УДК 539.374:621.78

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОНТАКТНИХ БІМЕТАЛЕВИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Тетяна Бардин¹, Богдан Дробенко²

¹Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів;

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Засоби математичного моделювання процесів деформування контактних термоперетворювачів за дії температурного навантаження застосовують для визначення їхніх нормативних метрологічних характеристик. Зокрема дослідження температурних напружень і пов'язаних з ними деформацій має вирішальне значення для адекватного функціонування біметалевого термометра в контактній термометрії. Внаслідок різних фізико-механічних характеристик шарів, передусім коефіцієнтів температурного розширення, біметалевий термоперетворювач при нагріванні деформується (переважно згинається). За таких обставин напруження в біметалевих елементах під час експлуатації можуть досягати значної величини, і процес деформування може бути суттєво нелінійним.

Розглянуто біметалевий термочутливий елемент як двошарову смугу з прямолінійним у вихідному стані поперечним перерізом. Досліджено процес деформування смуги за її рівномірного нагрівання (методика легко поширюється на стрижневі, пластинчаті та оболонкові моделі). Нелінійну залежність зміни кривини шару від температури нагрівання t можна подати у вигляді [1]:

$$\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} = K_t(\beta_0, \beta_t) \frac{3}{2} \frac{\beta_1 - \beta_2}{hK_{12}} t, \quad (1)$$

$$\beta_0 = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{B^2 E'}{RhE''}}, \quad (2)$$

$$\beta_t = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{B}{h} \sqrt{\frac{3E' \beta_1 - \beta_2}{2E'' K_{12}} t}, \quad (3)$$

де β_1, β_2 – коефіцієнти температурного розширення; коефіцієнти Пуассона шарів вважаємо рівними ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$); коефіцієнт K_t визначається для різних значень початкової кривини і може подаватись у вигляді номограми; коефіцієнт

$$K_{12} = 1 + \frac{(1-en^2)^2}{4en(1+n)^2} \left(e = \frac{E_2}{E_1}, n = \frac{h_2}{h_1} \right)$$

є функцією відношення модулів пружності E_1 , E_2 і товщин h_1 , h_2 шарів. Відношення приведених модулів пружності для двошарової смуги, яка присутня у виразах (2) і (3) при $v' = v'' = v$ визначається формулою [1]

$$\frac{E'}{E''} = \frac{(1+n)^2(1+en)}{4(1+en^3) - 3\frac{(1-en^2)^2}{1+en}}$$

Кожній початковій кривині смуги (визначається параметром β_0) відповідає своя нелінійна характеристика згину; малим значенням $\beta_t \ll 1$ відповідає лінійне наближення. При малих переміщеннях коефіцієнт K_t у формулі (1) змінюється у межах від $K_t = 1$ до $K_t = 1 + v \approx 1,3$.

Для прямої смуги ($\beta_0, \beta_t \ll 1$) $K_t = 1$ і співвідношення (1) збігається з класичною формулою [2]. За таких обставин співвідношення для розглядуваної смуги збігаються з відповідними для пластини. У результаті дії моменту M^t , прикладеного до краю, залежність (1) має вигляд $\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} = \frac{M^t}{(1+v)D}$.

Викривлення поперечного перерізу обмежене зоною крайового ефекту, яка охоплює тим меншу частину ширини смуги, чим більше значення параметра β_0 .

Температурна деформація, яка має місце у даному випадку нелінійності, стосується випадку, коли довжина смуги велика порівняно з шириною. Якщо вони одного порядку, то нелінійність проявляється більше. Квадратна пластинка за змінного по товщині коефіцієнта температурного розширення або дії моменту на всьому краю, може навіть втрачати стійкість. Кривина в площинах симетрії однакова лише до деякої межі. Перевищення критичної зміни температури викликає перехід пластини до форми, близької до циліндричної.

1. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. – Москва: Наука, 1976. – 376 с.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 322 с.

THE STRESS-STRAIN STATE OF CONTACTING BIMETALLIC THERMAL TRANSDUCERS

An approach to explore the nonlinear stress-strain state in bimetallic thermal transducers taking into account the changes of temperature is proposed. A bimetallic thermosensitive element is considered as a two-layer strip with a rectilinear cross-section in the initial state. The results can be used for the development and creation of bimetallic thermal transducers of various configurations and types of measure.

УДК 539.3: 539.214: 699.81: 536.24: 518

ОЦІНЮВАННЯ ВОГNETРИВКОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Богдан Дробенко¹, Марта Марцінків²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м Львів;

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів;

Сучасні програми дослідження вогнетривкості будівельних конструкцій за умов пожежі формують переважно на основі окремих експериментів за реальних масштабних пожеж та великої кількості тестів і випробувань у спеціальних печах, в яких температуру витримують відповідно до введених стандартів. Однак, можливості дослідження поведінки конструкцій за масштабних пожеж є доволі обмеженими і коштовними, а під час експериментів у печах, розглядають лише деякі параметри окремих елементів. У переважній більшості досліджень в області вогнетривкості конструкцій розглядають поведінку структур і елементів будівель лише на стадіях розвитку пожежі. Оскільки механічні й структурні властивості елементів конструкцій залежать від історії навантаження, надзвичайно важливо дослідити напружено-деформований стан будівлі і під час охолодження нагрітих елементів, а також після гасіння. Тому виникає практична потреба у розробці математичних моделей та відповідного програмного забезпечення для кількісного опису й оцінки вогнетривкості конструкцій за різних сценаріїв розгортання пожежі.

На основі рівнянь нелінійної термомеханіки за різних модельних припущень (просторово тривимірні, в межах плоскої задачі, з використанням моделей балок) запропоновано загальний підхід до математичного й числового моделювання поведінки конструкцій за умов пожежі. Розподіли температури в елементах конструкцій під час пожежі й наступного охолодження описує нестационарне рівняння теплопровідності. За відомими температурними розподілами на другому етапі розв'язування задачі визначаємо напружено-деформований стан конструкційних елементів з використанням загальних співвідношень неізотермічної термопружно-пластичності за допомогою методу скінченних елементів.

EVALUATION OF THE FIRE RESISTANCE OF STRUCTURAL ELEMENTS BY MEANS OF THE MATHEMATICAL MODELING

A numerical model is developed for determination of the stress state in building structures during the entire stage of fire exposure, including loading at ambient temperature, heating, cooling to the ambient temperature and post-fire loading.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАПОВІЛЬНЕНОГО РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ДОВГОТРИВАЛОГО ЕКСПЛУАТУВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ДЕГРАДАЦІЇ ЇХ МАТЕРІАЛІВ

Олександр Андрейків¹, Ірина Долінська², Святослав Настасяк¹

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;

²Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів

Втрата міцності і вичерпання ресурсу елементів конструкцій довготривалого експлуатування відбувається внаслідок їх заповільненого руйнування, яке зумовлюють силові і фізико-хімічні чинники [1]. Заповільнене руйнування матеріалів відбувається за двома механізмами: об'ємне пошкодження – зміна структури (деградація матеріалу) за дії фізико-хімічних чинників (висока температура, корозійно-наводнювальні середовища тощо) і локальне руйнування – зародження та поширення тріщин, в тому числі, і за впливу фізико-хімічних чинників. Сьогодні широко розвинуті методи прогнозування залишкового ресурсу елементів конструкцій за їх локального руйнування (методи визначення періоду докритичного росту тріщин). Методи, які б враховували об'ємне пошкодження – деградацію матеріалів розвинуті ще не достатньо.

Довготривале експлуатування конструкційних матеріалів за дії силових і фізико-хімічних чинників передувє їхній деградації, яка супроводжується зміною вихідної мікроструктури, а відтак зміною фізико-механічних характеристик. Здебільшого внаслідок деградації ці характеристики понижуються, що негативно впливає на міцність і довговічність елементів. Водночас деградація інтенсифікується впливом як високих температур, так і корозійно-наводнювальних середовищ, особливо воденьвмісних, коли водень дифундує на поверхню матеріалу і проходить його обезвуглечення. Таким чином, для більш надійного прогнозування ресурсу елементів конструкцій необхідно враховувати деградацію матеріалів під час експлуатування.

У даній роботі створено загальний енергетичний підхід для розроблення методів прогнозування залишкового ресурсу елементів конструкцій довготривалого експлуатування з урахуванням деградації їх матеріалів. В основу методів покладено побудову математичних моделей (диференціальні рівняння з початковими і кінцевими умовами), які моделюють кінетику заповільненого руйнування (поширення тріщини) з урахуванням зміни в часі фізико-механічних характеристик матеріалів під час довготривалого експлуатування. При цьому побудова диференціальних рівнянь базується на раніше сформульованому енергетичному підході [2, 3], в основу якого покладено перший закон термодинаміки і підходи механіки руйнування. Згаданий закон застосовується для елементарного акту заповільненого руйнування, тобто одиничного стрибка тріщини. Тому в основу методу визначення залишкового ресурсу

елемента конструкції покладено баланс енергетичних складових і роботи зовнішніх сил під час стрибка тріщини, як елементарного акту руйнування і, відповідно, баланс швидкостей зміни цих складових. У даному випадку враховуються дві енергетичні складові: енергія руйнування та енергія деформування. Фізико-механічні характеристики матеріалів входять в рівняння як функції, залежні від часу.

На основі такого загального підходу розроблено низку методів для розрахунку залишкового ресурсу елементів теплової і атомної енергетики, зокрема, труб паропроводів і коліс парових турбін, а також магістральних нафтогазопроводів з урахуванням їх дефектності і деградації матеріалів. При цьому на основі результатів експериментальних досліджень матеріалів труб і елементів турбін різного терміну експлуатації побудовано аналітичні моделі зміни їх міцнісних і втомних характеристик з часом. Розрахунки проводили для труб нафтогазопроводів зі сталей X52, X60, X70 з поверхневими тріщинами за дії довготривалого постійного тиску газу в газопроводах, змінного в часі тиску в нафтопроводах, наводнювання, ґрунтової корозії з урахуванням деградації в часі їх матеріалів. Встановлено, що залишкова довговічність труб значно скорочується зі збільшенням початкової глибини тріщини і часу її експлуатації.

1. *Андрейків О.Є., Скальський В.Р., Долінська І.Я.* Заповільнене руйнування матеріалів за локальної повзучості. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. – 400 с.
2. *Andreikiv O.E., Sas N.B.* Strength of thin-walled structural elements with cracks under the conditions of creep // *Materials Science*. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 174–182.
3. *Andreikiv O.E., Dolins'ka I.Ya., Yavors'ka N.V.* Estimation of the periods of initiation and propagation of creep-fatigue cracks in thin-walled structural elements // *Materials Science*. – 2011. – **47**, No. 3. – P. 273–283.

SIMULATION OF DELAYED FRACTURE OF STRUCTURAL ELEMENTS WITH LONG-TERM EXPLOITATION TAKING INTO ACCOUNT THE MATERIAL DEGRADATION

A general approach for the development of forecasting methods of the residual life-time of constructures elements of long-term operation is formulated by taking into account the defects and degradation of materials. The application of the methods is given on the example of calculating the residual life-time of pipes of steam pipelines and wheels of steam turbines, as well as the main oil and gas pipelines, taking into account the degradation of their materials during long-term operation.

УДК 539.3: 539.214: 518: 621.311

ОЦІНЮВАННЯ МІЦНОСТІ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНОГО РЕСУРСУ ЕЛЕМЕНТІВ ЕНЕРГООБЛАДНАННЯ З УРАХУВАННЯМ ДЕГРАДАЦІЇ МАТЕРІАЛУ, ПОШКОДЖЕНЬ І ТЕХНОЛОГІЙ РЕМОНТУ

Богдан Дробенко, Степан Будз

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м Львів

Проблема продовження терміну експлуатації елементів і вузлів енергетичного обладнання є однією з найважливіших у сучасній вітчизняній енергетиці, оскільки значна частина елементів такого обладнання вже вичерпала свій паспортний ресурс, чи наблизилась до цієї межі. У зв'язку з цим постає проблема забезпечення надійності роботи енергообладнання, що відпрацювало гарантований на момент інсталяції термін, та збільшення його експлуатаційного ресурсу, під яким розуміють напрацювання об'єкта від початку експлуатації чи його відновлення після ремонту до досягнення ним граничного стану, регламентованого нормативно-технічною документацією.

Основним чинником вичерпання ресурсу елементів та вузлів енергообладнання є накопичення пошкоджень і розвиток тріщин в зонах конструктивних концентраторів напружень внаслідок циклічних навантажень, підвищеної температури, впливу корозійно активного робочого середовища, зміни міцнісних характеристик металу в процесі тривалої експлуатації. Оцінювання ресурсу таких елементів виконують шляхом визначення їх стану за рівнем накопичення пошкоджень металу, розрахунок якого є базою для визначення залишкового експлуатаційного ресурсу енергообладнання, можливостей та умов його подальшого використання. Кількісна оцінка накопиченої пошкодженості металу безпосередньо залежить від амплітуди коливань напружень під час циклічних режимів промислової експлуатації енергообладнання. Тому важливо якнайточніше визначити напружений стан і зони виникнення максимальних напружень в елементах енергообладнання під час експлуатації.

На сьогоднішній день потужним чинником вирішення зазначених проблем є сучасні засоби математичного й комп'ютерного моделювання процесів деформування твердих деформівних тіл за дії комплексного навантаження, розроблені на основі уточнених математичних моделей і числових методів їх розв'язування. Уточнення розрахункових моделей має два аспекти – геометричний та фізичний. Геометричний аспект передбачає виконання обчислень для тіл реальної форми, фізичний – пов'язаний з використанням розширених моделей опису механічної поведінки твердих тіл, які враховують можливість нелінійного деформування. У цій роботі уточнений аналіз напружено-деформованого стану енергообладнання здійснюється на основі співвідношень тривимірної теорії неізотермічної термопружно-пластичності з використан-

<http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.15.pdf>

ням методу скінченних елементів. Розроблене на цій основі програмне забезпечення дає змогу в стислі терміни провести весь процес оцінювання експлуатаційного ресурсу розглядуваного обладнання у віртуальному просторі і вийти на раціональні вирішення відзначених вище проблем.

Розроблену методологію дослідження напружено-деформованого стану елементів діючого енергетичного обладнання та отримання на цій основі кількісної оцінки їхнього залишкового експлуатаційного ресурсу, а також розроблення рекомендацій щодо виконання ремонтних робіт у них із метою подовження термінів їхньої експлуатації використано при перепризначенні термінів експлуатації котельних агрегатів низки діючих енергоблоків ТЕС, які вичерпали гарантований на момент інсталяції ресурс.

Основним елементом котлоагрегату енергоблоку ТЕС є барабан, експлуатаційний ресурс якого і визначає відповідний ресурс котлоагрегату. Усі інші елементи циркуляційного циклу котлоагрегату відносно легко замінюються. Тому для розглядуваних котлоагрегатів такі елементи як колектори, штуцери, екранні труби з експлуатаційними пошкодженнями розраховано на міцність і в разі, коли максимальні експлуатаційні напруження в них на пост-ремонтній стадії не перевищують допустимих, а результати візуального контролю, стан металу, його структура, твердість та інші характеристики є задовільними, ці конструкційні елементи вважали придатними до подальшої експлуатації. Досліджено експлуатаційну надійність барабанів котлоагрегатів, визначено оптимальні параметри ремонтних робіт з метою усунення пошкоджень. Визначено експлуатаційні напруження в барабанах за різних циклічних режимів роботи котлоагрегатів з урахуванням деградації металу і ремонтних втручань. На цій основі отримано оцінки додаткового експлуатаційного ресурсу барабанів шляхом визначення їхнього стану за рівнем накопиченої пошкоджуваності металу. Як наслідок, оцінено можливість їхньої подальшої експлуатації на чітко визначені терміни.

ASSESSMENT OF STRENGTH AND OPERATING RESOURCE OF ENERGETIC EQUIPMENT ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT THE MATERIAL DEGRADATION, DAMAGES AND REPAIR TECHNOLOGIES

An efficient approach for mathematical simulation of deformation processes in power equipment elements under in-service conditions is developed. The software, developed on the basis of 3D non-isothermal thermo-elastic-plasticity and finite element method, enables one to analyze, for short term, the mechanical behavior of power structural elements with damages or after repairs procedure under conditions modeling the in-service ones, and to obtain an expert evaluation of its safety margin. These data are used in deciding on the possibility of temporary prolongation of the operation life of power equipments.

УДК 539.3

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДНИХ КОНСТРУКЦІЙ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

Богдан Дробенко¹, Михайло Марчук¹, Микола Хом'як¹, Володимир Сіренко²,
Дмитро Клименко², Володимир Харченко²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м Львів;
²КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля, м. Дніпро

Оцінка експлуатаційного ресурсу тонкостінних конструкцій істотно залежить від точності й достовірності даних про напружено-деформований стан у них за умов експлуатації. Тому надзвичайно важливим є комп'ютерне моделювання процесів деформування таких конструкцій у рамках уточнених математичних моделей.

Тонкостінні конструкції часто мають складну геометричну форму. Внаслідок локального впливу геометричних концентраторів на напружено-деформований стан таких конструкцій кількісний опис процесів деформування в них в рамках теорій оболонок може призводити до значних відхилень отримуваних результатів від фактичних в околах різкої зміни геометричної конфігурації. Тому іноді варто розглядати тонкостінну конструкцію як тривимірне тверде тіло. При проектуванні тонкостінних конструкцій також важливо визначити руйнівне навантаження, що спонукає використовувати геометрично і фізично нелінійні математичні моделі.

З огляду на зазначене для оцінювання міцності тонкостінних конструкцій використано орієнтований на використання методу скінчених елементів варіант методики розв'язування геометрично нелінійних задач теорії пружно-пластичності в приростах на основі Лагранжевого підходу із застосуванням принципу віртуальних переміщень [1], відповідно до якого розв'язок базових рівнянь, що виражають рівновагу і умови сумісності тіла, отримуємо для дискретних моментів часу $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$. Усі змінні при цьому віднесено до початкової конфігурації тіла (за повного Лагранжевого формулювання), або конфігурації тіла, отриманої в момент часу t (за адаптованого формулювання), а прирости переміщень \mathbf{u} вузлів скінченно-елементного поділу тіла на кроці навантаження $[t, t + \Delta t]$ визначено із рівняння [1]

$$[\mathbf{K}] \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

де $[\mathbf{K}]$ і \mathbf{F} отримано шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих скінчених елементів вигляду:

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{V_0} [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^T [{}^t_0 \mathbf{C}] [{}^t_0 \mathbf{B}_L] d^0V + \int_{V_0} [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}]^T [{}^t_0 \mathbf{S}] [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}] d^0V; \quad (2)$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = {}^t_0 \mathbf{F} = \int_{V_0} [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^T [{}^t_0 \widehat{\mathbf{S}}] d^0V \quad (3)$$

за використання повного Лагранжевого формулювання і

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{V'} [{}^t \mathbf{B}_L]^T [{}^t \mathbf{C}] [{}^t \mathbf{B}_L] d^tV + \int_{V'} [{}^t \mathbf{B}_{NL}]^T [{}^t \boldsymbol{\tau}] [{}^t \mathbf{B}_{NL}] d^tV, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = {}^t \mathbf{F} = \int_{V'} [{}^t \mathbf{B}_L]^T [{}^t \widehat{\boldsymbol{\tau}}] d^tV \quad (5)$$

за адаптованого Лагранжевого формулювання. У цих залежностях $[\mathbf{B}_L]$, $[\mathbf{B}_{NL}]$ – матриці геометричних співвідношень теорії пружності в скінченно-елементному представленні (враховують відповідно лінійні й нелінійні члени); $[\mathbf{C}]$ – пружно-пластична матриця стану; $[\widehat{\mathbf{S}}]$ та $[\widehat{\boldsymbol{\tau}}]$ – матриці, скомпоновані з компонент тензорів Піоли-Кірхгофа 2-го роду та Коші [1] (лівий верхній індекс вказує на те, що змінні обчислені в момент часу t , а лівий нижній – що змінні віднесено до конфігурації в моменти часу 0, або t).

На цій основі розроблено відповідне програмне забезпечення, з використанням якого досліджено міцність ракетного двигуна й міцно-скріпленого з ним твердого палива на різних етапах циклу життя двигуна – зберігання, транспортування, монтажу двигуна, старту ракети та активної фази її польоту, а також паливних баків ракетноносія та типових соплових блоків ракетного двигуна.

Розроблено методологію дослідження міцності та визначення фактичних руйнівних навантажень конструкцій ракетної техніки за результатами комп'ютерного моделювання та неруйнівних експериментальних випробувань [2].

Результати досліджень і розроблене спеціалізоване програмне забезпечення використано в КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля при проектуванні елементів сучасної ракетної та ракетно-космічної техніки.

Дослідження виконані в рамках науково-технічного проекту НАН України (номер державної реєстрації 0120U104248).

1. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures Analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. – 1037 p.
2. *Марчук М.В., Сіренко В.М., Дробенко Б.Д.* Методологія визначення руйнівних навантажень на великогабаритні тонкостінні конструкції з урахуванням результатів неруйнівних випробувань // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2020. – Вип. 18. – С. 134–138.

COMPUTER SIMULATION OF DEFORMATION PROCESSES OF COMPLEX STRUCTURES OF ROCKET-SPACE EQUIPMENT

The stress-strain state of structures of complex geometric shape under pressure is studied within the framework of the model of a geometrically and physically non-linear three-dimensional solid.

УДК 539.3

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ЛІНЗОПОДІБНОГО ОТВОРУ В АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Михайло Саврук, Любов Онишко, Олексій Кваснюк

Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, м Львів

На основі розробленого єдиного підходу до розв'язування плоских та антиплоских задач теорії пружності та механіки руйнування ізотропних та ортотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами отримано залежності між коефіцієнтами концентрації напружень (ККН) у закругленій вершині напівнескінченного кутового вирізу та коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у відповідній гострій вершині для анізотропного тіла. Побудовано розв'язки задач про концентрацію напружень біля гострокутних отворів в анізотропній площині за поздовжнього зсуву на нескінченності. Розв'язок задач для анізотропної площини, послабленої отворами із закругленими вершинами мало-го радіуса кривини, одержано методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

Розглянуто анізотропне тіло з овальним отвором діаметром 2ℓ [1] (рис. 1). Контур L краю отвору складається зі симетричних дуг кола радіуса R , кінці яких гладко з'єднані між собою дугами кола радіуса ρ . Край отвору є вільним від зовнішніх зусиль, а на нескінченності задані зсувні напруження τ . Розв'язок задачі для тіла з двокутним лінзоподібним отвором з гострими вершинами отримано граничним переходом, коли $\rho \rightarrow 0$.

Задачу розв'язували методом суперпозиції, взявши потенціал напружень $\Phi_3(z_3)$, $z_3 = x + \mu_3 y$, $\mu_3 = \hat{\gamma}_3 + i\gamma_3^0$ – комплексний корінь характеристичного рівняння [2], у формі [1]

$$\Phi_3(z_3) = \tau + \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\gamma'(t_3)}{t_3 - z_3} dt_3, \quad (1)$$

де L_3 у площині z_3 відповідає овальному контуру L у площині $z = x + iy$.

Для знаходження $\gamma'(t_3)$ отримали СІР

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_3} K(t_3, t'_3) \gamma'(t_3) dt_3 + \frac{1}{\pi \ell} \int_{L_3} \gamma'(t_3) dt_3 = -\tau(t'_3), \quad t'_3 \in L_3,$$

де $t_3 = ((1 - i\mu_3)t + (1 + i\mu_3)\bar{t}) / 2$, $t_3 \in L_3, t \in L$, $K(t_3, t'_3) = \text{Re}((t_3 - t'_3)^{-1} dt'_3 / ds')$, $\tau(t'_3) = -\tau \text{Re}(dt'_3 / ds')$.

Концентрацію напружень у закругленій вершині A овального отвору L (схема на рис. 1а) знайдемо з використанням (1): $\tau_{sz}(A) = K_{III}^V R_{III}(\beta)(\rho)^{-\lambda_{III}} / \sqrt{2\pi}$. Тут s – дугова абсциса точки $t \in L$, λ_{III} – порядок особливості поля напружень у вершині анізотропного клина, $R_{III}(\beta)$ – коефіцієнт впливу закруглення

кутового вирізу на напруження на контурі L , який також залежить від форми контуру та пружних сталих анізотропного матеріалу, K_{III}^V – коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій вершині лінзоподібного отвору, який визначається за допомогою граничного переходу [1] $K_{III}^V = (\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi\rho^{\lambda_{III}}} \tau_{sz}(A))) / R_{III}(\beta)$.

Для $\gamma_3^0 = \gamma_3 / \chi$, $\hat{\gamma}_3 = (\gamma_3^2 - 1) \sin 2\alpha / 2\chi$, $\chi = (\gamma_3^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$, α – кут між віссю овалу та головною віссю ортотропії, $\gamma_3 = \sqrt{G_{13}/G_{23}}$, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву, наведено значення $k_A \varepsilon^{\lambda_{III}}$, $k_A = \tau_{sz} / \tau$, $\varepsilon = \rho / \ell$ (рис. 1a) та безрозмірних КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / (\tau \ell^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi})$ (рис. 1b) у гострих вершинах лінзоподібного отвору для кута розхилу $\beta = \pi / 12$ для різних α .

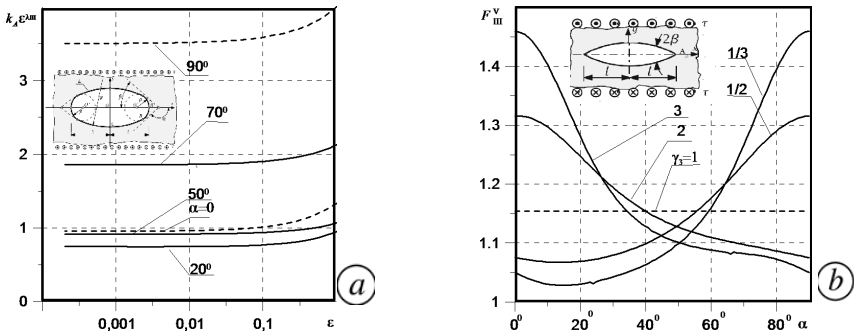


Рис. 1. Залежність $k_A \varepsilon^{\lambda_{III}}$ від відносного радіусу закруглення у вершині овального отвору ε для $\gamma_3 = 3$ за різної орієнтації волокон α (a) та F_{III}^V (b) від α

Штрихові лінії (рис. 1a) відповідають отворах розташованим вздовж головних напрямків ортотропії і добре узгоджуються з відомими даними [2]. Для орієнтації волокон $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$ отримаємо відомі значення [2] (рис. 1b). Відзначимо, що спостерігаються кути α , при яких відносні КІН не залежать від характеристик γ_3 .

1. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress concentration at notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
2. Саврук М.П., Онишко Л.Й., Кваснюк О.І. Розподіл напружень біля кутових вирізів в ортотропній пружній площині за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – 55, № 3. – С.7–16.

STRESS INTENSITY FACTORS FOR LENS-LIKE HOLE IN AN ANISOTROPIC BODY UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

Using the singular integral equation method and the unified approach for problem of stress concentration at the sharp and rounded V-shaped notches the problem on longitudinal shear of anisotropic plane with a lens-like hole are solved. Dimensionless notch stress intensity factors at the tips of lens-like hole with respect to angle α are obtained.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПІДКРІПЛЕННЯ ВИДОВЖЕНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Вадим Гудрамович¹, Етері Гарт², Олег Марченко²

¹Інститут технічної механіки НАН України та Державного космічного агентства України, м. Дніпро;

²Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

Для створення багатьох типів навантажених конструкцій використовуються тонкостінні оболонкові елементи. Дуже часто з практичних міркувань в оболонці повинні бути отвори, які впливають на напружено-деформований стан (НДС) конструкції у цілому. Це спричинює різке збільшення напружень біля отвору, що може призвести до передчасного руйнування конструкції. Вивчення локальних концентраторів НДС оболонок є важливою задачею механіки деформованого твердого тіла [1–4]. Складність математичних моделей обумовлює необхідність використання числових методів.

У цій роботі за допомогою методу скінченних елементів вивчено мінімізацію концентрації параметрів НДС сферичної оболонки, послабленої видовженим еліптичним отвором, за рахунок підбору геометричних і механічних параметрів включення, що оточує отвір.

Розглянуто пружну тонкостінну ізотропну сферичну оболонку радіусу R , товщини h з еліптичним отвором (a, b – піввісі еліпсу), що підкріплюється включенням ширини t з іншого, ніж основний матеріал оболонки, матеріалу. Вважається, що підкріплювальний елемент змодельовано стрічковою вставкою товщини h , що відповідає товщині оболонки; на границях включення з оболонкою задані умови жорсткого зчеплення. Оболонка перебуває під дією рівномірного внутрішнього тиску інтенсивності $p = \text{const}$.

Результати числового аналізу отримано для оболонки з такими параметрами: $R = 2\text{ м}$, $h = 0.001R$, $b = 0.05R$. Для визначеності в розрахунках матеріал оболонки має наступні характеристики: $E_1 = 110\text{ ГПа}$, $\mu_1 = 0.32$, $\sigma_b = 400\text{ МПа}$, $\sigma_{0,2} = 280\text{ МПа}$. Матеріал включення: $E_2 = 210\text{ ГПа}$, $\mu_2 = 0.3$, $\sigma_b = 630\text{ МПа}$, $\sigma_{0,2} = 375\text{ МПа}$. Вибір матеріалів носить умовний характер. Внутрішній тиск $p = 10\text{ МПа}$.

Досліджено вплив видовженості отвору на НДС оболонки для чотирьох варіантів отворів з таким співвідношенням піввісей: $a/b = 1.5, 2, 2.5, 3$. Вплив підкріплювального включення досліджено для отвору $a/b = 3$ з наступними варіаціями ширини: $t = 0.1b, 0.2b, 0.3b, 0.4b, 0.5b$.

При побудові скінченноелементної моделі було використано адаптивну сітку, локально подрібнену в околі отвору з коефіцієнтом подрібнення 10. Порівняння проведено з аналітичним розв'язком для модельної задачі при

співвідношенні піввісей $a/b = 1.5$ [2]. Отримані результати ККН числового розв'язку збігаються з аналітичним.

Комп'ютерне моделювання щодо впливу підкріплювальних включень на параметри НДС оболонки з отвором в зонах концентрації напружень дозволило прийти до висновку, що наявність більш жорсткого, ніж основний матеріал оболонки, підкріплення дає змогу зменшити інтенсивність деформацій навколо отвору на $\sim 30\%$. Концентрація параметрів НДС в значній мірі залежить від ступеня видовженості еліптичного отвору: чим більше співвідношення піввісей отвору, тим більше значення коефіцієнту концентрації напружень. Саме у цих випадках зростає роль підкріплень.

Результати досліджень можуть бути корисні при проектуванні та оптимізації типових елементів конструкцій сучасних галузей техніки, зокрема, ракетно-космічної, а також з урахуванням впливу температурних полів.

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н. и др. Методы расчета оболочек. В 5 т. Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. Hart E.L., Hudramovich V.S. Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // J. Math. Sci. – 2021. – **254**, No. 1. – P. 21–38.
4. Hudramovich V. S, Hart E. L, Marchenko O. A. Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure // Strength of Materials. – 2021. – **52**, No. 6. – C. 832–842.

SIMULATION THE INFLUENCE OF REINFORCEMENT OF AN ELONGATED ELLIPTICAL HOLE ON THE STRESS CONCENTRATION IN A SPHERICAL SHELL

Computer schemes for calculating the stress-strain state of spherical shells with reinforced elongated elliptical holes under the action of internal pressure have been developed. The materials of the shells and reinforcements are different. Computer simulation was carried out by the finite element method. The influence of mechanical and geometrical parameters of shell reinforcement on its stress-strain state is investigated. It is shown that a successful choice of the geometric and stiffness characteristics of the reinforcement parameters can significantly reduce the stress concentration in the shell. Regularities of stress and strain intensity distribution in the vicinity of the stress concentrator are constructed. The results obtained in this work can be used to solve optimization problems for thin-walled spherical shells with elongated elliptical holes, having strip reinforcement at the edges, and under the influence of temperature fields.

УДК 539.3

МЕХАНОТЕРМОДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ ПРИ СИМЕТРИЧНОМУ МІКРОХВИЛЬОВОМУ ОПРОМІНЕННІ ПОРИСТОЇ ЗВОЛОЖЕНОЇ ПЛАСТИНИ

Тарас Голубець

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Для одновимірної пористої пластини (Рис.1) скінченої L товщини за умов зовнішнього симетричного ($E_L = E_R$) мікрохвильового опромінення згідно з наближенням моделі твердого розчину [1] розглянуто систему диференціальних рівнянь у компонентах тензора напружень

$$\frac{\partial^2 T_{xx}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{yy}^*}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - \langle \nu \rangle} \left(\langle E \rangle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \langle \nu \rangle \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T_{zz}^*}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - \langle \nu \rangle} \left(\langle E \rangle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \langle \nu \rangle \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0,$$

де $\hat{T}^* = (1 - \phi)(\hat{t}'_s - \langle K \rangle \langle \alpha'_s \rangle (T - T_0) \hat{I})$ і \hat{t}'_s – тензори приведені і власних напружень скелету, \hat{F} і \hat{L} – тензори внутрішніх пондеромоторних сил і теплових навантажень, $\langle E \rangle$ і $\langle \nu \rangle$ – усереднені значення модуля Юнга і коефіцієнту Пуассона, $\langle K \rangle$ і $\langle \alpha'_s \rangle$ – модуля бічного стиску і коефіцієнту температурного розширення скелету, T і T_0 – рівноважне і початкове значення термодинамічної температури, ϕ – пористість матеріалу пластини.

Означено вирази для визначення вологістних і теплових силових зусиль у внутрішньому об'ємі і на краях пластини. Граничні умови записано згідно з умовами симетрії пластини. Отримано розв'язки системи диференціальних рівнянь квазілінійної термопружної задачі за дії внутрішніх (вологістних і теплових) навантажень у напруженнях і деформаціях за умови відсутності зовнішніх силових навантажень на краях пластини.

Розглянуто замкнену систему рівнянь [2, 3] дифузії тепла і вологи у пористому матеріалі з відповідними граничними умовами неперервності потоків компонент газової суміші (водяної пари і сухого повітря) у наближенні миттєвого випаровування потоку рідини на поверхнях пористої пластини.

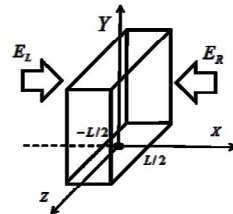


Рис.1. Плошка пориста зволожена пластини: E_L і E_R – амплітуди зовнішнього мікрохвильового поля

Чисельні розв'язки системи дифузійних рівнянь тепла і вологи отримано при відомому розподілі $\dot{q}'(x)$ джерел тепла у пористій пластині, який визначається розв'язками неоднорідного електромагнітного хвильового рівняння. Розраховано напружено-деформований стан тіла згідно актуальних значень вологістних і теплових силових зусиль.

Замкнену систему рівнянь механотермодифузії отримано при умовах слабкозмінності об'ємних (фазових) і діелектричних (хвильових) властивостей пористого зволоженого матеріалу. Також враховано, що ефективна довжина хвилі значно більша за характерний розмір області (REV) просторового усереднення, що дає можливість застосувати наближення ефективного макроскопічного поля [4] для знаходження ефективних електрофізичних властивостей пористого матеріалу.

Для визначення ефективних характеристик пористого матеріалу використано метод [5] локального просторового усереднення.

1. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних термочутливих тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 2: Моделювання та оптимізація в термомеханіці / О.П. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, Т.Л.Курницький – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 180 с.
2. Datta A.K. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes Part I – Problem formulations // J. Food Eng. – 2007. – **80**. – P.80–95.
3. Datta A.K. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes Part II – Property data and representative results // J. Food Eng. – 2007. – **80**. – P. 96–110.
4. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. – Москва: Наука, 1982. – 303 с.
5. Howes A.H., Whitaker S. The spatial averaging theorem revisited // Chemical Engineering Science. – 1980. – **23**, № 12. – P. 1613–1623.

MECHANO-THERMO-DIFFUSIONAL PROCESSES DURING OF MICROWAVE TREATMENT OF DEWY POROUS PLATE

Within the framework of the continua mechanics, a system of differential equations for the determination of stress tensor in a porous plate is derived. The closed system of equations for diffusion of moisture and heat in the porous plate is considered and according to known expression of heat sources distribution the one-dimensional numerical solutions of this system is constructed under certain boundary conditions. A stress-strain state of the porous plate according to the defined moisture and thermal impacts relatively to plane of symmetry is calculated.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ДВОШАРОВИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ДІЙ

Роман Івасько¹, Наталія Мельник², Роман Мусій², Стефан Моринь³

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів;

³Політехніка Опольська, м. Опольце

Двошарові електропровідні тіла (ДЕТ) різної геометричної конфігурації часто використовують як елементи конструкцій багатьох приладів і пристроїв. У процесі їх функціонування та експлуатації такі елементи зазнають впливу різних фізичних дій, зокрема, електромагнітних імпульсного характеру. Внаслідок цього в ДЕТ виникають джерела тепла Джоуля Q і пондеромоторні сили \vec{F} . Ці два фізичні фактори впливу імпульсного електромагнітного поля (ЕМП) на ДЕТ створюють в кожному n -му ($n=1,2$) складовому шарі поля температури $T^{(n)}$ і напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ та відповідні їм інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$. За певних параметрів імпульсного ЕМП величина інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в кожному n -му складовому шарі може досягнути межі пружної деформації $\sigma_d^{(n)}$ матеріалу n -го шару. Тоді n -й шар втрачає несучу здатність, а, отже, ДЕТ в цілому втрачає роботоздатність як елемент конструкції.

Для прогнозування надійності роботоздатності пристрою, який містить конструктивний елемент у вигляді ДЕТ, за дії зовнішніх імпульсних ЕМП необхідно побудувати математичну модель термомеханічної поведінки ДЕТ за таких дій.

У літературі [1] викладено математичну модель термомеханічної поведінки однорідних електропровідних тіл за дії імпульсних ЕМП. Ця модель враховує (на основі відомих експериментальних досліджень [2]) адиабатичність процесів нагріву і деформування електропровідного тіла за таких ЕМП. На основі цієї моделі отримані загальні розв'язки початково-крайових задач термомеханіки однорідних електропровідних тіл канонічної форми (шару, порожнистих і суцільних циліндра та кулі) за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Записано розв'язки даних задач для розглядуваних однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди, що мають характер режимів з імпульсним модульним сигналом (РІМС) та згасної синусоїди (РЗС). Чисельно проаналізовано температурні поля і напруження, а також несучу здатність розглядуваних однорідних електропровідних тіл канонічної форми

<http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.20.pdf>

за дії імпульсних ЕМП в РІМС та РЗС. Встановлено закономірності термомеханічної поведінки однорідних електропровідних тіл канонічної форми за вказаних імпульсних електромагнітних дій.

У випадку ДЕТ наявність з'єднання складових шарів, матеріали яких однорідні, ізотропні та неферомагнітні, вимагає виконання умов ідеальних електромагнітного, теплового та механічного контактів. При цьому процеси нагріву і деформування за дії імпульсних ЕМП можуть бути неадіабатичними в рамках цілого ДЕТ.

Запропоновано математичну модель визначення термонапруженого стану і несучої здатності, а також збереження властивостей контактного з'єднання ДЕТ за дії імпульсних ЕМП. Сформульовано початково-крайові задачі термомеханіки для ДЕТ канонічної форми за дії однорідного нестационарного ЕМП. Використано квадратичну апроксимацію всіх визначальних функцій (відповідної дотичної до поверхні тіла компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури та відповідної компоненти тензора динамічних напружень) за відповідною координатою по товщині кожного складового шару розглядуваного ДЕТ.

Це дало змогу точно врахувати всі задані крайові умови як на зовнішніх поверхнях ДЕТ, так і на поверхнях з'єднання їх складових шарів. У результаті вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до відповідних задач Коші на інтегральні характеристики цих функцій. Отримано загальні розв'язки задач Коші у вигляді згорток функцій, що містять однорідні розв'язки цих задач та задані крайові умови за однорідної нестационарної електромагнітної дії.

Знайдено розв'язки сформульованих початково-крайових задач за дії імпульсних ЕМП, що мають характер РІМС. На їх основі чисельно досліджено закономірності термомеханічної поведінки розглядуваних ДЕТ канонічної форми, виготовлених з неферомагнітних матеріалів (нержавна сталь, мідь, алюміній), за електромагнітної дії в РІМС залежно від її амплітудно-частотних характеристик та часу тривалості.

1. *Гачкевич О.Р., Мусій П.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: «СПОЛОМ», 2011. – 216 с.
2. *Herlach F.* Pulsed magnets // Rep. Prog. Phys. – 1989. – 62, No. 6. – P. 859–920.

SIMULATION OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF TWO-LAYER ELECTROCONDUCTIVE BODIES UNDER PULSE ELECTROMAGNETIC ACTIONS

A mathematical model for determining the thermal stress state and bearing capacity, as well as the properties preservation of the two-layer electroconductive bodies contact connection under the pulsed electromagnetic field action has been proposed.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПРОСТОРОВИХ ОБОЛОНКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ТІЛАХ

Георгій Сулим¹, Ярослав Пастернак², Юрій Михалюк²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

² Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

У сучасних високотехнологічних приладах та пристроях все частіше використовуються інтелектуальні матеріали, що, реагуючи на різні фізико-механічні поля, мають здатність до самоналагодження та ефективної діагностики внутрішнього стану [1]. На даний час такі матеріали часто створюють із використанням волокон, пакетів шарів, чи платіткових включень, що поєднуючи впливи декількох полів у цілому надають бажані ефективні характеристики утвореному композиту. З огляду на це, постає необхідність розрахунку фізико-механічних полів у таких структурно-неоднорідних матеріалах, що в свою чергу дає можливість прогнозувати їхню довговічність, надійність, а також визначити та оптимізувати інтегральні та локальні властивості утвореної композитної структури.

У цьому дослідженні вивчено підходи до моделювання тонких оболонкових (зокрема, платіткових) деформівних включень у теромагнітоелектропружних середовищах. Для цього використано принцип спряження континуумів різної вимірності, на підставі якого сформульовану задачу можна умовно розбити на три частково пов'язані підзадачі: (а) *зовнішню* для середовища із умовно заданими (наперед невідомими) на просторових поверхнях функціях розриву (стрибка) фізико-механічних полів; (б) *проміжну* у вигляді умов *контактної взаємодії* середовища із неоднорідністю та (в) *внутрішню*. Остання полягає у побудові більш чи менш адекватної математичної моделі неоднорідності, у якій виявляється зв'язок між полями температури, переміщення, електричного і магнітного потенціалів всередині включення та нормальним тепловим потоком, вектором напружень, нормальними складовими електричного зміщення та магнітної індукції на поверхнях тонкої неоднорідності.

Для моделювання зовнішньої задачі у роботі використано гранично-елементний метод функцій стрибка [2], що уже засвідчив свою ефективність при моделюванні абсолютно жорстких тепло- та електропровідних оболонкових неоднорідностей.

При розгляді внутрішньої задачі запропоновано моделювати тонкі просторові неоднорідності за допомогою скінченних елементів, геометрія серединної поверхні яких та функції форми аналогічні відповідним для зовнішньої задачі. Також при цьому запропоновано розглядати проміжну

задачу не тільки для опису взаємодії середовище – включення, а й для взаємодії між елементами самого включення (окремими його скінченними елементами). Це дає можливість значно розширити коло задач, які можна розв'язати за допомогою запропонованого підходу (зокрема, про у різний спосіб поєднанні між собою та зруйновані ті чи інші в'язі всередині неоднорідності), за незначного збільшення результуючої системи рівнянь та/чи нерівностей у разі однобічних в'язей.

Для скінченного елемента неоднорідності запропоновано такі математичні моделі: модель недеформівного електропровідного включення (на основі [2]), модель типу основи Вінклера для градієнтів полів у нормальному стосовно серединної поверхні включення напрямі, мембранну модель та модель згину на основі використання їх скінченноелементного подання [3]. Ці моделі можна комбінувати (у допустимих межах) між собою для врахування та виявлення впливу різних механізмів деформування неоднорідності.

У випадку умов ідеальної взаємодії між середовищем та неоднорідністю досліджено низку задач, які засвідчили швидкість та високу точність запропонованого підходу для визначення концентрації фізико-механічних полів у теромагнітоелектропружних тілах із тонкими включеннями. Перспективою використання підходу є також задачі гомогенізації щодо визначення та оптимізації ефективних характеристик інтелектуальних композитних матеріалів.

1. *Encyclopedia of smart materials* / M. Schwartz (ed.). – New York: Wiley, 2002. – 1073 p.
2. *Pasternak Ia., Sulym H., Ilchuk N.* Boundary element analysis of 3D shell-like rigid electrically conducting inclusions in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Z Angew Math Mech.* – 2019. e201800319. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800319>.
3. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. – New York: Springer, 2011 – 410 p.

MATHEMATIAL MODELING OF THE INFLUENCE OF SPATIAL SHELL-LIKE INCLUSIONS IN THERMOMAGNETOELECTROELASTIC SOLIDS

This study suggests an approach for modeling the deformable shell-like inclusions, which are sensitive to the influence of different physical and mechanical fields. Several models are proposed, which can be combined to analyze the influence of different deformation mechanisms on overall stress state of an inhomogeneous solid. Numerical examples are presented, which show the efficiency of the proposed approach. It is proposed to use the approach in the modeling and optimization of effective properties of smart composite materials.

УДК 539.3

ВПЛИВ ПОПЕРЕДНІХ НАПРУЖЕНЬ НА ОЦІНКУ РОБОТОЗДАТНОСТІ ЗА ТЕПЛОВИМ КРИТЕРІЄМ ЕЛАСТОМЕРНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Ярослав Жук, Олександр Остос

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

Оцінка терміну експлуатації елементів конструкції залежить від багатьох факторів. Разом із наявністю попередніх напружень ефект термомеханічної зв'язаності може суттєво впливати на роботоздатність конструкційного елемента і на моделі втомної витривалості. При цьому за допомогою адекватних моделей зв'язаної термомеханіки [1] необхідно оцінити рівні дисипативного розігріву і визначити безпечні діапазони температур.

Розглянемо прямокутну пластину довжини a , ширини b і товщини h . Поведінку матеріалу пластини вважаємо лінійною в'язкопружною незалежною від частоти, амплітуди та температури. Пластина віднесена до прямокутної декартової системи координат x, y, z . Вісь Oz направлена перпендикулярно до площини пластини Oxy . Контур пластини задається відрізками прямих $x = 0, a$; $y = 0, b$. В пластині присутні попередні мембранні розтягувальні зусилля: нормальні N_{xx} , N_{yy} та зсувне N_{xy} , за допомогою яких моделюється наявність виниклих при виготовленні чи попередньо наведених напружень.

Механічні коливання пластини збуджуються поверхневим тиском, гармонічно змінним в часі t з амплітудою, що розподілена за деяким законом по поверхні пластини, і круговою частотою ω , близькою до резонансної. Контур пластини вважаємо шарнірно опертим і теплоізольованим або таким, на якому підтримується стала температура.

Для моделювання механічної поведінки заданої пластини відносно механічних змінних по товщині приймаємо гіпотези Кірхгофа – Лява [1,2]. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [1], які у випадку гармонічного деформування матеріалу зводяться до множення комплексних величин $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$. Температуру вібророзігріву приймаємо сталою по товщині пластини.

У разі незалежних від температури властивостей матеріалу в припущенні сталості температури по товщині пластини механічна задача розпадається на дві: 1) задачу про плоский напружений стан і 2) задачу про чистий згин. Задача про плоский напружений стан і визначає попередній напружений стан, на який накладається чистий згин, що змінюється в часі за гармонічним законом.

Рівняння руху в переміщеннях за наявності попередніх мембранних зусиль доповнюється рівняннями стаціонарної або нестаціонарної теплопровідності при відповідних механічних і теплових граничних умовах.

Для шарнірного опирання розв'язок механічної задачі про стаціонарні коливання знаходиться у вигляді подвійного ряду по синусах. Розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності шукаємо у вигляді ряду по косинусах. Нестационарна задача теплопровідності розв'язувалась чисельно.

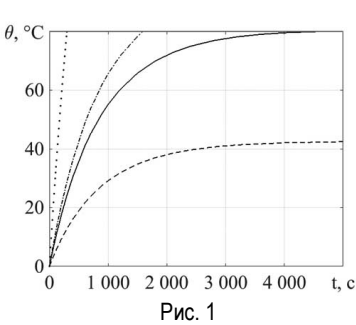


Рис. 1

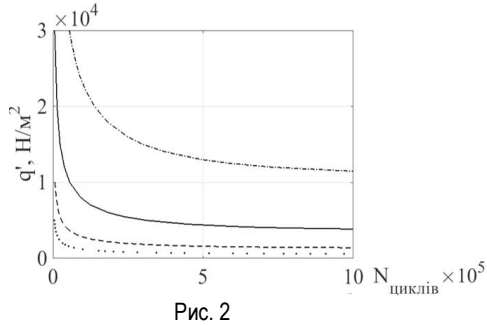


Рис. 2

Криві температури вібророзігріву і залежності кількості циклів до теплового руйнування для різних амплітуд навантаження представлені на рис. 1 і 2 відповідно. Встановлено, що наявність попередніх напружень зсуває амплітудно- і температурно-частотну криву в низькочастотну або високочастотну область, що істотно впливає на температуру вібророзігріву і, отже, на втомну поведінку за температурним критерієм.

1. *Karnaikhov V.G., Kirichok I.F.* Forced harmonic vibrations and dissipative heating-up of viscoelastic thin-walled elements (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36** – P. 174–195.
2. *Zhuk Ya.A., Ostos A Kh.* Effect of preloading on the resonant vibrations and dissipative heating of a rectangular thermoviscoelastic plate // *Int. App. Mech.* – 2020. – **56**. – P. 432–444.

PRESTRESS INFLUENCE ON THE THERMAL LIFE ESTIMATION OF ELASTOMERIC RECTANGULAR PLATE

A statement of the problem on the forced resonant vibrations and steady-state as well as transient dissipative heating of prestressed viscoelastic elastomeric rectangular plate is derived. The temperature-time response is used to predict the plate failure due to overheating and estimate the structure endurance under cyclic loading. The influence of the prestress level on the life prediction is investigated in details.

УДК 539.3

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Олександр Максимук¹, Юлія Сачук², Юрій Музичук³

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;

²Волинський національний університет імені Л. Українки, м. Луцьк;

³Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

У роботі розв'язано контактні задачі для штампів довільної форми у взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (плоска задача) [1, 4]. Задачі зведено до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, розв'язок якого знайдено аналітично. Виконано числовий аналіз контактної тиску, переміщення штампта та переміщення у пружній основі, зміну області контакту у залежності від навантаження контактної пари, форми штампта, а також здійснено порівняння розв'язків аналогічних задач для основи, що моделюється пружною півплощиною.

Контактні задачі для штампів особливо канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної), якщо моделювати пружну основу півплощиною, мають низку особливостей. В першу чергу – це методи розв'язування, з використанням яких задачі зводять до обчислення еліптичних інтегралів третього роду у всьому діапазоні вхідних параметрів та зведення їх до інтегралів Карлсона [2, 3], що вимагає значних обчислювальних зусиль. Однак найбільшим недоліком моделі пружної півплощини є неможливість порахувати зміщення штампта і прогин основи. Цих недоліків позбавлена запропонована модель.

Розглядається контактна взаємодія штампта довільної форми $f(x)$ із пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (рис. 1). Тут ν та E – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга основи, $2a$ – невідома область контакту, δ – невідоме зміщення штампта, як жорсткого тіла, H – товщина пружного шару, $V(x)$ – прогин поверхні шару.

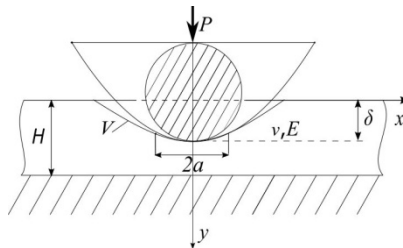


Рис. 1

Оскільки прогин пружної основи в області контакту $2a$ рівний $\delta - f(x)$ (рис. 1), тому з урахуванням умови рівності прогинів, отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення контактної тиску [5]:

$$\delta - f(x) = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, \quad |x| \leq a,$$

де $C = E^{-1} \sqrt{3(1-\nu)/2}$, $\alpha = H^{-1} \sqrt{6/(1-\nu)}$.

Аналітичний розв'язок має вигляд:

$$\delta = f(a) - \frac{f'(a)}{\alpha}, \quad p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(f(-a) - f(x) - \frac{f'(-a)}{a} + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) \right).$$

З умови рівноваги штампа отримуємо вираз для знаходження області контакту

$$P = \frac{\alpha}{C} \left(af(-a) - \frac{af'(-a)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} f'(a) - \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx \right).$$

1. Балабушич М., Фоліч Б., Чорич С. Изгиб фундаментной балки на упругом основании за счет двух коэффициентов реакции земляного полотна Винклера // Открытый журнал гражданского строительства. – 2019. – 9, № 2. – С. 12.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
3. Максимук О.В., Сачук Ю. В., Яцюк С. М. Контактні задачі для плоскої моделі пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2020. – 63, № 3. – С. 136–140.
4. Сачук Ю.В., Максимук О. В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – № 20. – С. 180–187.
5. Sachuk Yu.V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 220, No2. – P. 204–212.

CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC FOUNDATION WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

The contact problems on interacting stamps of the canonical shape with an elastic foundation with two bedding coefficients are considered within the framework of the plane formulation. The problems are reduced to solving the Fredholm integral equations of the first kind. An analytical solutions for canonical stamps are constructed.

УДК 519.2

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Ярослав П'янило, Михайло Петрус

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

При дослідженні багатьох фізичних процесів використовуються емпіричні формули, побудовані на основі експериментальних даних. Оскільки дані вимірювань часто отримують з певними похибками, то їх застосування для побудови емпіричних формул призводить до неточності коефіцієнтів в останніх. Це в свою чергу призводить до розкиду розв'язків крайових задач. Тому є необхідність більш детального дослідження побудови емпіричних формул: їх адекватності, кореляції між собою та вибору оптимальної.

Побудову емпіричних формул для обчислення коефіцієнта стиску та їх дослідження проведено на основі властивостей водню. Апроксимація коефіцієнта стиску будується на основі табличних даних. За аналогією для газу метану залежність коефіцієнта стиску водню від температури та тиску можна будувати у вигляді $z = (1 + fp)^{-1}$, де $p(x)$ – вимірюється в атмосферах. Інший поширений вигляд побудови цієї залежності:

$$z = (x_1 - x_2 T_v)(x_3 p T_v^{y_1} + x_4), \quad T_v = \frac{T}{273}.$$

Тут x_i, y_i – невідомі коефіцієнти, які знаходяться на основі табличних даних, T – температура газу в Кельвінах.

Для коефіцієнта стиску отримана наступна формула

$$z = (1.0286 - 0.00286 T_v)(0.00063 p T_v^{-0.72914413} + 0.99900).$$

Розрахунки велися при $p = 40$, $T = 100$, $z = 1.040253$, $z = 1.040053$.

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF EMPIRICAL FORMULAS FOR CALCULATING THE PARAMETERS OF PHYSICAL PROCESSES

An empirical formula for calculating the hydrogen compression ratio is constructed and investigated. Its statistical-probabilistic analysis is carried out.

УДК 519.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОРЯДКУ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ НА РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В БАЗИСІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Ярослав П'янило, Валентина Собко

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

Математичні моделі фізичних процесів з використанням похідних дробових порядків більш адекватно описують ці процеси в порівнянні з класичними частинними похідними. У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Зокрема, оператор дробової похідної у термінах Ріманна – Ліувіля [1–3]

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}} d\xi.$$

де $m = [\alpha], \dots$ – ціла частина дійсного числа. З обчислювальних експериментів відомо, що порядок дробової похідної має значний вплив на розв'язок крайових задач. На цей час ще не побудовано критеріїв вибору порядку дробової похідної. Метою роботи є спроба розроблення критерію вибору порядку дробової похідної на основі балансових співвідношень.

Однією із задач, де застосування дробових похідних є ефективним, є моделювання процесу роботи складних газотранспортних систем, зокрема, фільтрація газу в пористому середовищі, яка у термінах дробової похідної Ріманна – Ліувіля за часовою змінною в одновимірному випадку описується рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right). \quad (1)$$

Задача полягає у знаходженні розв'язку $p(x, t)$ рівняння (1) за відомими значеннями тиску $p(x_i, t_0)$ у заданих точках середовища й умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M = \int_V \rho dv.$$

Інтегрування здійснюється по об'єму сховища V , M – маса газу в сховищі, ρ – густина газу, яка пов'язана з тиском рівнянням стану $p = \rho\chi RT$. Тут R – газова стала, T – абсолютна температура газу.

Застосування дробового числення в математичному моделюванні зводиться до необхідності розв'язування інтегродиференціального рівняння типу згортки. В роботі зроблена спроба на базі многочленів Лагерра побудувати біортогональні многочлени та використати їх для розв'язання крайових задач з похідними дробових порядків.

Сформулюємо квазіспектральну задачу для інтегрального оператора. Для заданого $n = 1, 2, \dots$ знайти такі значення параметра λ , при яких рівняння

$$\int_0^t t_1^{-\alpha} \exp(t_1) \int_0^{t_1} t_2^{\alpha} \exp(-t_2) \varphi(t_2) dt_2 dt_1 = -\lambda \varphi(t) + \tau_1 L_{n+1}^{\alpha}(t) + \tau_0 L_0^{\alpha}(t)$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $\varphi(t) \in L_{2,\omega}[0, \infty]$ степеня $\leq n$, де τ_1, τ_0 деякі параметри, а $L_{n+1}^{\alpha} = L_{n+1}^{\alpha}(t)$ та $L_0^{\alpha} = L_0^{\alpha}(t)$ задані (і зафіксовані) поліноми Лагерра відповідно степеня рівного $n+1$ та нульового.

Справедливими є наступні рівності

$$\int_0^{\infty} \exp(-t) \varphi_i^n(t) \varphi_j^n(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$
$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp(-t) \varphi_i^n(t) \varphi_j^n(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \delta_i, & i = j. \end{cases}$$

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Васильев В. В., Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 – 256 с.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE ORDER OF A FRACTIONAL DERIVATIVE ON THE SOLUTION OF BORDER PROBLEMS IN THE BASIS OF BIORTOGONAL POLYNOMES

On the basis of the constructed biotogonal functions, the problem of gas filtration in a one-dimensional case is solved with the use of derivative fractional orders. The influence of the order of the fractional derivative on the solution of the problem is investigated.

УДК 5196: 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ РАДІУСА ЖИВЛЕННЯ РОБОЧОЇ СВЕРДЛОВИНИ

Ярослав П'янило

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

В [1–3] побудовано математичні моделі роботи підземних сховищ газу. Радіус живлення свердловин визначали експериментальним шляхом. Область живлення розбивали на дві підобласті: вибійну зону та область пласту. При відбиранні газу область живлення свердловин залежить від її дебіту. Оскільки параметри області живлення свердловин входять в математичну модель роботи свердловини, то доцільно мати критерії їх визначення. Метою роботи є визначення параметрів області живлення свердловини в залежності від депресії тиску та дебіту свердловини.

Розглянемо циліндричну область, у центрі якої знаходиться свердловина зовнішній радіус якої рівний a , а внутрішній – b . Граничні умови на зовнішній границі $\partial P/\partial r = 0$, а на внутрішній границі – $P = P_2 \equiv \text{const}$. Початковий розподіл тиску є сталим і рівним P_0 . За таких умов розв'язок поставленої задачі має вигляд [4]

$$P = P_2 - 2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} H_m Z_0(r\lambda_m).$$

$$\text{Тут } P = p^2, P_2 = p_2^2, P_0 = p_0^2, \tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta},$$

$$H_m Z_0(r\lambda_m) = - \frac{\pi N_0(\lambda_m b) N_1^2(\lambda_m a) \exp\left(-\frac{P_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)}{(N_0^2(\lambda_m b) - N_1^2(\lambda_m a)) (\pi \lambda_m r N_1(\lambda_m r))},$$

$$Z_0(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m r) + A_m N_0(\lambda_m r), \quad Z_1(\lambda_m r) = J_1(\lambda_m r) + A_m N_1(\lambda_m r),$$

$$A_m = - \frac{J_0(\lambda_m b)}{N_0(\lambda_m b)} = - \frac{J_1(\lambda_m a)}{N_1(\lambda_m a)}, \quad D = \frac{m\mu}{k}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu},$$

p_0, p_2 – початкове значення тиску та значення тиску на границі області, $J_i(\lambda_m r)$ – функція Бесселя дійсного аргументу порядку i , $N_i(\lambda_m r)$ – функція Неймана порядку i , λ_m – корені рівняння

$$J_0(\mu x) N_1(x) - J_1(x) N_0(\mu x) = 0, \quad \mu = b/a, \quad a\lambda_m = x, \quad b\lambda_m = \mu x.$$

Якщо розглядати процес руху газу в системі пласт-гірло свердловини, то він описується рівнянням

$$p^2(r, t) = (p_g^2 e^b + a_r e^b q_0^2) + A_{12} q_0 + B_{12} q_0^2 - 2 \left(p_0^2 - ((p_g^2 e^b + a_r e^b q_0^2) + A_{12} q_0 + B_{12} q_0^2) \right) \sum_{m=1}^{\infty} H_m Z_0(r \lambda_m).$$

Тут

$$a_r = \lambda z L_r \frac{RT}{D} \left(\frac{\rho_0}{S} \right)^2 \frac{1 - e^{-b}}{b} \quad A_{12} = \frac{A_1}{k_{n1}} + \frac{A_2}{k_b}, \quad B_{12} = \frac{B_1}{k_{n1}^{3/2}} + \frac{B_2}{k_b^{3/2}}.$$

$$A_1 = \frac{1}{h\pi} \mu p_0 \ln \frac{R_k}{R_c}, \quad A_2 = \frac{\mu p_0}{\pi h_x} \ln \frac{2R_c h}{2r_k l_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)},$$

$$B_1 = 12 \times 10^{-5} \frac{\rho_0 p_0 d^2}{2\pi^2 h^2 m} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k} \right),$$

$$B_2 = \frac{\rho_0 p_0 d^2}{\pi^2 h_x m} \left(\frac{1}{2r_k l_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{1}{2R_c h} \right).$$

Остання рівність залежить від параметрів свердловини та пласту [1–3] і дозволяє за заданим гірловим тиском та дебітом свердловини визначити розподіл тиску в її області. Зі зростанням радіуса r розраховане значення тиску прямує до середнього пластового тиску газу. Область живлення буде визначатися таким значенням радіуса, при збільшенні якого значення тиску залишається незмінним із заданою точністю. Як і слід очікувати, область живлення буде залежати від часу.

1. П'янило Я.Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 178–184.
2. Питула Н.М., Пянило Я.Д., Питула М.Г. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Растр-7, 2015. – 266 с.
3. П'янило Я.Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011. – 248 с.
4. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – Москва: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. – 397 с.

DETERMINATION OF THE FEEDING RADIUS OF AN OPERATING WELL

A mathematical model of the process of gas transition through the well is constructed to determine the radius of its supply depending on the flow rate of the well and the time of extraction.

УДК 539.3

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ОТВОРАМИ ТА ТРІЩИНАМИ У ВИПАДКУ ДІЇ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

Юлія Глущенко¹, Костянтин Хорошев²

¹Національний транспортний університет, м. Київ;

²Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

Особливої актуальності та практичного інтересу в останні роки набувають задачі дослідження електропружного стану п'єзоелектричних елементів з отворами та тріщинами при впливі механічних і електричних навантажень. В роботі [1] досліджено плоскі та двовимірні задачі електропружності для багатозв'язних півплощин і півпросторів під дією механічного навантаження. В роботі [2] наведено розв'язок плоскої задачі електропружності для п'єзоелектричного півпростору з однією тріщиною при дії віддаленого електричного поля.

У цій роботі розв'язано та досліджено двовимірну задачу електропружності для півпростору, що знаходиться під дією віддаленого електричного поля, коли плоска обмежувальна поверхня вкрита тонким електродом і є вільною від механічного навантаження. Із використанням методу комплексних потенціалів, конформних відображень і розвинення в ряди Лорана отримано загальні вирази комплексних потенціалів з виділеними сингулярностями у вершинах тріщин, що розглядаються як «вузькі» еліпси. Граничні умови на плоскій границі задовольняються точно із використанням методу інтегралів типу Коші, а на поверхнях отворів і тріщин – наближено, із використанням методу найменших квадратів.

1. Калогеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро-магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
2. Khoroshev K.G., Glushchenko Yu.A. Plane electroelastic problem for a cracked piezoelectric half-space subject to remote electric field action // European J. of Mechanics – A/Solid. – 2020. – 82. – doi: 10.1016/j.euromechsol.2020.103984

TWO-DIMENSIONAL ELECTRICAL ELASTIC PROBLEM FOR HALF-SPACE WITH HOLES AND CRACKS IN CASE OF ELECTRIC FIELD

On the basis of the method of Lekhnitskii' generalized complex potentials of electroelasticity, Cauchy type integral method and the least squares method, a two-dimensional electroelasticity problem for half-space with holes and cracks in the case of electric field is investigated.

УДК 622.691.24

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПЛАСТ – ГАЗОЗБІРНИЙ ПУНКТ ПІДЗЕМНИХ СХОВИЩ ГАЗУ

Мирослав Притула¹, Зоя Притула²

¹Філія "Науково-дослідний інститут транспорту газу" АТ "Укртрансгаз", м. Харків;

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

Щодооби для служб АТ "Укртрансгаз" формується прогноз добової продуктивності підземних сховищ газу (ПСГ) [1]. Перед його проведенням аналізують виміряні дані за попередню добу за допомогою моделювання. Збіг вимірних та розрахованих даних забезпечує достовірність формування прогнозу. У процесі формування режимів ПСГ на місяць і більше виявляються розбіжності між вимірними та розрахованими даними, які пов'язані зі зміною обсягів закачування / відбирання газу за часом. Найвні коефіцієнти фільтраційних опорів, які встановлюються для вибійних зон свердловини кожного сезону експлуатації ПСГ, розраховують за стаціонарною методикою. Виявилось, що такі коефіцієнти опорів не є сталими, а змінюються, залежно від режиму експлуатації пластів – колекторів, і більше того, їх неможливо використовувати для нестационарних режимів експлуатації свердловин на значних інтервалах часу.

Модель ПСГ умовно подається трьома частинами: фільтраційна модель пластів – колекторів, модель системи пласт – газозбірний пункт, а також модель дотискувальної компресорної станції з системою підготовки газу. Найбільш чутливими до зміни режимів експлуатації ПСГ є вибійні зони свердловин, які є складовими системи пласт – газозбірний пункт. Математична модель цієї системи включає модель підтоку газу до свердловини у вибійній зоні, а також модель газового потоку у свердловинах та газозбірній системі. Математичні моделі газових потоків у вказаних об'єктах наближено описуються квадратичними поліномами відносно масової витрати, і тому, ідентифікація полягає в уточненні коефіцієнтів квадратичної залежності. Усі гідродинамічні методи досліджень, що застосовують для визначення фільтраційних параметрів пласта і свердловини, поділяють на дві основні групи, а саме, методи, які полягають у вивченні параметрів за сталих режимів фільтрації газу і за нестационарних режимів [2–4]. Перша група ґрунтується на вимірах забійних тисків і дебітів, а також інших параметрів за сталих процесів фільтрації в пластах. Такий метод, зокрема, називають методом сталих відборів. Сутність цього методу полягає у встановленні залежності між сталим дебітом свердловини і величиною її забійного тиску. На основі цієї залежності визначають такі важливі характеристики, як коефіцієнт продуктивності свердловини й коефіцієнт гідропровідності пласта. До другої

групи гідродинамічних методів досліджень належить метод відновлення тиску [2], що ґрунтується на контролі забійного тиску й дебіту працюючої свердловини, яку раптово зупинено. Результатом досліджень, проведених за допомогою цього методу, є крива зміни дебіту свердловини як під час її роботи, так і після зупинки, а також крива відновлення (падіння) забійного тиску після зупинки.

Для встановлення втрати тиску у вибійній зоні та свердловинах необхідні значення коефіцієнтів фільтраційних опорів чи коефіцієнтів проникності ближньої та дальньої зон. Інші коефіцієнти – гідравлічний опір свердловин, величина геотермального градієнту, втрата тиску в об'язці свердловини та якість перфорації експлуатаційної колони, встановлюються в процесі проведення числових експериментів на реальних вимірних даних.

Моделі технологічних об'єктів дають змогу провести аналіз впливу факторів на режимні параметри протягом сезонів їх експлуатації та встановити характер впливу обсягів закачування та відбирання газу на тиск газу на газозбірному пункті. Серед основних факторів необхідно виділити такі: контур живлення свердловини, проникність пласта, вихрові потоки, анізотропія вибійної зони та просторова анізотропія пласта, макрошорсткість, взаємовплив свердловин, густина та параметри перфораційних каналів тощо. На можливість оцінювання факторів впливає висока ступінь невизначеності та складний нелінійний взаємний зв'язок факторів.

1. АТ "Укртрансгаз": офіц. веб-сайт. URL: <http://utg.ua/>.
2. Прытула Н.М., П'янило Я.Д., Прытула М.Г. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Растр-7, 2015. – 266 с.
3. Prytula N., Prytula M., Boyko R. Development of software for analysis and optimization of operating modes of underground gas stores // Technology Audit and Production Reserves. – 2017. – 2, No. 3. – P. 17–25.
4. Prytula N., Prytula M., Boyko R. Mathematical modeling of operating modes of underground gas storage facilities // Technology Audit and Production Reserves. – 2017. – 4, No. 1. – P. 35–42.

A METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF A MATHEMATICAL MODEL FOR A SYSTEM RESEVOIR – GAS COLLECTION POINT IN UNDERGROUND GAS STORAGEES

The problems of parameters identification of underground gas storage models have been formulated and also the algorithms of solving these problems have been proposed. It made it possible to develop software that have been tested in real conditions for several seasons of underground gas storage operation and have been provided an optimal scheduling of underground gas storage operating modes for given time intervals and optimal daily gas balancing in the gas transmission system of Ukraine.

УДК 622.691.24

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПОТОКІВ НА ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ

Мирослав Притула, Назар Притула

Філія "Науково-дослідний інститут транспорту газу" АТ "Укртрансгаз", м. Харків

Для побудови управління процесами в слабоформалізованих та слабоструктурованих складних динамічних системах часто використовують когнітивне моделювання, яке базується на понятті когнітивної карти. Когнітивна карта – це інструмент формального представлення й аналізу економічних, соціальних, екологічних та інших процесів. Як правило, когнітивна карта є знаковим орграфом, дугам (орієнтованим ребрам) якого поставлено у відповідність ваги. Множина вершин когнітивної карти відповідає чинникам, що визначають ситуацію, а множина дуг – причинно-наслідковим зв'язкам між чинниками. Когнітивні карти служать засобом структуризації та формалізації ситуації, а також її аналізу. Різні інтерпретації вершин, дуг і ваг на дугах, а також різні функції, що визначають вплив зв'язків на чинники, призводять до різних моделей і методів їх аналізу. Змінні параметри, які визначають стан системи, вимірюють різними шкалами, а закономірності змін цих параметрів не вдається з'ясувати, і тому, у таких випадках можна розраховувати на дещо спрощені і схематичні моделі. Такий підхід покладено в основу моделей, розроблених Робертсом [6] та іншими авторами [1–5]. Першою проблемою, яка тут виникає, є досягнення компромісу між точністю моделювання і можливостями одержати потрібну інформацію. З іншої сторони, врахування багатьох параметрів призводить до громіздкості самої моделі, що робить важким або неможливим її аналіз.

Розроблені моделі і методи їхнього аналізу, які запропоновані в праці [6], є базовими, і метою цієї роботи є їхній розвиток.

Розглянуто моделі систем у вигляді зважених орграфів за припущень, що зміна їхніх параметрів відбувається у дискретні моменти часу та вплив змін значень одних параметрів системи на зміни інших параметрів відбувається за лінійним законом. Крім того, приймаємо, що для вимірювання змін значень усіх параметрів існує єдина шкала. Такі припущення лежать в основі моделей, які називають імпульсними процесами на зважених орграфах, які можна інтерпретувати як потоки на графах.

Одним із основних понять, які характеризують дану модель (у вигляді імпульсного процесу на орграфах) є стійкість (імпульсна і абсолютна).

У роботі запропоновано достатню умову того, що стійкість імпульсного графа редукується до стійкості деякого його підграфа, а також побудовано модель імпульсного графа із неодноразовою дією імпульсів, яка узагальнює

звичайну модель імпульсного графа з одночасними поступленнями (діями) імпульсів.

У результаті встановлено взаємозв'язок структури графа і стійкості імпульсного процесу на ньому; досліджено стійкість імпульсного орграфа для нелінійних імпульсних процесів та стійкість імпульсного орграфа, для якого час проходження імпульсу не завжди рівний одиниці; описано також, яким чином довільний орграф зміною (за допомогою додавання фактору та його впливу) дуг, петель можна перетворити із стійкого у нестійкий імпульсний орграф, і навпаки; встановлено зв'язок між структурою орграфу, власними значеннями матриці ваг орграфу процесу та стійкістю імпульсного процесу.

1. Дмитренко О.О., Ланде Д.В. Алгоритм розрахунку взаємного впливу вершин у когнітивних картах // Проблеми інформатизації та управління. – 2017. – 4, № 60. – С. 1–14.
2. Згуровский М.З., Романенко В.Д., Милявский Ю.Л. Принципы и методы управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем. Часть 1. // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 2. – С. 21–29.
3. Плахта Л., Прутула М. Імпульсні процеси на зважених орграфах // Вісник Львівського ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2001. – Вип. 2. – С. 209–219.
4. Плахта Л.П., Прутула М.Г., Прутула Н.М. Стійкість імпульсних процесів на зважених орграфах // Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – 2001. – № 433. – С. 239–244.
5. Прутула М., Прутула Х. Динамічна економіко-математична модель сучасної економіки // Регіональна економіка: науково-практичний журнал. – 2001. – № 3. – С. 47–56.
6. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – Москва: Наука, 1986. – 496 с.

METHODS OF ANALYSIS OF FLOWS ON WEIGHTED GRAPHS

The relationship between the structure of a graph and the stability of the impulse process on it have been investigated and also the ways of changing the stability / instability of the impulse process on the weighted graph have been induced. We propose a sufficient condition of that the stability of the impulse graph is reduced to the stability of some of its subgraphs. The model of an impulse graph with non-simultaneous action of impulses have been constructed. This model generalizes the ordinary model of an impulse graph with simultaneous actions of impulses.

УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕХАНІКИ

Ольга Грицина

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;
Інститут будівництва та архітектури Словацької академії наук, м. Братислава

Класичні континуальні теорії не відображають вплив мікроструктури матеріалу, а відтак не можуть бути застосовані для вивчення малорозмірних структур. У рамках континуальної механіки для дослідження мікро- чи нано-розмірних структур застосовують узагальнені (некласичні) теорії. В останні десятиріччя інтенсивного розвитку набула локально градієнтна теорія електротермопружності, яка враховує вплив зміни мікроструктури матеріалу на термомеханічну поведінку досліджуваних об'єктів. Основні співвідношення локально градієнтної теорії діелектриків сформульовані у праці [1] з використанням підходів і методів нерівноважної термодинаміки, механіки суцільного середовища та електродинаміки.

У цій роботі запропоновано загальне варіаційне формулювання локально градієнтної теорії поляризованих термопружних середовищ. Розроблений варіаційний підхід застосовано також для вивчення прогину та поворотів у консольній п'єзоелектричній нанобалці під дією зосередженої сили, прикладеної до її вільного кінця. При формулюванні рівнянь математичної моделі використано кінематичні гіпотези теорії балок Тимошенка. На рис. 1 подано результати числових досліджень для нанобалок з характеристиками матеріалу PZT-5H.

Аналіз отриманих результатів засвідчив, що прогин і повороти, розраховані в рамках локально градієнтної теорії пружних балок, менші, ніж передбачає класична теорія. Врахування у модельному описі п'єзоелектричних властивостей матеріалу істотно посилює цей ефект. Вплив локального зміщення маси є вираженішим у балках, товщина яких сумірна до внутрішньої характерної віддалі матеріалу.

Роботу виконано за фінансової підтримки Slovak Research and Development Agency (грант номер SK-CN-RD-18-0005) та Національної академії наук України (проект номер 0117U004156).

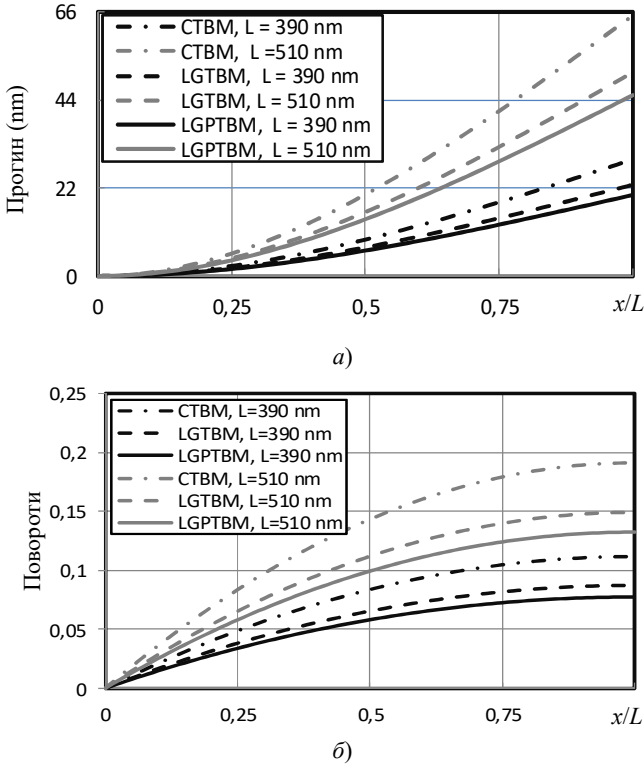


Рис. 1. Прогин (а) та поворот (б) нанобалки, передбачені класичною теорією Тимошенка (CTBM), локально градієнтною теорією балок Тимошенка з (LGTBM) та без (LGPTBM) урахування п'єзоелектричних властивостей матеріалу

1. Hrytsyna O., Kondrat V. Local gradient theory for dielectrics: fundamentals and applications. 1st ed. – Singapore: Jenny Stanford Publishing Pte. Ltd., 2020. – 312 p.

VARIATIONAL FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF LOCAL GRADIENT ELECTROTHERMOMECHANICS

Making use of the gradient-type constitutive relations of the local gradient electrothermoelasticity, the governing equations and the corresponding boundary conditions for piezoelectric solids are derived from the variational principle. The above variational principle was utilized to get an analytical solution to the cantilevered piezoelectric beam subjected to the end-point loading. The kinematic hypotheses of the Timoshenko beam theory were used to obtain the coupled differential equations governing the state of dielectric nano-beam. It is shown that the local mass displacement and material piezoelectric properties being taken into consideration stiffens the nanocantilever beam.

УДК 539.3

ПРОФЕСОР ВАСИЛЬ ЧЕКУРІН: НАУКОВЕЦЬ І НАСТАВНИК

Ольга Грицина^{1,2}, Оксана Кравчишин³, Леся Постолак³

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Інститут будівництва та архітектури Словацької академії наук, м. Братислава;

³Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

8 квітня 2021 року раптова хвороба перервала життя непересічної людини, відомого українського вченого, доктора фізико-математичних наук, професора Василя Феодосійовича Чекуріна.

Василь Феодосійович – яскравий представник Львівської школи механіків. Він сформувався як науковець під впливом академіка НАН України Ярослава Підстригача та члена-кореспондента НАН України Ярослава Бурака. Це зумовило надзвичайну широту його наукових інтересів, пов'язаних з теоретичною, експериментальною та математичною фізикою, механікою суцільного середовища й обчислювальною математикою.

Професор Василь Чекурін вніс вагомий вклад у розвиток теоретичних та експериментальних методів дослідження зв'язаних процесів у металах, діелектриках та напівпровідниках. Значним є його доробок у побудову аналітично-числових підходів до розв'язування прямих та обернених задач теорії взаємодії фізико-механічних полів у пружних, термопружних й електротермопружних тілах.

Важливою особливістю його непересічного таланту був творчий підхід до розв'язання найскладніших проблем математичної фізики. Його перші результати, які склали основу кандидатської дисертації, належать до теорії напівпровідників. Завдяки комплексному використанню підходів і методів континуальної механіки, термодинаміки нерівноважних процесів, електродинаміки, мікроскопічної і статистичної фізики ним було запропоновано математичні основи для кількісного вивчення поведінки напівпровідникових структур за дії на них зовнішнього силового навантаження, електромагнітного й температурного полів. Розроблена теорія враховувала вплив дефектів структури, властивостей поверхні та меж розділу матеріалів на поведінку твердих тіл. Ці дослідження були узагальнені у блискучій монографії [1]. Згаданий цикл досліджень, а також запропонована термодинамічна теорія кінетичних явищ у деформованих напівпровідникових тілах мали значний вплив на розвиток математичної теорії напівпровідників.

У 1998 році Василь Чекурін захистив докторську дисертацію, спрямовану на побудову математичних моделей і методів термомеханіки провідно діелектричних тіл. Надалі він зацікавився методами та засобами неруйнівного контролю й діагностики матеріалів та технічних пристроїв, вивчає закономірності поширення пружних хвиль у твердих тілах, що дозволяє побудувати математичні моделі для опису поширення пружних збурень у неоднорідно деформова-

них ізотропних твердих тілах. Ці моделі є ефективними для розв'язування прямих і обернених задач механіки, зокрема, щодо аналізу впливу параметрів полів початкових напружень твердого тіла на швидкість і час поширення імпульсу деформації. Ці дослідження склали основу монографії [3]. Після її виходу автори вивчали вплив напружено-деформованого стану твердого тіла на процеси відбивання й заломлення ультразвукових хвиль від його меж.

Василь Чекурін невпинно прагнув до розширення кола наукових інтересів. Він надавав перевагу оригінальним підходам у своїх дослідженнях. Тут слід згадати роботи, присвячені розвитку варіаційних методів розв'язування прямих і обернених задач теорії пружності для тіл з циліндричними та плоскими межами. Запропонована ним модель залишкових напружень у кусково-однорідних тілах з тонкими з'єднаннями була застосована для знаходження розв'язків низки прямих та обернених осесиметричних задач теорії пружності для скінченних та півбезмежних тіл.

Науковий доробок професора Василя Чекуріна надзвичайно широкий і різноплановий. Він охоплює 4 монографії [1–4], 19 винаходів і патентів та понад 300 наукових публікацій.

Високі професійні якості у поєднанні з його принциповістю та вродженою інтелігентністю принесли Василю Феодосійовичу заслужену повагу та авторитет серед наукової громади. Він був відомий не лише як талановитий вчений-дослідник, а й як блискучий педагог і науковий керівник, який дав поштовх творчому розвитку багатьох молодих дослідників: за його керівництва та консультування захищено докторську і 5 кандидатських дисертацій. Упродовж останніх років він успішно поєднував наукову роботу з викладацькою, читав загальні та спеціальні курси, керував дипломниками та аспірантами. Василь Феодосійович пішов із життя повний творчих планів та ідей.

Василь Чекурін – мрійник, фізик з душею поета, людина непересічної ерудиції та культури. Однаково легко йому вдавалося писати вірші та розв'язувати складні технічні проблеми. Він захоплювався поезією та художньою літературою, умів підтримати друзів у скрутні для них хвилини. Ми пам'ятатимемо його як надзвичайно яскраву людину, яка любила життя в усіх його проявах.

1. Бурак Я.И., Чекурин В.Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
2. Чекурин В.Ф. Термодинамична теорія кінетичних явищ у деформівних напівпровідниках. – Львів: ЛОИМІО, 1999. – 72 с.
3. Чекурин В.Ф., Кравчишин О.З. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. – Львів: Сполом, 2008. – 154 с.
4. Бурак Я.И., Чапля С.Я., Нагірний Т.С., Чекурин В.Ф. та ін. Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: Сполом, 2004. – 264 с.

PROFESSOR VASYL CHEKURIN: SCIENTIST AND ADVISOR

This talk addresses a brief overview of the scientific achievements of Prof. Vasyl Chekurin.

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНИЙ РОЗІГРІВ ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ В УДАРНІЙ ХВИЛІ СКРУТУ

Василь Перепічка, Іван Шацький

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ

Розглянуто нестационарну задачу про поширення ударної хвилі скруту в півнескінченному пружному стержні за наявності фрикційного проковзування на бічній поверхні. Теплоутворення від тертя враховано в локально адіабатичному наближенні. Нелінійна крайова задача для знаходження кута закручування стержня $\varphi(x, t)$ та температури контакту $\vartheta(x, t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi'' + G^{-1}\tau_\varphi &= \dot{\varphi}, & \dot{\vartheta} + \gamma\tau_\varphi\dot{\varphi} &= 0, & x > 0, t > 0, \\ \tau_\varphi &= -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{\varphi}, & \dot{\varphi} \neq 0 \text{ або } \dot{\varphi} &= 0, & |\tau_\varphi| < \tau_c, \\ \varphi(x, 0) &= 0, & \dot{\varphi}(x, 0) &= 0, & \vartheta(x, 0) &= 0, & x > 0, \\ \varphi'(0, t) &= \frac{1}{G}\tau_0(t), & \varphi(\infty, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $x = 2X/R$, $t = 2cT/R$ – безрозмірні координата та час, R – радіус кругового поперечного перерізу, $c = \sqrt{G/\rho}$ – швидкість хвилі скруту, τ_φ – дотичне напруження на бічній поверхні, τ_c – порогове тертя, γ – зведений коефіцієнт фрикційного теплоутворення, $\tau_0(t)$ – задане напруження на торці стержня.

За ударного навантаження сталим крутним моментом $\tau_0(t) = \tau_0 H(t)$, $\tau_0 = \text{const}$, де $H(t)$ – функція Гевісайда, задача (1) лінеаризується: $\tau_\varphi = -\tau_c \operatorname{sgn} \tau_0 H(t-x)$, а її розв'язок буде у вигляді аналітичного виразу. Проаналізовано структуру області руху, розподіл нестационарних полів швидкості, деформації та температури, а також картину залишкових напружень після зупинки стержня.

FRICION HEATING OF AN ELASTIC ROD IN A SHOCK TORSION WAVE

A problem on the torsion shock-wave propagation in an elastic rod with the heat-producing friction on the lateral surface is solved.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ВСТАНОВЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ПИТОМИХ ОБ'ЄМІВ ФАЗОВИХ СКЛАДОВИХ У СТАЛЕВИХ ПЛАСТИНАХ ЗА НАГРІВУ-РУХОМИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Томаш Волчанські¹, Олександр Гачкевич², Тереза Козакевич², Володимир Кукареко³

¹Політехніка Опольська, м. Опольце;

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

³Об'єднаний інститут машинобудування НАН Білорусі, м. Мінськ

Розглянуто варіант методики встановлення значень питомих об'ємів фазових складових у тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластинах при високотемпературному нагріві та наступному охолодженні, необхідних при моделюванні і оптимізації залишкових фазового і напруженого станів конструктивних елементів різного інженерного призначення, зокрема, оболонки і пластин при локальному оптимальному відпаді [1]. Рівень цих станів пов'язаний зі структурними перетвореннями в сталі. Відзначимо, що при охолодженні перетворення $A \rightarrow (F + P)$ (аустеніт \rightarrow ферито-перліт) пов'язане зі зміною питомого об'єму модифікації заліза на 1%, а перетворення $A \rightarrow M$ (аустеніт \rightarrow мартенсит) – зі зміною на 4%. Особливо важливим є те, що перетворення $A \rightarrow M$ відбувається за температури, при якій в метали зникає пластичність, характерна для підвищеної температури (наприклад, для нелегованої сталі за температури не вище 450°C). Такі зміни викликають в основному пружні деформації і відповідні напруження, які при охолодженні стають залишковими.

Висвітлено питання, пов'язані з коректними обчисленнями з достатньою точністю значень питомих об'ємів фазових складових, які виникають при розпаді аустеніту: ферито-перліту, бейніту і мартенситу. Такі об'єми виступають при застосовуваному моделюванні (за використання комплексної задачі термомеханіки при врахуванні фазових перетворень) залишкових структурного і напруженого станів сталевих пластин за нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла. Значення цих об'ємів використовують для окремих типів низьколегованих маловуглецевих сталей, зокрема ферито-перлітних, при практичних розрахунках параметрів залишкових фазових складових і відповідних коефіцієнтів, які містяться у виразах для питомих деформацій цих складових.

Відомі експериментальні дані про збільшення об'єму для сталі при перетворенні (розпаду аустеніту) рівному 0.1% на кожні 0.1% вуглецю (тут і надалі відповідні дані приводяться по [2]).

На основі наявних даних встановлено, що для розглядуваних в моделі Касаткіна О.Г, Зайффарта П. та ін. [2] типів сталей при монотонному охолод-

женні нижче 500°C практично не змінюється розподіл відсоткового вмісту утворених фазових складових. Залишкові напруження визначаються цими відсотковими вмістами і значеннями питомих об'ємів у нормалізованому стані, приведеному до температури $t = 20^{\circ}\text{C}$. При цьому, при незмінності відсоткового вмісту утворених фазових складових, значення питомих об'ємів при охолодженні від 500°C до 20°C змінюються істотно. Тому на цьому інтервалі структурні напруження будуть мати характер тимчасових (біжучих) напружень, які визначаються тільки миттєвими значеннями питомих об'ємів фазових складових (при наявному незмінному їх відсотковому вмісті, який встановився при охолодженні до 500°C). Вони істотно залежать від вмісту вуглецю і наявної температури та їх значення будуть асимптотично прямувати до значень залишкових напружень за зниження температури до природньої.

Відзначимо, що така поведінка залишкових напружень у залежності від температури, може бути врахована у відомій [2] моделі опису і оптимізації фазового і напруженого станів маловуглецевих низьколегованих тонких сталевих пластин за нагріву розподіленими рухомими джерелами тепла з подальшим застосуванням при уточненні режимів оптимального нагріву оболонок і пластин [1].

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проєкту СБ-460 (2020-2021) спільного конкурсу наукових проєктів НАН України та НАН Білорусі.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наукова думка, 1979. – 364 с.
2. Wolczański T., Kozakevych T., Hachkevych O. Structural and residual stress state of steel plates subjected to the heating of moving heat sources. (ISSN 1429-6063, ISBN 978-83-66033-63-4). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2019. – 290 с.

METHODOLOGY FOR ESTABLISHING THE VALUES OF THE SPECIFIC VOLUME OF PHASE COMPONENTS IN STEEL PLATES FOR MOVING HEAT SOURCE

A variant of the methodology for establishing the values of the specific volumes of phase components in thin low-carbon low-alloy steel plates at high-temperature heating and subsequent cooling is considered.

УДК 539.3

ДО МОДЕЛЮВАННЯ СПОСОБІВ НАГРІВУ-ОХОЛОДЖЕННЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ СТАЛЕВИХ ТІЛ ЗА ВРАХУВАННЯ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Томаш Волчанський¹, Тереза Козакевич², Роман Кушнір², Валентин Можаровський³

¹Політехніка Опольська, м. Опольце;

²Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

³Гомельський державний університет ім. Ф.Скорини, м. Гомель

Розглянуто вибрані проблеми моделювання та оптимізації залишкових структурного і напруженого станів сталевих тіл за технологічного нагрівання. Дані проблеми стосуються властивостей матеріалу, структури, значень питомих об'ємів фазових складових, типів термообробок, процесів, що відбуваються при них та ін. Виділено особливості способів нагріву та охолодження.

При виготовленні елементів сучасних конструкцій і машин часто використовують локальний високотемпературний нагрів, який практично реалізують за допомогою конкретних способів нагріву (газових, електричних, електромагнітних, лазерних, інфра- чи теплового опромінення і т.п.). При цьому виникають проблеми, які стосуються математичного моделювання таких дій, опису їх наявних властивостей, специфіки поведінки як тимчасових, так і залишкових фазового і напруженого станів сталевих тіл за цих дій [1].

Високі температури нагріву і режими наступного охолодження можуть змінювати структурний стан матеріалу, зокрема сталі, зумовлюючи зміну механічних властивостей (твердості, пластичності, в'язкості і ін.), а також виникнення у відповідних елементах як пластичних, так і структурних залишкових деформацій і напружень, рівні яких залежать від специфіки дії і можуть ставати більшими від допустимих.

Для прогнозування механічних властивостей елементів конструкцій і рівня залишкових напружень, що виникають у них при високотермічних способах нагріву-охолодження, є важливим і актуальним розробка методик моделювання, дослідження і оптимізації відносно різних критеріїв (функціональних, міцнісних, екологічних, інженерії безпеки та ін.) фазового і напруженого станів таких елементів у процесі нагріву – охолодження, зокрема по завершенні охолодження. Вихідними при цьому є моделювання джерел тепла і охолодження при використувананих реальних способах нагріву і охолодження, а також інженерної реалізації тих способів, за врахування супутніх факторів екологічної і технічної безпеки (особливо факторів дії як на людину і середовище праці, так і навколишнє оточення) [2].

У роботі [2] основну увагу зосереджено на рухомих розподілених джерелах тепла з декількома центрами локалізації, які не пов'язані з конкретним способом нагріву. Процес охолодження зв'язаний, в основному, з припинен-

ням дії джерел і умовами відповідного теплообміну з довкіллям, зокрема конвективного.

Найвним способом нагріву відповідають свої розподіли джерел тепла чи особливості введення енергії в об'єм розглядуваних елементів поверхневими потоками тепла чи джерелами, які можуть мати розподіл від приповерхневого до об'ємного, в тому – майже рівномірного. Зокрема для газових чи лазерних способів нагріву, а також при опроміненні в інфрачервоному спектрі, ці розподіли майже поверхневі. При цьому обов'язковим є виділення нагріву електромагнітного (індукційного), при якому в залежності від частоти, розподіл джерел відносно товщини змінюється від поверхневого (скінефект) до майже постійного. Кожному з використовуваних способів нагрівання властиві свої технічні особливості в реалізації і фактори дії на середовище праці і оточення. Варто також підкреслити, що згаданим способам нагріву відповідають, в загальному, як корисні фактори дії (технологічні, екологічні, техніки безпеки, економічні та ін.), так і негативні (температурні, шумові, шкідливі для здоров'я та ін.).

Така ситуація наявна і для способів охолодження. Окремі результати, які можна досягнути цільовим способом охолодження, обговорено в [2].

Вибір способів цільового нагріву та охолодження повинні реалізовуватись, спираючись на компромісну оцінку як отримуваних кінцевих ефектів впливу існуючих чинників (технічних, технологічних, економічних, безпеки умов праці і середовища, шкідливих для здоров'я і ін.), так і врахування наявних інженерних особливостей реалізації способів нагріву і охолодження в кожному розглядуваному випадку.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проєкту СБ-460 (2020-2021) спільного конкурсу наукових проєктів НАН України та НАН Білорусі.

1. *Коляно Ю.М., Кулик А.Н.* Температурные напряжения от объемных источников – Киев : Наукова думка, 1983. – 288 с.
2. *Wolczański T., Kozakevych T., Hachkevych O.* Structural and residual stress state of steel plates subjected to the heating of moving heat sources. (ISSN 1429-6063, ISBN 978-83-66033-63-4). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2019. – 290 с.

MODELING THE HEATING-COOLING METHOD IN THE THERMOMECHANICS OF STEEL BODIES TAKING INTO ACCOUNT PHASE TRANSFORMATIONS

The problems of modeling and optimization of the residual structural and stress state of steel bodies during technological heating are discussed.

УДК 517.958

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ПОРИСТОЇ ДЕРЕВИНИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

Богдана Гайвась, Адріан Торський, Вероніка Дмитрук

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів

У роботі наведено математичну модель процесу осушення пористої дерев'яного бруса кругового поперечного перерізу радіуса R за дії конвективно-теплого нестационарного потоку сушильного агента та запропоновано метод побудови аналітично-числових розв'язків сформульованої крайової задачі теплопровідності для деревини різних порід. Початкова температура циліндричного бруса вважалася незалежною від його довжини і змінною лише вздовж радіуса. Враховуючи симетрію граничних умов даної задачі, автори обмежились розглядом плоскої задачі теплопровідності. Введено полярну систему координат з полюсом на осі циліндра. Припускається, що режим сушильного агента є нестационарним і триетапним, тобто включає нагрів, витримку та охолодження. Процес теплопереносу в пористому круглому брусі описується рівнянням:

$$\begin{aligned} & \left(\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s \right) \frac{\partial T}{\partial \tau} + \gamma_1^2 T = \\ & = \lambda \left(r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{dT}{dr} + (\alpha^2 - \lambda^2 r^2)T \right), \quad 2\alpha + 1 > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут τ – час, r – радіус біжучої точки, $0 \leq r \leq R$, γ_1^2 – коефіцієнт розпаду частинки.

Рівняння (1) з використанням диференціального оператора Бесселя

$$B_\alpha [T, r] = \left\langle r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{dT}{dr} + (\alpha^2 - \lambda^2 r^2)T \right\rangle$$

для приведеної об'ємної теплоємності c_p та усередненої теплопровідності λ в квазігомогенному наближенні, яке можна застосовувати в задачах сушіння деревини при допустимих градієнтах температури, має вигляд [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \gamma^2 T = a^2 B_\alpha [T, r], \quad \gamma^2 = \frac{\gamma_1^2}{c_p}, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

де $a^2 = \lambda(\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s)^{-1}$ – приведений коефіцієнт теплопровідності.

Побудовано розв'язок рівняння (2) за таких крайових умов:

$$T(\tau, r)|_{\tau=0} = g(r), \quad r \in (0, R); \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha T) = 0, \quad \left(\alpha_{11}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^1 \right) T|_{r \rightarrow R} = T_a(\tau). \quad (4)$$

Тут T_a – температура сушильного агента; γ^2 відповідає за розмноження частинок пароповітряної суміші (приведений коефіцієнт розпаду) в пористому матеріалі за дії сушильного агента; індексами ν, a, s позначено компоненти пари, повітря та скелету відповідно; $\Pi, C_\nu, C_a, C_s, \rho_\nu, \rho_a, \rho_s$ – пористість, теплоємність, густина пари, повітря, скелету; λ – приведений коефіцієнт теплопровідності; $\alpha_{11}^1, \beta_{11}^1$ – коефіцієнти теплопровідності та теплообміну на зовнішній бічній поверхні циліндра.

Оскільки довжина стовпця матеріалу є набагато більшою за розміри поперечного перерізу, а коефіцієнт вологопровідності матеріалу вздовж волокон деревини є набагато більшим за значення цього коефіцієнта поперек волокон та через велику складність структури матеріалу деревини, розглянуто плоску усереднену задачу теплопровідності. Як інструмент опису теплопровідності використано диференціальні рівняння моделювання нестационарних процесів. Розв'язки задачі знайдено методом інтегральних перетворень [2, 3].

1. Уголев Б.Н., Скуратов Н.В. Моделирование процесса сушки древесины // Сборник научн. трудов МЛТИ. – 1992. – №. 247. – С. 133–141.
2. Ленюк М.П., Михалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лебедева. – Чернівці: Прут, 2002. – 279 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Гос. издат. физ. мат. лит, 1963. – 1099 с.

MODELING OF THE DRYING PROCESS FOR POROUS WOOD OF CYLINDRICAL SHAPE

A mathematical model of the drying process of a porous wooden bar of circular cross-section under the action of the convective-thermal non-stationary flow of drying agent is presented. On its basis, the solutions of the boundary value problem of the heat conduction theory are obtained for the analytical and numerical study of these processes in different types of wood.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У МЕТАЛІЗОВАНІЙ ФЕРИТОВІЙ ПЛАСТИНІ, ЗУМОВЛЕНИХ ОБ'ЄМНИМИ МАГНІТОСТАТИЧНИМИ ХВИЛЯМИ

Роман Івасько¹, Карен Казарян², Аніда Станік-Беслер³, Дмитро Тарлаковський⁴

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Інститут механіки НАН Вірменії, м. Єреван;

³Політехніка Опольська, м. Опольце;

⁴Інститут механіки МДУ, м. Москва

Мініатюризація пристроїв надвисокочастотної (НВЧ) техніки є неможливою без використання довгохвильових когерентних (з постійною різницею фаз) дипольних спінових хвиль (магнітостатичних хвиль – МСХ) у феритових плівках. За континуального підходу їх подають у вигляді хвиль прецесії вектора спонтанної намагніченості. Ці хвилі збуджуються і приймаються за допомогою вузьких металевих провідників (антен), розташованих на поверхні плівки. Тип збудженої хвилі визначається напрямом постійного магнітного поля. МСХ суттєво відрізняються від звичайних НВЧ електромагнітних хвиль широким діапазоном частот (1 – 110 ГГц), можливістю електричної перебудови частоти (змінюючи зовнішнього сталого магнітного поля), відносно низькою груповою швидкістю, можливістю керування дисперсією (змінюючи геометричні розміри хвилеводу чи резонатора), невеликими втратами, простотою способів збудження та ресстрації [1].

У літературі ґрунтовно проаналізовано умови збудження та поширення МСХ у феритових елементах електротехнічних пристроїв, але практично не розглядаються теплові та механічні процеси, що їх супроводжують. У більшості цих праць не досліджено умови часткового поглинання матеріалом енергії МСХ, наслідком якого є його нагрівання, а також виникнення механічних напружень, спричинених нагрівом чи силовими чинниками дії поля.

У роботі визначено та досліджено параметри фізико-механічних процесів у металізованій намагніченій феритовій пластині за дії нормального постійного і дотичного гармонічного магнітних полів. Електромагнітне поле вважаємо зовнішньою дією, яка проявляється в середовищі через енергетичні (притік енергії або тепловиділення) та силові чинники (пондеромоторні сили та моменти сил). У такому наближенні визначення температурних полів і напружень у тілі зведено до послідовного розв'язування відповідної задачі електродинаміки (перший етап) та задачі термопружності (другий етап) за заданих початкових і крайових умов.

Використовуючи при розв'язанні нелінійних рівнянь електродинаміки метод малого параметра [2] (за обмеження двома членами розкладу) отримано вирази для напруженості, намагніченості та індукції магнітного поля. Визначено інтервал частот, за яких у пластині виникають і поширюються об'ємні МСХ. У межах смуги пропускання проаналізовано частотні залежності хвильових чисел, амплітуд гармонік намагніченості та індукції магнітного поля, температури, нормальних та дотичних напружень, а також розподіли температури та напружень за товщинною координатою.

Виявлено, що амплітуди намагніченості та індукції магнітного поля практично збігаються (тобто порівняно з ними амплітуда напруженості магнітного поля є нехтовно малою). Показано, що нормальні напруження σ_{zz} є нехтовно малими, порівняно з напруженнями σ_{xx} . Зазначено, що об'ємні МСХ приводять до появи компоненти π_{xy} антисиметричного тензора натягів Максвелла (нехтовно малої, порівняно з напруженнями σ_{zz}).

Отримано, що амплітуди намагніченості та індукції магнітного поля, а також температура та механічні напруження досягають максимальних значень на першій граничній частоті. Визначено критичне значення напруженості гармонічного магнітного поля, за якого температура досягає точки Кюрі (матеріал втрачає феромагнітні властивості), наслідком чого стає неможливість поширення об'ємних МСХ.

1. *Hachkevych O.R., Solodyak M.T., Terlets'kyi R.F., Ivas'ko R.O.* Three-dimensional magnetostatic waves caused by electromagnetic fields in metallized ferrite plates // J. Mat. Sci. – 2019. – **55**, No. 3. – P. 327–336.
2. *Hachkevych O.R., Solodyak M.T., Terlets'kyi R.F., Tarlakovskii D.V.* Electrodynamic relations, energy and force factors of the actions of electromagnetic fields for magnetic media // J. Mat. Sci. – 2015. – **50**, No. 4. – P. 545–554.

MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICO-MECHANICAL PROCESSES IN METALLIZED FERRITE PLATE CAUSED BY THREE-DIMENSIONAL MAGNETOSTATIC WAVES

By using a well-known technique for finding the characteristics of magnetic field based on the method of decomposition of unknown quantities in the series by a small parameter (chosen as the ratio of amplitude of the tangential harmonic field to the amplitude of normal constant field) and restricting ourselves to the first two terms of decomposition, were determined and investigated the conditions of excitation and the regularities of propagation of three-dimensional magnetostatic waves (3DMSW) in metallized normally magnetized ferrite plate, depending on the character of the external electromagnetic field and electrophysical characteristics of the material.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ

міні-симпозіум до 85-річчя від дня народження доктора технічних наук,
професора **Юрія Михайловича КОЛЯНА**

MATHEMATICAL METHODS IN MECHANICS AND THERMOMECHANICS

mini-symposium dedicated to the 85th Anniversary of Doctor of Technical
Sciences, Professor **Yuriy KOLYANO**

ЮРІЙ МИХАЙЛОВИЧ КОЛЯНО

(24.09.1936 – 19.10.1990)

Відомий учений-механік Юрій Михайлович Коляно народився 24 вересня 1936 р. в с. Трительники, Черноострівського (тоді Волочиського) району, Хмельницької області в сім'ї вчителів.

Нелегкі роки його дитинства і юності пройшли в містечку Чорний Острів. Після закінчення середньої школи навчався на механіко-математичному факультеті Львівського державного університету за спеціальністю «механіка», який успішно закінчив у 1959 році. Упродовж наступних двох років працював інженером на Уральському машинобудівному заводі (сьогодні м. Єкатеринбург, Росія), а опісля – у Фізико-механічному інституті (м. Львів). Усе його подальше життя пов'язане з Інститутом прикладних проблем механіки і математики Академії наук України, створеним у 1978 році на базі Львівського філіалу математичної фізики Інституту математики АН України. Разом зі своїм учителем, видатним українським ученим-механіком, професором і академіком Ярославом Степановичем Підстригачем, Юрій Михайлович Коляно брав активну участь у творенні і становленні Інституту і по праву вважається одним із його засновників.

Плідна співпраця з академіком Я.С. Підстригачем почалася ще під час навчання в університеті, де останній читав спеціальні курси з термомеханіки. Пізніше Юрій Михайлович навчався в аспірантурі під керівництвом Ярослава Степановича, після успішного закінчення якої в 1964 р. захищає в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка АН України дисертацію «Температурні напруження в тонких пружних пластинках з тепловіддачею при нестационарному тепловому режимі» на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, а в 1972 р., там же, – дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук під назвою «Основи теорії і розрахунків нестационарних температурних полів і напружень в анізотропних та ізотропних пластинках з теплообміном». Перетнувшись раз, долі цих двох великих вчених – учителя і учня – більше не розходились. Вони навіть пішли з цього світу одного і того ж 1990 року.

Завдяки природному розумові, надзвичайній працелюбності та неперсичним здібностям організатора науки Ю.М.Коляно стає відомим ученим і вчителем, виховує і гуртує навколо себе потужний загін науковців. У 1974 році він ініціює створення в Львівському філіалі математичної фізики



Інституту математики АН України відділ термомеханіки, який очолює до кінця свого життя. В 1976 р. йому було присвоєно вчене звання професора.

Наукова спадщина професора Ю.М. Коляна нараховує біля 300 статей та 7 монографій, в яких започатковано підходи до розв'язання найактуальніших фундаментальних та прикладних проблем механіки деформівного твердого тіла. Високе визнання наукової громадськості в нашій країні та за її межами отримали його результати у галузі узагальненої термомеханіки, механіки неоднорідних структур, технологічної термомеханіки та неруйнівних методів визначення фізико-механічних характеристик матеріалів. За фундаментальні дослідження в галузі термомеханіки в 1978 році він стає разом з академіком Я.С. Підстригачем лауреатом премії імені М.М. Крилова Академії наук України.

Здобутки в області фундаментальної науки дозволили йому розв'язати багато вагомих прикладних проблем, здійснити ряд винаходів. Значна частина з них була виконана у співпраці з працівниками Львівського ВО «Кінескоп» відповідно до програми робіт міжвідочого цільового науково-виробничого об'єднання «Екран», яке він очолював. За цикл прикладних розробок в галузі приладобудування «Механіко-математичне обґрунтування, розробка і впровадження високоефективних технологій виготовлення електронно-променевих приладів» в 1981 році йому, в складі авторського колективу, присуджена Державна премія України в галузі науки і техніки.

Професор Коляно Ю.М. був ініціатором проведення в 1976, 1978, 1981 роках наукових конференцій по комплексній науково-технічній програмі «Якість електронно-променевих приладів» і по праву вважається, разом з академіком Я.С.Підстригачем, фундатором вже традиційної Міжнародної наукової конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", перша з яких відбулася у 1983 році.

Поряд з науковою роботою професор Коляно Ю.М. багато сил і енергії віддавав педагогічній діяльності. Упродовж років він читав лекції студентам Львівського державного університету ім. Івана Франка та Львівського політехнічного інституту. Продовжують і розвивають ідеї професора Ю.М. Коляна понад 30 вихованих ним кандидатів і докторів, які працюють у наукових та учбових закладах України. Його діти – син Ярослав та донька Ольга, також стали кандидатами наук у галузі механіки деформівного твердого тіла, працюють доцентами на математичних кафедрах в Українській академії друкарства та Національному лісотехнічному університеті.

Коротким, але яскравим було життя прекрасного вченого, організатора науки і громадського діяча, педагога, простої, доброї, чуйної, справедливої, доброзичливої і щирої людини, яка любила людей і вміла привернути їх до себе – доктора технічних наук, професора Юрія Михайловича Коляна.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕСКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ З ДЕФЕКТАМИ РІЗНОГО ТИПУ ПРИ КОЛИВАННЯХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Ольга Кирилова, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса

Розглядається нескінченний пружний циліндр з твірними, паралельними до осі Oz , у якому є два дефекти, що містяться на двох неперетинних відрізках, які не виходять за межі перерізу. Контуром перерізу циліндричного тіла площиною xOy є обмежена довільна замкнена гладка крива $r(\varphi) = r_0\psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. У циліндрі відбуваються коливання поздовжнього зсуву, зумовлені дією на бічну поверхню гармонічного за часом самозрівноваженого навантаження $GP(\varphi)\exp(-i\omega t)$ (далі множник $\exp(-i\omega t)$ опущено і розглядаються лише амплітудні значення). За таких припущень тіло перебуває в умовах антиплоскої деформації і єдина відмінна від нуля z -компонента вектора переміщення задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1)$$

За умови навантаження на поверхні циліндричного тіла виконується рівність щодо зсувних напружень:

$$\tau_{\bar{r}z}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Крайові умови на дефектах формулюються у системі координат $x_i O_i y_i$, $i = 1, 2$, що пов'язані безпосередньо з ними. Нехай $w_k(x_k, y_k)$ – z -компонента вектора переміщень при переході від полярних координат до локальних декартових. Поверхня тріщин вважається вільною від навантажень, тоді відповідні крайові умови у випадку тріщин:

$$\tau_{zy_i}(x_i, 0) = G \frac{\partial w_i(x_i, 0)}{\partial y_i} = 0, \quad |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Розриви переміщення $w_i(x_i, y_i)$ на поверхні тріщин задано невідомими стрибками

$$\langle w_i \rangle = w_i(x_i, +0) - w_i(x_i, -0) = \chi_i(x_i), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

На поверхні включення за повного зчеплення виконуються рівності:

$$w_i(x_i, \pm 0) = d_i, \quad |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

і мають розриви дотичні напруження $\tau_{zy_k}^k$ зі стрибками

$$\langle \tau_{zy_k}^k \rangle = G(\tau_{zy_i}(x_i, +0) - \tau_{zy_i}(x_i, -0)) = \chi_i(x_i), \quad |x_i| < a_i. \quad (6)$$

Отже, аналіз поведінки тіла зводиться до розв'язання диференціального рівняння (1) з крайовими умовами (2)–(6) в залежності від типу дефекту.

Для розв'язання задачі використано підхід, що дозволяє окремо задовольняти умови на поверхнях дефектів (3), (5) і на межі циліндра (2). Він полягає у поданні переміщення у вигляді суми розривних розв'язків (1), побудованих для відповідних дефектів, і деяких невідомих функцій, які теж є розв'язками рівняння (1) та за рахунок яких задовольняються умови на поверхні циліндра (2). Ці функції розшукуються у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівнянь Гельмгольца, що утворюють повні замкнені системи функцій в будь-якій замкненій області. В результаті задача зводиться до розв'язання сукупності систем інтегро-диференціальних рівнянь на дефектах, що відрізняються лише правими частинами. Наближені розв'язки цих систем отримано методом механічних квадратур. Після цього невідомі коефіцієнти лінійної комбінації визначаються з граничних умов на поверхні циліндра (2) методом колокації.

Отримано наближені формули для розрахунку КІН, за допомогою яких проведено числове дослідження резонансних явищ, досліджено вплив на КІН значення частоти коливань, розташування і взаємодії дефектів в ньому.

STRESS STATE OF AN INFINITE CYLINDER OF ARBITRARY CROSS-SECTION WITH DEFECTS OF VARIOUS TYPES UNDER OSCILLATIONS OF LONGITUDINAL SHEAR

The dynamic stress state in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with two defects of various types is determined. The proposed method of solution enables to separately satisfy the boundary conditions on the defects, and then on the boundary of the cylinder. This significantly simplifies the numerical implementation. Approximate formulas for calculating the SIF are obtained and the influence of frequency oscillations and location of the defects on their values are investigated.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ОКОЛІ ТУНЕЛЬНИХ ДЕФЕКТІВ З ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ ЛАМАНИХ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ З ХВИЛЯМИ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Андрій Мішарін, Оксана Литвин, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса

Розв'язано задачі про дослідження концентрації напружень в околі тунельних дефектів, переріз яких координатною площиною має вигляд ламаної складеною з N ланок (рис. 1).

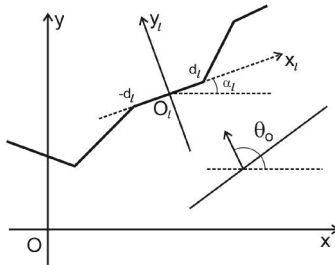


Рис. 1

Розглянуто 3 типи дефектів: тріщина, тонке жорстке включення, тонке жорстке включення, від якого під довільним кутом відходять тріщини. На дефект діє навантаження гармонічною хвилею поздовжнього зсуву, яке викликає у тілі переміщення

$$W^0(x, y) = A_0 \exp(ik_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)), \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де G , ρ – густина і модуль зсуву пружного тіла, θ_0 – кут між напрямком поширення хвилі і віссю Ox , ω – частота коливань. Залежність від часу визначається множителем $\exp(-i\omega t)$, який опущено для скорочення запису. Єдина, відмінна від нуля в умовах антиплоскої деформації z -компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля $W(x, y)$ задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \kappa_2^2 W = 0. \quad (2)$$

Для формулювання умов на поверхнях дефектів з кожною його планкою пов'язано локальну систему координат $O_l x_l y_l$, $l = 1, 2, \dots, N$ (рис.1). Нехай

$W_l(x_l, y_l)$, $W_l^0(x_l, y_l)$ – переміщення розсіяної і падаючої хвилі в системі координат, пов'язаною з l -ю ланкою дефекту. Тоді, якщо це ланка тріщини, то на ній мають виконуватися умови:

$$\tau_{zy_l}(x_l, 0) = -\tau_{zy_l}^0(x_l, 0), \quad W_l(x_l, +0) - W_l(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad -d_l < x_l < d_l. \quad (3)$$

Відповідно на ланці включення умови мають вигляд:

$$W_l(x_l, 0) = C - W_l^0(x_l, 0), \quad \tau_{zy_l}(x_l, +0) - \tau_{zy_l}(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad -d_l < x_l < d_l. \quad (4)$$

В рівностях (3), (4) $\chi_l(x_l)$ – невідомі стрибки переміщень або напружень на поверхні дефекту, d – невідома амплітуда коливань включення, яка визначається з рівняння його руху.

Для розв'язання сформульованої задачі (2)–(4) для кожної ланки дефекту в локальній системі координат $O_l x_l y_l$ будується [1] розривний розв'язок $W_l^d(x_l, y_l)$ рівнянь (2) зі стрибками (3), (4). Переміщення розсіяного хвильового поля подаються у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^n W_l^g(x, y),$$

де $W_l^g(x, y)$ – розривні розв'язки $W_l^d(x_l, y_l)$ після переходу до системи координат Oxy .

Відносно невідомих стрибків $\chi_l(x_l)$ з умов на ланках (3), (4) отримано систему N сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Для їх числового розв'язання створено метод, який враховує справжню особливість розв'язків і базується на спеціальних квадратурних формулах для сингулярних інтегралів.

1. *Понов В.Г.* Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динамические системы, – 1993. – Вып. 12. – С. 14–23.

DETERMINATION OF THE STRESS STATE NEAR TUNNEL DEFECTS WITH A CROSS SECTION IN THE FORM OF A BROKEN LINE INTERACTING WITH WAVES OF LONGITUDINAL SHEAR

A problem on the determination of stresses state in the vicinity of the tunnel thin defects with a cross-section in the form broken line is considered. The plane harmonic waves of the longitudinal shear are propagating in the body with these defects. The problem is reduced to solving a system of singular integral or integro-diferencial equathions with fixed singularities. For the numerical solution of this system, the method takesin account the true asymptotics of unknown functions and uses spetial quadrature formulas for singular integrals is applied.

УДК 539.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ніна Антоненко¹, Ірина Ткаченко²

¹Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя;

²Запорізький національний університет, м. Запоріжжя

Розглядається багатошарова плита, що складається з n пружних, однорідних та невагомих шарів. На спільних межах шарів виконуються умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів [2]. На верхній та нижній межах плити задано напруження та температуру. Необхідно знайти термо-напружено-деформівний стан у всіх точках плити в рамках осесиметричної деформації. У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат [1].

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z,1}(\rho, 0) = \sigma(\rho), \quad \tau_{\rho z,1}(\rho, 0) = \tau(\rho), \quad T_1(\rho, 0) = f(\rho),$$

$$\sigma_{z,n}(\rho, h_n) = \tilde{\sigma}(\rho), \quad \tau_{\rho z,n}(\rho, h_n) = \tilde{\tau}(\rho), \quad T_n(\rho, h_n) = \tilde{f}(\rho),$$

де $\sigma(\rho)$, $\tilde{\sigma}(\rho)$, $\tau(\rho)$, $\tilde{\tau}(\rho)$, $f(\rho)$, $\tilde{f}(\rho)$ – відомі функції.

Умови на спільних межах шарів плити:

$$\sigma_{z,k+1}(\rho, 0) = \sigma_{z,k}(\rho, h_k), \quad \tau_{\rho z,k+1}(\rho, 0) = \tau_{\rho z,k}(\rho, h_k),$$

$$u_{z,k+1}(\rho, 0) = u_{z,k}(\rho, h_k), \quad u_{\rho,k+1}(\rho, 0) = u_{\rho,k}(\rho, h_k),$$

$$k_{T,k} \frac{\partial T_k(\rho, h_k)}{\partial z} = \frac{1}{R_k} (T_{k+1}(\rho, 0) - T_k(\rho, h_k)),$$

$$k_{T,k+1} \frac{\partial T_{k+1}(\rho, 0)}{\partial z} = k_{T,k} \frac{\partial T_k(\rho, h_k)}{\partial z},$$

де R_k – коефіцієнти теплового опору, $k_{T,k}$ – коефіцієнти теплопровідності шарів, $k = 1, \dots, n$.

Відомо [1], що трансформанти Ганкеля напружень, переміщень та температури k -го шару можна подати у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій α_k , β_k , γ_k , δ_k , η_k , ε_k цього шару, які пов'язані з трансформантами напружень, переміщень та температури в точках верхньої межі шару. Якщо ввести допоміжний шар з номером $n+1$ та вважати, що на

спільній межі n -го та $(n+1)$ -го шарів виконуються умови ідеального теплового та механічного контактів, то за допомогою методу функцій податливості отримуємо формули для знаходження допоміжних функцій та функцій податливості шарів плити:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1} + D_k \eta_k + E_k \eta_{n+1}, \quad \varepsilon_k = -r_k \eta_k + F_k \eta_{n+1},$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{k+1} = & (M_{11,k} + M_{12,k} A_k) \bar{\alpha}_k + M_{12,k} B_k \bar{\alpha}_{n+1} + \\ & + (M_{12,k} D_k + M_{13,k}) \eta_k + (M_{12,k} E_k + M_{14,k}) \eta_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\eta_{k+1} = (C_k + L_k p S_k - r_k (S_k + L_k p C_k)) \eta_k + (S_k + L_k p C_k) F_k \eta_{n+1},$$

де $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^T$, $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^T$, $S_k = \text{sh } p_k$, $C_k = \text{ch } p_k$, $L_k = R_k k_{T,k}$; r_k , F_k та елементи матриць A_k , B_k , D_k , E_k – функції податливості плити, компоненти яких залежать лише від механічних, теплових та геометричних характеристик шарів, $M_{ij,k}$ – відомі матриці, $i=1,2$, $j=1,\dots,4$, $k=1,\dots,n$.

$$\text{Функції } \bar{\alpha}_1 = (\bar{\sigma}(p), \bar{\tau}(p))^T, \quad \eta_1 = \bar{f}(p), \quad \bar{\alpha}_{n+1} = (\bar{\sigma}(p), \bar{\tau}(p))^T,$$

$\eta_{n+1} = \bar{f}(p)$ знаходять з крайових умов задачі, а решту функцій – за наведеними вище формулами. Після підстановки отриманих допоміжних функцій у вирази для трансформант напружень, переміщень і температури та застосування до них оберненого перетворення Ганкеля відповідного порядку, отримуємо розв’язок поставленої задачі.

1. *Величко І.Г., Ткаченко І.Г.* Осесиметрична мішана задача термопружності для багат шарової основи // Динамические системы. – 2009. – Вип. 26. – С. 3–12.
2. *Немиш Б.Ю.* Об аналитическом решении одного класса трехмерных задач термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 95–103.

ON AN APPROACH TO SOLVING THE AXISYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A MULTILAYER PLATE WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

The compliance function method is proposed for the solution of axisymmetric stationary problem of thermoelasticity for a multilayer plate with non-ideal thermal contact between its layers. The recurrence relations for the auxiliary functions and the compliance functions of the plate neighboring layers were constructed.

УДК 539.3: 620.198

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ СИСТЕМИ ПІВПРОСТІР – БАГАТОШАРОВЕ ПОКРИТТЯ З ТРІШИНОЮ ПІД ПОКРИТТЯМ ЗА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Віктор Шевчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто нестационарну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям, що містить тріщину під покриттям, перпендикулярну до поверхні поділу, за конвективного теплообміну з довкіллям. Задачу розв'язано на основі принципу суперпозиції та незв'язаної термопружності. Нестационарні розподіли температури та відповідні теплові напруження для системи без тріщини отримано в замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття [1, 2]. Задачу з тріщиною сформульовано як збурену мішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини є рівним за величиною та протилежним за знаком термічним напруженням, отриманим для задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язано чисельно [3]. Виконано числові розрахунки для аналізу впливу покриття на термонапруження та коефіцієнти інтенсивності термічних напружень.

1. *Шевчук В.А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журнал. – 2013. – **86**, № 2. – С. 423–431.
2. *Шевчук В.А.* Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 157-163.
3. *Shevchuk V.A.* Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading // Journal of Thermal Stresses. – 2017. – **40**, No. 10. – P. 1215-1230.

INVESTIGATION OF THERMAL STRESS STATE FOR HALF-SPACE WITH MULTILAYER COATING WITH UNDERCOAT CRACK AT CONVECTIVE HEAT EXCHANGE

Based on the obtained analytical solution of the thermoelasticity problem for an uncracked half-space with a multilayer coating at convective heat exchange with ambient medium and using the principle of superposition, a thermoelasticity problem for a system with undercoat crack is reduced to a singular integral equation which is solved numerically. Numerical computations are performed to analyze the influence of the coating upon thermal stresses and thermal stress intensity factors.

УДК 539.3

ПРО МЕТОД ПРОДОВЖЕННЯ КРАЙОВИХ УМОВ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Володимир Острик

Інститут прикладної фізики НАН України, м. Суми

Для знаходження розв'язків плоских задач теорії пружності в областях, обмежених двома парами різних координатних ліній, пропонується використовувати розв'язки простіших задач для областей, обмежених однією парою координатних ліній, із додатковим заданням крайових умов вихідної задачі за межами області. Метод ілюструється знаходженням розв'язків наступних крайових задач теорії пружності для чвертьплощини, півсмуги та прямокутника.

1. На межі пружної чвертьплощини $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$ задано нормальні та дотичні напруження, тобто сформульовано першу крайову задачу теорії пружності для чвертьплощини. Чвертьплощину розглянуто як граничний випадок прямокутника, коли дві його суміжні сторони віддалені на нескінченність. Розв'язок цієї задачі відшукується у формі розв'язку першої крайової задачі для півплощини $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$ через комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі [3]. Крайові функції з променя $0 \leq x < \infty$, $y = 0$ продовжуються на промінь $-\infty < x < 0$, $y = 0$ та вважаються невідомими. Для їх знаходження шляхом задоволення крайових умов на промені $0 \leq y < \infty$, $x = 0$ отримано комплексне інтегральне рівняння типу згортки Мелліна [1]. Розв'язок інтегрального рівняння знайдено із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна [7]. Отримано вирази для напружень у кожній точці чвертьплощини та показано, що вони збігаються з відомими [4].

2. У півсмугі $0 \leq x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ розв'язується бігармонічне рівняння із заданою на межі півсмуги шуканою функцією та її нормальною похідною, причому останні набувають нульових значень на променях $0 \leq x < \infty$, $y = \pm h$. Розв'язок подається у вигляді розв'язку бігармонічної задачі для смуги $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ через інтеграли Фур'є з продовженням крайових умов на промені $-\infty < x < 0$, $y = \pm h$. Невідомі функції на цих променях після задоволення крайових умов на торці півсмуги $-h \leq y \leq h$, $x = 0$ визначаються із системи інтегральних рівнянь, яка перетворюється до комплексного функціонального рівняння відносно певних функціоналів шуканих функцій. До такого самого функціонального рівняння зводиться бігармонічна задача для півсмуги за методом однорідних розв'язків [6]. Отже, в цій задачі метод продовження розкриває зміст невідомих коефіцієнтів у методі однорідних розв'язків і слугує додатковим обґрунтуванням можливості подання розв'язку задачі для півсмуги у вигляді розв'язку за системою власних функцій для смуги. Функціональне рівняння розв'язано зведенням до нескінченної системи алгебричних рівнянь методом Бубнова – Гальоркіна. Отриманий методом

редукції розв'язок системи алгебричних рівнянь порівнюється з розв'язком розглядуваної задачі, знайденим методом Папковича [2, 5]. Значення шуканої функції, обчислені різними методами, збігаються до четвертого знаку.

3. Розглянуто бігармонічну задачу для півсмуги з криволінійним краєм: $\varphi(y) \leq x < \infty$, $-h \leq y \leq h$. Із застосуванням методу продовження показано, що подання розв'язку цієї задачі у вигляді розвинення за власними функціями можливо тільки за виконання умов $\varphi(h) = \varphi(-h)$, $\varphi(y) > \varphi(\pm h)$, тобто коли криволінійний край міститься всередині півсмуги з прямолінійним торцем. Аналогічно попередньому задача зводиться до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

4. Розглянуто бігармонічну задачу для прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-h \leq y \leq h$. Отримано подання розв'язку у такій самій формі, як і за методом однорідних розв'язків. Методом Бубнова – Гальоркіна функціональне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

1. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. – Москва: Наука, 1978. – 286 с.
2. *Мелешко В.В., Токовий Ю.В.* Про алгоритм П. Ф. Папковича у методі однорідних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 4. – С. 69–83.
3. *Мухомелидзе Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
4. *Острик В.И.* Симетрія інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.
5. *Папкович П.Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // *Докл. АН СССР.* – 1940. – **27**. – С. 335–339.
6. *Прокопов В.К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та.* – 1967. – № 279. – С. 31–46.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

ON THE METHOD OF CONTINUATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

To find solutions of plane problems of the theory of elasticity in domains bounded by two pairs of different coordinate lines, it is proposed to use solutions of simpler problems for domains bounded by one pair of coordinate lines, with additional setting of boundary conditions of the initial problem outside the domain. The method is illustrated by finding solutions of boundary value problems of the theory of elasticity for a quarter plane, a half strip and a rectangle.

УДК 539.3

ТРИВИМІРНЕ ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА

Віктор Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів

При вивченні пружної рівноваги елементів конструкцій за умов комплексної дії силових навантажень та розподіленої температури виникає потреба використовувати аналітичне подання розв'язку рівнянь термопружності у найбільш простому вигляді. Розглянуто тривимірний квазістатичний термопружний стан ортотропного тіла в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 . Використано співвідношення Дюгамеля – Неймана [1] і записано вирази напружень через деформації і відому температуру

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^3 B_{jk} \varepsilon_k - \beta_j T, \quad \tau_{kj} = G_{kj} \gamma_{kj}, \quad k \neq j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де B_{jk} – характеристики жорсткості ортотропного матеріалу [2], $T(x, y, z)$ – відома різниця температур, яка задовольняє рівняння

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0, \quad (2)$$

α_j, β_j – коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення [1].

Підставлено подання (1) у відомі рівняння рівноваги та записано основні рівняння термопружного тіла в лінійній постановці

$$L_j u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k + D_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} u_m - \beta_j T \right) = 0, \quad m \neq k \neq j, \quad (3)$$

які були спрощені після виключення з рівнянь (3) одного з переміщень

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L_j^1 u_j - \frac{\partial}{\partial x_j} L_k^1 u_k = (\beta_j D_{km} - \beta_k D_{jm}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \quad m \neq k \neq j, \quad (4)$$

де оператори L_j, L_j^1 , а коефіцієнти D_{jk} описані в [2].

Якщо оператори L_j^1 не еквівалентні між собою: $L_j^1 \neq c L_m^1, j \neq m, c \in \mathbb{R}$, то розв'язок систем рівнянь (3), (4) матиме вигляд

$$u_j = \prod_{k \neq j} L_k^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + \beta_j D_{km} \frac{\partial}{\partial x_j} T_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де функція Φ описана в [2], а функції T_j визначаються із трьох рівнянь

$$\beta_1 D_{23} L_1^1 T_1 - \beta_m D_{1j} L_m^1 T_m = (\beta_1 D_{23} - \beta_m D_{1j}) T, \quad m = 2, 3, \quad j \neq 1, m,$$
$$\beta_1 L_1^1 T_1 = \beta_1 T - D_{12} D_{13} \left(\beta_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} \right). \quad (6)$$

Використано подання переміщень (5) і знайдено деформації

$$\varepsilon_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \prod_{i \neq j} L_i^1 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Phi + \beta_j D_{km} \frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2}, \quad j = 1, 2, 3,$$
$$\gamma_{ni} = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} L_m^1 (L_n^1 + L_i^1) \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} (\beta_n D_{im} T_n + \beta_i D_{nm} T_i), \quad n \neq i, \quad m \neq i, n, \quad (7)$$

а із співвідношень (1) визначені компоненти напружень.

Розглянуто термопружний стан прямокутної призми, під дією температури і силового навантаження, заданого на торцях. Її напружений стан записано у вигляді розвинення за власними функціями, які на торцях призми описуються повною системою неортогональних функцій. Знайдено характеристичне рівняння для визначення власних значень. Використано рівняння (2) і розроблено методику розв'язання системи рівнянь (6).

Використовуючи знайдені розв'язки, розроблено аналітично-числовий алгоритм розв'язання крайової задачі теорії термопружності для ортотропного тіла, який базується на апроксимації напруженого стану скінченною сумою неортогональних функцій і запропонованому способі зведення задоволення всіх крайових умов до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми. Обчислено за формулами (1), (7) компоненти деформацій та напружень.

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Revenko V. P.* Presentation of a general 3D solution of equations of elasticity theory for a wide class of orthotropic materials // Scientific journal of the TNTU. – 2019. – № 3 (95) – P. 49–54.

THREE-DIMENSIONAL REPRESENTATION OF A SOLUTION TO THE EQUATIONS OF A THERMOELASTICITY PROBLEM FOR AN ORTHOTROPIC BODY

The method for representing a solution of the equations of the theory of elasticity for a wide class of orthotropic thermoelastic materials is mathematically substantiated. The equations contain nine coefficients that depend on elastic orthotropic constants and three coefficients of thermal expansion. The reduction of finding a temperature particular solution of the equilibrium equations to the integration of three partial differential equations is proposed. A method for solving the proposed equations for an orthotropic thermosensitive prism was developed by the method of separation of variables. An analytical-numerical algorithm for satisfying the boundary conditions on the surface of a prism using generalized quadratic forms has been developed.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛООВОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА ФРИКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ

Роман Кушнір, Оксана Вовк, Тетяна Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

У роботі запропоновано використання аналітично-числового підходу, що ґрунтується на застосуванні методів послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів, інтегрального перетворення Лапласа та його обернення за формулою Пруднікова, до розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл за фрикційного нагрівання. Раніше підхід був апробований на ряді задач теплопровідності для ідеально контактуючих тіл за складного теплообміну [1, 2]. Числові дослідження підтвердили ефективність його застосування до розглядуваного класу задач. Тут проведено аналогічні дослідження для термочутливих тіл за неідеального контакту, а саме внаслідок дії сил тертя. В науковій літературі знаходимо різні підходи до розв'язування таких задач, особливо багато праць стосовно даної проблематики належать Євтушенку та його учням, зокрема [3, 4]. На відміну від їхніх досліджень, де розглянуто термочутливі тіла з простою нелінійністю, використання запропонованого підходу дозволяє не накладати обмежень на характер зміни теплових характеристик матеріалів контактуючих тіл.

Визначимо нестационарні температурні поля t_j термочутливих півпростору та шару, через поверхню якого відбувається променево-конвективний теплообмін зі середовищем сталої температури t_c . З початкового моменту часу $\tau = 0$ шар починає рухатись у додатному напрямку осі Oy зі сталою швидкістю v по поверхні півпростору. Внаслідок цього відбувається нагрівання співдотичних тіл. Вважаємо, що тепловий контакт тіл є недосконалим, тобто через поверхню тертя між ними відбувається теплообмін зі сталим коефіцієнтом контактної провідності h , сума інтенсивностей теплових потоків, напрямлених всередину кожного тіла вздовж нормалі до поверхні контакту, дорівнює питомій потужності тертя $q = fvp$, де f – коефіцієнт тертя. Зношуванням поверхонь нехтуємо.

Для визначення нестационарних температурних полів півпростору та шару за описаних умов маємо нелінійну задачу теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i^j(t_j) \frac{\partial t_j}{\partial z} \right) = c_v^j(t_j) \frac{\partial t_j}{\partial \tau}, \quad j = \begin{cases} 1, & 0 < z \leq z_0; \\ 2, & z < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$t_j \Big|_{\tau=0} = t_p, \left(\lambda_t^1(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha(t_1 - t_c) + \sigma \varepsilon (t^4 - t_c^4) \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\lambda_t^2(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^1(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = q, \quad \left(\lambda_t^2(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_t^1(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = h(t_1 - t_2) \Big|_{z=0}, \quad (3)$$

де $\lambda_t^j(t_j)$, $c_v^j(t_j)$ – залежні від температури коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів півпростору та шару відповідно, t_p – їх початкова температура, α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = z_0$, σ – стала Стефана – Больцмана, ε – ступінь чорноти.

У результаті застосування аналітично-числового підходу розв'язання вихідної нелінійної задачі (1)–(3) зводиться до розв'язування з наперед заданою точністю послідовності лінійних крайових задач теплопровідності на змінні Кірхгофа з використанням перетворення Лапласа і його обернення за формулою Пруднікова з уточненими на попередньому ітераційному кроці величинами.

На основі отриманих розв'язків досліджено тепловий стан такої кусково-однорідної структури за фрикційного нагрівання та сталої температури на його поверхні. Для встановлення достовірності отриманих результатів проведено їх порівняння з результатами, отриманими в роботах [3, 4] за припущення простої нелінійності матеріалів.

1. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 4. – С. 78–87.
2. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих пів простору та шару за складного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 113–122.
3. *Свтушенко О., Куцєй М., Ох Е.* Вплив термочутливості матеріалів на температуру під час тертя // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 2014. – № 1. – С. 117–122.
4. *Свтушенко О., Куцєй М., Ох Е.* Моделювання температурного режиму гальмівної системи з урахуванням термочутливості матеріалів // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 2014. – № 3. – С. 77–83.

RESEARCH OF THERMAL STATE OF THE CONTACTING THERMOSENSITIVE BODIES UNDER FRICTION HEATING

A solution of nonlinear thermal conductivity problem for contacting thermosensitive half-space and layer under radial-convective heat exchange and friction heating using the analytical-numerical approach was constructed. The approach is based on the use of methods of successive approximations, linearizing parameters, Laplace integral transformation and its inversion according to Prudnikov's formula.

УДК 539.3:534.1

ЕНЕРГІЯ РОЗСІЯНОГО ПОЛЯ В ПІВШАРІ ЗІ ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НА ТОРЦІ

Наталія Городецька, Інна Старовойт, Тетяна Щербак

Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

В роботі проводиться аналіз процесу відбиття першої нормальної антисиметричної хвилі Релея – Лемба від торця півшару зі змішаними крайовими умовами на торці. Півшар має геометричні характеристики: $Y = \pm H$, $Z \geq 0$, $2H$ – товщина шару. Торць на проміжку $|z/H| \leq h$ жорстко защемлений, а на $|z/H| \geq h$ – вільний від напружень. Бічні поверхні півшару вільні від напружень. Розглядаються гармонічні хвильові рухи. Поставлена крайова задача відноситься до класу змішаних крайових задач, характерною особливістю яких є наявність локальної особливості по напруженням в точці зміни типу граничних умов. Для даної задачі маємо

$$t_{zy}|_{z=0} = \frac{\tau_0 \cos(\eta \lg \sqrt{h^2 - y^2})}{\sqrt{h^2 - y^2}}, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \frac{\sigma_0 \sin(\eta \lg \sqrt{h^2 - y^2})}{\sqrt{h^2 - y^2}}$$

при $y \rightarrow h - 0$.

Коливальним характером особливості в даній роботі нехтували, оскільки розмір області, в якій проявляються коливання, не є більшим за атомні зв'язки.

Для розв'язання поставленої крайової задачі, в роботі запропоновано метод суперпозиції, який дозволяє врахувати особливість по напруженням через асимптотичні властивості невідомих. Критерієм правильності отриманих результатів був контроль точності виконання закону збереження енергії, похибка виконання якого не перевищувала 0.2% енергії падаючої хвилі для всього розглянутого частотного діапазону. В роботі зроблена оцінка точності виконання крайових умов. Показано, що крайові умови виконуються з графічною точністю по всьому торцю півшару, за винятком околу особливої точки (ε). При цьому, вздовж защемленого торця півшару в околі особливої точки напруження залишаються обмеженими. Наявність області ε і обмеженість напружень обумовлена тим, що при розрахунках враховували N членів ряду, які описують хвильове поле, а починаючи з $N + 1$ члена ряду переходили до асимптотичних значень невідомих, кількість яких також було обмежено до $2N$. При збільшенні N точність виконання крайових умов покращува-

лася, область ε зменшувалась і величина напружень в околі особливої точки зростала.

Показано, що метод суперпозицій з достатньою точністю дозволяє оцінити хвильове поле в півшарі зі змішаними крайовими умовами на його торці. Отримано частотні залежності енергії, яку переносить перша відбита хвиля від частково защемленого торця в діапазоні частот, в якому можуть поширюватись дві нормальні хвилі. Встановлено, що енергія розсіяного поля суттєво залежить не лише від частоти, а й від співвідношення довжин, на яких задано кінематичні граничні умови і динамічні.

ENERGY OF THE DISTRIBUTED FIELD IN ENERGY IN THE SEMI-INFINITE STRIP WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS AT ITS EDGE

The work is devoted to the analysis of the wave field, which is excited by the reflection of the first normal propagation Rayleigh-Lamb wave from the edge of an elastic semi-infinite strip, part of which is rigidly clamped, and part is free from stresses. The boundary value problem belongs to the class of mixed boundary value problems, the characteristic feature of which is the presence of a local feature of stresses at the point of change of the type of boundary conditions. To solve this boundary value problem, the paper proposes a method of superposition, which allows taking into account the feature of stresses due to the asymptotic properties of the unknown coefficients. Asymptotic dependences for coefficients are determined by the nature of the feature, which is known from the solution of the static problem. . The criterion for the correctness of the obtained results was the control of the accuracy of the law of conservation of energy, the error of which did not exceed 0.2% of the energy of the incident wave for the entire considered frequency range. The paper evaluates the accuracy of the boundary conditions. It is shown that the boundary conditions are fulfilled with graphical accuracy along the entire end of the semi-infinite strip, except around a special point (ε). In this case, along the clamped end of the semi-infinite strip in the vicinity of a special point of stress remain limited. The presence of the region ε and the limited stresses are due to the fact that the calculations took into account the N members of the series that describe the wave field, and starting from the $N + 1$ member of the series moved to asymptotic values of unknown coefficients, the number of which was also limited to $2N$. As the value N increased, the accuracy of the boundary conditions increased, the region ε decreased, and the magnitude of the stresses near the singular point increased.

УДК 536.2

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВОГО ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ СТРУКТУР ПРОСТОЇ ГЕОМЕТРІЇ З ТЕРМОЗАЛЕЖНИМИ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ігор Махоркін¹, Ірина Литвин²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Коледж телекомунікацій та комп'ютерних технологій Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів

Запропоновано та апробовано аналітично-числову методику визначення одновимірного стаціонарного теплового та статичного термопружного станів багат шарових термочутливих структур простої геометрії (плоскі, циліндричні, сферичні тіла та їх сегменти) незалежно від характеру температурних залежностей фізико-механічних характеристик матеріалу шарів.

Розглянуто багат шарові тіла з термочутливих матеріалів, віднесені до ортогональних систем координат (декартової, циліндричної, сферичної). Граничні поверхні та поверхні спряження матеріалів співпадають з координатними поверхнями. Вважаємо, що тепловий стан обумовлено тепловим навантаженням, що спричинює одновимірне стаціонарне температурне поле.

На основі співвідношень нелінійної теорії теплопровідності та лінійної теорії термопружності неоднорідних тіл [1] сформульовано математичну модель теплової та термопружної поведінки таких структур. Вона полягає у визначенні температури та переміщення як функцій координати за розв'язками нелінійного рівняння теплопровідності та рівняння рівноваги у переміщеннях. При цьому теплофізичні і механічні характеристики структури, як єдиного цілого, подано у вигляді кусково-сталих функцій координати та температури.

З використанням аналога функції Кірхгофа та апарату узагальнених функцій, побудовано у замкнутому аналітичному вигляді аналітично-числові розв'язки одновимірних стаціонарних задач нелінійної теплопровідності та статичної термопружності шаруватих тіл простої геометрії за довільного характеру температурної залежності фізико механічних характеристик матеріалів шарів, що не потребують з'ясування однозначності.

На прикладі числового дослідження стаціонарного теплового стану та обумовленого ним статичного термопружного стану двошарової пластини, граничні поверхні якої знаходяться в умовах конвективного теплообміну з середовищами постійної температури, апробовано запропонований аналітично-числовий підхід та отримані на його основі аналітично-числові розв'язки.

Результати числових вказують на наступне:

- запропонована процедура забезпечує швидку збіжність процесу числового визначення теплового та термонапруженого станів;

- подання фізико-механічних характеристик матеріалу шарів у вигляді кусково-сталих функцій температури уможливорює визначення теплового та термонапруженого стану з довільною точністю. Так збільшення точності апроксимації вдвічі призводило у досліджуваних випадках до зменшення максимального значення приведеної відносної похибки приблизно в півтора – два рази;
- неврахування характеру температурозалежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів шарів зазвичай призводить до значних похибок в оцінці теплового та термопружного стану системи;
- у досліджуваних випадках, в залежності від структури плити, приведена відносна похибка досягала 11.9% при визначенні температури та 32.8% – для напружень;
- формальне використання апроксимації температурних залежностей ФМХ постійними величинами, що дорівнюють їх середньоінтегральним значенням може призвести до неадекватної оцінки термопружного стану об'єкта;

Запропонований аналітично-числовий підхід до розв'язання одновимірних задач стаціонарної теплопровідності та статичної термопружності шаруватих структур простої геометрії з термочутливих матеріалів дає змогу досліджувати їх тепловий та напружений стани незалежно від характеру температурних залежностей фізико-механічних характеристик матеріалів шарів.

1. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.

ON AN APPROACH TO ANALYTICAL-NUMERICAL DETERMINATION OF STATIC THERMOELASTIC STATE OF LAYERED STRUCTURES OF SIMPLE SHAPE WITH THERMO-DEPENDENT PHISICOMECHANICAL PROPERTIES

An approach to the analytical-numerical determination of the one-dimensional thermoelastic state of layered bodies of simple shape taking into account the thermosensitivity of the physical-mechanical characteristics of the material, regardless of its nature, is proposed. It is based on the use of generalized functions, the introduction of the Kirchhoff function type as a function and the approximation of the material physical-mechanical characteristics temperature dependences by piecewise-constant temperature functions.

УДК 539.3

НЕУСТАЛЕНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ТРИШАРОВОГО ЦИЛІНДРА ЗА УМОВ СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Галина Гарматій, Богдан Калиняк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Визначено термонапружений стан довгого тришарового порожнистого ізотропного циліндра з урахуванням залежності від температури теплофізичних і механічних характеристик матеріалів кожного шару за умов неусталеного складного теплообміну з нестационарною температурою навколишнього гріючого середовища та ідеального термомеханічного контакту між шарами. Використано модель незв'язаної квазістатичної задачі термопружності у напруженнях в одновимірній постановці.

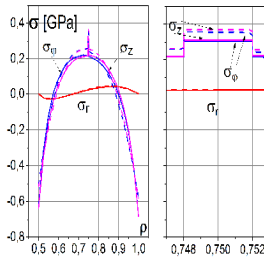
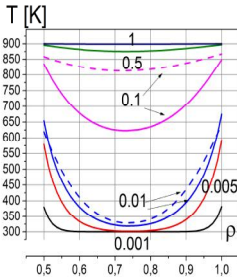
Неусталений розподіл температурного поля в циліндрі знайдено чисельно методом прямих за умов конвективного теплообміну через внутрішню та зовнішню поверхні з середовищами змінної в часі температури. Дискретизацію за просторовою змінною на нерівномірній сітці рівняння теплопровідності та умов на межах здійснено за допомогою методу балансу (інтегро-інтерполяційного методу), який призводить до різницевих схем, що збігаються у класі розривних коефіцієнтів [1]. Отриману напівдискретну задачу, що є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язано чисельно за допомогою формул диференціювання назад.

Напружений стан, викликаний температурним полем, визначено зі сукупності інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду та інтегральних умов, до яких зведено розв'язування задачі термопружності для багатшарового порожнистого циліндра з залежними від температури механічними характеристиками матеріалу кожного шару [2]. Розв'язки цих інтегральних рівнянь з використанням квадратурних формул трапецій подано наближеними аналітичними виразами.

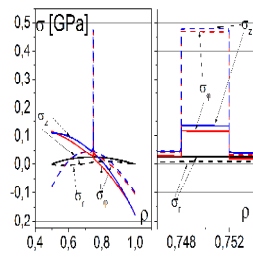
Визначено неусталений розподіл температурного поля, розподіли радіальних, колових та поздовжніх напружень у тришаровому термочутливому порожнистому циліндрі, виготовленому з кераміки з внутрішнім вольфрамовим шаром, коли температура гріючого середовища експоненціально змінюється з часом. Розв'язано відповідну задачу за сталих, взятих за початкової температури, термомеханічних характеристик кераміки і вольфраму. Досліджено вплив залежності від температури теплофізичних та механічних характеристик вибраних матеріалів на термонапружений стан такого циліндра.

На рисунках (суцільні лінії відповідають врахуванню термочутливості матеріалу, а штрихові – характеристикам матеріалу при 300 К) подано відпо-

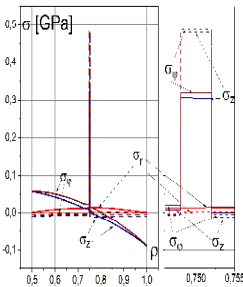
відні розподіли температури, радіальних, колових та поздовжніх напружень, викликаних температурним полем, при сталій початковій температурі 300 К,



Fo=0.001 (0,00008 с)



Fo=0.1 (0,008 с)



Fo=1 (0,08 с)

температурах на межах циліндр–середовище:
 $r_0=0.5\text{мм}$, $R=1\text{мм}$, $t_1(\text{Fo})=(900-300)/300-((900-300)/300)\cdot\exp(-k_1\cdot\text{Fo})$, $t_2(\text{Fo})=(900-300)/300-((900-300)/300)\cdot\exp(-k_2\cdot\text{Fo})$, $k_1=k_2=1000$, $\text{Bi}_1=\text{Bi}_2=10$;
 $r_1=0.748\text{мм}$, $r_2=0.752\text{мм}$; $v_w=0.34$,

$$v_c=0.22+1.58\cdot 10^{-5}t, \alpha_w=(3.49+4.635\cdot 10^{-3}t+6.173\cdot 10^{-6}t^2+5.031\cdot 10^{-6}t^3)\cdot 10^{-6} [1/\text{K}],$$

$$\alpha_c=(5.494+4.504\cdot 10^{-3}\cdot t-8.682\cdot 10^{-7}t^2)\cdot 10^{-6} [1/\text{K}],$$

$$E_w=(4.02-4.455\cdot 10^{-4}t)10^{11} [\text{Па}],$$

$$E_c=(383.23-0.0444t)10^{11} [\text{Па}],$$

$$c_{ww}(t)=2\cdot 10^6+1661,3t-1,8739t^2+0,0009t^3 [\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})],$$

$$c_{vc}(t)=1\cdot 10^6+7544,6t-4,0253t^2 [\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})],$$

$$\lambda_w(t)=181.02-0.0683t [\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})], \lambda_c(t)=68.073-0.1272t+7\cdot 10^{-5}t^2 [\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})].$$

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
2. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термомпружного стану багатопшарових термочутливих циліндрів //Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 2. – С. 169–186.

UNSETTLED THERMOELASTIC STATE OF A THERMOSENSITIVE HOLLOW THREE-LAYER CYLINDER UNDER CONDITIONS OF COMPLEX HEAT EXCHANGE

A quasistatic thermoelasticity problem for a long three-layer hollow isotropic cylinder has been solved using numerical and approximate analytical methods taking into account the temperature dependence of the thermomechanical characteristics of materials of each layer under conditions of complex heat exchange with environment temperature dependent on time. The influence of the temperature dependence of the thermomechanical characteristics of materials on the thermoelastic state of the cylinder has been investigated.

УДК 539.37

УСТАЛЕНИЙ РЕЖИМ ДЕФОРМУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ЗА ДІЇ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНОГО ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ігор Скородинський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Циклічні (зокрема, негармонічні періодичні) навантаження досить часто зустрічаються у природі та техніці. Тому актуальним є вивчення дії таких навантажень на непружні середовища та елементи конструкцій, коли мають місце запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію, незворотні залишкові деформації, усталені режими деформування тощо [1].

Пропоновану доповідь присвячено дослідженню усталеного режиму деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі, що знаходиться під дією нормального рівномірно розподіленого циклічного (періодичного) навантаження.

Розглянемо нескінченний в'язкопружний шар на жорсткій основі, що знаходиться під дією нормального рівномірно розподіленого на ділянці $x \in [-a, a]$ циклічного навантаження виду

$$p(x, t) = p_0 H_-(a - |x|) \sum_{i=1}^N \left(H_+(t - t_i) - H_+(t - t_i - \tau_i) \right), \quad (1)$$

де p_0 – амплітуда; t_i – моменти прикладання навантаження ($i = 1, \dots, N$, $t_1 = 0$); N – кількість циклів; τ_i – час дії навантаження, а $H_-(x)$ та $H_+(t)$ – асиметричні функції Хевісайда. Матеріал шару описується моделлю Кельвіна – Фойгта. Задача розглядається в рамках узагальненої двопараметричної моделі та плоскої деформації [2]. При $t_i = (i-1)T_c$ ($i = 1, \dots, N$; T_c – період циклу) формула (1) описує негармонічне періодичне зовнішнє навантаження.

На основі результатів праці [2] отримано формули для вертикального переміщення навантаженої поверхні шару, зокрема при $x = 0$. Для періодичного навантаження отримано також формули для різниці між вертикальними переміщеннями в сусідніх періодах навантаження. Ці співвідношення значно прискорюють розрахунки. Для випадку періодичного навантаження на проміжку $[0, NT_c]$ навантаження досліджено часові залежності вертикального переміщення $v(0, t) \leq 0$ для різних матеріалів та приведених товщин шару. Встановлено, що, як і у випадку зосередженої сили [1], при $N \rightarrow \infty$ закон зміни в часі вертикального переміщення навантаженої поверхні наближається до періо-

дичного. Цей граничний режим будемо називати усталеним.

Аналогічно до випадку зосередженої сили [1], введемо функціональну послідовність

$$v_n(t) = v(0, t + t_n) = v(0, t + (n-1)T_c), \quad n = 1, 2, \dots, t \in [0, T_c]. \quad (2)$$

Показано, що послідовність (2) має ті ж властивості, що й відповідна послідовність для зосередженої сили [1]. Зокрема збіжність цієї послідовності моделює процес настання усталеного режиму деформування в шарі.

Умова збіжності послідовності (2) має вигляд

$$|v_{n+1}(0) - v_n(0)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

звідки видно, що встановлення усталеного режиму визначається залишковими переміщеннями (деформаціями) $v_{rn} = v_n(0) = v(0, t_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Проведено розрахунки для трьох матеріалів з різними в'язкопружними характеристиками для трьох значень приведеної товщини $\lambda = h/a$ ($2h$ – товщина шару) при $\varepsilon = 0.02$. Встановлено, що, аналогічно до випадку зосередженої сили, найшвидше усталений режим настає у випадку податливого матеріалу (після 3–4 циклу залежно від товщини шару), а найповільніше – у випадку жорсткого матеріалу (після 19–20 циклу залежно від товщини шару). Залежність швидкості настання усталеного режиму від товщини шару при $0.1 \leq \lambda \leq 1$ є незначною.

Таким чином, в рамках узагальненої двопараметричної моделі на основі функціональної послідовності (2) досліджено процес настання усталеного режиму деформування у нескінченному в'язкопружному шарі на жорсткій основі за дії періодичного навантаження (1). Вивчено накопичення залишкових деформацій (переміщень) в шарі та їхню роль у настанні усталеного режиму деформування.

1. *Скородинський І.С., Максимук О.В.* Напружений стан в'язкопружного шару на жорсткій основі під дією зосередженого циклічного навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – № 1. – С. 82–88.
2. *Скородинский И.С., Максимук А.В.* Действие нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой, сцепленный с жестким основанием // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 6(52). – С. 15-24.

STEADY-STATE REGIME OF DEFORMATION OF AN INFINITE VISCOELASTIC LAYER ON THE RIGID FOUNDATION SUBJECTED TO UNIFORMLY DISTRIBUTED CYCLIC LOAD

The process of reaching the steady-state regime of deformation in an infinite viscoelastic layer on the rigid foundation subjected to normal uniformly distributed cyclic (periodic) load is investigated. The accumulation of residual displacements in the layer and their role in the reaching of the steady-state regime of deformation is studied.

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНИХ ТОНКИХ КОНІЧНИХ ПАНЕЛЕЙ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ КІРХГОФА – ЛЯВА ТА ДЕЯКИХ УТОЧНЕНИХ ТЕОРІЙ

Роман Тучапський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

У цій роботі підхід до розв'язування задач про напружено-деформований стан тонких оболонок обертання на основі теорій Кірхгофа – Лява, Тимошенка та методів $\{m, n\}$ -апроксимації й ортогональної прогонки С. К. Годунова [2, 3] узагальнено на задачі про напружено-деформований стан тонких конічних панелей під дією локальних навантажень, для моделювання якої використано дельтоподібні функції. Для цього з вихідних рівнянь оболонок обертання згаданих теорій отримано системи диференціальних рівнянь для конічних оболонок, розв'язані відносно частинних похідних першого порядку відносно координати по меридіану (при цьому всі невідомі функції, що в них входять, було виражено через компоненти векторів розв'язків і частинні похідні відносно координати по колу від них), і за допомогою рядів Фур'є й наведеного в [1] тригонометричного розвинення дельтоподібних функцій було зведено ці системи до нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язувати за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова.

У якості прикладу використання цієї схеми розглянуто задачі розрахунку напружено-деформованого стану локально навантажених тонких конічних панелей на основі згаданих теорій.

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: "Інтелект-Захід", 2007. – 240 с.
2. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статике и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 2. – С. 3–70.
3. Тучапський Р.І. Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу $\{m, n\}$ -апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 43–56.

CALCULATION OF LOCALLY LOADED PANELS BASED ON THE KIRCHHOFF – LOVE THEORY AND SOME REFINED THEORIES

The problems of calculating the stress-strain state of locally loaded thin conical panels based on the Kirchhoff – Love theory and some refined theories are considered.

УДК 539.3

СТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРІВ І КУЛЬ

Борис Процюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Викладено методика визначення статичного термопружного стану багат шарових вільних від силових навантажень ізотропних циліндрів і куль із поверхневими і об'ємними джерелами тепла за лінійних та нелінійних теплових граничних умов і довільного характеру температурних залежностей фізико-механічних характеристик шарів, товщини яких можуть істотно відрізнятися.

Знаходження температурних полів передбачає побудову з використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна і ітераційного методу Ньютона розв'язків задач теплопровідності за граничних умов першого роду на одній із обмежувальних поверхонь і другого роду на протилежній та довільного характеру залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури; зведення за допомогою цих розв'язків вихідних задач до розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння.

Розподіли переміщень, деформацій і напружень циліндрах і кулі описано співвідношеннями, поданими в уніфікованих формі. Їх отримано з аналітичних розв'язків систем інтегроалгебричних рівнянь задач термопружності для кусково-неоднорідних анізотропних циліндра [1] і кулі [2], які знайдено методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. За нульове наближення взято точні розв'язки задач термопружності для відповідних багат шарових тіл зі сталими модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона та заданими температурними залежностями коефіцієнтів лінійного розширення. Наведено результати числових досліджень.

1. Процюк Б.В. Термопружний стан кусково-неоднорідного ортотропного термо чутливого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 3. – С. 57–73.
2. Процюк Б.В. Термопружний стан кусково-неоднорідної термо чутливої трансверсально-ізотропної кулі // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2017. – Вип.15. – С.71–80.

STATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR MULTI-LAYER THERMOSENSITIVE CYLINDERS AND SPHERES

A method for determining the static thermoelastic state in multilayer bodies of canonical form has been developed by taking into account thermal radiation, convective heat transfer, and arbitrary temperature dependences of physical and mechanical characteristics under the action of surface and volumetric heat sources.

UDC 539.3

POTENTIAL METHOD IN THE COUPLED LINEAR THEORY OF THERMOELASTICITY OF MATERIALS WITH DOUBLE POROSITY

Merab Svanadze

Ilia State University, Tbilisi, Georgia

The mathematical models of materials with double porosity represent a new possibility for the study of important problems of engineering, technology and mechanics. A double-porosity material is a solid that contains pores on a macroscale and pores on a much smaller scale. A comprehensive review of the basic results in the theories for double- and multi-porosity materials may be found in the book [1].

Many of the engineering problems have coupled physical nature. Therefore, it is required to consider several coupled mechanical concepts simultaneously in the models of such materials. Recently, Svanadze [2] introduced the linear model of thermoelasticity for single porosity materials in which the coupled phenomenon of the concepts of Darcy's law and the volume fraction of pore network is considered.

In the present talk, the linear coupled model of thermoelasticity for materials with double porosity is proposed in which the above-mentioned coupled phenomenon is considered. Then, the basic internal and external boundary value problems (BVPs) of steady vibrations are investigated. Indeed, the fundamental solution of the system of steady vibration equations is constructed explicitly by means of elementary functions. The radiation conditions are established and Green's identities are obtained. The uniqueness theorems for the classical solutions of the BVPs are proved. The surface and volume potentials are constructed and the basic properties of these potentials are given. The BVPs are reduced to the always solvable singular integral equations for which Fredholm's theorems are valid. Finally, the existence theorems for classical solutions of the BVPs are proved by means of the potential method.

Acknowledgements: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG) [Grant # FR-19-4790].

1. *Svanadze M.* Potentia Method in Mathematical Theories of Multi-Porosity Media, Switzerland: Springer Inter Publ AG, 2019.
2. *Svanadze M.* Boundary integral equations method in the coupled theory of thermoelasticity for porous materials. In: Proceedings of ASME, IMECE2019, Volume 9: Mechanics of Solids, Structures, and Fluids, V009T11A033, November 11-14, (2019). <https://doi.org/10.1115/IMECE2019-10367>

УДК 519.6:539.3

МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕРМОМЕХАНІЧНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВІНКЛЕРІВСЬКИХ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ

Ігор Прокопишин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто задачу про термопружний контакт кількох пружних тіл за наявності нелінійних поверхневих шарів вінклерівського типу. Між тілами виконуються умови одностороннього механічного контакту через нелінійні вінклерівські прошарки, а також умови неідеального теплового контакту. Вважається, що коефіцієнти контактного теплообміну залежать від нормального контактного напруження та відстані між тілами до деформації. Застосовуючи результати праць [1 – 4, 6], отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, а також альтернативне слабке формулювання у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

Для розв'язування системи варіаційних рівнянь контактної задачі запропоновано ітераційні методи декомпозиції області (МДО) типу Робіна [5], які зводять її до паралельного розв'язування на кожному ітераційному кроці для кожного із тіл двох незалежних лінійних варіаційних рівнянь, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з крайовими умовами Робіна (Ньютона, Пуанкаре) на ділянках можливого контакту, а інше – задачі теорії пружності з додатковими об'ємними силами у тілах та механічними крайовими умовами Робіна на цих ділянках. Розроблено методику програмної реалізації алгоритмів МДО з використанням методу скінченних елементів з лінійними і квадратичними трикутними елементами.

За допомогою отриманих методів досліджено плоску задачу про термомеханічний контакт через нелінійний поверхневий вінклерівський шар двох ізотропних пружних тіл скінченних розмірів [5]. Проаналізовано залежність швидкості збіжності МДО від фізичних параметрів задачі. Вивчено вплив параметрів нелінійного вінклерівського шару та температури, заданої на частині межі одного із тіл, на розподілі контактного тиску та контактних температур.

1. *Бобилёв А.А. (мл.)* Задача о контактом взаимодействии весомого упругого тела с односторонним жестким нагретым основанием // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 64–71.
2. *Бобилёв А.А. (мл.)* Задача о сжатии упругой двухслойной полосы жесткими нагретыми выпуклыми штампами // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 2. – С. 15–22.

3. *Мартиняк Р.М., Прокопишин І.А., Прокопишин І.І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 3. – С. 43–56.
4. *Прокопишин І.А., Хлебников Д.Г.* Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // *Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. н.-т. конф.* – Харьков, ХИСИ, 1989. – С. 83–85.
5. *Прокопишин І.І.* Термомеханічний контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 4. – С. 141–161.
6. *Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A.* Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* – 2014. – **98**. – P. 739–748.

DOMAIN DECOMPOSITION METHODS FOR PROBLEM OF THERMOMECHANICAL CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES WITH NONLINEAR WINKLER SURFACE LAYERS

We consider a thermomechanical contact problem for several elastic bodies with conditions of unilateral mechanical contact through nonlinear Winkler surface layers and imperfect thermal contact conditions, and obtain a weak formulation of this problem in the form of a system of variational inequality and variational equation, as well as an alternative weak formulation in the form of a system of linear and nonlinear variational equations. To solve the system of variational equations of the contact problem, we propose parallel iterative Robin type domain decomposition methods. In each iterative step of these methods one has to solve two linear variational equations for each of the bodies, which correspond to heat conduction problem with Newton boundary conditions on the possible contact boundaries and linear elasticity problem with additional volume forces and Robin boundary conditions respectively. With the use of the developed methods and the finite element approximations we investigate the thermoelastic contact interaction between two isotropic bodies through a nonlinear Winkler surface layer. The dependence of the convergence rate of domain decomposition algorithms on the physical parameters of the problem is analyzed. The influence of the parameters of the nonlinear Winkler layers and the boundary temperature on the distributions of contact pressure and contact temperatures is studied.

УДК 519.6:539.3

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ ПОКРИТТЯ ДИСКРЕТНОЇ СТРУКТУРИ

Ігор Прокопишин¹, Іван Прокопишин^{2,3}, Ольга Соляр²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;

³Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

Розглянуто просторову задачу про контактну взаємодію двох пружних тіл, одне з яких має дискретне пружне покриття. Між першим тілом і дискретним покриттям другого тіла (основи) виконуються умови одностороннього контакту без тертя, а між покриттям і основою – умови ідеального механічного контакту. Напружено-деформований стан пружних тіл та покриття описують рівняння просторової лінійної теорії пружності. Застосовуючи метод штрафу, отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі та встановлено умови існування і єдиності його розв'язку.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом на основі результатів праць [1–3] запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області (МДО) типу Робіна, які зводять вихідну нелінійну контактну задачу для системи тіл і покриття до паралельного розв'язування на кожній ітерації трьох незалежних лінійних варіаційних рівнянь, що відповідають тривимірним задачам теорії пружності для окремих тіл і покриття з крайовими умовами Робіна на поверхнях можливого контакту. Доведено теореми про збіжність цих методів. Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує алгоритми МДО з використанням тривимірних скінченноелементних апроксимацій на білінійних і біквадратичних призматичних елементах.

Отримані методи застосовано до числового дослідження контакту двох тривимірних пружних тіл за наявності дискретного покриття у вигляді системи періодично розташованих тонких пружних паралелепіпедів. Проаналізовано вплив жорсткості і висоти покриття, а також ширини і довжини дискретів на контактні і міжфазні поверхневі напруження. Досліджено еволюцію поверхні контакту при зміні заданого на верхній грані одного з тіл нормального переміщення.

1. Прокопишин І.І., Дяк І.І., Мартиняк Р.М. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – 49, № 1. – С. 46–55.
2. Дуяк І.І., Прокопюшин І.І., Прокопюшин І.А. Convergence of penalty Robin – Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity //

<http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>. – 2015. – 33 p.

3. Prokopyshyn I.I., Dyyak I.I., Martynyak R.M., Prokopyshyn I.A. Penalty Robin – Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647–654.

NUMERICAL ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION BETWEEN TWO ELASTIC BODIES WITH COATING OF A DISCRETE STRUCTURE

We consider a 3D problem of contact between two elastic bodies, one of which has a discrete elastic coating. With the use of a penalty method, we obtain a weak formulation of this problem in the form of a nonlinear variational equation. For solving the penalty variational equation of the contact problem, we propose a class of parallel iterative Robin type domain decomposition algorithms and prove theorems on their convergence. The program implementation of the algorithms is made using 3D finite element approximations on bilinear and biquadratic prismatic elements. The numerical analysis of developed methods is performed for the problem of contact interaction between two 3D elastic bodies with discrete coating in the form of a system of periodically located thin elastic parallelepipeds. The influence of the rigidity and the height of the coating, as well as of the width and the length of discretized elements on the contact and the interfacial stresses is investigated.

УДК 539.3

ВПЛИВ ІНЕРЦІЙНОСТІ МАТЕРІАЛУ НА ПАРАМЕТРИ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРИЩИНОЮ

Микола Махоркін

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів

Прогнозування міцності конструкційних елементів оболонкового типу за дії змінного в часі навантаження, нерозривно пов'язане з визначенням коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин дефектів.

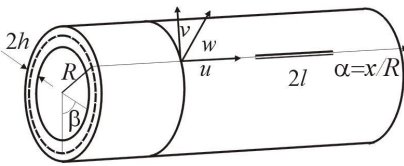


Рис.1

Грунтуючись на методиці, наведеній в [1] для статичного навантаження, розглянуто задачу про граничну рівновагу замкненої безмежної циліндричної оболонки з наскрізним поздовжнім розрізом, довжиною $2l$, береги якого навантажені зусиллями, що змінюється за експоненціальним законом (рис. 1). Вирішення задачі зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь [2].

Вирази для поля вільних від напружень деформацій уздовж розрізу, за вказаних умов, подано у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [v(\alpha, \tau)] \delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = R^{-1} [u(\alpha, \tau)] \delta(\alpha), \\ \kappa_{\beta\beta}^0 &= \kappa_{\beta\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-1} \{ [\theta_{\beta}(\alpha, \tau)] \delta(\beta) - R^{-2} [w(\alpha, \tau)] \partial_{\beta} \delta(\beta) \}, \\ \kappa_{\alpha\beta}^0 &= \kappa_{\alpha\beta}^* e^{\gamma\tau} = -R^{-2} \partial_{\alpha} [w(\alpha, \tau)] \delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 &= \kappa_{\alpha\alpha}^0 = 0, \end{aligned}$$

де ε_{ij}^* , κ_{ij}^* ($i, j = \alpha, \beta$) – не залежать від часу і мають вигляд, поданий в [1, 2]; $[u(\alpha)]$, $[v(\alpha)]$, $[w(\alpha)]$, $[\theta_{\beta}(\alpha)]$ – стрибки переміщень та кутів повороту [1]; τ – час; γ – деякий сталий коефіцієнт розмірності $[c^{-1}]$, $\gamma \in \mathbb{R}$, що характеризує швидкість зміни навантаження, а систему рівнянь рівноваги в переміщеннях згідно з [1] отримано у такому вигляді [2] –

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_{\tau}^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де L_{km} ($m = 1, 2, 3$) – оператори, вигляд яких подано у [2]; $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = w$; q_i^{0*} – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за відомими виразами [2]; $c_{\tau}^2 = E\rho^{-1}(1 - \nu^2)^2$.

Згідно з [1], розв'язок (1) подано так:

$$f(\alpha, \tau) = f^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{jf}^* \phi_j + P_{jf}^* \psi_j) e^{\gamma\tau}, \quad f = \{u, v, w\}. \quad (1)$$

Тут $L_{kl}^* = L_{kl} + L_{kl}^{**}$, $P_{kl}^* = P_{kl} + P_{kl}^{**}$, $l = u, v, w$, де L_{kl} , P_{kl} – оператори тотожні поданим в [1], а L_{kl}^{**} , P_{kl}^{**} – оператори, які враховують залежність навантаження від часу [2].

Ключові функції ϕ_j , ψ_j описуються виразами аналогічними до поданих в [1], в яких фундаментальний розв'язок має вигляд [2]:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 e^{-a_{jn}|z|} (q_{jn} p_{jn}^+)^{-1} \left[(b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} z + (a_{jn} C_{in} - b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |z| \right],$$

якщо корені відповідного характеристичного рівняння [2] мають вигляд $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$, $\lambda_{5,6,7,8} = \pm(b_{2n} \pm ia_{2n})$;

$$\Phi_n(z) = [A_{1n} \cos b_{1n} z + B_{1n} \sin b_{10} |z|] e^{-a_{1n}|z|} + A_{2n} e^{-a_{20}|z|} + B_{2n} e^{-b_{20}|z|},$$

якщо вони мають вигляд $\lambda_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n})$, $\lambda_{5,6} = \pm ib_{20}$, $\lambda_{7,8} = \pm ia_{20}$.

Проаналізовано випадок, коли навантаження змінюється за гармонійним законом.

Аналогічно до [1] отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибків функцій переміщень та кутів повороту. Загальний вигляд їх ядер подано у [2]

На основі отриманих рівнянь, здійснено дослідження коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів поблизу кінців тріщини за її симетричного навантаження залежно від швидкості зміни навантаження γ для оболонок, виготовлених із різних матеріалів.

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛЮМ, 2003. – 318 с.
2. Махоркін М.І. Николишин М.М. Гранична рівновага циліндричної оболонки з подовжньою тріщиною за врахування інерційності матеріалу// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 1. – С. 130–141.

THE EFFECT OF MATERIAL INERTENCE ON PARAMETERS OF LIMIT EQUILIBRIUM OF CYLINDRICAL SHELL WITH LONGITUDINAL CRACK

An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading varying with time according to an exponential law is considered. A system of singular integral equations is constructed. The solutions of these equations are used for study of the stress state near the crack tips in shells made of different materials.

УДК 539.377

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛОГО ПОТОКУ НА ПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА

Андрій Сенік

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів

Критерієм оцінки форми і параметрів металевих конструкцій при їх роботі є технічна доцільність проектних рішень для конкретних умов використання, з урахуванням можливості зміцнення контактної поверхні деталей машин та механізмів. В якості теоретичної основи прийняття вірних рішень у процесі проектування елементів конструкцій є побудова відповідних математичних моделей, що дозволяють виявляти оптимальні параметри технології зміцнення приповерхневих шарів відповідних деталей та конструктивних складових.

У роботі побудовано математичну модель впливу теплового потоку високої концентрації на поверхню тіла циліндричної форми. При постановці відповідної задачі термопружності враховано залежність теплофізичних та механічних характеристик матеріалу від зміни температури. Для опису розподілу нестационарного температурного поля записано нелінійну задачу теплопровідності, для якої будується розв'язок із застосуванням лінеаризації за допомогою змінної Кірхгофа, а також з використанням методів інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є. На основі вже відомого розв'язку задачі теплопровідності, визначається напружений стан в досліджуваному тілі.

Для побудови розв'язку задачі термопружності використано подання компонент вектора переміщень та тензора напружень у вигляді рекурентних послідовностей, що дозволяє отримати взаємозв'язану систему крайових задач при визначенні з достатньою точністю розподілу напружень.

Виконано чисельні дослідження розподілу температурного поля та напружень в циліндричному тілі, що нагрівається по бічній поверхні потоком тепла. Результати досліджень можна використати для прогнозування зон термічного впливу в процесі обробки елементів поверхонь деталей циліндричної форми концентрованими потоками енергії.

SIMULATION OF THE INFLUENCE OF HEAT FLOW ON THE ELASTIC STATE OF A THERMOSENSITIVE BODY

A mathematical model describing the effect of high-power heat flux on the surface of a long heat-sensitive cylinder is presented. The problem takes into account that the thermophysical and physico-mechanical characteristics of the material are functions of temperature.

УДК 539.3

РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ДЛЯ ШАРУ НА ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Валентин Можаровський¹, Володимир Кукареко², Олександр Кушнеров²

¹Гомельський державний університет імені Ф. Скорини, м. Гомель;

²Об'єднаний інститут машинобудування НАН Білорусі, м. Мінськ

Для успішного розвитку машинобудування необхідно провадити фундаментальні дослідження щодо створення нових конструкційних матеріалів на основі сучасних технологій. Одним з найбільш перспективних шляхів вирішення зазначеної проблеми є створення матеріалів з модифікованими поверхневими шарами, що володіють підвищеними фізико-механічними властивостями і стійкістю до руйнування в процесі фрикційної взаємодії, що працюють в складних експлуатаційних умовах. Для проектування ефективних елементів тертя необхідно мати аналітичні розв'язки задачі про визначення температури поверхні при терті елемента заданої форми. Експериментальне дослідження, наприклад в [2], провадилося на зразках $8 \times 6 \times 5$ мм з прокатаного сплаву 12X18H10T. Іонно-променева обробка здійснювалася за допомогою іонного джерела зі замкнутим дрейфом електронів [4]. Температура зразків у процесі обробки підтримувалася при 620, 670, 690, 720, 770 К. Мікротвердість вимірювалася на приладі DuraScan 20 при навантаженні 50 г. Триботехнічні випробування за схемою зворотно-поступального переміщення проводили на автоматизованому трибометрі АТВП, оснащеному пристроєм для вимірювання коефіцієнта тертя. Як контртіло використовувалася пластина з гартованої сталі У8 (800HV10). Випробування проводили в умовах тертя без мастильного матеріалу за номінальному тиску $p = 1.0$ МПа. Середня швидкість переміщення зразка щодо контртіла становила приблизно $0.1 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Рентгеноструктурний аналіз проводився на рентгенівському дифрактометрі ДРОН–3.0 в монохроматизованому CoK_α випромінювання, при напрузі 30 кВ і анодному струмі 10 мА. Для розв'язання задачі про вплив тертя індентора при взаємодії з досліджуваною поверхнею можна скористатися математичною моделлю представленою в роботі Джонсона [1] і її технічним застосуванням [4]. В основі лежить розв'язок плоскої задачі про джерело тепла при русі штампа довжиною l по поверхні покриття (півпростору при $q = P_0 \cdot f \cdot V \cdot \eta$, де P_0 тиск на поверхні тертя; f – коефіцієнт тертя штампа по зразку; V – швидкість переміщення штампа; η – к.к.д. перетворення механічної роботи в тепло ($\eta = 0.97-0.98$)), розподілене джерело в зоні контакту розглядаємо згідно з [2, 3] як набір джерел інтенсивності q , що діють уздовж прямої. Розподіл температури на відстані R від лінійного

теплого нагрівача при миттєвому прикладанні до межі півпростору розподілених уздовж прямої джерел нагріву інтенсивності H , визначається рівнянням [2].

Для детальнішого вивчення температурного поля в шарі, що знаходиться на пружному півпросторі з використанням результатів [3, 4], розглянемо алгоритм розрахунку потоку тепла і значення температур. Можна використовувати теорію [3] для укладання алгоритму розрахунку для визначення температур і теплового потоку і знаходження виразів для температури в шарі і півпросторі при різних законах зміни потоку тепла q .

На рис. 1. показано розподіл температури на поверхні покриття товщиною h при дії точкового джерела Q з координатами $z = 0, r = 0$. Досліджуваний матеріал має такі фізичні властивості: $h = 0.004$ м; $\lambda_1 = 70$ Вт/(м×К), $\lambda = 50$ Вт/(м×К), $\beta_1 = 525$ Вт/(м²×К).

Реалізація розрахунку зміни температури в шарі і його основі являє собою складну задачу, в яку входить обчислення невласних інтегралів з осцилюючими функціями, що містять функції Бесселя. Для розрахунку необхідно досліджувати збіжність подинтегральних функцій і привести рівняння до зручного виду для реалізації розрахунку.

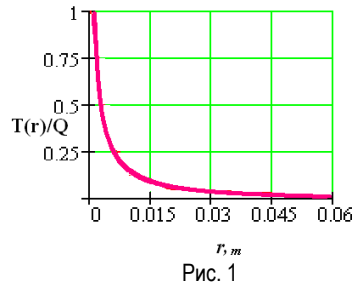


Рис. 1

Роботу виконано за підтримки ДФФД, завдання № Т20УКА–12.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 410 с.
2. Кукареко В.А., Можаровский В.В., Кушнеров А.В., Марьин С.А. Закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4. – С. 37–42.
3. Корнев Б.Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 400 с.
4. Ганкевич В.Ф., Кравец В.И., Ливак О.В. Исследование температурных полей на поверхности горной породы при трении плоского элемента для термоциклического ослабления поверхностного слоя // Геотехнічна механіка. – 2017. – № 135. – С. 83–91.

THE IMPLEMENTATION OF A COMPUTATIONAL MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING THE TEMPERATURE IN A LAYER ON AN ELASTIC HALF-SPACE.

Tribotechnical testing of samples made of rolled alloy 12X18H10T according to the reciprocating displacement scheme.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В СКІНЧЕННИХ ЦИЛІНДРАХ, ЧАСТКОВО ВІДШАРОВАНИХ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ, ПРИ РАПТОВОМУ КРУТНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Олександр Демидов, Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія», м. Одеса

Розглянуто скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу з висоти a і радіуса r_0 . З циліндром пов'язано циліндричну систему координат, центр якої збігається з центром нижньої основи циліндра, а вісь Oz – з його віссю. Джерелом навантаження є жорстка накладка висоти d і того ж радіуса, що й циліндр. Накладка зчеплена з верхнім торцем і знаходиться під дією крутного моменту $M(t)$. Нижній торець циліндра зчеплений з жорсткою основою. В області зчеплення є часткове відшарування у формі круга (рис. 1а) або кільця (рис. 1б). Бічна поверхня циліндра і поверхня відшарування вважаються вільними від напружень.

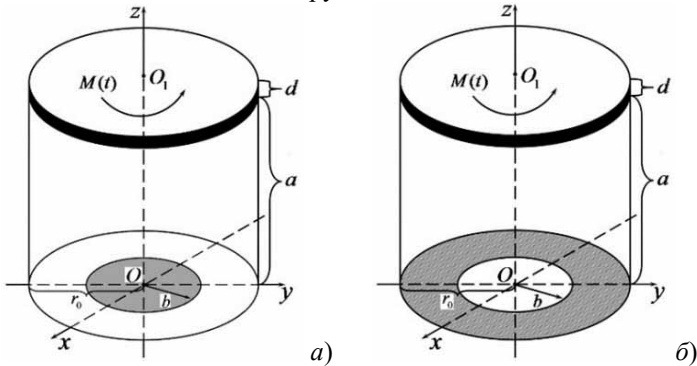


Рис. 1. Циліндр з круговим (а) та кільцевим (б) відшаруванням

За таких умов циліндр знаходиться у стані вісесиметричної деформації кручення з відмінним від нуля лише кутовим переміщенням $w(\eta, \zeta, \tau)$, яке задовольняє наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Рівняння (1) розглядається з нульовими початковими умовами. Граничні умови на бічній поверхні і верхній основі циліндра має наступний вигляд:

$$w(r, a, t) = \alpha(t)r, \quad \tau_{\varphi r}(r_0, z, t) = 0,$$

де $\alpha(t)$ – невідомий кут повороту накладки, який визначається з рівняння її руху.

Граничні умови на нижній основі циліндра формуються в залежності від форми відшарування:

а) для кругового: $w(r, 0, t) = 0, \quad b < r < r_0, \quad \tau_{\varphi z}(r, 0, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq b;$

б) для кільцевого: $\tau_{\varphi z}(r, 0, t) = 0, \quad b < r < r_0, \quad w(r, 0, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq b.$

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосуємо підхід, який ґрунтується на різницевій апроксимації тільки похідних за часом і детально викладений у [3]. Скориставшись перетвореннями, аналогічними до наведених в [1], задачу звели до сукупності послідовно розв'язуваних однорідних початково-крайових задач для рівняння Гельмгольца. Розв'язок цих задач визначаємо методом інтегральних перетворень. У результаті застосування цього методу отримано інтегральні рівняння відносно невідомих функцій, пов'язаних зі стрибком. Це рівняння, за відомою методикою [2], зведено до рівняння Фредгольма другого роду, наближений розв'язок якого шукаємо методом коллокацій.

У результаті отримано формули для розрахунку КІН у вузлах розбиття за часом. За допомогою цих формул виконано числове дослідження впливу різних видів навантаження, маси накладки та геометричних параметрів циліндру на значення КІН за часом.

1. Демидов О.В., Попов В.Г. Нестационарный закрут скінченного циліндра з круговою тріщиною // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 131–142.
2. Попов В.Г. Напряженное состояние конечного упругого цилиндра с круговой трещиной при крутильных колебаниях // Прикладная механика. – 2012. – 48, № 4. – С. 86–93.
3. Savruk M.P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Mater. Sci. – 2003. – 39, № 4. – P. 465–471.

MODELING AND INVESTIGATION OF THE STRESS STATE IN FINITE CYLINDERS WITH PARTIAL DELAMINATION FROM A RIGID BASE UNDER SUDDEN TORSIONAL LOADING

An axisymmetric dynamic problem on determining the stress state in the vicinity of the delamination in a finite cylinder partly coupled with the rigid base is solved. The proposed method consists in the difference approximation only of the time derivative. As a result, the original problem is replaced by a sequence of homogeneous boundary value problems for the Helmholtz equation that reduce to the Fredholm integral equation of the second kind. The numerical solution found made it possible to obtain an approximate formula for calculating the stress intensity factor.

УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Леся Постолакі, Василь Дяків

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглядається осесиметрична бігармонічна задача для скінченного порожнистого циліндра з ненавантаженими бічними поверхнями. На внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях циліндра задано нормальні і тангенціальні навантаження. Застосування до осесиметричного бігармонічного рівняння методу відокремлення змінних у циліндричних координатах приводить до звичайного диференціального рівняння четвертого порядку на функцію, залежну лише від осевої координати z [1]:

$$\varphi^{IV}(z) - 2\gamma^2 \varphi''(z) + \gamma^4 \varphi(z) = 0. \quad (1)$$

Використовуючи власні функції цієї задачі, побудовано систему однорідних розв'язків вихідної бігармонічної задачі. Її розв'язок, який поданий як розвинення за цими функціями, залежить від чотирьох безмежних послідовностей невизначених дійсних констант. Для визначення невідомих констант застосовано варіаційний метод однорідних розв'язків, згідно з яким підпорядкування розв'язку крайовим умовам здійснюється за нормою \mathcal{L}_2 [1]. У результаті отримано безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано за допомогою методу редукції. Числові дослідження підтвердили добру збіжність запропонованого методу.

1. *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* Axially symmetric elasticity problems for the hollow cylinder with the stress-free ends. Analytical solving via a variational method of homogeneous solutions // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2020. – 7, No. 1. – P. 48–63.

VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS FOR AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF ELASTISITY FOR A HOLLOW CYLINDER

An axially symmetric problem for a hollow cylinder with unloaded faces is considered. The problem is reduced to a biharmonic equation with corresponding boundary conditions. Application of the method of variables separation results in a homogeneous boundary value problem for the ordinary differential equation. Its eigenfunctions have been used to construct an infinite system of homogeneous solutions for the initial biharmonic problem.

УДК 539.3

ЕФЕКТИВНІ ТЕРМОМЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ ІЗ НИТКОВИМ НАПОВНЕННЯМ

Георгій Сулим¹, Ярослав Пастернак², Тетяна Третяк²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

У сучасних конструкціях поряд із традиційними все частіше використовуються композиційні матеріали, властивості яких адаптовані до конкретних конструкційних потреб. Важливе місце серед новітніх матеріалів посідають волокнисті композити з фібрами, одним із прикладів яких є сталє-фібробетон. Під час вивчення ефективних характеристик таких композитів, зазвичай, застосовують моделі на підставі розв'язків для сфероїдних включень [1], оскільки їх можна отримати в аналітичній формі. Проте, при вивченні ниткових неоднорідностей такий підхід недостатньо адекватно відображає деформування останніх, адже переріз витягнутого сфероїдного включення, що моделює нитку, є змінюваним уздовж його осі, отже, змінюється і жорсткість цієї неоднорідності на розтяг, зсув і згин.

З огляду на це, у роботі при побудові методів визначення ефективних характеристик волокнистих композитів із фібрами запропоновано використовувати аналітично-числові розв'язки задач для ниткових включень. Побудовано математичні моделі останніх, які разом із підходом [2] розв'язування задач для ниткових неоднорідностей дали можливість отримати аналітично-числові розв'язки сформульованих задач теплопровідності та термопружності. Останні у свою чергу дали можливість визначити компоненти тензора внеску включення до властивостей матеріалу (property contribution tensor), а також використовуючи схеми гомогенізації розрахувати ефективні характеристики окремих волокнистих композитів.

1. *Kachanov M., Sevostianov I.* Micromechanics of materials, with applications. – Cham:Springer, 2018. – 712 p.
2. *Pasternak Ia., Sulym H.* Thermoelasticity of solids containing thread-like inhomogeneities. I. Nondeformable thread-like inclusions // *Int. J. Sol. Struc.* – 2021. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111176>

EFFECTIVE THERMAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS WITH THREAD-LIKE FILAMENT

This study considers mathematical models of deformable thread-like inhomogeneities and method for determination of effective properties of composite materials with fibres.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ТІЛА З УРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНЬОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ БЕРЕГІВ ТРІЩИНИ

Христина Середницька

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Урахування поверхневих ефектів і неоднорідностей при дослідженні контактної взаємодії тіл мотивоване зменшенням розмірів елементів з'єднання конструкцій. На межі контакту тіл виникають дефекти, що зумовлюють зміну температури та напружень і можуть призвести до втрати міцності з'єднання. Важливим фактором при цьому є передача тепла через поверхню контакту, яка може бути зумовлена наявністю поверхневих шарів або заповнювача дефекту. Тут запропоновано математичну модель термопружної поведінки тіла з тріщиною з урахуванням поздовжньої теплопровідності її берегів.

Розглядаємо однорідне плоске пружне тіло, в якому вздовж нескінченної смуги розташована тріщина довжиною $2a$. Вважаємо, що речовина, яка може потрапити у тріщину, не проводить тепло, а береги тріщини покриті тонкими плівками, які наділені поздовжньою теплопровідністю λ_s . Вважаємо, що плівки не чинять опору деформуванню тіла і береги тріщини є вільними від напружень. На нескінченності до тіла прикладено стаціонарний однорідний тепловий потік q і розтягальне рівномірно розподілене навантаження p .

Між берегами тріщини виконується умова неідеального теплового контакту, яка визначає відому в літературі модель високо провідної тріщини [2]:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(T^-(x,0) - T^+(x,0) \right) + q_y^-(x,0) + q_y^+(x,0) = 0. \quad (1)$$

Тут T – температура, q_y – нормальна компонента теплового потоку, верхні індекси „+” і „-” позначають граничні значення функцій на верхньому і нижньому березі тріщини.

Використовуючи метод комплексних потенціалів [1] та враховуючи умови відсутності напружень на ділянці тріщини і умову (1), сформульовану задачу термопружності зведено до сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій $\gamma(x)$ і $h(x)$:

$$\lambda_s \gamma''(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = -2q, \quad |x| < a, \quad \gamma(\pm a) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -2 \frac{1-\nu}{G} p, \quad |x| < a, \quad h(\pm a) = 0, \quad (3)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву матеріалу тіла; $\gamma(x)$ – стрибок температури між берегами тріщини, $h(x)$ – розкриття тріщини.

Рівняння (3) розв'язано аналітично і розкриття тріщини визначено у явному вигляді. Рівняння (2) розв'язано числово, за допомогою подання стрибка температури через поліноми Чебишева. На основі отриманих розв'язків проаналізовано залежності розкриття тріщини від розтягувального навантаження та стрибка температури від теплового потоку і коефіцієнта поздовжньої теплопровідності. Досліджено розподіл теплового потоку через тріщину. Визначено коефіцієнти інтенсивності нормальних і дотичних напружень в околі кінців тріщини.

1. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
2. Torquat, S., Rintoul M. Effects of the interface on the properties of composite media // Phys. Rev. Lett. – 1995. – 52. – 2635–2638.

MATHEMATICAL MODEL OF THE THERMO-ELASTIC BEHAVIOR OF A BODY TAKING INTO ACCOUNT THE LONGITUDINAL THERMAL CONDUCTIVITY OF CRACK'S FACES

The thermoelastic behavior of a homogeneous body with a crack, the faces of which are endowed with longitudinal thermal conductivity, has been studied. At infinity, a uniform heat flow and an evenly distributed tensile load are applied to the body. Heat transfer between crack surfaces is taken into account by the condition of non-ideal thermal contact according to the model of highly conductive crack. The problem of thermo-elasticity is reduced to singular integro-differential equations for the crack opening and the temperature jump between the crack edges. The influence of longitudinal thermal conductivity on the temperature jump between the cracks faces is analyzed. The crack opening at a given tensile load is determined. Stress intensity coefficients near the crack ends are determined.

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРИСТОПРУЖНОГО НАСИЧЕНОГО РІДИНОЮ ШАРУ ҐРУНТУ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ ПРЯМОКУТНОГО ШТАМПУ З НЕПРОНИКНОЮ ДЛЯ ПОРОВОЇ РІДИНИ ПІДОШВОЮ

Олег Савицький¹, Олександр Трофимчук², Олександр Гомілко²

¹Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ;

²Інститут телекомунікацій та глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ

Динамічна взаємодія плитних фундаментів з ґрунтовою основою в нормативних документах оцінюється зручними для розрахунків споруд в експлуатаційних умовах передаточними чи імпедансними функціями, як співвідношенням реакцій та відповідних зміщень для підшви фундаменту при гармонічних коливаннях. Такі функції можуть бути визначені з розв'язку динамічних контактних задач при врахуванні площі контакту, теоретичних особливостей розподілу контактних тисків, динамічних властивостей основи.

Розглядається динамічна контактна задача про вимушені гармонічні коливання прямокутного в плані жорсткого штампа з непроникною для порової рідини підшвою на пористопружній насиченій рідиною (ППНР) основі, що є шаром із защемленою нижньою гранню. Використано модель Біо ґрунтового ППНР середовища. В [1, 2] розглянуто двовимірні задачі для низки подібних моделей. Розглянуто розв'язок просторової динамічної контактної задачі методом ортогональних поліномів (для ППНР півпростору – [1, п. 7.2.2]). Подання невідомих контактних тисків для пористопружної та рідинної фаз наведено в [1, с. 353]. Методом ортогональних поліномів наближений розв'язок для контактних тисків знаходиться з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Коефіцієнти системи визначаються з розв'язку рівнянь Біо [1, п. 1.3.2 та § 7.2] для переміщень від вертикальних гармонічних навантажень на прямокутній ділянці при нульових початкових умовах та умовах на нескінченності для шару. На вільній поверхні шару відсутні дотичні напруження. На тильній грані шару відсутні зміщення твердої та рідинної фаз. На прямокутній контактній ділянці маємо невідомі вертикальні ефективні напруження та поровий тиск. Особливості контактних тисків під непроникною для порової рідини підшвою обговорено в [1, с. 345]. При застосуванні інтегрального перетворення Фур'є з граничних умов отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь 8-го порядку з вільним членом (контактні навантаження на фази). Для розв'язку та подальшого аналізу, як і в [1, 2], використано комп'ютерні символічні алгебраїчні перетворення. Визначник системи (функція Релея для ППНР шару) і формули для невідомих визначено методом Крамера. Отримано символічні вирази для трансформант переміщень площі під

прямокутним жорстким штампом від розподілених навантажень на тверду пористу та рідинну фази, а також асимптотичні вирази для їх компонентів при великих значеннях параметрів перетворення Фур'є та для низької частоти. Результат враховує хвильові процеси, відповідні до прийнятої моделі середовища, включаючи три типи хвиль моделі Біо, пружні моди в шарі і поверхневу хвилю. З системи інтегральних рівнянь динамічної контактної задачі з використанням ряду ортогональних співвідношень [1, (7.26) – (7.33)] отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів. Для обчислення коефіцієнтів системи проаналізовано символічні результати, розроблено методики оцінки інтегралів оберненого перетворення Фур'є комплексних функцій. Для модельних задач встановлено залежності від частоти вимушених коливань реакції (імпедансу), їх розподіл між фазами, переміщення штампа, аналізуються резонансні ситуації. Варіюються геометричні параметри розрахункової схеми та параметри моделі Біо, зокрема проникність та пористість.

1. Гомилко А.М., Савицький О.А., Трофимчук А.Н. Методы суперпозиции, собственных функций и ортогональных многочленов в граничных задачах теории упругости и акустики. – Киев: Наук. думка, 2016. – 436 с.
2. Усошина Е.А., Суворова Т.В., Соловьев А.Н. Математические модели динамических систем, включающих слоистые обводненные пористоупругие основания // Вестник Донского гос. тех. ун-та. – 2016. – № 3. – С. 10–16.

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR POROUS-ELASTIC LIQUID SATURATED SOIL LAYER UNDER THE INFLUENCE OF VERTICAL OSCILLATIONS OF THE RECTANGULAR DIE WITH FLUID-IMPERMEABLE SOLE

A dynamic contact problem on the oscillations of a rectangular die with fluid-impermeable sole on a porous-elastic liquid-saturated layer with a clamped lower plane is considered. The Biot's soil model is used. The unknown contact pressures for the porous-elastic and liquid phases are represented by integro-differential relations by the method of orthogonal polynomials. Using computer algebra (symbolic transformations), we obtain expressions for transformants of the displacements of the area under a rectangular rigid stamp from the distributed loads on the solid porous and liquid phases, as well as asymptotic expressions. Impedance functions and their distribution between phases, stamp movement, resonant situations are established. During the calculations are carried, the geometric parameters of the calculation scheme and the parameters of the Biot's model change.

УДК 539.3; 678.067

ЕФЕКТИВНІ ТЕРМОПРУЖНІ МОДУЛІ ДИСКРЕТНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ШАРІВ У РАМКАХ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ

Михайло Марчук^{1,2}, Володимир Харченко^{1,3}, Микола Хом'як^{1,4}, Віра Пакош¹

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів;

³Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», м. Дніпро;

⁴Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Композиційні матеріали (КМ) знаходять все ширше застосування, найперше, в таких передових галузях як аерокосмічна техніка, судно-, автомобіле- та спеціальне машинобудування, де ставляться підвищені вимоги щодо міцності та надійності, а також оптимальності конструкцій [1]. Шаруваті структури, зокрема, полімерні композити, сформовані шляхом неперервної намотки чи на тканий основі, часто забезпечують необхідний баланс між складністю виготовлення та умовами навантаження на різних режимах, у широких діапазонах зміни фізико-механічних параметрів. Проте розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) конструктивних елементів із КМ безпосередньо залежить від заданих термопружних властивостей [2–5]. Для шаруватих КМ часто застосовують модель ортотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{km} + \delta_{ij} \alpha_{ij} \Delta T.$$

Прикладом є шари з симетричною укладкою волокон однакової об'ємної частки. Навпаки, гібридні шаруваті композити мають не тільки намотку під різними кутами, але й армувальні волокна з різними властивостями [6].

Комп'ютерне моделювання є важливим підходом до дослідження поведінки шаруватих композиційних елементів і конструкцій в цілому та дає змогу з різним ступенем деталізації розглядати пакет шарів. Як правило, на макрорівні використовують деякі усереднені характеристики на основі характеристик складових композиту та інших його особливостей.

Застосовуючи структурний підхід, в рамках прийнятих гіпотез, за допомогою змішаної методики усереднення з використанням підходів Фойгта (W.Voigt) та Ройсса (A. Reuss), отримано розрахункові формули для ефективних пружних модулів шаруватого КМ, як ортотропного тіла. Особливість запропонованої моделі полягає у виокремленні двох підмножин шарів, які відповідають двом напрямкам ортотропії в площині пакету шарів. Тому, наприклад, для модуля Юнга E_{11} в напрямку переважаючого армування і використовуємо арифметичне усереднення, а для модуля E_{22} в цьому напрямку –

гармонійне усереднення. Також отримано вирази для модуля Юнга E_{33} , тобто побудовано повну 3D-модель ортотропного матеріалу, яку можна використовувати в сучасних системах скінченно-елементного аналізу.

Зауважимо, що класифікація шарів за переважаючим напрямом жорсткості вимагає додаткових експертних чи статистичних оцінок. Деяку невизначеність щодо можливого віднесення шарів до однієї з підмножин можна використати для узгодження з експериментальними даними.

Дослідження виконано в рамках науково-технічного проєкту НАН України (номер державної реєстрації 0120U104248).

1. *Rana S., Figueiro R.* Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering: Processing, Properties and Applications. – Woodhead Publishing, 2016 p. – 474 p.
2. *Vasiliev V. V., Morozov E. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures: Fourth Edition. – Elsevier, 2018. – 856 p.
3. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd ed. – CRC Press LLC, 2004. – 832 p.
4. *Карпинос Д.М.* Композиционные материалы. Справочник. – Киев.: Наукова думка, 1985. – 592 с.
5. *Морозов А.В.* Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу // Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. – 2020. – **31** (70). Ч. 1, № 2. – С. 44–51.
6. *Немировский Ю.В., Янковский А.Н.* Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – **13**, № 1. – С. 3–32.

EFFECTIVE THERMOELASTIC MODULES OF DISCRETE COMPOSITE LAYERS WITHIN THE MODEL OF ORTHOTROPIC MATERIAL

A structural approach to evaluate effective thermoelastic modules of layered composites within the framework of an orthotropic material model is proposed. The separate mixture rules for two sets of layers according to their predominant contribution into reinforcement are used.

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТОНКИМ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ОСЕСИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ КОМПОЗИТУ

Роман Андрійчук, Ярослав Кунець

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Нехай у пружному ізотропному середовищі за умов осесиметричного кручення та динамічних навантажень знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне включення радіуса a і товщини h . Мала відносна товщина включення характеризується безрозмірним параметром $\varepsilon = h/a \ll 1$. Розглянуто випадок ідеального механічного контакту між складовими композиту та різні граничні електричні умови на поверхні включення, що відповідають електроізолюваному включенню або пружній електропровідній матриці зі заземленою лінією контакту.

Застосовуючи методи теорії сингулярних збурень до поставленої задачі, отримуємо моделі динамічної взаємодії тонкого включення з пружною матрицею для трьох різних діапазонів зміни параметра відносної жорсткості включення γ : 1) $\varepsilon \leq \gamma \leq 1/\varepsilon$; 2) $0 \leq \gamma \leq \varepsilon$; 3) $1/\varepsilon \leq \gamma < \infty$. Діапазон 1 відповідає випадку неконтрастних неоднорідностей, діапазони 2 та 3 – випадкам включень малої та великої жорсткості.

Отримані математичні моделі електропружного контакту тонкого включення з пружним середовищем можуть бути використані при дослідженні хвильових полів у пружних композитах із множинними тонкими п'єзокерамічними неоднорідностями.

Роботу виконано за фінансової підтримки наукового проєкту "Математичне моделювання процесів хвилеутворення та кондуктивно-променевого теплообміну у композитних структурах із тонкими п'єзокерамічними неоднорідностями та діелектричними шарами" (0121U111815).

DYNAMIC INTERACTION BETWEEN ELASTIC MEDIUM AND A THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION FOR AXISYMMETRIC TORSION OF A COMPOSITE

The methods of theory of singular perturbations are used to obtain the dynamic interaction model between a thin line piezoceramic inclusion and elastic isotropic medium for axisymmetric torsion of a composite. Perfect mechanical contact between components of a composite and zero electric potential or zero electric induction are prescribed at the boundary of inclusion.

УДК 539.3

ПОШИРЕННЯ ЗГИННИХ ХВИЛЬ У ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ ІЗ АНСАМБЛЕМ ВИПАДКОВО РОЗТАШОВАНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ярослав Кунець, Валерій Матус, Віктор Міщенко, Василь Пороховський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Запропоновано метод визначення ефективних швидкостей поширення згинних хвиль у тонкій пружній пластині з масивом випадково розташованих тонких прямолінійних неконтрастних пружних включень. Він поєднує асимптотичне моделювання умов контакту включення з пластиною та статистичний метод усереднення для визначення дисперсійних співвідношень поширення згинних хвиль. Рух пластини описується теорією Кірхгофа–Лява. Включення перебувають в умовах ідеального контакту за усталених коливань. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкої пластини з включенням отримано за допомогою методів теорії сингулярних збурень [1]. Розглянуто випадки впорядкованої та хаотичної орієнтації включень у пластині. Усереднені динамічні параметри композиту визначено за допомогою теорії гомогенізації Фолді [2, 3] із залученням розв'язку задачі розсіяння згинних хвиль відповідною локальною перешкодою. Проаналізовано вплив механічних властивостей компонентів композиту та концентрації наповнювачів на швидкість поширення у ньому згинної хвилі.

1. Кунець Я.І., Матус В.В. Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 1. – С. 75–93.
2. Mykhas'kiv V., Kunets Y., Matus V., Khay O. Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions // *International Journal of Structural Integrity.* – 2018. – **9**. No. 2. – P. 219–232.
3. Кунець Я.І., Матус В.В., Міщенко В.О., Пороховський В.В. Поширення згинних хвиль у тонкій пластині із ансамблем випадково розташованих отворів неканонічної форми // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2020. – **18**. – С. 144–149.

PROPAGATION OF BENDING WAVES IN A THIN PLATE WITH AN ENSEMBLE OF RANDOMLY DISTRIBUTED INCLUSIONS

An approach for studying the effective parameters of bending waves propagating in a thin Kirchhoff plate with stochastically distributed thin rectilinear noncontrast elastic inclusions is proposed.

УДК 539.3

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ ПОБЛИЗУ ТОНКОГО МЕТАЛІЧНОГО ПРОШАРКУ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ ТІЛІ

Ярослав Кунець, Валерій Матус, Юлія Максимів, Роман Рабош

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Актуальність досліджень характеристик горизонтально поляризованих зсувних (SH) поверхневих хвиль у шаруватих п'єзоелектричних композитах обумовлена розвитком технологій створення нових п'єзоелектричних матеріалів з певними властивостями та їх застосуваннями в акустиці, геофізиці, дефектоскопії тощо. Умови зародження та параметри таких хвиль суттєво залежать від геометричних та фізичних властивостей складових композитного матеріалу.

У роботі з використанням асимптотично точних моделей взаємодії тонкого металічного прошарку з п'єзоелектричним середовищем досліджено поширення вздовж прошарку поверхневих SH хвиль. Ефективні умови контакту прошарку з п'єзоелектриком отримано за допомогою теорії сингулярних збурень [1]. Аналіз проведено окремо для тонких неоднорідностей різної пружної контрастності складових композиту. Встановлено, що у випадку неконтрастного або жорсткого прошарків поширюються бездисперсійні або дисперсійні поверхневі хвилі симетричної моди. Для податливого прошарку поряд із бездисперсійною хвилею симетричної моди існує також дисперсійна поверхнева хвиля антисиметричної моди. Виявлено частоти запирання такої хвилі, а також умова за якої швидкість її поширення перевищує швидкість хвилі Блюштейна – Гуляєва.

Роботу виконано за підтримки бюджетної програми України «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. Кунець Я. І., Матус В. В. Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 1. – С. 75–93.

PROPAGATION OF WAVES NEAR A THIN METAL LAYER IN A PIEZOELECTRIC BODY

Dispersion equations for surface SH waves propagating along a thin metal layer in a piezoelectric medium are obtained. The dynamic interaction of the matrix with the layer is modeled by the effective contact conditions of the composite components, taking into account their electromechanical properties.

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНІКА ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ПЛАСТИН ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

Олександр Гачкевич¹, Роман Мусій², Наталія Мельник², Карен Казарян³

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів;

³Інститут механіки НАН Вірменії, м. Єреван

Електропровідні пластини часто використовують як функціональні елементи конструкцій багатьох пристроїв. У процесі роботи цих пристроїв чи цільової технологічної обробки їх елементів виникають різні фізичні чинники – силові, теплові та електромагнітні. Ці чинники зумовлюють виникнення у розглядуваних елементах відповідних полів температури і напружень. За певних величин цих полів значення інтенсивності виникаючих напружень можуть досягати межі пружної деформації матеріалу пластин і, навіть, перевищувати її та приводити до втрати несучої здатності відповідних конструктивних елементів. Тому дослідження роботоздатності електропровідних пластин за дії розглядуваних фізичних чинників є актуальною інженерно-технічною проблемою.

У багатьох роботах розглянуто термомеханічну поведінку пластин, виготовлених з різних, не лише електропровідних, матеріалів за дії статичних та динамічних поверхневих силових навантажень, що мають монохроматичний чи імпульсний характер зміни в часі. На особливу увагу заслуговують відомі роботи [1-3] про термопружну поведінку тіл канонічної форми за нестационарних теплових дій, зокрема за теплового удару. Авторами цих робіт здійснено постановку і отримано розв'язки нових класів динамічних задач термопружності за врахування скінченної швидкості поширення тепла та зв'язаності полів деформації і температури. Розв'язано також ряд динамічних задач термопружності для тіл канонічної форми, що знаходяться в постійному магнітному полі і зазнають магнітного удару, зокрема досліджено динамічний термопружний стан електропровідної пластини за такої дії.

Наступним етапом таких досліджень була побудова фізико-математичної моделі термомеханіки електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) [4-6]. Запропоновано модель, що враховує експериментально встановлені закономірності адіабатичності процесів нагріву та деформування електропровідного тіла імпульсним ЕМП. На основі цієї моделі досліджено динамічні термопружні процеси в електропровідних пластинчатих елементах за дії електромагнітних імпульсів мікро- і наносекундної тривалості [5].

Сформульовано новий клас динамічних задач термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми за дії конкретних типів імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди. Зокрема, для електропровідних пластинчатих елементів досліджено термомеханічну поведінку за дії таких ЕМП, що мають характер режимів з імпульсним модульним сигналом (РІМС) та згасної синусоїди (РЗС) [6]. Виявлено нові закономірності термопружних процесів у електропровідній пластині за таких дій залежно від амплітудно-частотних характеристик і часу тривалості імпульсів. У праці [7] досліджено вплив зв'язаності полів температури і деформацій на наявні термопружні процеси у розглядуваних елементах за дії імпульсних ЕМП в РІМС та РЗС.

Вимагають подальшого розвитку дослідження і комп'ютерна симуляція процесів за ускладнення характеру деформування, в т.ч. за врахування в'язко-пружності та пластичності, розбудова методик розв'язування сформульованих класів задач, зокрема за використання числових підходів, експериментальна верифікація результатів.

1. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
2. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. *Коляно Ю.М., Кондратюк Н.А.* Обобщенная динамическая задача магнитотермоупругости для цилиндра – В кн.: Выч. и прикл. математика. – Киев: Вища школа, 1975. – № 25. – С. 129–133.
4. *Hachkevych O., Musii, R.* Mathematical modeling in thermomechanics of electroconductive bodies under the action of the pulsed electromagnetic fields with modulation of amplitude. // *Math. Modeling Computing.* – 2019. – 6, No. 1. – P. 30–36.
5. *Hachkevych O.R., Musii R.S., Melnyk N.B., Dmytruk V.A.* Dynamic thermoelastic processes in a conductive plate under the action of electromagnetic pulses of microsecond and nanosecond durations// *J. Thermal Stresses.* – 2019. – 42, No. 9. – P. 1110–1122.
6. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: «СПОЛОМ», 2011. – 216 с.
7. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.Б.* Зв'язані задачі термомеханіки електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за імпульсних електромагнітних дій: монографія – Львів: Растр-7, 2019. – 280 с.

THERMOMECHANICS OF ELECTROCONDUCTIVE PLATES UNDER THE ACTION OF IMPULSED ELECTROMAGNETIC FIELDS

Works on the thermoelastic behavior of electroconductive plates under dynamic force and thermal actions and under the action of impuled electromagnetic fields of characteristic types - magnetic shock, electromagnetic impulse and impuled electromagnetic fields with amplitude modulation are analyzed.

УДК 539.3

**ІГОР МИКОЛАЙОВИЧ ТУРЧИН (16.01.1966 – 5.01.2021).
ПОПЕРЕДНІЙ ПІДСУМОК ТВОРЧИХ ЗДОБУТКІВ**

Георгій Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

На 55-му році життя несподівано відійшов у засвіти І.М.Турчин – талановитий, усебічно обдарований, вдумливий учений, автор більше сотні оригінальних наукових праць, чудовий педагог, налаштований на позитив і співпрацю, людина і професор кафедри механіки ЛНУ імені Івана Франка, якому він віддав усе своє професійне життя. Основними напрямками його наукових зацікавлень були проблеми механіки деформіного твердого тіла, а якщо докладніше, – термопружні процеси в неоднорідних тілах і поширення пружних хвиль у кусково-неоднорідних середовищах. Дорогу у велику науку йому проклав глибокий знавець апарату математичної фізики, критично мислячий і азартний вчений-механік канд. фіз.-мат. наук, доцент В.А. Галазюк. Під його керівництвом у 1995 р. І.М. Турчин написав кандидатську дисертацію [1]. У своїй докторській дисертації 2017 р. [2] він цілком слушно подякував своєму вчителю «за створення ... основ методу поліномів Лагерра, спонукання до роботи та батьківську опіку».

Саме цей метод в узагальненій формі разом із методом рядів Неймана було покладено у підвалини згаданої докторської дисертації, спрямованої на опрацювання методів аналітично-числового аналізу процесу трансформації двовимірних нестационарних температурних полів та напружено-деформованих станів у плоско- та циліндрично-шаруватих тілах і середовищах, зумовленого змінними в часі тепловими та силовими навантаженнями, у тому числі мішаного типу. Завдяки цьому вдалося побудувати розв'язки двовимірних (плоскої та осесиметричної) квазістатичних і суто динамічних задач термопружності для плоско та радіально шаруватих тіл за довільної кількості складових. Причому з високим контрастом термомеханічних властивостей і товщин, а також для довільного виду нестационарного теплового чи силового навантаження. Запропонований метод дає можливість забезпечити виконання обчислень із довільною наперед заданою точністю.

Як педагог І.М. Турчин був ініціатором запровадження на кафедрі спеціалізації студентів у галузі біомеханіки і самотужки розробляв відповідні навчальні курси і створював відповідне методичне забезпечення [3–5]. Підготував одного кандидата наук. Практично ще дві дисертації було написано його прямими учнями, однак до захисту так і не дійшло.

Так само як світло погаслої зірки поширюється у безмежному Всесвіті, продовжують виходити з друку наукові праці І.М. Турчина. Саме у день

похорону стало відомо, що в-во Шпрінгер видрукувало монографію, у якій він написав два розділи [6, 7]. Це те, що ми легко побачимо неозброєним оком. А його метод і висловлені ним ідеї зайдуть як подеколи малопомітний розчин у праці інших науковців. Наприклад вже тепер можна бути впевненим, що поєднання запропонованої І.М. Турчином методології застосування інтегрального перетворення Лагерра та граничноінтегрального методу функцій стрибка дасть змогу ефективно розв'язувати динамічні задачі термоелектромагнітопружності тіл з тонкими включеннями. Підготовлений за участі І.М. Турчина запит на відповідний грант чекає на свою реалізацію.

1. *Турчин І.М.* Побудова і дослідження розв'язків змішаних задач нестационарної теплопровідності та квазістатичної термопружності напівбезмежних тіл методом поліномів Чебишева–Лагерра: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 / НАН України, ІППММ. Львів, 1995. – 16 с.
2. *Турчин І.М.* Метод поліномів Лагерра в нестационарних задачах термопружності та пружності шаруватих тіл: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04 / НАН України, ІППММ. Львів, 2017. – 36 с.
3. *Турчин І.М.* Нерівноважна термодинаміка: конспект лекцій. Львів: Вид. центр ЛНУ ім. І Франка, 2012. 28 с.
4. *Турчин І.М.*, *Кузь І.С.* Ріст і перебудова органів і тканин. Метод. вказівки до вивчення курсу «Біомеханіка». – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2012. – 16 с.
5. *Турчин І.М.* Теорія розмірностей. π -теорема. Конспект лекцій до курсу «Механіка суцільного середовища». – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. І Франка, 2012. – 24 с.
6. *Turchyn I., Pasternak I., Sniezek L., Szachogluchowicz I., Hutsaylyuk V., Sulym H.* Modeling of Selected Physical Phenomena Under Explosion Welding the Laminate AA2519-Ti6Al4V. In: Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics / eds. Šárka Hošková-Mayerová, Cristina Flaut, Fabrizio Mauro. Cham: Springer, 2021. Ser.: Studies in Fuzziness and Soft Computing. – P. 1434–9922; vol. 404. P. 305–335. DOI: 10.1007/978-3-030-61334-1_16.
7. *Pasternak I., Turchyn I., Hutsaylyuk V., Sulym H.* Modelling of the Stress–Strain State of a Viscoelastic Rectangular Plate in Condition Combine Load. In: Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics / eds. Šárka Hošková-Mayerová, Cristina Flaut, Fabrizio Mauro. Cham: Springer, 2021. Ser.: Studies in Fuzziness and Soft Computing, 1434-9922; vol. 404. P. 336–362. DOI: 10.1007/978-3-030-61334-1_17.

**IGOR MYKOLAYOVYCH TURCHYN (16.01.1966 – 5.01.2021).
PRELIMINARY SUMMARY OF CREATIVE ACHIEVEMENTS**

A preliminary summary of the creative achievements of Dr. Sci., Igor Mykolayovych Turchyn, Associate Professor is presented.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ В ДВОШАРОВИХ ОБОЛОНКАХ ЗА КУБІЧНОГО ЇЇ РОЗПОДІЛУ ПО ТОВЩИНІ ШАРІВ

Любов Гаєвська¹, Микола Гачкевич¹, Борис Чорний², Адріан Торський¹

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Львівський філіал Дніпровського національного університету залізничного транспорту, м. Львів

Розглядаємо двошарову оболонку, шари якої виконано з різних ізотопних матеріалів, віднесено до криволінійної системи координат. Нехай $t_{(i)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{(i)}, \tau)$ – температура i -го шару, яка відраховується від початкової t_p , $\{\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{(i)}\}$ – змішана ортогональна система координат в кожному шарі товщини $2h_i$, в якій α_1, α_2 – лінії головних кривин серединної поверхні шару, а $\gamma_{(i)}$ – нормаль до цієї поверхні; τ – час. Приймемо, що температура в кожному шарі задовольняє початкову умову

$$t_{(i)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{(i)}, 0) = t_p.$$

Впливом кривини на процес теплопровідності нехтуємо. Температурне поле в кожному шарі оболонки описуємо відомим рівнянням теплопровідності [1]

$$\frac{\partial^2 t_{(i)}}{\partial \gamma^2} + p_{(i)}^2 t_{(i)} = -\frac{Q_{*(i)}}{\lambda_{(i)}}, \quad (1)$$

де $Q_{*(i)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{(i)}, \tau)$ – густина джерел тепла, що діють в шарі, $\lambda_{(i)}$ – коефіцієнт теплопровідності, $p_{(i)}^2 = \Delta_{(i)} - 1/a_{(i)} \partial / \partial \tau$, $a_{(i)}$ – коефіцієнт теплопровідності, $\Delta_{(i)}$ – оператор Лапласа в криволінійній системі координат.

Нагрів оболонки здійснюється конвективним способом із зовнішнім середовищем зі сторони внутрішньої і зовнішньої поверхонь оболонки і джерелами тепла, а між шарами відбувається ідеальний тепловий контакт [1].

Для отримання наближеного розв'язку сформульованої задачі теплопровідності, апроксимуємо розподіл температури за товщинними координатами $\gamma_{(i)}$ кубічним поліномом, коефіцієнти якого виражаємо стандартним способом через усереднені характеристики $T_{1(i)}, T_{2(i)}$ температури за товщиною шарів оболонки і задані крайові умови [1]. Рівняння для визначення усереднених характеристик отримуємо, помноживши рівняння теплопровідності (1)

на $\gamma_{(i)}^{p-1}$ і проінтегрувавши по цій координаті з врахуванням структури кубічного полінома [1].

Коефіцієнти апроксимуючих поліномів температури в шарах оболонки знаходимо з крайових умов конвективного теплообміну і умов ідеального теплового контакту між шарами і виразів для $T_{1(i)}, T_{2(i)}$.

Як приклад, отримано систему рівнянь, що описують усереднені характеристики $T_{1(i)}, T_{2(i)}$ температури в двошаровій кусково-однорідній по товщині оболонці за крайових умов першого роду на зовнішній поверхні і теплоізоляції на внутрішній та умов ідеального теплового контакту між шарами. В цьому випадку вихідна система має вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11}T_{1(1)} + a_{12}T_{2(1)} + a_{13}T_{1(2)} + a_{14}T_{2(2)} + \left(\Delta_{(1)} - \frac{1}{a_{(1)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_{1(1)} + W_{1(1)} &= -b_1 t^+, \\ a_{21}T_{1(1)} + a_{22}T_{2(1)} + a_{23}T_{1(2)} + a_{24}T_{2(2)} + \left(\Delta_{(1)} - \frac{1}{a_{(1)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_{2(1)} + W_{2(1)} &= -b_2 t^+, \\ a_{31}T_{1(1)} + a_{32}T_{2(1)} + a_{33}T_{1(2)} + a_{34}T_{2(2)} + \left(\Delta_{(2)} - \frac{1}{a_{(2)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_{1(2)} + W_{1(2)} &= -b_3 t^+, \\ a_{41}T_{1(1)} + a_{42}T_{2(1)} + a_{43}T_{1(2)} + a_{44}T_{2(2)} + \left(\Delta_{(2)} - \frac{1}{a_{(2)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_{2(2)} + W_{2(2)} &= -b_4 t^+, \end{aligned}$$

де $a_{ij}, b_j, i, j = 1, \dots, 4$, – відповідні коефіцієнти, залежні від товщини шарів і коефіцієнтів їх теплопровідності; $t^+(\tau)$ – змінна в часі температура на зовнішній поверхні оболонки; $W_{(i)}(\alpha, \beta, \gamma_{(i)}, \tau) = -Q_{*(i)}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{(i)}, \tau) / \lambda_{(i)}$;

$$W_{1(i)} = \frac{1}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} W_{(i)} d\gamma_{(i)}; \quad W_{2(i)} = \frac{3}{2h_i^2} \int_{-h_i}^{h_i} \gamma_{(i)} W_{(i)} d\gamma_{(i)}.$$

При однорідному нагріві ($\Delta_{(i)} = 0$) розв'язок системи ефективно отриметься методом найменших квадратів за методикою, викладеною в [1].

1. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф. Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014 – 334 с.

METHOD OF DETERMINATION OF TEMPERATURE IN TWO-LAYER CELLS BY CUBIC TEMPERATURE DISTRIBUTION BY LAYER THICKNESS

A mathematical model and a method for finding the temperature field at the convective heating and the action of heat sources in a two-layer shell are presented.

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Василько Галина

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Розглядається півбезмежний однорідний порожнистий циліндр із внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім радіусом R_2 . У момент часу $t = 0$ циліндр миттєво занурюється на глибину L в середовище сталої температури T^* . Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами біля границі циліндра, вважається, що в результаті занурення на торцевих поверхнях циліндра, а також на частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь, встановився розподіл температури $T_c(t) = T^*(1 - \exp(-t_0 t))$, де t_0 – стала [1/сек], яка визначає час стабілізації температури на граничних поверхнях циліндра. Поза ділянкою $0 \leq z \leq L$ на внутрішній та зовнішній поверхнях відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури (рис. 1). Вважається також, що початкова температура неоднорідного циліндра дорівнювала нулю.

Розв'язок задачі будується [1] з використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за змінною $\gamma = z/L$. У результаті одержано послідовності звичайних диференціальних рівнянь, в яких враховано умови на торцевій поверхні $\gamma = 0$. Побудовано загальний розв'язок цих послідовностей у вигляді алгебричної згортки. Урахування змішаних крайових умов на бічних поверхнях циліндра проводиться із використанням методу рядів Неймана [2]. Після урахування змішаних умов на поверхні одержано послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь. Обґрунтовано збіжність методу редукції одержаних систем. Остаточний розв'язок вихідної задачі теплопровідності подається у вигляді ряду за поліномами Лагерра.

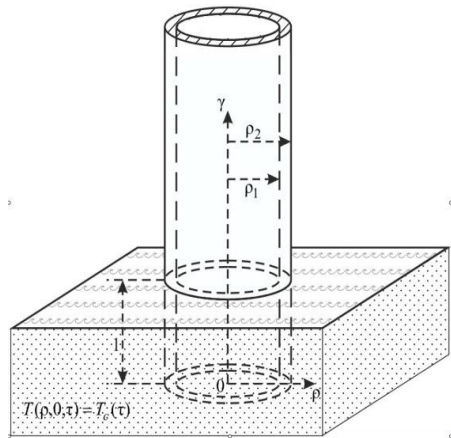


Рис. 1

За результатами числового експерименту виконано аналіз точності задоволення крайових умов, залежно від утримання членів в рядах за поліномами Лагерра та редукції безмежних алгебричних систем рівнянь, а також особливості нестационарного процесу поширення тепла в циліндрі.

1. *Колодій Ю.О., Турчин І.М., Хома В.В.* Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежної плити з двостороннім покриттям // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. Спецвипуск. – С. 119–124.
2. *Sneddon I.* *Fourie transforms.* – New York: McCraw-Hill, 1951. – 542 p.

A MIXED UNSTEADY HEAT-CONDUCTION PROBLEM FOR A SEMI-INFINITE HOLLOW CYLINDER

This talk addresses a cylinder with the temperature given on a part of its surface. Beyond this area, the heat exchange is supposed according the the Newton law. The unknown temperature is constructed as a series of Laguerre polynomials. The coefficients of these series are represented by the Fourier integrals.

УДК 539.3

ОЦІНКА НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ КРУГОВИХ ТІЛ З ДЕФЕКТАМИ ЗА УМОВ ТЕМПЕРАТУРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сергій Пискунов¹, Олексій Шкриль², Роман Остапенко²

¹Національний технічний університет "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ;

²Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

Значна частина конструкцій, що експлуатуються в машинобудуванні, енергетиці та будівництві, належить до класу кругових тіл. Під час виготовлення, монтажу або при експлуатації в конструкціях можуть виникати дефекти. Якщо дефекти набувають вигляду тріщин, для оцінки несучої здатності використовується коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Для тріщин нормального відриву (рис. 1) при термопружному деформуванні КІН може бути визначений на основі прямого методу [2]:

$$K_I = \frac{u_1 - \alpha(1 + \nu)xT}{(2 - 4\nu + \cos\theta)\sin(\theta/2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} 2G,$$

де G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона; u_1 – переміщення, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Розрахункове визначення несучої здатності кругових тіл, в тому числі при наявності тріщин, раціонально виконувати напіваналітичним методом скінченних елементів (НМСЕ) [2], із використанням якого розв'язано наступні задачі.

Досліджено тріщиностійкість резервуару РВС-5000 (рис. 2а) з напівеліптичною тріщиною в стіні (рис. 2б) від дії гідростатичного тиску при пружному деформуванні [3] з урахуванням температурного навантаження.

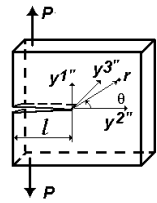
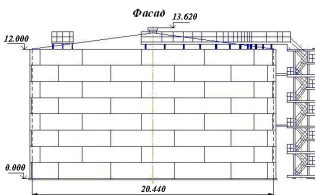
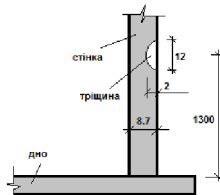


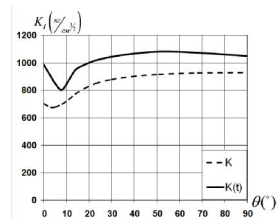
Рис. 1



а)



б)



в)

Рис. 2

Збільшення величин КІН уздовж фронту напівеліптичної тріщини (рис. 2в) при збільшенні температури на 300°C становить до 40% порівняно з дією лише силового навантаження.

Визначено час до початку руйнування в умовах повзучості та час розвитку зони континуального руйнування ротора парової турбіни з початковим дефектом, обумовленим погіршенням фізико-механічних властивостей матеріалу та розташованим біля вісі обертання (рис. 3). Моделювання континуального руйнування здійснювалось за величиною параметра пошкоженості Качанова – Работнова.

Результати показали, що час зростання зони континуального руйнування до утворення тріщиноподібного дефекту складає 6000 годин. Зона континуального руйнування поширюється в межах поперечного перерізу ротора і набуває вигляду напівеліптичної тріщини зі співвідношеннями напівосей $1/2$. Зменшення часу до руйнування при урахуванні температурного навантаження становило біля 20%, зростання величин КІН вздовж фронту отриманої напівеліптичної тріщини – біля 30%.

Таким чином, температурне навантаження має істотний вплив на несучу здатність конструкцій.

1. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.* Дослідження процесу континуального руйнування ротора парової турбіни з дефектом в умовах повзучості / Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83. – С. 3–14
2. *Напіваналітичний метод скінчених елементів у задачах руйнування тіл з тріщинами* / [Баженов В. А., Пискунов С. О., Шкриль О. О.] – Київ: Вид-во "Каравела", 2017. – 208 с.
3. *Пискунов С.О., Шкриль О.О. Максим'юк Ю.В.* Визначення тріщиностійкості резервуару з напівеліптичною тріщиною / Опір матеріалів і теорія споруд. – 2021. – Вип. 106. – С. 60–66.

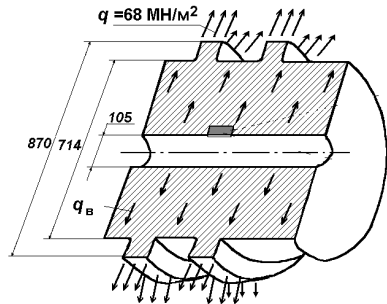


Рис. 3

EVALUATION OF CAPACITY OF CIRCULAR BODIES WITH DEFECTS UNDER TEMPERATURE LOAD CONDITIONS

The crack resistance of a tank with a semi-elliptical crack under the temperature load and hydrostatic pressure is determined. The additional life-time of the steam turbine rotor until the crack formation is calculated.

УДК 539.3

ПРУЖНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Кирил Васільєв, Георгій Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів

Розроблений раніше підхід – метод прямого вирізування – до дослідження напруженого стану кусково-однорідних ізотропних [1], а також однорідних анізотропних [2] тіл з тонкими неоднорідностями структури поширено на випадок дослідження поздовжнього зсуву кусково-однорідних анізотропних (ортотропних) тіл з тріщинами.

Ідея методу полягає у моделюванні досліджуваного тіла з тунельними тріщинами за допомогою кусково-однорідного ортотропного простору з так само розміщеними тонкими дефектами та додатковими навантаженими тріщинами, які моделюватимуть навантажені межі тіла. З використанням методу функцій стрибків, методу спряження континуумів різної вимірності та методу інтегральних перетворень Фур'є задача зведена до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь методом колокацій.

На прикладі дослідження поздовжнього зсуву двохшарової ортотропної структури зі симетрично навантаженою тріщиною проаналізовано достовірність та ефективність цього підходу. Отримані результати обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень у граничних випадках збіглися з відомими з літератури.

1. Васільєв К.В., Сулим Г.Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство*. – 2006. – №11-12. – С. 10–17.
2. Васільєв К.В., Сулим Г.Т. Метод прямого вирізування у моделюванні ортотропних тіл з тонкими пружними включеннями за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2020. – **63**, № 3. – С. 55–68.

ELASTIC EQUILIBRIUM OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC SOLIDS WITH CRACKS AT LONGITUDINAL SHEAR

The previously developed approach (direct cutting-out method) is extended to the case of longitudinal shear of a piecewise homogeneous anisotropic bodies. Using the method of jump functions and the method of integral Fourier transform, the problem is reduced to a system of singular integral equations. The reliability and efficiency of the proposed method has been analyzed on the problem of elastic equilibrium of a piecewise-homogeneous anisotropic layer with a loaded crack.

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З МНОЖИНОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ЗА ВРАХУВАННЯ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОВЕРХНІ ПЛАСТИНИ

Тетяна Шопя, Ольга Тужеляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка містить N абсолютно жорстких включень довільної форми, які мають різні типи з'єднань з пластиною. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j = 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3$. Нехай на включення масою $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}(t) = P_0^{(j)} \sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні пластини. Вважаємо, що включення здійснюють поступальний рух уздовж нормального напрямку до серединної поверхні пластини і $\tilde{w}^{(j)}(t) = \tilde{w}_0^{(j)}(t) \sin(\omega t)$ – переміщення j -ого включення. Зовнішня границя пластини також є довільної форми, а її контуром є криві $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$, $L^{(N+3)}$. На поверхні пластини діє гармонічне в часі довільне розподілене навантаження, яке задається функціями q , m_1 , m_2 . Використано позначення статті [2]. Крайові умови на контурах включень мають вигляд:

$$Q_n = -P^{(j)}(\alpha, t), \quad M_n = 0, \quad M_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1,$$
$$P^{(j)}(\alpha, t) = -k^{(j)}(\alpha)(\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\alpha, t)),$$

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad \gamma_n = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2,$$

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad \gamma_\tau = 0, \quad M_n = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3,$$

$$P^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha, t) = -Q_n(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3.$$

Крайові умови на зовнішній границі пластини задано як

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N + 1,$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N + 2,$$

$$w = w^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$
$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N + 3.$$

Ключову систему диференціальних рівнянь в межах теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти, наведено в роботі [1]. Рівняння руху абсолютно жорстких включень такі ж, як у роботі [2]. Задачу розв'язано непрямим методом граничних елементів. Використано функції Гріна, побудовані в роботі [1]. Розв'язок подано у вигляді суми потенціалу простого шару та класичного розв'язку Фур'є задачі з однорідними крайовими умовами типу шарнірного опирання в прямокутній області Π , яка містить розглядувану багатозв'язну область Ω . Систему інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень розв'язано методом колокацій. Задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. *Shopa T.V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science*. – 2018. – **54**, №3. – P. 368–377.
2. *Shopa T.V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of inclusions of any configuration with different types of connections with the matrix // *Materials Science*. – 2019. – **55**, №1. – P. 94–104.

TRANSVERSE VIBRATION OF ORTHOTROPIC PLATE WITH A SET OF INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION TAKING INTO ACCOUNT DISTRIBUTED LOAD ON THE SURFACE OF THE PLATE

Within shear deformation theory, the solution of the problem on the steady state flexural vibrations of orthotropic plate with a set of absolutely rigid inclusions of the arbitrary geometrical form and location with different types of connection with the plate is constructed. External load acts both on the inclusions and on the plate surface. Inclusions supposedly perform translational motion along the normal direction to the middle surface of the plate. Mixed boundary conditions are imposed on the external boundary of the plate which is of the arbitrary shape. The solution is based on the indirect boundary elements method.

УДК 536.24

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ

Олександр Кривий¹, Юрій Морозов²

¹Національний університет «Одеська Морська Академія», м. Одеса;

²Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

При математичній постановці і розв'язанні задач про вивчення впливу дефектів необхідно задати граничні умови на самому дефекті, наприклад, напруження на берегах тріщини або переміщення на включенні. Оскільки при фізичній постановці задач про визначення полів напружень і переміщень в околі концентраторів напружень відомі напруження або переміщення на границі області, в деяких внутрішніх точках або на нескінченності (для необмежених тіл), то визначення граничних умов на дефекті є окремою проблемою.

Ефективним методом розв'язання вказаної проблеми є метод фундаментальних розв'язків у просторі $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ узагальнених функцій повільного зростання. Зокрема, в роботах [1–4] задачу побудови фундаментальних розв'язків для кусково-однорідних двовимірних анізотропних середовищ зведено до матричної задачі Рімана за частиною змінних у просторі $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ і запропоновано підхід до її розв'язання. У цій роботі вказаний підхід узагальнено для побудови в явному аналітичному вигляді фундаментальних розв'язків для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, що дозволило дослідити вплив об'ємних навантажень на напруження і переміщення у площині з'єднання матеріалів.

Нехай в неоднорідному просторі, складеному із двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів, повністю зчеплених у площині $z = 0$, діють об'ємні сили $\mathbf{P}(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3)$, зосереджені в деяких областях розмірності $n = 0, 1, 2, 3$. Пружно-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1, \dots, 9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}.$$

Виходячи з рівнянь рівноваги і узагальненого закону Гука відносно компонент вектора \mathbf{v} , у просторі узагальнених функцій повільного зростання $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ запишемо таку крайову задачу:

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3] \mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3), \quad (1)$$

$$v_k(x, y, +0) = v_k(x, y, -0), \quad k = 1, \dots, 9, \quad k \neq 1, 2, 6. \quad (2)$$

$$v_k(x, y, z) \Big|_{(x, y, z) \rightarrow \infty} = 0, \quad k = 1, \dots, 9, \quad (3)$$

де \mathbf{D} – матричний диференціальний оператор із кусочно-сталими коефіцієнтами із простору $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^3)$.

Скориставшись підходом [1–5], побудовано фундаментальні розв’язки крайової задачі (1)–(3) в просторі $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^3)$. Зокрема, коли в довільній точці $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ діє зосереджена сила $\mathbf{P} = (0, 0, P_3)$, нормальні і дотичні напруження у площині $z = 0$, мають вигляд:

$$\sigma_z = -P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{1,n} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \quad \tau_{xz} = P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (x - x_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}},$$
$$\tau_{yz} = P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (y - y_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}.$$

1. Кривуу О. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Oper. Theory: Adv. Appl. – 2009. – **191**. – P. 395–406.
2. Кривуу О. F. Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 6. – P. 726–736.
3. Кривуу О. F. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253.
4. Кривуу О. F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 1. – P. 101–119.
5. Кривуу О. F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR AN INHOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC SPACE

A problem of constructing fundamental solutions for piecewise-homogeneous transversely isotropic space is reduced to a matrix Riemann problem in the space of generalized functions of slow growth, for which proposed method for solving. As a result, explicit expressions for the components of the fundamental solution vector are obtained, as well as simple representations for the components of the stress tensor and the displacement vector in the interface of transversely isotropic elastic half-spaces, which are under the action of concentrated normal and tangential forces. The fields of stresses and displacements in the half-spaces compound are investigated. In particular, for some combinations of materials, numerical values of the coefficients of the influence of concentrated forces on stresses and displacements are given. Also, the conditions are established under which there are no normal displacements in the plane of connection of transversely isotropic elastic half-spaces.

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НА ДИНАМІЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАВАНТАЖЕННЯ

Уляна Жидик¹, Володимир Флячок²

¹Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів;

²Українська академія друкарства, м. Львів

Неоднорідні оболонки є елементами багатьох сучасних конструкцій, які працюють в умовах інтенсивного нагрівання. Тому розроблення методів розрахунку таких оболонок на динамічні навантаження є актуальною інженерною задачею.

У цій доповіді наведено загальний метод розв'язування динамічних задач температурних напружень неоднорідних анізотропних оболонок. Як приклади, розв'язано задачі для замкнутих вільно опертих на кінцях циліндричних оболонок із шаруватих та функціонально градієнтних матеріалів.

Розглянемо оболонку, що має сталу товщину $2h$, а її точки віднесено до нормальної криволінійної координатної системи $\{x^\alpha, x^3 = z\}$, де $z = 0$ позначає середину поверхню G , обмежену контуром g . Вважатимемо, що матеріал оболонки неоднорідний і анізотропний з однією площиною пружної і теплової симетрії, яка паралельна середній поверхні, а приріст температури і вектор переміщень точок оболонки є лінійними функціями поперечної координати. Нехай в початковий момент часу оболонка перебуває в природному стані. З моменту часу $\tau > 0$ під дією зовнішніх поверхневих навантажень $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$, теплообміну зі зовнішнім середовищем, а також контурних силових і температурних факторів в оболонці виникнуть поле узагальнених переміщень $\mathbf{u} = \{u^\alpha, u^3\}$, $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^\alpha, \gamma^3\}$ і температурне поле $T_{(n)}$, а також зусилля-моменти $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha 3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha 3}\}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}\}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{\alpha\beta}, \alpha_{\alpha 3}\}$ як функції координат x^α і часу τ . Якщо вважати, що ці функції володіють відповідними властивостями гладкості, то вони задовольняють системи диференціальних рівнянь, граничним та початковим умовам, а протягом кожного проміжку часу реакція оболонки визначається за принципом Гамільтона

$$\delta \int_0^\tau (U - K) d\tau = \int_0^\tau \delta L d\tau,$$

де U – повна енергія деформації; K – кінетична енергія; δL – віртуальна робота еквівалентних поверхневих і контурних сил.

Розвиваючи функції узагальнених переміщень \mathbf{u} , γ в ряди по залежних від часу узагальнених координатах $q_m(\tau)$ і відповідних ортогональних координатних функціях та використовуючи методи варіаційного числення, одержимо вираз для узагальнених координат

$$q_m(\tau) = q_m(0) \cos \omega_m \tau + \frac{\dot{q}_m(0)}{\omega_m} \sin \omega_m \tau + \frac{1}{\omega_m a_m} \int_0^\tau Q_m(\tau') \sin \omega_m(\tau - \tau') d\tau',$$

де Q_m – узагальнені сили, a_m – узагальнені коефіцієнти маси, ω_m – власні частоти.

За відомого температурного поля і наявності координатних функцій, знайдені узагальнені координати $q_m(\tau)$ повністю визначають розв'язок динамічної задачі температурних напружень неоднорідних анізотропних оболонок.

Одержаний розв'язок використано для дослідження напружено-деформованого стану та динамічної поведінки кругових замкнутих циліндричних оболонок скінченної довжини, кінці якої вільно оперті. Оболонка нагрівається докільням шляхом конвективного теплообміну. На внутрішній поверхні оболонки температура середовища дорівнює нулю, а на її зовнішній поверхні температура задана функцією координат і часу. Залежно від координат розглянуто випадки рівномірного, косинусоїдального і квадратичного розподілу. Залежно від часу розглянуто випадки раптової, поступової і синусоїдальної зміни температури. Дослідження проводили для неоднорідного композитного матеріалу шаруватої структури і матеріалу з неперервною неоднорідністю. Досліджено вплив неоднорідності та способу нагрівання на напружено-деформований стан та коефіцієнти динамічності циліндричних оболонок.

ANALYSIS OF INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS SUBJECT TO DYNAMIC THERMAL LOADS

A general solution of the dynamic temperature problem for inhomogeneous anisotropic shells is found by the variational method. As an example, problems for cylindrical shells are solved.

УДК 539.3

РІВНОВАГА НЕТОНКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ НЕВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ярослав Григоренко¹, Лілія Рожок²

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ;

²Національний транспортний університет МОН України, м. Київ

Широке застосування оболонок в різних галузях господарювання стимулює необхідність побудови різноманітних моделей і обґрунтованих схем, розробку ефективних методів розв'язування певних класів задач та вико ристання їх до визначення напруженого стану конкретних оболонок. В реальних умовах експлуатації, оболонки та конструкції з них можуть знаходитись під дією розподіленого чи локального навантаження, а також відчувати вплив температурного [1, 2] поля.

У даній роботі на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [4] в просторовій постановці розв'язано задачу про напружений стан ізотропних нетонких циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом за умов простого обпирання торців, що знаходяться під дією невісесиметричного локального навантаження, яке прикладене на частині бічної поверхні, у вигляді $P(\theta) = p_0(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, де θ – центральний кут в поперечному перерізі. Навантаження подано у вигляді скінченного ряду Фур'є [3] і прикладається в зоні мінімальної $\theta = \pi/2$ та максимальної $\theta = 0$ жорсткості оболонки. Наводяться результати розрахунків у вигляді графіків розподілу полів нормальних переміщень та напружень.

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка. – 1992. – 280 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики неоднородных оболочек. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1992. – 336 с.
3. Grigorenko Ya. M., Rozhok L.S. Applying discrete fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders // Int. App. Mech. – 2014. – 50, № 2. – С. 105–127.

EQUILIBRIUM OF NON-THIN ELLIPTIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE ACTION OF NONAXISYMETRIC LOCAL LOAD

On the basis of the method of approximation of functions by discrete Fourier series, the stress state of non-thin elliptical cylindrical shells under the action of a nonaxisymmetric local load is investigated.

УДК 539.3

ВІДПАЛ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Богдан Дробенко, Євгеній Ірза

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Запропоновано методику дослідження термонапруженого стану в'язкопружних структурно неоднорідних тіл при відпаді. Розроблено відповідне програмне забезпечення і виконано низку обчислювальних експериментів для конкретних термочутливих структурно неоднорідних тіл при відпаді.

Задачу про визначення напружено-деформованого стану в структурно неоднорідному тілі сформульовано у квазістатичній постановці в переміщеннях. Неоднорідну структуру тіла враховано через фізико-механічні характеристики, які є залежними від просторових координат і температури.

Тіло піддається технологічному нагріванню від початкової температури t_0 до деякої максимальної температури t_{\max} , витримці при температурі t_{\max} (при якій відбувається релаксація залишкових напружень в тілі) з подальшим охолодженням до початкової температури, яке здійснюється шляхом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\tau)$ через частину поверхні Γ_t , $\vec{r} \in \Gamma_t$, тепловим потоком $q(\tau)$ через частину поверхні Γ_q , $\vec{r} \in \Gamma_q$, $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$, а також розподіленими у тілі джерелами тепла потужності $Q(\vec{r}, \tau)$, $\vec{r} \in \Omega$.

Температурне поле в тілі описує рівняння теплопровідності

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0, \vec{r} \in \Omega \quad (1)$$

за початкової

$$t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}), \vec{r} \in \Omega \quad (2)$$

і крайових

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0, \vec{r} \in \Gamma_t \quad (3)$$

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + q = 0, \vec{r} \in \Gamma_q \quad (4)$$

умов. Тут $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $k(\vec{r}, t)$ – коефіцієнт теплопровідності; $\rho(\vec{r}, t)$ – густина; $c(\vec{r}, t)$ – питома теплоємність; τ – біжучий час; \vec{r} – радіус-вектор точки; \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні; α – коефіцієнт тепловіддачі.

Для опису процесів деформування в тілі використано рівняння термо-в'язкопружності (модель Максвелла):

$$\begin{cases} d\{\tilde{\varepsilon}\} = d\{\tilde{\varepsilon}^e\} + d\{\tilde{\varepsilon}^c\}, \\ \sigma_0 = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_t), \end{cases}$$

де $\{\tilde{\varepsilon}\}$ – компоненти девіатора деформацій; $\{\tilde{\varepsilon}^e\}$, $\{\tilde{\varepsilon}^c\}$ – компоненти девіатора пружних і в'язких деформацій відповідно; σ_0 – середнє нормальне напруження; ε_0 – середнє відносне видовження; ε_t – температурна деформація; $K_0(\bar{r}, t)$ – модуль об'ємного стиску.

Розглянуто випадок малих деформацій. В області Ω повинні також виконуватися геометричні співвідношення Коші між деформаціями та переміщеннями, рівняння рівноваги за відповідних крайових умов.

При розв'язуванні системи рівнянь термомеханіки використано метод зважених залишків в поєднанні з методом скінченних елементів [1].

Внаслідок стандартної скінченно-елементної дискретизації задачу теплопровідності (1)–(4) зведено до системи диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу:

$$[C_t] \frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t] \{T\} = \{f_t\}.$$

Тут $[C_t]$, $[K_t]$, $\{f_t\}$ – відповідні матриці теплопровідності та теплоємності, а також вектор температурного навантаження.

Повну систему рівнянь, які описують термов'язкопружне деформування тіла, зведено до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду:

$$[K_u] \{U(\tau)\} = \{F_0\} + \int_{\tau_0}^{\tau} [F_1(\tau, \xi)] \{U(\xi)\} d\xi - \{F_2\},$$

де $[K_u]$, $[F_1]$, $\{F_0\}$, $\{F_2\}$ – відповідно матриці жорсткості і вектори навантаження.

Досліджено напружений стан порожнистого циліндра за заданих режимів відпалу з урахуванням різного типу його структурної неоднорідності.

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite element method: Vol 1. The basis. – London: "Butterworth Heinemann", 2000. – 689p.

ANNEAL OF STRUCTURALLY NONHOMOGENEOUS BODIES

The method for calculating the stress state of a viscoelastic structurally nonhomogeneous bodies during annealing is proposed. The stress state of a structurally nonhomogeneous hollow cylinder under a given annealing mode is researched.

ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ

міні-симпозіум до 85-річчя від дня народження
доктора фізико-математичних наук,
професора **Василя Михайловича ВІГАКА**

OPTIMIZATION IN THERMOMECHANICS

mini-symposium dedicated to the 85th Anniversary
of Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Professor **Vasyl VIHAK**

ВАСИЛЬ МИХАЙЛОВИЧ ВІГАК

(5.05.1936 р. – 25.02.2003 р.)

Василь Михайлович Вігак – відомий вчений у галузі механіки деформівного твердого тіла та оптимального керування процесами в системах із розподіленими параметрами – народився в селі Угольна Стрийського району Львівської області. У 1958 р. закінчив механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені І. Франка за спеціальністю «механіка». Після закінчення університету працював на підприємстві Львів-ОРГРЕС Міністерства енергетики, де пройшов шлях від інженера до бригадного інженера-експерта з міцності та термоміцності теплоенергетичного обладнання. З 1975 р. до 1990 р. працював старшим науковим співробітником та завідувачем лабораторії, а з 1990 р. до 2003 р. обіймав посаду завідувача відділу механіки деформівного твердого тіла Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.



Перші наукові публікації В.М. Вігака, написані під час роботи на підприємстві Львів-ОРГРЕС, мали чітку практичну спрямованість і були присвячені дослідженню температурного і термонапруженого станів відповідальних деталей теплоенергообладнання та вибору раціональних режимів їх роботи. Результати цих досліджень склали основу успішно захищеної в 1973 р. під керівництвом Я.С. Підстригача дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Усебічне вивчення вказаної проблематики та співпраця з Я.С. Підстригачем привели до започаткування нового напрямку наукових досліджень – застосування методів обернених задач теплопровідності та термопружності до побудови розв'язків задач оптимального керування системами з розподіленими параметрами. Подальші дослідження показали високу ефективність цього підходу стосовно до розв'язування важливих теоретичних та прикладних задач.

Науковий талант В.М. Вігака у повному обсязі розкрився після переходу в 1975 р. на роботу в Інститут прикладних проблем механіки і математики АН України, очолюваний його вчителем Я.С. Підстригачем. Тут ним було розроблено метод побудови оптимального за швидкодією керування нагріванням пружних тіл при обмеженнях на напруження, параметри теплового процесу та керування. Метод ґрунтується на особливості, притаманній нагріванню тіл зовнішніми джерелами тепла: оптимальне за швидкодією нагрівання тіла завжди здійснюється, принаймні, по одній із границь накладених обмежень. Тому задача керування зводиться до послідовності задач тепло-

провідності з класичними та некласичними умовами, коли замість граничної умови задано, наприклад, середню температуру тіла, перепад температур, градієнт температурного поля, термопружні напруження. Умови, які при цьому залишаються, використовуються для визначення функції керування, яка забезпечує гранично допустимий обмежуючий параметр режиму. Результати досліджень склали основу монографії, опублікованої в 1979 р.

В.М. Вігаком теоретично обґрунтовано (спільно з А.В. Костенком) та розвинуто (спільно з Л.Д. Величком) цей підхід метод на випадок в'язкопружного та пружнопластичного (спільно з А.В. Ясінським, М.Й. Юзв'яком) процесів деформування матеріалу тіла. Розвиток та обґрунтування методу для випадку неоднорідних, термочувливих та анізотропних тіл, а також їх нагрівання внутрішніми джерелами тепла проведено В.М. Вігаком спільно з А.В. Костенком, М.Б. Вітером, Х.О. Засадною, М.І. Свиридою, Я.Л. Лісевичем, Ю.П. Ярмолюком. Спільно з В.Л. Фальковським розглянута можливість застосування до вказаних задач методів теорії некоректних обернених задач теплопровідності.

Далі увагу вченого привертають задачі оптимального керування напружено-деформованим станом термопружних тіл. Із використанням математичного потенціалу методу оберненої задачі В.М. Вігаком (спільно з А.В. Ясінським) побудовано розв'язки задач оптимального керування розподілом компонент тензора температурних напружень або вектора переміщень за допомогою внутрішніх джерел або зовнішніх теплових потоків. Результати досліджень підсумовано у другій його монографії, яка вийшла в 1988 році і склала основу захищеної у 1990 році дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. У 1994 році йому присуджено вчене звання професора.

Важливим етапом наукової діяльності В. М. Вігака був розроблений ним метод розв'язування прямих задач пружності й термопружності, який ґрунтується на безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь рівноваги й суцільності в напруженнях і має фундаментальне теоретичне значення як для механіки деформівного твердого тіла в цілому, так і для розвитку методів математичної фізики. На основі цього методу ним спільно з учнями побудовано аналітичні розв'язки дво- та тривимірних квазістатичних задач пружності й термопружності для необмежених областей, двовимірних задач для тіл із кутовими точками, виготовлених з однорідного ізо- та ортотропного матеріалів та одно- і двовимірних задач термопружності для неоднорідних термочувливих тіл.

Наукові результати Вігака В. М. отримали широке визнання в наукових колах України та за її межами. Він є автором понад 220 наукових праць в авторитетних фахових виданнях. Серед його учнів шість кандидатів фізико-математичних наук.

Василь Михайлович Вігак був людиною високої моралі, надзвичайної відданості своїй справі та Батьківщині.

УДК 539.3

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ТА СПОСОБИ ЇХ РЕАЛІЗАЦІЇ

Богдан Калиняк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Об'єктом дослідження є ізотропний неоднорідний порожнистий круговий циліндр, циліндричні поверхні якого обмежені площинами $z = z_1$, $z = z_2$. Початок системи координат розташовано на осі Oz . Фізико-механічні характеристики матеріалу циліндра (модуль пружності E , коефіцієнт Пуассона ν , коефіцієнти лінійного теплового розширення та теплопровідності α та λ відповідно), а також стаціонарне температурне поле і напруження є функціями координат ρ , z . Температурне поле задовольняє стаціонарне рівняння теплопровідності з об'ємними тепловими джерелами на основі закону Фур'є та класичні умови конвективного теплообміну на поверхнях циліндра.

Предметом дослідження є: а) встановлення умов нагрівання, які призводять до відсутності напружень, та способів їх реалізації, якщо відомі характеристики матеріалу; б) визначення розподілів характеристик матеріалу і зв'язок з умовами нагрівання, які призводять до відсутності напружень у циліндрі, за відсутності об'ємних теплових джерел. Завданням є визначення точних аналітичних розв'язків такої задачі.

З використанням класичної моделі незв'язаної термопружності отримуємо вираз $t(\rho, z) = T(\rho, z) - T_0 = C / \alpha(\rho, z)$, де C – довільна стала, T_0 – відлікова температура, за якої відсутні напруження, $T(\rho, z)$ – стаціонарне температурне поле, який є необхідною і достатньою умовою відсутності напружень. Це означає, що температурне поле повинно задовольняти відповідну задачу теплопровідності, яка стає моделлю зв'язку між коефіцієнтом теплового лінійного розширення, теплофізичними характеристиками матеріалів та призводить до узгодження розподілів температур на поверхнях циліндра і рівності температур навколишнього середовища на лініях перетину площин з циліндричними поверхнями радіусів ρ_1 , ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$).

Відповідна обернена нелінійна задача теплопровідності відносно коефіцієнта теплопровідності має точні аналітичні розв'язки, якщо характеристики матеріалів $p(\rho, z)$ подати у вигляді $p(\rho, z) = p_\rho(\rho) p_z(z)$. У припущенні, що характеристики функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ) описують моделлю простої суміші, можна отримати такі аналітичні вирази

$\lambda(\rho, z) = C_4 \exp(C_1(\rho^2/2 - z^2) / 2 - C_3 z) / \rho^{C_2}$ для коефіцієнта теплопровідності, концентрації одного матеріалу в іншому $V(\rho, z) = (\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z) - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)$, зв'язків між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення складових $\lambda_1 / \lambda_2 = \alpha_1 / \alpha_2$, отже, і вираз для температурного поля $t(\rho, z) = \bar{C} / \lambda(\rho, z)$. Індокси біля характеристик «1» та «2» стосуються постійних характеристик складових ФГМ, C_1, C_2, C_3, \bar{C} – сталі, визначені з узгоджених між собою умов теплообміну на поверхнях циліндра. Наведені чисельні результати і вхідні дані вказують на можливість забезпечення відсутності напружень у порожнистому осесиметричному циліндрі при перепаді температури між межами у декілька сотень градусів і наявності ФГМ, для складових яких виконується $\lambda_1 / \lambda_2 = \alpha_1 / \alpha_2$, а температури гріючих середовищ на межах виражені через функції нормального розподілу Гауса та степеневу функцію радіальної змінної. Задачі про температурні поля, які не викликають напружень в однорідних тілах розглянуті в [1, 2].

1. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 167 с.
2. Підстригач Я.С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.

CONDITION OF ABSENCE OF THERMAL STRESSES IN AN INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH AND WAYS OF THEIR IMPLEMENTATION

The conditions of absence of stresses in an inhomogeneous hollow cylinder of finite length have been obtained and used for determining the corresponding exact expressions for the temperature of the environment and material characteristics of the cylinder at the convective heat exchange. The calculation confirms the possibility to satisfy the obtained conditions with existing materials and possible temperature distribution on the surfaces.

УДК 539.3

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА НАПРУЖЕННЯМИ КОНСТРУКЦІЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Богдан Дробенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Під час навантаження конструкцій у місцях різкої зміни геометричної форми напруження можуть досягати значної величини, перевищувати допустимі й спричиняти виникнення значних пластичних деформацій, появу і ріст тріщин, втрату стійкості та руйнування. Тому актуальною є задача оптимізації напруженого стану конструкцій шляхом оптимального проектування.

Переважна більшість праць з оптимізації присвячена тонкостінним конструкціям, напружений стан яких визначають на основі теорії оболонки. Однак застосування таких теорій у зоні поєднання окремих конструкційних елементів може приводити до суттєвих похибок. З огляду на це виникає потреба у використанні уточнених моделей, особливо в околі зон різкої зміни геометричної конфігурації, де наявна концентрація напружень практично і визначає експлуатаційний ресурс конструкції.

Розглянуто задачу оптимізації напруженого стану навантаженої конструкції в рамках просторово тривимірного підходу за рахунок вибору форми області V , яку займає конструкція в просторі, так, щоб її напружений стан в околі зони з'єднання окремих конструкційних елементів був якомога ближчим до певного бажаного в розумінні критерію

$$I = \max_{x \in V^{(i)}} \sqrt{\sum_{k,m}^3 (\sigma_{km}^{(i)} - \sigma_{km}^{0(i)})^2}, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (1)$$

де $\sigma_{km}^{(i)}$, $\sigma_{km}^{0(i)}$ – компоненти тензорів наявних і бажаних напружень в i -ій складовій розглядуваної конструкції.

Форму конструкції вибираємо з умови, що частина її поверхні S_C є заданою, тоді як інша частина S_W варіюється в певних межах. Якщо позначити радіуси-вектори точок поверхонь S_C та S_W відповідно через \mathbf{r}_C та \mathbf{r}_W , за функцію керування можемо вибрати функцію \mathbf{r}_W при таких обмеженнях:

$$\min \rho(M, S_i^{(-)}) \geq \rho_i^{(-)}, \quad M \in S_i^{(+)}; \quad \max \rho(M, S_i^{(-)}) \leq \rho_i^{(+)}, \quad M \in S_i^{(+)}, \quad (2)$$

де $S_i^{(-)}$, $S_i^{(+)}$ – лицьові поверхні i -ї складової; $\rho(M, S_i^{(-)})$ – віддаль фіксованої точки $M \in S_i^{(+)}$ від поверхні $S_i^{(-)}$; $\rho_i^{(-)}$, $\rho_i^{(+)}$ – постійні, вибрані з технологічних міркувань.

Задача оптимізації напруженого стану конструкції зводиться до задачі на умовний екстремум функціоналу (1) і полягає в його мінімізації на

множині фактично переміщень \mathbf{u} та функції \mathbf{r}_w . Ці функції задовольняють обмеження (2) та рівняння рівноваги в переміщеннях при відповідних умовах на закріплення та заданому навантаженні.

При пошуку оптимальної форми конструкції задається початкове наближення поверхні S_w і виконується скінчено-елементна дискретизація задачі, внаслідок чого оптимізаційна задача зводиться до визначення розташування скінченного числа вузлів скінченно-елементної моделі, що належать шуканій поверхні, і формулюється як задача нелінійного математичного програмування відносно вектора керування $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$, компоненти якого задають розташування вузлів на шуканій поверхні конструкції.

Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування має ітераційний характер і полягає в побудові послідовності наближень до оптимального розв'язку на основі інформації про зміни значень критерію оптимізації напруженого стану (1) на малих варіаціях вектора керування \mathbf{H} . Цю інформацію ми отримуємо на кожному кроці з розв'язків прямої задачі теорії пружності. Обмеження (2) під час пошуку оптимальної форми враховуємо через відбракування точок простору параметрів керування, в яких вони не виконуються.

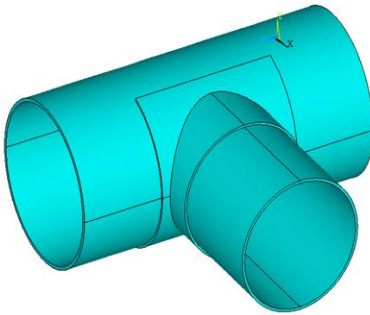


Рис. 1

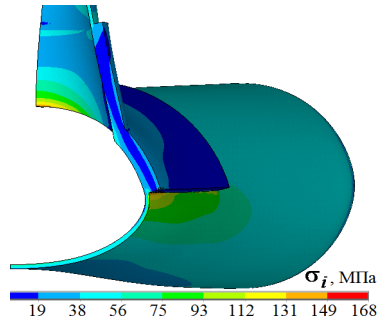


Рис. 2.

Розглянуто низку задач оптимізації сферичних посудин і балонів високого тиску, а також трійникових з'єднань магістральних трубопроводів (рис. 1, 2).

STRESS OPTIMIZATION OF STRUCTURES OF COMPLEX SHAPE

The stress optimization problem of complex structures is considered within the three-dimensional elasticity by choosing the shape of the structure. The problem is formulated as a nonlinear mathematical programming problem and solved by its methods. As examples, a number of case studies of the optimization of spherical vessels and high-pressure vessels, as well as T-joints of pipelines are considered.

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СТАТИЧНИМ ТЕРМОНАПРУЖЕНИМ СТАНОМ ПЛОСКОДЕФОРМОВАНОГО ПІВПРОСТОРУ

Анатолій Ясінський, Людмила Токова, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

У процесі експлуатації елементи мікроелектроного обладнання зазнають теплового навантаження через нагрівання внутрішніми джерелами тепла. З метою забезпечення проектних функціональних та міцнісних характеристик таких елементів індуковане тепло потрібно відвести. При цьому слід враховувати обмеження на параметри їх термонапруженого стану – максимальні значення переміщень чи напружень.

У роботі для плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, побудовано та досліджено розв'язки двовимірних статичних задач оптимального керування вертикальними температурними переміщеннями або окремими компонентами тензора напружень його межевої поверхні чи деякого перерізу, паралельного до неї. За критерій оптимальності вибрано мінімальне рівномірне відхилення керованого розподілу переміщень чи напружень від заданого, а за функцію керування – температуру довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона. На основі припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, задачі оптимізації зведено до обернених задач термопружності, які описано інтегральними рівняннями першого роду. Для конкретних видів теплового навантаження півпростору проаналізовано поведінку знайденого керування, яке забезпечує рівність нулеві вертикальних переміщень межевої поверхні чи окремих компонент тензора напружень. Якщо припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, порушується, запропоновано методику побудови у просторі неперервних функцій послідовності, що мінімізує заданий критерій. Проаналізовано поведінку елементів мінімізуючої послідовності та значення критерію оптимальності, які їм відповідають.

OPTIMAL CONTROL OF THE STATIC THERMOSTRESSED STATE OF A PLANE-DEFORMED HALF-SPACE

Solutions to the problem of optimal control of certain displacement-vector or stress-tensor components are constructed and analyzed for a halfspace, which exchanges heat convectively through its limiting plane and is subject to the inner heat sources under the condition of plane strain.

УДК 539.3:621

ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЗАХИСНОЇ ОБОЛОНКИ АТОМНОЇ ЕЛЕКТРОСТАНЦІЇ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Наталя Сметанкіна, Альона Меркулова, Дмитро Меркулов, Сергій Місюра

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків

Велику увагу при проектуванні атомних електростанцій (АЕС) приділяють пошуку нових конструктивних рішень захисних оболонок над реакторними блоками. Захисні оболонки повинні витримувати як зовнішні (удар літака, падіння залізобетонних труб, дерев), так і внутрішні ударні й імпульсні навантаження. Захисні оболонки АЕС є багатошаровими конструкціями з різноманітною структурою (залізобетонна захисна оболонка зі зовнішнім і внутрішнім металевими облицюваннями, подвійна залізобетонна оболонка, подвійна оболонка, складена з внутрішньої сталеві і зовнішній залізобетонної оболонок тощо) [1], що підвищує міцність конструкції при експлуатаційних та аварійних впливах [2, 3]. Оскільки неможливо здійснити натурні експерименти з різними варіантами захисних оболонок, розробка методів теоретичного дослідження і обґрунтування найкращого проекту є актуальною проблемою, вирішення якої дозволить уникнути можливих аварійних ситуацій.

Розглянуто задачу про мінімізацію маси кришки захисної оболонки АЕС при імпульсному навантаженні $F(t)$, а саме "Імпульс МАГАТЕ" [4]. Кришка моделюється круглою дво- або тришаровою пластиною радіуса $r = 22,5$ м. Математична модель багатошарової кришки ґрунтується на уточненій теорії багатошарових пластин [4]. Змінними параметрами задачі мінімізації маси багатошарової кришки є товщини шарів. Обмеження накладаються на значення напружень стиску і розтягу, що виникають у шарах упродовж деякого характерного відрізка часу. Обмежуються також мінімальне і максимальне значення товщини кожного шару, що зумовлено конструктивними, технологічними та експлуатаційними вимогами. Як метод оптимізації застосовується гібридний метод з адаптивним управлінням обчислювальним процесом [3, 5], у якому гібриденти об'єднуються в автоматизованій системі за допомогою керуючих функцій, визначених на множині ознак обчислювальної ситуації.

Розглянуто кришки з такими композиціями: I – залізобетон – сталь та II – залізобетон – сталь – залізобетон. Для композиції I змінними параметрами є товщини першого і другого шарів, для композиції II – товщини першого і третього шарів. Початкова маса кришки I дорівнювала $F^0 = 4896$ т; після оптимізації маса зменшилася до $F^* = 2352$ т, тобто майже вдвічі. Початкова маса кришки II – $F^0 = 5031$ т; після оптимізації вона також зменшилася

вдвічі до $F^* = 2399$ т. У цьому випадку товщина залізобетонного шару зменшилася незначно, а товщини сталевих шарів, як і для першої композиції, досягли мінімально допустимих значень. Таким чином, оптимальні проекти для першої і другої композиції відрізняються несуттєво, і двошарова композиція може замінити тришарову, що дозволить знизити витрати на матеріали та монтажні роботи.

Виконане дослідження дає змогу зробити такі висновки. Поставлена і розв'язана задача про мінімізацію маси багатошарового елемента конструкції АЕС при нестационарному навантаженні. Розроблений підхід дозволяє визначити на початкових стадіях проектування основні параметри залізобетонних корпусів, захисних конструкцій і герметизуючих облицювань в залежності від геометричних і міцнісних характеристик матеріалів, експлуатаційних і аварійних навантажень та інших факторів та підвищити безпеку і надійність захисних споруд АЕС.

Роботу виконано за проектом № Р.4.4–2021 (II-18-21) у рамках Цільової програми «Науково-технічні проблеми моніторингу стану, оцінювання і подовження ресурсу конструкцій, обладнання та споруд тривалої експлуатації» («Ресурс-3»).

1. *Баженів В.А., Слободян Я.О.* Застосування сучасних комп'ютерних технологій розрахунку і проектування для обґрунтування безпеки об'єктів атомної енергії // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2004. – № 74. – С. 35–43.
2. *Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O.* Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact // Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering–2020. – **188**. – Springer: Cham. – 2021. – P. 267–276.
3. *Шелудько Г.А., Шупіков О.М., Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В.* Прикладний адаптивний пошук. – Харків: Око, 2001. – 191 с.
4. *Сметанкіна Н.В.* Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харків: Миськдрук, 2011. – 375 с.
5. *Misura S., Smetankina N., Misiura Ie.* Optimal design of the cyclically symmetrical structure under static load // Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020. – **188**. – Springer: Cham. – 2021. – P. 256–266.

OPTIMAL DESIGN OF THE PROTECTIVE COVER OF A NUCLEAR POWER PLANT UNDER IMPULSE LOADING

A problem on the optimal design of a multilayer element of atomic power plants by a minimum mass criterion at impulse loading is formulated. As a method for the optimization, a modified version of the hybrid method of optimization with an adaptive control by computational process is used. Two optimal cover designs are obtained.

УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЙ ВІГАКА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ В НАПРУЖЕННЯХ

Микола Юзв'як

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розв'язання плоских та просторових статичних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях полягає у побудові виразів для компонент тензора напружень, що задовольняють системи рівнянь рівноваги та суцільності та задані на межі досліджуваного тіла межові умови. Побудова таких виразів у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження у низці випадків є доволі складною проблемою [1], для подолання якої використовують методи, засновані на використанні допоміжних потенціальних функцій. Зокрема, при розв'язанні плоских задач у декартових координатах використовують функцію напружень Ері [2], що задовольняє бігармонічне рівняння, виведене не основі вихідного рівняння суцільності; у випадку осесиметричної задачі у циліндричних координатах – бігармонічну функцію Лява [3] і т.п. Однак, попри видиме спрощення методика розв'язання задач завдяки зведенню їх до єдиного ключового рівняння для бігармонічної функції, підвищення диференціального порядку ключового рівняння вносить певні ускладнення у процес побудови фізично обґрунтованих розв'язків.

У роботі розвинуто метод безпосереднього інтегрування [1], запропонований В.М. Вігаком, стосовно розробки методика розв'язування плоских та просторових задач теорії пружності та термопружності шляхом зведення їх до інтегро-диференціального ключового рівняння для визначальної функції, яку визначено шляхом інтегрування рівнянь рівноваги та названо функцією Вігака. На відміну від бігармонічних функцій, функція Вігака є фізично обґрунтованою та пов'язаною з компонентами тензора напружень інтегральними співвідношеннями. Її використання спрощує визначення напружень в обмежених тілах з кутовими точками, неоднорідних та функціонально-градієнтних тілах, а також відкриває широкі можливості при розв'язуванні обернених задач.

1. *Калиняк Б.М., Токовий Ю.В., Ясінський А.В.* Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.

2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
3. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высшая школа, 1975. – 526 с.

IMPLEMENTATION OF THE VIHAK FUNCTIONS IN SOLVING THE ELASTICITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS IN TERMS OF STRESSES

Within the framework of the solution strategy endorsed by the method of direct integration (which was initially suggested by Prof. Vasyl M. Vihak), a technique for solving the plane and spatial elasticity and thermoelasticity problems in terms of stresses is presented. Basing on the implementation of the Vihak functions, which are related to the stress tensor components via the integral operators, the problems are reduced to the governing integro-differential equations with corresponding local boundary and integral conditions. In contrast to the employment of the biharmonic potential functions, the implementation of the Vihak functions is physically motivated and allows for simplifying the stress analysis in finite bodies with corner points, inhomogeneous and functionally-graded solids, and offers ample opportunities in formulating and solving the relevant inverse elasticity and thermoelasticity problems.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕПЛОВИХ ТА ТЕРМОНАПРУЖЕНИХ ПОЛІВ У РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРАХ

Юрій Токовий^{1,2}, Надія Заводовська¹, Марта Бобик²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів;

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

Дослідження термомеханічної поведінки неоднорідних структур, що функціонують в умовах інтенсивних теплових та силових навантажень та локальних внутрішніх полів, привертають дедалі більше уваги спеціалістів як академічної сфери, так і інженерів, що займаються запровадженням новаторських ідей у виробництві. Зокрема це пов'язано з розвитком концепції функціонально-градієнтних матеріалів та новітніх технологій щодо формування неоднорідних структур із наперед заданими профілями розподілу теплофізичних та механічних характеристик, що інтенсивно запроваджуються та досліджуються у провідних світових наукових та виробничих центрах у зв'язку розширенням програм освоєння космосу та потребою моделювання елементів конструкцій, які володіють високими показниками міцності та термоопору і не втрачають функціональності при значних перепадах температури. Розвиток моделей та методів дослідження термомеханічної поведінки неоднорідних структур пов'язаний зі значними труднощами, які насамперед викликані потребою розв'язання диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а розроблені на сьогодні підходи не можуть задовольнити сучасні потреби у даній галузі [1], основною з яких є визначення оптимального розподілу характеристик матеріалів для забезпечення тих чи інших функціональних показників конструкції в цілому, а також оптимальне керування їх термонапруженим станом [2].

Особливо гострою є необхідність напрацювання методик побудови розв'язків у вигляді явної функціональної залежності від силових та теплових факторів впливу для циліндричних елементів конструкцій, внутрішня поверхня яких часто є недоступною для зняття технологічної інформації про показники теплового та термонапруженого станів. Зокрема при розрахунках на міцність та довговічність елементів трубопроводів, стінки яких є багат шаровими структурами з наявністю радіально-неоднорідних і термочутливих елементів та зварних швів та залікованих дефектів слід враховувати термодіформативність та комплексний вплив теплових, силових та залишко-

вих полів за недоступності внутрішньої поверхні для прямих вимірювань, що змушує використовувати додаткову інформацію про термомеханічні процеси та застосовувати методи обернених задач термомеханіки. З огляду на це, проблема розвитку аналітичних методів дослідження термомеханічної поведінки структурно-неоднорідних циліндричних тіл, їх зручності для використання при вирішенні актуальних прикладних задач механіки деформівного твердого тіла набуває теоретичної та практичної доцільності та ваги.

У даній роботі з використанням методу безпосереднього інтегрування побудовано аналітичні розв'язки осесиметричних задач теплопровідності та термопружності для довгого порожнистого циліндра за змінного вздовж твірної температурного навантаження. Термопружні та теплофізичні властивості матеріалу циліндра взято у вигляді довільних функціональних залежностей від радіальної координати. Розв'язування зведено до відшукування розв'язку отриманого ключового інтегрального рівняння Вольтерри. З використанням методу резольвент побудовано розв'язок у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантажень. На основі отриманих розв'язків чисельно проаналізовано комплексний вплив теплових навантажень, неоднорідності матеріалу та товщини стінки циліндра на розподіл температурного поля. Розв'язок верифіковано з використанням експерс-обчислень з використанням методу квадратур.

1. *Токовуу Y., Ма С.-С.* Elastic analysis of inhomogeneous solids: history and development in brief // J. Mechanics. – 2019. – **35**, No. 5. – P. 613–626.
2. *Калиняк Б.М., Токовий Ю.В., Ясінський А.В.* Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 28–42.

ANALYSIS OF AXISYMMETRIC THERMAL AND THERMOSTRESSED FIELDS IN RADIALLY-INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDERS

By implementing the direct integration method, a technique for constructing analytical solutions to the axisymmetric heat-transfer and thermoelasticity problems in a long hollow radially-inhomogeneous cylinder is presented for the case of variable thermal loading on the inner and outer circumferences. The problem was reduced to a governing Volterra integral equation, which then was solved by making use of the resolvent-kernel solution technique. The solution was compared and verified by means of a fast numerical algorithm constructed by implementing the quadrature formulae.

УДК 531.8 + 62 – 50

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ І МЕТОДУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДВОЛАНКОВИМ МАНІПУЛЯТОРОМ

Мирослав Демидюк¹, Віталій Демидюк²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів;
²ТОВ "ДевКрафт", м. Львів

Дволанковий маніпулятор під дією керувань u_1 , u_2 (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію: за заданий час T переносить вантаж із початкового положення (α_0, β_0) в задане кінцеве (α_T, β_T) , де (α, β) – кути відхилення ланок маніпулятора. Швидкості ланок маніпулятора на початку та в кінці операції вважаємо нульовими.

Для моделювання руху маніпулятора використовуємо плоску систему двох твердих тіл з ідеальними циліндричними шарнірами. Формулюємо задачу оптимального керування: визначити керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які забезпечать виконання маніпулятором заданої транспортної операції з мінімальним значенням квадратичного функціонала $\Phi = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt$. Введений функціонал характеризує енерговитрати на виконання транспортної операції.

Для розв'язання задачі використовуємо метод параметричної оптимізації [1] та метод на основі принципу максимуму Понтрягіна [2]. Перший із них зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування, а другий дає необхідні умови оптимальності шуканих керувань. Одержану задачу нелінійного програмування розв'язуємо числовими процедурами мінімізації функції багатьох змінних. Числова реалізація методу Понтрягіна ґрунтується на мінімізації за початковими значеннями спряжених змінних квадратичної нев'язки – відхилення отриманих термінальних значень основних змінних від їхніх заданих значень. Розв'язок відповідної Підсистеми будуємо методом Рунге – Кутти.

У методі параметричної оптимізації узагальнені координати маніпулятора

подаємо як $q_i = P_i(t) + G_i(t)$, $P_i(t) \equiv \sum_{k=0}^3 p_{ik} t^k$, $G_i(t) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} g_{ik}(t)$, $i = 1, 2$, де

$\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – коефіцієнти параметризації за системою заданих базових функцій

$\{g_{ik}(t)\}_{k=1}^{n_i}$, $g_{ik} \in C^2[0, T]$; n_i – заданий параметр. Коефіцієнти $\{p_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ визна-

чаємо з граничних умов транспортної операції, а $\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – під час розв'язання задачі нелінійного програмування. Цю задачу отримуємо після підставлення

параметризованих узагальнених координат у рівняння руху маніпулятора і перетворення цільового функціонала $\Phi[u_1, u_2]$ у функцію багатьох змінних.

Зазначені методи були використані для розв'язання сформульованої вище задачі оптимального керування для дволанкового маніпулятора з конкретними значеннями конструктивних параметрів та характеристик транспортної операції. Алгоритм методу параметричної оптимізації реалізували для таких наборів базових функцій: а) тригонометричні функції; б) поліноми Чебишева (першого роду); в) поліноми Лежандра; г) поліноми Лагерра. Отримані чотири субоптимальні динамічні процеси порівнювали з оптимальним процесом, побудованим із використанням принципу максимуму Понтрягіна. Близькість динамічних процесів оцінювали в межах середньо-квадратичного відхилення. Для характеристики ω величину оцінки $V[\omega]$, що виражає близькість функцій $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $\omega_4(t)$, побудованих відповідно методом параметричної оптимізації з наборами базових функцій (а)–(г) та методом максимуму Понтрягіна, розраховували за формулами

$$V[\omega] \equiv \frac{\sigma}{s} 100, \quad \sigma^2 = \frac{1}{4} \int_0^T \sum_{k=1}^4 [\bar{\omega}(t) - \omega_k(t)]^2 dt, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \omega_k(t), \quad s^2 = \frac{1}{4} \int_0^T \sum_{k=1}^4 \omega_k^2(t) dt$$

Для розглядуваного маніпулятора отримали такі оціночні величини (у відсотках): $V[\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, u_1, u_2] = [0.01, 0.14, 0.77, 0.05, 0.11, 0.96, 0.28, 1.21]$, де крапкою позначено диференціювання за часом t .

1. Демидюк М.В., Гошовська Н.В. Параметрична оптимізація транспортних операцій дволанкового маніпулятора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 4. – С. 142–152.
2. Демидюк М.В., Демидюк В.М. Використання методу Понтрягіна у задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором // Математика в сучасному технічному університеті: праці VIII міжн. наук.-практ. конф. (Київ, 27–28 грудня 2019). – 2020. Вінниця: Вид. ФОП Кушнір Ю.В. – С. 51–55.

COMPARISSON OF THE PARAMETRIC OPTIMIZATION METHOD AND THE POTRYAGIN MAXIMUM METHOD CONCERNING A PROBLEM ON THE OPTIMAL CONTROL OF A TWO-LINK MANIPULATOR

We investigate a problem of optimal control of a two-link manipulator. The manipulator transfers a cargo under control stimuli (torques in the joints) within a horizontal plane. Assume the initial and final position of the manipulator and the duration of the movement to be given. The quality of the control is estimated with a quadratic functional. We compare the solutions obtained by the method of parametric optimization and the method based on the Pontryagin maximum principle. In the method of parametric optimization, the angular coordinates of the manipulator are represented as the sum of a cubic polynomial and a finite orthogonal functions series. The coefficients of the polynomial are determined from the boundary conditions of the manipulator, the coefficients of the finite series are determined in the form of a solution of the corresponding problem of nonlinear programming. The numerical implementation of the Pontryagin's method is based on the minimization of the standard deviation. Constructed optimal processes are identical.

УДК 539.3: 536.21

РАЦІОНАЛЬНІ РЕЖИМИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ІНДУКЦІЙНОЇ ОБРОБКИ ФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛ

Богдан Дробенко, Олександр Гачкевич

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Для підвищення міцності й надійності виробів з електропровідних матеріалів у сучасних технологіях термообробки використовують електромагнітні поля (ЕМП). Безконтактний спосіб передачі енергії до тіла, висока швидкість нагрівання, відносно низьке енергоспоживання, локальний характер дії поля на певні підобласті тіла та високі продуктивність і ступінь автоматизації зумовлюють перспективність використання таких технологій. Відоме застосування такої обробки виробів при гартуванні, лютуванні, зварюванні, очищенні, дегазації, сушінні, легуванні, нанесенні зміцнювальних покриттів та ін. Внаслідок наявності скін-ефекту в розподілі струмів індукційна обробка є ефективним способом приповерхневого зміцнення виробів, зокрема, її використовують для покращення механічних властивостей різних типів вуглецевих сталей. Локальний індукційний нагрів знайшов також широке застосування при високотемпературному відпалі елементів конструкцій з метою повного зняття чи пониження рівня залишкових напружень і деформацій для підвищення міцнісних властивостей таких елементів чи конструкцій загалом.

Дія ЕМП на електропровідне тіло спричиняє протікання в ньому взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів, які істотно впливають на функціональні параметри і міцність. Тому для побудови раціональних режимів термообробки із використанням ЕМП і оцінки функціональної здатності виробів з електромагнітних матеріалів важливою є наявність математичних моделей і методів дослідження у взаємодії процесів електропровідності, теплопровідності й деформування в твердих електропровідних тілах залежно від їхньої електропровідності й здатності до намагнічування та поляризації.

Загальні підходи до побудови термомеханічних моделей суцільного середовища, які враховують взаємодію полів різної фізичної природи, достатньо повно висвітлені в літературі. На їхній основі запропоновано численні конкретні моделі опису механічної поведінки електропровідних тіл з різними електропровідністю і здатністю до поляризації та намагнічування за дії зовнішнього ЕМП. У переважній більшості прикладних робіт, присвячених кількісному опису термомеханічних процесів в електропровідних тілах за термообробки з використанням ЕМП, характеристики матеріалів приймають постійними (незалежними від температури), а процеси деформування розглядають у пружному наближенні. Застосування таких моделей у випадках,

<http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C03.08.pdf>

коли тіла нагріваються до високих температур, може призводити до істотних похибок в оцінках параметрів термомеханічного стану тіл.

При розгляді феромагнітних матеріалів виникає ще одна математична складність – адекватного врахування складної нелінійної залежності індукцій електричного і магнітного полів від відповідних напруженостей і температури. При цьому поведінку магнітнотвердих матеріалів у гармонічному ЕМП характеризує динамічна петля гістерезису, і виникає потреба враховувати не лише тепловиділення, яке виділяється в тілі у зв'язку з протіканням індукційних струмів, а й зумовлене перемагнічуванням. При досягненні температури Кюрі феромагнітні матеріали втрачають свої феромагнітні властивості (залежність між індукцією та напруженістю магнітного поля стає лінійною і не залежить від температури).

На основі математичної моделі кількісного опису термомеханічних процесів в електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень з урахуванням відзначених вище чинників проведено дослідження з визначення раціональних режимів високотемпературної індукційної обробки термочувливих феромагнітних тіл з метою формування в них залишкових напружень, близьких до заданих, мінімізації часу обробки при обмеженнях на допустимі напруження в тілі у процесі їхньої обробки та рівномірності нагрівання за рахунок вибору частоти струму, умов охолодження і геометричних характеристик пристроїв, що індукують ЕМП.

Досліджено вплив умов охолодження на характер розподілу залишкових напружень у циліндрах з магнітно'якого матеріалу. Реальні умови охолодження змодельовано за допомогою температурно залежного коефіцієнта тепловіддачі. Показано, що шляхом вибору частоти струму та умов охолодження можна істотно регулювати як рівень, так і характер розподілу залишкових напружень у циліндрі в широкому діапазоні значень – від розтягальних до стискальних на межі пластичності. Варіюючи частоту струму і умови охолодження, можна забезпечити необхідний рівень залишкових напружень у виробі за певних обмежень на час нагрівання, або ж мінімізувати час нагрівання за обмежень на напруження. Це дає можливість побудови раціональних режимів індукційної обробки виробів для формування необхідного рівня за міцнісними чи функціональними критеріями залишкових напружень.

RATIONAL DUE TO RESIDUAL STRESSES MODES FOR HIGH TEMPERATURE INDUCTION TREATMENT OF FERROMAGNETIC SOLIDS

A mathematical model and the computer simulation of electromagnetic, temperature and mechanical processes in ferromagnetic solids subjected to induction heating is considered.

УДК 621.372.061:517.3

ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Ярослав П'янило, Назарій Лопух

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м.Львів

З геологічних досліджень відомо, що газонафтоносні пласти мають незначну товщину (порядку декількох десятків метрів) та значні розміри в горизонтальних напрямках (декілька десятків квадратних кілометрів) [1]. В більшості випадків пласти є близькими до горизонтальних. Нехтуючи градієнтом тиску за вертикальною координатою, рівняння моделі запишеться так

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 4mhq_{st}. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) на границі Γ_2 області Ω задовольняє крайову умову Неймана та умову на Ω_* : $p(x_i, y_i, t^j) = p_{i,j}$, $(x_i, y_i) \in \Omega_*$; Γ_2 – зовнішня границя області Ω ; Ω_* – підмножина області Ω , яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j , j – часовий індекс.

Необхідно знайти розв'язок $p(x, y, t)$ рівняння (1) за відомими значеннями тиску $p(x_i, y_i, t_0)$ у заданих точках середовища та умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі $M = \int_V \rho dv$, де V – об'єм сховища.

Числова модель базується на методі скінченних елементів у поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому під інтервалі [1–3]. Дробова похідна наближається за схемою Грюнвальда – Летнікова на проміжку $[0, \tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t), \quad c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j},$$

де $c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}$, $c_j^{(\alpha)} = (1 - (1 + \alpha) / j) c_{j-1}^{(\alpha)}$, $c_1^{(\alpha)} = -\alpha (\Delta t)^{-\alpha}$.

При побудові способу визначення значення порядку дробової похідної необхідно використовувати заміряні дані. Фізичний зміст дробової похідної за часом – це врахування особливостей історії процесу. Достатньо стабіль-

ною величиною при відбиранні газу є сумарний його об'єм або маса. На практиці об'єм вибраного із сховища газу облікується достатньо точно. Тому за критерій вибору порядку дробової похідної доцільно вибрати масу або об'єм відібраного газу.

Маса газу, який міститься в циліндрі висотою h радіуса r для довільного часу, визначається за формулою

$$M(t) = \rho v = \pi h \int_0^a \frac{p(\alpha, r, t) r^2}{zRT} dr .$$

За проміжок часу $t \in [t_0, t_1]$ маса відібраного газу буде

$$M[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} M(t) dt = \pi h \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \frac{p(\alpha, r, t) r^2}{zRT} dr dt . \quad (2)$$

Тут α – порядок дробової похідної. З іншого боку, масу видобутого газу M_v можна визначити за замірними приладами. Оскільки поведінка тиску суттєво залежить від порядку дробової похідної, то корінь рівняння (2) відносно α дає можливість визначити значення порядку дробової похідної α .

1. *Лонух Н., Притула М., Притула Н., П'янило Я.* Розрахунок початково-граничних умов у задачах фільтрації газу в пористих середовища // Вісник національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 638. – С. 239–243.
2. *Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J.* Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition. – John Wiley & Sons, 2002. – 736 p.
3. *Zhang L., Wang G., Song G.* On mixed boundary value problem of impulsive semilinear evolution equations of fractional order // Boundary Value Problems. – 2012. –17. – P. 1–8.

DETERMINATION OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE ORDER FOR SIMULATION OF GAS FILTRATION IN POROUS ENVIRONMENT

Gas filtration is modeled with a nonlinear differential equation in partial derivatives. Methods of solving of the equation are discussed. Computer experiment basing on real-experiment-extracted input physical and geometrical parameters is performed and its results are analyzed. The received results agree well with the corresponding experimental data.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ФОРМ ОТВОРІВ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ ЗА ДВОВІСНОГО РОЗТЯГУ ТА ЗСУВУ

Михайло Саврук, Володимир Кравець, Андрій Чорницький

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів

Задачі оптимізації форм елементів конструкцій належать до обернених задач теорії пружності з невідомими межами [1]. Розглянемо задачу теорії пружності для нескінченної квазіортотропної пластини [2] з гладким отвором, контур L якого є вільним від навантажень, а пластина на нескінченності зазнає двовісного розтягу у взаємно перпендикулярних напрямках напруженнями p і q та зсуву τ . Напрямки осей x і y декартової системи координат вибрано вздовж головних осей ортотропії. Матеріал пластини є квазіортотропним [3, 4]. Для плоского напруженого стану таких матеріалів маємо основний параметр ортотропії $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$, де E_x, E_y – модулі пружності вздовж осей x і y . Для ізотропного матеріалу $\gamma = 1$. Необхідно знайти форму отвору L , у всіх точках якого контурні напруження (нормальні напруження в напрямі дотичної) набувають сталих значень $\sigma_s(t) = c = \text{const}$, $t \in L$. Такі отвори назвемо оптимальними. Не завжди існують розв'язки таких задач, тому розглядаємо лише такі навантаження, для яких оптимальні отвори існують.

Пряма задача. Першу основну задачу плоскої теорії пружності для нескінченного квазіортотропного тіла з гладким отвором розв'язуватимемо методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Знайшовши граничні значення комплексних потенціалів і задовольнивши з їх допомогою нульові крайові умови для напружень на контурі отвору, отримаємо СІР задачі, яке записане у математичній площині $z_1 = x + iy$ і має вигляд [1, 2]. Тут і надалі індекс «1» позначає запис відповідних величин у площині z_1 . Для вільний від навантажень отворів контурні напруження визначаємо на основі першого інваріанту тензора напружень за співвідношенням [1]

$$\sigma_s = 2 \operatorname{Im} \{g'_1(t_1)\} [(1 - \gamma^2) \operatorname{Re} \{d\bar{t}_1 / dt_1\} - (1 + \gamma^2)], \quad t_1 \in L_1, \quad (1)$$

де $g'_1(t_1)$ – шукана функція [2].

Оптимізація форми отвору. Розв'язавши СІР для контура L , знайдемо напруження (1) в n вузлових точках $\omega(\xi_j)$, $\xi_j = 2\pi(j-1)/n$, $j = 1, \dots, n$. Розглянемо функціонал середньоквадратичного відносного відхилення напружень (1) від усередненого значення [1]

$$F[\mathbf{P}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ (\sigma_s[\omega(\mathbf{P}, \xi_j)] - \bar{\sigma}_s) / \bar{\sigma}_s \right\}^2, \quad \bar{\sigma}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_s(\xi_j), \quad (2)$$

де $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_M)$ набір параметрів задачі оптимізації, за допомогою яких визначатимемо M -параметричне рівняння контуру $t = \omega(\mathbf{P}, \xi) \xi \in [0; 2\pi]$, записано на основі обмежених тригонометричних рядів. Мінімізуючи функціонал (2) за параметрами $P_m, m = 1, \dots, M$, знаходимо такі їх значення, за яких напруження $\sigma_s(\xi)$ вирівнюються по всьому контуру.

Досліджено вплив параметра ортотропії γ матеріалу квазіортотропної пластини за двовісного розтягу ($\sigma_y = p = \sigma, \sigma_x = q = 0.75\sigma$) та зсуву ($\tau = 0.25\sigma$) на нескінченності на форми оптимальних отворів (їх верхні половини – рис. 1) та розподіли напружень (1) вздовж контурів колових (штрихові лінії) та оптимальних (суцільні) отворів (рис. 2). Тут лінії 1-5 відповідають величинам $\gamma = 1; 1.5; 2; 2.5; 3, n = 64, M = 10$.

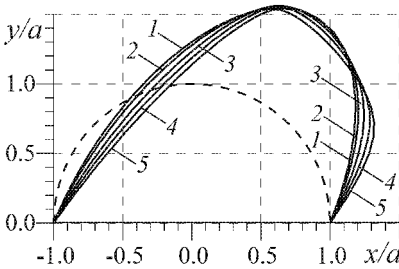


Рис. 1

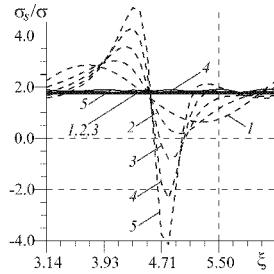


Рис. 2

Параметр γ істотно впливає на розподіли контурних напружень на краю заданого колового отвору (рис. 2). На форми оптимальних отворів цей параметр впливає менше (рис. 1), однак навіть відносно невелика зміна форми отвору призводить до значного збурення розподілу напружень σ_s .

1. Саврук М.П., Кравець В.С., Чорницький А.Б. Визначення оптимальних форм отворів у квазіортотропній пластині за двовісного розтягу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2021. – 57, № 2. – С. 24–31.
2. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress concentration at notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.

DETERMINATION OF OPTIMAL HOLE SHAPES IN A QUASI-ORTHOTROPIC PLATE UNDER BIAxIAL TENSION AND SHEAR

Based on the solutions of the plane problems of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with a hole an analytical-numerical algorithm for determining the optimal shape of the hole (with a minimum stress concentration) for biaxial plate tension and shear is constructed. The solution of the inverse problems with unknown shapes of the holes is reduced to minimizing the multiparametric functional of the standard deviations of tensile stresses along the contours of the holes from their given values. The shapes of optimal holes in a quasi-orthotropic plate for different biaxial tension and shear loading at infinity and levels of material orthotropy are found.

УДК 519.614

НЕЛІНІЙНІ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ДОСЛІДЖЕННЯХ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Петро Савенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглядається узагальнення методу неявних функцій для розв'язування нелінійних багатопараметричних ($m \geq 2$) спектральних задач у випадку голоморфних оператор-функцій, визначених у банахових просторах. Запропоновано новий чисельний метод, який полягає у розв'язуванні системи $m-1$ диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку з відповідною початковою умовою. Подано числові приклади розв'язування двопараметричних і трипараметричних спектральних задач.

Покладається, що оператор-функція $\mathbf{A}(\cdot): \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{L}(E, V)$ визначена у комплексних банахових просторах E і V , а векторний параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ належить до області $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbf{C}^m$. Кожному значенню параметра λ ставиться у відповідність оператор $A(\lambda) \in \mathbf{L}(E, V)$.

Розглядається проблема власних значень вигляду

$$\mathbf{A}(\lambda)x \equiv \mathbf{A}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)x = 0,$$

в якій необхідно знайти власні значення $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ і відповідні власні вектори $x^{(0)} \in E$, $x^{(0)} \neq 0$, такі, що $\mathbf{A}(\lambda^{(0)})x^{(0)} = 0$. Доведено теорему існування, з'ясовано основні властивості спектра таких задач.

Нехай функція $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ є неперервною і має неперервну частинну похідну F'_{λ_k} в околі точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$; $F(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) = 0$, а $F'_{\lambda_k}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \neq 0$. Тоді рівняння

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \tag{1}$$

згідно з теоремою про неявну функцію [4], має один і тільки один корінь, який прямує до $\lambda_k = \varphi_k(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k+2}^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$, коли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_m$ відповідно прямують до $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{k-1}^{(0)}, \lambda_{k+2}^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$.

Прирівнюючи до нуля похідну від лівої частини рівняння (1), як від складної функції, одержуємо систему $m-1$ рівнянь із частинними похідними першого порядку, яка описує неявно задану поверхню функцією $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_m)$:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial F / \partial \lambda_1}{\partial F / \partial \lambda_k}, \dots, \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k-1}} = -\frac{\partial F / \partial \lambda_{k-1}}{\partial F / \partial \lambda_k},$$
$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k+1}} = -\frac{\partial F / \partial \lambda_{k+1}}{\partial F / \partial \lambda_k}, \dots, \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_m} = -\frac{\partial F / \partial \lambda_m}{\partial F / \partial \lambda_k}.$$

Функція $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)$ у точці $M_0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ повинна задовольняти початкову умову.

Для знаходження розв'язків узагальненої задачі Коші можна застосувати однокрокові методи типу Рунге – Кутта.

Найбільш повно досліджено застосування двопараметричних нелінійних спектральних задач. Зокрема:

- при дослідженні проблеми неєдиності розв'язків при чисельному розв'язуванні двоточної крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром у коефіцієнтах та крайових умовах [2];
- при дослідженні галуження та біфуркації розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, що виникають в теорії синтезу випромінюючих систем [3].

1. Гурса Э. Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
2. Савенко П. О., Процах Л. П. Чисельне розв'язування двоточної крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 1. – С. 48–56.
3. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.

NONLINEAR MULTIPARAMETRIC SPECTRAL PROBLEMS IN INVESTIGATIONS OF NON-UNIQUENESS SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

The generalization of the method of implicit functions for solving nonlinear multiparametric spectral problems in the case of holomorphic operator-functions defined in Banach spaces is considered. A new numerical method is proposed, which consists in solving a system of equations with partial derivatives of the first order with the corresponding initial conditions.

УДК 539.3

ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛАХ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ

Олександр Гачкевич, Орест Гуменчук, Анджей Маринович, Ростислав Терлецький

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;
Політехніка Опольська, м.Ополе

Широкі застосування функціональних та конструкційних шаруватих елементів з частково прозорих для теплового випромінювання матеріалів в різноманітних приладах та обладнанні спричинює необхідність дослідження їх термомеханічної поведінки як при виготовленні з використанням технологічного чинника нагріву – теплового опромінення, так і експлуатації за дії такого опромінення. При опроміненні внаслідок поглинання складниками енергії випромінювання в елементах конструкцій можуть протікати взаємозв'язані теплові і механічні процеси [2, 6, 10, 11]. Так як частково прозорі матеріали в переважній більшості з огляду на механічні властивості належать до крихких (для яких залежність між напруженнями та деформаціями практично до руйнування визначається за законом Гука), то вже при відносно невеликих інтенсивностях зовнішнього опромінення напруження, що виникають, можуть перевищувати допустимі та суттєво впливати на міцнісні та функціональні параметри конкретних елементів та виробів в цілому. Оптимізація термомеханічної поведінки таких тіл при їх термообробці дає змогу зменшити енергозатрати, час нагріву, рівень максимальних напружень та вплинути на інші параметри технологічних процесів [1, 5, 7].

В роботі запропоновано модель опису термомеханічних процесів в пружних кусково-однорідних тілах (в загальному із складниками різної прозорості) за сторонніх впливів (теплове опромінення, конвективний теплообмін і т.п.) та різні підходи оптимізації розглядуваних процесів. Такі підходи є розвитком існуючих в напрямку застосування до ширшого класу оптимізаційних задач (узгальнення критеріїв оптимізації, обмежень на параметри термомеханічних процесів, розширення модельних представлень шляхом збільшення параметрів стану чи розглядуваних процесів і явищ і т.п.) [4, 5, 7].

В основу опису термомеханічної поведінки тіл, що розглядаються, за теплового опромінення в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем, зокрема, конвективного, покладено співвідношення феноменологічної теорії випромінювання в наближенні невипромінюючого матеріалу та квазістатичної термомеханіки [8, 9]. Напружено-деформівний стан частково прозорих елементів конструкцій за теплового опромінення пов'язано з об'ємними джерелами тепла, що виникають внаслідок поглинання матеріалом енергії випромінювання, а пондеромоторними силами дії випромінювання нехтуємо вна-

слідок їх малості для теплового випромінювання [6]. Теплофізичні характеристики складників конструкції прийнято незалежними від температури та рівними середнім значенням на проміжку нагрівання. Максимальна температура нагрівання тіла є значно меншою від температури випромінювача, а поверхні, що приймають участь в теплообміні випромінюванням – дифузні.

За прийнятих допущень визначення поля випромінювання та термонапруженого стану тіла за дії стороннього теплового опромінення зводиться до поетапного розв'язування наступних відповідних прямих задач: теорії випромінювання, у якій вихідним для знаходження спектральної інтенсивності випромінювання та відповідних їй тепловиділень в області тіла є рівняння переносу в наближенні не випромінюючого та нерозсіюючого матеріалу; теплопровідності, в якій тепловиділення використано як питому потужність неперервно розподілених теплових джерел; квазістатичної термопружності, з якої за відомого температурного поля знаходимо параметри спричиненого ним напружено-деформованого стану тіла [6].

Розроблено методику розв'язування сформульованих прямих задач математичної фізики за використання методів квадратур (для визначення із системи інтегральних рівнянь спектральних густин потоків енергії ефективного випромінювання), Гауса та прогонки для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, чисельного інтегрування Сімпсона, скінчених різниць та інших [3].

З метою постановки відповідних оптимізаційних задач (знаходження оптимальних режимів нагріву елементів конструкції чи умов їх експлуатації) сформульовано ряд критеріїв оптимізації, що узагальнюють чи доповнюють існуючі [4, 5]. Зроблено постановки ряду задач оптимізації нагріву частково прозорих пружних тіл з використанням різних критеріїв, систем обмежень та функцій керування. Розроблено методику розв'язування таких задач з використанням методів проєкції градієнту (субградієнту), ярів, локальних варіацій та інших [12].

Як приклад, визначено оптимальний режим нагріву порожнистої кулі, що зазнає дії зовнішнього теплового та силового навантаження в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Джерелом випромінювання є нагріта до підвищеної температури коаксіальна до зовнішньої основи сферична поверхня. Порожнина кулі газонаповнена і герметизована, що є фактором додаткового тиску при нагріві газу.

За критерій оптимальності прийнято сумарне за час нагріву абсолютне значення потоку тепла через зовнішню поверхню (яким мінімізуємо кількість теплової енергії, що виходить з тіла в зовнішнє середовище). За функцію керування вибрано температуру зовнішнього середовища. Обмеження на температуру, напруження, функцію керування та відповідні швидкості її зміни задано областями допустимої зміни. Як мету нагріву вибрано умову досягнення на зовнішній основі (поверхні кулі) в кінцевий момент часу заданої температури.

1. Manufacturing processes. Actual problems – 2020. – Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie. – Z. 547 / Pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wolczański. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2020. – 194 p.
2. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону частот // Доповіді АН УРСР. Сер.А. – 1990. – № 6. – С. 39-43.
3. Волков Е.А. Численные методы. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
4. Гачкевич М., Гуменчук О., Чорний Б. Методика оптимізації режимів нагрівання конвективним способом і джерелами тепла кусково-однорідних оболонок обертання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 48–51.
5. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф. Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок. – Львів: ППММ ім. Я.С. Підстригача, 2014. – 334 с.
6. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
7. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
8. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935с.
9. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
10. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 1: Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності / Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 300 с.
11. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах / О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, Т.Л. Курницький. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 184 с.
12. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1986. – 352 с.

OPTIMIZATION OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODIES SUBJECTED TO THERMAL RADIATION

The paper a model for the description of thermomechanical processes in elastic piecewise-homogeneous bodies with components of different transparency under thermal irradiation and various approaches for optimizing the processes under consideration are proposed. A number of problems to optimize the heating of semitransparent elastic bodies using various criteria, systems of constraints and control functions are formulated. As an example, the optimal heating mode of the hollow sphere under the influence of external thermal radiation and force load under convective heat exchange conditions with an external environment are determined.

УДК 539.3

МІКРОТРИЩИНА НА ПРОДОВЖЕННІ ЯДРА КРАЄВОЇ ДИСЛОКАЦІЇ

Микола Стацук

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів

Формулювання задачі. Прогнози утворення мікротріщин з позицій механіки руйнування є актуальною проблемою. Першочерговими у відповідних дослідженнях є засади теорії дислокацій. Рух дислокацій, зазвичай, ініціює пластичне деформування матеріалів. Достатня кількість загальмованих дислокаційних площин призводить до утворення мікротріщин, які руйнують матеріали. Таке руйнування може бути часто очікуваним за наявності атомарного водню в матеріалі. Заповнення воднем утворених мікротріщин супроводжується молізацією атомів водню та відповідним внутрішнім тиском. Тому вивчення впливу тиску водню в таких порожнинках на їх поширення є необхідним в розвитку водневих технологій.

Фізична постановка задачі. Розглянемо в кристалічному тілі n вставлених атомних півплощин, наявність яких імітуємо суцільною вставкою (екстра площиною) з того ж самого матеріалу. Такого типу дефект кристалічного тіла вважають крайовою дислокацією. Вона викликає внутрішній напружено-деформований стан у кристалі, а також змінює його внутрішню енергію. Край вставленої півплощини та утворена порожнина в його околі називається ядром, що порушує регулярну структуру кристала.

Математична модель. Порожнину на продовженні вставленої екстра площини вважаємо тріщиною довжини l . В одній з її вершин, де закінчується відповідна вставка, стрибок переміщень дорівнює множинному вектору Бюргерса $\vec{B} = n\vec{b}$, де $|\vec{b}| = b$ – відстань між атомними площинами. У другій вершині, де закінчується порушення структури тіла, береги тріщини змикаються. Приймаємо, що в дислокаційній тріщині заданий внутрішній тиск p . Потрібно встановити вплив внутрішнього тиску в порожнині на напруження в тілі з таким дефектом та оцінити міцність матеріалу тіла. Визначальним стає встановлення критичного значення довжини мікротріщини [1], що передуватиме дислокаційній півплощині.

Зв'яжемо дислокаційний тріщиноподібний дефект з прямокутною системою координат xOy . Вісь Ox сумістимо з віссю його симетрії, а центр O – з кінцевим атомом вставленої атомної півплощини товщини B . Вважаємо, що вздовж дефекту, де вставлена атомна півплощина, тобто при $x \in (-\infty, 0]$, задано переміщення $v^+ = -v^- = B/2$, відповідно на верхньому (+) і нижньому (-) берегах. Ці переміщення обумовлені внутрішніми напруженнями, створеними вставленою півплощиною в тілі. На берегах тріщини задається

внутрішній тиск p . Напружено-деформований стан тіла з дислокаційною тріщиною визначаємо за співвідношеннями плоскої задачі теорії пружності [2]. На цій основі з рівняння мінімуму відповідної пружної енергії одержуємо співвідношення

$$-\frac{\mu B^2}{4\pi(1-\nu)l} - \frac{Bpl}{2} - \frac{1-\nu}{4\mu} \pi p^2 l + 2\gamma = 0$$

для визначня критичних довжин мікротріщини, де μ – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, γ – поверхнева енергія. Розв'язавши його, одержуємо два співвідношення для визначення критичних довжин тріщини:

$$l_{eq,cr} = \frac{\pi\mu}{\pi^2 p^2 (1-\nu)} \left(4\gamma - Bp \mp 2\sqrt{4\gamma^2 - 2Bp\gamma} \right).$$

Перше відповідає значенню рівноважної довжини тріщини, а друге – нерівноважної довжини дислокаційної тріщини. За відсутності тиску в такій тріщині ($p = 0$) її довжина

$$l = \frac{\mu B^2}{8\pi(1-\nu)\gamma} = \frac{EB^2}{16\pi(1-\nu^2)\gamma}.$$

За критерій спонтанного поширення дислокаційної тріщини приймемо умову виконання рівності $l_{eq} = l_{cr}$, яка реалізується, якщо $4\gamma^2 - 2Bp\gamma = 0$. Значення критичного тиску $p_{cr} = 2\gamma/B$ у цьому частковому випадку збігається з йому відповідним в дослідженнях Котрелла.

1. *Stashchuk M.H., Dorosh M.I.* Energy of deformation of an elastic body containing a microcrack under pressure // *Materials Science.* – 2016. – **52.** – P. 339–348.
2. *Stashchuk M.H.* Influence of hydrogen concentration on the stresses in a solid metallic cylinder // *Materials Science.* – 2018. – **54.** – P. 823–831.

MICROCRACK ON THE EXTENSION OF THE CORE OF A BORDER DISLOCATION

Consideration of a dislocation crack as an investigation object establishes the relations between the fracture mechanics and theory of dislocations. Evaluation of elastic energy in the body with dislocation crack was carried out on this base. As a result the value of critical pressure in a crack using Burgers vector and body surface energy was defined. Critical pressure of fracture in a body with dislocation crack using the criterion of equality of equilibrium value of crack length to critical value was calculated.

УДК 539.3

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ВІДПАЛУ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СКЛЯНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ НАГРІВІ КОНВЕКТИВНИМ СПОСОБОМ І ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Любов Гаєвська, Микола Гачкевич, Олександр Гачкевич, Анна Козярьська

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;
Політехніка Опольська, м. Ополе

Розглянуто методику моделювання та оптимізації за рівнем напруженого стану режимів відпалу термочутливих скляних елементів конструкцій (зокрема електровакуумних приладів) з метою зниження рівня залишкових напружень шляхом їх релаксації. При цьому за розрахунковий елемент вибрано елемент малої кривини, який моделюється вільною на торцях пластинною постійної товщини $2h$. При побудові методики оптимізації режимів прийнято, що відпал здійснюється за рахунок конвективного нагріву зовнішнім середовищем зі сторони основ модельного елемента (пластини) і джерелами тепла, які створюються сторонніми нагрівачами. Приймається, що такий спосіб нагріву є еквівалентним заданню на основах $\gamma = \pm h$ пластини змінної в часі температури.

Температурне поле в пластині описуємо в змішаній ортогональній криволінійній системі координат $\{\alpha_1, \alpha_2, \gamma\}$ (α_j – лінії головних кривин середньої поверхні пластини, $j = 1, 2$, γ – зовнішня нормаль до цієї поверхні) відомим рівнянням теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + p^2 t = -\frac{Q_*}{\lambda},$$

за початкової умови

$$t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, 0) = t_0(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \equiv \text{const}$$

і окреслених вище крайових умов. Тут $Q_*(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau)$ – густина джерел тепла, що діють в пластині при нагріві від початкової температури до максимальної.

Для отримання наближеного розв'язку сформульованої задачі теплопровідності апроксимуємо розподіл температури за товщиною координатою γ кубічним поліномом [1], коефіцієнти якого виражаються через усереднені характеристики температурного поля за товщиною пластини і задані крайові умови.

Для визначення усереднених характеристик температури T_1 , T_2 приходимо до наступної системи диференціальних рівнянь [1]:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_1 - \frac{3}{h^2} T_1 &= -W_1 - \frac{3}{2h^2} (t^+ + t^-), \\ \left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_2 - \frac{15}{h^2} T_2 &= -W_2 - \frac{15}{2h^2} (t^+ - t^-). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $W = \frac{1}{\lambda} Q_*(\alpha_j, \gamma, \tau)$, $W_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h W(\alpha_j, \gamma, \tau) d\gamma$, $W_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma W(\alpha_j, \gamma, \tau) d\gamma$.

Коефіцієнти апроксимуючого полінома визначаються системою рівнянь, яку отримується за безпосередньої підстановки представлень температури у відповідні крайові умови і у вирази, що описують усереднені характеристики T_1 , T_2 температури [1].

Розглянуто випадок побудови ефективних режимів цільового симетричного нагріву з використанням однорідної температури зовнішнього середовища, яка залежить тільки від часу τ . В цьому випадку система диференціальних рівнянь (1) буде системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язок якої знаходимо методом найменших квадратів при скінченно-елементній апроксимації функції $t^+(\tau)$. При цьому суттєво спрощується процедура числового визначення параметрів термонапруженого стану пластини, яка використовується в числовому алгоритмі оптимізації.

Схема нагріву і методика числової оптимізації описана в [1].

Проведено числовий аналіз побудованих оптимальних режимів для пластини товщиною $2h = 14$ мм зі скла С92. Встановлено, що при використанні дії постійних джерел тепла потужністю 10^5 Вт/м³ (при тих же значеннях допустимих температурних напружень на поверхні) в розглядуваному випадку дає можливість скоротити на 20% час виходу на максимальну температуру нагріву в порівнянні з режимом, при лише конвективному нагріві за тих же максимальної температури нагріву і допустимих максимальних значень компонент тензора напружень.

1. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Будз С.Ф. Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонки. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 334 с.

OPTIMIZATION OF THE ANNEALING REGIMES FOR THERMOSENSITIVE GLASS STRUCTURE MEMBERS SUBJECT TO COVECTIVE HEATING AND THERMAL SOLURCES

The technique for the optimization of the annealing regimes for thermosensitive sensitive glass elements is proposed for heating by convective method and heat sources.

УДК 629.76.02:536.2

СУЧАСНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ РАКЕТНИХ КОМПЛЕКСІВ ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Сергій Фуркало, Володимир Сіренко, Катерина Логінова

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро

Здійснено розрахунок теплового стану стартового комплексу «Циклон-4М» з використанням CFD-моделювання, яке дає можливість прогнозувати з підвищеною точністю потік газу для реальних умов за розумних витрат обчислювальних засобів та часу.

Ракета-носії «Циклон-4М» має чотирисоплову рушійну установку, яка працює на компонентах палива кисень-керосин. Геометричну модель ракети на стартовому комплексі показано на рис. 1. Згенеровано розрахункову сітку з тетраедральних елементів (порядку 100 мільйонів комірок, рис. 2).

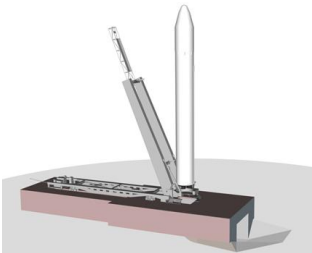


Рис. 1. Геометрична модель ракети на стартовому комплексі

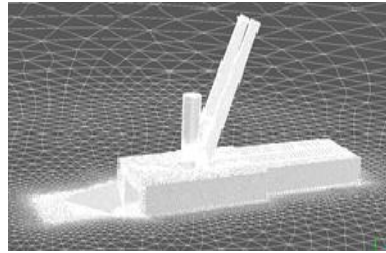


Рис. 2. Тетраедальна розрахункова сітка ракети на стартовому комплексі

Чисельне моделювання стартового комплексу виконано за допомогою ANSYS Fluent у стаціонарній постановці, тип вирішувача – Pressure-Based, модель турбулентності типу k-omega SST. Для відображення реальної картини горіння палива, розроблена покрокова кінетична модель розкладання керосину з елементарними проміжними реакціями. Кінетичний механізм горіння враховував близько 10 хімічних реакцій та моделювався за допомогою моделі Species Transport. Розроблена чисельна модель враховує велику кількість процесів та являється ресурсомістким, потребує обчислювальних потужностей, які перевищують звичайні робочі станції, оскільки необхідно розв'язувати рівняння нерозривності для кожного хімічного компоненту. Для отримання розв'язку використано суперкомп'ютер на базі 96 вузлів по 2 процесора Intel Xeon архітектури Skylake (сумарно доступно 3840 обчислювальних ядер), 20 000 Гб оперативної пам'яті.

Показано, що максимальний газодинамічний вплив припадає на елементи газовідбивача в місцях прямого натікання струму, а також в області стриб-

ка ущільнення. Розподілення температури та тиску газу на поверхні газовідбивача показано на рис. 3, 4. Максимальне значення тиску газу досягає 0,45 МПа, а максимальна температура газу не перевищує 3000 °С.

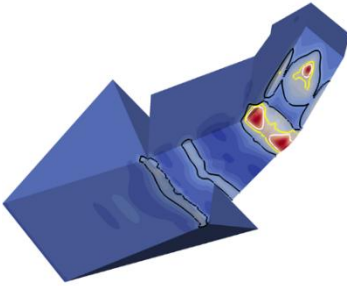


Рис. 3. Розподілення тиску на поверхні газовідбивача

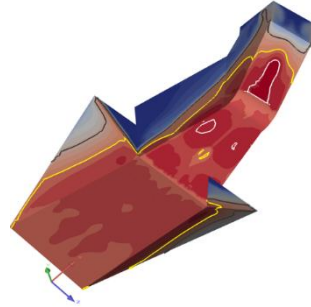


Рис. 4. Розподілення температури на поверхні газовідбивача

Тепловий стан газовідбивача (рис. 5) визначався в системі розрахункових точок, які утворюються в результаті розбивки тіла конструкції на елементарні об'єми (метод елементарних балансів). Даний метод дозволяє отримати розв'язок для конструкції, яка має складну геометричну форму, змінні теплофізичні властивості, а також при довільних видах теплопередачі та крайових умов. Максимальна температура поверхні газовідбивача може досягати температури плавлення сталі 1400 °С.

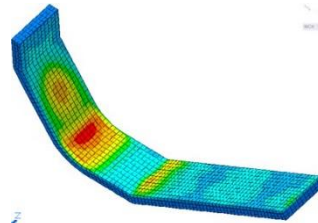


Рис. 5. Результати розрахунку теплового стану газоходу

Виконано порівняння результатів розрахунку з експериментальними даними, отриманими на газодинамічних модельних стендах. Використано модельний твердопаливний газогенератор на базі штатної шашки заряду 8X618 двигуна ДР51. Результат верифікації показав, що похибка розрахунку основних газодинамічних параметрів не перевищує 10 %. Отримані результати вказують на ефективність використання розрахункового комплексу ANSYS Fluent для якісної оцінки газодинамічного впливу, необхідного для розрахунку теплового стану елементів конструкції ракетних комплексів.

MODERN METHODS OF SIMULATION OF THERMAL STATE OF ROCKET COMPLEX STRUCTURAL ELEMENTS DURING OPERATION

The intensive thermal and force impact of the propulsion system on the launch complex elements is the source of increased risk. The parameters with the necessary accuracy, taking into account the immensity of the possible consequences of design errors, can be obtained during bench-scale gas-dynamic and flight tests. However, conducting tests in full measure requires large financial expenses, which significantly increases the cost of the development of the complex. In the process of development of the Cyclone-4M rocket complex, CFD modeling was used to select the optimal launch complex design.

УДК 539.3

ПРОГНОЗУВАННЯ РУЙНІВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ГЛАДКИХ ПАЛИВНИХ БАКІВ РАКЕТ-НОСІЇВ НА ПРИКЛАДІ ЄДИНОГО ПАЛИВНОГО ВІДСІКУ

Дмитро Клименко, Володимир Бабуров, Тетяна Дьяченко

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», м. Дніпро

На даний час актуальним є питання скорочення затрат на здійснення наземного експериментального відпрацювання елементів конструкцій ракетно-космічної техніки (РКТ), зокрема, щодо визначення фактичних запасів міцності. Одним зі шляхів вирішення вказаної проблеми є розроблення методики комп'ютерного моделювання для визначення тримкої здатності в експлуатаційних умовах елементів РКТ.

Запропоновано вдосконалений алгоритм вирішення цієї проблеми, який включає:

- аналіз фактичної геометрії та технологічних особливостей виготовлення конструкції;
- розрахунок напружено-деформованого стану для етапів випробувань;
- урахування результатів випробувань.

Розглянуто приклад єдиного паливного відсіку складної конфігурації.

Наведено розрахунки напружено-деформованого стану конструкції паливного відсіку і виконано порівняльний аналіз напружено-деформованого стану для розрахункових та експериментальних даних. Для розрахунків використано метод скінченних елементів, реалізований у програмному комплексі MSC NASTRAN. Розрахунки напружено-деформованого стану паливного відсіку здійснено за навантажень, передбачених при проведенні статичних неруйнівних випробувань. Навантаження баків паливного відсіку здійснювали внутрішнім надлишковим тиском з урахуванням гідростовпів від тиску рідини. Розрахунки напружено-деформованого стану виконано з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності конструкції паливного відсіку. Результати комплексного аналізу умов навантаження, задовільна збіжність результатів розрахунків напружено-деформованого стану конструкції паливного відсіку з експериментальними даними дозволяють прогнозувати руйнівні навантаження розглянутого типу конструкції.

PREDICTION OF THE DESTRUCTIVE LOAD OF SMOOTH FUEL TANKS OF LAUNCH VEHICLES USING THE EXAMPLE OF A SINGLE FUEL COMPARTMENT

An algorithm for determining the destructive loads on the fuel tanks of launch vehicles, taking into account the experimental data is presented.

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ЗА МІШАНИХ КРАЙОВИХ УМОВ ТА ДІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОВЕРХНІ

Ольга Тужеляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка містить N отворів довільної форми. Контурами отворів є криві $L^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, $N = N_1 + N_2$. Зовнішня границя пластини також є довільної конфігурації, а її контуром є дві взаємодоповнюючі криві $L^{(N+1)}$ та $L^{(N+2)}$. На поверхні пластини діє гармонічне в часі довільне розподілене навантаження, яке задається функціями q , m_1 , m_2 . Використано позначення статті [1].

Крайові умови на контурах отворів та на зовнішній границі пластини:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad j = N + 1,$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad j = N + 2.$$

Ключову систему диференціальних рівнянь в межах теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти, наведено в роботі [1]. Задачу розв'язано непрямим методом граничних елементів. Використано функції Гріна, побудовані в роботі [1]. Розв'язок подано у вигляді суми потенціалу простого шару та класичного розв'язку Фур'є задачі з однорідними крайовими умовами типу шарнірного опирання в прямокутній області. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій. Задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \{w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q})\}^T = \\ & = - \sum_{f=1}^{N+2} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q})] [E_{km}(\alpha^{(f)r})] \{T^{(f)r}\} - \\ & - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q})] \{P_{km}\}, \quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad j = N + 1, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+2} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
 &- \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 w_i(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad j = N + 2, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \\
 \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+2} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
 &- \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad j = N + 2, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \\
 M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+2} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
 &- \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 M_{in}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad j = N + 2, \quad q = 1, \dots, S^{(j)},
 \end{aligned}$$

де $P_{km}^1, P_{km}^2, P_{km}^3$ – коефіцієнти розвинення функцій q, m_1, m_2 в ряди Фур'є.

Досліджено випадки супереліптичної пластини з різною кількістю супереліптичних отворів за врахування розподіленого навантаження, яке діє на деяку прямокутну ділянку на поверхні пластини.

1. *Shopa T. V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science.* – 2018. – 54, №3. – P. 368–377.

TRANSVERSE VIBRATION OF ORTHOTROPIC PLATE WITH CUTOUTS UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS AND DISTRIBUTED LOAD ON THE SURFACE

Within shear deformation theory, solution of the problem on the steady state flexural vibrations of the orthotropic plate with cutouts of the arbitrary geometrical form under harmonic in time arbitrary distributed external load on the surface is constructed on the base of indirect boundary elements method. Mixed boundary conditions are imposed both on the cutouts' contours and on the external boundary of the plate which is of the arbitrary shape.

УДК 539.3

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ МЕЖІ

Юрій Токовий, Лілія Гайдук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Побудова аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для циліндричних тіл є важливою задачею механіки деформівного твердого тіла. Зокрема це стосується плоских неосесиметричних постановок задач, до яких вдаються завдяки застосуванню гіпотези плоскої деформації у випадку довгих циліндричних тіл або плоского напруженого стану у випадку тонких дисків. Насьогодні відомо багато методів побудови розв'язків плоских задач теорії пружності та термопружності для кільцевої області. Ретельний огляд методів розв'язування такого класу задач наведено в [1]. Значною увагою користується вивчення розподілів напружень у кільцевих та кругових областях й у царині експериментальних досліджень, зокрема методами фотопружності [2, 3]. Дослідження кругових та кільцевих тонких дисків або протяжних циліндрів під дією стиску зосередженими силами, прикладеними до двох протилежних точок (ліній) зовнішньої циліндричної поверхні, є однією з тестових задач для перевірки теоретичних та експериментальних методів визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Крім того такі моделі є базовими для непрямого експериментального визначення границі міцності на розтяг й вимірювання відповідних напружень, завдяки відносній простоті у порівнянні з прямими дослідями на розтяг. Такі досліди надзвичайно важливі, зокрема, при випробуванні елементів будівельних конструкцій тощо. З огляду на це є потреба у розвитку як аналітичних, так і експериментальних методів, застосовних до задач такого класу.

У роботі [4] розвинуто методу визначення напружень та переміщень у кільцевій області під дією зовнішніх стискуючих зусиль, рівномірно розподілених на ділянках зовнішньої межі в умовах плоского напруженого стану та плоскої деформації. З використанням методу безпосереднього інтегрування вирази для напружень подано у зручному для аналізу вигляді завдяки визначенню їх у термінах сумарних напружень. Проаналізовано особливості розподілу головних напружень та максимальних дотичних напружень. Шля-

хом інтегрування рівнянь суцільності Коші з використанням фізичних співвідношень отримано аналітичні вирази для переміщень у кільцевому диску, що відповідають описаному типу навантажень. Здійснено порівняння отриманих числових результатів з результатами експериментальних досліджень. Виконано дослідження розподілів напружень та переміщень у кільцевій області у випадку, коли внутрішній радіус є половиною зовнішнього. Інші випадки співвідношення між внутрішнім та зовнішнім радіусами залишилися поза увагою.

У цій роботі з використанням методу безпосереднього інтегрування досліджено вплив товщини стінки (різниці між внутрішнім та зовнішнім радіусами) кільцевої області на її напружено-деформований стан за навантаження зовнішньої поверхні на трьох локальних ділянках. Результати числових досліджень порівняно з виходом натурних експериментів.

1. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – **56**, № 1. – P. 33–85.
2. *Frocht M. M.* Photoelasticity. – New York: John Wiley, 1948. – Vol. 2. – 505 p.
3. *Hung K.-M., Ma C.-C.* Theoretical analysis and digital photoelastic measurement of circular disks subjected to partially distributed compressions // *Experimental Mechanics.* – 2003. – **43**, No. 2. – P. 216–224.
4. *Tokovyy Y., Huang Y.-H., Yen C.-Y., Ma C.-C.* Analytical and experimental evaluation of stresses in elastic annuli subjected to three-point loading on the outer surface // *Applied Mathematical Modelling.* – 2019. – **73**. – P. 442–458.

ANALYSIS OF THE STRESS STATE IN ANNULAR PLATES SUBJECTED TO THE LOCAL LOADING ON THE PERIPHERY

Using the direct integration method, the stress analysis in elastic annuli is performed with regard to the effect of the annular ratio (difference between the inner and outer radii) in the stress intensity on the loading meridians.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Дмитро Бойко, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Побудова аналітичних розв'язків задач термопружності для композитних тіл є основною розрахунку і оцінки їх реологічних експлуатаційних якостей. Внаслідок анізотропії, притаманної переважній більшості композитів, отримання таких розв'язків, особливо у випадку загального просторового формулювання відповідних задач термопружності, виявляється значно складнішим, ніж для ізотропних тіл [1]. Зокрема, відмінність пружних модулів матеріалу в різних просторових напрямках істотно ускладнює вивчення локальних ефектів від місцевих теплових навантажень поверхні досліджуваних тіл, коли шуканий розв'язок з віддаленням від навантаженої ділянки повинен асимптотично згасати. Для побудови розв'язків з такими властивостями за допомогою методу відокремлення змінних слід володіти повною інформацією про тип і кратність власних чисел ключових рівнянь відповідних задач термопружності. Для анізотропних матеріалів ці власні числа виражаються через коефіцієнти ключових рівнянь, що визначені співвідношеннями між пружними модулями, внаслідок чого має місце галуження залежностей власних чисел від коефіцієнтів рівняння.

Один з найпростіших типів просторової анізотропії є трансверсально ізотропні тіла, що володіють площиною ізотропії, всі напрямки в якій є еквівалентними щодо макроскопічних властивостей матеріалу [1]. Незважаючи на порівняно невелику кількість пружних модулів трансверсально ізотропних матеріалів, побудова розв'язків тривимірних задач термопружності з коректною асимптотикою для необмежених або напівобмежених трансверсально ізотропних тіл є складною проблемою математичної фізики [2].

В [3] запропоновано підхід до розв'язування просторової задачі термопружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору, що знаходиться під впливом локальних силових та теплових навантажень на його межі, паралельній до площини ізотропії матеріалу. З використанням методу безпосереднього інтегрування [4] вихідні рівняння зведено до системи ключових рівнянь для окремих компонент тензора напружень. Не зважаючи на те, що отримано явні розв'язки поставленої задачі, залишається незручність вибору форми розв'язку в залежності від співвідношень між пружними мо-

дулями конкретного трансверсально ізотропного матеріалу. У [5] зроблено спробу подолання цього ускладнення шляхом побудови універсальної щодо властивостей матеріалу форми розв'язку за допомогою зведення задачі до інтегральних рівнянь другого роду. Втім, для деяких трансверсально ізотропних матеріалів підхід до побудови розв'язку в [5] виявився не надто ефективним через повільнішу збіжність. У ці доповіді розвинуто стратегію роботи [5] щодо підвищення ефективності числової реалізації розв'язків просторової задачі термопружності для трансверсально ізотропного півпростору.

1. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 417 с.
2. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
3. *Токовуу Yu., Boiko D., Gao C.* Three-dimensional thermal-stress analysis of semi-infinite transversely isotropic composites // Trans. Nanjing Univ. Aeronautics Astronautics. – 2021. – **38**, No. 1. – P. 18–28.
4. *Токовуу Yu. V., Kalynyak B. M., Ma C. C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach / In R. B. Hetnarski (ed.) // Encyclopedia of Thermal stresses. – Dordrecht: Springer, 2014. – 7. – P. 3350–3356.
5. *Токовий Ю.В., Бойко Д.С.* Інтегральні рівняння тривимірної задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 83–92.

ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN AN ELASTIC TRANSVERSELY ISOTROPIC HALFSPACE

A technique for the efficient analysis of thermal stresses in an elastic half-space is developed for the general three-dimensional formulation. The original thermoelasticity problem is reduced to an integral equation of the second kind, which then is solved by means of an advanced semi-analytic procedure.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СПІРАЛЬНО ШОВНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ДИСТОРСІЙ

Леся Сеньків, Василь Дяків

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

При зварюванні магістральних трубопроводів виникають залишкові деформації, викликані нагріванням. Вони суттєво впливають на напружений стан та міцність конструкції.

Розроблено математичну модель для дослідження напруженого стану спіралношовного трубопроводу, у якому внаслідок нагрівання при зварюванні виникли пластичні деформації. Трубопрвід моделюють тонкостінною ізотропною непологою циліндричною оболонкою Кіргоффа – Лява. Вважають, що в зоні зварного шва діють температурні дисторсії.

Задача зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку в системі координат віднесеної до гвинтової лінії (сліду спірального шва на серединній поверхні оболонки). В правій частині диференціальних рівнянь є компоненти поля температурних дисторсій. Побудовано 2π періодичний розв'язок задачі, за допомогою якого знайдено інтегральні зображення для зусиль і моментів на серединній поверхні оболонки. Записано вирази для залишкових напружень, які діють на лицевих поверхнях оболонки.

За допомогою методу механічних квадратур розраховано значення залишкових напружень у зварному з'єднанні при різних значеннях механічних та геометричних параметрів оболонки.

1. Кир'ян В.І., Осадчук В.А., Николишин М.М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
2. Прокопович І.Б., Сеньків Л.М., Лауинтк І.П. Упругое равновесие непологих цилиндрических оболочек с разрезами // Прикладные проблемы прочности и пластичности – 1996. – Вып. 54. – С.175–184.

INVESTIGATION OF STRESSED STATE OF SPIRALWELDED CYLINDRICAL SHELL UNDER TEMPERATURE DISTORTIONS FIELD

Using the classical shell theory and distortion method, the mathematical model for determination of residual stresses near spiral weld in pipelines is constructed. Plastic deformations are caused by heating near joint in a spiralwelded cylindrical shell.