

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

КАЛИНЯК
Богдан Миколайович

УДК 539.3

**АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ,
ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ЦІЛЬОВІ ТЕРМОНАПРУЖЕНІ СТАНИ У
НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 2023

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Лобода Володимир Васильович,
Дніпровський національний університет імені
Олеса Гончара, завідувач кафедри теоретичної
і прикладної механіки

доктор фізико-математичних наук, професор
Мусій Роман Степанович,
Національний університет «Львівська
політехніка», професор кафедри вищої
математики

доктор фізико-математичних наук, професор
Піскозуб Йосиф Збігнєвич,
Українська академія друкарства, завідувач
кафедри прикладної математики і фізики

Захист відбудеться “ 21 ” грудня 2023 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б та на Інтернет-сторінці ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ <http://iapmm.lviv.ua/zakhyst.html>.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор

Михайло АНДРІЙЧУК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Побудова адекватних моделей та розвиток ефективних методів дослідження пружної поведінки деформівних твердих тіл передбачає врахування широких спектрів властивостей матеріалів та можливості їх зміни в процесі експлуатації. У зв'язку з цим постає необхідність урахування залежностей пружних та теплофізичних властивостей матеріалів від просторових координат, що призводить до необхідності розвитку моделей неоднорідних тіл та методів розв'язування сформульованих на їх основі неklasичних задач механіки деформівного твердого тіла. З кінця ХХ століття інтенсивно досліджують функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – клас композитних матеріалів з технологічно обумовленою неперервною неоднорідністю їх фізико-механічних характеристик. Такі матеріали широко застосовують в авіакосмічній галузі, будівництві, біоінженерії, електротехніці та ін. для виготовлення складних конструктивних елементів, які зазнають впливу різних фізичних полів та мають зберігати функціональність за великих перепадів навантажень різної природи. Крім того, слід враховувати технологічні обмеження процесів виготовлення матеріалів такого класу для конкретних застосувань. Тому дедалі важливішим стає виготовлення і дослідження неоднорідних матеріалів з урахуванням конкретних вимог щодо енергозатрат, технологій виготовлення та цільових умов їх експлуатації з прогнозованим розподілом термонапружень в елементах конструкцій, зокрема їх відсутністю за дії окремих факторів навантажень. Актуальність таких досліджень також обумовлена:

- недостатнім вивченням впливу невеликих порівняно з межею міцності термосилових навантажень, які, однак, мають тенденцію деструктивного впливу на фізико-механічні характеристики матеріалів, зокрема, за рахунок взаємодії елементів конструкцій з агресивним середовищем і знижують термін їх експлуатації;
- потребою розроблення методів проєктування матеріалів для їх тривалої експлуатації в елементах конструкцій в умовах термосилових навантажень з використанням напрацьованих технологій виготовлення ФГМ;
- потребою розвитку існуючих достовірних моделей опису напружено-деформованих станів неоднорідних тіл для визначення температурних полів, які забезпечують задані розподіли напружень, зокрема, їх відсутність за дії окремих факторів навантажень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження виконано в межах науково-дослідних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: «Моделі та методи прямих і обернених задач для дослідження фізико-механічних процесів у неоднорідних шаруватих структурах із залишковими деформаціями та дефектами» (№ держреєстрації 0106U000592, 2006–2009 рр.), «Прямі та обернені задачі теплопровідності і термопружності шаруватих середовищ і композитних конструкцій» (№ держреєстрації 0108U006250, 2008–2009 рр.), «Математичні моделі та методи дослідження

напруженого стану неоднорідних тіл та тіл з покриттями за дії силових і теплових навантажень та наявності дефектів і залишкових деформацій» (№ держреєстрації 0109U008764, 2010–2013 рр.), «Моделювання та оптимізація термомеханічної поведінки структурно неоднорідних тіл за сталого та змінного навантаження» (№ держреєстрації 0113U007685, 2014–2018 рр.), «Моделі і розвиток методів розрахунку та оптимізації напруженого стану і дослідження граничної рівноваги неоднорідних тіл з дефектами» (№ держреєстрації 0119U100672, 2019 – 2023 рр.).

Метою роботи є розвиток математичних моделей та методів визначення й аналізу напружено-деформованого стану неоднорідних пружних тіл для встановлення фізично обґрунтованих способів теплового навантаження і критеріїв вибору пружних та теплофізичних характеристик матеріалів для забезпечення температурних полів, які з урахуванням відповідних умов силового навантаження чи закріплення спричиняють бажаний розподіл термонапружень у неоднорідних елементах конструкцій, зокрема їх відсутність.

Для досягнення мети роботи розв'язано такі завдання:

- побудовано інтегральні рівняння другого роду у довільній криволінійній ортогональній системі координат із застосуванням тензорного формалізму для визначення напружено-деформованих станів неоднорідних пружних тіл, викликаних дією додаткових стаціонарних або нестаціонарних полів,;

- на цій основі сформульовано і розв'язано аналітичними і аналітично-числовими методами задачі визначення температурних полів через термомеханічні характеристики матеріалу та силові навантаження для забезпечення цільових розподілів напружень, зокрема, їх відсутності. Визначено умови існування заданих напружено-деформованих станів у неоднорідних тілах;

- для оцінки заданих розподілів термонапружень у неоднорідних тілах розроблено наближені аналітичні методи розв'язування запропонованих інтегральних рівнянь для визначення напружено-деформованого стану одношарових та багатошарових неоднорідних і термочутливих у кожному шарі тіл;

- з урахуванням умов нагрівання та можливостей використання сучасних технологій для створення ФГМ із заданими характеристиками запропоновано умови та способи реалізації температурних полів, які не викликають напружень в неоднорідних тілах.

Об'єкт дослідження: неоднорідні тіла простої форми (шар, циліндр, куля, брус), виготовлені з шаруватих композитів та ФГМ, які зазнають дії зовнішніх теплових та силових навантажень.

Предмет дослідження: поля температури, напружень, переміщень, деформацій; теплові та силові навантаження; координатні залежності характеристик матеріалів неоднорідних тіл для досягнення бажаного напружено-деформованого стану.

Методи дослідження. Використано лінійну теорію незв'язаної термопружності. Застосовано тензорний формалізм для розвитку моделей термопружності, дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних тіл

та встановлення температурних полів, які не спричиняють напружень або забезпечують задану їх залежність від координати. Відповідні задачі термопружності зведено до інтегральних рівнянь другого роду стосовно довільно вибраних визначальних компонент тензора напружень. Для отримання наближених аналітичних розв'язків інтегральних рівнянь використано метод квадратур. Застосовано наближені та точні підходи до розв'язування поставлених задач, аналітичні та числові методи розв'язування інтегральних рівнянь, нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, адекватні моделі подання характеристик ФГМ через характеристики їх складових.

Наукова новизна одержаних результатів:

- розвинуто математичні моделі теорії термопружності на основі інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду для встановлення умов забезпечення заданого розподілу термонапружень, зокрема, їх відсутності, у неоднорідних тілах з урахуванням залежності характеристик матеріалів від однієї та двох координат;
- сформульовано клас обернених задач про визначення температурних полів, які спричиняють прогнозований розподіл компоненти тензора напружень;
- запропоновано умови відсутності напружень у неоднорідних тілах при відповідних теплових полях та обґрунтовано способи їх забезпечення;
- отримано точні аналітичні розв'язки поставлених обернених задач для двокомпонентних ФГМ, характеристики яких описано моделлю простої суміші;
- побудовано і досліджено розв'язки задач термопружності стосовно забезпечення відсутності термонапружень у неоднорідних тілах на основі запропонованих методик та алгоритмів.

Вірогідність основних наукових положень та отриманих результатів забезпечується використанням апробованих математичних моделей визначення напружено-деформованого стану у неоднорідних тілах, спричиненого додатковими полями, математичною постановкою задач і використанням математичних методів для отримання основних рівнянь, достатньою верифікацією отриманих результатів, відповідністю висновків та результатів фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи можна використати для проєктування матеріалів і конструкцій, які працюють в умовах перепаду температур, з метою збільшення терміну їх експлуатації, зменшення енергозатрат для їх виготовлення, тестування результатів розрахунків напружено-деформованого стану тіл, властивості яких описано різними моделями гомогенізації ФГМ, для перевірки адекватності цих моделей в широких діапазонах температур. Окремі теоретичні і прикладні результати, викладені в дисертації, були отримані під час виконання низки госпдоговорів.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на Міжнародних наукових конференціях з механі-

ки неоднорідних структур (Львів, 2006, 2010, 2014, 2019, 2021); International Congress on Thermal Stresses (Відень, Австрія, 2005; Тайпей, Тайвань, 2007); 35th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006), Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2008, 2013, 2018), WCCM 8 – ECCOMAS 2008 (Венеція, Італія, 2008), «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» (Львів, 2009), 16th International Conference on Mechanics of Composite Materials (Рига, Латвія, 2010), Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2015, 2017, 2019), International V. Skorobahatko Mathematical Conference (Дрогобич, 2015), Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016), Міжнародних науково-технічних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2016, 2018), Міжнародній конференції «Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу» (Дніпро, 2016), Другій міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (Дніпро, 2019).

У повному обсязі робота доповідалася на семінарах відділу механіки деформівного твердого тіла, об'єднаному семінарі відділів механіки деформівного твердого тіла та термомеханіки, кваліфікаційному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України, спільному засіданні комісій механіки і матеріалознавства Наукового товариства імені Шевченка, наукових семінарах кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, кафедри теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова, кафедри теоретичної і комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації опубліковані у 55 наукових працях, в тому числі у 25 статтях у журналах і збірниках, які відповідають вимогам ДАК України до фахових видань. Десять статей прореферовані у міжнародних наукометричних базах Scopus і Web of Science. Самостійно опубліковано 11 статей і 14 тез. У працях, опублікованих у співавторстві, автору належать постановки задач, розвиток і реалізація підходів до їх розв'язання, інтерпретація отриманих результатів [5, 10, 12, 14]. У статтях [1, 3, 15] автор брав участь у зведенні відповідних задач термопружності до інтегральних рівнянь, їх розв'язуванні та написанні програм для розрахунку. У працях [2, 18, 20, 21, 25–28, 31, 40, 42–44, 47, 50] авторові належить частина, яка стосується визначення напружено-деформованого стану та оптимізації характеристик матеріалу; у працях [7, 34, 46] – аналіз напруженого стану тонких неоднорідних покриттів з допомогою запропонованого розв'язку інтегральних рівнянь та інших методів; у праці [9] – отримання розв'язків

інтегральних рівнянь; у працях [29, 33, 37] – адаптація відповідних інтегральних рівнянь до поставлених задач; у роботі [52] – застосування методу безпосереднього інтегрування рівнянь теорії пружності до розрахунку напружень, викликаних концентрацією водню.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, які містять 107 рисунків та 23 таблиці, висновків, переліку використаних джерел із 382 найменувань, двох додатків. Загальний обсяг роботи становить 345 сторінок. Обсяг основного тексту – 263 сторінки.

Автор щиро вдячний колегам з відділів механіки деформівного твердого тіла та термомеханіки ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, зокрема, світлої пам'яті професору Василю Степановичу Поповичу, а також докторам фізико-математичних наук Юрію Владиславовичу Токовому та Віктору Анатолійовичу Шевчуку за постійну увагу та всебічну підтримку при виконанні роботи і підготовці її до захисту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання роботи, об'єкт та предмет дослідження, наукову новизну, вірогідність отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, зазначено методи досліджень, наведено дані про публікації та апробацію роботи, її загальну структуру.

У **першому розділі** «Розвиток моделей та методів визначення термонапруженого стану неоднорідних тіл» подано огляд праць, зокрема, Я.Й. Бурака, О.Р. Гачкевича, Я.М. Григоренка, В.Г. Карнаухова, І.Ф. Киричка, А.Д. Коваленка, Ю.М. Коляна, В.В. Лободи, Я.С. Підстригача, Б.Є. Победрі, І.А. Рябцева, І.К. Сенченкова, Л.І. Седова, М.Г. Стащука, А.Ф. Улітка, В.Ф. Чекуріна, Ю.М. Шевченка, М.О. Шульги, В. Boley, A. Eringen, E. Melan, W. Nowaski, H. Parcus, J. Weiner та інших, які стосуються розвитку математичних моделей термонапруженого стану тіл з урахуванням взаємодії полів різноманітної фізичної природи. Наведено огляд моделей напруженого стану неоднорідних тіл, запропонованих та розвинутих у роботах А.М. Ахтямова, О.Є. Андрейківа, М.О. Бабешко, І.А. Біргера, А.Т. Василенка, О.Я. Григоренка, Д.В. Гриліцького, В.З. Грищака, В.Т. Грінченка, О.М. Гузя, Я.О. Жука, С.О. Калоєрова, Г.С. Кіта, А.Д. Коваленка, В.І. Козлова, Р.М. Кушніра, Л.В. Курпи, Е.А. Леонової, В.А. Ломакіна, О.В. Максимука, В.І. Махненка, В.В. Мелешка, В.А. Мерзлякова, В.В. Михаськіва, І.О. Мотовиловця, Р.С. Мусія, Ю.М. Неміша, М.М. Николишина, В.А. Осадчука, В.В. Панасюка, В.М. Панферова, Я.С. Підстригача, Б.Є. Победрі, Ю.З. Повстенка, В.С. Поповича, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, Ю.С. Постольника, І.О. Прусова, Б.В. Процюка, В.Л. Рвачова, К.М. Русинка, Я.Я. Руцицького, М.П. Саврука, Я.Г. Савули, В.Г. Савченка, І.Т. Селєзова, П.О. Стеблянка, Р.Г. Терехова, Р.Ф. Терлецького, Ю.В. Токового, М.В. Хая, Л.П. Хорошуна, Ю.М. Швайка, Р.М. Швеця, В. П. Шевченка, В.А. Шевчука, П.Р. Шевчука, Г.А. Шинкаренка, Є.Г. Янютіна, R.S. Dhaliwal, S. Kaliski,

H. Lord, W. Nowacki, Y. Shulman та інших науковців.

Звернено увагу на праці, які стосуються досліджень напружено-деформованого стану ФГМ, де розглянуто різні види неоднорідності і запропоновано числові, числово-аналітичні та аналітичні методи визначення напружено-деформованого стану тіл різної форми (Я.І. Кунець, Р.М. Мартиняк, В.В. Матус, Я.М. Пастернак, Й.З. Піскозуб, Г.Т. Сулим, М.К. Apalak, J.K. Chen, H.K. Ching, K.C. Deshmukh, S. Dhitala, R. Gunes, A. Gupta, D.K. Jha, M.R. Kaizer, T. Kant, G.D. Kedar, J. Kim, V.R. Manthana, N. Noda, S.P. Pawar, A. Rokayaa, R. K. Singh, M. Talha, Y. Zhang та інші).

Проаналізовано моделі визначення характеристик композитних матеріалів, зокрема ФГМ, за характеристиками їх складових з урахуванням і без врахування особливостей мікроструктури, які розвинуто у працях А.Я. Карвацького, М.В. Марчука, М.М. Хом'яка, J.D. Eshelby, K. Halpin, Z. Hashin, R. M. Jones, N. Mishra, T. Mori, J. N. Reddy, A. Reuss, S.J.C. Shtrikman, K. Tanaka, S.W. Tsai, W. Voigt та інших.

Висвітлено розвиток досліджень обернених задач механіки деформівного твердого тіла, їх класифікації та методів розв'язування, зокрема, стосовно неоднорідних тіл у працях И.Х. Бадамшина, Н.В. Баничука, А.О. Ватульяна, О.Г. Василенка, В.М. Вігака, В.С. Гудрамовича, Н.А. Гук, А.П. Дзюби, Р.Д. Недина, С.В. Нестерова, Н.І. Ободан, В.О. Повгороднього, О.Г. Поповича, А.В. Ясінського, J.R. Cho, S. Ding, D.Y. Ha, K. Iida, R. Kawamura, K.W. Khobragade, N.W. Khobragade, N. Noda, T. Sakaue, Y. Tanigawa, V. Varghese, C.P. Wu та інших.

На основі розглянутих праць з'ясовано, що термонапружений стан неоднорідних тіл досліджено аналітичними методами лише для деяких типів залежності характеристик матеріалів від координати; недостатнім є також розвиток аналітичного апарату дослідження температурних полів, які не викликають напружень у неоднорідних тілах; практично відсутні праці, в яких для визначення оптимальних профілів розподілу характеристик ФГМ використано аналітичні методи; наявні технологічні процеси виготовлення елементів конструкцій з композитних, зокрема ФГМ, потребують розвитку математичного моделювання їхніх прогнозованих термонапружених станів.

У другому розділі «Ключові рівняння для визначення температурних полів, які спричиняють цільові розподіли напружень у неоднорідних тілах» розвинуто загальну схему методу зведення незв'язаної задачі термпружності у напруженнях для тіл із залежними від однієї координати характеристиками матеріалу у довільній криволінійній ортогональній системі координат у тензорному формалізмі до інтегральних рівнянь другого роду. З цих рівнянь отримано визначальні рівняння для встановлення температурних полів, які забезпечують потрібний розподіл певної компоненти тензора напружень, зокрема нульовий, через термомеханічні характеристики матеріалу. Сформульовано підхід до визначення температурних полів, які не створюють термонапружень у довгому прямокутному брусі та порожнистому циліндрі, коли характеристики матеріалу та термонапруженого стану залежать від двох координат.

Опис напруженого стану наведено у коваріантній формі для довільної криволінійної системи координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) у вигляді:

- рівнянь рівноваги

$$\bar{\sigma}_{,m}^{mk} + F^k = 0, \quad (1)$$

- зв'язків між фізичними деформаціями, напруженнями та додатковими полями

$$e_{km} = C_{km}^{ij} \sigma_{ij} + \Phi_{km}, \quad (2)$$

- рівнянь сумісності деформацій (суцільності)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial \xi^n \partial \xi^p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial \xi^m \partial \xi^q} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mp}}{\partial \xi^n \partial \xi^q} - 2\varepsilon_{rs} (\Gamma_{qm}^r \Gamma_{pn}^s - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{qn}^s) + \\ & + 2\Gamma_{np}^r \varepsilon_{mqr} + 2\Gamma_{qm}^r \varepsilon_{npr} - 2\Gamma_{nq}^r \varepsilon_{mpr} - 2\Gamma_{mp}^r \varepsilon_{nqr} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

при відповідних умовах на межі тіла. Тут F^k – масові сили, Φ_{km} – деформації, викликані додатковим полем, $\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{ls} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^s} \right)$ – символи Крістоффеля 2-го роду, $\varepsilon_{npr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{pr}}{\partial \xi^n} + \frac{\partial \varepsilon_{rn}}{\partial \xi^p} - \frac{\partial \varepsilon_{np}}{\partial \xi^r} \right)$, ε_{nq} , $\bar{\sigma}^{mk}$ – компоненти тензорів деформацій і напружень, відповідно,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \quad \alpha = \overline{1,3}, \quad \beta = \overline{1,3}, \quad (4)$$

де $\sigma_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$ – фізичні компоненти тензорів деформацій та напружень, які відповідають криволінійним координатам з локальними одиничними базовими векторами і дають змогу записати зв'язки між деформаціями та напруженнями зі збереженням відповідної розмірності, C_{km}^{ij} – залежні від координат коефіцієнти пропорційності, g_{ks} – коваріантний метричний тензор. У рівнянні суцільності (3), яке є наслідком рівності нулю різниці тензорів кривини Рімана–Крістоффеля у деформованому і недеформованому тілах, індекси $mnpq$ приймають значення 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132.

На межі S (з нормаллю (n_1, n_2, n_3)) тіла задано крайові умови у напруженнях

$$\sigma^{mk} n_k = p^m, \quad (5a)$$

або переміщеннях

$$u|_S = u|_0. \quad (5b)$$

Тут p^m та u_0 – задані навантаження і переміщення.

Крайову задачу (1) – (5) записано через фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій, залежних від однієї з координат певної ортогональної системи у вигляді:

- рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \frac{f_1 \sigma_1 - f_2 \sigma_2}{\xi} - f_3 e_3 + f_3 \Phi_3 + \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} = 0, \quad \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad (6)$$

- зв'язків між деформаціями і напруженнями

$$e_\beta = a_\beta^j \sigma_j + \Phi_\beta, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (7)$$

- рівнянь суцільності

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial \xi^2} - d_{11} \frac{\partial e_1}{\partial \xi} + d_{21} \frac{\partial e_2}{\partial \xi} + d_1 e_1 + d_2 e_2 - d_3 e_3 = 0, \quad (8)$$

- та умов для напружень

$$\sigma_1(\xi_1) = -p_1, \quad \sigma_1(\xi_2) = -p_2, \quad \xi_1 = \text{const}, \quad \xi_2 = \text{const}, \quad (9)$$

або аналогічних умов для переміщень. Тут $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$ – рівняння координатних поверхонь, $\xi = \xi^1$, один індекс у тензорних величинах застосовано для позначення діагональних компонент, a_β^j – залежні від координат коефіцієнти пропорційності,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\xi}{g_1} \left[\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2g_3} \left(1 + \frac{a_3^1}{a_3^3} \right) \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \right], \\ f_2 &= \frac{\xi}{2g_1} \left(\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} - \frac{1}{g_3} \frac{a_3^2}{a_3^3} \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \right), \quad f_3 = \frac{1}{2g_1 g_3} \frac{1}{a_3^3} \frac{\partial g_3}{\partial \xi}, \\ d_{11} &= \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi}, \quad d_{21} = \frac{2}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right), \\ d_1 &= \frac{1}{2g_1 g_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial g_2}{\partial \xi} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right\}, \\ d_2 &= \frac{1}{g_2} \frac{\partial^2 g_2}{\partial (\xi)^2} - \frac{1}{2g_2 g_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2g_2} \left(\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} \right), \\ d_3 &= \frac{1}{2g_3 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi^3} \frac{\partial g_2}{\partial \xi^3}. \end{aligned}$$

Незважаючи на те, що компоненти метричного тензора ϵ , взагалі кажучи, функціями трьох координат, величини f_i , d_i , d_{11} , d_{21} ($i = \overline{1,3}$) повинні бути функціями однієї змінної ξ , що накладає певні умови на компоненти метричного тензора. У декартовій, циліндричній та сферичній системах координат рівняння (6) – (9) збігаються з відомими в літературі.

Для зведення задачі термopружності (6) – (9) до інтегральних рівнянь потрібно вибрати визначальне напруження, яке, зокрема, подано виразом $\sigma = f_1 \sigma_1 - f_2 \sigma_2$. Тоді з рівнянь (7) отримаємо:

$$\sigma_3 = \frac{1}{a_3^3} \left(e_3 - a_3^1 \sigma_1 - a_3^2 \sigma_2 \right) - \frac{\Phi_3}{a_3^3}. \quad (10)$$

З використанням якої формули (10) рівняння рівноваги (6) і суцільності (8) у напруженнях набули вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{\xi} - f_3 e_3 + f_3 \Phi_3 + \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} = 0, \quad (11)$$

$$b_2^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} + D_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + D_2 \sigma + b_2^1 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \xi^2} + D_{11} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + D_1 \sigma_1 + D_3 e_3 + D_\Phi = 0, \quad (12)$$

де

$$D_{11} = 2 \frac{\partial b_2^1}{\partial \xi} - d_{11} b_1^1 + d_{21} b_2^1, \quad D_{21} = 2 \frac{\partial b_2^2}{\partial \xi} - d_{11} b_1^2 + d_{21} b_2^2,$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 b_2^1}{\partial \xi^2} - d_{11} \frac{\partial b_1^1}{\partial \xi} + d_{21} \frac{\partial b_2^1}{\partial \xi} + d_1 b_1^1 + d_2 b_2^1,$$

$$D_2 = \frac{\partial^2 b_2^2}{\partial \xi^2} - d_{11} \frac{\partial b_1^2}{\partial \xi} + d_{21} \frac{\partial b_2^2}{\partial \xi} + d_2 b_2^2 + d_1 b_1^2,$$

$$D_3 = \frac{\partial^2 b_2^3}{\partial \xi^2} + d_{21} \frac{\partial b_2^3}{\partial \xi} - d_{11} \frac{\partial b_1^3}{\partial \xi} + d_1 b_1^3 + d_2 b_2^3 - d_3 e_3,$$

$$D_\Phi = \frac{\partial^2 \Phi_2^3}{\partial \xi^2} + d_{21} \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial \xi} - d_{11} \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial \xi} + d_1 \Phi_1^3 + d_2 \Phi_2^3,$$

b_k^m ($k = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,3}$) – вирази біля σ_1 , σ та e_3 , отримані після підставлення (10) у (7) з використанням $\sigma = f_1 \sigma_1 - f_2 \sigma_2$, а Φ_k^m ($k = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,3}$, $\Phi_3^3 = \Phi_3$) – вирази, які містять Φ_k , отримані тим же способом.

Задачу (7), (9), (11), (12) визначення напружено-деформованого стану, спричиненого дією поля у тілі з поверхнями $\xi = \xi_1$ та $\xi = \xi_2$, зведено до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду відносно $\sigma(\xi)$:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi} K(\xi, \eta) \sigma(\eta) d\eta = \sigma(\xi_1) \left[A(\xi_1)(\xi - \xi_1) + 1 \right] + \sigma'(\xi_1)(\xi - \xi_1) - \\ - e_3 \int_{\xi_1}^{\xi} (\xi - \eta) g_e(\eta) d\eta + f(\xi), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta) = A(\eta) + (\xi - \eta) \left[B(\eta) - \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \right] - \frac{\xi [V(\xi) - V(\eta)] - [W(\xi) - W(\eta)]}{\eta}, \\ A(\eta) = \frac{D_{21}(\eta)}{b_2^2(\eta)} - \frac{b_2^1(\eta)}{\eta b_2^2(\eta)}, \quad B(\eta) = \frac{D_2(\eta)}{b_2^2(\eta)} - \frac{1}{\eta} \left(\frac{D_{11}(\eta)}{b_2^2(\eta)} - \frac{b_2^1(\eta)}{\eta b_2^2(\eta)} \right), \end{aligned}$$

$$f(\xi) = \sigma_1(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\xi} (\xi - \eta) \frac{D_1(\eta)}{b_2^2(\eta)} d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi} (\xi - \eta) g_{\Phi}(\eta) d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi} (\xi - \eta) g_F(\eta) d\eta,$$

$$\sigma(\xi_1) = \text{const}, \quad V(\eta) = \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{D_1(t)}{b_2^2(t)} dt, \quad W(\eta) = \int_{\xi_1}^{\eta} t \frac{D_1(t)}{b_2^2(t)} dt,$$

$$g_e = \frac{D_{11}}{b_2^2} f_3 + \frac{D_3}{b_2^2} + \frac{b_2^1}{b_2^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi} + \frac{D_1}{b_2^2} \int_{\xi_1}^{\xi} f_3(\eta) d\eta,$$

$$g_{\Phi} = \frac{D_{11}}{b_2^2} f_3 \Phi_3 + \frac{D_1}{b_2^2} \int_{\xi_1}^{\xi} f_3(\eta) \Phi_3(\eta) d\eta + \frac{b_2^1}{b_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (f_3 \Phi_3) - \frac{D_{\Phi}}{b_2^2},$$

$$g_F = \frac{b_2^1}{b_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{F_1}{\sqrt{g_1}} \right) + \frac{D_{11}}{b_2^2} \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} d\eta.$$

Зауважимо, що g_e , g_{Φ} , g_F – функції від змінної ξ .

Ця сукупність рівнянь містить дві сталі e_3 та $\sigma(\xi_1)$, які визначено з інтегральної умови

$$p_2 - p_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sigma}{\eta} d\eta - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_3 e_3 d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_3 \Phi_3 d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} d\eta \quad (14)$$

та умов рівноваги

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} g_{33} \sigma_3 d\eta = p, \quad (15)$$

де p – задане навантаження. Напруження $\sigma_1(\xi)$ отримано з виразу

$$\sigma_1(\xi) = \sigma_1(\xi_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sigma}{\eta} d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi} f_3 e_3 d\eta - \int_{\xi_1}^{\xi} f_3 \Phi_3 d\eta - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} d\eta, \quad (16)$$

який, як і умову (14), одержано безпосереднім інтегруванням рівняння рівноваги (6) з використанням умов на межі. Тоді напруження $\sigma_2(\xi)$ визначено з виразу $\sigma(\xi) = f_1 \sigma_1(\xi) - f_2 \sigma_2(\xi)$, $\sigma_3(\xi)$ – з (10), а деформації та переміщення – з виразів (7) та співвідношень Коші між деформаціями та переміщеннями. Рівняння Вольтерри (13) з інтегральними умовами (14), (15) зведено до одного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке враховує також силові навантаження.

З використанням отриманих рівнянь (13) – (15) поставлено задачі визначення температурних полів, які не викликають напружень у неоднорідних тілах простої форми. Зокрема, задачу термопружності для довгого неоднорідного ізотропного порожнистого циліндра зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напружень:

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^1 K(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta = Q(\rho), \quad (17)$$

де $\rho = r / R_2$, $\rho_1 = R_1 / R_2$, $\rho_2 = 1$,

$$K(\rho, \eta) = \begin{cases} K_1(\rho, \eta), & \eta \leq \rho, \\ K_2(\rho, \eta), & \eta > \rho, \end{cases}$$

$$K_2(\rho, \eta) = \frac{V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$K_1(\rho, \eta) = \left[\frac{V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2} - \frac{V(\rho) - V(\eta)}{\rho^2} \right] \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(1)V(\rho) - W(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}, \quad Z_2(\rho) = \frac{W(1)V(\rho) - V(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}, \quad (18)$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2} \frac{d_1 V(\rho_2) - d_2 W(\rho_2)}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2} \frac{d_2 V(\rho_2) - d_1 W(\rho_2)}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)} + f(\rho),$$

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{E\eta}{1-\nu^2} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \nu \frac{E\eta}{1-\nu^2} d\eta, \quad f(\rho) = f_T(\rho) + f_F(\rho),$$

$$f_T(\rho) = -\frac{1}{\rho} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \Phi(\eta) d\eta, \quad (18)$$

$$f_F(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta \left[(V(\rho) - V(\eta)) \frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)} + \eta \right] F_r(\eta) d\eta - \frac{1}{\rho^2} \rho_1^2 p_1,$$

r – радіальна змінна, R_1 , R_2 – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра, E , ν , F_r , Φ – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, масова сила та деформація, спричинена додатковим полем, залежні від радіальної координати.

Вважаємо, що задано компоненту напружень $\sigma_r(\rho)$. Потрібно визначити, при яких зв'язках між температурним полем, характеристиками матеріалів і радіальною координатою можна досягнути заданого розподілу $\sigma_r(\rho)$. Це означає, що інтегральне рівняння (17) потрібно розв'язати відносно функції $\Phi(\rho)$, яка описує деформації, викликані додатковим полем.

Якщо використати вирази для $V(\rho)$ і $W(\rho)$ з (18), то з (17) за відсутності масових сил отримаємо таке інтегральне рівняння, яке пов'язує температурне поле, фізико-механічні властивості матеріалу та силові навантаження:

$$\Phi(\rho) - \frac{1}{V(1) + W(1)} \int_{\rho_1}^1 \frac{\eta E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \Phi(\eta) d\eta = \Theta(\rho), \quad (19)$$

де

$$\Theta(\rho) = \frac{V(1)\left\{\left[\rho_1^2 p_1 - p_2\right] + v(\rho)p\right\} - W(1)\left\{p + v(\rho)\left[\rho_1^2 p_1 - p_2\right]\right\}}{V^2(1) - W^2(1)} -$$

$$- \frac{1 - v^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \sigma_r(\rho) \right] - \frac{1 - v^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \int_{\rho_1}^1 \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 K(\rho, \eta) \right] \sigma_r(\eta) d\eta.$$

Для теплової деформації $\Phi(\rho) = \alpha(\rho)t(\rho)$, де $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення, $t(\rho) = T(\rho) - T_0$, T_0 – відлікова температура, при якій напруження відсутні. Визначена з рівняння (19) функція $t(\rho)$ повинна задовольняти рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{dt(\rho)}{d\rho} \right) + q_v(\rho) = 0 \quad (20)$$

та відповідні умови теплового навантаження на межах циліндра. Тут $\lambda(\rho)$ – коефіцієнт теплопровідності, а $q_v(\rho)$ – густина потужності теплових джерел.

Якщо радіальне напруження і навантаження відсутні, то потрібно розв'язати інтегральне рівняння (19) відносно $\Phi(\rho)$, коли $\Theta(\rho) = 0$.

Задачі про визначення температурних полів, які призводять до нульових напружень, сформульовано для неоднорідних ізотропних довгого прямокутного бруса та циліндра з характеристиками, залежними від двох координат. Записано відповідні диференціальні рівняння з частинними похідними, які повинні задовольняти функції $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_1 = x, \rho$, $\zeta_2 = y, z$ (описують температурні деформації) для температурних полів, що не викликають напружень.

Отримані рівняння дали можливість дослідити прямі та обернені задачі для неоднорідних термочутливих тіл. Ці рівняння уніфікували формулювання задач визначення температурних полів, які не викликають термонапружень та умов досягнення заданого розподілу компонент тензора напружень.

У **третьому розділі** «Визначення умов нагрівання неоднорідних тіл, що забезпечують відсутність термонапружень» на основі інтегральних рівнянь Фредгольма, отриманих у другому розділі визначено температурні поля, які не викликають термонапружень у неоднорідних тілах (шар, порожнисті циліндр, куля). Метод проілюстровано тут на прикладі довгого радіально неоднорідного циліндра. Інтегральне рівняння для визначення температурного поля при відсутності силових навантажень на поверхнях на основі (19) набуває вигляду

$$\Phi(\rho) - \frac{1}{V(1) + W(1)} \int_{\rho_1}^1 \frac{\eta E(\eta)}{1 - v(\eta)} \Phi(\eta) d\eta = 0.$$

Це рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, яке має власні значення. Його точний аналітичний розв'язок відносно температурного поля

$t(\rho) = C / \alpha(\rho)$ має задовольняти рівняння теплопровідності (20) та умови на межах, наприклад, конвективного теплообміну

$$\begin{aligned} \lambda(\rho_1) \frac{dt}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} - \beta_1 [t(\rho_1) - t_1] &= 0, \\ \lambda(1) \frac{dt}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_2} + \beta_2 [t(1) - t_2] &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де t_1, t_2 – прирости відносно T_0 температур навколишніх середовищ, які контактують з внутрішньою та зовнішньою поверхнями циліндра, β_1, β_2 – коефіцієнти тепловіддачі. Оскільки вираз для температури містить одну сталу C , а умов на межах є дві, то ці умови повинні бути узгодженими. Після підстановки виразу для температури в умови (21) отримаємо такий зв'язок між температурами на межах та характеристиками матеріалів:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\left[\frac{1}{\alpha(\rho)} - \frac{\lambda(\rho)}{\beta_2 \alpha^2(\rho)} \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=1}}{\left[\frac{1}{\alpha(\rho)} + \frac{\lambda(\rho)}{\beta_1 \alpha^2(\rho)} \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=\rho_1}} \dots$$

Тоді C визначається з будь-якої з умов (21) при заданих характеристиках матеріалу. Інтенсивність теплових джерел має вигляд:

$$q_v(\rho) = -\frac{C}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right]. \quad (22)$$

У такий спосіб отримано умови узгодження температур на поверхнях циліндра, характеристик матеріалу та вирази для температурного поля, яке не спричиняє термонапружень, й густини потужності теплових джерел, які його спричиняють.

Як приклад реалізації температурного поля розглянуто порожнистий циліндр з двокомпонентного матеріалу, характеристики якого описують через характеристики його складових P_1 і P_2 моделлю простої суміші:

$$P(\rho) = (P_1 - P_2)S(\rho) + P_2. \quad (23)$$

Вважаємо, що

$$S(\rho) = \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right)^s, \quad s > 0, \quad (24)$$

а характеристики матеріалів для довгого неоднорідного циліндра з внутрішнім та зовнішнім радіусами $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$ при відсутності масових сил і поздовжніх навантажень, виготовленого з ФГМ з такими характеристиками складових (кераміки ZrO_2 з індексом 1 і сплаву $Ti-6Al-4V$

з індексом 2): $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.33$, $\lambda_1 = 3.13$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 7.5$ Вт/(м·К), $E_1 = 1.95 \cdot 10^{11}$ Па, $E_2 = 1.16 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha_1 = 9.5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $\alpha_2 = 12.0 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Температура, при якій напруження відсутні $T_0 = 300$ К. Тоді для випадку заданої різниці температур поверхонь $t(\rho_1) - t(1) = 100$ К отримаємо $t(\rho_1) = 380$ К, $t(1) = 480$ К (розглянуто випадок умов першого роду на межах). На рис. 1, 2 подано розподіли температури та інтенсивності теплових джерел для різних значень s на основі виразів (22) та (24). Спостерігається суттєвий вплив неоднорідності матеріалів на розподіл температури та інтенсивності теплових джерел. Аналогічні результати отримано для неоднорідної порожнистої кулі і нескінченного неоднорідного за товщиною шару.

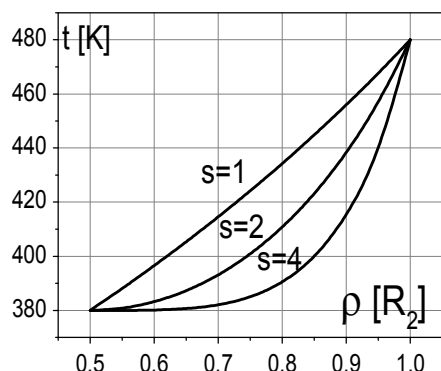


Рис. 1. Радіальний розподіл температури у порожнистому циліндрі для різних показників s

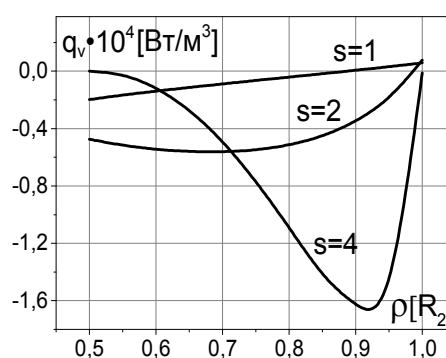


Рис. 2. Радіальний розподіл густини потужності теплових джерел у порожнистому циліндрі для різних показників s

На основі інтегрального рівняння Фредгольма, отриманого у другому розділі, встановлено вираз для температурного поля, яке забезпечує відсутність напружень у неоднорідних тілах простої форми. Запропоновано способи отримання такого температурного поля при наявності внутрішніх теплових джерел у тілах. Відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення складових матеріалу визначає максимально можливий перепад температур у неоднорідних тілах, який потрібно забезпечити на поверхнях для випадку межових умов першого роду. Розподіл густини потужності теплових джерел по товщині тіла суттєво залежить від розподілу концентрації складових.

У **четвертому розділі** «Відсутність термонапружень у неоднорідних тілах при заданих умовах нагрівання» отримано аналітичні вирази для характеристик матеріалу, які забезпечують нульові напруження у неоднорідних тілах простої форми (шар, порожнистий циліндр, куля) при заданих умовах нагрівання. Метод отримання точних аналітичних розв'язків цих задач проілюструємо на прикладі довгого порожнистого циліндра, виготовленого з ФГМ, з урахуванням узгодженості умов нагрівання на поверхнях.

Розглянуто випадок, коли об'ємні теплові джерела відсутні. Завдання полягає у визначенні характеристик матеріалу, які забезпечують відповідне

температурне поле $t = C / \alpha(\rho)$, узгоджені умови нагрівання і відсутність напружень. Зі стаціонарного рівняння теплопровідності отримаємо:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right] = 0. \quad (25)$$

При цьому у випадку заданих температур поверхонь тіл повинні задовольнятися умови на межах:

$$C / \alpha(\rho_1) = t_1, \quad C / \alpha(\rho_2) = t_2. \quad (26)$$

Рівняння теплопровідності (25) виражає нелінійний зв'язок між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалу, звідки

$$\lambda(\rho) = \frac{C_1}{\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right)}, \quad \alpha(\rho) = \frac{1}{C_1 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta \lambda(\eta)} + C_2}, \quad (27)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Для моделі простої суміші (23) перший з виразів (27) зводиться до нелінійного диференціального рівняння відносно концентрації $S(\rho)$

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S(\rho)} \right) = \frac{C_1}{\rho} \frac{1}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)S(\rho)},$$

а його точний розв'язок має вигляд:

$$S(\rho) = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z(\rho))}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z(\rho))}. \quad (28)$$

Тут $z(\rho) = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \rho^{C_1 a_l} \exp(a_l C_1 B_1)$, $a_l = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, B_1 – довільна стала,

$W_L(z)$ – функція Лямберта, яка є розв'язком рівняння $W_L(x) \exp(W_L(x)) = x$.

Для визначення сталих B_1 і C_1 у формулі (28) задаємо концентрацію $S_1 = S(\rho_1)$ та $S_2 = S(\rho_2)$ на поверхнях $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$. Цим значенням концентрації з виразу (23) при вибраних характеристиках складових ФГМ відповідають величини $\alpha(\rho_1)$ та $\alpha(\rho_2)$ відповідно. У вираз для концентрації входять дві сталі C_1 і B_1 , для визначення яких використаємо рівняння, отримані з формули (28):

$$S_i = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z_i)}, \quad z_1 = z(\rho_1), \quad z_2 = z(\rho_2), \quad i = 1, 2.$$

Ці рівняння можна розв'язати відносно z_i ($i = 1, 2$), звідки

$$z_i = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1) \exp \left\{ \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) [\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S_i]} \right\}}{(\lambda_1 - \lambda_2) [\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S_i]}.$$

З (28) після використання виразів для $z(\rho)$ отримано значення C_1 і B_1 :

$$C_1 = \frac{\ln(\frac{z_1}{z_2})(\lambda_1 - \lambda_2)}{\ln(\rho_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_1 = \frac{\ln \left[\frac{z_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1} \right] \ln(\rho_1)}{\ln(z_1 / z_2)}. \quad (29)$$

Отже, у випадку двокомпонентного матеріалу задача зводиться до визначення виразу для концентрації (28) і сталих (29).

Встановлено характеристики двокомпонентного металокерамічного матеріалу для забезпечення нульових радіальних термонапружень у циліндрі з внутрішнім та зовнішніми радіусами $\rho_1=0.5$, $\rho_2=1.0$, перепадом температур між внутрішньою та зовнішньою поверхнями 300 K , $T_0 = 300 \text{ K}$, $S_1 = 1.0$, $S_2 = 0.18$ і $\lambda_1 = 13.72 \text{ Вт/(м·К)}$, $\lambda_2 = 15.78 \text{ Вт/(м·К)}$, $\alpha_1 = 5.83 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$, $\alpha_2 = 12.87 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ (силіцид кремнію і нержавіюча сталь). При таких значеннях характеристик і температур на поверхні розрахункове значення $C = 0.003480$. На рис. 3, 4 подано залежності температури $t(\rho)$, концентрації $S(\rho)$, коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha(\rho)$ та теплопровідності $\lambda(\rho)$ від радіальної координати, які забезпечують температурне поле, що не спричиняє напружень при сталих температурах поверхонь циліндра.

Отже, у розділі отримано точні аналітичні вирази для розподілу характеристик неоднорідного матеріалу, властивості якого описані моделлю простої суміші для тіл, виготовлених з ФГМ.

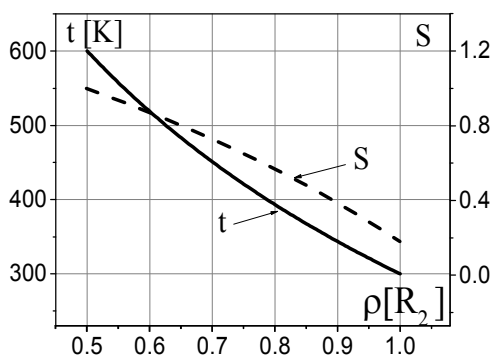


Рис. 3. Залежності температури $t(\rho)$ і концентрації $S(\rho)$ від радіальної координати

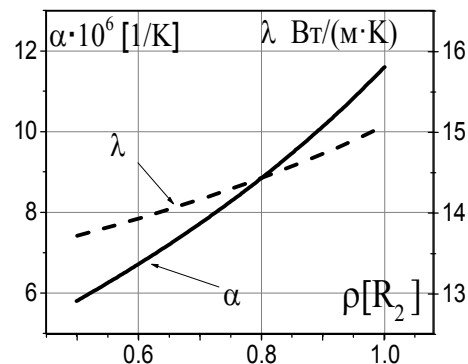


Рис. 4. Залежності коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha(\rho)$ та теплопровідності $\lambda(\rho)$ від радіальної координати

Розподіл забезпечує нульові складові тензора напружень у неоднорідних тілах в різних умовах нагрівання. Адекватність підходу підтверджено

чисельно співставленням розподілу концентрацій для реальних ФГМ. Показано, що відношення температур поверхонь не може перевищувати відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення складових матеріалу.

У **п'ятому розділі** «Визначення температурних полів, які створюють цільові термонапруження в неоднорідних тілах» з урахуванням залежності теплофізичних характеристик матеріалу і температурного поля від координати визначено та проаналізовано термонапружені стани шару та порожнистих кулі і довгого циліндра.

Отримання аналітичних виразів для температурних полів, які спричиняють заданий термопружний стан проілюстровано на прикладі порожнистого циліндра. Температурне поле, отримане з інтегрального рівняння (19) через радіальну компоненту тензора напружень, силові навантаження та характеристики матеріалів має вигляд

$$t(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} - \frac{p[W(1) - V(1)v(\rho)] - (\rho_1^2 p_1 - p_2)[V(1) - W(1)v(\rho)]}{(1 + v(\rho))\alpha(\rho)[V^2(1) - W^2(1)]} - \frac{1 - v(\rho)}{\rho\alpha(\rho)E(\rho)} \left[\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r(\rho)) + \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \int_{\rho_1}^1 K(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta \right) \right], \quad (30)$$

де C – довільна стала.

Для оцінки допустимого розподілу радіальних напружень слід виразити термонапруження через температуру з рівняння теплопровідності при заданих теплових навантаженнях. Температурне поле

$$t(\rho) = C_1 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta \lambda(\eta)} + C_2, \quad (31)$$

де C_1 , C_2 визначені з умов на межі (26), є розв'язком стаціонарного рівняння теплопровідності (20) при $q_v(\rho) = 0$. Інтегральне рівняння (17) зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь методом квадратурних формул, розв'язком якої є значення радіальних напружень у певних вузлових точках. Колові напруження визначені з рівняння рівноваги, деформації та осьові напруження – зі зв'язків між деформаціями та напруженнями.

У випадку моделі простої суміші (23), (24) при теплових навантаженнях на поверхнях $t(\rho_1) = 200$ К, $t(\rho_2) = 500$ К та характеристиках складових $E_1 = 415$ ГПа, $E_2 = 71$ ГПа, $\nu_1 = 0.16$, $\nu_2 = 0.34$, $\lambda_1 = 65.62$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 237$ Вт/(м·К), $\alpha_1 = 0.71 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $\alpha_2 = 22.8 \cdot 10^{-6}$ 1/К, розподіл напружень для різних значень параметра s у порожнистому циліндрі з радіусами $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$ зображений на рис. 5.

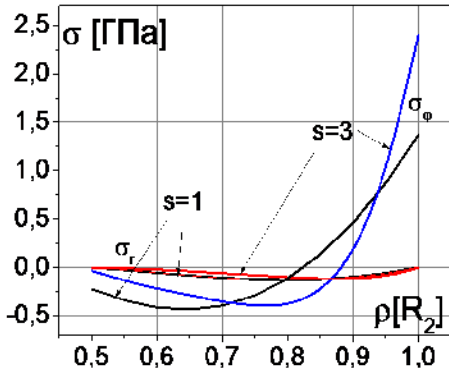


Рис. 5. Залежність радіальних і колових напружень у порожнистому циліндрі від параметра s

Визначимо температурне поле, яке створює задані радіальні напруження. Нехай розподіл радіальних напружень заданий на рис. 5 і апроксимований многочленом дев'ятого степеня за радіальною координатою. Тоді температурне поле, обчислене за формулою (31) повинно збігатися з температурним полем, обчисленим за формулою (30). Обчислення показують відхилення між температурними полями визначеними за формулами (30) і (31) не більше як на 0.1%.

Якщо радіальний розподіл напружень задано довільно в межах допустимого на основі розв'язку прямої задачі термопружності, то відповідне температурне поле можна забезпечити з допомогою теплових джерел визначених з рівняння (20).

Застосування квадратурних формул робить можливим отримання наближених розв'язків задач визначення напружень у j -му шарі багатошарового термочутливого неоднорідного у кожному шарі тіла простої форми, які, наприклад, для порожнистого циліндра мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma^{(j)}(\rho) &= \gamma_{10}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20}^{(j)}(\rho)e_z + \gamma_{00}^{(j)}, \\ \sigma_r^{(j)}(\rho) &= \gamma_{1r}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2r}^{(j)}(\rho)e_z + \gamma_{0r}^{(j)},\end{aligned}\quad (32)$$

де $\sigma^{(j)}(\rho) = \sigma_r^{(j)}(\rho) + \sigma_\phi^{(j)}(\rho)$, $\gamma_{k0}^{(j)}(\rho)$, $\gamma_{kr}^{(j)}(\rho)$ ($k=0,1,2$) – відомі функції, виражені через термомеханічні характеристики матеріалу, розміри шарів, термосилові навантаження, $\sigma^{(1)}(\rho_1)$, e_z – сталі, визначені з інтегральних умов аналогічних до (14), (15). Отримані аналітичні вирази (32) застосовано до визначення термонапружень у багатошарових циліндричних, сферичних тілах, зокрема, і для тіл з багатошаровими тонкими покриттями.

Виконано розрахунки термонапруженого стану з урахуванням залежності характеристик ФГМ від радіальної координати і температури, зокрема для неоднорідних шару, порожнистих циліндра та кулі. Обчислено температурні поля в тілах простої форми з реальних матеріалів, які відповідають заданому розподілу компоненти тензора напружень.

Цільовий розподіл радіальних напружень в умовах заданої тепловіддачі з середовищем можна забезпечити температурним полем, яке створюється тепловими джерелами.

У шостому розділі «Умови відсутності напружень і способи їх досягнення у довгому прямокутному брусі з характеристиками, залежними від двох координат» отримано вирази для температурного поля, яке не викликає напружень, через термомеханічні характеристики матеріалу.

Розглянуто довгий неоднорідний брус прямокутного перерізу $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$.

З використанням фізичних співвідношень зі сталою осьовою деформацією $e_z = \text{const}$ та рівнянь рівноваги, рівняння сумісності деформацій запишемо у термінах σ_{xx} і сумарних напружень $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ з урахуванням викликаних додатковим полем $\Phi(x, y)$ адитивних деформацій:

$$\begin{aligned} & \Delta \left((1+\nu)\Phi - \frac{\nu^2 \sigma}{E} - \nu e_{zz} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1+\nu)\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu \sigma}{E} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma}{E} - \frac{(1+\nu)\sigma_{xx}}{E} \right) = \\ & = 2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - 2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial F_x}{\partial x} + 2 \left(F_y - \frac{\partial(\sigma - \sigma_{xx})}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) + 2 \left(F_x - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) + \\ & + 2 \left(\int_{-a}^x F_y dx - \int_{-a}^x \frac{\partial(\sigma - \sigma_{xx})}{\partial y} dx - p_2^-(y) \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1+\nu}{E} \right), \quad \text{де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Покладемо у цьому рівнянні компоненти тензора напружень рівними нулеві, звідки отримано умову

$$\Delta \Phi(x, y) = 0. \quad (33)$$

Розв'язком рівняння (33) з урахуванням того, що результуючі моменти в перерізі задовольняють умови рівноваги, є вираз $\Phi(x, y) = C$. Тоді для випадку теплових деформацій $\Phi(x, y) = \alpha(x, y)t(x, y)$, $t(x, y) = T(x, y) - T_0$, отримуємо вираз для температурного поля

$$t(x, y) = \frac{C}{\alpha(x, y)}. \quad (34)$$

Умови нагрівання бруса, які забезпечують відсутність термонапружень, визначено з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} t(x, y) \right) = -q_v(x, y), \quad (35)$$

коли температурне поле (34) має задовольняє рівняння теплопровідності та умови на межах. Такими умовами, наприклад, можуть бути умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через грані бруса

$$\begin{aligned} & \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y) - \beta_{-a} [t(x, y) - t_{-a}(y)] \right) \Big|_{x=-a} = 0, \\ & \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y) + \beta_a [t(x, y) - t_a(y)] \right) \Big|_{x=a} = 0, \\ & \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} t(x, y) - \beta_{-b} [t(x, y) - t_{-b}(x)] \right) \Big|_{y=-b} = 0, \\ & \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} t(x, y) + \beta_b [t(x, y) - t_b(x)] \right) \Big|_{y=b} = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

де $\beta_{\pm a}$, $\beta_{\pm b}$ – коефіцієнти тепловіддачі, а $t_{\pm a}(y)$, $t_{\pm b}(x)$ – температури середовища на гранях $x = \pm a$, $y = \pm b$. Повинні також виконуватися фізичні умови рівності температур навколишнього середовища на ребрах бруса

$$t_b(-a) = t_{-a}(b), \quad t_b(a) = t_a(b), \quad t_{-b}(-a) = t_{-a}(-b), \quad t_{-b}(a) = t_a(-b). \quad (37)$$

З рівняння теплопровідності отримано вираз залежності інтенсивності теплових джерел від характеристик матеріалу

$$q_v(x, y) = -C \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right] \right\}.$$

В чотирьох умовах на межах є п'ять сталих: C , $\beta_{\pm a}$, $\beta_{\pm b}$. Сталу C визначаємо з будь-якої рівності (36), за відомою температурою навколишнього середовища в одній з точок на грані бруса, наприклад, у точці $(-a, b^*)$, $b^* \in [-b, b]$, при заданому одному з коефіцієнтів тепловіддачі, наприклад, β_{-a} . Тоді з першої з умов (36) на межі

$$C = \frac{t_{-a}(b^*)}{\frac{1}{\alpha(-a, b^*)} - \frac{\lambda(-a, b^*)}{\beta_{-a}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, b^*)} \right) \Big|_{x=-a}}. \quad (38)$$

Відповідні вирази для коефіцієнтів тепловіддачі, одержані з використанням (36), (37), мають вигляд:

$$\beta_a = -\beta_{-a} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(-a, y)} \right) \Big|_{y=-b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=a}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=-a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(a, y)} \right) \Big|_{y=-b}},$$

$$\beta_{\pm b} = - \frac{\beta_{-a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(-a, y)} \right) \Big|_{y=\pm b}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, \pm b)} \right) \Big|_{x=-a}}. \quad (39)$$

Температури на межах бруса, визначені при умовах конвективного теплообміну (36), є наступними:

$$t_{\pm b}(x) = \left[\frac{\pm b}{b} \frac{1}{\beta_{\pm b}} \lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y) + t(x, y) \right] \Big|_{y=\pm b},$$

$$t_{\pm a}(y) = \left[\frac{\pm a}{a} \frac{1}{\beta_{\pm a}} \lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y) + t(x, y) \right] \Big|_{x=\pm a}.$$

Також визначено умови нагрівання, які призводять до відсутності напружень у прямокутному брусі, виготовленому з ФГМ з відомими характеристиками матеріалу. За моделлю простої суміші у випадку залежності концентрації від двох змінних характеристики матеріалу мають вигляд $P(x, y) = P_1 (1 - S(x, y)) + P_2 S(x, y) = P_1 + (P_2 - P_1) S(x, y)$, P – це α або λ . Першим матеріалом є метал ($\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$, $\lambda_1 = 204 \text{ Вт/(м·K)}$), а другим – кераміка ($\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$, $\lambda_2 = 2.09 \text{ Вт/(м·K)}$). Концентрацію $S(x, y) \in [0, 1]$ однієї складової у ФГМ задамо у вигляді:

$$S(x, y) = \left(\frac{0.5x + a}{2a} \right) \left(\frac{0.6y + b}{2b} \right)^3.$$

При $a = 0.1 \text{ м}$, $b = 0.7 \text{ м}$, $t_{-a} = 300 \text{ К}$, $\beta_{-a} = 300 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ графіки розрахованих

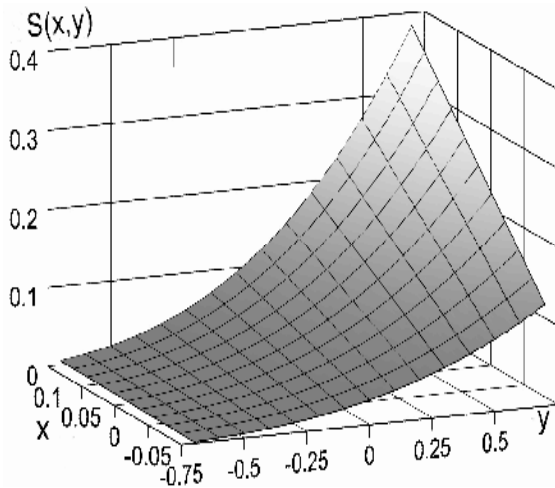


Рис. 6. Залежність концентрації $S(x, y)$ від координат у прямокутному брусі

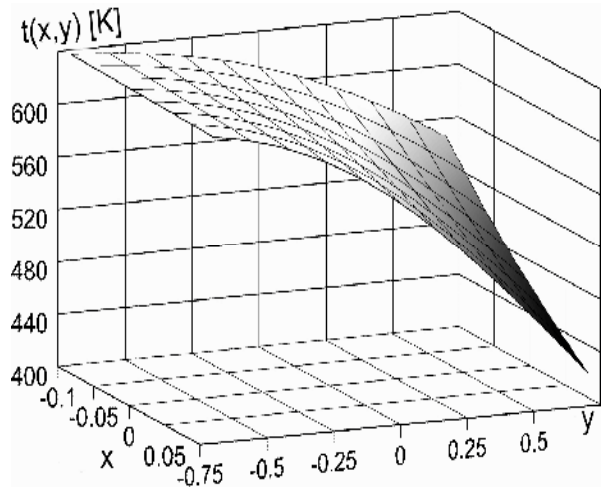


Рис. 7. Залежність температури від координат у прямокутному брусі

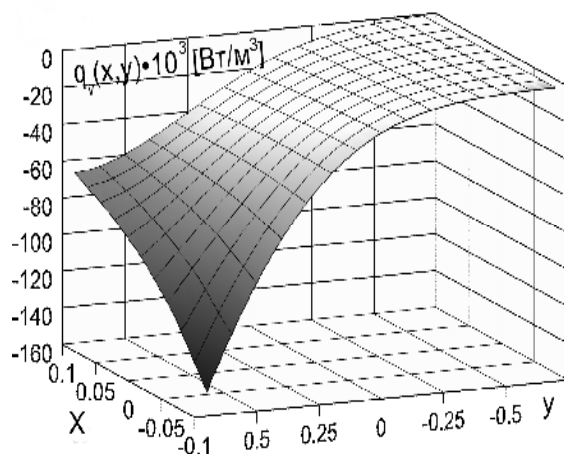


Рис. 8. Залежність інтенсивності теплових джерел $q_v(x, y)$ від координат у прямокутному брусі

залежностей від координат концентрації одного матеріалу в суміші, розподілів температури $t(x, y)$ і потужності теплових джерел $q_v(x, y)$ подано на рис. 6 – 8.

На основі (38), (39) обчислено $C = 0.0085$, $\beta_a = 52.94 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$,

$$\beta_{-b} = 82.6531 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)},$$

$$\beta_b = 20.6633 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Отримано точні вирази залежностей між коефіцієнтами теплопровідності та теплового лінійного розширення для забезпечення нульових напружень у довгому прямокутному брусі у випадку відсутності об'ємних теплових джерел для

випадку $1/\alpha(x, y) = 1/\alpha_1(x) + 1/\alpha_2(y)$ або $\alpha(x, y) = \alpha_1(x)\alpha_2(y)$ у вигляді:

$$\lambda(x, y) = D \exp \left(- \int_{-a}^x \frac{\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right) - c}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right)} dx - \int_{-b}^y \frac{\frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right) + c}{\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right)} dy \right)$$

або

$$\lambda(x, y) = \frac{D \exp \left(c \int_{-a}^x \frac{dx}{\alpha_1(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right)} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right) \exp \left(c \int_{-b}^y \frac{dy}{\alpha_2(y) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right)} \right)},$$

де c, D – довільні сталі.

Вважаємо, що

- характеристики матеріалів описують моделлю простої суміші;
- аналітичні розв'язки отримуються у випадку подання теплофізичних характеристик у вигляді добутку функцій від різних координат.

З рівняння (35) при $q_v(x, y) = 0$ так само, як це було зроблено для циліндра у розділі 4, отримано рівняння для визначення потрібної концентрації

$$\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} - \left\{ \frac{2\alpha_{21}}{\alpha_1 + \alpha_{21}S(x, y)} - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 + \lambda_{21}S(x, y)} \right\} \left[\left(\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (40)$$

де $\alpha_{21} = \alpha_2 - \alpha_1$, $\lambda_{21} = \lambda_2 - \lambda_1$.

Аналітичний вигляд точного розв'язку нелінійного рівняння (40) є невідомим. Однак умовами, коли можна записати точний розв'язок рівняння теплопровідності (35) з $q_v(x, y) = 0$ при температурному полі вигляду (34), є $\lambda(x, y) = \lambda_x(x)\lambda_y(y)$, $\alpha(x, y) = \alpha_x(x)\alpha_y(y)$ при одному і тому ж $S(x, y)$. Це можливо, коли

$$S(x, y) = \frac{\lambda(x, y) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\alpha(x, y) - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

звідки

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \lambda_x(x)\lambda_y(y) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \alpha_x(x)\alpha_y(y),$$

$$t(x, y) = \frac{C}{\lambda_x(x)\lambda_y(y)} = \frac{C}{\lambda(x, y)} = \frac{\bar{C}}{\alpha(x, y)} = \frac{\bar{C}}{\alpha_x(x)\alpha_y(y)}.$$

Температурне поле повинно бути розв'язком рівняння теплопровідності, що призводить до рівняння відносно коефіцієнта теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\lambda(x, y)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\lambda(x, y)} \right) = 0, \quad (41)$$

та задовольняти умови на поверхнях.

Точним розв'язком рівняння (41), отриманого з рівняння теплопровідності, відносно $\lambda(x, y)$ є:

$$\lambda(x, y) = C_3 \exp \left[\frac{c}{2} (x + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{c}{2} (y + C_2)^2 \right]. \quad (42)$$

Зокрема, такими умовами на поверхнях є значення температур поверхонь

$$\begin{aligned} t(-a, y) &= \frac{C}{C_3 \exp \left[\frac{1}{2} c (-a + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} c (y + C_2)^2 \right]} = t_{-as}(y), \\ t(a, y) &= \frac{C}{C_3 \exp \left[\frac{1}{2} c (a + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} c (y + C_2)^2 \right]} = t_{as}(y), \\ t(x, -b) &= \frac{C}{C_3 \exp \left[\frac{1}{2} c (x + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} c (-b + C_2)^2 \right]} = t_{-bs}(x), \\ t(x, b) &= \frac{C}{C_3 \exp \left[\frac{1}{2} c (x + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} c (b + C_2)^2 \right]} = t_{bs}(x) \end{aligned} \quad (43)$$

та умови їх узгодження на ребрах (37).

Функція (42) не має екстремумів у прямокутній області, тому найбільші і найменші значення можуть досягатись на гранях бруса. Отже, задачу зведено до визначення температурного поля у брусі з заданого класу функцій вигляду

$$t = \frac{C}{\lambda(x, y)} = \frac{C}{C_3 \exp \left[\frac{1}{2} c (x + C_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} c (y + C_2)^2 \right]}, \quad \lambda(x, y) \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

яке повинно задовольняти умови (37) і (43). Отже, маємо визначити п'ять сталих c, C, C_1, C_2, C_3 з 4-х умов на межах при обмеженнях на значення коефіцієнтів теплопровідності $\lambda(x, y) \in [\lambda_1, \lambda_2]$ або температури, і $\lambda_1 / \lambda_2 = \alpha_1 / \alpha_2$. Це значить, що один параметр можна вибрати так, щоб значення коефіцієнта теплопровідності потрапило у задані межі.

Проілюструємо методику побудови виразів для температури і коефіцієнта теплопровідності. Вважаємо, що мінімальне значення температури (максимальне значення коефіцієнта теплопровідності, $c > 0$) на грані $x = -a$ досягається у заданій точці $y = -C_2$ ($C_2 > 0$) і значення $C_1 \in [-a, a]$. З умов (43) маємо для довільних $x \in [-a, a]$, $y \in [-b, b]$:

$$t_{-as}(y) = t_{as}(y) \exp(2aC_1), \quad t_{-bs}(x) = t_{bs}(x) \exp(2bC_2). \quad (44)$$

З умов (37) та (44) отримаємо $\exp(2aC_1) = \exp(2bC_2)$, звідки $C_1 = bC_2 / a$, а мінімальне значення коефіцієнта теплопровідності досягається у точці $(-C_1, b)$, а його максимальне значення у точці $(a, -C_2)$. Відношення коефіцієнтів теплопровідності для будь-яких допустимих x , y повинно бути меншим від λ_2 / λ_1 .

З цього припущення на основі властивостей нормального розподілу Гауса слідує, що при

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\lambda(a, -C_2)}{\lambda(-C_1, b)} = \frac{\exp\left[\frac{1}{2}c\left(a + C_2 \frac{b}{a}\right)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}c(b + C_2)^2\right]} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

і

$$0 < c \leq 2 \left[(a + C_1)^2 + (b + C_2)^2 \right]^{-1} \ln(\lambda_2 / \lambda_1).$$

Розраховано характеристики матеріалу при $a = 2$ м, $b = 6$ м, $\lambda_1 = 8$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 19.4$ Вт/(м·К), якщо температура $t_{-as}(y) \sim \exp[0.5c(y + C_2)^2]$, $C_2 = 0.5$. У результаті обчислень встановлено: $C_1 = 1.5$, $c \leq 0.0325$ і $C_3 = 15.897$ при $c = 0.0325$. На рис. 9 – 11 зображено при $C = 5000$ залежності концентрації,

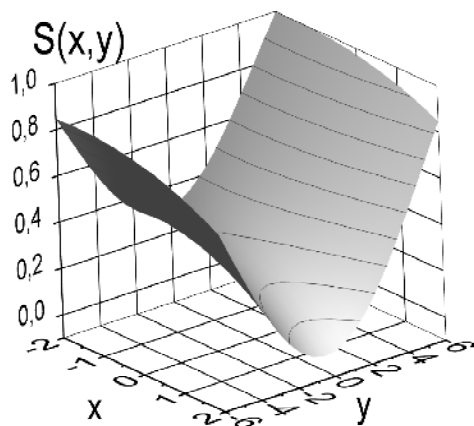


Рис. 9. Залежність концентрації у брусі від координат

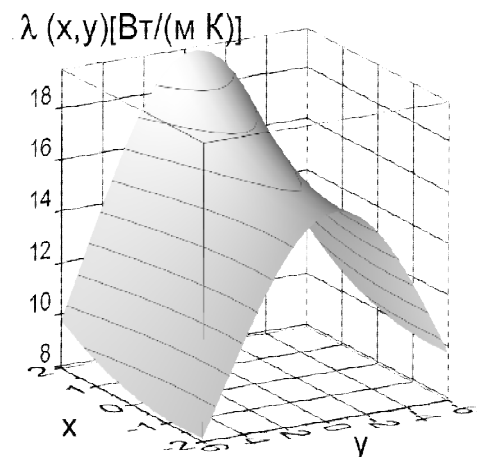


Рис. 10. Залежність коефіцієнта теплопровідності бруса від координат

коефіцієнта теплопровідності, температури від координат бруса, які забезпечують відсутність термонапружень у ньому. Характеристики взято

для реально існуючих матеріалів (оксид алюмінію, сталь), для яких виконується рівність $\lambda_1 / \lambda_2 = \alpha_1 / \alpha_2$.

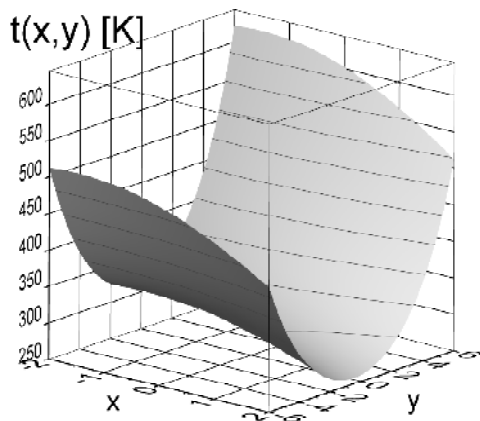


Рис. 11. Розподіл температури, який не викликає напружень у неоднорідному брусі

Отримано зв'язок між температурним полем та коефіцієнтом лінійного теплового розширення, який призводить до відсутності термонапружень у прямокутному неоднорідному брусі в різних умовах теплообміну, якщо результуючі моменти в перерізі задовольняють умови рівноваги. Встановлено допустимі розподіли заданих температурних полів на поверхнях бруса у вигляді функцій нормального розподілу Гауса, при яких термонапруження відсутні.

У цьому розділі «Умови відсутності напружень і способи їх досягнення у порожнистому циліндрі з характеристиками, залежними від двох координат» отримано вирази для температурного поля, яке не викликає напружень і запропоновано способи його забезпечення за рахунок умов нагрівання з різними законами тепловіддачі з зовнішнім середовищем при заданих характеристиках ФГМ та підборі характеристик матеріалу при заданих умовах тепловіддачі. Початок циліндричної системи координат вибрано на осі Oz , яка збігається з віссю симетрії циліндра. Радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра – ρ_1 і ρ_2 . Висота циліндра $h = z_2 - z_1$, $z = z_i$ ($i = 1, 2$) – рівняння площин, перпендикулярних до осі Oz .

Методика розв'язування задачі про визначення температурного поля, яке не викликає напружень є аналогічною до методики, застосованою до прямокутного бруса у розділі 6. За рівняннями теорії термопружності записано вираз для відповідного температурного поля:

$$t = C / \alpha(\rho, z). \quad (45)$$

Отримано аналітичні вирази для узгодження температур поверхонь або середовищ і густини потужності теплових джерел, які створюють температурні поля вигляду (45), а також для характеристик неоднорідних матеріалів, при яких температурне поле вигляду (45) не викликає термонапружень при відсутності теплових джерел в об'ємі циліндра.

Визначимо характеристики матеріалів і узгодження температур середовищ, які забезпечують відсутність напружень, в умовах конвективного теплообміну з середовищем.

Рівняння теплопровідності із заданим температурним полем (45) має вигляд

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(\rho, z) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\alpha(\rho, z)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(\rho, z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\alpha(\rho, z)} \right) = 0. \quad (46)$$

Для випадку $\alpha(\rho, z) = \alpha_\rho(\rho) \alpha_z(z)$ методом відокремлення змінних отримано зв'язок між коефіцієнтами теплопровідності та теплового лінійного розширення (D, c – довільні сталі):

$$\lambda(\rho, z) = \frac{D \alpha_\rho^2(\rho) \alpha_z^2(z) \exp \left[c \left(\int_{z_1}^z \frac{d\zeta}{\frac{d}{d\zeta} \ln \alpha_z(\zeta)} - \int_{\rho_1}^\rho \frac{d\eta}{\frac{d}{d\eta} \ln \alpha_\rho(\eta)} \right) \right]}{\rho \frac{d\alpha_\rho(\rho)}{d\rho} \frac{d\alpha_z(z)}{dz}}.$$

Для встановлення рівняння відносно концентрації $S(\rho, z)$ з використанням моделі простої суміші для опису характеристик матеріалу використано методику з розділу 4. У результаті отримаємо нелінійне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{\partial^2 S(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S(\rho, z)}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S(\rho, z)}{\partial \rho} + \left[\left(\frac{\partial S(\rho, z)}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial S(\rho, z)}{\partial z} \right)^2 \right] \left[\frac{2\alpha_{21}}{\alpha_1 + \alpha_{21}S(\rho, z)} - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 + \lambda_{21}S(\rho, z)} \right] = 0.$$

Аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності (46) існує, якщо

$$\begin{aligned} \lambda(\rho, z) &= \lambda_1 (1 - S(\rho, z)) + \lambda_2 S(\rho, z) = \lambda_\rho(\rho) \lambda_z(z), \\ \alpha(\rho, z) &= \alpha_1 (1 - S(\rho, z)) + \alpha_2 S(\rho, z) = \alpha_\rho(\rho) \alpha_z(z). \end{aligned} \quad (47)$$

Рівності (47) виконуються, якщо

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \lambda_\rho(\rho) \lambda_z(z) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \alpha_\rho(\rho) \alpha_z(z), \\ t(\rho, z) &= \frac{C}{\lambda_\rho(\rho) \lambda_z(z)} = \frac{C}{\lambda(\rho, z)} = \frac{\bar{C}}{\alpha(\rho, z)}, \quad S(\rho, z) = \frac{\lambda(\rho, z) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\alpha(\rho, z) - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

Методом відокремлення змінних з урахуванням (47) отримано аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності (46)

$$\lambda(\rho, z) = C_4 \rho^{-C_2} \exp \left[\frac{1}{4} C_1 \rho^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2 \right], \quad (48)$$

де C_i ($i = 1, 4$ – довільні сталі).

На лініях перетину площин $z = z_i$ ($i = 1, 2$) з циліндричними поверхнями $\rho = \rho_i$ ($i = 1, 2$) виконуються умови рівності температур середовищ:

$$t_{\rho_1}(z_1) = t_{z_1}(\rho_1), \quad t_{\rho_1}(z_2) = t_{z_2}(\rho_1), \quad t_{\rho_2}(z_1) = t_{z_1}(\rho_2), \quad t_{\rho_2}(z_2) = t_{z_2}(\rho_2), \quad (49)$$

де t_{ζ_i} ($\zeta = \rho, z$, $i = 1, 2$) – температури середовищ на поверхнях $\zeta = \zeta_i$. При цьому умови конвективного теплообміну мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{C}{\lambda(\rho_1, z)} - \frac{1}{\beta_{\rho_1}} C \left(C_2 \rho_1^{-1} - \frac{1}{2} \rho_1 C_1 \right) &= t_{\rho_1}(z), \\ \frac{C}{\lambda(\rho_2, z)} + \frac{1}{\beta_{\rho_2}} C \left(C_2 \rho_2^{-1} - \frac{1}{2} \rho_2 C_1 \right) &= t_{\rho_2}(z), \\ \frac{C}{\lambda(\rho, z_1)} - \frac{1}{\beta_{z_1}} C (C_1 z_1 + C_3) &= t_{z_1}(\rho), \quad \frac{C}{\lambda(\rho, z_2)} + \frac{1}{\beta_{z_2}} C (C_1 z_2 + C_3) = t_{z_2}(\rho). \end{aligned} \quad (50)$$

Звідси з використанням умов (49) отримано умови на коефіцієнти теплообміну:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}} &= \frac{C_2/\rho_1 - \rho_1 C_1/2}{C(C_1 z_1 + C_3)}, \quad \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}} = -\frac{C_2/\rho_1 - \rho_1 C_1/2}{C(C_1 z_2 + C_3)}, \\ \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}} &= -\frac{C_2/\rho_2 - \rho_2 C_1/2}{C(C_1 z_1 + C_3)}, \quad \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_2}} = \frac{C_2/\rho_2 - \rho_2 C_1/2}{C(C_1 z_2 + C_3)}. \end{aligned}$$

Розглянуто порожнистий неоднорідний циліндр з внутрішнім радіусом $\rho_1 = 0.5$, зовнішнім – $\rho_2 = 1$, значеннями $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, виготовлений з ФГМ з характеристиками $\lambda_1 = 8$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 19.4$ Вт/(м·К), $\alpha_1 = 7.5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $\alpha_2 = 18.2 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Задамо закон розподілу температури на поверхні $\rho = \rho_2$ у вигляді

$$t_{\rho_2}(z) = A_{\rho_2} \exp \left[\frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2 \right] + B_{\rho_2}, \quad (51)$$

який мусить виконуватись на основі умов (50) і подання коефіцієнта теплопровідності (48), коефіцієнт теплообміну $\beta_{\rho_2} = 200$ Вт/(м²·К) з поверхні $\rho = \rho_2$. Потрібно визначити розподіли температури середовища та коефіцієнти теплообміну на всіх інших поверхнях, розподіли температури, коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення всередині тіла, а також концентрації одного матеріалу в ФГМ. Задано природні фізичні обмеження: $\lambda_1 \leq \lambda(\rho, z) \leq \lambda_2$, $t_{\min} \leq t(\rho, z) \leq t_{\max}$, де $[t_{\min}, t_{\max}]$ – інтервал температур, в якому застосовна лінійна теорія термопружності, закон теплопровідності Фур'є, характеристики матеріалу не змінюють стрибкоподібно своїх значень (наприклад, внаслідок фазових переходів). Алгоритм розв'язування є наступним:

- побудова функції вигляду (51) і задання коефіцієнта β_{ρ_2} ;
- перевірка, чи значення коефіцієнта теплопровідності знаходиться в межах $\lambda_1 \leq \lambda(\rho, z) \leq \lambda_2$. Якщо ця умова не виконується, то слід змінити значення сталих A_{ρ_2} , B_{ρ_2} , C_1 , C_3 ;

- вибір точки z^* , в якій $t_{p_2}(z)$ приймає найбільше значення. Ця точка буде одночасно точкою на поверхні, в якій коефіцієнт теплопровідності буде найменшим (бо $t(\rho, z) = C / \lambda(\rho, z)$) і рівним λ_1 ;
- з умов на межах та умов рівності температур навколишнього середовища на перетинах циліндричних поверхонь і площин визначаємо сталі C_1, C_2, C_3, C_4, C .

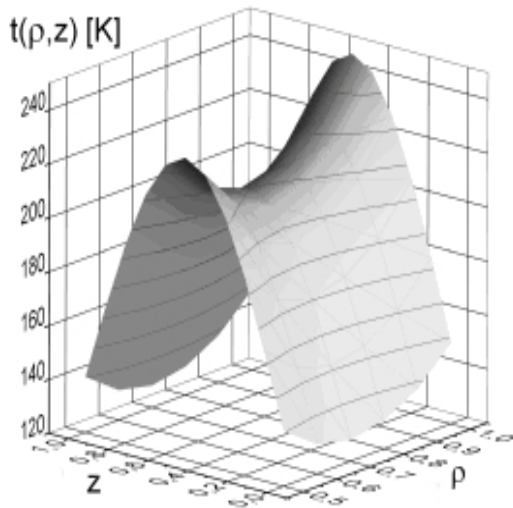


Рис. 12. Розподіл температури, який не викликає напружень у циліндрі

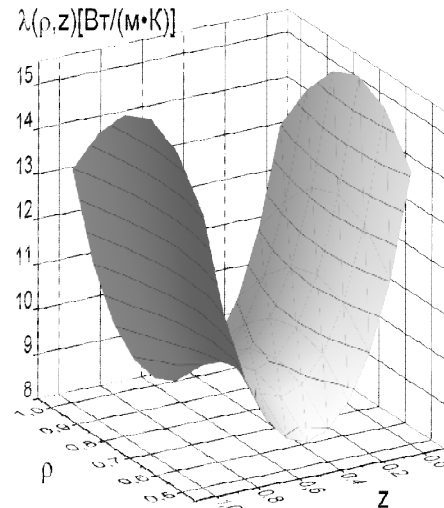


Рис. 13. Розподіл коефіцієнта тепло провідності, який забезпечує температурне поле на рис. 12 напружень у циліндрі

З умов на межах і рівності температур навколишнього середовища на перетині поверхонь одержано: $A_{p_2} = 150$ К, $B_{p_2} = 10$ К, $C_1 = -4$, $C_2 = 0.99$, $C_3 = 2$, $C_4 = 35.85$, $C = 1978.46$, $\beta_{p_1} = 193.54$ Вт/(м²·К), $\beta_{z_2} = 408.90$ Вт/(м²·К), $\beta_{z_1} = 395.69$ Вт/(м²·К). На рис. 12 – 15 подано залежності від координат температурного поля, яке не викликає напружень, відповідного коефіцієнта теплопровідності, концентрації, температур середовищ на гранях і температур поверхонь. Суцільними лініями позначено температури навколишнього середовища на поверхнях, а штриховими – поверхневі температури циліндра.

Отримано умови відсутності напружень в неоднорідному циліндрі у вигляді зв'язку між температурним полем та коефіцієнтом лінійного розширення.

Встановлено допустимі розподіли температурних полів у неоднорідному циліндрі та температури середовища, які не викликають термонапружень,

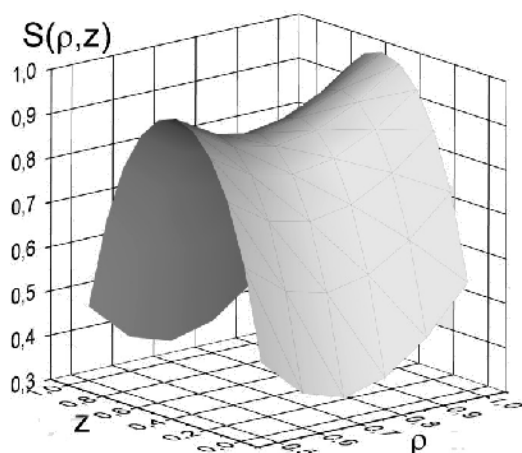


Рис. 14. Розподіл концентрації складової ФГМ, яка забезпечує температурне поле на рис. 12

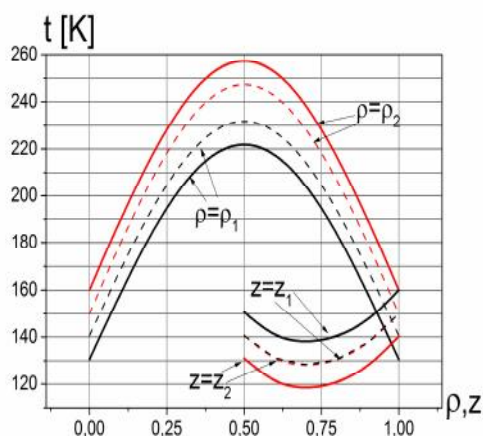


Рис. 15. Розподіли температур поверхонь та навколишнього середовища на них

і виражаються через добутки степеневих функцій від радіальної змінної на функції нормального розподілу Гауса від поздовжньої координати.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Робота стосується розв'язання важливої науково-технічної проблеми визначення термонапруженого стану неоднорідних елементів конструкцій (шар, порожнисті куля, циліндр) та оптимізації їх теплообміну з середовищем й концентрації складників ФГМ.

Отримано такі основні результати:

- математичну модель лінійної термопружності для неоднорідних тіл адаптовано для уніфікованого формулювання прямих та обернених задач щодо визначення розподілів напружень, спричинених додатковими полями, та умов їх відсутності зведенням задач термопружності до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду;
- запропоновано метод розв'язання прямих та обернених задач термопружності стосовно визначення напружено-деформованого стану неоднорідних тіл та забезпечення цільового розподілу термонапружень;
- сформульовано умови досягнення цільових розподілів компонент тензора напружень, зокрема відсутності термонапружень, у неперервно неоднорідних тілах;
- аналітично визначено одно- та двовимірні температурні поля у неоднорідних тілах простої форми із заданими характеристиками матеріалів, які забезпечують відсутність напружень у них;
- розроблено методику аналітичного визначення цільових характеристик неоднорідних матеріалів для забезпечення відсутності напружень у тілах із заданими температурними полями;
- в рамках моделі простої суміші характеристик матеріалів отримано точні розв'язки поставлених нелінійних обернених задач для двокомпонентних ФГМ;

- на основі запропонованих методик та алгоритмів побудовано та досліджено розв'язки низки обернених задач термопружності щодо забезпечення відсутності напружень або отримання заданого розподілу компонент тензора напружень у неоднорідних тілах.

З результатів проведених досліджень зроблено такі висновки.

- У неоднорідних тілах простої форми, виготовлених з досліджуваних ФГМ, урахування термочутливості матеріалу призводить до незначних відхилень (у межах кількох відсотків) розподілів температури, але значно більших розбіжностей для напружень (до десятків відсотків), деформацій і переміщень. У багатошарових структурах цей ефект підсилюється.
- Показано ефективність застосування отриманих у роботі інтегральних рівнянь щодо визначення розподілів термонапружень у тілах з багатошаровими покриттями, зокрема, порівняно з методом узагальнених граничних умов, при відносно товстих покриттях, які складаються з багатьох тонких.
- Максимальний перепад температур між різними поверхнями неоднорідних тіл, при яких можлива відсутність напружень, задається відношенням коефіцієнтів лінійного теплового розширення складових ФГМ.
- Методика визначення умов забезпечення відсутності термонапружень, яка полягає у забезпеченні існування крайових умов і характеристик матеріалів при відомому розв'язку задачі теплопровідності, отриманому з рівнянь, які описують напружений стан, є застосовною для інших додаткових полів.
- У випадку сталого коефіцієнта теплопровідності і залежних від координат характеристик ФГМ рівняння відносно концентрації однієї зі складових у двокомпонентному ФГМ спрощується. Це дає можливість отримати аналітичні розв'язки відносно концентрації для більшої кількості моделей характеристик ФГМ через характеристики складових.
- Рівність відношень коефіцієнтів теплопровідності та коефіцієнтів лінійного розширення складових ФГМ є критерієм забезпечення точних розв'язків поставлених в роботі обернених задач термопружності, якщо характеристики матеріалів залежать від двох координат та описуються моделлю простої суміші.
- Температури нагрівання поверхонь, задані функціями нормального розподілу Гауса, забезпечують нульові напруження у неоднорідних тілах у випадку відсутності об'ємних теплових джерел.
- Існує можливість використання елементів конструкцій канонічної форми, які працюють в умовах перепадів температур, без термонапружень, якщо врахувати умови нагрівання і характеристики складових матеріалів ФГМ цих елементів на етапі їх виготовлення.

ПЕРЕЛІК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях

1. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2004. Т. 82. № 4. С. 3–9.
2. Попович В. С., Калиняк Б. М. Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2005. Т. 48. № 2. С. 126–136.
3. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан багат шарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2005. Т. 83. № 2. С. 22–30.
4. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 2. С. 79–87.
5. Калиняк Б. М., Яцків І. І. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2009. Вип. 7. С. 142–150.
6. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння змінною верхньою межею динамічної задачі пружності у напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 8. С. 60–69.
7. Шевчук В. А., Калиняк Б. М. Напружений стан циліндричних тіл з багат шаровими неоднорідними покриттями. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41. Те саме: Shevchuk V. A., Kalynyak B. M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746–755. <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y>.
8. Калиняк Б. М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 141–147. Те саме: Kalynyak B. M. Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205. No. 5. P. 659–666. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0>.
9. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багат шарових термочутливих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 2. С. 169–186. Те саме: Popovych V. S., Kalynyak B. M. Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 215. No. 2. P. 218 – 242. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y>.
10. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Визначення температурного поля, що забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідній порожнистій кулі.

- Прикладні проблеми механіки і математики*. 2014. Вип. 12. С. 104–111.
11. Калиняк Б. М. Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2015. № 6. С. 46–56.
 12. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Інтегральне рівняння для визначення радіальних напружень у радіально-неоднорідній термочутливій порожнистій кулі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 109–117. Те саме: Artemyuk V. Yu., Kalynyak B. M. Integral equation for the radial stresses in a radially inhomogeneous hollow sphere. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223. No. 2. P. 132–144. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3343-2>.
 13. Калиняк Б. М. Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні термонапруження у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2015. Спецвипуск. С. 97–100.
 14. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Характеристики матеріалу неоднорідної вздовж радіуса порожнистої кулі, які забезпечують відсутність у ній радіальних напружень, коли задані теплові навантаження. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2015. Вип. 13. С. 141–148.
 15. Горошко В. О., Калиняк Б. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Математичне моделювання і визначення термопружного стану тришарової порожнистої кулі за складного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С. 123–132.
 16. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2016. Т. 52. № 1. С. 91–97. Те саме: Kalynyak B. M. Attainment of zero radial stresses in inhomogeneous long hollow cylinders by stationary temperature fields. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 1. P. 99–107. <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9931-3>.
 17. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі за рахунок неоднорідності матеріалу. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2016. Т. 52. № 2. С. 104–110. Те саме: Kalynyak, B.M. Guaranteeing the absence of radial stresses in a long hollow cylinder by the inhomogeneity of material. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 2. P. 261–268. <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9953-x>.
 18. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформованих твердих тіл. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59. № 3. С. 28–42. Те саме: Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V., Yasinsky A.V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 236. No. 1. P. 21–34. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
 19. Калиняк Б. М. Нестационарное температурное поле у неоднорідному за

- товщиною довгому порожнистому циліндрі, яке забезпечує відсутність напружень. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2017. Вип. 3. С. 67–70.
20. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Незв'язана квазістатична задача термopружності для двошарової термочутливої нескінченної плити. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2018. Вип. 27. С. 19–27.
 21. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М., Кутнів М. В. Незв'язана квазістатична задача термopружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2018. Т. 61. № 4. С. 66–77.
 The same: Harmatiy G. Y., Kalynyak B. M., Kutniv M. V. Uncoupled quasistatic problem of thermoelasticity for a two-layer hollow thermally sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. V. 256. P. 439–454. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05437-9>.
 22. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2019. Вип. 1. С. 66–69.
 23. Калиняк Б. М. Стаціонарне температурне поле, яке забезпечує відсутність термонапружень у неоднорідному прямокутному брусі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. Т. 62. №4. С. 172–179. The same: Kalynyak B. M. Stationary temperature field ensuring the absence of stresses in an inhomogeneous rectangular beam. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265. No.3. P.551–560. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06070-w>.
 24. Калиняк Б. М. Температурні поля, які не викликають напружень у неоднорідному осесиметричному порожнистому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2021. Т. 64. № 1. С. 149–160. The same: Kalynyak B. M. Temperature Fields that do not Cause Stresses in an Inhomogeneous Axisymmetric Hollow Cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274. No.5. P. 761–775. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06634-4>.
 25. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Вплив термочутливості матеріалів на термонапружений стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2022. Т. 58. № 3. С. 97–104. The same: Harmatiy G.Y., Kalynyak B.M. Influence of thermal sensitivity of materials on the thermal stressed state of a three-layer hollow cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Materials Science*. 2022. Vol. 58. P. 385–394. <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5>.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

26. Ma C. C., Tokovyy Yu. V., Kalynyak B.M. Nonhomogeneous solids: Integral

- equation approach. *Encyclopedia of Thermal Stresses*/Editor: Prof. Richard B. Hetnarski. Springer edition. 2014. Vol. 7. P. 3350–3356.
27. Kalynyak B. M., Popovych V. S. Thermal stresses in multi-layer thermal sensitive cylinder at asymptotic thermal conditions. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (Thermal Stresses 2005. Mai 26 – 29, Vienna, Austria). 2005. P.119–122.
 28. Shevchuk V., Kalynyak B., Tokovyy Yu. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007. 4–7 June. National Taiwan University of Science and Technology, Taipei, Taiwan). 2007. P. 549–552.
 29. Yasinskiy A., Kalynyak B., Tokovyy Yu., Yuzvyak M. Identification of thermal and thermostressed states at frictional heating via the surface displacements for a two-layer cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007, 4-7 June, National Taiwan University of Science and Technology. Taipei. Taiwan). 2007. P. 567–570.
 30. Калиняк Б. М. Вклади температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу у розподіл температури і напружень у довгому шаруватому порожнистому циліндрі при асимптотичному тепловому режимі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф.* (Львів, 26–29 травня 2003 р.). Національна академія наук України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, Львів. 2003. С. 118–121.
 31. Kalynyak B., Teslyuk A., Tokovyy Yu. The analysis of elastic and thermoelastic equilibrium of inhomogeneous in radial direction circular cylinders. *Proceedings of the 35-th Solid Mechanics Conference* (Kraków, September 4–8, 2006). 2006. P. 318.
 32. Калиняк Б. М. Прості аналітичні вирази для визначення напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т.* (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2006. С. 198–199.
 33. Kushnir R., Yasinskyu A., Kalynyak B. Identification of thermal stressed state in nonhomogeneous thermal sensitive cylindrical bodies using the surface displacements. *Proceedings of the 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)* (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), June 30 – July 5, 2008, Venice, Italy). 2008. 2 pp.
 34. Калиняк Б. М., Шевчук В. А. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали доповідей міжнар. наук. конф.* (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів. 2008. Т. 1. С. 244–245.
 35. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння квазістатичної теорії пружності у напруженнях у неоднорідних тілах простої форми при змішаних граничних умовах *Обчислювальна математика і математичні проблеми*

- механіки* /Під заг.ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2009. С. 118–119.
36. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння динамічної теорії пружності в напруженнях у довгому неоднорідному циліндрі. *Сучасні проблеми механіки*. (Львів, грудень 7–9. 2009). 2009. С. 71.
 37. Tokovyy Yu., Yasinsky A., Kalynyak B. An efficient method for analysis of steady-state stresses and optimal heating control in inhomogeneous composites. *The Sixteenth International Conference on Mechanics of Composite Materials: Book of Abstracts*. (Riga, Latvia, May 24–28, 2010). Riga: Institute of Polymer Mechanics, 2010. P. 97.
 38. Калиняк Б. М. Керування температурними напруженнями і переміщеннями у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т./під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 2. С. 213–214.
 39. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* /під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів. 2014. С. 181 – 183.
 40. Кушнір Р. М., Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термонапруженого стану багат шарових термочутливих куль. *Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки»*. (Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 27–29 серпня 2015 р.) Київ. 2015. С. 45.
 41. Калиняк Б. М. Температурні поля і характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки»*. (Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки, 27–29 серпня 2015 р.). Київ. 2015. С. 33.
 42. Kushnir R. M., Popovych V. S., Kalynyak B. M. Modelling and methods for determination of the thermo-stressed state in the hollow multi-layer thermal sensitive spheres. *International V. Skorobahatko Mathematical Conference. Abstracts* (August 25–28. 2015. Drohobych, Ukraine), Lviv, 2015. P. 91.
 43. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Розвиток ідей професора Василя Вігака стосовно розв'язування прямих та обернених задач термомеханіки. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня, 2016 р., Львів.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С.

- Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.39–46. Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
44. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Харченко В. М. Про дослідження термопружного стану довгих термочутливих шаруватих циліндричних тіл. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.263. Режим доступу: <https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.pdf>.
 45. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі за умов нестационарного теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016, С.268. Режим доступу: <https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf>.
 46. Калиняк Б. М., Шевчук В. А. Методика розрахунку термо-напруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.269. Режим доступу: <https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf>.
 47. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Аналітико-числові методи визначення термопружного стану довгих термочутливих шаруватих порожнистих тіл. Тези конференції «Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу». (28–30 вересня 2016 р. Дніпро). Дніпропетровський національний університет. Дніпро. 2016. С. 94.
 48. Калиняк Б. М. Забезпечення відсутності напружень, викликаних нестационарним температурним полем у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі умовами теплообміну. Матеріали конференції (5-а Міжнародна науково-технічна конференція «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій». 27–28 жовтня 2016 р., Львів). КІНПАТРИ ЛТД. Львів. 2016. С. 29–31. https://znc.com.ua/ukr/news/2016/201610_konferenz10.pdf.
 49. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідних тілах простої форми та деякі способи їх реалізації. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 1. С. 235. <https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>.

50. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Неусталений термопружний стан термочутливої двошарової плити із залежними від поперечної координати характеристиками. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2018, Т. 1. С. 157–158. <https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>.
51. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї Міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРИ ЛТД. 2018. С. 41–42. http://znc.com.ua/ukr/news/2016/201810_konf1.pdf.
52. Калиняк Б. М., Стащук М. Г. Напруження, викликані концентрацією водню у суцільному металевому тілі. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Тези доповідей* (Друга міжнародна науково-технічна конференція пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження). Дніпро 10–12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 163–164.
53. Калиняк Б. М. Необхідні умови відсутності термонапружень у неоднорідному довгому стержні з прямокутним перерізом і можливість їх реалізації. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р. М. Кушніра і Г. С. Кіта. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України Львів. 2019. Вип. 5. С. 259.
54. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Матеріали V Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки»*. (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 28–30 серпня 2019 р.). Київ. 2019. С. 91.
55. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному порожнистому циліндрі скінченної довжини та способи їх реалізації. *Сучасні проблеми термомеханіки – 2021*: збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів (за заг. ред. Р. М. Кушніра і Ю. В. Токового). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. С. 175–176.

Анотація. Калиняк Б. М. Аналітичне визначення термосилових навантажень, які забезпечують цільові термонапружені стани у неоднорідних тілах. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2023.

У дисертації розвинуто математичні моделі теорії термопружності стосовно визначення температурних полів, які не викликають напружень у неоднорідних тілах або забезпечують заданий розподіл складової компоненти тензора напружень.

Сформульовано задачі встановлення температурних полів, які спричиняють заданий розподіл компоненти тензора напружень, зокрема, нульовий у неоднорідних тілах з використанням інтегральних рівнянь у випадку залежності термонапруженого стану та характеристик матеріалу від однієї координати. Встановлено умови, які повинні задовольняти температурні поля і характеристики матеріалу для забезпечення відсутності термонапружень у довгому прямокутному брусі та осесиметричному циліндрі.

Для визначення ефективних характеристик матеріалів в рамках моделі простої суміші і температурних полів, які не спричиняють напружень, розроблено методику аналітичного розв'язування нелінійних відносно концентрації складових рівнянь, отриманих з рівняння теплопровідності з різними умовами теплообміну.

Аналіз числових експериментів вказує на можливість досягнень станів з відсутністю термонапружень в реально існуючих матеріалах при технологічно допустимих умовах нагрівання.

Ключові слова: термопружність, теплопровідність, обернені задачі, нелінійні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння, функціонально-градієнтні матеріали, відсутність термонапружень, цільові термонапруження.

Abstract. Kalynyak B.M. Analytical determination of thermoforce loads of inhomogeneous bodies to ensure target thermal stress states. – Manuscript.

Thesis for a degree of the Doctor in Physics and Mathematics. Specialty 01.02.04 “Mechanics of Deformable Solids”. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2023.

The purpose of the work is the development of mathematical models and methods for determining and analyzing the stress-strain state of heterogeneous elastic bodies to establish heating conditions and criteria for the selection of elastic and thermophysical characteristics of materials that provide stationary and non-stationary temperature fields corresponding to the desired indicators of the thermomechanical behavior of heterogeneous structural elements, in particular absence of temperature stresses.

To obtain all results, a classical mathematical model of the stress-strain state of elastic bodies is used, taking into account the dependence of the characteristics

of the materials of the bodies (hollow and solid cylinders, hollow spheres, layers) on one and two coordinates and temperature.

Based on the further development of the method of direct integration of the equations of elasticity and thermoelasticity of inhomogeneous and thermosensitive (taking into account the dependence of the physical and mechanical characteristics of the material on temperature) bodies, the problem of determining the temperature fields that cause a given distribution of the components of the stress tensor, in particular zero, in elastic heterogeneous hollow spheres and cylinders, layers has been developed. The implementation of such a temperature field is achieved by matching the characteristics of materials and thermal fields.

Exact analytical expressions for the characteristics of the material and the temperature field have been obtained, which lead to the absence of stresses in functional gradient materials (FGM) for steady and non-steady thermal fields. The numerical calculations used the characteristics of real materials.

Necessary and sufficient conditions are given so that temperature fields do not create thermal stresses in bodies when the thermal stress state and characteristics of the material depend on two coordinates.

The proposed integral equations are at the same time integral Fredholm equations of the second kind with respect to thermal stresses and with respect to the temperature field. It is shown the possibility of different ways of choosing the key component stresses for solving the problems, depending on the boundary conditions. Analytical and numerical methods for solving the obtained integral equations have been developed.

These equations are used to determine the stress-strain state in multilayer structures with temperature- and coordinate-dependent characteristics, as well as to solve direct problems of thermoelasticity in single- and multilayer bodies, taking into account the dependence of the material characteristics on the coordinate and temperature and for heterogeneous thin coatings. Numerical calculations of stresses and displacements for a long non-homogeneous cylinder with a thin coating were performed in order to compare the proposed approach with the method of determining the stress state in a multi-layer non-homogeneous coating based on the method of generalized boundary conditions. Taking into account the thinness of the coating by replacing the corresponding integrals with the trapezoidal formula for thin multilayer coatings gives the same results as the method of generalized boundary conditions. In the case of thick coatings made from many thin ones, where the mentioned above method either doesn't work or needs a lot of changes, satisfactory results are usually achieved. These integral equations also take into account the effect on the thermal stress state of the coating inhomogeneity and the thermal sensitivity of the substrate on which the coating is applied.

From the proposed integral equations, the temperature field is determined, which causes the specified distribution of the stress tensor component, in particular, the absence of stresses. This temperature field must satisfy the corresponding heat transfer problem (stationary or non-stationary). Based on this problem, the conditions for matching temperatures and heat exchange at the

boundaries, heat sources, material characteristics, which ensure the absence of stresses in the body, are analytically determined. Analytical solutions of the thermal conductivity problem with respect to FGM characteristics are obtained within the framework of a simple mixture model, written through Lambert's W-functions. Numerical results obtained for FGM metal-ceramics indicate the possibility of designing materials for bodies of simple shape, in which, with large temperature differences between the surfaces, a given distribution of stress components or the absence of stresses is achieved. With this approach, the value of surface temperatures is inversely proportional to the value of coefficients of linear thermal expansion under boundary conditions of the first kind.

Exact analytical expressions for heating conditions and heat sources, when the characteristics of the FGM are known, as well as for the material characteristics corresponding to the given heating conditions in the absence of volumetric heat sources, are obtained. An additional limitation of obtaining accurate analytical solutions of the inverse problem of thermoelasticity with respect to material characteristics within the framework of a simple mixture model leads to the requirement of a directly proportional relationship between the coefficients of linear thermal expansion and the thermal conductivity of FGM components.

In the case of the dependence of the material characteristics on two coordinates, the analytical expressions for the temperature field, which does not cause thermal stresses, are expressed through Gaussian distribution functions.

Approbation of the proposed approaches was carried out for bodies of different shapes (layer, hollow cylinder and sphere) with the characteristics of actually existing materials or materials that can be technologically created. The adequateness of the results is checked by the fulfillment of the relevant equations and boundary conditions.

Key words: thermal elasticity, thermal conductivity, inverse problems, nonlinear differential equations, integral equations, functionally graded materials, absence of thermal stresses, target thermal stresses.

