НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

КОЗАЧОК
Олег Петрович

УДК 539.3

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ТІЛ З РЕГУЛЯРНО РОЗТАШОВАНИМИ ВИЇМКАМИ РІЗНОЇ ФОРМИ З ГАЗОРІДИННИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико–математичних наук, професор
Мартиняк Ростислав Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
завідувач відділу математичних проблем
контактної механіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор
Говоруха Володимир Борисович,
Дніпропетровський державний
аграрно-економічний університет МОН України,
завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико–математичних наук, доцент
Пастернак Ярослав Михайлович,
Луцький національний технічний
університет МОН України,
професор кафедри технічної механіки.

Захист відбудеться "__6__" _вересня___ 2016 р. о _15^{00}_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано "_3_" ___серпня__ 2016 р

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико–математичних наук Ясінський А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним із способів підвищення показників працездатності контактних з'єднань є текстурування поверхонь, яке полягає у формуванні регулярно (періодично) розташованих виїмок, ямок чи канавок однакової форми на межі твердого тіла. Для створення регулярної поверхні використовують різноманітні технології: лазерне текстурування, точне алмазне точіння, тиснення, гравіювання, вібропрокат, струменеву абразивну обробку, мікроелектроерозійну обробку, шліфування тощо. За контакту текстурованих поверхонь між ними виникають періодично розташовані міжконтактні зазори. У реальних умовах експлуатації ці зазори можуть бути заповнені певною речовиною (мастилом, охолоджуючим середовищем, рідиною або газом), яка чинить додатковий тиск на спряжені поверхні. Розв'язки контактних задач для поверхонь з періодичними масивами виїмок з урахуванням впливу заповнювача міжконтактних зазорів дозволяють визначити контактні параметри і прогнозувати контактну міцність та жорсткість текстурованих тіл, що працюють у різних газорідинних середовищах.

В останні десятиліття активно проводяться наукові дослідження взаємодії деформівних тіл з урахуванням рідини, яка змочує їх поверхні. Прикладний інтерес до цих робіт зумовлений, зокрема, потребою кількісної оцінки впливу рідини на функціонування жорстких дисків комп'ютерів, мікро- та нановимірювальної техніки, біологічних структур, на механічну поведінку гранульних матеріалів, коли волога, конденсуючись на межах тіл, під дією поверхневого натягу переміщається у найвужчі місця міжконтактних зазорів.

На сьогодні в літературі відомі розв'язки контактних задач для тіл лише з поодинокими тунельними і круговими в плані виїмками, коли міжповерхневий зазор (просвіт) заповнений газом і/або рідиною. Дослідження ж взаємодії тіл з регулярним рельєфом обмежуються кількома працями, в яких розглянуто контакт тіл з гладкими періодично розташованими нерівностями, коли зазори цілком заповнені ідеальним газом або рідиною. Відсутні моделі механічної взаємодії тіл, періодичні просвіти між якими частково заповнені рідиною, з урахуванням її поверхневого натягу. Не вивчена також контактна поведінка тіл за множинного характеру поверхневих заповнених виїмок з кутовими точками, які формуються на поверхнях внаслідок різноманітних технологій текстурування.

У зв'язку з цим постає необхідність розвинення методики дослідження пружної взаємодії тіл з періодично розташованими виїмками за наявності газорідинного заповнювача міжконтактних зазорів та вивчення на цій основі локальних й ефективних контактних параметрів тіл з регулярним рельєфом з урахуванням механічної дії заповнювача зазорів та різної форми виїмок. Сформульоване завдання є актуальним з погляду розвитку контактної механіки тіл з поверхневими неоднорідностями та відображає запити трибології, машинобудування, геофізики, біомеханіки та інших галузей в розробці методів прогнозування фактичної площі контакту, контактної міцності й жорсткості з'єднань, що функціонують в різноманітних середовищах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України “Математичне моделювання взаємодії тіл з мікротекстурованими і нерегулярними поверхнями та межовими шарами за контактного тепломасообміну” (№ держреєстрації 0110U004820, 2011–2015 рр.) та “Математичні моделі і розвиток методів дослідження пружної і термопружної взаємодії тіл за впливу адгезії та змінних межових параметрів” (№ держреєстрації 0115U007255, 2016–2020 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є встановлення закономірностей контактної поведінки ізотропних тіл з періодично розташованими плиткими виїмками різної форми за дії силового навантаження та механічного впливу рідини і/або газу у міжповерхневих зазорах. Досягнення мети передбачає:

– моделювання механічного контакту тіл з регулярним рельєфом, коли періодично розташовані зазори між ними цілком заповнені стисливою рідиною, ідеальним чи реальним газом, або частково заповнені газом, а частково – нестисливою рідиною, що змочує чи не змочує поверхні тіл;
– розвиток математичної методики дослідження плоских періодичних контактних задач теорії пружності для півнескінченних тіл за механічного впливу заповнювача міжповерхневих зазорів, яка базується на зведенні задач до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від функції висоти періодично розташованих зазорів та трансцендентних рівнянь для визначення тиску газу або рідини, ширини зазорів та ділянок з рідиною і газом;
– побудову аналітичних і аналітично-числових розв’язків контактних задач теорії пружності для тіл з періодичною системою плитких виїмок різної геометричної форми (з кутовими точками або гладких) та тіл з хвилястою поверхнею за різноманітних варіантів заповнення газом і/або рідиною міжконтактних зазорів;
– аналіз впливу форми виїмок, кількості рідини й газу в зазорах, поверхневого натягу й змочуваності рідини на локальні (контактний тиск поверхонь тіл, форму зазорів, локалізацію ділянок з рідиною й газом) та на ефективні (контактне зближення і податливість тіл) контактні параметри.

Об’єктом досліджень є взаємодія пружних тіл з регулярним рельєфом.

Предметом досліджень є контакт півнескінченних ізотропних тіл з періодично розташованими поверхевими виїмками за механічного впливу рідини і/або газу, якими заповнені міжповерхневі просвіти.

Методи досліджень. Для досягнення сформульованої мети в роботі використано метод комплексних потенціалів, методи теорії функції комплексної змінної, метод сингулярних інтегральних рівнянь, числові методи розв’язування трансцендентних рівнянь (зокрема, метод послідовних наближень).

Наукова новизна роботи полягає у постановці контактних задач для пружних тіл з регулярним рельєфом, періодично розташовані просвіти між якими заповнені газорідинною субстанцією, розвиненні методики їх розв’язання та отриманих результатах. В роботі:

- сформульовано новий клас плоских контактних задач теорії пружності для півнескінченних тіл з регулярним рельєфом, сформованим періодично розташованими плиткими виїмками (з кутовими точками або гладкими), чи хвилястістю поверхонь за наявності в міжконтактних зазорах стисливої рідини, ідеального чи реального газу, або одночасно газу й рідини, що змочує чи не змочує поверхні тіл;

- розвинуто методику дослідження поставлених задач, яка полягає у:
  - поданні напружень і переміщень у тілах через функцію висоти періодично розташованих міжповерхневих просвітів та побудові сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від цієї функції;
  - аналітичному розв’язанні отриманого інтегрального рівняння та визначенні висоти періодичних зазорів між тілами через відому форму виїмок та невідомі силові (тиск рідини і газу) і геометричні (ширина зазорів, ширина ділянки з рідиною, висота рідинного меніска) параметри;
  - поданні в термінах функції висоти зазорів рівняння стану стисливої рідини, рівняння Клапейрона-Менделєєва для ідеального газу, рівняння Ван-дер-Ваальса для реального газу, формули Лапласа, умов плавного змикання берегів періодичних зазорів і рівності діаметра меніска висоті зазору в точці розмежування рідини й газу та отриманні трансцендентних рівнянь для визначення невідомих геометричних і силових параметрів;
  - вираженні через висоту зазорів контактних зближення і податливості тіл;
- побудовано аналітично-числові розв’язки контактних задач для тіл з регулярною системою виїмок, коли у періодично розташованих міжповерхневих зазорах міститься рідина, яка змочує або не змочує поверхні тіл, і газ, що перебуває під сталим тиском;
- досліджено контакт тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих плитких виїмок з кутовими точками, що в перерізі мають прямокутний чи квазіеліптичний профіль і містять газорідинний заповнювач;
- проаналізовано контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом, коли міжповерхневі просвіти містять газ і рідину, яка змочує або не змочує поверхні тіл;
- досліджено особливості контактної поведінки тіл, періодично розташовані зазори між якими заповнені газорідинною субстанцією, за силового навантаження і вивчено вплив форми виїмок, кількості газу й рідини в зазорах, стисливості, змочуваності та поверхневого натягу рідини на ширину ділянок з рідиною й газом, висоту зазорів, контактний тиск, контактне зближення та контактну податливість тіл.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи формують теоретичне підґрунтя для вивчення контактної поведінки технічних і природних структур з регулярним рельєфом в різних газорідинних середовищах і мають перспективу застосування в трибології, біомеханіці, машинобудуванні та геофізиці для оцінювання впливу заповнювача міжповерхневих просвітів на контактну податливість й міцність вузлів і з’єднань. Деякі теоретичні і прикладні положення дисертації використано під час виконання спільного українсько-білоруського проекту ДФФД та БРФФД “Моделювання капілярних і адгезійних явищ при контактній взаємодії пружних мікротекстурованих тіл” (№ держреєстрації 0114U005079, 2013 р.).

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням положень класичної теорії пружності ізотропних тіл, механіки рідин і газів; строгістю та фізичною коректністю формулювань контактних задач; використанням апробованих аналітичних і числових методів; граничним переходом в аналітичних виразах для порівняння з розв’язками простіших задач; відповідністю висновків фізичній суті досліджуваних явищ; узгодженням часткових результатів із відомими в літературі.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані здобувачем самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, автору належить участь у постановці задач, розвиток і реалізація підходу, який грунтується на застосуванні методу функцій міжконтактних зазорів до дослідження пружної взаємодії тіл з регулярним рельєфом за наявності різних видів газорідинного заповнювача просвітів між ними, побудова аналітичних розв'язків, розробка та реалізація числових алгоритмів, числовий аналіз залежності контактних параметрів від вхідних даних задач, графічна візуалізація результатів та участь у їх інтерпретації. Науковому керівнику д. ф.-м. н. Мартиняку Р. М. у працях [1-6, 13] належать визначення напрямку досліджень, ідеї щодо постановки і методів розв'язування задач, участь в інтерпретації результатів. Співавторові Слободяну Б. С. у працях [1-11, 13] належить участь у формулюванні задач, ідеї щодо числових підходів до розв'язування отриманих трансцендентних рівнянь, участь в аналізі результатів. У праці [10] Чумаку К. А. належить дослідження впливу сухої адгезії поверхонь міжконтактних зазорів на контактну взаємодію двох тіл з регулярним рельєфом.

Апробація результатів. Основні положення і результати дисертації доповідались і обговорювалися на Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2013); Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь" (Одеса, 2013); IX Міжнародній науковій конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (Львів, 2014); III Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки" (Київ, 2015); Науково-технічній конференції "Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент" (INTERPOR'15) (Львів, 2015); Конференціях молодих вчених "Підстригачівські читання" (Львів, 2014, 2015).

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалася в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України на об'єднаному науковому семінарі відділів обчислювальної механіки деформівних систем і математичних проблем контактної механіки під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Михаськіва та загальноінститутському науковому семінарі „Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ" під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.ф-м.н., проф. Г.С. Кіта; в Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара МОН України на науковому семінарі кафедри теоретичної і прикладної механіки під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Лободи; в Луцькому національному технічному університеті МОН України на науковому семінарі кафедри технічної механіки під керівництвом д.ф.-м.н., доц. Я.М. Пастернака.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 13 наукових праць [1-13], зокрема 6 статтей [1-6] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України. Праці [2, 3] опубліковані в журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus. Праця [12] опублікована автором одноосібно.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із переліку умовних позначень і скорочень, вступу, п'яти розділів, що містять 122 рисунки, висновків, списку літератури із 284 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 189 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 149 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Перелік умовних позначень і скорочень містить специфічну термінологію і позначення, які використовуються у дисертаційній роботі більше трьох разів.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи та її зв’язок із науковою тематикою установи, в якій працює автор; сформульовано мету та задачі досліджень; охарактеризовано новизну, достовірність та практичну значимість отриманих результатів; наведено дані про їх апробацію; вказано кількість публікацій за темою дисертації та особистий внесок здобувача; описано структуру роботи.

У **першому розділі** наведено огляд наукових праць, близьких за напрямком до теми дисертації; висвітлено стан досліджень контактної взаємодії тіл за наявності рідини або газу в області спряження; окреслено місце роботи серед сучасних досліджень з цієї проблематики.

Другий розділ стосується формулюванню контактних задач про взаємодію двох півнескінченних ізотропних тіл з регулярним рельєфом з урахуванням газу і/або рідини, що заповнюють періодично розташовані зазори.

У праці розглянуто два варіанти форм виїмок: виїмки без кутових точок (гладкі виїмки) та виїмки з кутовими точками.

У випадку гладких виїмок розглянуто взаємодію двох лінійно пружних ізотропних півпросторів з різними механічними характеристиками. Поверхня нижнього півпростору є плоскою. Поверхня верхнього півпростору має періодичну систему плитких, тунельних виїмок без кутових точок завширшки $2c$ кожна з максимальною висотою A ($A \ll 2c$), розташованих з періодом d вздовж усієї межі. Форма виїмок описується парною, неперервно-диференційованою періодичною функцією $r(x) = r(x+kd)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), такою що $r(x) << 2c$, $r'(x) << 1$, $r(\pm c) = r'(\pm c) = 0$. Ззовні виїмок межа верхнього тіла плоска.

Тіла контактують без тертя під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження $\sigma_y = -P^{\infty}$ за умов плоскої деформації. Зважаючи на це, розглянуто взаємодію двох півплощин D_1 і D_2, які є перетинами нижнього та верхнього півпросторів площиною Oxy, перпендикулярною до твірної виїмок. Внаслідок наявності регулярної системи виїмок на межі одного з тіл за дії навантаження їх безпосередній механічний контакт неповний (рис. 1) і між ними формуються міжповерхневі зазори (просвіти) шириною $2a$ ($a \le c$). Вважаємо, що зазори заповнені рідиною і/або газом, тиск яких рівний $P_f(x)$. Форма зазорів, тобто їх ширина $2a$ і висота $h(x)$ змінюється з навантаженням.

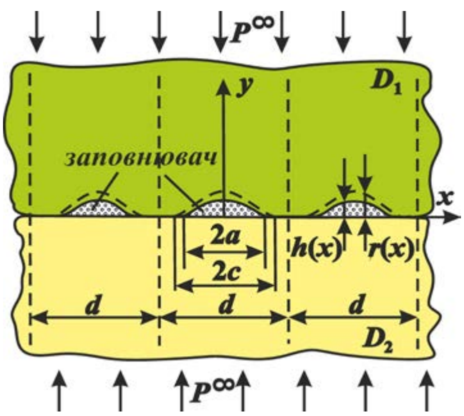

Рис. 1

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

- на ділянках контакту тіл $a \le |x - kd| \le d/2$:

$$\sigma_{yy}^{+}=\sigma_{yy}^{-},\ \tau_{xy}^{-}=\tau_{xy}^{+}=0,\ v^{-}-v^{+}=\begin{cases} r(x), & a\le|x-kd|<c,\\ 0, & c\le|x-kd|\le d/2; \end{cases} \quad (1)$$

- на ділянках міжконтактних зазорів $|x-kd|<a$:

$$\sigma_{yy}^{+}=\sigma_{yy}^{-},\quad \sigma_{yy}^{+}=-P_f\left(x\right),\quad \tau_{xy}^{+}=\tau_{xy}^{-}=0; \quad (2)$$

- на нескінченності $\left(y\to\pm\infty\right)$:

$$\sigma_{yy}=-P^{\infty},\quad \sigma_{xx}=0,\quad \tau_{xy}=0, \quad (3)$$

де v – складова вектора переміщення вздовж осі Oy; σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; індекси „+” і „–” позначають граничні значення функції при прямуванні точки до осі Ox у верхній і нижній півплощинах ($y\to\pm0$).

У випадку виїмок з кутовими точками розглянуто безфрикційний контакт пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має періодичну систему розташованих з періодом d плитких тунельних виїмок форми $r(x)$, ширини $2c$ ($|r(x)|<<2c$). Пружний півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^{∞}. У зв’язку з наявністю виїмок між тілом і основою утворюються зазори висоти $h(x)$, ширина яких в процесі навантаження не змінюється ($2a=2c$).

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

- на ділянках контакту тіл $a\le|x-kd|\le d/2$:

$$\tau_{xy}=0,\quad v=0; \quad (4)$$

- на ділянках міжконтактних зазорів $|x-kd|<a$:

$$\sigma_{yy}=-P_f\left(x\right),\quad \tau_{xy}=0; \quad (5)$$

- на нескінченності $\left(y\to\pm\infty\right)$:

$$\sigma_{yy}=-P^{\infty},\quad \sigma_{xx}=0,\quad \tau_{xy}=0. \quad (6)$$

У праці розглянуто чотири варіанти заповнення міжповерхневих зазорів:

а) зазори цілком заповнені однаковою кількістю ідеального газу, тиск якого $P_f\left(x\right)=P_1$ описується рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$P_1V_1=mRT/\mu, \quad (7)$$

де m і V_1 – маса і об’єм газу, що припадають на одиницю довжини зазору; μ – молярна маса газу; T – температура газу; R – універсальна газова стала;

б) зазори цілком заповнені однаковою кількістю стисливої рідини, тиск якої $P_f\left(x\right)=P_2$ описується рівнянням стану стисливої баротропної рідини:

$$V_2\exp(P_2/B)=V_0, \quad (8)$$

де V_2 – об’єм рідини, що припадає на одиницю довжини зазору; B – модуль об’ємної пружності рідини; V_0 – об’єм рідини в початковому стані за відсутності тиску;

в) зазори цілком заповнені однаковою кількістю реального газу. Для опису поведінки речовини в газоподібному і рідкому станах, а також процесу фазового переходу від одного стану в інший, будемо використовувати рівняння стану реаль-

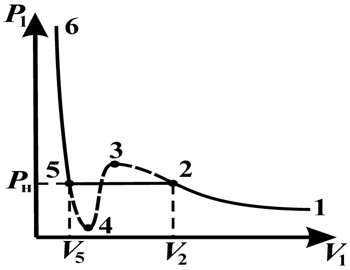

Рис. 2

ного газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(P_1 + n^2 a_g \big/ V_1^2\right)\left(V_1 - nb_g\right) = nRT\,, \tag{9}$$

зображеного ізотермою на рис. 2. Ділянка кривої на рисунку 1 - 2 відповідає газоподібному стану, 5 - 6 – рідині. Експерименти показали, що крива на ділянці 2 - 3 - 4 - 5 є горизонтальною, а не S-подібною. Крайні точки цього відрізку описують рівноважний стан між рідкою і газоподібною фазами, а їх ордината відповідає тиску насиченої пари P_H. Тому для опису стану міжконтактної речовини будемо використовувати ізотерми виду 1 - 2 - 5 - 6, які отримуються із ізотерм рівняння (9) заміною кривої 2 - 3 - 4 - 5 відрізком 2 - 5.

г) зазори частково заповнені однаковою кількістю нестисливої рідини, яка змочує або не змочує поверхні тіл, а частково – газом, який перебуває під сталим тиском. Якщо рідина змочує поверхні тіл, то під дією поверхневого натягу вона збиратиметься на кінцях зазорів, де їх висота є найменшою, а якщо рідина не змочує поверхні тіл, то вона локалізується у середній частині зазорів, де їх висота є найбільшою. У тій частині зазорів, де рідина відсутня, перебуває газ ($x = \pm b + kd$ – координати точок розмежування рідини й газу). Меніск – бічна поверхня рідини, що межує з газом – у перетині має форму дуги кола радіуса $\rho = h(b)/2$. На межах рідинних менісків діє поверхневий натяг σ. Згідно із законом Паскаля тиск в кожній точці об'єму, що займає газ чи рідина, є сталий і рівний P_1 та P_2 відповідно. Перепад тисків $\Delta P = P_1 - P_2$ в рідині й газі визначається формулою Лапласа:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \pm 2\sigma \big/ h(b)\,, \tag{10}$$

де знаки "+" і "–" відповідають рідині, яка змочує та не змочує поверхні тіл.

Для дослідження сформульованої задачі застосовано метод функцій міжконтактних зазорів, що полягає у поданні напружено-деформованого стану тіл через задану функцію $r(x)$, яка описує форму виїмок, та шукану функцію висоти зазорів $h(x)$ та зведенні задачі до інтегрального рівняння відносно функції $h'(x)$. Такі подання мають вигляд:

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi_n(z) + P^\infty\,, \qquad \sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi_n(z) - \Phi_n(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^\infty\,,$$

$$2G_n\left(u' + iv'\right) = \kappa_n \Phi_n(z) + \Phi_n(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \left(3 - \kappa_n\right)P^\infty \big/ 4\,,$$

$$\Phi_n(z) = \left(-1\right)^{3-n}\left(\int_{-a}^{a} h'(t)\operatorname{ctg}\left[\pi\left(t - z\right)/d\right]dt - \int_{-c}^{c} r'(t)\operatorname{ctg}\left[\pi\left(t - z\right)/d\right]dt\right)\Bigg/ dK\,,\ z \in D_n\,, \tag{11}$$

де $n = 1,2$, $K = (1+\kappa_1)/(2G_1) + (1+\kappa_2)/(2G_2)$, $z = x + iy$, $G_n = E_n/(2[1+\nu_n])$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$; G_n, E_n, ν_n – модуль зсуву, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини D_n. Вони враховують всі крайові умови задачі, за винятком другої умови в (2) у випадку гладких виїмок та першої умови в (5) у випадку виїмок з кутовими точками. Задовольнивши їх, одержимо для визначення похідної від висоти зазорів $h'(x)$ сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта

$$\frac{2}{d}\int_{-a}^{a} h'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(t - x\right)}{d}dt = F(x) \equiv K\left(P^\infty - P_f(x)\right) + \frac{2}{d}\int_{-c}^{c} r'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(t - x\right)}{d}dt\,. \tag{12}$$

Провівши заміну змінних $\xi=\mathrm{tg}\left(\pi x/d\right)$, $\eta=\mathrm{tg}\left(\pi t/d\right)$, $\gamma=\mathrm{tg}\left(\pi c/d\right)$, $\alpha=\mathrm{tg}\left(\pi a/d\right)$, СІР (12) трансформуємо в СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=F\left(\xi\right)\equiv\frac{d}{2(1+\xi^2)}K\left(P^{\infty}-P_f(\xi)\right)+\int_{-\gamma}^{\gamma}\frac{r'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta\,,\quad \left|\xi\right|\le\alpha\,. \tag{13}$$

У випадку виїмок без кутових точок шукана функція $h\left(\xi\right)$ повинна задовольняти умови

$$h(\pm\alpha)=0\,,\quad h'(\pm\alpha)=0\,. \tag{14}$$

Перша умова (14) забезпечує неперервність нормальних переміщень границь півплощин; друга умова (14) вказує на плавне змикання берегів зазорів і забезпечує обмеженість контактних напружень.

У випадку виїмок з кутовими точками повинна виконуватися умова рівності висоти зазорів та висоти виїмок на кінцях ділянок контакту:

$$h(\pm\alpha)=-r(\pm\alpha)\,. \tag{15}$$

Збурення переміщень у півплощинах, зумовлене однією виїмкою, заникає на нескінченності. Проте сукупний вплив періодичної системи виїмок проявляється у тому, що на великих відстанях від поверхні контакту (при $y\to\infty$) в напрямі дії прикладеного навантаження P^{∞} виникає додаткове зближення матеріалів тіл $\Delta v^{\infty}=[v(x,-\infty)-v(x,\infty)]-[v_0(x,-\infty)-v_0(x,\infty)]$ (тут v_0 – переміщення точок півплощин в напрямку осі Oy за відсутності виїмок), яке разом з контактною податливістю k^* тіл має важливе значення для інженерних розрахунків взаємодії тіл з регулярним рельєфом. Ці ефективні контактні параметри визначаються наступними формулами:

$$\Delta v^{\infty}=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left(\left(-1\right)^s r\left(x\right)-h\left(x\right)\right)dx\,,\qquad k^*=d(\Delta v^{\infty})/d(P^{\infty})\,, \tag{16}$$

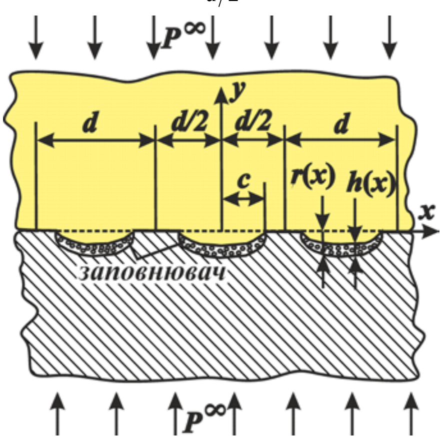

Рис. 3

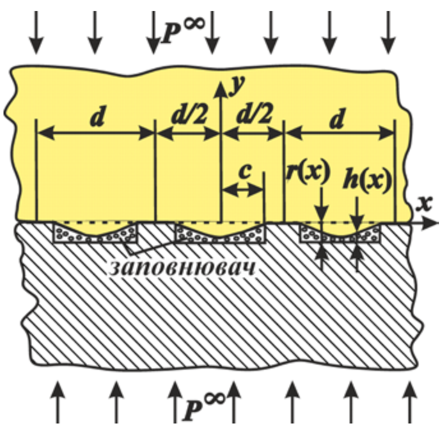

Рис. 4

де $s=0$ і $s=1$ у випадку виїмок без кутових точок і з кутовими точками.

У **третьому розділі** на основі розвинутої в другому розділі методики досліджено взаємодію пружного півнескінченного тіла з жорсткою основою, що має регулярну систему виїмок з кутовими точками. Розглянуто виїмки двох форм: квазіеліптичні ($r(x)=-A[1-\mathrm{tg}^2(\pi x/d)/\mathrm{tg}^2(\pi a/d)]^{1/2}$, $r(\xi)=-A\sqrt{\alpha^2-\xi^2}/\alpha$) (рис. 3) та прямокутні ($r(x)=-A$) (рис. 4).

В цьому разі СІР (13) матиме вигляд:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{dK\left(P^{\infty}-P_f\left(\xi\right)\right)}{2\left(1+\xi^2\right)}+\sigma_r\left(\xi\right),\quad \left|\xi\right|\le\alpha\,, \tag{17}$$

де $\sigma_r(\xi) = -A\pi/\alpha$ і $\sigma_r(\xi) = 0$ для квазіеліптичних і прямокутних виїмок відповідно.

У ***першому підрозділі*** вважаємо, що кожен з зазорів містить однакову кількість ідеального газу, стан якого описується рівнянням Клапейрона-Менделєєва (7), тобто $P_f(\xi) = P_1$. З СІР (17) знаходимо висоту зазорів:

$$h(\xi) = -Kd(P^\infty - P_1)\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\alpha^2 - \xi^2} / \sqrt{\alpha^2 + 1}\right) / (2\pi) + g_r(\xi), \tag{18}$$

де $g_r(\xi) = A\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}\big/\alpha$ і $g_r(\xi) = A$ для квазіеліптичних і прямокутних виїмок.

Виразивши об'єм газу V_1 в зазорах через висоту зазорів ($V_1 = \dfrac{d}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \dfrac{h(\xi)}{1+\xi^2} d\xi$) та підставивши його у рівняння Клапейрона-Менделєєва (7), знаходимо тиск газу:

$$P_1 = \left[P^\infty - 8A\operatorname{arctg}(\alpha) q_r \Big/ \left[Kd\ln\left(\alpha^2 + 1\right)\right] + \sqrt{D}\big/K\right]\Big/2, \tag{19}$$

де $$D = \left(8A\operatorname{arctg}(\alpha) q_r \Big/ \left[d\ln\left(\alpha^2+1\right)\right] - KP^\infty\right)^2 + 16\pi mKRT\Big/\left[\mu l d^2 \ln\left(\alpha^2+1\right)\right],$$

$q_r = \pi(\sqrt{\alpha^2+1} - 1)/(2\alpha)$ і $q_r = 1$ для квазіеліптичних і прямокутних виїмок.

Підставивши вираз (19) у формулу (16), визначимо контактне зближення матеріалів тіл: $\Delta v^\infty = Kd(P^\infty - P_1)\ln(\alpha^2+1)/(4\pi)$.

Для числових розрахунків введено безрозмірні величини $\tilde{c} = c/d$, $\tilde{a} = a/d$, $\tilde{b} = b/d$, $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)/d$, $\tilde{A} = A/d$, $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$, $\tilde{P}_1 = KP_1$, $\tilde{P}_2 = KP_2$, $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$, $\tilde{P}(\tilde{x}) = KP(x) = \left|K\sigma_{yy}(x,0)\right|$, $\tilde{m} = mKRT/(l\mu d^2)$, $\Delta\tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$, $\tilde{k}^* = d(\Delta\tilde{v}^\infty)/d(\tilde{P}^\infty)$, $\tilde{B} = KB$, $\tilde{V}_0 = V_0/V$, де V – об'єм виїмки, $l = 1$ м.

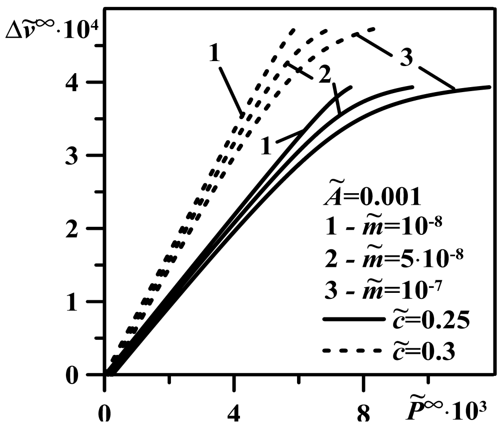

Рис. 5

Числові дослідження проведено для навантажень, за яких не відбувається контакт тіл в центрі зазорів ($h(kd) > 0$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Рис. 5 ілюструє залежності контактного зближення тіл $\Delta\tilde{v}^\infty$ від навантаження $\tilde{P}^\infty$ і маси газу $\tilde{m}$ в зазорі для квазіеліптичних виїмок. Бачимо, що зі збільшенням навантаження та зі зменшенням маси газу контактне зближення тіл збільшується, причому, чим менша ширина виїмок $\tilde{c}$, тим контактне зближення тіл є меншим.

У ***другому підрозділі*** розглянуто випадок, коли всі зазори цілком заповнені стисливою рідиною ($P_f(\xi) = P_2$). Невідомий тиск рідини P_2 для різних форм виїмок знаходимо з рівняння стану стисливої баротропної рідини (8).

Встановлено, що зі зменшенням модуля об'ємної пружності рідини $\tilde{B}$ контактне зближення та контактна податливість тіл збільшуються.

У ***третьому підрозділі*** розглянуто випадок заповнення зазорів водяною парою (реальним газом). Тиск заповнювача зазорів P_1 знаходимо з рівняння Ван-дер-Ваальса (9), враховуючи, що під час фазового переходу газ-рідина тиск P_1 рівний тиску насиченої пари P_H.

Числові розрахунки проведено для наступних даних: $\nu = 0.47$; $E = 8$ МПа; $a_g = 0.555$ Дж$\cdot$м^3/моль; $b_g = 3.05\cdot 10^{-5}$ м^3/моль; $n = 1.2\cdot 10^{-3}$ моль.

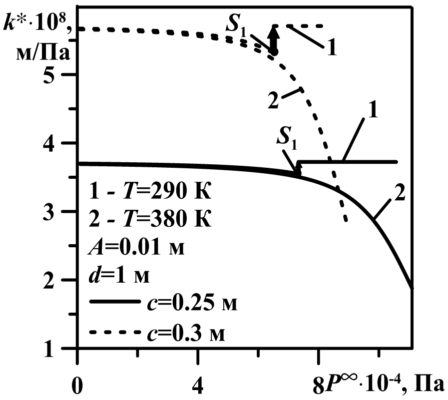

Рис. 6

Вплив температури T на контактну податливість k^* тіл у випадку квазіеліптичних виїмок проілюстровано на рис. 6. Точки S_1 на кривих відповідають початку процесу фазового переходу газ-рідина при температурі $T = 290$ К. Бачимо, що зі збільшенням зовнішнього навантаження P^∞ та температури контактна податливість тіл зменшується, причому чим більша ширина виїмок, тим більша контактна податливість. У точках S_1 контактна податливість тіл має стрибок.

У ***четвертому підрозділі*** досліджено взаємодію тіла з жорсткою основою, що має регулярний рельєф, коли зазори заповнені нестисливою рідиною, яка змочує поверхні тіл, та газом, який перебуває під сталим тиском. Об'єм рідини V_0 у кожному зазорі є величиною сталою ($V_0 = \text{const}$). Перепад тисків у рідині та газі визначається з формули Лапласа (10).

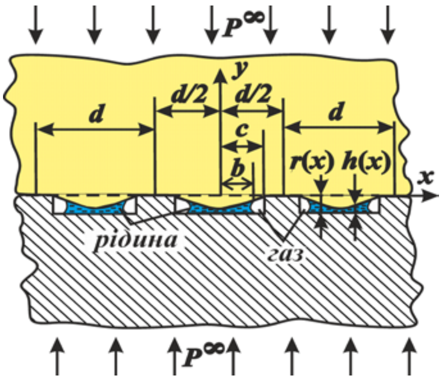

Рис. 7

Спочатку розглянуто жорстку основу з періодичною системою прямокутних виїмок ($r(x) = -A$). Під дією поверхневого натягу σ рідина збирається в найвужчих місцях просвітів і формує рідинний місток на середній частині кожного просвіту вздовж смуги ширини $2b$ (рис. 7). На краях зазорів міститься газ, тиск якого не змінюється при навантаженні. Отже, тиск в зазорах визначається таким чином: $P_f(x) = P_1$ при $b < |x - kd| \le a$ та $P_f(x) = P_2$ при $|x - kd| \le b$.

Необмежений у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок рівняння (17) має вигляд:

$$h'(\xi) = \left(\frac{Kd\left(P^\infty - P_1\right)\sqrt{\alpha^2+1}}{2\pi} + \frac{2K\sigma d\sqrt{\alpha^2+1}}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha\sqrt{1+\beta^2}} \right) \right) \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)\sqrt{\alpha^2-\xi^2}} +$$

$$+ K\sigma d[\Gamma(\alpha,\xi,\beta) - \Gamma(\alpha,\xi,-\beta)]/[2\pi^2 h(\beta)(1+\xi^2)], \quad \xi \in [-\alpha, \alpha], \tag{20}$$

де $\beta = \mathrm{tg}\left(\pi b / d\right)$, $\Gamma(\alpha,\xi,\beta) = \ln \dfrac{\alpha^2 - \xi\beta + \sqrt{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2-\xi^2\right)}}{\alpha^2 - \xi\beta - \sqrt{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2-\xi^2\right)}}$.

Особливістю формули (20) є те, що вона визначає похідну від висоти зазорів через невідомі заздалегідь півширину ділянки з рідиною β та висоту меніска $h(\beta)$, що рівна висоті зазору в крайніх точках цієї ділянки. Тому для числового визначення параметрів β і $h(\beta)$ та висоти зазорів $h(\xi)$ використаємо метод послідовних наближень. За початкове наближення $h_0(\xi)$ вибираємо аналітичний розв'язок задачі, коли нехтуємо поверхневим натягом рідини ($\sigma = 0$), тобто за сталого тиску заповнювача P_1 в зазорах. Підставивши $h_0(\xi)$ в умову збереження кількості рідини ($\frac{d}{\pi}\int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{h_0(\xi)}{1+\xi^2}d\xi = V_0$), отримаємо трансцендентне рівняння відносно початкового наближення півширини ділянки з рідиною β_0, яке розв'язуємо числово. Похідну від висоти зазорів на кожному наступному i-му кроці ($i \geq 1$) визначаємо за формулою:

$$h_i'(\xi) = \left(\frac{Kd\left(P^\infty - P_1\right)\sqrt{\alpha^2+1}}{2\pi} + \frac{2K\sigma d\sqrt{\alpha^2+1}}{\pi^2 h_{i-1}\left(\beta_{i-1}\right)}\arcsin\left(\frac{\beta_{i-1}\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha\sqrt{1+\beta_{i-1}^2}}\right)\right)\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)\sqrt{\alpha^2-\xi^2}} +$$

$$+K\sigma d\left(\Gamma(\alpha,\xi,\beta_{i-1}) - \Gamma(\alpha,\xi,-\beta_{i-1})\right) / \left[2\pi^2 h_{i-1}\left(\beta_{i-1}\right)\left(1+\xi^2\right)\right]. \qquad (21)$$

Функцію $h_i'(\xi)$ (21) подамо у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова 1-го роду $T_{2l+1}\left(\xi/\alpha\right)$:

$$h_i'(\xi) = -\alpha\sum_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}(2l+1)T_{2l+1}\left(\xi/\alpha\right)\Big/\sqrt{\alpha^2-\xi^2}. \qquad (22)$$

Тут $\Theta_l^{(i)}$ – невідомі коефіцієнти, які знаходимо з системи $L+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо, прирівнявши вирази (21) та (22) у точках $\xi_j = \alpha\cos\left(\pi j/\left(2L+3\right)\right)$, $j = 1,\ldots,L+1$.

Проінтегрувавши вираз (22), з урахуванням умови (15) ($h_i\left(-\alpha\right) = A$) знаходимо висоту зазорів $h_i\left(\xi\right) = \sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sum\limits_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}U_{2l}\left(\xi/\alpha\right) + A$, де $U_{2l}\left(\xi/\alpha\right)$ – поліноми Чебишова 2-го роду. Підставивши функцію $h_i\left(\xi\right)$ в умову збереження кількості рідини, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення невідомої півширини ділянки з рідиною β_i:

$$l\int\limits_{-\beta_i}^{\beta_i}\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sum_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}U_{2l}\left(\xi/\alpha\right)/\left(1+\xi^2\right)d\xi + 2A\operatorname{arctg}\left(\beta_i\right) - \pi V_0/d = 0. \qquad (23)$$

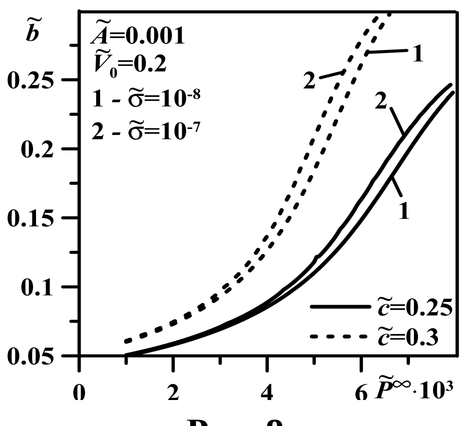

Рис. 8

Ітераційний процес завершуємо, коли $\left(\beta_i - \beta_{i-1}\right)/\beta_i < 10^{-5}$.

Числові дослідження показали (рис. 8), що зі збільшенням зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty$ та поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ ширина ділянки з рідиною $\tilde{b}$ зростає; збільшення ширини виїмок $\tilde{c}$ теж зумовлює збільшення $\tilde{b}$.

Далі розглянуто квазіеліптичні виїмки. Під дією поверхневого натягу σ рідина формуватиме рідинні містки на краях просвітів (рис. 9). У середній частині зазорів ширини $2b$ міститься газ, що перебуває під сталим тиском.

Тут для визначення параметрів β, $h(\beta)$ і функції $h(\xi)$ використано метод послідовних наближень, на кожному кроці ($i \geq 1$) якого висоту зазорів подано у вигляді скінченної суми ряду:

$$h_i(\xi)=\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sum_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}U_{2l}(\xi/\alpha),\quad |\xi|\le\alpha, \tag{24}$$

а півширину ділянки з газом β_i визначено числово з трансцендентного рівняння:

$$2ld\int_{\beta_i}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sum_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}U_{2l}(\xi/\alpha)/(1+\xi^2)d\xi-\pi V_0=0. \tag{25}$$

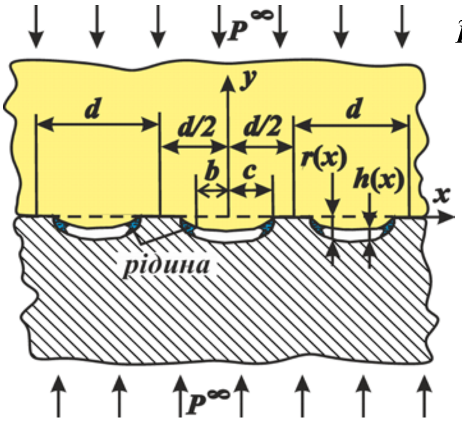

Рис. 9

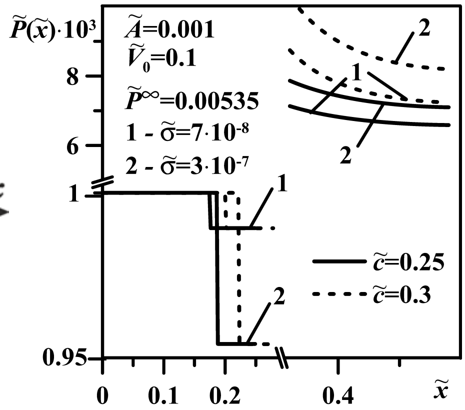

Рис. 10

На рис. 10 проілюстровано розподіл тиску на поверхнях тіл. Дві горизонтальні ділянки на графіку відображають тиск заповнювача вздовж зазору: перша – на середній його частині, що заповнена газом, друга – на двох крайніх, заповнених рідиною. На краях виїмок контактний тиск має кореневу особливість, а при віддаленні від виїмок спадає, досягаючи мінімуму в центрі ділянок контакту. Чим більший поверхневий натяг рідини, тим тиск рідини є меншим, а контактний тиск поза виїмками є більшим.

Спільним для всіх видів заповнювача виїмок з кутовими точками виявився ефект нелінійної залежності ефективних контактних параметрів від навантаження, тоді як у разі незаповнених виїмок контактне зближення тіл – лінійна функція навантаження, а податливість – стала.

У **четвертому розділі** досліджено контакт пружних півпросторів, поверхня одного з яких має регулярно розташовані гладкі тунельні виїмки форми $r(x)=A[1-\mathrm{tg}^2(\pi x/d)/\mathrm{tg}^2(\pi c/d)]^{3/2}$ ($r(\xi)=A(1-\xi^2/\gamma^2)^{3/2}$), коли зазори заповнені 1) реальним газом, стан якого описується рівнянням Ван-дер-Ваальса; 2) рідиною, що змочує або не змочує поверхні тіл, та газом, який перебуває під сталим тиском. На відміну від попереднього розділу, де ширина зазорів була незмінною, у даному розділі ширина зазорів в процесі навантаження змінюється.

Спочатку досліджено випадок, коли просвіти заповнені водяною парою, яка залежно від навантаження і температури системи перебуває у газоподібному або рідкому стані. Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд (1)-(3), де $P_f(x)=P_1$ – тиск речовини в зазорах.

В цьому разі СІР (13) розв'язано аналітично і визначено висоту зазорів

$$h(\xi)=\frac{A}{\gamma^3}\left(\alpha^2-\xi^2\right)^{3/2}+\frac{dK\left(P^\infty-P_1\right)}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\mathrm{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)\right]. \tag{26}$$

Обмежений розв'язок рівняння (13) існує при виконанні додаткової умови на його праву частину, з якої отримано рівняння

$$3A\pi/\gamma\left(1-\alpha^2/\gamma^2\right)-dK\left(P^\infty-P_1\right)\Big/\sqrt{\alpha^2+1}=0. \tag{27}$$

Рівняння (27) і рівняння Ван-дер-Ваальса (9), в яке підставлено об'єм газу

$V_1 = \dfrac{d}{\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{h(\xi)}{1+\xi^2}d\xi$, визначений через висоту зазорів (26), формують систему трансцендентних рівнянь для знаходження невідомого тиску речовини P_1 та півширини зазорів α.

Числові розрахунки проведено для наступних даних: $K = 0.6751\cdot 10^{-6}$ м^2/Н; $n = 1.2\cdot 10^{-3}$ моль; $a_g = 0.555$ Дж$\cdot$м^3/моль, $b_g = 3.05\cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

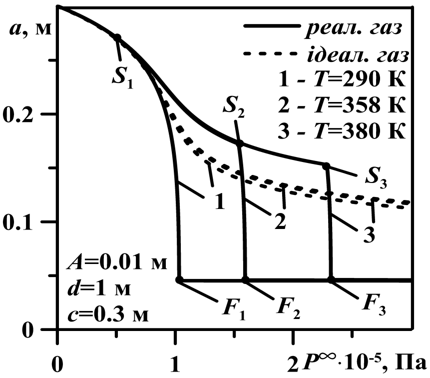

Рис. 11

Залежності півширини зазорів від зовнішнього навантаження для реального газу (суцільні криві) та для ідеального газу (штрихові криві) проілюстровані на рис. 11. Порівнюючи криві бачимо, що при малих значеннях зовнішнього навантаження ($P^\infty \le 0.75\cdot 10^5$ Па) півширина зазорів a у випадку реального газу практикно співпадає з півшириною зазорів у випадку ідеального газу, а при великих значеннях навантаження півширина зазорів істотно відрізняється. Точки S_i та F_i на кривих відповідають початку та завершенню процесу фазового переходу газ-рідина при відповідних температурах. Відзначимо, що після переходу заповнювача в рідкий стан криві залежності півширини зазору a від зовнішнього тиску P^∞ стають майже горизонтальними. Це свідчить про те, що після фазового переходу газ-рідина заповнювач чинить значно більший опір закриттю зазорів.

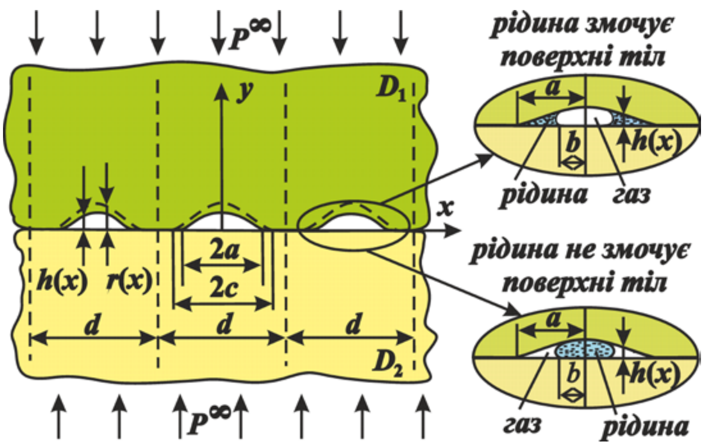

Рис. 12

Далі досліджено контакт двох пружних тіл, зазори між якими частково заповнені нестисливою рідиною, яка змочує або не змочує поверхні тіл, та частково газом, який перебуває під сталим тиском (рис. 12). Об'єм рідини V_0 у кожному зазорі є величиною сталою ($V_0 = const$).

Задачу зведено до СІР (13), де $P_f(\xi) = P_1$ при $|\xi| \le \beta$ і $P_f(\xi) = P_2$ при $\beta < |x| \le \alpha$ у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл, та $P_f(\xi) = P_1$ при $\beta < |x| \le \alpha$ і $P_f(\xi) = P_2$ при $|\xi| \le \beta$, коли не змочує. З умови існування обмеженого розв'язку СІР (13) отримано рівняння

$$\frac{3A\pi}{\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)+\frac{Kd}{\sqrt{\alpha^2+1}}\left(P^\infty - P_1 - \frac{4\sigma}{\pi h(\beta)}\arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right)+f_1(\beta)=0, \qquad (28)$$

де $f_1(\beta) = 2\sigma Kd\Big/\left(h(\beta)\sqrt{\alpha^2+1}\right)$ у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл, та $f_1(\beta) = 0$, коли не змочує.

Тут для визначення параметрів β і $h(\beta)$ та функції $h(\xi)$ використано метод послідовних наближень, на кожному кроці ($i \ge 1$) якого висоту зазорів подано у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова (24).

Умова збереження кількості рідини при навантаженні у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл, має вигляд (25), а у випадку, коли не змочує –

$$ld\int_{-\beta_i}^{\beta_i}\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sum_{l=0}^{L}\Theta_l^{(i)}U_{2l}\left(\xi/\alpha\right)\Big/\left(1+\xi^2\right)d\xi-\pi V_0=0\,. \qquad (29)$$

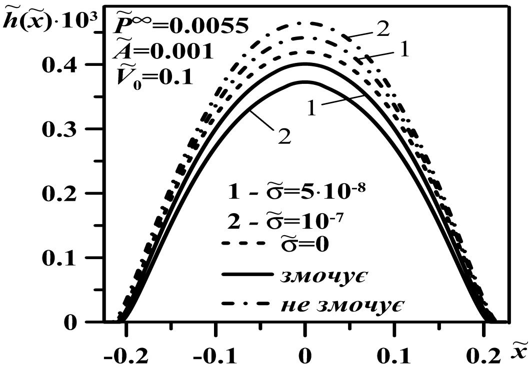

Рис. 13

З системи трансцендентних рівнянь (25) та (28) числово визначено півширину зазору α та півширину ділянки з газом β у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл; з системи (28) та (29) визначено півширину зазору α та півширину ділянки з рідиною β, коли рідина не змочує поверхні тіл.

Із рис. 13 бачимо, що зі збільшенням поверхневого натягу рідини висота зазорів і його ширина зменшуються у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл, та збільшуються у випадку, коли не змочує. Найбільший вплив поверхневого натягу спостерігається у центральній частині зазорів.

П'ятий розділ стосується дослідження контакту двох пружних півпросторів, поверхня одного з яких є хвилястою ($r(x)=A\cos^2(\pi x/d)$), коли міжконтактні зазори заповнені: ідеальним чи реальним газом; стисливою рідиною; рідиною, яка змочує поверхні тіл, та газом, який перебуває під сталим тиском.

Для визначення функції висоти зазорів $h(\xi)$ отримано СІР з ядром Коші

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=F(\xi)\equiv\frac{dK\left(P^{\infty}-P_f(\xi)\right)}{2\left(1+\xi^2\right)}+\frac{\pi A\left(\xi^2-1\right)}{\left(1+\xi^2\right)^2},\quad |\xi|\le\alpha\,. \qquad (30)$$

Визначивши обмежений розв'язок рівняння (30), що задовольняє другу умову (14), та проінтегрувавши його з урахуванням першої умови (14), знаходимо функцію висоти зазорів

$$h(\xi)=A\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\Big/\left[\sqrt{\alpha^2+1}\left(1+\xi^2\right)\right]+A\Big/\left(\alpha^2+1\right)\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\Big/\sqrt{\alpha^2+1}\right). \qquad (31)$$

З умови існування обмеженого розв'язку СІР (30) одержимо рівняння:

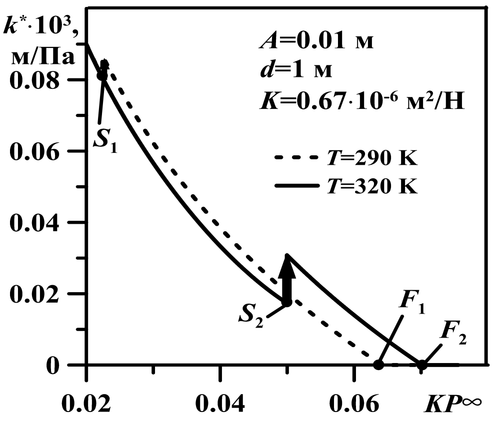

Рис. 14

$$P_f(\xi)=P^{\infty}-2A\pi\Big/\left[Kd\left(\alpha^2+1\right)\right]. \qquad (32)$$

У випадках, коли міжповерхневі зазори заповнені ідеальним газом або стисливою рідиною, для визначення тиску заповнювача P_1 або P_2 та ширини зазорів 2α, окрім рівняння (32), використано ще рівняння (7) або (8) відповідно. Якщо ж просвіти заповнені реальним газом, то тиск речовини P_1 та ширину зазорів 2α знаходимо з системи трансцендентних рівнянь (32) та (9).

На рис. 14 проілюстровано залежність контактної податливості тіл k^* від зовнішнього навантаження KP^{∞}, коли зазори заповнені водяною парою. Точки S_i та F_i на кривих відповідають початку та завершенню процесу фазового переходу газ-рідина при відповідних температурах. На початку та в кінці фазового переходу контактна податливість має стрибки. Після завершення фазового переходу крива залежності k^* від KP^∞ стає практично горизонтальною лінією. Чим більша температура, тим стрибки у точках початку фазового переходу є більшими.

У разі заповнення зазорів ідеальним газом чи стисливою рідиною контактна податливість тіл монотонно спадає зі збільшенням навантаження; збільшення маси газу чи модуля об’ємної пружності рідини зумовлює зменшення контактної податливості тіл.

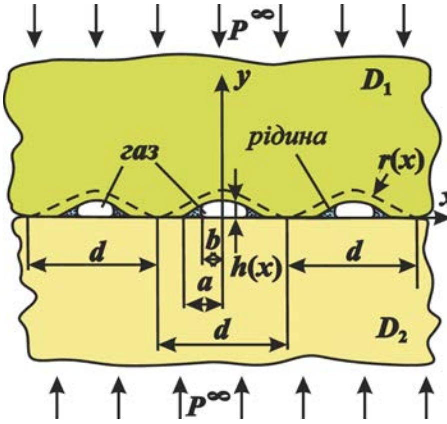

Рис. 15

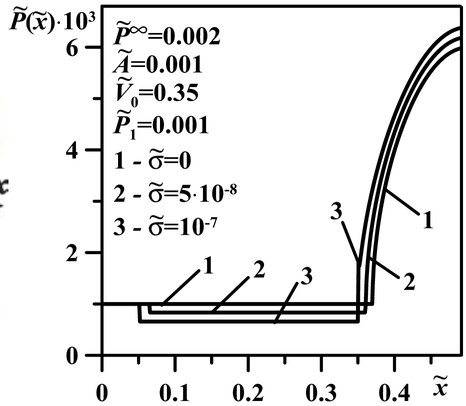

Рис. 16

Останній підрозділ стосується дослідження взаємодії пружних тіл, одне з яких має хвилястий рельєф, коли зазори заповнені нестисливою рідиною, яка змочує поверхні тіл, та газом, який перебуває під сталим тиском. Під дією поверхневого натягу σ рідина збиратиметься в найвужчих місцях просвітів і формуватиме рідинні містки на краях кожного просвіту (рис. 15). У середній частині зазорів завширшки $2b$ між рідинними містками перебуває газ під сталим тиском P_1.

Задачу зведено до СІР (30), де $P_f(\xi) = P_1$ при $|\xi| \le \beta$ та $P_f(\xi) = P_2$ при $\beta < |x| \le \alpha$. З умови існування обмеженого розв’язку СІР (30) отримано рівняння

$$\frac{Kd\left(P^\infty - P_1\right)}{2\pi} + \frac{K\sigma d}{\pi h(\beta)} - \frac{2K\sigma d}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2+1}}\right) - \frac{A}{1+\alpha^2} = 0. \tag{33}$$

Тут для визначення параметрів β, $h(\beta)$ і функції $h(\xi)$ використано метод послідовних наближень, на кожному кроці ($i \ge 1$) якого висоту зазорів подано у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова (24). З системи трансцендентних рівнянь (25) та (33) числово визначено півширину зазорів α та півширину ділянки з газом β.

Дві горизонтальні ділянки на рис. 16 відображають розподіл тиску заповнювача вздовж зазору: перша – на його середній частині, що заповнена газом, де тиск рівний P_1, друга – на його крайніх ділянках, які заповнені рідиною, де тиск рівний P_2. На ділянці контакту поверхонь при віддаленні від зазору контактний тиск монотонно зростає, набуваючи максимуму в точках $\tilde{x} = \pm 0.5$, в яких висота виступів хвилястої межі є максимальною. За більшого поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ тиск заповнювача в зазорі менший, а контактний тиск поза зазором – більший.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання, що полягає у розвиненні методики дослідження пружної взаємодії півнескінченних тіл з періодично розташованими плиткими тунельними виїмками за наявності газорідинного заповнювача міжконтактних зазорів та вивченні на цій основі локальних і ефективних контактних параметрів тіл з регулярним рельєфом з урахуванням механічної дії заповнювача зазорів та різної форми виїмок.

Отримано такі основні наукові результати:

1. Сформульовано новий клас плоских контактних задач теорії пружності для півнескінченних тіл з регулярним рельєфом, сформованим періодично розташованими плиткими виїмками (з кутовими точками або гладкими), чи хвилястістю поверхонь за наявності в міжконтактних зазорах стисливої рідини, ідеального чи реального газу, або одночасно газу й рідини, що змочує чи не змочує поверхні тіл.
2. Розвинуто методику дослідження поставлених задач, яка полягає у:
   - поданні напружень і переміщень у тілах через функцію висоти періодично разташованих міжповерхневих просвітів та побудові сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від цієї функції;
   - аналітичному розв'язанні отриманого інтегрального рівняння та визначенні висоти періодичних зазорів між тілами через відому форму виїмок та невідомі силові (тиск рідини і газу) і геометричні (ширина зазорів, ширина ділянки з рідиною, висота рідинного меніска) параметри;
   - поданні в термінах функції висоти зазорів рівняння стану стисливої рідини, рівняння Клапейрона-Менделєєва для ідеального газу, рівняння Ван-дер-Ваальса для реального газу, формули Лапласа, умов плавного змикання берегів періодичних зазорів і рівності діаметра меніска висоті зазору в точці розмежування рідини й газу та отриманні трансцендентних рівнянь для визначення невідомих геометричних і силових параметрів;
   - вираженні через висоту зазорів контактних зближення і податливості тіл.
3. Побудовано аналітичні і аналітично-числові розв'язки контактних задач для двох пружних тіл з I) періодичною системою гладких виїмок, коли зазори заповнені а) реальним газом, б) рідиною, яка змочує або не змочує поверхні тіл, і газом, який перебуває під сталим тиском; II) хвилястою поверхнею за різних варіантів заповнення міжповерхневих зазорів рідиною і/або газом.
4. Досліджено контакт пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмок з кутовими точками, що в перерізі мають прямокутний чи квазіеліптичний профіль і містять газорідинний заповнювач.
5. Досліджено особливості контактної поведінки тіл, періодично розташовані зазори між якими заповнені газорідинною субстанцією, за силового навантаження і вивчено вплив форми виїмок, кількості газу й рідини в просвітах, стисливості, змочуваності та поверхневого натягу рідини на ширину ділянок з рідиною й газом, висоту зазорів, контактний тиск, контактне зближення та контактну податливість тіл.

Встановлено наступне:

- зі збільшенням маси газу в зазорах чи модуля об'ємної пружності рідини контактне зближення тіл, контактна податливість тіл і контактний тиск поверхонь зменшуються, а тиск заповнювача зазорів та їх висота зростають;

- що більша маса газу чи модуль об’ємної пружності рідини у міжповерхневих зазорах, то більше проявляється нелінійна залежність від навантаження контактного зближення і податливості тіл з регулярним рельєфом, сформованим виїмками з кутовими точками; у разі відсутності заповнювача зазорів контактне зближення таких тіл лінійно залежить від навантаження, а податливість тіл – стала;
- виникає різка зміна характеру залежності ширини й об’єму зазорів, контактного зближення і контактної податливості тіл від зовнішнього навантаження на початку і в кінці фазового переходу газ-рідина;
- збільшення поверхневого натягу рідини, що частково заповнює періодичні міжконтактні зазори зумовлює зменшення розмірів зазорів, коли рідина повністю змочує поверхні тіл, та збільшення зазорів, коли рідина не змочує поверхні тіл;
- чим більший поверхневий натяг рідини, тим контактне зближення тіл є більшим у випадку, коли рідина змочує поверхні тіл, та меншим, коли не змочує;
- збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює збільшення контактного тиску поза зазорами, коли рідина повністю змочує поверхні тіл, та зменшення, коли рідина не змочує поверхонь тіл;
- у випадку гладких виїмок контактний тиск є максимальним на краях виїмок; у випадку, коли одна поверхня є хвилястою, контактний тиск є максимальним в точках, де висота виступів є найбільшою; у випадку виїмок з кутовими точками контактний тиск має кореневу особливість на краях виїмок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Козачок О.П. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартыняк // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45-52.
2. Козачок О.П. Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, №1. – С. 103-111.
3. Козачок О.П. Контакт пружних тіл за наявності у періодично розташованих міжповерхневих зазорах газу та незмочувальної рідини / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 50-57.
4. Козачок О.П. Взаємодія пружного тіла та жорсткої основи з регулярною системою заповнених ідеальним газом прямокутних виїмок / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвип. – С. 115-118.
5. Козачок О.П. Вплив ідеального газу у міжповерхневих зазорах на контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхні / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Прикл. проблеми механіки і математики – 2015. – Вип. 13. – С. 135-140.
6. Козачок О.П. Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла

і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2015. – № 22. – С. 67-76.

7. Козачок О.П. Контакт двох пружних тіл з системою періодичних зазорів на їх межі з газорідинним заповнювачем / О.П. Козачок, Б.С. Слободян // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”: матер. конф. (Львів, 21-25 травня 2013 р.). – Львів, 2013. – С. 57-59.
8. Козачок О.П. Контакт двох пружних тіл з системою періодичних виїмок на їх межі, заповнених реальним газом Ван-дер-Ваальса / О.П. Козачок, Б.С. Слободян // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь”: тези доповідей (Одеса, 23-26 серпня 2013 р.). – Одеса, 2013. – С. 72.
9. Козачок О.П. Взаємодія двох пружних тіл з системою періодичних виїмок, частково заповнених рідиною, що не змочує їх поверхні / О.П. Козачок, Б.С. Слободян // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2014”: матеріали конф. (Львів, 28-30 травня 2014 р.). – Львів, 2014. – Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Slobodyan.pdf.
10. Козачок О.П. Контакт текстурованих тіл з урахуванням різних видів адгезійної взаємодії поверхонь міжконтактних зазорів / О.П. Козачок, К.А. Чумак, Б.С. Слободян // IX Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”: наукові праці (Львів, 15-19 вересня 2014 р.). – Львів, 2014. – С. 263-265.
11. Козачок О.П. Контакт пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих заповнених стисливою рідиною прямокутних виїмок / О.П. Козачок, Б.С. Слободян // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2015”: матеріали конф. (Львів, 26-28 травня 2015 р.). – Львів, 2015. – Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Kozachok.pdf.
12. Козачок О.П. Взаємодія пружного півпростору та жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок, заповнених ідеальним газом / О.П. Козачок // III Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки”: матеріали конф. (Київ, 27-30 серпня 2015 р.). – Київ, 2015. – С.37.
13. Козачок О.П. Вплив рідинних містків і газу в міжповерхневих зазорах на контакт тіл з регулярним мікрорельєфом / О.П. Козачок, Б.С. Слободян, Р.М. Мартиняк // Науково-технічна конференція “Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент” (INTERPOR'15): збірник матеріалів (Львів, 22-24 вересня 2015 р.). – Львів, 2015. – С. 18-19.

Анотація. Козачок О.П. Контактна взаємодія тіл з регулярно розташованими виїмками різної форми з газорідинним заповнювачем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. - Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2016.

Дисертація стосується дослідження пружної взаємодії півнескінченних тіл, що мають регулярну систему виїмок, за наявності у періодично розташованих між-контактних просвітах газу і/або рідини та вивченню на цій основі закономірностей

контактної поведінки тіл з регулярним рельєфом з урахуванням механічної дії заповнювача зазорів. Сформульовані контактні задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь відносно похідної від функції висоти міжконтактних зазорів. Для знаходження невідомих геометричних та силових параметрів отримано одне трансцендентне рівняння у випадку виїмок з кутовими точками або систему таких рівнянь для виїмок без кутових точок. Побудовано аналітично-числові розв’язки контактних задач теорії пружності для тіл з регулярними плиткими виїмками різної форми (з кутовими точками або гладкими) та тіл з хвилястими поверхнями за різноманітних варіантів заповнення зазорів рідиною і/або газом. Проаналізовано особливості контактної поведінки тіл з газорідинним заповнювачем періодично розташованих міжповерхневих зазорів за силового навантаження і вивчено вплив форми виїмок, кількості рідини й газу в зазорах, поверхневого натягу рідини, її стисливості та змочуваності на контактний тиск поверхонь, висоту зазорів, тиск рідини або газу, контактне зближення і контактну податливість тіл.

Ключові слова: контактна взаємодія, пружні півпростори, регулярний рельєф, виїмки з кутовими точками, міжповерхневі зазори, ідеальний і реальний газ, рідина, поверхневий натяг, сингулярні інтегральні рівняння, контактний тиск.

Аннотация. Козачок О.П. Контактное взаимодействие тел с регулярно расположенными выемками различной формы с газожидкостным заполнителем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2016.

Диссертация посвящена исследованию упругого взаимодействия полубесконечных тел, имеющих регулярную систему выемок, при наличии в периодически расположенных межконтактных зазорах газа и/или жидкости и изучению на этой основе закономерностей контактной поведения тел с регулярным рельефом с учетом механического действия заполнителя зазоров. Сформулированные контактные задачи сведены к сингулярным интегральным уравнениям относительно производной от функции высоты межконтактных зазоров. Для нахождения неизвестных геометрических и силовых параметров получено одно трансцендентное уравнение в случае выемок с угловыми точками или система таких уравнений для выемок без угловых точек. Построено аналитически-числовые решения контактных задач теории упругости для тел с регулярными мелкими выемками различной формы (с угловыми точками или гладкими) и тел с волнистыми поверхностями при различных вариантах заполнения зазоров жидкостью и/или газом. Проанализированы особенности контактного поведения тел с газожидкостным заполнителем периодически расположенных межконтактных зазоров при силовой нагрузке и изучено влияние формы выемок, количества жидкости и газа в зазорах, поверхностного натяжения жидкости, ее сжимаемости и смачиваемости на контактное давление поверхностей, высоту зазоров, давление жидкости или газа, контактное сближение и контактную податливость тел.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, упругие полупространства, регулярный рельеф, выемки с угловыми точками, межконтактные зазоры, идеальный и

реальный газ, жидкость, поверхностное натяжение, сингулярные интегральные уравнения, контактное давление.

Abstract. Kozachok O.P. Contact interaction between bodies with regularly arranged grooves of various shapes with a gas-fluid filler. – Manuscript.

The thesis presented for Degree of the Candidate in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 - Mechanics of Deformable Solids. - Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2016.

The thesis deals with the investigation of elastic interaction between semi-infinite bodies with a regular set of grooves in the presence of a gas and/or a liquid inside periodically arranged intercontact gaps, and study of regularities of contact behavior of bodies with regular relief taking into account the mechanical action of the gaps filler. Four different variants of gaps filling are considered: I) the gaps are filled with an ideal gas; II) the gaps are filled with a compressible liquid; III) the gaps are filled with a real gas; IV) the gaps are filled with a gas and an uncompressible liquid that a) wets or b) does not wet the surfaces of the bodies. The method for investigation of the formulated problems, which is based on their reduction to singular integral equations for a derivative of a height of the intercontact gaps, is developed. To determine unknown geometrical (a width and a height of the gaps, a width of the gap region filled with the liquid, a height of the liquid meniscus) and force (a pressure of the gas and/or the liquid) parameters, one transcendental equation for grooves with corner points or set of such equations for grooves without corner points are obtained. These equations are derived from the equation of state of compressible barotropic liquid, the Clapeyron-Mendeleev equation for ideal gas, the Van der Waals equation for real gas, the equation of conversation of incompressible liquid amount and the Laplace formula that describes the difference of pressures in the two substances of the filler.

The analytical and analytical-numerical solutions to contact problems for two elastic bodies with regularly arranged shallow grooves without corner points for the variants III and IV of gaps filling and two elastic bodies with wavy surfaces for the variants I-III and IVa of gaps filling are constructed. Also, the contact between an elastic body and a rigid base with periodically located grooves with corner points is investigated for the variants I-III and IVa of gaps filling. The features of contact behavior of bodies with the gas-liquid filler inside periodically arranged interface gaps under force load is analyzed, and the effect of the shape of the grooves, the amount of the liquid and the gas in the gaps, the surface tension of the liquid, its compressibility and wettability on the contact pressure, the height of the gaps, the width of the gap region filled with the liquid, the pressures of the gas and liquid, the contact approach and contact compliance of the bodies is studied.

The results of the work originate theoretical preconditions for modeling contact behavior of technical, natural and biological structures with regular relief in the presence of a liquid and/or a gas in the contact region and have prospects to be applied in geophysics, tribology, biomechanics and mechanical engineering for predicting contact strength and stiffness of real structures which operate in different gas-liquid media.

Key words: contact interaction, elastic half-spaces, regular relief, grooves with corner points, interface gaps, ideal and real gas, liquid, surface tension, singular integral equations, contact pressure.