

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

ДИЯК
Іван Іванович



УДК 517.958:519.6:539.3

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ
НА ОСНОВІ ПОЄДНАННЯ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ
І ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Савула Ярема Григорович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України,
завідувач кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Хіміч Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
НАН України (м. Київ),
заступник директора Інституту;

доктор фізико-математичних наук, професор
Стоян Володимир Антонович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка МОН України,
професор кафедри моделювання складних систем;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Дробенко Богдан Дем'янович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів),
провідний науковий співробітник відділу теорії
фізико-механічних полів.

Захист відбудеться «30» жовтня 2017 року о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано «29» вересня 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради, д. ф.-м. н., с. н. с.



Ясінський А. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вибухоподібний розвиток комп'ютерної техніки в новому столітті та повсякденне її застосування у всіх сферах людської діяльності не зменшило гостроти проблеми автоматизації наукових обчислень. Особливо актуальною є проблема розробки ефективних методів проведення обчислювальних експериментів, базою яких є розв'язання крайових і початково-крайових задач математичної фізики. Сучасні тенденції зростання функціональної та конструктивної складності елементів інженерних конструкцій та нагальна потреба зменшення матеріаломісткості продукції вимагають використання для обчислень кластерних або ґрид-систем. У наш час для задач моделювання серед чисельних методів немає серйозної альтернативи методу скінчених елементів (МСЕ), методу скінчених різниць (МСР) або методу граничних елементів (МГЕ). Розвиток цих методів відбувається в основному в напрямках підвищення ефективності реалізації, аналізу збіжності побудованих схем та їх модифікацій. Багато сучасних досліджень стосуються порівняння ефективності МСЕ та МГЕ. Однак проблема, який з цих методів є ефективнішим, для багатьох класів задач залишається відкритою. Аналіз переваг і особливостей МСЕ та МГЕ зумовив раціональнішу тенденцію, що полягає у поєднанні їх достоїнств. Обидва чисельні методи в рамках об'єднаної реалізації дають змогу ефективніше врахувати багато практично важливих факторів, зокрема, таких як складна геометрія, різноманітність граничних умов та ін. Слід зауважити, що МСЕ та МГЕ є спорідненими у багатьох аспектах реалізації та можуть трактуватись як спеціальні випадки методу зважених нев'язок.

Математична, фізична та чисельна гетерогенність при моделюванні процесів і об'єктів – єдиний засіб отримання їх реальної картини поведінки. Тому використання рівнянь різної розмірності для опису напружено-деформованого стану – широко розповсюджений засіб моделювання. Але одночасне використання гетерогенних математичних і чисельних апроксимацій з теоретичним їх обґрунтуванням залишається відкритою проблемою математичного моделювання.

Застосування стандартних комерційних промислових програмних комплексів на основі МСЕ при розрахунках реальних інженерних конструкцій залишає відкритою область досліджень з використанням методів декомпозиції області (МДО) та гетерогенних чисельних апроксимацій для побудови близьких до оптимальних алгоритмів та їх програмних реалізацій. Такий підхід уможливорює використання розроблених програмних реалізацій із незначними їх модифікаціями. З погляду вимоги використання паралельних мультипроцесорних систем запропонований гібридний метод є особливо бажаним. Тим паче, що з появою багатопроцесорних паралельних обчислювальних систем, побудова та застосування алгоритмів, які розгалужуються, стали актуальними, перетворившись у розділ математичного моделювання, що інтенсивно розвивається.

Сучасні тенденції розвитку підходів моделювання сконцентровані, здебільшого, у напрямках підвищення ефективності реалізації та побудови адаптивних модифікацій методів і аналізу збіжності розроблених схем та їх моди-

фікацій. Значні характеристики комп'ютерів вимагають розробки нових критеріїв адаптації та їх реалізацій.

У зв'язку з цим актуальною є розробка нових гетерогенних ефективних чисельних методів розв'язування двовимірних та тривимірних початково-крайових задач, які дають змогу одночасно з автоматично контрольованою точністю використати можливості паралелізації обчислень сучасних комп'ютерів, забезпечуючи розв'язування як лінійних, так і нелінійних інженерних проблем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в межах наукових бюджетних тем кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України: “Розробка схем, алгоритмів і пакетів програм для розв'язування початково-крайових задач математичної фізики на основі комбінованих методів граничних і скінченних елементів” (№ д/р 0193U041998, 1997 р.), “Математичне моделювання і чисельне дослідження фізико-механічних полів в середовищах з малими неоднорідностями” (№ д/р 0197U018116, 1997-1999 рр.), “Розробка математичних моделей і чисельних схем для дослідження процесів у неоднорідних середовищах” (№ д/р 0101U001433, 2001-2003 рр.), “Розробка математичних методів та програмно-алгоритмічних засобів для гетерогенного моделювання процесів у неоднорідних середовищах” (№ д/р 0104U002136, 2004-2006 рр.), “Розробка числових методів та програмно-алгоритмічних засобів для гетерогенного моделювання процесів у неоднорідних середовищах з різномасштабними включеннями” (№ д/р 0104U003436, 2007-2009 рр.), “Побудова чисельних методів і програмно-алгоритмічних засобів для D-адаптивного комп'ютерного моделювання систем” (№ д/р 0110U001374, 2010-2012 рр.), “Побудова чисельних методів і програмно-алгоритмічного забезпечення для різномасштабного математичного моделювання” (№ д/р 0113U003057, 2013-2015 рр.). Автор – відповідальний виконавець цих тем.

Дослідження за темою дисертації частково були підтримані Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP 1995р.). Окремі результати дисертації отримані при виконанні міжнародних наукових проектів з науковцями Австрії, Польщі та США.

Метою дисертаційної роботи є розробка та обґрунтування адекватних математичних моделей і ефективних обчислювальних методів на основі поєднання переваг МСЕ і МГЕ для підвищення точності отриманих чисельних розв'язків.

Досягнення поставленої мети роботи передбачає вирішення наступних завдань:

- формулювання гетерогенної математичної моделі “пружне тіло-пластина типу Тимошенка”. Дослідження варіаційної задачі для гетерогенної чисельної схеми на основі прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) і МСЕ, отримання оцінок гетерогенних наближених розв'язків;
- розробка чисельної схеми розв'язування задачі квазістатичної термопружності на основі ПМГЕ, яка ґрунтується на побудові алгоритму роз-

в'язування задачі нестационарної теплопровідності з використанням фундаментальних розв'язків залежних від часу та просторових координат і методу колокації, і визначення температурних напружень з використанням методу Гальоркіна;

- розробка та аналіз схеми непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) для осесиметричної задачі теорії пружності на основі методу Гальоркіна;
- побудова гетерогенної чисельної схеми МСЕ динамічної задачі теорії пружності для осесиметричних об'єктів, з використанням розв'язків спектральної задачі та методу розкладу за власними функціями для задачі Коші;
- розробка гетерогенної чисельної схеми розв'язування задачі теорії малих пружнопластичних деформацій на основі МДО з використанням МСЕ та ПМГЕ та оцінки швидкості збіжності запропонованого підходу;
- побудова та дослідження гетерогенної чисельної схеми НМГЕ та МСЕ на основі альтернуючого методу Шварца розв'язування задачі теорії пружності;
- формулювання та дослідження варіаційних рівнянь зі штрафом, що реалізують паралельні схеми МДО для контактних задач теорії пружності;
- побудова та аналіз адаптивної схеми МСЕ з використанням оцінювача постпроцесорного типу, що ґрунтується на різниці напружень, знайдених з використанням гетерогенного підходу.

Об'єктом дослідження є термонапружено-деформований стан елементів інженерних конструкцій за силових та теплових навантажень, вільні коливання та динамічна реакція об'єктів, визначення температурних полів за дії зовнішніх впливів і внутрішніх джерел тепловиділення.

Предмет дослідження складають гетерогенні математичні моделі деформування просторових і тонкостінних елементів конструкцій, гетерогенні методи розв'язування стаціонарних та нестационарних початково-крайових задач теорії пружності, теплопровідності та термопружності, нові чисельні методи та адаптивні схеми.

Методи дослідження. Досягнення поставленої мети здійснено на основі методів математичної фізики (зведення початково-крайових задач до граничних інтегральних рівнянь, побудова узагальнених розв'язків у розумінні слабкої збіжності), функціонального аналізу (дослідження псевдодиференціальних операторів), чисельного аналізу та комп'ютерного моделювання. Достовірність отриманих теоретичних результатів підтверджено обчислювальними експериментами.

Наукова новизна одержаних результатів. На основі проведених наукових досліджень і узагальнень на єдиній теоретичній основі у дисертації:

- вперше розроблено та обґрунтовано на основі поєднання МСЕ та ПМГЕ чисельну схему дослідження гетерогенної математичної моделі “пружне тіло-пластинка типу Тимошенка”;
- побудовано схему дослідження задачі квазістатичної термопружності ПМГЕ на основі використання методу Гальоркіна та спеціальної методики

зведення інтегралів по області розв'язування задачі до поверхневих. З використанням методу колокацій запропоновано алгоритм розв'язування задачі нестационарної теплопровідності ПМГЕ на базі фундаментального розв'язку за просторовими та часовою координатами. Проведено чисельні експерименти дослідження розроблених методик врахування ненульової початкової температури для задачі термопружності;

- для динамічної задачі теорії пружності осесиметричних анізотропних об'єктів побудовано гетерогенну чисельну схему напіваналітичного МСЕ з використанням ізопараметричних апроксимацій різних порядків на сирендипових чотирикутниках меридіонального перетину. Розроблено схему визначення власних значень і власних векторів з використанням методу ітерації в підпросторі. Побудовано чисельну схему розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь на основі методу розкладу за власними функціями;
- побудовано на основі методу змінних параметрів пружності (МЗПП) та МДО гетерогенну чисельну схему розв'язування задачі теорії малих пружнопластичних деформацій. Розроблено лінійний ітераційний алгоритм МДО розв'язування задачі теорії пружності з використанням МСЕ та ПМГЕ. Отримана апріорна оцінка швидкості збіжності запропонованого підходу;
- вперше запропоновано та досліджено гетерогенну чисельну схему НМГЕ та МСЕ на основі альтернуючого методу Шварца розв'язування задачі осесиметричної теорії пружності. Розроблено модифікований ітераційний алгоритм методу Шварца, одержані теоретичні оцінки його збіжності;
- запропоновано клас паралельних схем Робіна-Робіна МДО, що ґрунтується на методі штрафу для розв'язування задач одностороннього контакту теорії пружності для багатьох тіл. Здійснено математичне обґрунтування збіжності, стійкості та швидкості збіжності запропонованих підходів;
- отримано на основі теорії гомогенізації математичну модель, яка описує процеси деформування в шаруватих композитних матеріалах. На основі запропонованої гетерогенної чисельної схеми ПМГЕ для анізотропних тіл і МСЕ досліджено чисельну ефективність для композитних об'єктів та контактних задач;
- вперше запропоновано адаптивний алгоритм МСЕ розв'язування задачі теорії пружності з використанням оригінального оцінювача постпроцесорного типу, що будується на основі гетерогенного підходу. Проведено теоретичні дослідження оцінювача та чисельну ефективність розроблених схем.

Достовірність одержаних результатів і основних наукових тверджень, отриманих у роботі, забезпечується математичною строгістю й коректністю постановок та розв'язування розглянутих задач, строгими теоретичними викладками доведених тверджень, використанням відомих методів обчислювальної математики, фізичною інтерпретацією чисельних результатів та їх узгодженням із відомими у літературі теоретичними та експериментальними

даними, аналізом поведінки наближених розв'язків на послідовно згущуваних або адаптивних сітках як за просторовими змінними, так і за часом, а також результатами розв'язків тестових і практичних задач.

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів. Результати, отримані у дисертаційному дослідженні, можуть бути використані при розв'язуванні широкого класу практичних задач, які описуються лінійними та нелінійними рівняннями теорії пружності, нестационарної теплопровідності, динамічної пружності. Отримані результати дали змогу здійснити оцінку застосовності використання комбінованих моделей при моделюванні складних інженерних конструкцій. Для моделювання шаруватих композиційних матеріалів вироблені рекомендації застосування анізотропної теорії пружності в залежності від кількості шарів композиту. Розроблене програмне забезпечення дає змогу проводити розрахунки полів квазістатичних напружень і динамічних характеристик реальних елементів інженерних конструкцій. Запропоновані методи, машинні алгоритми та методологія створення програмного забезпечення можуть бути також використані як ядро системи автоматизованих розрахунків.

Запропоновані у роботі підходи та методи досліджень і алгоритми їх реалізації рекомендовані до використання в учбовому процесі при читанні спецкурсів з математичного моделювання та чисельних методів для бакалаврів і магістрів факультету прикладної математики та інформатики і при виконанні курсових, магістерських і дисертаційних робіт.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наукові результати, сформульовані, доведені та подані у дисертаційній роботі, отримані здобувачем самостійно. У спільних публікаціях здобувачу належить: запропоновані постановки гетерогенних варіаційних задач для комбінованої моделі “просторовий об’єкт-пластинка типу Тимошенка” [1, 4, 11, 31, 49], отримані апріорні оцінки гетерогенних апроксимацій [32–34], участь у програмній реалізації [33, 49]. В опублікованих працях [2, 4, 6, 41, 42, 47, 48, 50, 59] здобувач особисто здійснив реалізацію чисельних методів для розв'язування задач і перевірку достовірності отриманих результатів. У роботах [10, 16, 19] автору належить розробка алгоритму НМГЕ на основі методу Гальоркіна для задачі теорії пружності та отримані оцінки чисельних розв'язків. У публікаціях [3, 24, 50] здобувачу належать: вибір різних підходів до дослідження початково-крайових задач, аналіз коректності побудованих проєкційних схем, вибір методики чисельного дослідження задач квазістатичної термопружності. У наукових працях [4, 8, 13, 18, 20, 44, 45, 51, 53, 56] автору належить розробка алгоритмів визначення власних значень, власних векторів і загальної методики чисельного розв'язання задачі лінійної просторової динамічної теорії пружності анізотропних тіл, розробка відповідного програмного забезпечення та проведення дослідження точності та збіжності побудованих чисельних схем. Розробка та реалізація різних варіантів об'єднаних апроксимацій МСЕ та МГЕ у роботах [6, 15, 17, 21, 23, 25, 26, 30, 32, 37, 52, 55, 57] та дослідження їхньої обчислювальної ефективності – внесок здобувача. Спеціальні підходи паралелізації

схем і особливості симетричних варіантів апроксимацій розроблені у роботах [33, 58]. В опублікованих працях [27-29, 35, 38, 39] здобувач запропонував використання гетерогенних апроксимацій для контактних задач і приймав участь в одержанні теоретичних оцінок для підходів. Здобувачу належить ідея запропонованого оцінювача похибки h -адаптивного алгоритму та його реалізація у роботах, опублікованих у співавторстві [22, 36, 40, 60].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на I Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків (Львів, 1993), IV Міжнародній конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995), конференціях “Моделирование и исследование устойчивости систем” (Київ, 1993, 1995, 1996, 1997), Міжнародній конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 1998, 2013), міжнародних конференціях “Numerical Methods and Computational Mechanics in Science and Engineering” (Мішкольц, Угорщина, 1996, 1998), III Українсько-польському науковому симпозиумі “Змішані задачі механіки неоднорідних структур” (Львів, 1999), міжнародних науково-технічних конференціях “Досвід розробки та застосування САПР у мікроелектроніці” (Львів, 1995, 1999), Міжнародній конференції “2nd European Conference on Computational Mechanics” (Краків, Польща, 2001), Міжнародній конференції “Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки” (Дрогобич, 2001), Міжнародній конференції “Обчислювальна та прикладна математика”, (Київ, 2002), Міжнародній конференції “WCCM Fifth World Congress on Computational Mechanics” (Відень, Австрія, 2002), Міжнародній конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2003, 2006, 2010), Міжнародній конференції “15th International Conference on Computer Methods in Mechanics” (Краків, Польща, 2003), Міжнародній науковій конференції “Інтегральні рівняння та їх застосування” (Одеса, 2005); VII Міжнародній конференції “INTERPOR 2008” (Бидгощ, Польща, 2008), VIII Європейській конференції з обчислювальної математики та прикладних застосувань “ENUMATH 2009” (Уппсала, Швеція, 2009), Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки” (Львів, 2009), Міжнародній конференції “Інтегральні рівняння-2010” (Львів, 2010), Міжнародній конференції “Функціональний аналіз-2010” (Львів, 2010), IV Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2010, 2016), Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики і її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях” (Харків, 2011), XIX Міжнародній конференції з комп’ютерних методів у механіці “СММ 2011” (Варшава, Польща, 2011), VI Європейському конгресі комп’ютерних методів в прикладних науках та інженерії (ECCOMAS, Відень, Австрія, 2012), XX і XIX міжнародних конференціях з методів декомпозиції області (Сан-Дієго, США, 2011, Ренн, Франція, 2012), VII Міжнародному симпозиумі з механіки матеріалів і структур (Аугустув,

Польща, 2013), VI Міжнародній науковій конференції імені І. І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика” (Київ, 2013), науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” АРАМС (Львів, 1995-2015), наукових конференціях факультету прикладної математики та інформатики і наукових семінарах кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України (1997-2014).

У повному обсязі дисертація доповідалася та обговорювалася на науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України (керівники – д. ф.-м. н., проф. Г. А. Шинкаренко і д. ф.-м. н., проф. Р. С. Хапко), розширеному науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем (керівник – д. ф.-м. н., проф. В. В. Михаськів) та загальноінститутському науковому семінарі за напрямом “Математичне моделювання та обчислювальні методи” (керівники – д. ф.-м. н., проф. Войтович М. М. і д. ф.-м. н., проф. Чекурін В. Ф.) Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, семінарі “Обчислювальна та прикладна математика” факультету комп’ютерних наук і кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України (керівник – член-кореспондент НАН України, д. ф.-м. н., проф. С. І. Ляшко), науковому семінарі відділу чисельних методів та комп’ютерного моделювання Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України (керівник – член-кореспондент НАН України, д. ф.-м. н., проф. Хіміч О. М.).

Публікації. Основний зміст дисертації викладено у 60-ти наукових статтях і одному навчальному посібникові. Серед них 20 статей [1, 4, 9, 13, 15, 18, 21, 26-33, 38-40, 47, 48] у рецензованих міжнародних журналах, що зареєстровані у міжнародній наукометричній базі Scopus, у рецензованих іноземних наукових виданнях MathSciNet, znMATH [9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23-25, 26-28, 33, 34], 25 статей [2, 3, 5-12, 14-17, 19, 20, 22-25, 28-30, 47, 48] у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України. Праці [36, 38, 41-46] опубліковані у збірниках статей, матеріалах міжнародних наукових конференцій, конгресів та симпозіумів. Праці [7, 9, 12, 14, 43, 46, 61] опубліковані автором одноосібно.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, п’яти розділів, що містять 52 рисунки та сім таблиць, висновків та списку літератури із 455 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 326 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 326 сторінок.

Автор щиро вдячний науковому консультанту - доктору фізико-математичних наук, професору Яремі Григоровичу Савулі за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та виражає подяку доктору фізико-математичних наук, професору Олександровичу Ярославовичу Григоренку за постійну увагу до роботи та цінні поради при її написанні.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; подано інформацію про публікації за темою дисертації та особистий внесок у них здобувача, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У першому розділі дисертації “Комбінована чисельна схема гетерогенної моделі теорії пружності” побудована математична модель і гетерогенна чисельна схема для дослідження напружено-деформованого стану об'єктів, які складаються з масивної та тонкостінної частин.

Вважаємо, що пружне середовище займає область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2^*$, $\Omega_1 \cap \Omega_2^* = \emptyset$, де Ω_1, Ω_2^* – довільні множини евклідового простору R^3 , при цьому область Ω_1 обмежена ліпшицевою границею Γ_1 , а область Ω_2^* обмежена двома паралельними площинами, відстань між якими h , та циліндричною боковою поверхнею (рис.1).

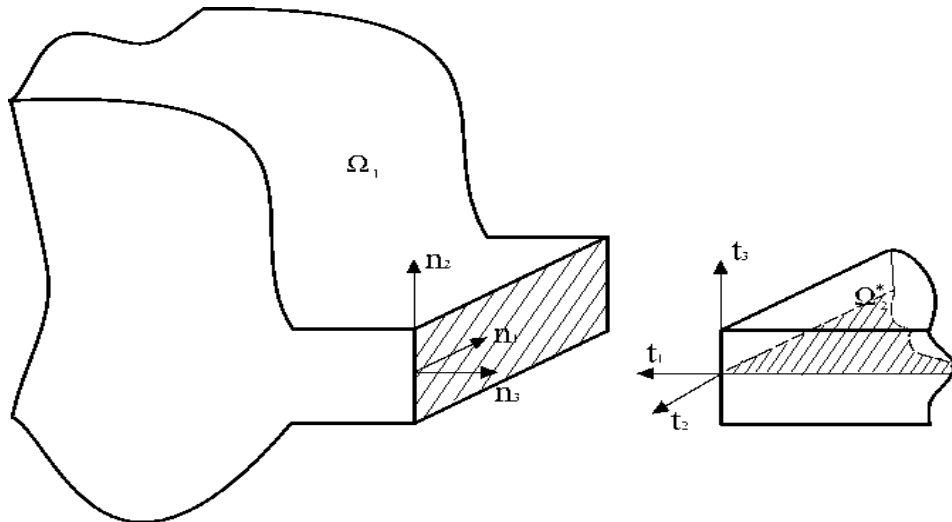


Рис.1. Схема об'єднання масивної та тонкостінної частин об'єкта

Розмір h області Ω_2^* значно менший, ніж інші характерні розміри цієї області. Між паралельними площинами, на однаковій відстані від них, розміщена серединна площина Ω_2 . Вважатимемо, що частина границі $\Gamma_1^{(3)}$ є спільною для середовищ Ω_1 та Ω_2^* : $\Gamma_1^{(3)} = \Gamma_2^{(3)} \times [-h/2, h/2]$. Напружено-деформований стан пружного середовища, що займає область Ω_1 , опишемо диференціальними рівняннями лінійної теорії пружності

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \Omega \subset R^3 \quad (1)$$

та рівняннями теорії пластин типу Тимошенка

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial \alpha_l} + p_k = 0,$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_k} + p_3 = 0, \quad \frac{\partial M_{kl}}{\partial \alpha_l} - Q_k + m_k = 0, \quad k, l = 1, 2, \quad \Omega_2 \subset R^2, \quad (2)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; f_i – компоненти вектора масових сил, що діють на тіло; T_{kl} – зусилля, M_{kl} – моменти, Q_k – перерізуючі сили, що виникають у пластині; p_i, m_k – поверхневе навантаження, приведені до серединної площини пластини.

Відомо, що

$$p_i = \sigma_{i3}^+ + \sigma_{i3}^- + \rho_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad m_k = \frac{h}{2}(\sigma_{k3}^+ - \sigma_{k3}^-) + \mu_k, \quad k = 1, 2; \quad (3)$$

де $\sigma_{i3}^+, \sigma_{i3}^-$ – компоненти вектора поверхневого навантаження на поверхнях пластинки $\alpha_3 = \pm h/2$, віднесеного відповідно до координат α_i ; ρ_i, μ_k – компоненти приведених до серединної площини пластини масових сил та моментів, які обчислюються за формулами

$$\rho_i = \int_{-h/2}^{h/2} q_i d\alpha_3, \quad \mu_k = \int_{-h/2}^{h/2} q_k \alpha_3 d\alpha_3, \quad (4)$$

q_i – компоненти вектора масових сил, у системі координат α_i на серединній площині пластини.

Компоненти тензора напружень в лінійній теорії пружності виражаються через компоненти тензора деформацій ε_{kl} за допомогою співвідношень фізичного закону

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad (5)$$

де C_{ijkl} – пружні сталі.

Зусилля і моменти, що діють в пластині, виражаються через деформаційні характеристики ε_{kl} та κ_{kl} за допомогою співвідношень фізичного закону теорії пластин типу Тимошенка

$$T_{kk} = B(\varepsilon_{kk} + \nu \varepsilon_{ll}), \quad T_{kl} = B \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{kl}, \quad Q_k = G \varepsilon_{k3},$$

$$M_{kk} = D(\kappa_{kk} + \nu \kappa_{ll}), \quad M_{kl} = D \frac{1-\nu}{2} \kappa_{kl}, \quad k, l = 1, 2; \quad k \neq l. \quad (6)$$

У формулах (6) підсумовування за індексами k, l не ведеться. Тут сталі B, D, G – у випадку ізотропного матеріалу – визначаються за формулами

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}, \quad G = \frac{5Eh(1+\nu)}{12}, \quad (7)$$

де E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Нехай u_i , ($i = 1, 2, 3$) компоненти вектора зміщень точок пружного тіла в

системі координат x_1, x_2, x_3 , v_i – зміщення точок серединної поверхні в напрямі осей α_i , ($i=1,2,3$) і γ_l ($l=1,2$) – кути повороту нормалі до серединної поверхні в напрямку осей α_i . Мають місце співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_l} + \frac{\partial v_l}{\partial \alpha_k} \right), \quad \varepsilon_{k3} = \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_k} + \gamma_k, \quad \kappa_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_l} + \frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha_k} \right), \quad k, l = 1, 2 \quad (9)$$

До рівнянь (1), (2) додамо граничні умови та умови нерозривності і рівноваги середовища тіла та пластини.

Граничні умови на межі області Ω_1 :

$$u_{ni} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad x \in \Gamma_1^{(1)}, \quad (10)$$

$$\sigma_{ni, n3} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad x \in \Gamma_1^{(2)}, \quad (11)$$

де $u_{ni} = u_k n_{ik}$, $\sigma_{ni, n3} = \sigma_{kl} n_{ik} n_{3l}$, $k, l = 1, 2, 3$, $n_{ij} = \cos(n_i, x_j)$ – напрямні косинуси триєдра \bar{n}_j . Граничні умови на межі області Ω_2 :

$$v_{tk} = 0, \quad v_3 = 0, \quad \gamma_{tk} = 0, \quad k = 1, 2 \quad x \in \Gamma_2^{(1)}, \quad (12)$$

$$T_{tk, tl} = 0, \quad Q_{ii} = 0, \quad M_{tk, tl} = 0, \quad i = 1, \quad k = 1, 2 \quad x \in \Gamma_2^{(2)}, \quad (13)$$

Тут

$$v_{tk} = v_l t_{kl}, \quad \gamma_{tk} = \gamma_l t_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \\ T_{tk, tl} = T_{ij} t_{ki} t_{lj}, \quad Q_{ii} = Q_l t_{il}, \quad M_{tk, tl} = M_{ij} t_{ki} t_{lj}, \quad i, j = 1, 2,$$

де t_{kl} – напрямні косинуси векторів \bar{t}_k в системі координат α_l : $t_{kl} = \cos(t_k, \alpha_l)$.

Умови нерозривності середовищ та рівноваги пластини та тіла на $\Gamma_1^{(3)} = \Gamma_2^{(3)} \times [-h/2, h/2]$:

$$v_1 + \alpha_3 \gamma_1 = -u_{n3}, \quad v_2 + \alpha_3 \gamma_2 = -u_{n1}, \quad v_3 = u_{n2}; \quad (14)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n3, n3} d\alpha_3 = T_{t1, t1}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n1, n3} d\alpha_3 = T_{t2, t1}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n2, n3} d\alpha_3 = -Q_t, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n3, n3} \alpha_3 d\alpha_3 = M_{t1, t1}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n1, n3} \alpha_3 d\alpha_3 = M_{t1, t2}. \quad (15)$$

Таким чином, комбінована математична модель пружного тіла та пластини типу Тимошенка в переміщеннях і кутах поворотів, що описує напружено-деформований стан системи, яка містить масивний і тонкостінний елементи, складається з рівнянь рівноваги (1), (2), фізичних законів (5), (6), деформаційних співвідношень (8), (9), граничних умов (10)-(13) та умов спряження (14) та (15).

Для задачі (1)-(15) доведено симетричність оператора задачі у просторі $H = [L_2(\Omega_1)]^3 \times [L_2(\Omega_2)]^5$ та додатність оператора. Також доведена теорема про додатню визначеність оператора задачі.

Для розв'язування варіаційної задачі гетерогенної математичної моделі в основному використовується МСЕ. Нами запропонована гетерогенна чисельна схема, яка будується на основі застосування МСЕ в області Ω_2^* для розв'язання задачі теорії пластинок типу Тимошенка та ПМГЕ – для задачі теорії пружності в області Ω_1 . Такий підхід дає можливість використовувати один і той же простір апроксимацій для усієї області дослідження задачі. Доведена теорема про неперервність і еліптичність білінійної форми варіаційної задачі гетерогенної математичної моделі.

Побудована гетерогенна чисельна схема на основі ПМГЕ і МСЕ дослідження гетерогенної математичної моделі. Доведено лему та теореми, з яких одержано асимптотичні оцінки гетерогенних наближених розв'язків. Проведені обчислювальні експерименти підтверджують перспективність і обчислювальну ефективність запропонованої гетерогенної математичної моделі дослідження складних об'єктів і гетерогенної чисельної схеми. На рис. 2 наведена ліва симетрична частина перерізу тонкостінної циліндричної оболонки – перекриття $B_4B_3B_7B_6$, що містить масивну основу $B_1B_2B_3B_4B_5$.

Розглядалося сімейство конструкцій, серединна крива яких задається як коловий сегмент, ланцюгова лінія або квадратична парабола. Можливо вибрати параметризацію цих кривих так, щоб забезпечити той факт, що серединна крива оболонки матиме стрілу підйому $2l$ і півширину перекриваючої області $l\pi$. Це забезпечить незначну різницю між серединними кривими. При чисельному дослідженні вибиралися наступні значення параметрів: $l=8\text{м}$, $h/R=0.1$, $c=0.5\text{м}$,

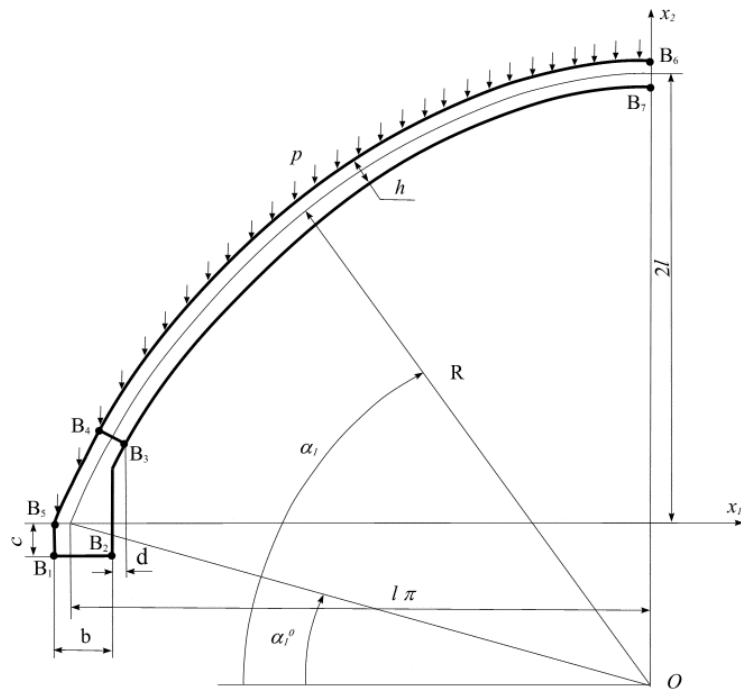


Рис. 2. Схема частини перекриття

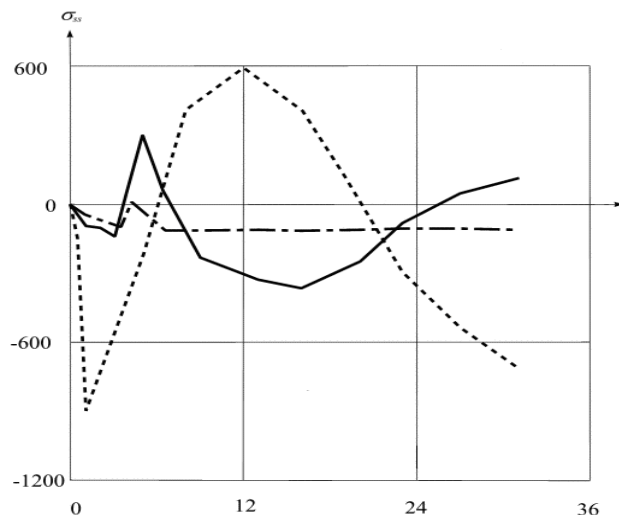


Рис. 3. Значення нормальних σ_{zz} напружень

$b = 0.5m$, $d = 0.1m$, $E = 2 \times 10^{10} \text{ H/m}^2$, $\nu = 0.3$, $p = 1 \text{ H/m}^2$. Границя B_1B_2 масивної частини конструкції вважалася жорстко защемленою. Для розрахунку масивної частини конструкції $B_1B_2B_3B_4B_5$ вибирався ПМГЕ з використанням лінійної апроксимації переміщень і зусиль. Переміщення та кути повороту нормалі серединної кривої конструкції апроксимувалися квадратичними ізопараметричними скінченними елементами. На рис. 3. наведені нормальні повздовжні напруження $\sigma_{ss} \left[\frac{\text{H}}{\text{M}^2} \right]$ вздовж кривої $B_5B_4B_6$, як функція натурального параметра s кривої $B_5B_4B_6$. Результати підтверджують значну різницю у розподілі напружень, незважаючи на незначні відхилення серединної кривої.

У **другому розділі** “Чисельна схема прямого методу граничних елементів для задачі квазістатичної термопружності” розроблена чисельна схема дослідження задачі нестационарної теплопровідності ПМГЕ з використанням фундаментальних розв’язків, залежних від часу та методу колокацій, чисельна схема розв’язання задачі термопружності ПМГЕ на основі використання методу Гальоркіна та спеціальної методики зведення інтегралів по області дослідження задачі до поверхневих. Побудований алгоритм непрямого методу граничних елементів для задачі теорії пружності на основі методу Гальоркіна з використанням апроксимації різних порядків та наведена його чисельна ефективність, проведені чисельні експерименти для модельних задач нестационарної теплопровідності та квазістатичної термопружності підтверджують ефективність розроблених чисельних схем.

Визначення полів напружень в об’єкті, що перебуває в умовах силових і температурних навантажень, проводиться у рамках задачі незв’язної квазістатичної термопружності. Математичну модель у цьому випадку складають рівняння рівноваги (1), співвідношення Коші (8), напруження та деформації зв’язані співвідношеннями Дюгамеля-Неймана, які для ізотропного пружного середовища $\Omega \subset R^2$ мають вигляд

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \vartheta \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (16)$$

де $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву, $\beta = \frac{\alpha_t E}{2(1+\nu)}$ – приведений коефіцієнт температурного розширення, α_t – коефіцієнт лінійного температурного розширення, δ_{ij} – символ Кронекера, ϑ – приріст температури. Зауважимо, що співвідношення Дюгамеля-Неймана (16) наведені для плоского деформованого стану. Граничні умови задаються формулами (10), (11).

Значення температури у цьому випадку знаходяться з розв’язку задачі нестационарної теплопровідності, що описується параболічним рівнянням

$$\lambda \Delta \vartheta = \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad x, t \in \Omega \times (0, T], \quad \Omega \subset R^2, \quad (17)$$

де Δ – лапласіан, λ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, ρ – питома густина, t – часова координата. При цьому задається початкова умова

$$\vartheta(x_1, x_2, 0) = \vartheta_0, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \quad (18)$$

де $\vartheta_0 \in C^0(\Omega)$ – відоме значення температурного поля (співвідношення (16) записані для $\vartheta_0 = 0$) та граничні умови на температуру

$$\vartheta(x, t) = \bar{\vartheta}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_D \times (0, T], \quad (19)$$

або на тепловий потік

$$-\lambda q(x, t) = -\lambda \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial n} = \bar{q}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_N \times (0, T], \quad (20)$$

де \vec{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\Gamma = \partial\Omega$, $\bar{\vartheta}(x, t)$, $\bar{q}(x, t) \in C^0(\Gamma \times (0, T])$ – задані значення температури та теплового потоку відповідно. При цьому вважається $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$. Отже, розв'язавши початково-крайову задачу (17)-(20), знаходимо функцію розподілу температури у довільний момент часу t , а потім знаходимо компоненти тензора напружень σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ та вектора переміщень u_i , $i = 1, 2$ у цей момент часу, розв'язуючи задачу (1), (8), (10), (11), (16).

У роботі для розв'язування нестационарних задач пропонується використання фундаментальних розв'язків, залежних від часової та просторових координат. Застосування цього підходу буде найефективнішим, якщо у рівнянні відсутній доданок, який враховує джерела або стоки тепла та при умові нульової початкової температури. У випадку застосування ПМГЕ, розв'язування задачі (17)-(20) зводиться до інтегрального рівняння Вольтера–Фредгольма другого роду: потрібно знайти таку пару $(\vartheta, q) \in L^2\left(0, T; H_0^{\frac{1}{2}}, H_0^{\frac{1}{2}}\right)$, що задовольняє рівняння

$$c^*(\xi)\vartheta(\xi, \tau) + k \int_0^\tau \int_\Gamma \vartheta(x, t) q^*(\xi, x, \tau, t) d\Gamma_x dt = \quad (21)$$

$$k \int_0^\tau \int_\Gamma q(x, t) \vartheta^*(\xi, x, \tau, t) d\Gamma_x dt + \int_\Omega \vartheta_0(x) \vartheta^*(\xi, x, \tau, 0) d\Omega_x, \quad (\xi, \tau) \in \Gamma \times (0, T].$$

де $\vartheta^*(\xi, x, \tau, t)$ і $q^*(\xi, x, \tau, t)$ – відповідно фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна, $k = \lambda/c\rho$ – коефіцієнт температуропровідності, $c^*(\xi)$ – коефіцієнт, який залежить від локальної геометрії області. Для двовимірного випадку відомі фундаментальні розв'язки

$$\vartheta^*(\xi, x, \tau, t) = \frac{1}{4\pi k(\tau - t)} \exp\left(-\frac{r^2}{4k(\tau - t)}\right), \quad q^*(\xi, x, \tau, t) = \frac{d}{8\pi k^2(\tau - t)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k(\tau - t)}\right),$$

де $r^2 = r_i r_i$, $r_i = x_i(\xi) - x_i(x)$, $d = r_i n_i(x)$, $i = 1, 2$.

Так як рівняння (21) є рівнянням типу Вольтера за часовою координатою, то чисельні методи для цих рівнянь є глобальними за часовою координатою.

Проміжок часу інтегрування $[0, T]$ розбиваємо деякою послідовністю точок $\{t_f = f\Delta t\}_{f=0}^F$, тут $f = 1, 2$ – крок за часом. Тоді алгоритм ПМГЕ розв'язування початково-крайової задачі (17)–(20) зводиться до граничноелементної апроксимації рівняння (21). Шукані функції \mathcal{G} і q апроксимуємо шляхом інтерполяції за вузловими значеннями

$$\mathcal{G}(\xi, \tau) = \phi^T(\xi)\psi(\tau)\mathcal{G}^n, \quad q(\xi, \tau) = \phi^T(\xi)\psi(\tau)q^n, \quad (22)$$

де \mathcal{G}^n, q^n – вектори вузлових значень на граничному елементі функцій \mathcal{G} і q , $\phi(x)$ і $\psi(\tau)$ – вектори інтерполуючих базових функцій за просторовою та часовою координатами, відповідно. Враховуючи представлення (22) і дискретизацію області Ω та її границі Γ , рівняння (21) можна подати у вигляді

$$c_i^* \mathcal{G}_F^i + k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \phi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) \mathcal{G}^n = k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \phi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} \mathcal{G}^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_l} \mathcal{G}^* \mathcal{G}_0 d\Omega. \quad (23)$$

У схемі (23) інтегрування у часі завжди починається з початкового моменту $\tau_0 = 0$ і не вимагає обчислення значення функції \mathcal{G} у внутрішніх точках на кожному часовому кроці. Знаючи розподіл температури в кожній точці об'єкта в конкретний момент часу T , знаходження переміщень у будь-якій точці проводимо з використанням співвідношення

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma_x + \beta \int_{\Omega} u_{ij,j}^*(\xi, y) \theta(y) d\Omega_y, \quad i, j = 1, 2, \quad (24)$$

тут $x \in \Gamma$, $\xi, y \in \Omega$, функції $u_{ij}^*(\xi, x)$, $p_{ij}^*(\xi, x)$ – розв'язки Кельвіна, що відповідають переміщенню та зусиллю у точці x в j -ому напрямку під дією одиничної зосередженої сили у нескінченному пружному просторі у точці ξ в i -ому напрямку:

$$u_j^*(x) = u_{ij}^*(\xi, x) e_i(\xi), \quad p_j^*(x) = p_{ij}^*(\xi, x) e_i(\xi), \quad i, j = 1, 2. \quad (25)$$

В ортогональній декартовій системі координат для задачі плоскої деформації формули (25) можна подати

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right],$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\},$$

де $r = r(\xi, x)$ – відстань між точками x та ξ , а $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}$.

Для ілюстрації ефективності запропонованого алгоритму проведено розрахунок задачі, результати якої отримані на основі розробленого підходу ПМГЕ, порівнюються з аналітичним розв'язком. На рис. 4 зображено область, у якій розв'язувалася задача, та показані значення температури і теплового потоку на границі.

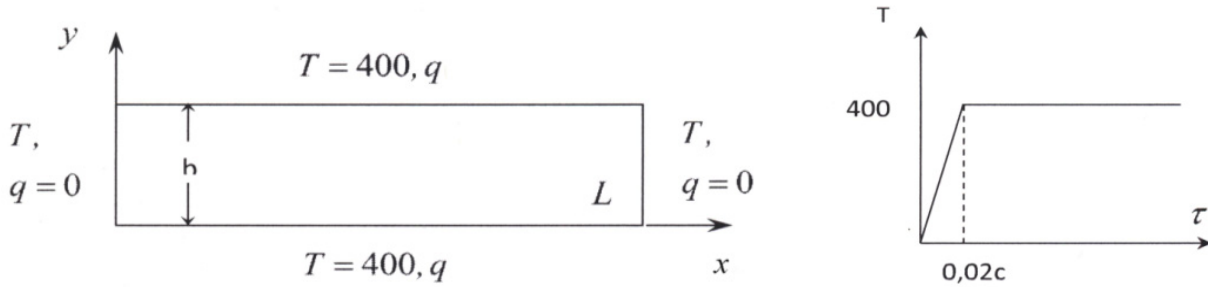


Рис. 4. Схема об'єкта з граничними умовами

На рис. 5 наведені значення напружень $\sigma_{xx}(\nu-1)/\alpha ET$ у внутрішніх точках пластини по лінії $x=0,1L$ для різних моментів часу, отриманих при розв'язуванні задачі з використанням лінійних апроксимацій температури та переміщень. Чисельні результати у роботі демонструють ефективність запропонованого підходу розв'язування такого класу задач та надійність створеного програмного забезпечення.

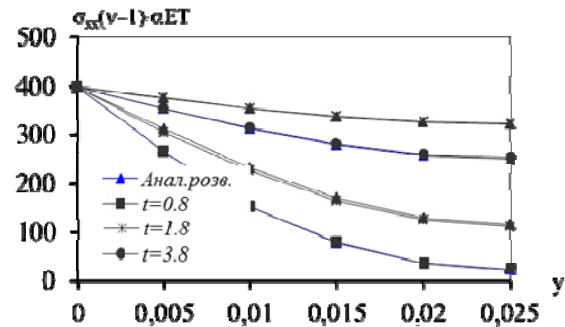


Рис. 5. Внутрішні напруження у різні моменти часу

Далі у цьому розділі побудований алгоритм НМГЕ для задач теорії пружності на основі методу Гальоркіна. Ця методика узагальнена для побудови альтернуючого методу Шварца у розділі 4.

При використанні граничних інтегральних операторів простого та подвійного шару $Ku(x) = p.v. \int_{\Gamma_B} (p_y [E(x, y)])^T u(y) dS_y$, $Vp(x) = \int_{\Gamma_B} E(x, y) p(y) dS_y$, розв'язування граничної задачі (1), (8), (10), (11) зводиться до розв'язування системи інтегральних рівнянь вигляду

$$V\lambda = g, \quad x \in \Gamma_D, \quad (26)$$

$$\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\lambda = \phi, \quad x \in \Gamma_N, \quad (27)$$

з матрицею фундаментальних розв'язків:

$$E(x, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{4(n-1)\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \left\{ e(x, y)\mathbf{I} + \frac{(\lambda + \mu)(x-y)(y-x)^T}{\lambda + 3\mu |y-x|^n} \right\},$$

$$\text{де } e(x, y) = \begin{cases} -\log|y-x|, & \text{для } n=2 \\ |y-x|^{-1}, & \text{для } n=3 \end{cases}$$

$$\text{тут позначено } K^*\lambda(x) = p.v. \int_{\Gamma} (T_x [E(x, y)]) \lambda(y) dS_y$$

Оператори K і K^* є спряженими. Для розв'язування системи (26), (27) застосовуються метод колокації, метод найменших квадратів і метод Гальоркіна.

Варіаційна задача для (26), (27) формулюється так:

для заданих $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ та $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ знайти $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$ таку, що

$$a_{1\Gamma}(\chi, \lambda) = \langle \chi, V\lambda \rangle = l_g(\chi), \quad x \in \Gamma_D, \quad (28)$$

$$a_{2\Gamma}(\chi, \lambda) = \langle V\chi, \left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\lambda \rangle = l_\phi(\chi), \quad x \in \Gamma_N \quad (29)$$

для всіх $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Тут l_g, l_ϕ – лінійні функціонали на $H^{-1/2}(\Gamma)$ визначені як $l_g(\chi) := (\chi, g)$ для всіх $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а $l_\phi(\chi) := (V\chi, \phi)$.

Доведено, що білінійна форма в (28) є $H^{-1/2}(\Gamma)$ -еліптичною, а білінійна форма $a_{2\Gamma}$, визначена в (29), задовольняє нерівність Гардінга, а отже варіаційне рівняння має єдиний розв'язок $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Метод Гальоркіна для розв'язування (28), (29) полягає у відшуванні наближеного розв'язку в скінченновимірному підпросторі S_h простору $H^{-1/2}(\Gamma)$. Нехай S_h – сімейство скінченновимірних підпросторів, які апроксимують $H^{-1/2}(\Gamma)$, тобто для кожного $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$ існує послідовність $\chi_h \in S_h \subset H^{-1/2}(\Gamma)$, коли $\|\chi_h - \lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \rightarrow 0$ якщо $h \rightarrow 0$, тобто кількість степенів свободи $N \rightarrow \infty$.

Тоді апроксимацією Гальоркіна розв'язку λ є функція $\lambda_h \in S_h$, яка задовольняє рівняння

$$a_{1\Gamma}(\chi_h, \lambda_h) = l_g(\chi_h), \quad x \in \Gamma_D, \quad (30)$$

$$a_{2\Gamma}(\chi_h, \lambda_h) = l_\phi(\lambda_h), \quad x \in \Gamma_N \quad (31)$$

для всіх $\chi_h \in S_h \subset H^{-1/2}(\Gamma)$.

Розв'язок Гальоркіна λ_h є дискретним слабким розв'язком (30), (31). Оскільки S_h є скінченномірним, то якщо $\{\varphi_j(x)\}_j^N$ утворює базис в S_h , то

розв'язок будемо шукати у вигляді: $\lambda_h := \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j$, де невідомі коефіцієнти

задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N a_{1\Gamma}(\varphi_i, \varphi_j) \gamma_j = l_g(\varphi_i), \quad i = 1 \dots N_1, \quad \sum_{j=1}^N a_{2\Gamma}(\varphi_i, \varphi_j) \gamma_j = l_\phi(\varphi_i), \quad i = N_1 + 1, \dots, N.$$

Як наслідок $H^{-1/2}(\Gamma)$ -еліптичності $a_{1\Gamma}(\cdot, \cdot)$ та $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ -еліптичності $a_{2\Gamma}(\cdot, \cdot)$ можна стверджувати про єдиний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь. Доведено:

Теорема 1. Для $-\frac{1}{2} \leq t \leq s \leq l$, $l \leq m$ має місце асимптотична оцінка похибки оптимального порядку $\|\lambda - \lambda_h\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{s-t} \|\lambda\|_{H^s(\Gamma)}$ для розв'язку Гальоркіна λ_h .

Результати обчислювального експерименту підтверджують ефективність розробленого алгоритму та отримані теоретичні результати.

У **третьому розділі** роботи “Чисельне дослідження динамічних просторових задач теорії пружності для осесиметричних об’єктів” побудована гетерогенна чисельна схема методу скінченних елементів з використанням ізопараметричних апроксимацій різних порядків на сирендипових чотирикутниках, розроблений підхід визначення власних частот і форм анізотропних осесиметричних тіл з використанням методу ітерації в підпросторі, побудована чисельна схема розв’язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку на основі методу розкладу за власними функціями, проведені обчислювальні експерименти дослідження чисельних аспектів алгоритмів визначення частот вільних коливань і власних форм анізотропних циліндрів і дослідження просторової динамічної задачі теорії пружності.

Нехай пружне середовище займає область $\Omega \subset R^3$ з неперервною за Ліпшицем границею Γ і є кусково-однорідним анізотропним тілом обертання, що віднесене до циліндричної системи координат (r, θ, z) . Вважаємо, що на тіло діє система зовнішніх поверхневих сил, заданих як функції від просторових і часової координат. Тоді у вибраній системі координат замкнута система рівнянь просторової лінійної динамічної теорії пружності анізотропного тіла включає рівняння динамічної рівноваги (рівняння руху):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0; T], \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

фізичні співвідношення узагальненого закону Гука (5), геометричні лінійні співвідношення Коші (8), граничні

$$u_r = g_r, \quad u_z = g_z, \quad u_\theta = g_\theta \quad (x, t) \in \Gamma_D \times [0; T], \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos(\vec{n}, r) + \sigma_{rz} \cos(\vec{n}, z) + \sigma_{r\theta} \cos(\vec{n}, \theta) &= \zeta_r, \\ \sigma_{rz} \cos(\vec{n}, r) + \sigma_{zz} \cos(\vec{n}, z) + \sigma_{z\theta} \cos(\vec{n}, \theta) &= \zeta_z, \quad (x, t) \in \Gamma_N \times [0; T], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sigma_{r\theta} \cos(\vec{n}, r) + \sigma_{\theta z} \cos(\vec{n}, z) + \sigma_{\theta\theta} \cos(\vec{n}, \theta) = \zeta_\theta,$$

і початкові умови

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{v}}_0, \quad x \in \Omega. \quad (35)$$

У формулах (32)-(35) введені позначення: $u_r = u_r(r, \theta, z, t)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta, z, t)$, $u_z = u_z(r, \theta, z, t)$ – компоненти вектора переміщень $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$ у точці тіла $x = x(r, \theta, z)$ у момент часу t , $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta z})^T$ – вектор компонентів тензора деформацій, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z})^T$ – вектор компонентів тензора

напружень, $\zeta_r(r, \theta, z, t), \zeta_\theta(r, \theta, z, t), \zeta_z(r, \theta, z, t)$ – компоненти заданого вектора поверхневого навантаження \mathbf{Z} на частині границі Γ_N у момент часу t ; $\tilde{\mathbf{u}}_0 = (\tilde{u}_{r_0}, \tilde{u}_{\theta_0}, \tilde{u}_{z_0})^T$, $\tilde{\mathbf{v}}_0$ – задані значення векторів переміщень та швидкостей у початковий момент часу $t=0$; \mathbf{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі області Γ ; $\rho = \rho(r, \theta, z)$ – густина матеріалу.

Динамічну задачу теорії пружності досліджено з позицій варіаційних методів, використовуючи методику, в якій час t розглядається як параметр. Введемо позначення

$$u(t) = u(r, \theta, z, t), \quad u'(t) = \frac{\partial u(r, \theta, z, t)}{\partial t}, \quad u''(t) = \frac{\partial^2 u(r, \theta, z, t)}{\partial t^2}. \quad (36)$$

Тоді варіаційну задачу, яка еквівалентна динамічній лінійній теорії пружності (32) – (35), можна сформулювати так:

Знайти узагальнений розв'язок $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ такий, що $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V)$, $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; V')$ і

$$m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall t \in [0; T] \quad (37)$$

$$\mathbf{u}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{u}'(0) = \tilde{\mathbf{v}}_0. \quad (38)$$

Так як розглядаються осесиметричні об'єкти, то подамо компоненти векторів поверхневого навантаження у вигляді нескінченного ряду Фур'є за кутовою координатою:

$$\zeta_r = \sum_{i=0}^{\infty} p_r^{(i)} \phi_i(\theta), \quad \zeta_z = \sum_{i=0}^{\infty} p_z^{(i)} \phi_i(\theta), \quad \zeta_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} p_\theta^{(i)} \tilde{\phi}_i(\theta). \quad (39)$$

Тоді розв'язок задачі (37), (38) шукаємо у вигляді

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(u_r^{(i)}(r, z, t), u_\theta^{(i)}(r, z, t), u_z^{(i)}(r, z, t) \right) \begin{pmatrix} \phi_i(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_i(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i(\theta) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

де введені позначення $\phi_i(\theta) = \{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots\}$, $\tilde{\phi}_i(\theta) = \{1, \sin \theta, \cos \theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \dots, \sin n\theta, \cos n\theta, \dots\}$ – повні ортогональні системи тригонометричних функцій на проміжку $[0; 2\pi]$. Часткову суму

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{u}^{(i)}(r, z, t) \Phi_i(\theta) \quad (41)$$

ряду (40) будемо називати апроксимацією узагальненого розв'язку задачі (37), (38). Підставивши (41) у варіаційне рівняння та початкові умови задачі (37), (38) та приймаючи, що $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(j)} \Phi_j$ з урахуванням ортогональності системи тригонометричних функцій, отримаємо варіаційну задачу знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є

$$m^{(i)} \left((\mathbf{u}^{(i)})''(t), \mathbf{v}^{(i)} \right) + a^{(i)} \left(\mathbf{u}^{(i)}(t), \mathbf{v}^{(i)} \right) = \langle l^{(i)}(t), \mathbf{v}^{(i)} \rangle \quad \forall \mathbf{v}^{(i)} \in V^1, \quad (42)$$

$$\mathbf{u}^{(i)}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0^{(i)}, \quad (\mathbf{u}^{(i)})'(0) = \tilde{\mathbf{v}}_0^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (43)$$

Чисельну процедуру розв'язування варіаційної задачі (42) – (43) будемо з використанням напівдискретних апроксимацій Гальоркіна. Наближений розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\mathbf{u}_h^{(i)}(r, z, t) = \sum_{k=1}^L u_{kh}^{(i)}(t) N_k(r, z), \quad (44)$$

Тоді для i -ої гармоніки отримаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку в матричних позначеннях можна подати

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(i)} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)}(t) + \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{U}^{(i)}(t) &= \mathbf{R}^{(i)}(t) \\ \mathbf{U}^{(i)}(0) &= \tilde{\mathbf{U}}_0^{(i)}, \quad \dot{\mathbf{U}}^{(i)}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0^{(i)}. \end{aligned} \quad (45)$$

У цьому випадку, вузлові переміщення $\mathbf{U}^{(i)}(t)$ скінченних елементів представимо у вигляді

$$\mathbf{U}^{(i)}(t) = \mathbf{\Psi}_i \mathbf{X}_i(t), \quad (46)$$

де $\mathbf{X}_i(t)$ – невідомий вектор, компоненти якого називаються узагальненими переміщеннями, а $\mathbf{\Psi}_i$ – матриця, стовпцями якої є власні вектори $\boldsymbol{\psi}$, отримані як розв'язки наступної алгебраїчної проблеми на власні значення $\mathbf{K}^{(i)} \boldsymbol{\psi} = \omega^2 \mathbf{M}^{(i)} \boldsymbol{\psi}$.

Для розв'язування цих задач використовуємо метод ітерацій у підпросторі, який дає можливість обчислити перших \tilde{k} найменших власних значень і відповідних власних векторів.

Підставивши (46) у рівняння (45) та домноживши його зліва на $\mathbf{\Psi}_i^T$, отримаємо систему рівнянь рівноваги для узагальнених переміщень

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_i(t) + \Omega_i^2 \mathbf{X}_i(t) &= \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{R}^{(i)}(t) \\ \mathbf{X}_i(0) &= \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M}^{(i)} \tilde{\mathbf{U}}_0^i, \quad \dot{\mathbf{X}}_i(0) = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M}^{(i)} \tilde{\mathbf{V}}_0^i. \end{aligned} \quad (47)$$

Система (47) розпадається на \tilde{k} окремих рівнянь

$$\ddot{x}_i^j(t) + (\omega_i^j)^2 x_i^j(t) = (\boldsymbol{\psi}_i^j)^T \mathbf{R}^{(i)}(t), \quad j = 1, \dots, \tilde{k} \quad (48)$$

з початковими умовами $x_i^j(0) = (\boldsymbol{\psi}_i^j)^T \mathbf{M}^{(i)} \tilde{\mathbf{U}}_0^{(i)}$, $\dot{x}_i^j(0) = (\boldsymbol{\psi}_i^j)^T \mathbf{M}^{(i)} \tilde{\mathbf{V}}_0^{(i)}$, кожне з яких є рівнянням рівноваги системи з одним ступенем свободи, з одиничною масою та жорсткістю $(\omega_i^j)^2$. Розв'язок кожного рівняння (48) представляється у вигляді інтегралу Дюгамеля:

$$x_i^j(t) = \frac{1}{\omega_i^j} \int_0^t (\boldsymbol{\psi}_i^j)^T \mathbf{R}^{(i)}(\xi) \sin \omega_i^j(t - \xi) d\xi + \alpha_i^j \sin \omega_i^j t + \beta_i^j \cos \omega_i^j t,$$

де коефіцієнти α_i^j , β_i^j визначаємо з початкових умов. Переміщення вузлових точок для i -ої гармоніки знаходимо суперпозицією реакцій системи за всіма

власними формами: $U^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{k}} \psi_i^k x_i^k(t)$. Загальну реакцію системи отримуємо, сумуючи переміщення за всіма гармоніками.

Проведено обчислювальні експерименти визначення частот і форм вільних коливань анізотропних об'єктів циліндричної форми.

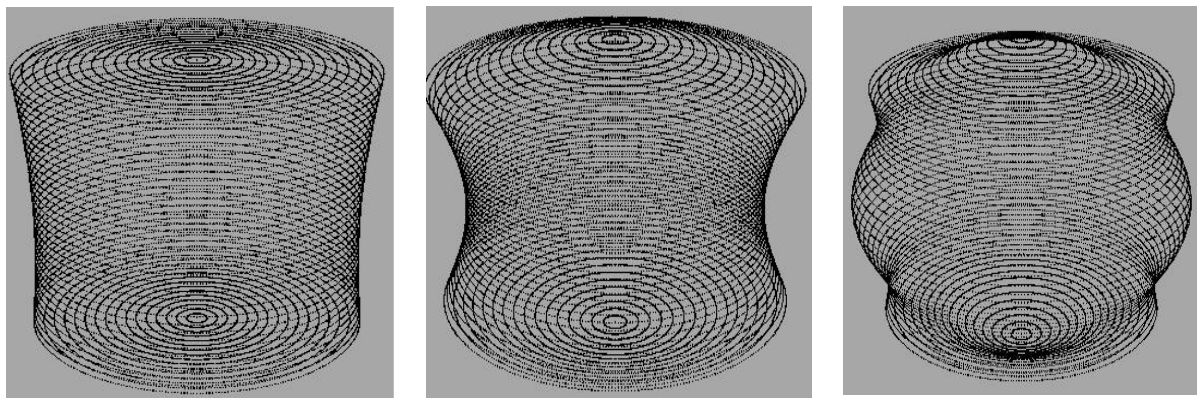


Рис. 6. Форми власних коливань

На рис. 6 наведено вигляд перших трьох осесиметричних форм коливань анізотропного циліндра. Слід відзначити, що для даного типу матеріалу та типу циліндра чотири неосесиметричні частоти є меншими за першу осесиметричну частоту.

Проведені дослідження збіжності та точності чисельних розв'язків для задачі про визначення динамічної реакції порожнистого циліндра, на зовнішній бічній поверхні якого діє неосесиметричне, нестационарне, нормальне навантаження, підтверджують ефективність розробленого програмного забезпечення.

У **четвертому розділі** роботи “Гетерогенні чисельні схеми методу декомпозиції області” побудований алгоритм методу декомпозиції області для задач пружно-пластичного деформування з використанням гетерогенних чисельних апроксимацій МСЕ та ПМГЕ, запропонована та досліджена гетерогенна чисельна схема МСЕ та НМГЕ на основі альтернуючого методу Шварца розв'язування задачі теорії пружності з наляганням підобластей, отримана теоретична оцінка швидкості збіжності розроблених схем та проведений чисельний аналіз їх ефективності.

Для дослідження задач з врахуванням непружної поведінки матеріалу широко застосовуються як МСЕ, так і МГЕ. У багатьох практично важливих інженерних застосуваннях область пластичної поведінки матеріалу є локальною, тому використання фізичних гетерогенних моделей, тобто одночасне використання як моделі пружного, так і моделі пластичного деформування з точки зору оптимізації обчислювальних витрат є обгрунтованим.

Використовуючи систему рівнянь рівноваги (1), співвідношення Коші (8) та фізичні рівняння теорії малих пружно-пластичних деформацій

$$\sigma_{ij} = \psi \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (3K - \psi) \varepsilon_0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (49)$$

де $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно, ε_0 – компоненти кульового тензора деформацій, ψ – функція пластичності; K – мо-

дуль об'ємного розширення, δ_{ij} – символ Кронекера, одержуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка при заданих граничних умовах (10), (11) складає математичну модель задачі пластичності. Коефіцієнти системи у загальному випадку залежать від напружено-деформованого стану тіла. Для лінеаризації отриманої задачі використовуємо процес послідовних наближень, який будуюмо за МЗПП. В основі методу лежить представлення залежностей напружень від деформацій (49) за теорією малих пружно-пластичних деформацій у формі узагальненого закону Гука, який у матричній формі можна подати

$$\sigma_{ij} = \tilde{\mathbf{D}}\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

де $\tilde{\mathbf{D}}$ – матриця пружних констант, які залежать від напруженого стану в точці, а тому різні для різних точок тіла.

Між інтенсивностями напружень σ_i та деформацій ε_i існує функціональна залежність, яка у випадку малих деформацій є функцією $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$.

Доведена теорема про умови збіжності МЗПП.

Теорема 2. Процес послідовних наближень МЗПП при виконанні умов

$$0 < \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i} \leq \frac{\Phi}{\varepsilon_i} \leq \frac{3E}{2(1+\nu)}, \quad \Phi_k = \Phi(x, \varepsilon_i^k), \quad 0 < \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1} \leq \min\left(\frac{\Phi_1}{\varepsilon_i^1}, \frac{\Phi_2}{\varepsilon_i^2}\right)$$

збігається до точного розв'язку зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює γ_{\max}^k ,

$$\|u^* - u_{k+1}\|_{H^1(\Omega_F)} \leq \gamma_{\max}^k \|u^* - u_0\|_{H^1(\Omega_F)}. \quad (50)$$

Тут u_j – розв'язок пружної задачі зі змінними параметрами, u^* – розв'язок еквівалентної пружної задачі, що збігається з розв'язком пружно-пластичної

задачі, а $\gamma_j = \max_{\Omega} \left(1 - \frac{\varepsilon_i^j \Phi^* - \Phi_j}{\Phi_j \varepsilon_i^* - \varepsilon_i^j}\right) \leq \gamma_{\max} < 1$.

Припустимо, що пластичні деформації локалізовані в деякій підобласті $\Omega_F \subset R^2$, а для решти області $\Omega_B = \Omega \setminus \Omega_F \subset R^2$ виконуються співвідношення теорії пружності, причому $\Omega_B \cup \Omega_F = \Omega$, $\Omega_B \cap \Omega_F = \emptyset$, а $\Gamma_C = \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_B$ – спільна границя підобластей. Розв'язок задачі в підобласті Ω_F будуюмо з використанням МСЕ, а у підобласті Ω_B – ПМГЕ на основі процедури Гальоркіна. Вимагатимемо, враховуючи, що спільна границя належить повністю до зони пружного деформування матеріалу, виконання умов спряження на спільній границі Γ_C .

Алгоритм розв'язування фізичної гетерогенної задачі про пружно-пластичне деформування з використанням теорії малих пружно-пластичних деформацій можемо подати у вигляді.

Етап 1. Покладаємо лічильник ітерацій $k := 0$ і задаємо початкове переміщення на межі Γ_C для області Ω_B :

$$\bar{u}_B^k = \bar{u}_B^0, \quad x \in \Gamma_C. \quad (51)$$

Етап 2. ПМГЕ з використанням процедури методу Гальоркіна розв'язуємо в області Ω_B крайову задачу з умовою Діріхле на межі Γ_C :

$$L_B u_B^k = f_B; \quad x \in \Gamma_C. \quad (52)$$

Знаходимо p_B^k – зусилля для $x \in \Gamma_C$. Тут L_B – оператор задачі теорії пружності.

Етап 3. В області Ω_F методами скінченних елементів та змінних параметрів пружності розв'язуємо нелінійну крайову задачу з заданою умовою Діріхле на спільній межі:

$$\tilde{L}_F u_F^k = f_F \quad u_F^k = u_B^k, \quad x \in \Gamma_C. \quad (53)$$

Знаходимо p_F^k для $x \in \Gamma_C$. Тут \tilde{L}_F – оператор задачі теорії пластичності на основі теорії малих пружно-пластичних деформацій;

Етап 4. Перевіряємо точність, якщо $\|p_B^k - p_F^k\| / \|p_B^k\| \leq \varepsilon$, то алгоритм завершено. Інакше, знаходимо на Γ_C : $r_k = -(p_F^k + p_B^k)$ і в області Ω_B методом граничних елементів розв'язуємо задачу

$$L_B u^{k+1/2} = 0, \text{ для } x \in \Omega_B, \quad u^{k+1/2} = 0, \text{ для } x \in \partial\Omega_B, \quad \frac{\partial u^{k+1/2}}{\partial n} = r_k, \text{ для } x \in \Gamma_C. \quad (54)$$

Знаходимо нове наближення для переміщення на спільній межі для області Γ_C :

$$u_B^{-k+1} = u_B^k + \beta u^{k+1/2}, \text{ для } x \in \Gamma_C, \quad (55)$$

тут β – параметр релаксації. Збільшуємо лічильник ітерацій на одиницю $k := k + 1$ і переходимо на **Етап 2**. Це схема типу Діріхле-Діріхле.

Отримана оцінка швидкості збіжності ітераційного процесу (55).

Для комбінованих гранично-скінченних апроксимацій запропоновано схему Діріхле-Неймана МДО. У цьому алгоритмі крайові задачі для областей Ω_B та Ω_F розв'язуються послідовно – відповідно методами ПМГЕ та МСЕ. Для області Ω_B на спільній межі S задаються умови Діріхле, а для області Ω_F – умови Неймана.

На основі альтернуючого методу Шварца для розв'язування задач осесиметричної теорії пружності запропонована чисельна схема, що базується на гібридних апроксимаціях НМГЕ та МСЕ.

У **п'ятому розділі** дисертації “Застосування комбінованих гетерогенних схем” розроблено паралельні схеми методу декомпозиції області для задач одностороннього контакту кількох пружних тіл, гомогенізовану модель з мікролокальними параметрами для багатошарових неоднорідних об'єктів з періодичною структурою, h -адаптивний алгоритм МСЕ на основі нового запропонованого оцінювача похибки, що базується на використанні ПМГЕ.

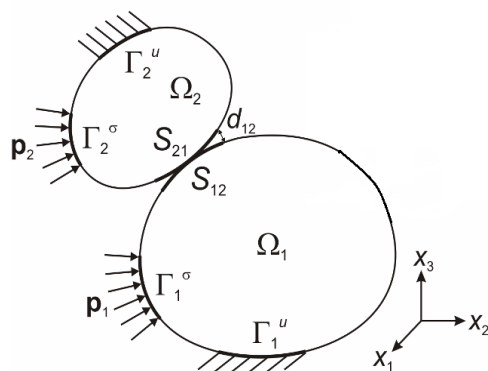


Рис.7. Схема контакту двох тіл

Розглянемо задачу про контакт N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset R^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$ (рис. 7). Будемо вважати, що $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$.

Для опису напружено-деформованого стану тіл використовуватимемо модель лінійної теорії пружності. Деформації виражаються через переміщення за співвідношеннями Коші, які для $x \in \Omega_\alpha$ подамо

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (56)$$

Напруження та деформації пов'язані законом Гука для $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$:

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k, l=1}^3 C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}), \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (57)$$

Вважаємо, що пружні сталі $C_{\alpha ijkl}$ – симетричні та задовольняють умови:

$$b_\alpha \sum_{i, j=1}^3 \varepsilon_{\alpha ij}^2 \leq \sum_{i, j, k, l=1}^3 C_{\alpha ijkl} \varepsilon_{\alpha ij} \varepsilon_{\alpha kl} \leq d_\alpha \sum_{k, l=1}^3 \varepsilon_{\alpha kl}^2, \quad 0 < b_\alpha \leq d_\alpha < \infty, \quad \alpha = \overline{1, N}. \quad (58)$$

У випадку неоднорідного тіла коефіцієнти $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$ залежать від координати тіла Ω_α .

Для кожного з тіл виконуються рівняння рівноваги:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (59)$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, 3}$, – компоненти вектора об'ємних сил $f_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 f_{\alpha i}(\mathbf{x}) e_i$, що діє на тіло Ω_α .

Вважаємо, що межа тіла Ω_α складається з частин Γ_α^u , Γ_α^σ та S_α , які не перетинаються: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, $\Gamma_\alpha^u \cap \Gamma_\alpha^\sigma \cap S_\alpha = \emptyset$, $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$, $S_\alpha \neq \emptyset$. Поверхня S_α відповідає зоні можливого одностороннього контакту тіла Ω_α з іншими тілами: $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta}$, $\bigcap_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} = \emptyset$, де $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ – зона можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β , $B_\alpha \subset \{1, \dots, N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α , $B_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha = \overline{1, N}$. Тоді $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ – частина поверхні тіла Ω_β , яка може контактувати з тілом Ω_α . На кожній із поверхонь Γ_α уведемо локальний ортонормований базис ξ_α , η_α , \mathbf{n}_α , де \mathbf{n}_α зовнішня нормаль до Γ_α . Запишемо вектор переміщень та напружень на них у цьому базисі:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\zeta} \xi_\alpha + u_{\alpha\eta} \eta_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\eta} \xi_\alpha + \sigma_{\alpha\eta} \eta_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha.$$

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задані кінематичні крайові умови, які, для спрощення, вважаємо нульовими:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad (60)$$

а на частині Γ_α^σ – статичні крайові умови:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad (61)$$

де $\mathbf{p}_\alpha = (p_{\alpha\xi}, p_{\alpha\eta}, p_{\alpha n})^T$ – задані граничні зусилля.

Позначимо відстань по нормалі між тілами Ω_α та Ω_β $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$ до деформації. Допускаємо, що у зонах можливого одностороннього контакту $S_{\alpha\beta}$, $\alpha = \overline{1, N}$, $\beta \in B_\alpha$ виконуються умови: нерозтягнення

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq 0; \quad (62)$$

відсутності тертя

$$\sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0; \quad (63)$$

взаємного непроникнення тіл

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}); \quad (64)$$

і умова контактної альтернативи

$$(u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}))\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (65)$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$, $\beta \in B_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$.

Система рівнянь (59) з крайовими умовами (60), (61) та умовами одностороннього контакту без тертя (62)-(65) складають замкнену систему рівнянь для визначення напружено-деформівного стану тіл, які контактують. Зазначимо, що задача одностороннього контакту (56)-(65) є нелінійною, оскільки істинні зони контакту є апіорі невідомими.

Вихідна контактна задача (56)-(65) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації на множині $K = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in V_0; u_{\alpha n} + u_{\beta n} \leq d_{\alpha\beta}, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \{\alpha, \beta\} \in Q\}$ квадратичного функціоналу Лагранжа

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}, \quad (66)$$

де $V_0 := V_1^0 \times \dots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T, u_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = \overline{1, N}\}$.

Визначимо в просторі V_0 білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0,$$

де $a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega$, $\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0$, $\alpha = \overline{1, N}$, і лінійну форму,

що рівна роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{v} \in V_0,$$

де $l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \text{Tr}_\alpha^0(\mathbf{v}_\alpha) dS + \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha d\Omega$, $\mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0$, $\alpha = \overline{1, N}$, $\mathbf{p}_\alpha \in (L_2(\Gamma_\alpha^\sigma))^3$,
 $\mathbf{f}_\alpha \in (L_2(\Omega_\alpha))^3$, $\alpha = \overline{1, N}$.

Доведено, що білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – симетрична, неперервна та коерцитивна у V_0

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \{ A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \}, \quad (67)$$

$$(\exists M > 0)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \{ |A(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0} \}, \quad (68)$$

$$(\exists B > 0)(\forall \mathbf{u} \in V_0) \{ A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq B \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2 \}, \quad (69)$$

а лінійна форма $L(\mathbf{v})$ – неперервна у V_0

$$(\exists S > 0)(\forall \mathbf{v} \in V_0) \{ |L(\mathbf{v})| \leq S \|\mathbf{v}\|_{V_0} \}. \quad (70)$$

Теорема 3. Якщо білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – симетрична, неперервна та коерцитивна у V_0 , а лінійна форма $L(\mathbf{v})$ – неперервна у V_0 та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, тоді задача мінімізації функціоналу $F(\mathbf{u})$ (66), який диференційовний за Гато на випуклій множині K , має єдиний розв'язок, а розв'язання задачі (66) еквівалентне розв'язуванню варіаційної нерівності на множині K :

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (71)$$

Для отримання задачі мінімізації у вихідному просторі V_0 застосуємо до задачі опуклої мінімізації (66) метод штрафу. Уведемо штраф за порушення умов не-проникнення (64) у такій формі

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- \right]^2 dS \quad (72)$$

де $\theta > 0$ – параметр штрафу, а $y^- = \min\{0, y\}$.

Розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0 :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (73)$$

Доведено, що якщо поверхні $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha, \beta\} \in Q$, є ліпшіцевими і $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, тоді функціонал $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – лінійний по \mathbf{v} і задовольняє властивостям неперервності та невід'ємності.

Теорема 4. Якщо виконуються умови (67)-(70) для білінійної форми $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, лінійної форми $L(\mathbf{v})$ і функціоналу $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, тоді існує єдиний розв'язок задачі мінімізації неквадратичного функціоналу (73) у просторі V_0 . Задача мінімізації функціоналу еквівалентна відшукуванню розв'язку нелінійного варіаційного рівняння:

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \mathbf{u} \in V_0.$$

Це варіаційне рівняння може бути подане у еквівалентній формі:

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle L, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\theta} \langle \Phi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \mathbf{u} \in V_0, \quad (74)$$

де $\langle Y, \mathbf{v} \rangle = Y(\mathbf{v})$, є дія функціоналу $Y \in V_0^*$ на елемент $\mathbf{u} \in V_0$, V_0^* – простір спряжений до V_0 , $\Phi = \Psi' : V_0 \rightarrow V_0^*$ є похідна Гато функціоналу $\Psi(u) = \theta J_\theta(u)$ і $\langle \Phi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \Psi'(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \theta J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Теорема 5. Якщо виконуються умови (67)-(70) для білінійної форми $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, лінійної форми $L(\mathbf{v})$ і функціоналу $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, а $\bar{\mathbf{u}} \in K$ – єдиний розв'язок варіаційної нерівності (71) і $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ єдиний розв'язок варіаційного рівняння зі штрафом (74) зі штрафним параметром $\theta > 0$, то $\bar{\mathbf{u}}_\theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \bar{\mathbf{u}}$ у просторі V_0 , тобто $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$.

Таким чином, використовуючи метод штрафу, розв'язування вихідної варіаційної нерівності (66) зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (74) у всьому просторі V_0 , розв'язок якого залежить від штрафного параметра $\theta > 0$. Також доведено існування єдиного розв'язку варіаційного рівняння зі штрафом і його сильну збіжність до розв'язку вихідної варіаційної нерівності (66), якщо параметр штрафу прямує до нуля.

Для чисельного розв'язку нелінійного варіаційного рівняння (74) використовується наступний ітераційний метод:

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k = 0, 1, \dots \quad (75)$$

де $G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v})$ є деяка білінійна форма задана в V_0 , де $u^k \in V_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ є k -те наближення точного розв'язку $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$, задачі (73), $u^0 \in V_0$ – початкове наближення, а $\gamma \in R$ – ітераційний параметр.

Доведено теорему про збіжність ітераційного процесу (75) і показано, що вона є лінійною. Отримано оцінки для наближеного розв'язку. У найзагальнішому випадку застосування ітераційного методу (75) до нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом (74) для контакту багатьох тіл не призводить до розбиття задачі на підзадачі по окремих підобластях. Тому запропоновано такі варіанти методів, які зводять розв'язування вихідної контактної задачі для багатьох тіл у Ω до розв'язування послідовності окремих задач для кожного із тіл Ω_α , $\alpha = \overline{1, N}$.

Виберемо білінійну форму G у ітераційному методі (75) у вигляді:

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (76)$$

де $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : V_0 \times V_0 \rightarrow R$ – білінійна форма, що визначається так:

$$X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}^1} (u_{\alpha n} v_{\alpha n} \psi_{\alpha\beta} + u_{\beta n} v_{\beta n} \psi_{\beta\alpha}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (77)$$

тут $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^1\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^1\}$ – характеристична функція заданих підобластей $S_{\alpha\beta}^1 \subseteq S_{\alpha\beta}$, з підмножини зон можливого контакту $S_{\alpha\beta}$, $\alpha = \overline{1, N}$,

$\beta \in B_\alpha$. Введемо позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \frac{1}{\gamma} [\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma)\mathbf{u}^k]$. Тоді ітераційний метод

(75) з білінійною формою (77) можна записати у вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (78)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (79)$$

Метод (78), (79) здійснює декомпозицію, тобто зводить розв'язування вихідної варіаційної задачі (74) до розв'язування послідовності простіших задач у підобластях Ω_α . Оскільки загальні характеристики підобластей відомі з попередньої ітерації, варіаційне рівняння (74) розпадається на N варіаційних рівнянь в окремих підобластях Ω_α . Таким чином, співвідношення (78), (79) можна записати у наступній еквівалентній формі:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- v_{\alpha n} dS, \quad (80)$$

для $\forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (81)$$

Формули (80)-(81) визначають паралельну схему Робіна-Робіна.

Ітераційний метод (75) має досить загальний характер. З нього, крім паралельної схеми методу декомпозиції типу Робіна-Робіна, ми можемо також отримати інші різні часткові ітераційні методи для розв'язування варіаційного рівняння зі штрафом для задач одностороннього контакту багатьох тіл, з яких отримуємо схеми, що не приводять до декомпозиції області.

Проведено чисельний аналіз запропонованої схеми методу декомпозиції області для плоскої задачі одностороннього контакту двох пружних тіл $\Omega_\alpha, \alpha = 1, 2$. Для відшукування розв'язку лінійної варіаційної задачі в підобластях використано МСЕ з лінійною та квадратичною апроксимацією на трикутних елементах. Якщо застосовуємо чисельні методи розв'язування в підобластях, тоді при збільшенні точності наближення в підобластях загальна кількість ітерацій зменшується.

У контактній задачі для двох трансверсально ізотропних пружних тіл проведено порівняння порядків швидкості збіжності різних схем МДО. Також досліджено залежності кількості ітерацій від параметра γ для задачі (рис. 8).

Зазначимо, що для цієї задачі переміщення $\mathbf{u}_\alpha, \alpha = 1, 2$ та безрозмірні напруження $\sigma_{\alpha ij}^* = \sigma_{\alpha ij} / E_1, i, j = 1, 2, \alpha = 1, 2$

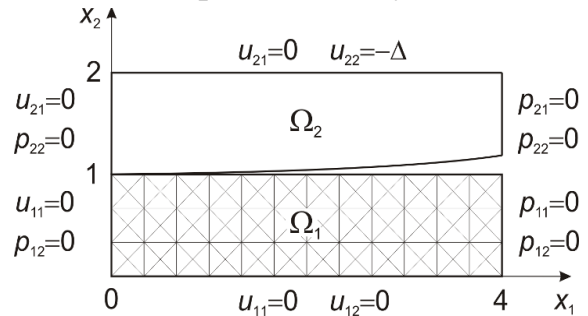


Рис. 8. Схема контакту та крайові умови для задачі

залежать лише від відношення модулів пружності E_1/E_2 .

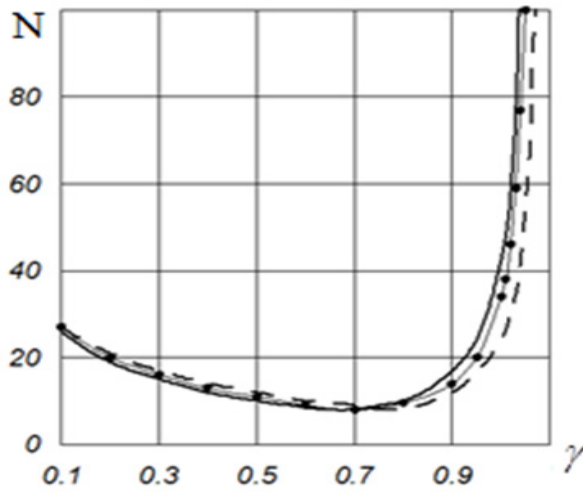


Рис. 9. Залежність числа ітерацій від γ

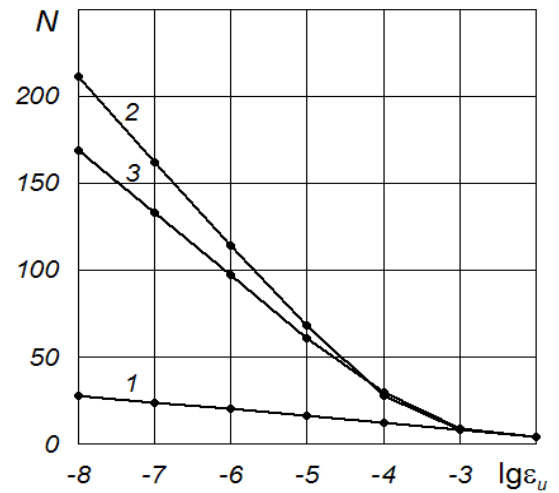


Рис. 10. Залежність числа ітерацій від $\lg \varepsilon_u$

На рис. 9 зображено графіки залежності загальної кількості ітерацій N нестационарного паралельного методу Діріхле від ітераційного параметра γ за точності $\varepsilon_u = 0,001$. Суцільна крива відповідає залежності при $E_1/E_2 = 1$, крива з кружечків – при $E_1/E_2 = 0,5$, а штрихова – при $E_1/E_2 = 0,25$.

Для випадків $E_1/E_2 = 1$ і $E_1/E_2 = 0,5$ оптимальне значення ітераційного параметра γ дорівнює $0,7$, а для випадку $E_1/E_2 = 0,25$ оптимальне значення γ – $0,75$. На рис. 10 показано залежність загальної кількості ітерацій N цього методу від логарифма відносної точності ε_u . Криві 1–3 відповідають таким відношенням E_1/E_2 : 1; 0,5; 0,25. Отже, можемо зробити висновок про лінійну швидкість збіжності паралельної схеми Діріхле. Зазначимо, що для малих параметрів штрафу θ , коли спостерігається нестійкість розв'язку з використанням лінійних апроксимацій, використання квадратичних апроксимацій покращує збіжність.

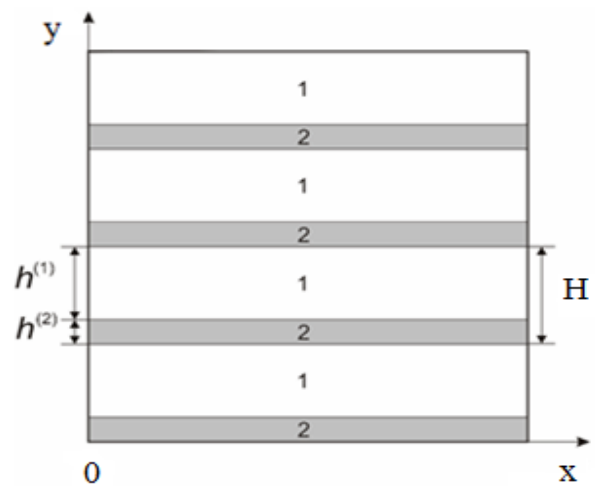


Рис. 11. Неоднорідний багат шаровий об'єкт

На основі теорії гомогенізації побудована математична модель, що описує процеси деформування у шаруватих композитних матеріалах (рис. 11). Систему рівнянь гомогенізованої моделі отримано з використанням співвідношень теорії пружності та деяких теорем нестандартного аналізу.

Рівняння рівноваги для трансверсально ізотропного об'єкта мають вигляд

$$A_1 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + A_5 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (A_3 + A_5) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} = 0, \quad (82)$$

$$A_5 \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + (A_3 + A_5) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{де } A_1 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} - \frac{[\lambda]}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}, \quad A_3 = \tilde{\lambda} - \frac{[\lambda]([\lambda] + 2[\mu])}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}, \quad A_4 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} - \frac{([\lambda] + 2[\mu])^2}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}},$$

$A_5 = \tilde{\mu} - \frac{[\mu]^2}{\hat{\mu}}$, $\tilde{\lambda}$, $[\lambda]$, $\hat{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $[\mu]$, $\hat{\mu}$ — усереднені параметри Ляме, які визначаються зі співвідношень:

$$\tilde{\lambda} = \eta \lambda_1 + (1 - \eta) \lambda_2, \quad [\lambda] = \eta (\lambda_1 - \lambda_2), \quad \hat{\lambda} = \eta \lambda_1 + \frac{\eta^2}{(1 - \eta)} \lambda_2, \quad (83)$$

$$\tilde{\mu} = \eta \mu_1 + (1 - \eta) \mu_2, \quad [\mu] = \eta (\mu_1 - \mu_2), \quad \hat{\mu} = \eta \mu_1 + \frac{\eta^2}{(1 - \eta)} \mu_2,$$

де $\eta = h^{(1)}/H$.

Компоненти напружень обчислюються за формулами:

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy} = A_3 \frac{\partial U_x}{\partial x} + A_4 \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy} = A_5 \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad \sigma_{xx}^{(k)} = \lambda_k \left(K_k \frac{\partial U_x}{\partial x} + M_k \frac{\partial U_y}{\partial y} \right),$$

$$\text{де } K_k = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\lambda_k} - h_k \frac{[\lambda]}{\lambda + 2\mu}, \quad M_k = 1 - h_k \frac{[\lambda] + 2[\mu]}{\lambda + 2\mu}, \quad k = 1, 2.$$

Достовірність розробленої схеми гомогенізації перевірено шляхом збіжності розв'язків вихідної та усередненої задач за малої товщини мегаблоку ($H \rightarrow 0$).

Матрицю фундаментальних розв'язків переміщень у випадковій ортотропного матеріалу можна подати:

$$G_{11}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{\alpha_1} A_2^2 \log(r_1) - \sqrt{\alpha_2} A_1^2 \log(r_2) \right], \quad G_{12}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \left[A_1 A_2 (\theta_2 - \theta_1) \right], \quad (84)$$

$$G_{21}(P, Q) = G_{12}(P, Q), \quad G_{22}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{A_2^2 \log(r_2)}{\sqrt{\alpha_2}} - \frac{A_1^2 \log(r_1)}{\sqrt{\alpha_1}} \right],$$

а матрицю фундаментальних розв'язків зусиль можна представити :

$$F_{11}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} \left(\frac{A_1}{\sqrt{\alpha_2} r_2^2} - \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_1} r_1^2} \right), \quad F_{12}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{M_1 A_2}{r_1^2} - \frac{M_2 A_1}{r_2^2} \right), \quad (85)$$

$$F_{21}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{M_1 A_1}{\alpha_1 r_1^2} - \frac{M_2 A_2}{\alpha_2 r_2^2} \right), \quad F_{22}(P, Q) = \frac{1}{\beta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} \left(\frac{A_1}{\sqrt{\alpha_1} r_1^2} - \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_2} r_2^2} \right).$$

де α_1, α_2 — дійсні додатні числа, $\mathbf{R} = Q - P$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(Q)$ — вектор одиничної нормалі в точці Q . Співвідношення (84), (85) є вихідними для отримання рівнянь прямого методу граничних елементів для цієї задачі.

Для апробації розробленої методики чисельного дослідження композиційних конструкцій наведено результати моделювання задачі про пластичну деформацію шаруватого композитного об'єкта з тріщиною (рис. 12). При дослідженні цієї задачі проведено порівняння використання МСЕ (1087 трикутних СЕ) та гібридних апроксимацій МСЕ та ПМГЕ. Зона пластичного течіння матеріалу локалізована в околі вістря тріщини. Тому використовуємо скінченноелементну модель теорії малих пружно-пластичних деформацій у підобластях, сусідніх зі зоною розташування тріщини, а у решті області – гомогенізовану модель з мікролокальними параметрами, яку чисельно досліджуємо ПМГЕ (220 трикутних СЕ і 90 лінійних ГЕ). Використовуємо ітераційну схему МДО Діріхле-Неймана. Запропонована гетерогенна чисельна модель дозволила значно зменшити використання комп'ютерних ресурсів при дослідженні розв'язків задачі.

В останньому підрозділі запропонований новий оцінювач для побудови h -адаптивної схеми МСЕ для задачі теорії пружності (1), (5), (8), (10), (11).

Нехай похибка при визначенні напружень МСЕ

$$e_{\sigma}^F = \sigma - \sigma_F^h, \quad (86)$$

а похибка при визначенні напружень ПМГЕ

$$e_{\sigma}^B = \sigma - \sigma_B^h, \quad (87)$$

тут введено позначення: σ – точне значення напружень, σ_F^h , σ_B^h – значення напружень знайдені МСЕ та ПМГЕ.

Для регулярного розбиття області Ω існують константи C_1 і C_2 , незалежні від h_F і h_B , для яких

$$C_1 h_F \leq h_B \leq C_2 h_F. \quad (88)$$

Зробивши таке допущення, далі використовуємо позначення h замість h_F або h_B . Для отримання апостеріорного оцінювача похибки скористалися допущенням насичення (saturation assumption), яке пов'язує значення наближених розв'язків на двох різних сітках. Якщо t , t_H , t_h – розв'язки задач теорії пружності: точний, на сітці з кроком H і з кроком h відповідно, то існує константа $\beta \in (0,1)$, яка не залежить від H і h , така що

$$\|t - t_h\| \leq \beta \|t - t_H\|. \quad (89)$$

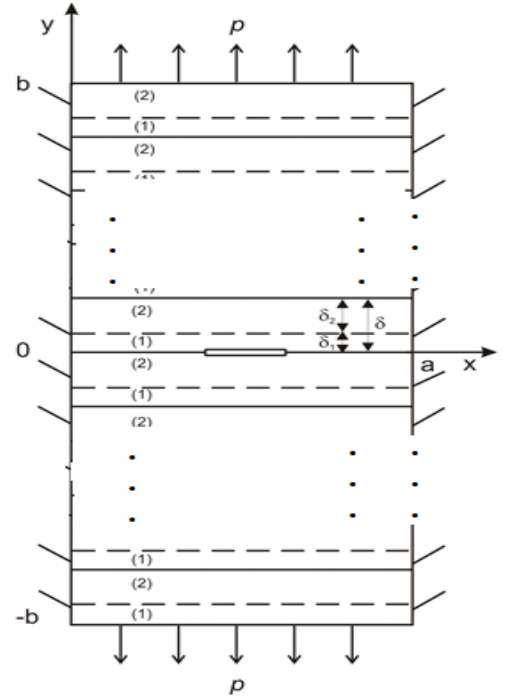


Рис. 12. Конструктивна схема задачі

Сформулюємо подібне допущення для результатів, отриманих МСЕ та ПМГЕ. Відомі результати чисельних експериментів, які показують, що допущення про насичення для ПМГЕ має місце.

За умов виконання (88) і (89) існує константа $0 < C < 1$ така, що:

$$\|\sigma - \sigma_B\| \leq C \|\sigma - \sigma_F\| \quad (90)$$

Еквівалентність похибки отриманої МСЕ та похибки на основі запропонованого підходу дає наступне формулювання.

Теорема 6. Якщо виконуються (89) і (90), тоді існують константи $\underline{c} > 0$ та $\bar{C} > 0$ такі, що має місце:

$$\underline{c} \|\sigma_B - \sigma_F\| \leq \|\sigma - \sigma_F\| \leq \bar{C} \|\sigma_B - \sigma_F\|. \quad (91)$$

Звідси отримуємо, що величина $\|\sigma_B - \sigma_F\|$ є оцінювачем похибки наближеного розв'язку МСЕ.

Для проведення адаптації сітки скінченних елементів для кожного елемента дискретизації K_e визначимо величину:

$$\eta_{FB}(K_e) = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_e} \|\sigma_B - \sigma_F\|^2 d\Omega_e / \|\Omega_e\|}}{\sqrt{\int_{\Omega} \|\sigma_B\|^2 d\Omega / \|\Omega\|}}. \quad (92)$$

Тут $\|\Omega_e\|$ та $\|\Omega\|$ – площі скінченного елемента та всієї області відповідно, а за норму вважаємо L_2 – норму $\|\sigma(\mathbf{x})\|_{L_2} = (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2)^{1/2}$.

Тоді глобальну похибку можна оцінити:

$$\eta_{FB} = \left(\sum_{K_e \in K} \eta_{FB}(K_e)^2 \right)^{1/2} \quad (93)$$

У загальному випадку точність обчислень визначається відносною похибкою, яка у термінах енергетичної норми має наступний вигляд:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|\mathbf{u}\|} \cdot 100\%. \quad (94)$$

У практичних задачах точний розв'язок \mathbf{u} невідомий, тому енергія деформації може бути подана як

$$\|\mathbf{u}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2, \quad (95)$$

де $\|\mathbf{u}_h\|^2$ – енергія деформації скінченноелементної апроксимації, а $\|\tilde{e}\|^2$ – похибка на біжучій сітці, тобто похибка, для оцінки якої використовується покращений розв'язок σ^* . Таким чином, відносна похибка η обчислюється за формулою:

$$\eta = \left(\frac{\|\tilde{e}\|^2}{\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2} \right)^{1/2}. \quad (96)$$

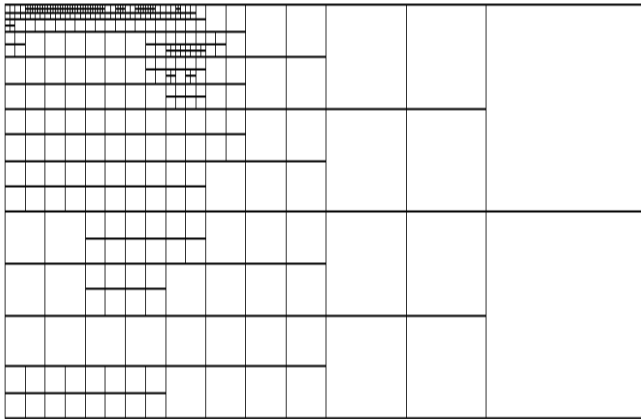


Рис. 13. h – адаптивна сітка МСЕ при рівномірному розподілі похибки

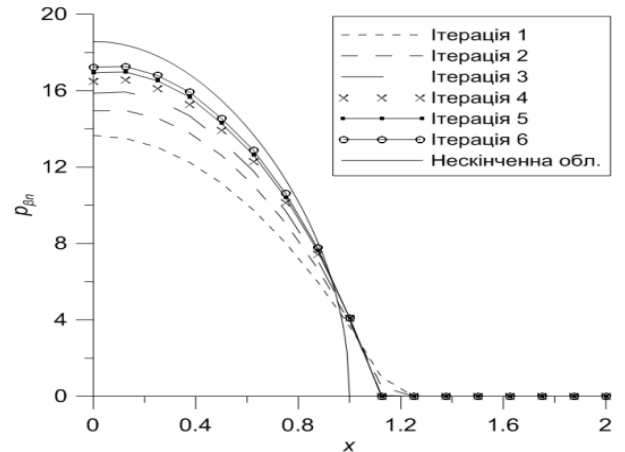


Рис. 14. Збіжність контактного тиску $-p_{\beta n}$ за ітераціями

На основі оцінювача (92) побудовано алгоритм адаптації сітки. При використанні сирендипових чотирикутних елементів у процесі подрібнення елементів дискретизації появляються “вісячі вузли”. Для усунення цієї проблеми у процесі адаптації використовували мортарні функції.

Як застосування h -адаптивної схеми МСЕ із запропонованим нами оцінювачем досліджувалась контактна задача теорії пружності, описана вище (рис. 8). На рис.13 наведено отримане адаптивне розбиття на шостій ітерації при $\eta_{FB} < 0,1$, а на рис.14 зображено процес збіжності контактного тиску до розв’язку контактної задачі для нескінченно довгих тіл.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є новим комплексним дослідженням, яке розв’язує важливу наукову проблему побудови та аналізу нових ефективних чисельних схем для задач математичної фізики, у якому розвинуто математичні моделі опису взаємодії силових і температурних полів для неоднорідних середовищ. Це складає вагомий внесок у розвиток гетерогенних чисельних схем і має важливе прикладне значення для розв’язання задач розрахунку та оптимізації в різних галузях машинобудування, приладобудування, аерокосмічній галузі, будівництві та біомеханіці. Проведені автором наукові дослідження та узагальнення на єдиній теоретичній основі та аналіз результатів обчислювальних експериментів дають підстави для таких висновків:

1. Побудовано гетерогенну математичну модель “пружне тіло-пластинка типу Тимошенка”. Для побудованої гетерогенної моделі доведено існування та єдність розв’язку варіаційної задачі. Побудована гетерогенна чисельна схема на основі ПМГЕ і МСЕ дослідження гетерогенної математичної моделі та одержані асимптотичні оцінки гетерогенних наближених розв’язків. Проведені обчислювальні експерименти підтверджують перспективність і обчислювальну ефектив-

ність запропонованої гетерогенної математичної моделі дослідження складних об'єктів і гетерогенної чисельної схеми.

2. Розроблена чисельна схема розв'язування задачі термопружності ПМГЕ на основі використання методу Гальоркіна та спеціальної методики зведення інтегралів по області дослідження задачі до поверхневих. При цьому для дослідження задачі нестационарної теплопровідності побудована схема ПМГЕ з використанням фундаментальних розв'язків, залежних від часу та координат і методу колокацій. Розроблені та досліджені спеціальні методики дискретизації за часовою координатою та врахування ненульової початкової температури.

3. Для дослідження динамічних процесів для осесиметричних просторових об'єктів побудована гетерогенна чисельна схема МСЕ з використанням ізопараметричних апроксимацій різних порядків на сирендипових чотирикутниках меридіонального перетину та тригонометричних функцій за кутовою координатою. Розроблено підхід визначення власних частот і форм анізотропних осесиметричних тіл з використанням методу ітерацій у підпросторі. Побудована чисельна схема розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку на основі методу розкладу за власними функціями. Проведені обчислювальні експерименти дослідження алгоритмів знаходження частот вільних коливань і власних форм анізотропних циліндрів і просторової динамічної задачі теорії пружності.

4. Побудована на основі МЗПП та МДО гетерогенна чисельна схема розв'язування задачі теорії малих пружно-пластичних деформацій. Розроблений лінійний ітераційний алгоритм МДО розв'язання задачі теорії пружності з використанням МСЕ та ПМГЕ. Отримана оцінка швидкості збіжності запропонованого підходу. Досліджена гетерогенна чисельна схема НМГЕ та МСЕ на основі альтернуючого методу Шварца розв'язування задачі теорії пружності. Розроблено модифікований ітераційний алгоритм методу Шварца та проведено чисельний аналіз його ефективності.

5. Запропоновано клас паралельних схем Робіна-Робіна МДО, які базуються на методі штрафу для розв'язування задач одностороннього контакту теорії пружності для багатьох тіл. Розроблено математичне обґрунтування збіжності, стійкості та швидкості збіжності МДО. Побудовані схеми декомпозиції області дозволяють організувати паралельні обчислення та застосовувати гетерогенні математичні моделі для кожної з підобластей. Проведені обчислювальні експерименти підтверджують отримані теоретичні результати про збіжність цих схем декомпозиції області.

6. На основі теорії гомогенізації побудована математична модель, що описує процеси деформування в шаруватих композитних матеріалах і на основі розробленої гетерогенної чисельної схеми ПМГЕ для анізотропних тіл і МСЕ досліджено її чисельну ефективність для пластичної поведінки композита та контактних задач.

7. Запропоновано і побудовано h -адаптивний алгоритм МСЕ розв'язування задачі теорії пружності з використанням оригінального оцінювача постпроцесор-

ного типу, що будується на основі гетерогенного підходу. Проведені теоретичні дослідження оцінювача та чисельна ефективність розроблених схем. Дослідження обчислювальної ефективності підтверджує його перспективність.

Отже, практична цінність роботи полягає у розробці обчислювальних методів на основі комбінування методів скінченних і граничних елементів і її апробації на інженерних задачах проектування силових напівпровідникових приладів, елементів фотоприймачів, розрахунку композитів і задач біомеханіки.

Узагальнені результати щодо вибору математичних моделей і чисельних методів для розв'язування задач математичної фізики для гетерогенних середовищ є вагомим теоретичним результатом, а відтак їх можна використати у навчальному процесі при підготовці курсів “математичне моделювання”, “чисельні методи математичної фізики”, “адаптивні чисельні методи та їх реалізації” тощо.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Савула Я. Г., Дубовик А. В., Дыяк И. И. Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций. *Прикл. механика*. 1989. Т. 25, № 9. С. 62-67.
2. Дыяк І. І., Шарманський Б. Я., Шинкаренко Г. А. Чисельне дослідження регуляризованої задачі оптимального керування нестационарним нагрівом. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1992. Вип. 37. С. 49-55.
3. Головач Н. П., Дыяк І. І. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1993. Вип. 39. С. 46-52.
4. Григоренко А. Я., Дыяк И. И. Решение пространственных задач о свободных колебаниях осесимметричных тел. *Прикладная механика*. 1994. Т. 30, № 5. С. 19-23.
5. Савула Я. Г., Дыяк І. І., Паук Н. П. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двовимірної задачі теорії пружності. *Доповіді НАН України*. 1995. № 5. С. 49-52.
6. Дыяк І. І., Марчук Ю. Б. Застосування ітераційних методів для дослідження комбінованих схем методів скінченних і граничних елементів. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1995. Вип. 41. С. 43-48.
7. Дыяк І. І. Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1996. Вип. 44. С. 102-107.
8. Макар В. М., Дыяк І. І. Чисельне дослідження динамічної задачі теорії пружності для анізотропних тіл. *Волинський математичний вісник*. 1996. Вип. 2. С. 70-72.
9. Дыяк І. І. Чисельне дослідження плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1997. Т. 40, № 3. С. 60-64.

10. Дияк І. І., Кухарчук Ю. А., Сулим Г. Т. Дослідження пружної рівноваги плоских тіл непрямим методом граничних елементів. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1997. Вип. 47. С. 87-95.
11. Dyuyak I., Savula Ya. D-adaptive mathematical model of solid body with thin coating. *Математичні студії.* 1997. Т. 7, № 1. С. 103-110.
12. Дияк І. І. Адаптивний алгоритм для задачі теорії пружності на основі гібридних апроксимацій. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1998. Вип. 50. С. 78-81.
13. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Макара В. М. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел. *Прикладная механика.* 1998. Т. 43(44), № 5. С. 24-31.
14. Дияк І. І. Комбінована чисельна схема для дослідження задач пластичності. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1999. Вип. 52. С. 36-42.
15. Головач Н. П., Дияк І. І. Метод декомпозиції області та комбінований скінченно-гранично-елементний аналіз пружності. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2000. № 1. С. 115-117.
16. Дияк І. І., Тучапський Р. Чисельне дослідження задачі осесиметричної теорії пружності адаптивним непрямим методом граничних елементів. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2000. Вип. 2. С. 110-115.
17. Дияк І. І., Дудаш О. І. Застосування гетерогенних чисельних схем для дослідження задач теорії пластичності. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2000. Вип. 1. С. 39-45.
18. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Макара В. М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров. *Прикладная механика.* 2001. Т. 37(47), № 5. С. 74-84.
19. Дияк І. І., Березюк Т. Б. Гібридні скінченно-гранично-елементні апроксимації задач теорії пружності на основі методу декомпозиції області. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2002. Вип. 5. С. 75-82.
20. Влайков Г. Г., Григоренко О. Я., Дияк І. І. Дослідження власних коливань порожнистих анизотропних циліндрів скінченної довжини на основі різних чисельних підходів. *Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки.* 2002. Т. 2. С. 113-117.
21. Березюк Т. Б., Григоренко А. Я., Дьяк И. И. Решение задачи о напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций. *Прикладная механика.* 2003. Т. 39, № 10. С. 69-74.
22. Дияк І. І., Макара І. Г., Ящук Ю. О. Побудова та дослідження чисельних розв'язків задач теорії пружності на основі h-адаптивних апроксимацій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* Кам.-Подільськ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. 2010. Вип. 4. С. 76-85.
23. Савула Я. Г., Дияк І. І., Дудаш О. І. Гетерогенна чисельна схема методу декомпозиції області для дослідження задач пластичності. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 43, № 3. С. 85-90.
24. Дияк І. І., Кухарська Н. П. Числовий аналіз задач теплопровідності прямим методом граничних елементів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2005. Т. 48, № 3. С. 157-161.

25. Дьяк І. І., Макар І., Прокопишин І. Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій задач теорії пружності на основі методу декомпозиції області. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2006. Вип. 12. С. 93-100.
26. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Прокопышин И. И. Метод декомпозиции области для задач теории упругости с использованием гибридных аппроксимаций. *Прикладная механика.* 2008. Т. 44, № 11. С. 18-29.
27. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Матысяк С. И., Прокопышин И. И. Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел. *Прикладная механика.* 2008. Т. 46, № 4. С. 25-37.
28. Дьяк І. І., Прокопишин І. І. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя кількох пружних тіл. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2009. Т. 52, № 3. С. 78-89.
29. Дьяк І. І., Прокопишин І. І., Мартиняк Р. М. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2013. № 1. С. 46-55.
30. Дьяк І. І., Стягар А., Савула Я. Г. Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіл з тонким включенням методом декомпозиції області. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2014. Вип. 57, №3. С. 119–131.
31. Savula Ya. H., Dyyak I. I. D-adaptive model for the elasticity problem. *Computer Assisted Mechanics & Engineering Sciences.* 1998. Vol. 5, No 1. P. 65-74.
32. Savula Ya., Mang H., Dyyak I., Pauk N. Coupled boundary and finite element analysis of a special class of 2D problems of the theory of elasticity. *Comput. & Struct.* 2000. Vol. 75, No. 2. P. 157-165.
33. Savula Y. H., Dyyak I. I., Krevs V. V. Heterogeneous Mathematical Models in Numerical Analysis of Structures. *Int. Journ. Computers & Mathematics with applications.* 2001. 42. P. 1201-1216.
34. Dyyak I. I., Savula Y. H., Shahin M. Investigation of the Heterogeneous Problems of the Elasticity with Coupled Boundary-Finite Element Schemes. *Advances in Applied and Computational Mathematics* / Ed. F. Liu, Z. Nashed et al. Nova Science Publishers Inc., 2006. P. 47-62.
35. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. Domain Decomposition Schemes for Frictionless Multibody Contact Problems of Elasticity. *Numerical Mathematics and Advanced Applications* / Ed. G. Kreiss et al., 2009. P. 295-303.
36. Dyyak I. I., Yashchuk Yu. Investigation of stress error estimator in elasticity problems. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences* / Ed. N. N. Kizilova, G. N. Zholtkevych. Kharkov: Publishing house PPBVirovec'A.P., 2011. P. 33-43.
37. Dyyak I. I., Savula Ya., Styahar A. Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition. *Journal of Numerical & Applied Mathematics.* 2012. № 3 (109). P. 23-33.
38. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin-Robin Domain Decomposition Schemes for Contact Problems of Nonlinear

- Elasticity. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* / Ed. R. E. Bank, M. Holst, O. B. Widlund, J. Xu. Springer, 2013. P. 647-654.
39. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Domain Decomposition Methods for Problems of Unilateral Contact Between Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Covers. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* / Ed. J. Erhel, M. J. Gander et al. Springer Int. Publ. Switzerland, 2014. P. 739-748.
 40. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Yashchuk Yu. O. A Combined Algorithm of Decomposition of a Domain and h-Adaptation for the Solution of Contact Problems of Elasticity Theory. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 174, No. 4. P. 101-117.
 41. Савула Я. Г., Дыяк И. И., Муха И. С., Сыпа И. М. Численный анализ задачи квазистатической термоупругости для объектов сложной геометрии. *Математические модели, методы решения и оптимальное проектирование гибких пластин и оболочек*: межвуз. науч. сб. Саратов, 1988. С. 24-26.
 42. Дыяк И. И., Муха И. С., Сыпа И. М. Численное решение задач квазистатической термоупругости составных оболочек с разными срединными поверхностями. *Влияние технологии изготовления на деформирование и разрушение конструкций из композитных материалов*. Москва : Изд-во МАТИ, 1989. С. 61-65.
 43. Дыяк И. И. Численный расчет свободных колебаний пространственных осесимметричных тел. *Динамические задачи механики сплошной среды. Теоретические и прикладные вопросы просвечивания Земли*: м-лы регион. конф. Краснодар : Изд-во КубГУ, 1992. С. 59-63.
 44. Dyyak I. I., Makar V. M., Grigorenko O. Ya. The solution of 3D dynamic problems for anisotropic cylindrical bodies: semi-analytical finite element approach. *2nd European Conference on Computational Mechanics: Proceedings*, Kraców, Poland, June 26-29, 2001. Kraców, 2001. On CD-ROM. P. 150-151.
 45. Dyyak I., Grigorenko O., Makar V. Free vibrations of finite composite cylinders. *15th. International Conference on Computer Methods in Mechanics: Proceed. of the CMM-2003*, Kraców, Poland, June 3-6, 2003. Gliwice, 2003. On CD-ROM. 5p.
 46. Дыяк І. І. Дослідження комбінованої чисельної схеми для задач теорії пружності. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: зб. Львів, 2003. С.202-203.
 47. Гаджук И. В., Дыяк И. И., Савула Я. Г. Расчетно-экспериментальный подход к определению остаточных напряжений в сварных соединениях. *Проблемы прочности*. 1990. Вып. 3. С. 91-94.
 48. Дыяк И. И., Миколайчук А. Г., Третьяков Ю. В. Теплофизические свойства тонких пленок материалов. *Инженерно-физический журнал*. 1990. Т. 51, № 1. С. 130-135.
 49. Савула Я. Г., Дыяк І. І., Дубовик А. В., Коссак О. С., Муха І. С. Static and Dynamic Analysis of Structures on the Basis of Combined Models. Львів: 1994. 31 с. (Препринт / НАН України, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 94-6).
 50. Савула Я. Г., Дыяк І. І., Макар В. М. Багатокритеріальна оптимізація термонапружень у напівпровідникових приладах. *Вісник Державного ун-ту "Львів-*

- ська політехніка”. Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика. 1996. № 313. С. 9-15.
51. Макар В. М., Дияк І. І. Математичне моделювання задач динаміки для тиристора. *Технічні вісті*. 1999. № 1(8). С. 128-129.
 52. Дияк І. І., Дудаш О. І. Комбінована схема числового дослідження задачі термопластичності. *Машинознавство*. 2000. № 3. С. 9-13.
 53. Дияк І. І., Макар В., Тоцький О. Моделювання та розрахунок механічних коливань напівпровідникових приладів. *Теоретична електротехніка*. 2000. Вип. 55. С. 132-139.
 54. Дияк І. І., Макар І. Г. Обчислення гіперсингулярних інтегралів у реалізаціях числових алгоритмів розв’язування задач математичної фізики. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2007. Вип. 5. С. 98-108.
 55. Дияк І. І., Прокопишин І. І., Матисяк С. Скінченно-гранично-елементна схема методу декомпозиції області для плоских задач теорії пружності з несумісними розбиттями підобластей. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2008. Вип. 7. С. 40-51.
 56. Дияк І. І., Копитко М. Ф., Коркуна А. М. Комп’ютерне моделювання напружено-деформованого стану просторових конструкцій. *Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”*. 2009. № 650. С. 227-235.
 57. Дияк І. І., Макар І. Г. Комп’ютерне моделювання локально нелінійних задач на основі методу декомпозиції області. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2009. Вип. 9. С. 55-66.
 58. Дияк І. І., Заяць М. В., Макар І. Г. Чисельна реалізація однорівневого МСЕРЗ (FETI) методу для плоскої задачі теорії пружності. *Відбір і обробка інформації*. 2010. Вип. 32(108). С. 50-55.
 59. Дияк І. І., Копитко М. Ф., Коркуна А. М. Дослідження напружено-деформованого стану біомеханічної системи «коронка-циліндричний імплантат-кістка» на основі осесиметричної моделі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2010. Вип. 12. С. 78-87.
 60. Дияк І., Савула Я., Ящук Ю. Побудова h-адаптивних схем методу скінченних елементів для задач теорії пружності. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2011. Вип. 13. С. 60-66.
 61. Дияк І. І. Пропедевтика прикладного програмування. Київ : ІСДО, 1994. 176 с.

АНОТАЦІЯ

Дияк І. І. Чисельне моделювання деформаційних процесів на основі поєднання методів скінченних і граничних елементів. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 2017.

Дисертація стосується побудови та дослідження об’єднаних гібридних чисельних схем методів скінченних (МСЕ) і граничних елементів для задач ма-

тематичної фізики. Чисельні схеми комбінування МСЕ та прямого методу граничних елементів побудовані та досліджені для математично гетерогенної задачі “пружне тіло – пластинка типу Тимошенка” і для фізично гетерогенної задачі з локальними зонами пружнопластичних деформацій. Розроблені, досліджені алгоритми напіваналітичного МСЕ, прямого та непрямого методів граничних елементів (НМГЕ) на основі методу Гальоркіна для задач теорії пружності, квазістатичної термопружності та динамічної теорії пружності. З використанням методу Шварца розроблена та досліджена гетерогенна схема МСЕ та НМГЕ. На основі методу декомпозиції області побудовані та досліджені гетерогенні чисельні схеми для контактних задач без тертя та розрахунку конструкцій з композитних матеріалів з використанням теорії гомогенізації. Запропоновано та реалізовано новий оцінювач похибки h – адаптивної схеми МСЕ для задач теорії пружності. Результати проведених обчислювальних експериментів з використанням розробленого програмного забезпечення підтверджують одержані теоретичні оцінки.

Ключові слова: метод скінченних елементів, прямий метод граничних елементів, непрямий метод граничних елементів, метод Гальоркіна, гетерогенна математична модель, гетерогенна чисельна схема, гетерогенна фізична модель, квазістатична термопружність, динамічна задача теорії пружності, метод розкладу за власними функціями, метод змінних параметрів пружності, метод декомпозиції області, оцінювач похибки.

АННОТАЦІЯ

Дыяк И. И. Численное моделирование деформационных процессов на основе объединения методов конечных и граничных элементов. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт прикладных проблем механики и математики имени Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2017.

Диссертация посвящена построению и исследованию объединенных гибридных численных схем методов конечных (МКЭ) и граничных элементов для задач математической физики. Численные схемы комбинирования МКЭ и прямого метода граничных элементов построены и исследованы для математической гетерогенной задачи “упругое тело-пластинка типа Тимошенко” и для физически гетерогенной задачи с локальными зонами упруго-пластических деформаций. Разработаны, исследованы алгоритмы полуаналитического МКЭ, прямого и непрямого методов граничных элементов (НМГЭ) на основе метода Галеркина для задач теории упругости, квазистатической термоупругости и динамической теории упругости. С использованием метода Шварца разработана и исследована гетерогенная схема МКЭ и НМГЭ. На основе метода декомпозиции области построены и исследованы гетерогенные численные схемы для контактных задач без трения и расчета конструкций из композитных материалов с использованием теории гомогенизации. Предложен и реализован новый

оценитель погрешности адаптивной схемы МКЭ для задач теории упругости. Результаты проведенных вычислительных экспериментов с использованием разработанного программного обеспечения подтверждают полученные теоретические оценки.

Ключевые слова: метод конечных элементов, прямой метод граничных элементов, непрямой метод граничных элементов, метод Галеркина, гетерогенная математическая модель, гетерогенная численная схема, гетерогенная физическая модель, квазистатическая термоупругость, динамическая задача теории упругости, метод разложения по собственным функциям, метод переменных параметров упругости, метод декомпозиции области, оценитель погрешности.

ABSTRACT

Dyyak I. I. Numerical modeling of deformation processes on the basis of combining finite and boundary elements methods. – Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.05.02 “Mathematical Modeling and Computational Methods”. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2017.

The thesis is dedicated to the designing and investigation of combined hybrid numerical schemes of finite and boundary element methods for problems of mathematical physics. Numerical schemes of combining FEM and DBEM were designed and investigated for the mathematical heterogeneous “elastic body – Timoshenko’s plate” and for a physically heterogeneous problem with local zones of elastoplastic deformations. The algorithm for the direct boundary element method (DBEM) using the collocation method for the nonstationary heat conduction problem is developed. The solution of the problem of quasi-static thermoelasticity of DBEM by the Galerkin method is constructed with the use of a special procedure for calculating hypersingular integrals. A semi-analytical version of the FEM for the problems of the dynamic theory of the elasticity of spatial axisymmetric objects based on the eigenfunction expansion method have been developed and investigated. Using the Schwartz method, a heterogeneous scheme of FEM and UBEM was developed and investigated. Based on the DDM, heterogeneous numerical schemes for contact problems without friction and computational designs using homogenization theory have been suggested and investigated. A new error estimator of the adaptive FEM scheme for elasticity theory problems is proposed and implemented. The results of the computational experiments using the developed software confirm the theoretical estimates obtained.

Keywords: finite element method, direct boundary element method, indirect boundary element method, Galerkin method, heterogeneous mathematical model, heterogeneous numerical scheme, heterogeneous physical model, quasi-static thermoelasticity, dynamic elasticity problem, eigenfunction expansion method, variable elasticity method, domain decomposition method, error estimator.

Підписано до друку 28.09.2017 р.
Формат 60×84/16.
Папір друкарський. Ум. друк. арк. 1,9.
Зам. № 225. Наклад 100 пр.

Видавництво «ПАІС»
Реєстраційне свідоцтво ДК № 3173 від 23 квітня 2008 р.
вул. Гребінки 5, оф. 1, м. Львів, 79007
тел.: (032) 255-49-00, (032) 261-24-15
e-mail: pais@mail.lviv.ua; <http://www.pais.com.ua>