

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ПІСКОЗУБ
Йосиф Збігневич



УДК 539.3

**СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА
ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ БІМАТЕРІАЛІВ З ТРІЩИНАМИ І
ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Українській академії друкарства МОН України та Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Сулим Георгій Теодорович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, провідний науковий співробітник відділу термомеханіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Жук Ярослав Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки;

доктор фізико-математичних наук, професор
Вайсфельд Наталія Данилівна,
Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова МОН України, завідувач кафедри методів математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Саврук Михайло Петрович,
Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, провідний науковий співробітник відділу теоретичних основ механіки руйнування.

Захист відбудеться “_14_”_вересня_ 2021 р. о 15.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано “12” серпня_ 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
д. ф.-м. н., с. н. с.



Ясінський А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Актуальність обраного напрямку досліджень пов'язана із застосуванням в інженерній практиці тонких неоднорідностей різного походження, зокрема, армуючих стрічок чи волокон композитів. Тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включення в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією порожнини є одними із найпоширеніших типів неоднорідної будови матеріалів, які зумовлюють небажану високу концентрацію напружень і, відповідно, знижують надійність та експлуатаційні характеристики виробів. Тонкі включення також слугують підкріплювальними елементами, що оптимізують напружено-деформований стан (НДС) тіл для тих чи інших типів навантажень. Особливу увагу в сучасній техніці та технологіях приділяють також створенню мікро- та наноелементних структур передусім у таких галузях, як мікроелектроніка, біотехнології, енергетика, озброєння тощо. Серед найбільш перспективних наукових проєктів експерти називають ті, що пов'язані із значним підвищенням продуктивності комп'ютерів, відновленням людських органів з використанням відтворених тканин, отриманням нових матеріалів, створених безпосередньо із укладанням заданих молекул та атомів тощо. Поряд із пошуком засобів реалізації цих проєктів в теорії матеріалознавства досі залишається не вирішеною та гостро актуальною проблема подолання труднощів математичного моделювання механіки таких структур. Відтак, на сучасному етапі розвитку механіки твердого деформівного тіла доцільно зосередитися на конструюванні ускладнених конститутивних рівнянь, придатних для вивчення різномасштабних структур, а також на опрацюванні методів їхнього розв'язування.

Особливого значення сьогодні набуває розв'язування контактних задач для неоднорідних структур, таких як, наприклад, композити, у яких зміна механічних властивостей однієї із складових є нелінійною. Врахування впливу тонких включень всередині структурованих матеріалів є надзвичайно різнобічним і важливим завданням інженерного проєктування. Однак на даний час питання побудови достатньо адекватної деформаційної моделі нелінійного деформування тонких структурних елементів композитів, особливо врахування появи залишкових напружень за різного типу і режимів навантажування/розвантажування, залишається практично недослідженим.

У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що практично відсутні математичні моделі тонких неоднорідностей з фізично нелінійними властивостями, а разом із тим досі не побудовано достатньо універсальних методів розв'язування задач з міжфазними включеннями за ускладнених умов контакту з матрицею. Надто мало уваги надається розгляду математичних моделей багатопарових тонких неоднорідностей всередині деформівних тіл. Дуже невелика кількість публікацій стосується дослідження випадку контактування складових таких структур за невідомої апріорі зони контакту. Недостатньо уваги приділено створенню аналітично-числових методів аналізу НДС за умов багатокрокового навантажування з урахуванням

залишкових напружень. Те саме стосується дослідження напружено-деформованого стану структурно-неоднорідних тіл за дії зосереджених сил та дислокацій. Актуальною залишається проблема побудови загального підходу, що дав би можливість досліджувати механіку тонких включень за умов ідеального чи довільного неідеального (відшарування, існування поверхневої енергії на межі фаз) з єдиних позицій теорії тонких неоднорідностей. Усе це дало можливість сформулювати мету дисертаційного дослідження.

Усе зазначене свідчить про актуальність описаних вище проблем та їхню недостатню вивченість з огляду на сучасні потреби науки і техніки. Цим обґрунтовується вибір теми дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах наукових бюджетних тем Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України: «Розвиток методів математичного моделювання процесів деформування структурно-неоднорідних тіл» (№ д/р 0118U003605, 2018–2020); Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України «Моделювання та оптимізація термомеханічних процесів у шаруватих тілах, зокрема оболонках та пластинах, при термомеханічних навантаженнях за врахування теплопереносу випромінюванням, термочутливості та дефектності елементів структури» (№ д/р 0120U100497, 2020–2024); Української академії друкарства «Математичне моделювання та аналітико-числове дослідження процесів деформування середовищ з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями» (№ д/р 0121U109745, 2021–2025).

Метою дисертаційного дослідження є розроблення математичних моделей і методів дослідження механічних полів у біматеріалах з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями з урахуванням неідеальності контактної взаємодії елементів структури і впливу поверхневої енергії за довільного типу і режиму квазістатичного навантажування-розвантажування.

Досягнення мети роботи передбачає вирішення таких завдань:

- побудову на основі загальних співвідношень лінійної та фізично нелінійної теорії пружності і концепції методу функцій стрибка (МФС) структурно-модульного методу функцій стрибка (СММФС) для розв'язування задач таких класів;
- побудову цілісної системи універсальних математичних моделей структурно неоднорідного тонкого включення з урахуванням істотної фізичної нелінійності його механічного деформування (модель тонкого ортотропного лінійно пружного включення; модель тонкого фізично нелінійного включення (нелінійно пружного чи пружно-пластичного); синтетичну модель тонкого багатшарового включення з можливим поверхневим натягом чи неідеальним контактом між шарами) за різних типів умов ідеального та неідеального контакту між структурними елементами: фрикційний контакт, наявність поверхневих напружень тощо;
- отримання крайових інтегральних подань полів напружень та деформацій у матриці за умов комплексного довільного силового та дислокаційного

квазістатичного багатокрокового навантажування-розвантажування, що враховують наявність тонких включень;

- отримання результуючих систем рівнянь (різних для окремих класів задач), в т.ч. сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), та застосування ефективних методів їхнього розв'язування;
- опрацювання методів та методик для врахування фізичної нелінійності матеріалу тонкої неоднорідності та неідеальності її контактної взаємодії з матрицею, що включає:
 - імплементацію концепції інкрементального підходу для вирішення нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування–розвантажування;
 - опрацювання ітераційного алгоритму розв'язування цих результуючих систем рівнянь в умовах апіорі невідомих зон контакту матриці з включенням та багатокрокового процесу навантажування-розвантажування;
- з метою реалізації СММФС для дослідження напруженого стану тіл з тонкими включеннями за дії зосереджених сил та дислокацій розроблення математичного апарату та програмного комплексу;
- забезпечення тестування отриманих співвідношень і розрахункових методів, алгоритмів та схем; розв'язування нових задач; виявлення і дослідження нових залежностей та ефектів.

Об'єкт дослідження – механічні структури, сформовані з однорідних чи кусково-однорідних середовищ, що на межі поділу матеріалів містять тверді деформівні тонкі однорідні чи структурно-неоднорідні включення з лінійними чи нелінійними механічними властивостями.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан (НДС) та особливості його концентрації і розсіювання енергії у біматеріалах із тонкими лінійно, нелінійно пружними чи пружно-пластичними неоднорідностями складної структури у разі різних типів контакту фаз та режимів процесу навантажування–розвантажування.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано засадничі співвідношення лінійної та нелінійної теорії пружності, теорію аналітичних функцій для побудови крайових сингулярних інтегральних рівнянь, концепцію методу функцій стрибка, аналітично-числові методи (метод колокацій тощо), а також середовище системи матричної математики Scilab (ліцензія Open Source) для побудови алгоритмів і програмного комплексу розв'язування отриманих систем результуючих рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- розроблено структурно-модульний метод функцій стрибка, як цілісний комплекс засобів аналітико-числового розв'язування двовимірних задач пружності для ізотропних біматеріалів із тонкими твердими структурно неоднорідними лінійно чи нелінійно деформівними міжфазними включеннями;

- побудовано універсальні математичні моделі тонких структурно-неоднорідних лінійно та нелінійно пружних, пружнопластичних неоднорідностей з урахуванням істотних фізичних механізмів їхнього деформування;
- розроблено синтезовані математичні моделі тонких неоднорідностей, в т.ч. багатошарових, що враховують можливості їхнього неідеального контакту із середовищем (фрикційне проковзування) та наявності спричинених поверхневою енергією на межі поділу матеріалів додаткових поверхневих напружень;
- отримано крайові інтегральні подання полів напружень та деформацій у матриці за умов комплексного довільного силового та дислокаційного квазістатичного багатокрокового навантажування-розвантажування, що враховують наявність тонких включень;
- записано системи інтегральних рівнянь крайових задач для біматеріалів із міжфазними чутливими до впливу механічних полів тонкими неоднорідностями (тріщинами, включеннями);
- для розв'язування нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування застосовано інкрементальний підхід;
- отримано асимптотичні співвідношення, що описують розподіл полів напружень і переміщень поблизу вершин тонкого міжфазного включення в кусково-однорідній матриці;
- розроблено ітераційний алгоритм розв'язування задач за умов апріорі невідомих зон контакту матриці з лінійно, нелінійно пружним чи пружнопластичним включенням та довільного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування, зокрема й циклічного;
- розроблено математичний апарат та програмний комплекс засобів визначення напружено-деформованого стану у біматеріалах з тонкими неоднорідностями за дії зосереджених сил та дислокацій та визначення «зон безпеки» для параметрів навантаження.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним застосуванням математичного апарату й апробованих рівнянь лінійної та фізично нелінійної теорій пружності; контрольним розв'язуванням вивчених іншими дослідниками задач; зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із вже відомими розв'язками інших авторів; відповідністю результатів розв'язування нових задач фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне та теоретичне значення отриманих результатів полягає у можливості застосування із єдиних позицій отриманих результатів як у теорії композитів в рамках мезо- чи мікромеханіки, так і в наномеханіці чи геомеханіці, мікроелектроніці, механіці руйнування, матеріалознавстві тощо. СММФС у поєднанні з інкрементально-ітераційним алгоритмом розв'язування нелінійних задач забезпечує можливість раціонального опису та вивчення впливу нелінійних властивостей тонких неоднорідностей на поля

напружень та деформацій складених тіл у разі найширшого спектру зміни механічних властивостей міжфазних тонких прошарків, що можуть мати також і шарувату будову, а самим шарам перебувати між собою та матрицею у ідеальному чи неідеальному контакті, а на інтерфейсах бути наділеними поверхневою енергією. Суть цього методу полягає у тому, що так звані «зовнішня задача» (моделювання та визначення НДС у біматеріалі поза включеннями), «внутрішня задача» (моделювання та визначення НДС всередині включення), розглядаються під час формулювання та побудови рівнянь як цілком незалежні модулі, які поєднує між собою теж незалежна від них «проміжна задача», завданням якої є моделювання умов контакту між шарами включення та зовнішніх поверхонь включення з матрицею та поєднання зовнішньої та внутрішньої задач у цілісний комплекс. Відтак зміни у формулюванні одного із базових елементів задачі (типу матриці або типу включення чи умов взаємодії) вимагають змін у лише відповідному модулі, залишаючи два інші у попередньому стані.

Побудовано математичні моделі тонких неоднорідностей та тріщин з урахуванням комплексного впливу різних фізичних нелінійностей, що істотно поглиблює змістовні складові теорії тонких включень. Розроблено підходи, що дають можливість із єдиних позицій застосовувати отримані результати як у теорії композитів в рамках макро-, мезо- чи мікромеханіки, так і в нано- чи геомеханіці, мікроелектроніці, механіці руйнування, матеріалознавстві тощо. Універсальність запропонованих математичних моделей тонких включень забезпечено можливістю урахування повного спектру механічних властивостей матеріалу включення від тріщини до абсолютно жорсткого, від лінійно до фізично нелінійно пружного, від ідеально пружно-пластичного до довільного пружно-пластичного. Розглянуто можливість існування неідеального контакту у вигляді відшарування у невідомих априорі зонах контакту з гладким чи фрикційним проковзуванням, а також спричинених міжмолекулярною взаємодією на межі фаз поверхневих напружень.

Запропоновано ефективний інкрементально-ітераційний алгоритм розв'язування задач з фізичними нелінійностями чи задач з невідомими границями контакту, що дають можливість високоточного аналізу напруженого стану тіл із тонкими неоднорідностями в умовах довільного силового чи дислокаційного багатокрокового навантаження .

Особистий внесок здобувача. Усі подані в роботі основні результати, моделі та методи отримані автором самостійно. Результати, опубліковані у роботах [11, 14, 15, 23, 28, 29, 31, 35, 43, 48, 50, 52, 60, 61], отримані самостійно.

У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать: [1, 5, 8, 10, 12, 13, 17, 19–21, 24, 25, 30, 32, 33, 36–39, 41, 44–47, 51, 53, 54, 57–59] – участь у математичній постановці задач, розвиток і реалізація підходів до їх розв'язання, участь в аналізі отриманих результатів; [2–4, 9, 16, 18, 22, 34, 55, 56] – постановка задач, вибір інтегральних подань розв'язків, числова реалізація досліджень, опрацювання та інтерпретація отриманих числових

результатів, формулювання висновків; [6, 26, 42, 49] – побудова аналітичних розв’язків та з’ясування їхніх властивостей; [7, 27, 40] – участь у математичному моделюванні об’єкту досліджень, розроблення методів, числова реалізація досліджень, опрацювання та інтерпретація отриманих числових результатів, формулювання висновків.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідалися і обговорювалися на: 9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Materials (Augustow, Poland, 2017); Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів 1993, 2017, 2021); VI Polish-Ukrainian Science Conference «Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media» (Warsaw, 2005); П’ятому українсько-польському науковому симпозиумі «Актуальні задачі механіки неоднорідних структур» (Львів-Луцьк, 2003); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Львів, 2004, 2005, 2009); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 1998, 2013, 2018); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016); 1-й Всесоюзной конференції «Механика разрушения материалов» (Львов, 1987); Всесоюзной конференції «Механика неоднородных структур» (Львов, 1987); Выездном заседании Научного Совета АН СССР по трению и смазкам «Современные проблемы теории контактных взаимодействий» (Луцк, 1987); Всесоюзной конференции «Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур» (Саратов, 1988); Республиканской конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения» (Одесса, 1987); 1-м Всесоюзном симпозиуме «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 1988); IV-й Всесоюзной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Одесса, 1989); Міжнародній науково-технічній конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL» (Львів, 2014, 2016, 2020); Науково-технічній конференції «Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні та спорті» (Львів, 2018); Міжнародній науковій конференції «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент» (Львів, 2018); 2-ому Міжнародному симпозиумі «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій» (Львів–Дубляни, 1996); Міжнародній науково-практичній конференції «Квалілогія книги» (Львів, 1996); Міжнародній науково-практичній конференції ДРУКОТЕХН-96. Комп’ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи (Львів, 1996); Науково-технічних конференціях професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УПШ/УАД (Львів, 1993, 1997, 2007, 2009–2011, 2013–2020).

У повному обсязі робота доповідалася на розширеному семінарі кафедри прикладної математики і фізики Української академії друкарства МОН України під керівництвом д.т.н., проф. Гавенко С.Ф.; на науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова МОН України під

керівництвом д.ф.-м.н., проф. Вайсфельд Н.Д.; на науковому семінарі кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету МОН України під керівництвом д.т.н., проф. Шваб'юка В.І.; на розширеному науковому семінарі відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф., академіка НАН України Кушніра Р.М. та на загальноінститутському семінарі за напрямком “Математичні методи механіки руйнування та поверхневих явищ” в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Михаськіва В.В.

Публікації. За темою дисертації опублікована 61-а наукова праця. Серед них 16 статей у наукових фахових виданнях України і у наукових періодичних виданнях інших держав, 6 статей у інших наукових періодичних виданнях України, 39 публікацій у матеріалах міжнародних та національних наукових конференцій та симпозіумів. 11 статей опубліковано у виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([1] входить до квартилю Q2, [2–5, 7] входять до квартилю Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 22.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається із анотації, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та двох додатків. Загальний обсяг дисертації складає 390 сторінок (основна частина – 312 сторінок), у тому числі 144 рисунки та список використаних джерел з 479 найменувань.

Автор щиро вдячний науковому консультанту доктору фіз.-мат. наук, проф. Сулиму Георгію Теодоровичу за постійну увагу та всебічну підтримку при виконанні роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та основні завдання дисертаційної роботи, визначено об'єкт та предмет дослідження, розкрито наукову новизну роботи, зазначено методи дослідження, проаналізовано достовірність отриманих результатів та їхнє теоретичне та практичне значення. Подано інформацію про апробацію результатів, публікації та загальну структуру дисертації.

У **першому розділі** зроблено огляд наукових праць, що стосуються проблематики задач поздовжнього зсуву пружних тіл із тонкостінними елементами структури. Ґрунтовно проаналізовано переваги й недоліки застосування відомих у літературі методів розв'язування задач механіки армованих стрічками композитів, а також задач мікро- та наномеханіки для тіл з тонкими неоднорідностями (тріщинами, пружними включеннями).

Особливу увагу зосереджено на врахуванні нелінійних ефектів як фізичної (нелінійна пружність, пружнопластичність та ін.) так і геометричної (неідеальний фрикційний контакт з невідомими апріорі зонами контакту, шарувата будова) природи згаданих тонких неоднорідностей структури матеріалу.

Фундаментальними роботами, які започаткували та поглибили вивчення задач механіки контактної взаємодії тіл із тонкими неоднорідностями і тріщинами, є праці О.Є. Андрейківа, Л.Т. Бережницького, В.Л. Богданова, В.В. Божидарніка, Н.Д. Вайсфельд, І.Г. Горячевої, Д.В. Гриліцького, В.Т.Грінченка, О.М. Гузя, О.О. Євтушенка, Я.О. Жука, Ю.М. Коляна, В.Д. Кубенка, Я.І. Кунця, М.І. Мусхелішвілі, В.К. Опанасовича, В.В. Панасюка, Я.М. Пастернака, Г.Я. Попова, В.Г. Попова, Я.С. Підстригача, М.П. Саврука, В.П. Силованюка, М.М. Стадника, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, Л.А. Фільштинського, А.С. Хачикяна, Г.П. Черепанова, К.С. Чобаняна, М. Comninou, С. Cattaneo, J.D. Eshelby, М.Е. Gurtin, D.A. Hills, J. Kalker, A.I. Murdoch, O. Reynolds та ін.

Також значний внесок у розроблення методів та підходів дослідження деформування тіл із тонкими неоднорідностями, композитів і наноструктур зробили В.М. Александров, В.Б. Говоруха, О.Я. Григоренко, В.С. Гудрамович, В.В. Данішевський, О.Ф. Дащенко, А.П. Дзюба, К.М. Довбня, А.П. Зіньковський, О.С. Каіров, С.О. Калоєров, А.О. Камінський, В.Г. Карнаухов, Г.С. Кіт, О.Ф. Кривий, В.А. Кривень, О.С. Космодаміанський, А.М. Кундрат, М.М. Кундрат, Р.М. Кушнір, В.І. Кущ, В.В. Лобода, О.М. Ліньков, В.Л. Макаров, Р.М. Мартиняк, М.В. Марчук, В.В. Михаськів, В.В. Можаровський, С.М. Мхітарян, Т.С. Нагірний, В.М. Назаренкао, З.Т. Назарчук, М.М. Николишин, О.Г. Ніколаєв, В.А. Осадчук, В.І. Острик, С.О. Піскунов, Б.В. Процюк, В.Б. Рудницький, Я.Я. Руцицький, Г.М. Савін, В.І. Самусь, В.В. Сильвестров, В.Р. Скальський, В.З. Станкевич, А.О. Сяський, В.В. Харченко, І.П. Шацький, В.І. Шваб'юк, В.П. Шевченко, С.П. Шевчук, Г.А. Шинкаренко, П.В. Ясній, Y. Benveniste, F. Erdogan, T. Koizumi, T. Miloh, H. Sekine, P. Shrivane, C.Q. Ru, X. Wang та ін.

Аналіз вже виконаних досліджень задач деформування тіл із тонкостінними елементами структури засвідчив, що як у підходах механіки композитів, так і у мультимасштабних методах з використанням мікромеханічних моделей практично недослідженим залишається питання побудови достатньо адекватної деформаційної моделі нелінійного деформування тонких структурних елементів композитів, особливо в умовах появи залишкових напружень за різного типу і режимів навантажування-розвантажування. Мало вивченим залишається також питання врахування вільної енергії на поверхнях розділу твердих тіл та фрикційного проковзування на межах контакту складових таких мікроструктур. Наявні методи розв'язування задач з подібними типами нелінійності давали можливість отримати результат лише для доволі обмеженого кола випадків. Поза увагою залишилися також задачі для біматеріалів з градієнтно-функційними тонкими прошарками.

У другому розділі описана та обґрунтована концепція запропонованого СММФС для розв'язування задач дослідження деформування біматеріалів з тонкими міжфазними включеннями-прошарками як комплексного об'єднання трьох ідеологічно незалежних модулів, пов'язаних посередництвом функцій впливу:

1) **Зовнішня задача** – визначення НДС матриці в залежності від функцій впливу (стрибків векторів напружень і переміщень) тонкого включення на математичному розрізі L' , що збігається із серединною поверхнею включення та зовнішнього навантаження. Розглядається плоско-антиплоска задача деформування біматеріалу, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_1, G_2$, на межі контакту яких (площина xOz)

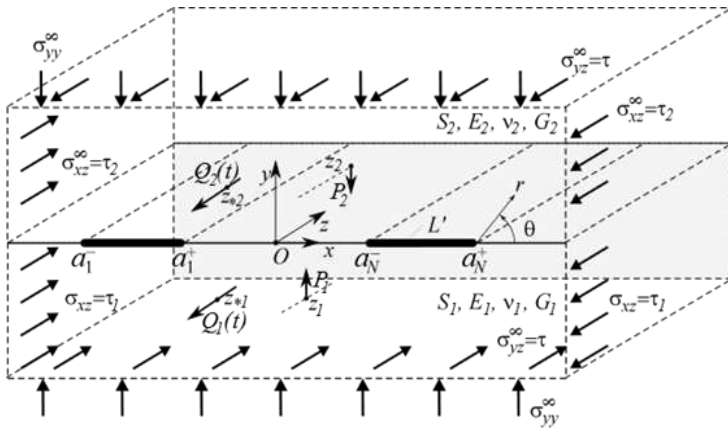


Рис.1. Геометрична та силова схема зовнішньої задачі

в напрямку осі зсуву z розташована система тунельних математичних розрізів. Навантаження такої структури здійснюється квазістатично і має нормальну складову (однорідне поле на нескінченності, зосереджені чинники P_k в т. ζ_k), яка спричиняє стискання півпросторів та змінними у часі зсувними чинниками

(однорідний зсув на нескінченності τ, τ_k , зосереджені сили Q_k та гвинтові дислокації b_k у точках ζ_{k*}), які спричиняють поздовжній зсув у тілі (рис. 1).

Розв'язок такої задачі отримано методом задачі спряження аналітичних функцій у двох частинах: плоска задача – розподіл нормальних напружень $\sigma_{yy}(x)$ уздовж межі поділу матеріалів матриці (вісь Ox)

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{yy}^{\infty} - 4 \sum_{k=1}^2 E_j \eta_k \operatorname{Re} \frac{N_k}{x - \zeta_k}; \quad \eta_k = \frac{1}{8\pi(1 - \nu_k)}, \quad (1)$$

$$N_k = \frac{P_k}{e_j} - \frac{\kappa_k \bar{P}_k - P_k}{e_k}, \quad e_k = \frac{2(G_k + \kappa_k G_l)}{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)} \quad (k = 1, 2; \quad j = 3 - k),$$

та вирази для компонент НДС задачі поздовжнього зсуву

$$\sigma_{yzk}(\zeta) + i\sigma_{xzk}(\zeta) = \sigma_{yzk}^0(\zeta) + i\sigma_{xzk}^0(\zeta) - Cg_6(\zeta) + ip_k g_3(\zeta) \quad (\zeta = x + iy \in S_k), \quad (2)$$

$$C = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad g_r(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(x) dx}{x - \zeta} \quad (r = 3, 6);$$

індексом «0» позначені компоненти НДС у матриці за відсутності розрізів. Тут згідно з принципом спряження континуумів різної розмірності наявність розрізів уздовж межі $x \in L$ імітується невідомими априорі стрибками напружень та переміщень

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}] &= f_3(x), \\ [\sigma_{xz}/G] &\equiv \sigma_{xz}^-/G_1 - \sigma_{xz}^+/G_2 = f_6(x) \quad (x \in L). \end{aligned} \quad (3)$$

2) Внутрішня задача - побудова математичної моделі тонкого включення-прошарку з нелінійними фізико-механічними властивостями, якою є виявлення зв'язку між функціями впливу на зовнішній поверхні включення та НДС у його поперечних перерізах.. У формулюванні задачі розглядається структура, що містить на відрізку $x \in L' = [-a, a]$ межі поділу матеріалів (площина xOz) тонке включення завтовшки $2h$ ($h \ll a$). Її матеріал задовольняє умовам рівноваги та конститутивній залежності деформацій від напружень (діаграма деформування) доволі загального нелінійного вигляду

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}) \text{ або } \sigma_{sz}^{in} = G_s^{in}(\bullet) \frac{\partial w^{in}}{\partial s}, \quad G_s^{in}(\bullet) = G_s^{in}(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}), \quad s = \{x, y\}, \quad (4)$$

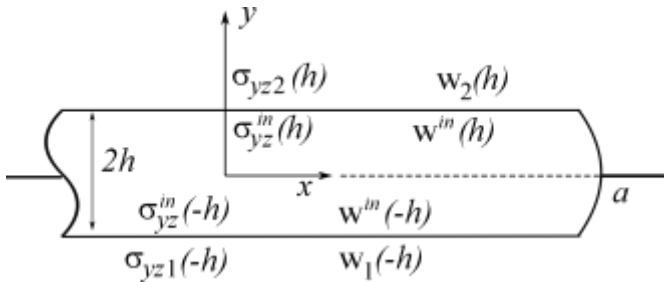


Рис.2. Міжфазне тонке включення-прошарок

яку обирають із загально-теоретичних міркувань, або вона є певною апроксимаційною залежністю експериментальних результатів. Отримано узагальнене рівняння математичної моделі тонкого фізико-механічно нелінійного включення у вигляді

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}, t) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h(x, t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi, t) d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}, t) [w]_h(x, t) + h \langle \sigma_{yz} \rangle_h(x, t) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тут і далі позначено $[\bullet]_h = \bullet(x, -h) - \bullet(x, +h)$, $\langle \bullet \rangle_h = \bullet(x, -h) + \bullet(x, +h)$.

Адекватність моделі (5) верифікується виконанням всіх умов граничних випадків матеріалу включення у діапазоні від тріщини до абсолютно жорсткого тіла.

3) Проміжна задача пов'язує між собою між собою функції впливу зовнішньої та внутрішньої задач і фактично характеризує умови контакту на інтерфейсі матриця-включення. У разі ідеального контакту функції впливу однакові за величиною та протилежні за знаком.

Вибір умов безпосереднього контактування має визначальну роль для отримання коректного розв'язку задачі, тому для загальності розглядаються

всі такі можливі умови у вигляді умов контакту з поверхневими напруженнями

$$u_n^1 = u_n^2, \sigma_{ns}^1 = \sigma_{ns}^2 - T, \quad (6)$$

чи умов так званого третього контакту: в *областях контакту, де проковзування відсутнє*, напруження не перевищує граничного (стан попереднього зміщення (тертя спокою))

$$|\sigma_{yzk}(x)| \leq \tau_{yz}^{\max}(x) \equiv -\alpha \sigma_{yyk}(x) \quad (\sigma_{yyk} < 0, [w] = 0), \quad (7)$$

там, де проковзування відбувається, воно зберігається на рівні свого граничного значення:

$$\sigma_{yzk}(x) = \text{sign}(w^+ - w^-) \tau_{yz}^{\max}(x), \quad |\sigma_{yzk}(x)| = \tau_{yz}^{\max}(x) \quad (\sigma_{yyk} < 0, [w] \neq 0) \quad (8)$$

Після уточнення типу та режиму навантаження, геометрії задачі (зовнішня задача), параметрів включення (внутрішня задача) та умов контактування співвідношення (1)-(3), (5), (6) або (7)-(8) утворюють комплексну результуючу систему рівнянь СММФС, яка надалі розв'язується аналітико-числовими методами. На відміну від застосування прямого МФС такий підхід збільшує кількість рівнянь, однак вони істотно простіші, а тому й легші у побудові і їхня числова реалізація також значно простіша. Крім того, оскільки формулювання кожного із трьох модулів є цілком незалежним, це значно полегшує опрацювання математичного апарату і програмного забезпечення для розв'язування не так окремих конкретних задач, як нових споріднених класів задач.

У **підрозділі 2.5 другого розділу** подано також запропоновану методику розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) 2-го роду зі змінюваними коефіцієнтами

$$Af(x) + \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi + E(x) \int_{-a}^x f(\xi) d\xi = F(x) \quad (x \in L = [-a, a]) \quad (9)$$

шляхом подання розв'язку (9) у вигляді нової невідомої вектор-функції

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^M d_{nm} w_n(x) \varphi_n(x) \quad (n = \overline{1, M}), \quad (10)$$

де $w_n(x) = w_n(x; \alpha_n, \beta_n) = a(1 - x/a)^{\alpha_n} (1 + x/a)^{\beta_n}$ - канонічні функції, вітки яких слід зафіксувати якоюсь певною умовою, наприклад $w_n(0) = a$; $\varphi_n(x)$ - регулярні (обмежені та вимірювані) на $[-a, a]$ функції; сталі α_n, β_n визначаються співвідношенням

$$\begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \mp i\mu_n + \frac{\arg(\eta_n)}{2\pi} + \begin{Bmatrix} L_n \\ M_n \end{Bmatrix}, \mu_n = \frac{\ln|\eta_n|}{2\pi}. \quad (11)$$

З огляду на клас функцій $\Pi^{(\alpha,\beta)}(f)$, у якому слід шукати розв'язок рівняння (9), регулярні функції $\varphi_n(x)$ подано розвиненнями

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{(N)}(x) = \sum_{m=0}^N A_m^n P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (12)$$

де $P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)$ - стандартизовані поліноми Якобі. З огляду на вид нелінійності коефіцієнтів ССІР (9) надалі для її розв'язування запропоновано збіжний ітераційний метод.

Також у **підрозділі 2.6 другого розділу** описана концепція інкрементально-ітераційного методу розв'язування класів задач із багатокроковим навантажуванням-розвантажуванням, невідомою апріорі зоною проковзування на інтерфейсі включення-матриця, нелінійними фізико-механічними властивостями матеріалу включення. Кожна із задач згаданих класів розглядається по чергово та розв'язується у наступних розділах детально.

У **третьому розділі** досліджено квазістатичне багатокрокове навантажування-розвантажування стиснутих півпросторів в умовах дотикового контакту з метою апробації описаного вище інкрементального підходу. Для даного класу задач отримано аналітичні вирази для всіх компонент НДС матриці, розсіяння енергії внаслідок фрикційного проковзування, узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) K_{31} , розмірів зон проковзування, що дозволило проаналізувати їх залежність від різних типів і режимів квазістатичного багатокрокового навантажування-розвантажування. В основу застосування інкрементального підходу для цього випадку покладено твердження, що отримані на певному завершеному p -ому кроці навантажування-розвантажування параметри НДС вважаються залишковими для наступного $p+1$ -го кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}(\zeta, t) + i\sigma_{xz(p)}(\zeta, t) &= \left\{ \sigma_{yz}(\zeta, t) + i\sigma_{xz}(\zeta, t) \right\} - \\ &- \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \sigma_{yz(i)}(\zeta, t_{(i)}) + i\sigma_{xz(i)}(\zeta, t_{(i)}) \right\} \left(z \in S_k; k=1, 2; j=3-k; t > t_{(p-1)} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

а крайові умови та величина навантажування з урахуванням напряму мають локальний по відношенню до попереднього кроку характер. Тобто

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}^{\pm}(x, t) &= -\operatorname{sgn}([w]_{(p)})\tau_{yz}^{\max}(x) - \sigma_{yz(p-1)}^{\pm}(x, t_{(p-1)}) = \\ &= -\tau_{yz}^{\max}(x) \left(\operatorname{sgn}[w]_{(p)} - \operatorname{sgn}[w]_{(p-1)} \right) \quad x \in L'_{n(p)} \quad (n = \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi \left\{ \bullet_{(p+1)}^{in}(\zeta, \pm h) - \bullet_{(p)}^{in}(\zeta, \pm h), \bullet_{(p+1)}(\zeta, \pm h) - \bullet_{(p)}(\zeta, \pm h) \right\} = 0.$$

Отримані у результаті підсумкові значення напружень, деформацій, переміщень та їхніх стрибків, розсіяної енергії та ін. після (p) -го кроку можуть бути подані у вигляді суперпозиції залишкових станів на попередніх кроках. Слід однак зазначити, що довільна суперпозиція породжених в *різні моменти часу* різними випадками навантаження НДС є неможливою через нелінійність сформульованої задачі.

Досліджено випадки навантаження різними силовим чинниками, визначені критичні значення інтенсивності $Q_{(p)}^*$ цих чинників, за яких почнеться і буде зростати проковзування на кожному кроці. На рис. 3 зображена залежність знерозміреної величини розміру зони проковзування $a_{(p)}/d$ на (p) -му

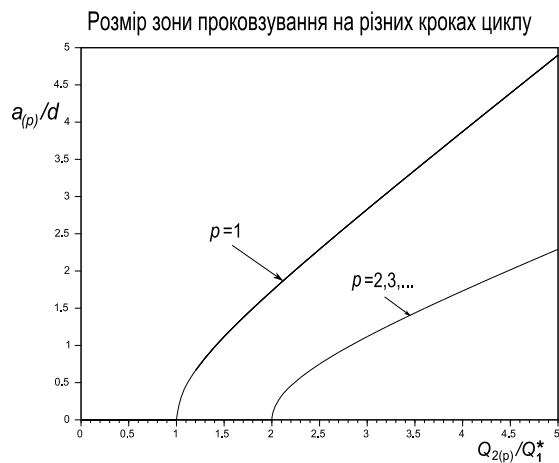


Рис. 3. Залежність розміру зони проковзування від параметрів навантаження упродовж циклу

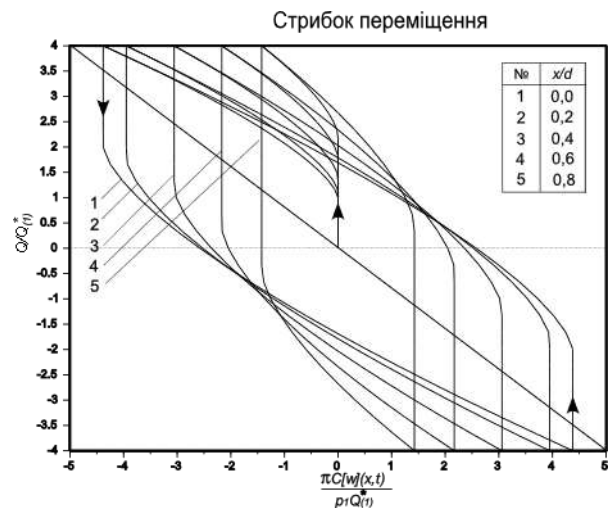


Рис. 4. Гістерезисні залежності стрибка переміщень у повному циклі навантаження для різних точок зони проковзування

кроці від знерозміреної інтенсивності прикладеної сили $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^*$, прикладеної у точці $\zeta_2 = id$. Причому, при $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^* \leq 1$ проковзування відсутнє завжди, а при $1 \leq Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^* \leq 2$ відбудеться лише на першому (початковому) кроці. Рис. 4 ілюструє гістерезисний характер зміни стрибка переміщень у повному циклі навантаження для різних точок зони проковзування.

Числові експерименти дали можливість з'ясувати вплив фрикційного проковзування та застосування різних варіантів навантажування на зміну розміру зони проковзування, еволюцію стрибків переміщень та розсіяння енергії. Виявлено, що зона проковзування з'являється і зростає найшвидше у випадку, коли у ній притискаючі нормальні напруження мінімальні. Інтенсивності зростання зони проковзування також сприяє віддалення від неї

точок прикладання зосереджених силових чинників. Досліджено, що еволюція стрибка переміщень упродовж циклу має гістерезисний характер, а дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів, а також при зростанні розмірів зон проковзування.

У четвертому розділі отримані в розділі 3 результати узагальнені на випадок, коли фрикційне проковзування півпросторів можливе лише на деяких ділянках $\gamma_{n(p)} = [a_{n(p)}^-; a_{n(p)}^+] \subset L'_n$ системи стиснутих міжфазних тунельних розрізів $L' = \bigcup_{n=1}^N L'_n = \bigcup_{n=1}^N [b_n^-; b_n^+]$ на інтерфейсі півпросторів за тих самих умов змінюваного багатокрокового навантажування. Розміри цих зон $\gamma_{n(p)}$, періодично з'являючись та зростаючи не можуть перевищувати розмірів відповідних заданих апріорі стиснутих розрізів. Тоді під час вивчення явища зміни величини зсувного навантажування для кожної із зон проковзування $\gamma_{n(p)}$ можна виділити три фази розвитку процесу проковзування берегів розрізів поздовжнього зсуву, які відрізняються від згаданих в розділі 3 фаз розвитку процесу проковзування, коли відсутні обмеження на розмір зон проковзування:

1) Комбінація зсувного та стискаючого навантаження є такою, що при зростанні інтенсивності зсувних зусиль до свого локального на кроці максимуму скрізь уздовж L завжди виконується умова (7), тобто проковзування не виникає взагалі.

2) Інтенсивність зсувних зусиль в певний момент часу $t_{(p)}^*$ вже достатня для виникнення умов (8) хоча б на деякій обмеженій ділянці $\gamma_{n(p)} \subset L'_{n(p)}$. Навантаження, коли вперше з'являється проковзування, назване першим критичним. Поки навантаження на етапі першої фази його зміни не досягло першої критичної величини, наявність тріщини не матиме жодного впливу на НДС тіла і все буде відбуватися так, якби об'єктом дослідження були два притиснуті до себе окремі півпростори. У разі переходу до другої фази навантаження для визначення розміру $a_{n(p)}$ зони проковзування можна використовувати умову рівності нулю УКІН $K_{3(p)}$.

3) Інтенсивність зсувних зусиль в певний момент часу $t_{(p)}^{**}$ зросла настільки, що (хоча б з одного боку) розміри зони проковзування досягли розмірів тріщини – $\gamma_{n(p)} \subseteq L'_{n(p)}$. Подальше зростання зусиль не призведе до зростання зони проковзування (в околі цього кінця тріщини), яка вимушено обмежена реальним розміром існуючої тріщини. У кінчиках такої математичної тріщини за таких обставин почнуть формуватися сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові УКІН.

4) Внаслідок вимушеного обмеження на поширення зон проковзування лише до розмірів L' випадок поширення зони проковзування поза L' , зокрема й на всю L , неможливий.

Наявність можливих зон фрикційного проковзування всередині тріщин істотно впливає на розподіл напружень в околі їхніх вершин $x = \pm b$. На рис. 5, 6 зображено вплив відносної віддалі від тріщини d/b та коефіцієнта тертя α відповідно на зміну УКІН у порівнянні з класичним УКІН у разі гладкого контакту $K_{3(p)}/K_{3(1)}^0$. Загальний висновок: збільшення віддалі d/b , коефіцієнту тертя α істотно зменшують УКІН та є вигідними з погляду потреби забезпечення міцності конструкції.

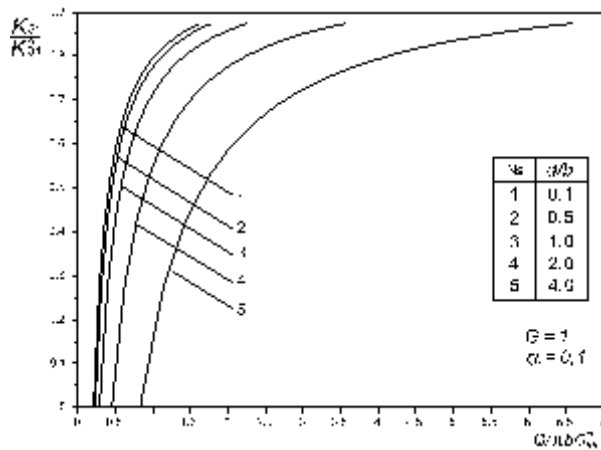


Рис. 5. Залежність відношення УКІН $K_{3(p)}/K_{3(1)}^0$ від віддалі точки прикладання зсувної сили до тріщини

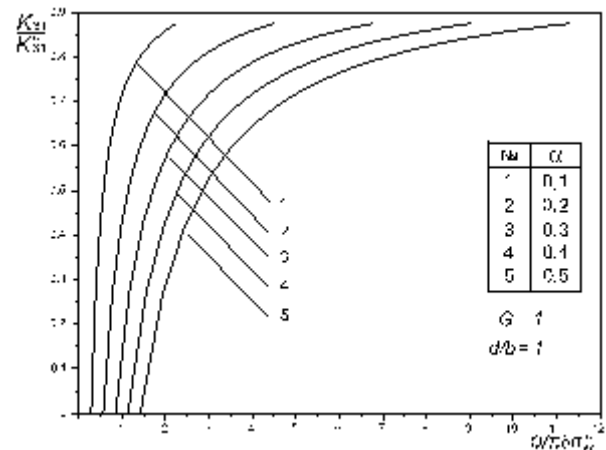


Рис. 6. Залежність відношення УКІН $K_{3(p)}/K_{3(1)}^0$ від коефіцієнту тертя

Для всіх розглянутих варіантів нормального та багатокрокового зсувного навантажування-розвантажування отримані аналітичні вирази компонент НДС, розсіяння енергії, УКІН, розмірів зон проковзування та критичних значень інтенсивності силових чинників (перше критичне – поява проковзування, друге критичне – зона проковзування досягне краю тріщини). Здійснений числовий аналіз дав можливість сформулювати загальні тенденції зміни НДС у задачах такого класу: 1) локальність впливу притискних нормальних зосереджених сил відчутна лише до віддалі $5a$ і так само як і зростання коефіцієнту тертя зменшує інтенсивність розсіяння енергії та рівень УКІН; 2) протилежний ефект чинить зменшення віддалі від площини тріщини точок прикладання зсувної сили та збільшення її інтенсивності.

У п'ятому розділі досліджено вплив існування додаткових поверхневих напружень (в межах базової концепції функцій стрибка) на інтерфейсах включення-прошарку з матрицею на параметри біматеріальної структури в цілому, що забезпечило природну можливість перенести методи розв'язування задач макромеханіки для тіл із тонкими прошарками у сферу мікро- та наномеханіки композитів. Використання СММФС у цьому класі задач порівняно з розглянутим в розділах 3,4 класі передбачає зміну рівнянь лише у двох модулях: в ролі математичної моделі включення-прошарку вибирається співвідношення (5), а як умову контакту – співвідношення (6).

Оскільки метою даної задачі є дослідження впливу саме поверхневого навантаження на НДС структури, то в моделі включення (5) прийнята конститутивна залежність деформацій від напружень у вигляді класичного закону Гука $\sigma_{sz}^{in} = \text{const}$ ($s = x, y$), що істотно спростило як загальний вигляд математичної моделі включення

$$\begin{cases} \alpha_1 f_6(x) + \frac{\beta_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_3(\xi)}{\xi - x} d\xi - \gamma_1 \int_{-a}^x f_3(\xi) d\xi = F_3(x), \\ \alpha_2 f_3(x) + \beta_2 \int_{-a}^a \frac{f_6(\xi)}{\xi - x} d\xi - \gamma_2 \int_{-a}^x f_6(\xi) d\xi = F_6(x), \end{cases} \quad x \in [-a, a] \quad (15)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = p_2 - p_1, \quad \beta_1 = 2p, \quad \beta_2 = 2C - G_y^{in}, \quad \gamma_1 = a/hG_x^{in}, \quad \gamma_2 = aG_y^{in}/h,$$

$$F_3(x) = \gamma_1 \left\{ N_{xz}(-a) - (x+a)(T_1 - T_2) \right\} - \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h,$$

$$F_6(x) = \gamma_2 \left\{ [w](-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yzk}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\} + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h - T_1 - T_2$$

з додатковими умовами балансу

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f_3(\xi) d\xi &= N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2a(T_1 - T_2), \\ \int_{-a}^a f_6(\xi) d\xi &= [w]_h(a) - [w]_h(-a), \end{aligned} \quad (16)$$

так і метод аналітико-числового розв'язування результуючих рівнянь.

Згідно з розробленою в розділі 2 методикою розв'язування ССІР 2-го роду розв'язки невідомих стрибків НДС подано у вигляді (11) з особливістю $-\frac{1}{2} \pm \mu$, де $\mu = \arctg \frac{G_2 - G_1}{2\sqrt{G_2 G_1}}$. Наступним кроком система результуючих

рівнянь методом колокацій зведена до звичайної системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення коефіцієнтів розвинень регулярних функцій $\varphi_m^*(x)$ у ряди по поліномах Якобі

$$\varphi_m^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m P_n^{-1/2 \pm \mu, -1/2 \mp \mu}(x),$$

що остаточно визначило всі шукані величини задачі.

Для ілюстрації методики дослідження задач такого класу було виконано детальний числовий аналіз впливу на НДС матриці сил натягу як сталих, так і залежних від пружних властивостей матеріалів у вигляді $\tilde{T}_{kl} = k_T \left(G^{in}/G \right)^\alpha$ за навантажування однорідними зсувними напруженнями на безмежності $\tilde{\tau} = \tau/G$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_2/G$, зосередженими силами $\tilde{Q} = Q/\pi a G$ та дислокаціями

$\tilde{b} = b/\pi a$ за схемою $Q_2 = -Q_1 = Q$, $b_2 = -b_1 = b$, $z_2 = x_2 + id = \bar{z}_1$. На рис. 8-11 проілюстровано вплив різних параметрів поверхневого напруження у комбінаціях з різними навантажувальними чинниками.

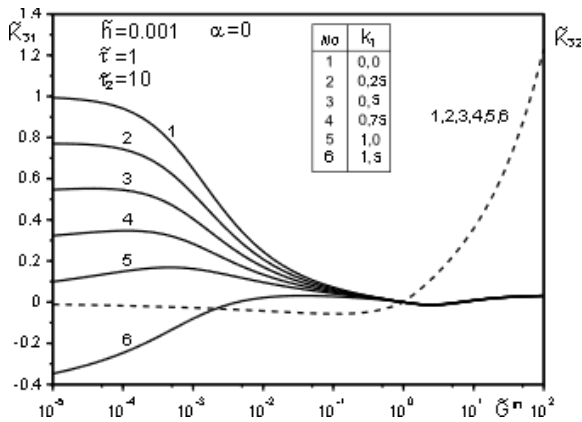


Рис. 8. Вплив інтенсивності поверхневого натягу k_T на \tilde{K}_{31} (суцільна лінія) та \tilde{K}_{32} (пунктирна лінія)

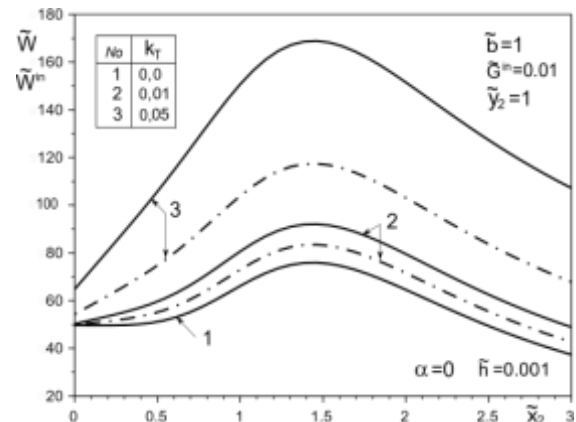


Рис. 9. Вплив параметра натягу k_T на енергію деформації \tilde{W}^d матриці (суцільна лінія) та включення \tilde{W}_{in}^d (штрих-пунктир) при зміщенні точки прикладання дислокації вздовж осі податного включення

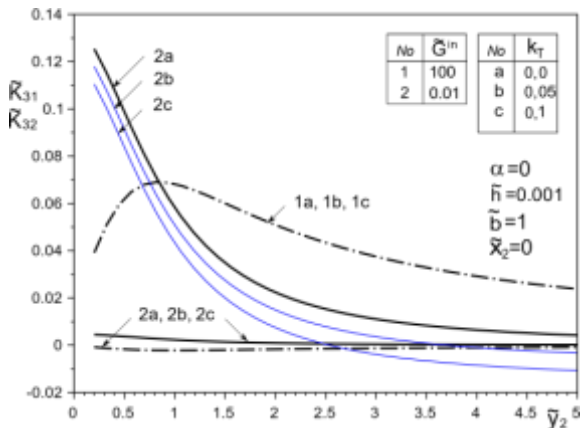


Рис. 10. Вплив параметра натягу k_T на УКІН \tilde{K}_{31} (суцільна лінія) та \tilde{K}_{32} (штрих-пунктир) при віддаленні дислокації від осі включення

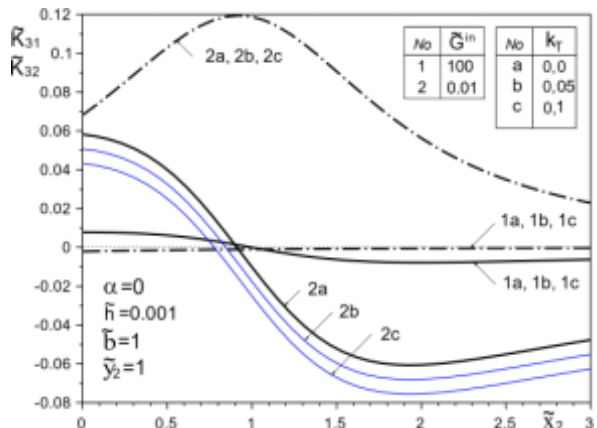


Рис. 11. Вплив параметра натягу k_T на УКІН \tilde{K}_{31} (суцільна лінія) та \tilde{K}_{32} (штрих-пунктир) при зміщенні точки дії дислокації вздовж осі Ox

На рис. 12-13 показано, як поверхневі напруження впливають на сили, що діють на дислокацію з вектором Бюргера b у точці $\zeta_{*k} \in S_k$ (формули Піча-Келера)

$$F_x(\zeta_{*k}) = b\hat{\sigma}_{yz}(\zeta_{*k}), F_y(z_{*k}) = -b\hat{\sigma}_{xz}(\zeta_{*k}). \quad (17)$$

Виявлені у числових розрахунках особливості впливу натягу на НДС у матриці та включенні за різного навантаження. Зокрема: 1). поява натягу і зміна точок прикладання зосереджених силових чинників знижують інтенсивність енергії деформації та поля напружень в околі включення, істотно зменшуючи K_{31} , водночас практично не впливаючи на K_{32} ; 2). спостерігаються певні діапазони комбінацій механічних параметрів включення та розташування ядра дислокації, коли існують добре виражені екстремуми значень енергії деформації, УКІН та сил, що діють на дислокацію.

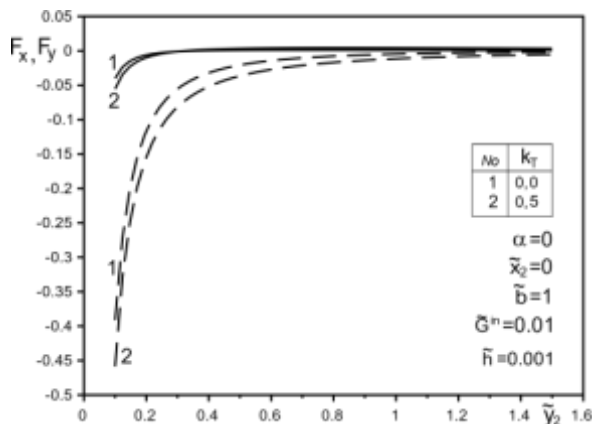


Рис. 12. Вплив параметра натягу k_T на сили \tilde{F}_x (суцільна лінія), \tilde{F}_y (штрих), що діють на дислокацію з її віддаленням від осі податного включення

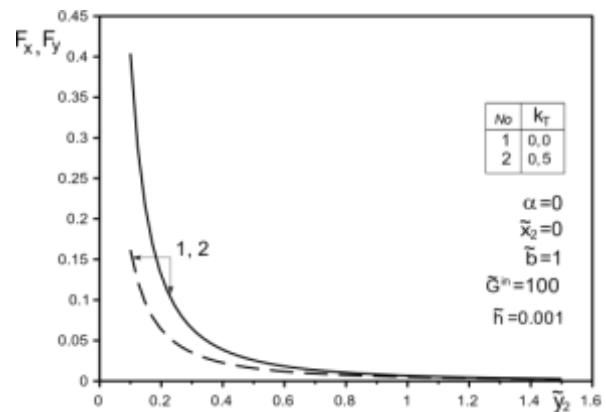


Рис. 13. Вплив параметра натягу k_T на сили \tilde{F}_x (суцільна лінія), \tilde{F}_y (штрих), що діють на дислокацію з її віддаленням від осі жорсткого включення

У шостому розділі досліджено вплив на НДС біматеріалу неідеальності будови включення-прошарку в сенсі його багатошаровості. Така будова включень-прошарків притаманна також багатьом мікро- та наноструктурам. Крім того, за допомогою таких шаруватих структур можна моделювати сучасні неперервно градієнтно-функційні матеріали.

В ролі об'єкту внутрішньої задачі розглянуто шарувате включення загальної товщини $2h$ ($h \ll a$) (рис. 14), яке є пакетом тонких плоскопаралельних шарів різної товщини з різними ортотропними у напрямі двох осей механічними властивостями G_y^{inK}, G_x^{inK} ($K = \overline{1, M}$). Причому на межах поділу матеріалів між матрицею і включеннями та між самими шарами можуть діяти сили поверхневого натягу.

Така багатокомпонентна структура вимагає комбінованого підходу для моделювання, оскільки для внутрішньої задачі важливо мати вирази для крайових значень $\sigma_{yz}^{in}(x, \pm h), w^{in}(x, \pm h)$. Разом з тим міжшарове контактування для кожного окремого шару є проявом зовнішнього впливу.

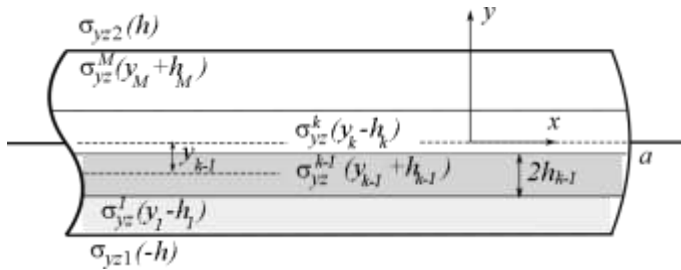


Рис.14. Шарувате включення

Побудована на підставі методики розділу 2 математична модель багатошарового включення з можливою наявністю поверхневих енергій інтерфейсної взаємодії чи неідеальності контакту має вигляд (5), (15), (16) для кожного шару.

Між шарами згідно з концепцією СММФС припускається можливість контакту з поверхневим напруженням (6) або третього контакту (7)-(8). Побудована на підставі парадигми СММФС результуюча система рівнянь задачі розв'язана за методикою, описаною в розділі 2 та використаною в розділі 5.

Як окремий випадок розглянуто задачу часткового відшарування тонкого ортотропного включення-прошарку у біматеріальній мікроструктурі за умов навантажування силовими чинниками (однорідне напруження на нескінченості, зосереджені сили) та дислокаціями (рис. 15). Для знаходження невідомих априорі зон проковзування було застосовано інкрементально-ітераційного алгоритм, що дало можливість розв'язати низку нетрадиційних задач. Зокрема, для забезпечення безпечності режиму навантажування структури в умовах експлуатації визначені «зони безпеки» (області розміщення точок прикладання зосереджених чинників, за яких проковзування не розпочнеться) (рис.16). На рис. 17-18 відображено вплив появи проковзування на розподіл напружень $\tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} / G_{av}$ вздовж інтерфейсу включення-матриця, а також зростання розміру зони проковзування та його інтенсивності $\tilde{w}_{sl} = w_{sl} / a$ у залежності від параметрів задачі. Виявлено, що жорсткіші від матриці включення, з одного боку, значно чутливіші до появи на них проковзування – критичні значення сили \tilde{Q}^* для них менші, ніж для податного. Але, з другого боку, форма «зони безпеки» для податних включень залежна від локалізації навантаження більшою мірою, ніж від розміру включення. Зменшення віддалі точок прикладання від осі включення, як і зростання інтенсивності навантаження очікувано призводить до зростання зони проковзування і її величини. Однак зміна абсцис точок прикладання сил вздовж осі включення до його вершини, як і збільшення ординати зменшують інтенсивність проковзування. Гвинтова дислокація може спричинити появу двох зон проковзування антисиметричних відносно вертикальної осі включення.

Як інший частковий випадок задачі з тонким міжфазним шаруватим включенням досліджено поздовжній зсув структури у вигляді однорідного тіла із тонким двошаровим різномодульним включенням з шарами завтовшки $2h_K$ ($K = 1, 2$), $2h = 2h_1 + 2h_2$ та ортотропними механічними властивостями

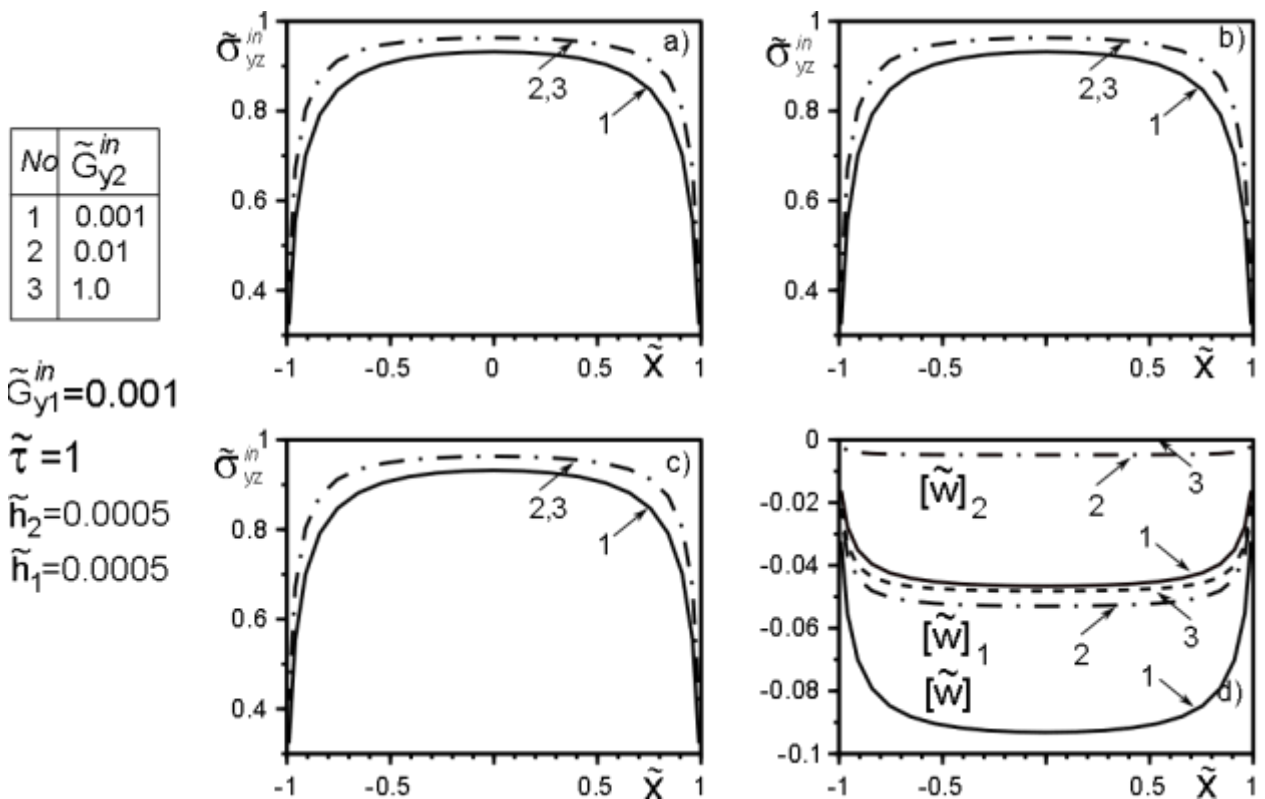


Рис. 19. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір S_2 матриці (а), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір S_1 матриці (с), та стрибка переміщень на включенні (d) для податнішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням

Дослідження впливу різномодульності шарів включення, зовнішніх силових чинників за умови ідеального контакту складових структури на знерозмірені параметри НДС на поверхнях включення проілюстровані на рис. 19 – 20.

Для випадку, коли один з шарів значно податніший від матриці, спостерігається ефект «релаксації» (зменшення рівня напружень) на інтерфейсах незалежно від жорсткості другого шару. Причому цей ефект більш локалізований за навантаження зосередженою силою, розташованою на віддалі d від включення порядку $d/a \approx O(1)$.

Досліджено, що зростання ступеню різномодульності матеріалів шарів включення істотніше впливає на УКІН, коли жорсткість одного з шарів більша від жорсткості матриці (рис. 21). Наявність поверхневих зусиль призводить до зростання УКІН, якщо вони співнапрявлені до зовнішнього навантаження, і зменшення у протилежному разі. Різномодульність матеріалів шарів істотно спотворює цей ефект, що особливо помітно, коли один з шарів значно податніший від матеріалу матриці (рис. 22). Виявлено, що існують певні області зміни комбінацій параметрів зовнішнього

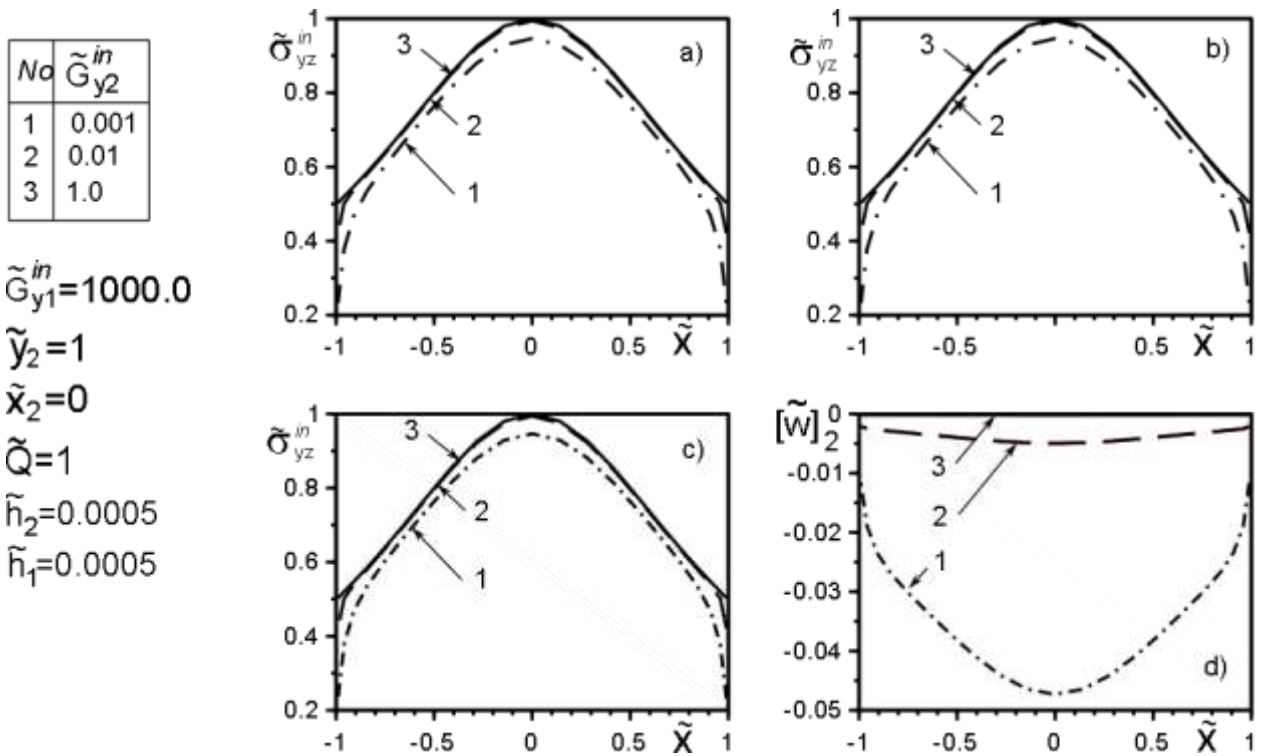


Рис. 20. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір S_2 матриці (а), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір S_1 матриці (с), та стрибка переміщень на включенні (d) для жорсткішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження зосередженою силою

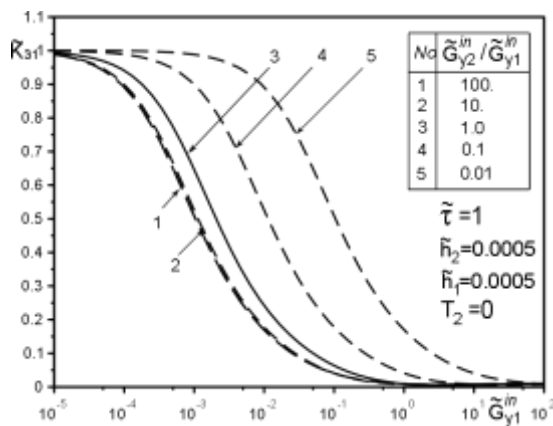


Рис. 21. Вплив ступеню різномодульності прошарків на УКІН K_{31} за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням і відсутності поверхневого натягу

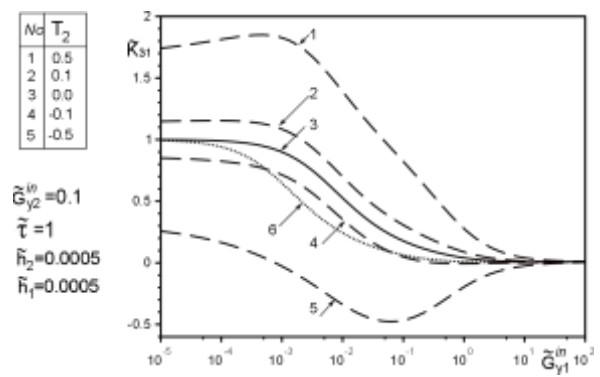


Рис. 22. Вплив на УКІН K_{31} наявності міжшарового поверхневого натягу для податнішого від матриці шару 2 і довільного матеріалу шару 1 включення при навантажуванні рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням; (6 – розрахунок для випадку однакових матеріалів шарів

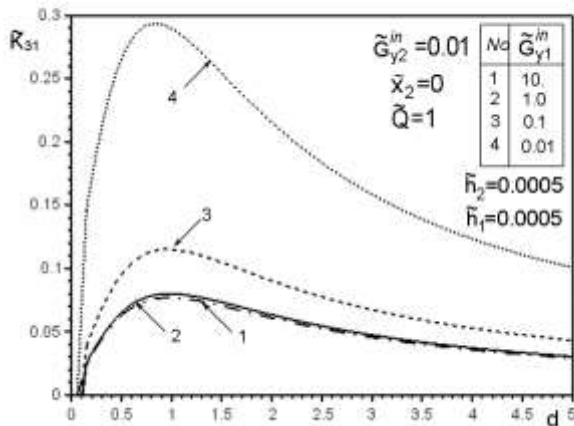


Рис. 23. Вплив віддалі від d (схема 3) включення точки прикладання зосередженої сили і ступеню різномодульності на УКІН K_{31} за відсутності поверхневого натягу і податнішого від матриці шару 1

навантаження, поверхневих зусиль та властивостей матеріалів шарів за яких існують локальні екстремуми УКІН. На рис. 23 підтверджено відомий ефект наявності максимуму УКІН K_{31} при навантажуванні зосередженою силою, розміщеною на віддалі приблизно $d \approx a$ від осі включення незалежно від жорсткості матеріалів шарів. Крім того, якщо матеріал одного з шарів еквівалентний до матеріалу матриці, то отримуються відомі результати для однорідного пружного включення на межі розділу.

У сьомому розділі СММФС застосовано до розв'язання задачі про деформування тонкого міжфазного включення з нелінійними фізичними властивостями. Використання математичної моделі механічно нелінійного включення (5) вимагає на кожному кроці (p) розв'язування ССІР виду (15)–(16)

$$\begin{cases} \alpha_1 f_{6(p)}(x,t) + \frac{\beta_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_{3(p)}(\xi,t)}{\xi-x} d\xi - \gamma_{1(p)}(x,t) \int_{-a}^x f_{3(p)}(\xi,t) d\xi = F_{3(p)}(x,t), \\ \alpha_2 f_{3(p)}(x,t) + \frac{\beta_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_{6(p)}(\xi,t)}{\xi-x} d\xi - \gamma_{2(p)}(x,t) \int_{-a}^x f_{6(p)}(\xi,t) d\xi = F_{6(p)}(x,t), \end{cases} \quad (18)$$

$$F_{3(p)}(x,t) = \gamma_{1(p)}(x,t) N_{xz}(-a) - \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h,$$

$$F_{6(p)}(x,t) = \gamma_{2(p)}(x,t) \left\{ [w]_h(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yzk}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\} + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h,$$

із змінюваними коефіцієнтами виду

$$\gamma_{1(p)}(x,t) = \frac{a}{h G_{x(p)}^{in}}(x,t), \quad \gamma_{2(p)}(x,t) = \frac{a G_{y(p)}^{in}}{h}(x,t). \quad (19)$$

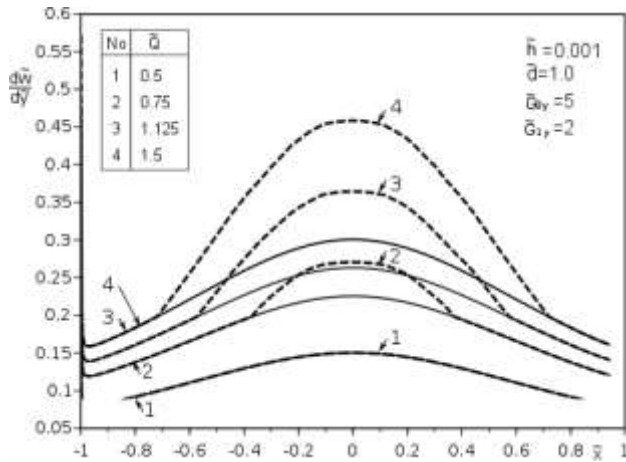


Рис. 24. Розподіл пружно-пластичних деформацій включення (штрихова лінія) протягом довантажування у порівнянні з ідеально пружним випадком (суцільна лінія)

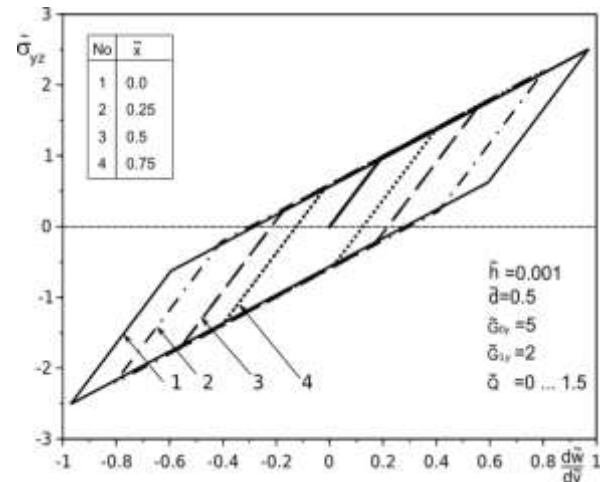


Рис. 25. Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення з ідеальним ефектом Баушінгера упродовж симетричного циклу у точках $\tilde{x}=0$ (суцільна лінія), $\tilde{x}=0,25$ (штрихпунктир), $\tilde{x}=0,5$ (штрих), $\tilde{x}=0,75$ (пунктир)

Запропонованим інкрементально-ітераційним методом досліджено випадки багатокрокового пружно-пластичного деформування включення з матеріалу, підпорядкованого закону Рамберга-Осгуда

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{0s}} \left(1 + K_s \left(\frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{0s}} \right)^{m_s - 1} \right), \quad s = \{x, y\} \quad (20)$$

або ідеального пружно-пластичного матеріалу із лінійним зміцненням

$$\begin{cases} \frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{0s}}, & |\sigma_{sz}^{in}| < \tau_{yield}, \quad s = \{x, y\}, \\ \frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \left(\sigma_{sz}^{in} - \tau_{yield} \right) \frac{G_{0s} - G_{1s}}{G_{0s} G_{1s}}, & |\sigma_{sz}^{in}| \geq \tau_{yield}. \end{cases} \quad (21)$$

Відповідність діаграмі деформування (21) добре ілюструють рис. 24, 25 – помітна зона пластичного деформування вздовж $L'' = [-b; b]$. Для закону деформування Рамберга-Осгуда (20) виконано числовий аналіз впливу кожного з параметрів на НДС у включенні за багатокрокового навантажування-розвантажування різними силовими чинниками. Зростання параметра нелінійності K_s у (20) та різномодульності матриці G_2/G_1

зменшує значення УКІН K_{31}, K_{32} , що має позитивний ефект для експлуатаційних властивостей такої структури.

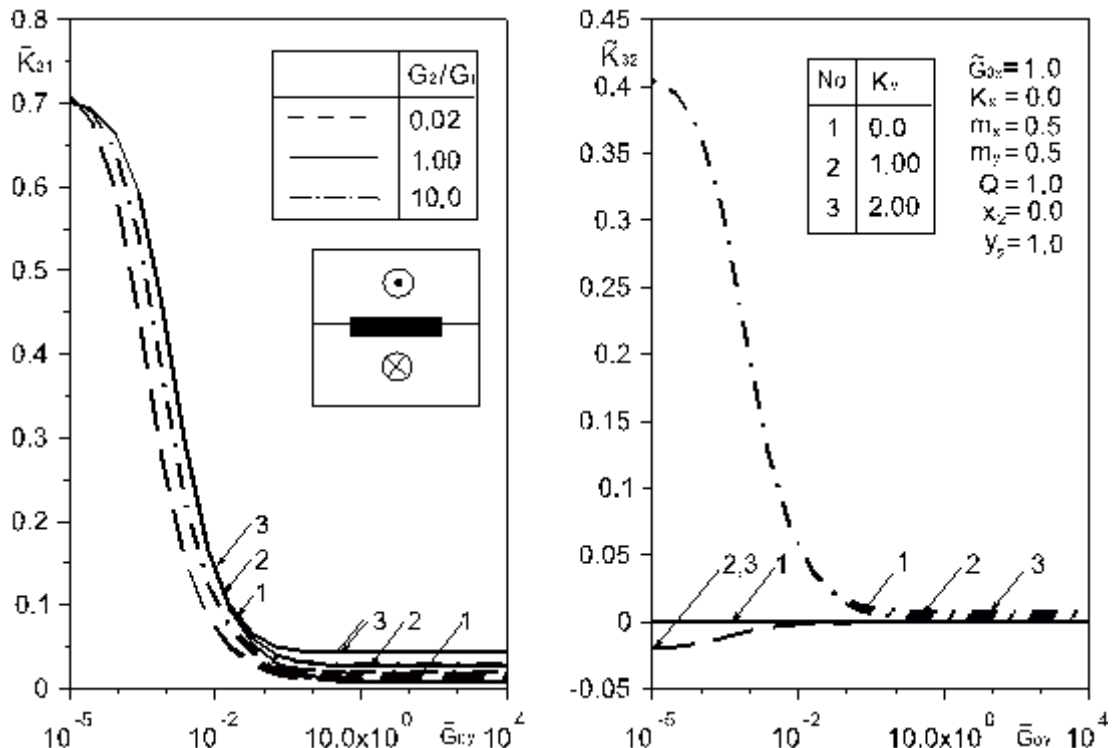


Рис. 26. Вплив параметра K_s та різномодульності матриці на УКІН K_{31}, K_{32} у випадку навантажування зосередженими силами.

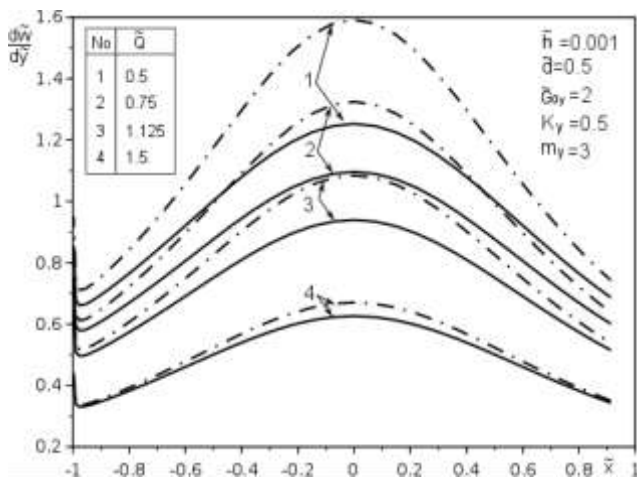


Рис. 27. Розподіл пружно-пластичних деформацій у включенні (штрих-пунктирна лінія) упродовж довантажування у порівнянні з ідеально пружним випадком (суцільна лінія)

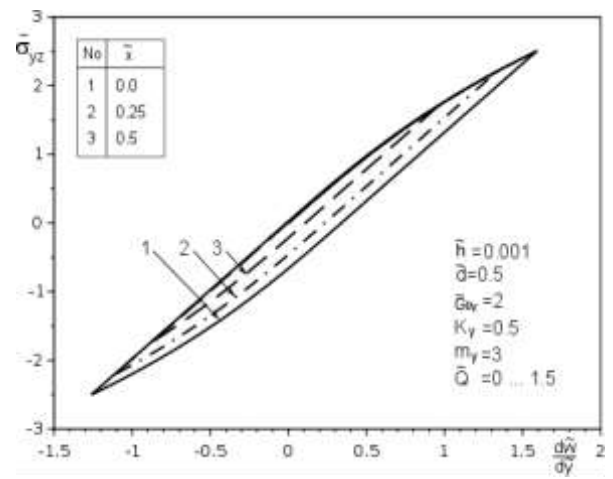


Рис. 28. Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення протягом симетричного циклу у точках $\tilde{x} = 0$ (суцільна лінія), $\tilde{x} = 0,25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x} = 0,5$ (штрихова)

Розподіл нелінійних деформацій вздовж L' (штрих-пунктир) у порівнянні з лінійно пружною моделлю деформування (суцільна лінія)

зображено на рис.27. Гістерезисний характер зміни НДС матеріалу включення упродовж вищезгаданого симетричного циклу навантажування у точках $\tilde{x} = 0$ (суцільна лінія), $\tilde{x} = 0,25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x} = 0,5$ (штрих) помітно на рис. 28.

Розрахунки проводилися на розробленому у системі матричної математики SciLab (ліцензія OpenSource) авторському програмному комплексі. Програми було створено як для розрахунків за МФС, так і СММФС з метою порівняння. Для класів задач, де МФС можна було застосувати, було виявлено, що отримані числові результати практично не відрізняються, але програми для СММФС значно простіше створювати і модифікувати. При заданій відносній точності розрахунків 10^{-4} виявилось достатнім обмежитися 21 точкою колокації для обох методів. Наступне збільшення кількості точок колокації не показало якісного і кількісного покращення результатів в межах заданої точності. При застосуванні інкрементально-ітераційного підходу на кожному кроці довантажування-розвантажування в найгіршому випадку «жорсткого» матеріалу в околі кінців включення виявилось достатнім обмежитися 5 ітераціями.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему, що полягала у розробці цілісних математичних моделей і методів дослідження механічних полів у біматеріалах з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями з урахуванням неідеальності контактної взаємодії елементів структури і впливу поверхневої енергії за довільного типу і режиму квазістатичного навантажування-розвантажування. Основні наукові результати є такими:

1. На основі загальних співвідношень лінійної та фізично нелінійної теорії пружності і методу функцій стрибка запропоновано структурно-модульний метод функцій стрибка для розв'язування задач цього класу. Завдяки цьому методу спрощується розв'язування нових ускладнених класів задач теорії тонкостінних включень, зокрема, з'являється можливість істотно підвищувати складність взятих до розгляду математичних моделей і умов контактної взаємодії та мінімізувати зміни у вже опрацьованому програмному забезпеченні.

2. Вперше побудована цілісна система універсальних математичних моделей тонкого структурно неоднорідного включення з урахуванням істотної фізичної нелінійності їх механічного деформування: модель тонкого ортотропного пружного включення (базова); модель тонкого фізично нелінійного включення (нелінійно пружного чи пружно-пластичного); модель тонкого багатошарового включення з можливим поверхневим натягом та неідеальним контактом між шарами, кожен з яких є варіантом базової моделі тонкого включення. Така система моделей дає можливість створити на їхній основі синтетичну математичну модель механічного деформування фізично та структурно довільного тонкого включення,

долучаючи чи вилучаючи з неї потрібні механічні чи структурні особливості у повному спектрі умов контакту між елементами структури.

3. Для розв'язування різних класів задач деформування притискуваних ізотропних біматеріалів із можливим існуванням як дефектів безпосереднього контактування, так і тонких стрічкових прошарків-неоднорідностей між ними за широкого спектру реологічних властивостей та умов ідеального чи практично довільного типу неідеального контакту розроблено низку додаткових методів-процедур: а). Для вирішення нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах довільного багатокрокового навантажування-розвантажування імплементована концепція інкрементального підходу, в основу якого покладено моделююче припущення про можливість врахування напружено-деформованого стану (НДС) від попереднього кроку як залишкового на кожному наступному кроці довантажування чи розвантажування. б). У разі фізичної нелінійності матеріалу включення (довільна діаграма деформування) та неідеального нелінійного контакту матеріалів в умовах апіорі невідомих зон контакту матриці з включенням та багатокрокового навантажування-розвантажування розроблено та успішно реалізовано збіжний ітераційно-інкрементальний метод розв'язування результуючих систем рівнянь із змінюваними коефіцієнтами, залежними від поточного стану НДС.

4. Розроблено математичний апарат та програмний комплекс для реалізації структурно-модульного методу функцій стрибка дослідження напруженого стану біматеріалів з тонкими міжфазними включеннями за дії зосереджених сил та дислокацій. Досліджено зокрема особливості розв'язків ССІР, використаних під час побудови системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для подальшого числового розв'язування результуючих рівнянь. Достовірність отриманих результатів забезпечено верифікацією отриманих співвідношень і розрахункових методів на часткових випадках лінійної пружності матеріалу включення; тестуванням алгоритмів та схем узгодженості НДС включення із діаграмою деформування матеріалу тощо.

5. З використанням вищенаведених методів запропонована ефективна методика розрахунку НДС при циклічному чи довільному іншому багатокроковому квазістатичному зсувному навантажуванні притискуваних тіл, коли у зоні контакту може відбуватися гладке чи фрикційне проковзування різного типу.

6. Отримані аналітичні розв'язки нових задач антиплоского деформування біматеріалу для випадку комбінованого стискаючого навантаження та квазістатично змінюваного багатокрокового зсувного навантаження. Це стосується визначення всіх елементів НДС, у т.ч. переміщень, узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) та дисипації енергії в околі зон втрати зчеплення матеріалів, а також розмірів цих невідомих зон.

а). Числові експерименти дали можливість з'ясувати вплив тертя та застосування різних способів навантажування на зміну розміру зони проковзування, еволюцію стрибків переміщень та розсіяння енергії.

Виявлено, що зона проковзування з'являється і зростає найшвидше у випадку, коли у ній притискаючі нормальні напруження мінімальні. Досліджено, що еволюція стрибка переміщень упродовж циклу має гістерезисний характер, а дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів, а також при зростанні розмірів зон проковзування.

б.) З'ясовано, що під час деформування притискуваних тіл навантаженням зсуву за відсутності чи існування обмеження на розмір зони проковзування можна виділити відповідно дві або три фази. На першій фазі зміни навантаження від нуля до першого критичного значення проковзування завжди відсутнє. На другій, при збільшенні навантаження понад перше критичне – з'являється і монотонно зростає зона проковзування, причому на її краях напруження скінченні. Якщо ж задане хоч одне обмеження на розмір зони проковзування, то існує друге критичне значення навантаження, за якого розміри поточних зон проковзування досягнуть допустимої межі (зокрема внутрішнього краю існуючої тріщини). Подальше навіть безмежно мале збільшення навантаження (початок фази 3) призведе до виникнення сингулярних напружень (ненульові УКІН) і коли УКІН та відповідне навантаження досягнуть критичної величини (третього критичного значення), яке спричинить підростання тріщини.

в.) Числовий аналіз отриманих результатів дав можливість сформулювати загальні тенденції зміни НДС у залежності від геометричних та силових параметрів задачі. Зокрема, вигідним з погляду підвищення міцності конструкції є:

- зменшення віддалі від площини тріщини точок прикладання притискних сил (зменшує інтенсивність розсіяння енергії та рівень УКІН);
- зростання коефіцієнта тертя (зменшує амплітуду стрибка переміщень, збільшує інтенсивність розсіювання енергії);
- збільшення відносної жорсткості півпростору, у якому прикладено зсувну силу (збільшує стрибок переміщень та істотно зменшує УКІН);

Окрім того:

- зменшення віддалі точок прикладання зсувної сили від площини тріщин збільшує рівень УКІН, дисипацію енергії, зменшує критичні значення навантаження;
- характер стрибка переміщень упродовж циклу навантаження є гістерезисним, причому для появи проковзування на 2-ому та наступних кроках циклічного навантажування необхідно, щоб інтенсивність навантаження досягала вдвічі більшого критичного значення, аніж на першому кроці навантажування;
- Для обчислення розсіяння енергії не має значення чи цикл навантажування симетричний, чи «віднульовий», важливий лише розмах зміни навантаження.

7. Методом функцій стрибка (МФС) та структурно-модульним методом функцій стрибка (СММФС) отримано розв'язок задачі деформування біматеріалу з тонким стрічковим лінійно пружним ортотропним міжфазним включенням за урахування поверхневих напружень на межі поділу матеріалів включення і матриці. У числових розрахунках виявлено, зокрема, такі особливості впливу натягу на НДС у матриці та включенні за різного навантаження:

- a) поява натягу та зміна точок прикладання зосереджених силових чинників істотно впливають на УКІН K_{31} , водночас практично не впливаючи на УКІН K_{32} ;
- b) спостерігаються певні області зміни комбінацій механічних параметрів включення та розташування ядра дислокації, коли помітні добре виражені екстремуми значень енергії деформації, УКІН;
- c) виявлено, що натяг максимально впливає на гвинтову дислокацію при її розташуванні практично над вістрям податного включення.

8. Побудовано системи рівнянь СММФС і МФС для розв'язування задач антиплоскої деформації біматеріалу з тонкими багатошаровими міжфазними лінійно пружними включеннями за довільного силового і дислокаційного навантаження у разі, коли контакт включення із матрицею може бути ідеальним або з поверхневим натягом чи проковзуванням (гладким або фрикційним). Для таких задач:

- a) конфігурацію зони проковзування за різних типів навантажування окреслює опрацьований збіжний ітеративний алгоритм;
- b) вивчене питання побудови «зон безпеки», що окреслюють розміщення зосереджених чинників в околі включення, коли проковзування на межі включення гарантовано не розпочнеться;
- c) досліджено вплив різномодульності шарів у випадку багатошарового включення на НДС біматеріалу.

9. Вперше розглянуті задачі антиплоского деформування тіл з тонкими включеннями із фізично нелінійного матеріалу (пружного чи пружно-пластичного) у повному діапазоні змін їхніх властивостей від абсолютно податних, які відповідають стрічковим тріщинам (щілинам), до абсолютно жорстких. Розглянуто випадки як монотонного (активного) навантажування, так і циклічних процесів навантажування-розвантажування.

- a) З використанням побудованої математичної моделі тонкого включення з істотно нелінійними та анізотропними механічними властивостями загального вигляду та МФС, СММФС записано системи результуючих інтегральних рівнянь із змінними коефіцієнтами-функціями, які дають можливість врахувати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження (монотонний чи ні) та описати його вплив на НДС у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу.
- b) На прикладі діаграми деформування ідеально пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням за ідеального ефекту Баушінгера виявлено, що запропонована схема ітераційного процесу (реалізована на

авторському програмному забезпеченні) придатна не лише для діаграм у вигляді гладких ліній, але й у разі дослідження включень із нелінійних матеріалів з діаграмами деформування, наділеними кутовими точками.

с) Обчислення дали можливість дослідити вплив параметрів закону деформування Рамберга – Осгуда на НДС біматеріалу при навантажуванні збалансованою системою зосереджених сил та зсувом на безмежності. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлено низку важливих закономірностей:

- зростання параметрів нелінійності K_s , m_s збільшує деформації "податного" включення на відміну від оберненого значно відчутнішого ефекту для "жорсткого" включення;
- при багатокроковому процесі довантажування розподіли набутих у різних точках включення модулів зсуву та досягнутих напружень нечутливі до багатокроковості та величини кроку сценарію навантажування на відміну від деформацій, які істотно зростають порівняно з одномоментним сумарно ідентичним навантаженням;
- вплив різномодульності матеріалів матриці на узагальнені УКІН K_{31} , K_{32} є більш помітним для "жорсткого" включення.

10. Розв'язки розглянутих задач рівноваги тіл з тонкими міжфазними неоднорідностями в рамках концепції механіки деформівного твердого тіла можуть бути застосовані для вирішення практичних застосувань як макро- чи мезомасштабу, так і на мікро- та нанорівнях.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Sulim G.T., Piskozub J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions. *Journal of Engineering Mathematics. Special Issue Thermomechanics*. 2008. 61. P. 315–337. URL: <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3>
2. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. I. Single loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 2015. 9, № 2. P. 115–121. URL: <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0020>
3. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and Cyclic loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 2015. 9, № 3. P. 178–185. URL: <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0030>
4. Sulym H., Pasternak Ia., Piskozub L., Piskozub Y. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack. *J. Theoretic. and Appl. Mech.* 2015. 54, № 2. P. 529–539. URL: <https://doi: 10.15632/jtam-pl.54.2.529>

5. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018. 12, № 3. P. 190–195. URL: <https://doi.org/10.2478/ama-2018-0029>
6. Piskozub I. Z., Sulym H. T. Asymptotics of stresses in the vicinity of a thin elastic interphase inclusion. *Materials Science*. 1996. **32**, No. 4. P. 421–432. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02538967>
Те саме: Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1996. 32, № 4. С. 39–48.
7. Sulym H.T., Piskozub I.Z. Nonlinear Deformation of a Thin Interface Inclusion. *Materials Science*. 2018. 53, № 5. С. 600–608. URL: <https://doi.org/10.1007/s11003-018-0114-2>
Те саме: Сулим Г. Т., Піскозуб Й.З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017. 53, № 5. С. 24–30.
8. Sulym H.T., Piskozub J.Z. Conditions of contact interaction (a survey). *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya*. 2004. **47**, No. 3. P. 110–125.
Те саме: Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл : огляд. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2004. 47, № 3. С. 110–125.
9. Kolesov V.S., Piskozub I.Z. The influence of a spherical defect on the temperature field in a half-space under local heating. *Journal of Mathematical Sciences*. Volume 86, Issue 2. 1997. P. 2561–2564. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02356097>
Те саме: Колесов В.С., Піскозуб Й.З. Влияние сферического дефекта на температурное поле в полупространстве при локальном нагреве. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 1996. 39, № 1. С. 47–50.
10. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив поверхневих напружень на антиплоский напружено-деформований стан тонкого стрічкового міжфазного включення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. 63, № 2. С. 98–108.
11. Piskozub J.Z. Effect of surface stresses on the tensely deformed state of thin interface microinclusion. *Mathematical modeling and computing*. 2021. 8, № 1. P. 69–77.
12. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Антиплоска деформація біматеріалу з фізично нелінійним міжфазним тонким включенням. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 319–327.
13. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г. Термонапружений стан кусково-однорідного середовища з тонкими міжфазними включеннями. *Крайові задачі термомеханіки : збірник*. Київ: Ін-т мат. НАН України. 1996. Ч. 2. С. 64–68.
14. Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. 24. С. 73–85.

15. Піскозуб Й.З. Врахування часткового відшарування пружного міжфазного тонкого включення в умовах поздовжнього зсуву біматеріалу. *Прикладні проблеми механіки та математики*. 2020. 17. С. 162–167.
16. Piskozub Y.Z., Sulym H.T. Modeling of deformation of the bimaterial with thin Non-linear interface inclusion. *Researches in mathematics and mechanics*. 2020. 25, № 2 (36). P. 40–54.
17. Божидарник В.В., Піскозуб Й.З., Попіна С.Ю., Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах із стохастичними теплопровідними тріщинами. *Вісник Львівського політехнічного ін-ту*. 251. Диференціальні рівняння та їх застосування. Львів. 1991. С. 9–15.
18. Піскозуб Л.Г., Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2015. № 1 (77). С. 97–108.
19. Сулим Г.Т., Оліярник Н.Р., Піскозуб Й.З., Пастернак Я.М. Поздовжній зсув біматеріального бруса з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки : спецвипуск*. 2015. С. 251–254.
20. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Фізично нелінійне деформування тонкого міжфазного включення за умов антиплоскої задачі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2019. Вип. 28, 29. С. 42–54.
21. Сулим Г.Т., Піскозуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. *Ред. журн. "Инженерно-физический журнал"*. Минск, 1986. 17 с. – Деп. в ВИНТИ 12 мая 1987 г. № 3396-B87 Деп.
Переклад: Sulim G. T., Piskozub I. Z. Temperature gradient distribution in the vicinity of a thin thermal active insert. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1987. 53, № 4. P. 670.
22. Бернацек В.В., Піскозуб Й.З. Моделювання деформаційних явищ процесу каширування. *Квалілогія книги*. 2011. № 1 (19). С. 100–109.
23. Піскозуб Й. Моделювання тонкої багаточислової міжфазної неоднорідності у біматеріалі за умов поздовжнього зсуву. 15-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові : матеріали симпозіуму. (Львів, 20–21 травня 2021 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2021. С. 44–46.
24. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Materials*. (June 4–8, 2017, Augustow, Poland) : Proceedings. 2017. P. 115–121.
25. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з пружно-пластичним міжфазним тонким включенням. *Тринадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові :*

- матеріали симпозиуму. (Львів, 18–19 травня 2017 року). Львів: КІНПАТРИ ЛТД. 2017. С. 50–52.
26. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Інкрементальний підхід до розв'язування задач деформування тонких фізично нелінійних включень. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки та математики* : збірник наукових праць [матер. міжн. наук. конф. Львів, 22–25 травня 2018 року]. Львів, 2018. Т. 2. С. 98–99.
 27. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Моделювання нелінійної контактної взаємодії тіл. *Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент* : матеріали Міжнародної наукової конференції. (м. Львів, 17–18 вересня 2018 року). Львів: Растр-7, 2018. С. 18–20.
 28. Піскозуб Й.З. Неідеальна взаємодія пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. VI Polish-Ukrainian Science Conference *Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media*. (Warsaw, 6–10 September 2005). P. 102.
 29. Піскозуб Й.З. Моделювання ускладненої взаємодії пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). (Львів, 5–8 грудня 2005 року). Львів. С. 74–75.
 30. Гембара В.М., Огірко І.В., Піскозуб Й.З. Дослідження напружень і деформацій в друкарських формах ротаційних поліграфічних машин. *1-й Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові* : тез. доп. (Львів, 18–20 травня, 1993 р.). С. 195.
 31. Піскозуб Й.З. Вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : матеріали 2-го Міжнародного симпозиуму (Львів–Дубляни, 7–10 жовтня, 1996 р.). С. 107–108.
 32. Піскозуб Й.З. Моделювання впливу реологічних факторів на якість фарбовідбитків. Міжнародна науково-практична конференція *Квалілогія книги* : доповіді й повідомлення. (Львів, 23–25 жовтня, 1996 р.). С. 32.
 33. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Математичне моделювання впливу гідродинамічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту друкарських циліндрів. *ДРУКОТЕХН-96. Комп'ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи* : наукові праці конференції. (Львів, 16–18 жовтня, 1996 р.). С. 96–97.
 34. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Вплив реологічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту в друкарських процесах. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки і математики*. (Львів, 25–28 травня 1998 р.). С. 112–113.
 35. Піскозуб Й.З. Вплив реологічних факторів на якість друкування. П'ятий українсько-польський науковий симпозиум *Актуальні задачі механіки неоднорідних структур* : тези доповідей. (Львів–Луцьк, вересень 18–23, 2003). С. 65–66.

36. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Компенсаційний вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* : тези доповідей. (Львів, листопад 2–5, 2004). С. 82.
37. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація термосилового навантаження в кусково-однорідному середовищі з теплоактивними прошарками. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* : тези доповідей. (Львів, 7–9 грудня 2009). Львів. С. 31.
38. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Антиплоска деформація масиву з тонкими міжфазними прошарками при урахуванні тертя. *Сучасні проблеми механіки та математики* : в 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. (Львів, 21–25 травня 2013 року). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 2. С. 111.
39. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Дисипація енергії при циклічному зсувному навантаженні біматеріалу з міжфазними дефектами контакту з урахуванням тертя. 4-а Міжнародна науково-технічна конференція *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL_12* : тези доповідей. (Львів, 30–31 жовтня 2014 року). Львів: КІНПАТРИ ЛТД. 2014. С. 51.
40. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням за їхнього фрикційного контакту. *Сучасні проблеми термомеханіки* : тези доповідей Міжнародної наукової конференції (Львів, 22–24 вересня 2016). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2016. С. 235–236.
41. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням при циклічному зсувному навантаженні. *Теорія та практика раціонального виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*. 5-а Міжнародна науково-технічна конференція : Тези доповідей (Львів, 27–28 жовтня 2016 р.). Львів, С. 53–54.
42. Сулим Г.Т., Піскозуб И.З. Двухчленное асимптотическое представление напряжений в окрестности торцов тонкого межфазного упругого включения. *Механика разрушения материалов* : тез. докл. I Всесоюз. конф. (Львов, 20–22 октября 1987 года). С. 150.
43. Піскозуб И.З. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах квазистационарной термоупругости для кусочнооднородных тел с тонкими дефектами. *Механика неоднородных структур*: тезисы докладов 2 Всесоюзной конференции. (Львов, 2–4 сентября 1987 года). Львов, 1987. С. 209–210.
44. Божидарник В.В., Піскозуб И.З., Сулим Г.Т. Термоупругое равновесие кусочно-однородной среды при наличии зон тепловыделения на границе раздела компонент. *Современные проблемы теории контактных*

- взаимодействий*: материалы выездного заседания Научного Совета АН СССР по трению и смазкам. Луцк, 1987. С. 58–59.
45. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. О термоупругом деформировании кусочно-однородных тел с тонкими дефектами. *Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения*. Республиканская научная конференция: тезисы докладов. (Одесса, 22–24 сентября 1987 г.). Одесса, 1987. С. 105–106.
 46. Пискозуб И.З., Гембара В.М. Двумерная задача термоупругости для тела с линейной неоднородностью и зависящими от температуры физико-механическими характеристиками. *Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур*. Всесоюзная конференция: тезисы докладов. (Саратов, 7–9 июня, 1988 г.). Ч. 3. С. 78.
 47. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Асимптотическое распределение поля напряжений в окрестности концов тонкого дефекта на границе раздела материалов. *Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций*. 1-й Всесоюзный симпозиум : тезисы докладов. (Ужгород, 21–23 сентября, 1988 г.). С. 70.
 48. Пискозуб И.З. Решение системы СИУ второго рода с разрывными коэффициентами для задачи термоупругого равновесия кусочно-однородной среды с тонкими прослойками. IV Всесоюзная конференция *Смешанные задачи механики деформируемого тела* : тезисы докладов. (Одесса, 26–29 сентября 1989 г.). Ч. 2. С. 54.
 49. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. До питання про асимптотику полів температури та напружень в околі кінців пружного лінійного теплоактивного дефекту на межі розділу середовищ. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УПІ* : тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 1993 року). Львів, 1993. Вип. 1. С. 115.
 50. Піскозуб Й. З. Моделювання впливу реологічних факторів на напружено-деформований стан в зоні контакту при друкуванні. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 28–31 січня 1997 року). Львів, 1997. Вип. 3. С. 99.
 51. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. Вплив дефектності границь розділу фаз на термо-, електрофізичний стан неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2007 року). Львів, 2007. С. 104.
 52. Піскозуб Й.З. Особливості термоелектропружного стану неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 3–6 лютого 2009 року). Львів, 2009. С. 74.
 53. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація навантаження неоднорідного тіла з тонкими дефектами термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і*

- аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 2010 року). Львів, 2010. С. 104.
54. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в шаруватому тілі з дефектами границь під навантаженням термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 1–4 лютого 2011 року). Львів, 2011. С. 122.
 55. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в тілі з включеннями при проковзуванні з тертям на границях контакту. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2013 року). Львів, 2013. С. 115 .
 56. Піскозуб Л.Г., Піскозуб Й.З. Гістерезисні явища при антиплоскому циклічному навантаженні масиву з тріщиною. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 4–7 лютого 2014 року). Львів, 2014. С. 133.
 57. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Дисипація енергії в контактуючій тріщині при поздовжньому зсуві. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 16–20 лютого 2015 року). Львів, 2015. С. 133.
 58. Піскозуб Й., Піскозуб Л. Гранично-елементне моделювання тонких дефектів довільної фізичної природи. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 16–19 лютого 2016 року). Львів, 2016. С. 153.
 59. Piskozub Y.Z., Piskozub L.G. Deformation of a bimaterial with thin nonlinear elastic inclusion. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 14–17 лютого 2017 року). Львів, 2017. С. 153.
 60. Піскозуб Й.З. Ітераційний метод розв'язування нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 27 лютого–2 березня 2018 року). Львів, 2018. С. 144.
 61. Піскозуб Й.З. Розсіяння енергії при циклічному деформуванні тонкого міжфазного включення з фізично нелінійного матеріалу. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів* : тези доповідей. (Львів, 26 лютого–1 березня 2019 року). Львів, 2019. С. 133.

Анотація. Піскозуб Й.З. Структурно-модульний метод функцій стрибка дослідження деформування біматеріалів з тріщинами і фізично нелінійними тонкими включеннями. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. –

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2021.

У дисертаційній роботі розроблені математичні моделі і методи дослідження механічних полів у тілах з тонкими фізично лінійними і нелінійними неоднорідностями з урахуванням можливої неідеальності контактної взаємодії і впливу поверхневої енергії на інтерфейсах матеріалів та довільного типу і режиму квазістатичного навантаження-розвантаження (зокрема й циклічного).

На основі загальних співвідношень лінійної та нелінійної теорії пружності побудована цілісна система математичних моделей тонкого фізично нелінійного прошарку-включення, в т.ч. синтетична для багатосарового. З використанням принципу спряження континуумів різної вимірності, співвідношень задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та концепції методу функцій стрибка запропоновано структурно-модульний метод функцій стрибка, який дає змогу розв'язувати задачі теорії тонких включень з урахуванням нелінійності конститутивних рівнянь і неідеального контакту.

Досліджено комбіновані плоско-антиплоскі задачі для кусково-однорідного масиву з фрикційним чи безфрикційним проковзуванням на межі контакту в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування. Для визначення апріорі невідомих зон проковзування застосовано інкрементальний підхід до урахування залишкових напружень під час багатокрокового навантажування-розвантажування силовими і дислокаційними чинниками. Розраховано розсіяння енергії, критичне навантаження за умов як відсутності, так і наявності обмежень на розмір зон проковзування.

В рамках концепції механіки деформівного твердого тіла досліджено вплив дії дислокацій на масив з тонким ортотропним мікровключенням за існування додаткових поверхневих напружень на межі контакту. Для моделі тонкої багатосарової міжфазної неоднорідності досліджено зони «безпеки» розташування точок прикладання зосереджених силових чинників.

Розроблено методика розв'язування задач нелінійного деформування біматеріалів із тонкими міжфазними деформівними включеннями за умов довільного квазістатичного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування. Це дало змогу за допомогою запропонованого структурно-модульного методу функцій стрибка отримати результуючі системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) (різні для окремих класів задач) та застосувати ефективні методи їхнього аналітично-числового розв'язування. Для розв'язування таких ССІР із змінюваними коефіцієнтами-функціями, які виникають при урахуванні фізичної нелінійності матеріалу включення (довільна діаграма деформування), опрацьовано та апробовано інкрементально-ітераційний метод. Для прикладу виконано конкретні розрахунки основних параметрів напружено-деформованого стану для різних

параметрів діаграми деформування Рамберга-Осгуда, ідеально пружно-пластичної з лінійним зміцненням та ін.

Результати роботи можуть бути застосовані для проектування нових матеріалів із бажаними експлуатаційними властивостями, прогнозування НДС та оптимізації навантажування тіл з тонкими стрічковими неоднорідностями як у механіці композитів, так і в мікро- та наномеханіці.

Ключові слова: біматеріал, тонке включення, багатошарове включення, фізична нелінійність, плоска задача, поздовжній зсув, фрикційний контакт, поверхневі напруження на межі поділу матеріалів.

Аннотація. Пискозуб Й.З. Структурно-модульний метод функцій скачка дослідження деформування біматеріалів з трещинами і фізически нелінейними тонкими включеннями. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Пидстригача НАН Украины, Львов, 2021.

В диссертационной работе разработаны общие математические модели и методы исследования механических полей в телах с тонкими физически линейными и нелінейными неоднородностями с учетом возможной неидеальности контактного взаимодействия и влияния поверхностной энергии на интерфейсах материалов и произвольного типа и режима квазистатической нагрузки-разгрузки (в том числе циклической).

На основе общих соотношений линейной и нелінейной теории упругости построена система математических моделей тонкого физически нелінейного включения-прослойки, в т.ч. синтетическая для многослойного. С использованием принципа сопряжения континуумов различной размерности, соотношений задачи сопряжения предельных значений аналитических функций и концепции метода функций скачка предложен структурно-модульный метод функций скачка, который позволяет решать задачи теории тонких включений с учетом нелінейностей конститутивных уравнений и неидеальности условий контакта.

Исследованы комбинированные плоско-антиплоские задачи для кусочно-однородного массива с фрикционным или безфрикционным проскальзыванием на границе контакта в условиях многошагового нагружения-разгрузки. Для определения априори неизвестных зон проскальзывания применен инкрементальный подход для учета остаточных напряжений при многошаговом нагружении-разгрузке силовыми и дислокационными факторами. Рассчитано рассеяние энергии, максимальная нагрузка в условиях как отсутствия, так и наличия ограничений на размер зон проскальзывания.

В рамках концепции механики деформируемого твердого тела исследовано влияние дислокационного нагружения на массив с тонким

ортотропными микро-включением при существовании дополнительных поверхностных напряжений на границе контакта. Для модели тонкой межфазной многослойной неоднородности исследованы зоны «безопасности» для приложения сосредоточенных силовых факторов.

Разработана методика решения задач нелинейного деформирования биматериалов с тонкими межфазными деформируемыми включениями в условиях произвольного квазистатического многошагового процесса нагрузки-разгрузки. Это позволило с помощью предложенного структурно-модульного метода функций скачка получить результирующие системы сингулярных интегральных уравнений (ССИУ) (различные для отдельных классов задач) и применить эффективные методы их аналитико-численного решения. Для решения таких ССИУ с переменными коэффициентами-функциями, которые возникают при учете физической нелинейности материала включения (произвольная диаграмма деформирования), разработан и детально апробирован инкрементально-итерационный метод. Для примера выполнены конкретные расчеты основных параметров напряженно-деформированного состояния для различных диаграмм деформирования вида Рамберга-Осгуда, идеально упруго-пластического с упрочнением и др.

Результаты работы могут быть применены для проектирования новых материалов с желаемыми эксплуатационными свойствами, прогнозирования НДС и оптимизации нагрузки тел с тонкими ленточными неоднородностями как в механике композитов, так и в микро- и наномеханике.

Ключевые слова: биматериал, тонкое включения, многослойное включение, физическая нелинейность, плоская задача, продольный сдвиг, фрикционный контакт, поверхностные напряжения на границе раздела материалов.

Abstract. Piskozub Y.Z. Structural-modular method of jump functions to study the deformation of bimetals with cracks and physically nonlinear thin inclusions. - Manuscript.

D. thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04 - mechanics of deformable solids. - Ya.S. Pidstrigach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv, 2021.

This dissertation work develops general mathematical models and methods for investigating mechanical fields in bodies with thin physically linear or nonlinear inhomogeneities taking into account possible non-ideality of contact interaction and surface effects as well as arbitrary type and regime of quasi-static loading-unloading (in particular, cyclic loading).

Based on the general relations of linear and nonlinear elasticity theory, a system of thin physically nonlinear inclusion-layer models, including synthetic multilayer ones, is constructed. Using the principle of conjugation of continua of

different dimensions, the relations of the problem of conjugation of limit values of analytical functions, and the concept of the jump function method, a structural-modular method of jump functions is proposed which allows one to solve the problems by taking into account the nonlinear constitutional equations and contact conditions.

Combined plane-antiplane problems for a piecewise homogeneous array with frictional slip at the contact boundary under multistep loading-unloading conditions are investigated. An incremental approach is applied to determine the a priori unknown slip zones to account for residual stresses during multistep loading-unloading by force and dislocation factors. Energy dissipation, critical load in both absence and presence of limitations on the size of slip zones are calculated.

The effect of dislocation loading on a bulk with thin orthotropic microinclusion in the presence of additional surface stresses at the contact boundary is investigated within the concept of mechanics of a deformable solid. For a multilayer model of a thin interphase inhomogeneity, the "safety zones" of points of application of concentrated force factors have been studied.

A method for solving the problems of nonlinear deformation of thin interfacial deformable inclusions in an arbitrary quasistatic multistep loading-unloading process was developed. This allowed us by the developed structural-module method of jump functions to obtain the resulting systems of singular integral equations (different for certain classes of problems) and to apply the effective for their analytical and numerical solution. An incremental iteration scheme is developed and tested in detail for solving such systems of integral equations with variable coefficients-functions that arise when physical nonlinearity of the inclusion material (an arbitrary strain diagram). As an example, we made specific calculations of the main parameters of the stress strain state for different Ramberg-Osgood, elastic-plastic and other types of strain diagrams.

The results of the work can be used for designing new materials with desired performance properties, predicting the deflected mode of action and optimizing the loading of bodies with thin ribbonlike inhomogeneities both in composite mechanics and in micro- and nanomechanics.

Keywords: bimaterial, thin inclusion, multilayer inclusion, physical nonlinearity, plane problem, longitudinal shear, frictional contact, surface stresses at the material interface.