

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

ШЕВЧУК
Віктор Анатолійович



УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ
ТЕРМОМЕХАНІКИ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

**Наукові
консультанти:**

доктор технічних наук, професор

Попович Василь Степанович,

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Токовий Юрій Владиславович,

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
заступник директора з наукової роботи.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор

Дияк Іван Іванович,

Львівський національний університет імені Івана Франка
МОН України, декан факультету прикладної математики
та інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор

Жук Ярослав Олександрович,

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка МОН України,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки;

доктор фізико-математичних наук, професор

Мусій Роман Степанович,

Національний університет «Львівська політехніка»
МОН України, професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 7 травня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано 6 квітня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фіз.-мат. наук



Ясінський А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу (корозійного, абразивного, теплового, механічного та ін.) зовнішнього середовища використовують спеціальні покриття. Такі покриття є складними структурами, неоднорідними за товщиною, пористими, з різними властивостями на поверхні та в області, прилеглій до підкладки. Залежно від функціонального призначення існує широкий діапазон товщин використовуваних покриттів: від дуже тонких (декілька мікрон) до відносно товстих (сотні мікрон, зокрема, керамічних теплозахисних покриттів).

У більшості практично важливих випадків властивості покриттів змінюються за напрямком, ортогональним до твірної поверхні (глибиною, радіальною або кутовою координатою, залежно від геометричної форми підкладки). Неоднорідність покриттів спричиняється як технологією виготовлення, так і функціональними вимогами. Вона також може бути пов'язана з поверхневою обробкою вже нанесених покриттів (лазерна обробка, іонна імплантація тощо).

Особливе значення мають покриття, виготовлені нашаровуванням матеріалів з різними механічними і теплофізичними характеристиками. У таких покриттях кожний шар має своє функціональне призначення, зокрема антикорозійне, антиабразивне, теплозахисне, зміцнююче для гальмування і блокування росту тріщин, зниження пористості, забезпечення високого ступеня адгезії з підкладкою. Завдяки багатошаровості архітектури можна також підвищувати експлуатаційний ресурс покриттів, а їх використання для забезпечення міцності та теплоізоляції дає можливість суттєво зменшити матеріалоемність та збільшити витривалість виробів.

Разом з цим у тілі з шаруватими покриттями виникає концентрація напружень в місцях різкої зміни фізико-механічних характеристик матеріалу, тобто на поверхнях спряження однорідних шарів. Уникнути концентрації напружень у зоні контакту покриття з підкладкою та на міжшарових поверхнях дають змогу неоднорідні покриття з неперервно змінними за глибиною фізико-механічними властивостями, відомі як функціонально-градієнтні покриття. Переваги, пов'язані з підвищенням терміну експлуатації виробів, стимулюють процес виробництва таких покриттів, незважаючи на складність технології їх отримання. При цьому математичні моделі шаруватих матеріалів недостатньо точно описують функціонально-градієнтні покриття через кількісні та якісні відмінності у поведінці цих покриттів порівняно з однорідними або шаруватими.

Окрім того, процес нанесення деяких типів покриттів, зокрема керамічних, може призводити до формування специфічних мікроструктур у таких крихких покриттях. Характерні риси цих покриттів включають технологічно зумовлені пористість, мікротріщини та анізотропію термомеханічних властивостей.

Проблематика термомеханіки тіл з покриттями привертала увагу багатьох представників відомих вітчизняних та зарубіжних наукових шкіл (Я.С. Підстригач, П.Р. Шевчук, Д.В. Івашук, Ю.М. Коляно, Є.П. Хомякевич, О.П. Гавриш, В.О. Барвінок, Г.М. Бартенев, О.І. Жорник, В.О. Киричек, В.М. Гембара, Н.О. Гембара,

М.А. Криштал, Л.Є. Епштейн, Р.М. Кушнір, П.О. Люкшин, Б.А. Ляшенко, Д.В. Нуштаєв, А.Н. Астапов, В.С. Попович, Г.Т. Сулим, І.М. Турчин, М.А. Сухорольський, Г.М. Третяченко, В.Ф. Чекурін, Б.В. Процюк, Р.М. Швець, О.І. Яцків, В.Г. Шевченко, О.Г. Попович, G.P. Cherepanov, M. Ciavarella, T. Elperin, G. Rudin, X. Chen, Q. Liu, C. Gao, S.Y. Hu, F. Kroupa, R. Kulchytsky-Zhyhailo, A. Bajkowski, S. Matysiak, Y.-D. Lee, F. Erdogan, S. Marie, Y. Mencik, A. Mioduchowski, J. Yoon, S.Q. Nusier, G.M. Newaz, A.W. Obst, Z.S. Olesiak, O. Sayman, F. Sen, M. Toparli, H.M. Shodja, E. Suhir, Z.W. Wang, Q. Zhang, A. Yevtushenko, M. Rozniakowska, N.-H. Zhang, X.C. Zhang, Y. Zhang, J. Zhao та ін.). Переважна більшість їх досліджень стосувалася систем з однорідними покриттями. Багато авторів (О.В. Аттетков, М.С. Беляков, А.А. Березовський, Ю.В. Бразалук, Д.В. Євдокимов, В.Б. Веселовський, О.Д. Горбунов, Л.М. Дяконюк, В.С. Зарубін, Ю.А. Кирсанов, Й.Й. Лучко, В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська, О.П. Дем'янченко, Р.Ф. Терлецький, О.П. Турій, Н.П. Флейшман, М.А. Al Nimr, X. Chen, H. Li, J. Li, D. Moulton, J.A. Pelesko, D.M. Perkowski, R. Prasad, N.K. Samria, H. Wang, Q. Qin, S. Zhang, Z. Liu) вивчали лише теплофізичні процеси у тілах з покриттями. Деякі дослідники при вивченні механічної поведінки таких систем (С.М. Айзикович, В.М. Александров, С.М. Мхитарян, О.І. Воячек, М.А. Долгов, Б.Л. Пелех, Ф.Н. Флейшман, В.П. Плевако, Я.Г. Савула, Л.І. Винницька, І.І. Дияк, О.С. Коссака, І.Г. Макара, С.О. Тинчук, С.Е. Beevers, Y. Gu, M. Kashtalyan, M. Menshykova, L. Rahmani, T.C.T. Ting) не враховували впливу теплових процесів на механічний стан тіл з покриттями. Практично не розглядався вплив термомеханічної анізотропії. У низці робіт (О.В. Аттетков, Г.М. Бартенев, О.І. Жорник) вплив покриття враховано за надмірно спрощених припущень, а підходи з використанням числових методів (Л.М. Дяконюк, Я.Г. Савула зі співавторами, О.І. Олейніков, Ю.І. Швець зі співавторами, Y. Gu et. al) є доволі складними.

Отже, актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла залишається побудова адекватних математичних моделей та ефективних методів розрахунку і дослідження теплового та напружено-деформованого станів тіл з покриттями. Такі моделі та методи повинні достатньою мірою враховувати характерні особливості систем тіло-покриття, зокрема, малість товщини покриття, неоднорідність та анізотропію його властивостей, температурну залежність параметрів покриття та підкладки, специфіку мікроструктури.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах науково-дослідних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: «Математичне моделювання, розвиток методів розрахунку та оптимізація фізико-механічних процесів у неоднорідних деформівних структурах та тілах з багат шаровими покриттями при комплексній зовнішній дії» (№ д/р 0102U000453, 2002–2005 рр.); «Моделі та методи прямих і обернених задач для дослідження фізико-механічних процесів у неоднорідних шаруватих структурах із залишковими деформаціями та дефектами» (№ д/р 01060U000592, 2006–2009 рр.); «Математичні моделі та методи дослідження напруженого стану неоднорідних тіл та тіл з покриттями за дії силових і теплових навантажень та наявності дефектів і залишкових деформацій» (№ д/р 0109U008764, 2010–2013 рр.); «Моделювання та оптимізація термомеханічної

поведінки структурно неоднорідних тіл за сталого та змінного навантаження» (№ д/р 0113U007685, 2014–2018 pp.); «Методи визначення та оптимізації напружено-деформованого стану і граничної рівноваги структурно-неоднорідних систем стосовно проблем оцінювання їх міцності, прогнозування ресурсу та надійності функціонування» (№ д/р 0119U100672, 2019–2023 pp.).

Мета дослідження – розроблення математичних моделей та ефективних методів розрахунку термонапруженого стану тіл з багатошаровими тонкими та одношаровими неоднорідними ізотропними та анізотропними покриттями за силового та теплового навантаження.

Поставлена мета передбачає необхідність розв’язання таких **завдань**:

- побудувати математичні моделі для визначення нестационарних температурних полів і термонапружень у тілах з тонкими багатошаровими покриттями;
- розробити методики розв’язання сформульованих на основі цих моделей неklasичних нестационарних задач теплопровідності та термопружності;
- розвинути методику визначення термонапружень у циліндричних тілах з неоднорідними трансверсально ізотропними покриттями довільної товщини;
- сформулювати та розв’язати нові задачі термопружності для тіл плоскої та циліндричної геометрії з тонкими шаруватими покриттями;
- застосувати розроблені методики для дослідження процесу еволюції пошкоджень в циліндричних тілах з тонкими та товстими керамічними покриттями.

Об’єкт дослідження – тіла з одно- та багатошаровими покриттями, які перебувають під дією теплових і силових навантажень.

Предмет досліджень – математичні моделі термомеханіки та відповідні задачі теплопровідності та термопружності для визначення нестационарних температурних полів і термонапружень в тілах з одно- та багатошаровими покриттями та методи побудови їх аналітичних та аналітично-числових розв’язків.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети у роботі використано низку методів. Зокрема, для побудови аналітичних та аналітично-числових розв’язків лінійних та нелінійних задач теплопровідності використано методи інтегрального перетворення Лапласа та квазілінеаризації. Для розв’язання задач термопружності для неперервно-неоднорідних за радіальною координатою циліндричних тіл застосовано метод зведення їх до інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду та метод послідовних наближень для їх розв’язання. Для числового вирішення задач дослідження накопичень пошкоджень використано ітераційну схему. Розв’язки задач для тіл з тріщинами отримано за допомогою принципу суперпозиції та методик розв’язування сингулярних рівнянь і обчислення невластних інтегралів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що уперше:

- побудовано математичні моделі для визначення температурного поля та термонапружень у тілах з тонкими багатошаровими покриттями;
- сформульовано неklasичні крайові задачі теплопровідності і термопружності та розроблено методики їх розв’язування;
- на основі розроблених методик отримано розв’язки низки нових задач термопружності для тіл з багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні;

- із використанням інтегрального перетворення Лапласа та методу квазілінеаризації на основі моделі із застосуванням узагальнених граничних умов розроблено аналітично-числову методику розв’язування нестационарної задачі теплопровідності для тіл з покриттями з нелінійною граничною умовою конвективно-променевого теплообміну;
- розвинено методику розв’язування задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів для випадку ортотропних властивостей матеріалу та застосовано її до дослідження процесу накопичення пошкоджень у керамічних покриттях.

Достовірність отриманих результатів та висновків дисертаційної роботи забезпечується: використанням належно апробованих математичних моделей термомеханіки деформівних твердих тіл; коректним формулюванням крайових задач; застосуванням до їх розв’язання класичних аналітичних і числових методів; дослідженням збіжності побудованих ітераційних алгоритмів; узгодженням деяких часткових результатів з відомими в літературі.

Практичне значення отриманих результатів роботи визначається розробкою ефективного підходу для розв’язування важливих у теоретичному та прикладному аспектах нових класів задач та полягає у можливості використання методики дослідження задач термомеханіки для тіл з покриттями для встановлення якісних та кількісних закономірностей впливу їх геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність і деформативність елементів конструкцій з неоднорідними покриттями. Отримані у дисертаційній роботі наближені розв’язки можуть бути застосовані при тестуванні результатів розрахунків, одержаних за допомогою інших методів.

Особистий внесок здобувача. Усі наведені в роботі основні наукові результати, положення, моделі, висновки та рекомендації отримано автором самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: постановка задачі та підхід до виведення нелінійних узагальнених граничних умов радіаційної взаємодії тіла зі середовищем через багат шарове покриття [3, 44, 46]; ідея підходу, побудова ітераційних алгоритмів до розв’язання задачі теплопровідності з нелінійною граничною умовою, участь у програмній реалізації та інтерпретації результатів [10, 49]; формулювання задач теплопровідності та термопружності для півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну, побудова алгоритму, участь у програмній реалізації та аналізі й інтерпретації результатів [11, 16, 51, 54]; участь у постановці задач пружності та термопружності для циліндра з неоднорідним багат шаровим покриттям, отримання розв’язку для випадку тонких покриттів на основі підходу із застосуванням узагальнених граничних умов, участь в аналізі результатів [4, 43, 52]; участь у постановці задачі про еволюцію накопичення пошкоджень, розробка методики її розв’язування, програмна реалізація, участь в аналізі та інтерпретації результатів [19, 21, 36, 38, 39]; постановка задачі термопружності для ортотропного неоднорідного циліндра, методика її розв’язання, програмна реалізація, участь у формулюванні висновків [42]; формулювання задачі, ідея та реалізація підходу до отримання аналітичного розв’язку задачі теплопровідності для півпростору з багат шаровим покриттям з неоднорідною початковою умовою [14], за циклічного теплового навантаження [24, 55, 57] та відповідної задачі термопружності [56].

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на: 4-й та 6-10-х Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Тернопіль, 1995; Львів, 2003, 2006, 2010, 2014, 2019); Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 1998, 2008, 2013, 2018); 4-му Міжнародному конгресі з індустріальної та прикладної математики (Единбург, Велика Британія, 1999); 4-й Європейській конференції з механіки деформівного твердого тіла (Метц, Франція, 2000); Українському математичному конгресі-2001 (Київ, 2001); 8-й Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2001); конференції «Наукові читання, присвячені пам'яті академіка Я.С. Підстригача» (Львів, 2002); 5-му Світовому конгресі з обчислювальної математики (Відень, Австрія, 2002); 5-7-му, 9-му та 12-ому Міжнародних конгресах з температурних напружень (Блексбург, США, 2003; Відень, Австрія, 2005; Тайпей, Тайвань, 2007; Будапешт, Угорщина, 2011; Ханчжоу, Китай, 2019); 5-му Міжнародному форумі з тепломасообміну (Мінськ, Білорусь, 2004); Колоквіумі EUROMECH 466 з обчислювальної та експериментальної механіки матеріалів (Лафборо, Велика Британія, 2005); 78-му та 80-му симпозиумах GAMM (Берлін, Німеччина, 2006; Гданськ, Польща, 2009); 3-й Міжнародній науковій конференції «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу» (Дніпропетровськ, 2010); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016).

У повному обсязі робота доповідалася на наукових семінарах відділу механіки деформівного твердого тіла під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М.М. Николишина та за напрямком «Механіка взаємозв'язаних полів» під керівництвом д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевича Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.т.н., проф. О.Є. Андрейківа та д.ф.-м.н., проф. В.К. Опанасовича; на науковому семінарі «Сучасні проблеми механіки» кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Я.О. Жука та на науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Вайсфельд.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 57 наукових праць. Серед них 24 статті [1-24] у наукових фахових виданнях України і у наукових періодичних виданнях інших держав, 1 стаття [25] у галузі технічних наук, 1 стаття [26] в енциклопедії, 31 публікація [27-57] в матеріалах міжнародних і національних конференцій. П'ятнадцять статей [1, 4, 6, 10, 12, 15, 17-25] опубліковані у виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([19] входить до квартилю Q1, [18, 21, 23] – до Q2, [4, 6, 10, 12, 15] – до Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 37. Автором одноосібно опубліковано 34 праці [1, 2, 5-9, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25-35, 37, 40, 41, 45, 47,

48, 50, 53], зокрема 10 статей [1, 6, 12, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25] у виданнях, які індексуються базами Scopus та/або Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (586 найменувань, з них 318 – кирилицею, а 268 – латиницею) і додатків, містить 66 рисунків та 18 таблиць. Загальний обсяг роботи – 350 сторінок, з них 254 сторінки основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету і завдання дисертаційної роботи, визначено предмет і об'єкт дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне значення та практичну цінність одержаних результатів, зазначено методи дослідження та наведено дані про апробацію результатів, публікації та загальну структуру дисертації.

У **першому розділі «Методологія розв'язування задач термомеханіки тіл з тонкими покриттями»** розроблено відповідну методологію, яка ґрунтується на моделюванні покриттів оболонками з термомеханічними властивостями покриття. При такому підході вплив покриттів на тепловий і механічний стан всієї системи тіло-покриття описується спеціальними узагальненими граничними умовами (УГУ).

У підрозділі 1.1 наведено підхід до побудови УГУ променево-конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті, розвиненні функції температури за товщиною покриття в степеневий ряд та застосуванні методу матриць переносу. Цей підхід дає можливість отримувати розрахункові варіанти УГУ з різною точністю.

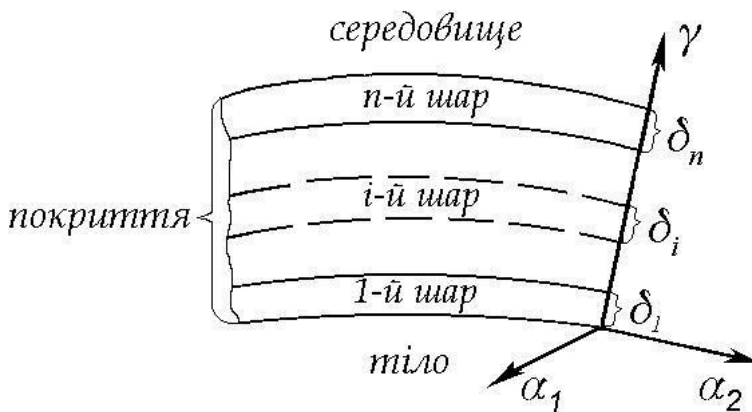


Рис. 1. Схема до постановки задачі

Досліджуваний об'єкт – тіло з багатшаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$, шари якого виготовлені з різних ізотропних матеріалів. Таке n -шарове покриття розглядаємо як тонку оболонку, віднесену до триортогональної змішаної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, які є, відповідно, лініями головних кривин поверхні поділу тіло-покриття і нормаллю до неї (рис. 1).

Загальне рівняння тривимірної теорії теплопровідності для i -го шару покриття має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_{2i} H_{3i}}{H_{1i}} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_{1i} H_{3i}}{H_{2i}} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{H_{1i} H_{2i}}{H_{3i}} \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} \right) = \frac{H_{1i} H_{2i} H_{3i}}{a_i} \frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \quad (1)$$

де t_i – температура i -го шару; τ – час; H_{ji} – коефіцієнти Ляме; $a_i = \lambda_i / \omega_i$, λ_i , ω_i – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та теплоємність i -го шару.

Враховуючи формули зв'язку коефіцієнтів Ляме з коефіцієнтами першої квадратичної форми A_{1i} , A_{2i} поверхонь поділу i -го та $(i-1)$ -го шарів ($i = \overline{2, n}$) та поверхні поділу тіло–покриття ($i = 1$) і кривинами k_{1i} , k_{2i} координатних ліній ($\gamma_0 = 0$ при $i = 1$ та $\gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j$ при $i = \overline{2, n}$), запишемо рівняння теплопровідності (1) так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_{1i} A_{2i}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}} \frac{1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})}{1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1})} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}} \frac{1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1})}{1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[(1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1}))(1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})) \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} \right] = \frac{(1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1}))(1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1}))}{a_i} \frac{\partial t_i}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

За променево-конвективного нагрівання (охолодження) тіла з багат шаровим покриттям постановка задачі теплопровідності для покриття в контактi з тілом включатиме рівняння теплопровідності (2), граничні умови променево-конвективного теплообміну на межі покриття–середовище

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial \gamma} = \mu(t_c - t_n) + \sigma_0 \varepsilon (t_c^4 - t_n^4) \quad \text{при } \gamma = \gamma_n = \delta, \quad (3)$$

$$\lambda_i L_i t_i = \mu_i (t_{\Sigma i} - t_i) + \sigma_0 \varepsilon_i (t_{\Sigma i}^4 - t_i^4) \quad \text{на } \Sigma, \quad L_i = \frac{n_1}{A_{1i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{n_2}{A_{2i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

умови ідеального теплового контакту між шарами покриття і покриттям та тілом

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial \gamma} \quad \text{при } \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}; \\ t_1 &= t_T, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} = \lambda_T \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \quad \text{при } \gamma = \gamma_0 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

та початкову умову

$$t_i = t_{i0}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \quad \text{при } \tau = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Тут t_c , t_Σ – температури середовищ, які омивають поверхні покриття $\gamma = \delta$ і Σ ; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і навколишнім середовищем; σ_0 – стала Стефана-Больцмана; ε – ступінь чорноти поверхні покриття; n_1 , n_2 – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні краю Σ . Індексами « i » та « T » позначено величини, що відносяться до i -го шару покриття та тіла, відповідно.

Побудова УГУ здійснюється на основі методу матриць переносу (transfer matrix method). Використовуючи подання температури t_i у вигляді розвинення

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} t_{i,m}(\alpha_1, \alpha_2, \tau) (\gamma - \gamma_{i-1})^m, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

рівняння теплопровідності (2) та контактні умови (5), після деяких перетворень отримуємо подання коефіцієнтів розвинення температури i -го шару покриття через

граничні значення температури $t_{i-1}^+ = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{i-1}-0} t_{i-1}$ та її похідної $(\partial t_{i-1} / \partial \gamma)^+ = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{i-1}-0} (\partial t_{i-1} / \partial \gamma)$ на верхній межі $(i-1)$ -го шару:

$$t_{i,m} = c_{i,m} t_{i-1}^+ + d_{i,m} \left(\frac{\partial t_{i-1}}{\partial \gamma} \right)^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

де коефіцієнти $c_{i,m}$, $d_{i,m}$ визначаються рекурентними співвідношеннями

$$c_{i,0} = 1, \quad c_{i,1} = 0, \quad d_{i,0} = 0, \quad d_{i,1} = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i,m} = & -\frac{2k_i}{m} \varphi_{i,m-1} - \frac{1}{m(m-1)} \left[\sum_{j=0}^{m-2} k_{i,m-j-2} \sum_{l=0}^j (-1)^{m-l} \varphi_{i,l} \Delta_{i,j-l} + \right. \\ & \left. + 2k_i \sum_{j=0}^{m-3} (-1)^{m-j} \left(k_{i,m-j-2} - \frac{k_{1i} k_{2i}}{k_i} k_{i,m-j-3} \right) \varphi_{i,j+1} - \frac{\varphi_{i,m-2}}{a_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \quad \varphi = c, d; \quad m \geq 2, \end{aligned}$$

і позначено $k_i = (k_{1i} + k_{2i}) / 2$, $k_{i,m} = \sum_{j=0}^m k_{1i}^{m-j} k_{2i}^j$, $t_0^+ = t_T|_{\gamma=0}$, $\left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^+ = \frac{\partial t_T}{\partial \gamma}|_{\gamma=0}$, $\lambda_0 = \lambda_T$,

$$\Delta_{i,j} = \frac{1}{A_{1i} A_{2i}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}} k_{1i}^{j-1} (k_{1i} - k_{2i}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}} k_{2i}^{j-1} (k_{2i} - k_{1i}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right],$$

$$\Delta_{i,0} = \Delta_i = \frac{1}{A_{1i} A_{2i}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right], \quad i = \overline{1, n}; \quad j = 1, 2, \dots$$

Підставляючи (8) у вираз для температури (7) та її похідної при $\gamma = \gamma_i$, отримуємо такі рекурентні співвідношення для температури та її похідної на поверхнях поділу шарів:

$$\tilde{\mathbf{t}}_i = \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{t}}_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$\text{де} \quad \tilde{\mathbf{t}}_i = \left[t_i^+ \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma} \right)^+ \right]^T, \quad i = \overline{1, n}; \quad \tilde{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{t}}_T = \left[t_T|_{\gamma=0} \quad \frac{\partial t_T}{\partial \gamma}|_{\gamma=0} \right]^T, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_{i,m} \delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} d_{i,m} \delta_i^m \\ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{i,m+1} \delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) d_{i,m+1} \delta_i^m \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тут і надалі символ «Т» позначає операцію транспонування матриці.

Граничні значення температури та її похідної на поверхні поділу шарів покриття подамо через їх відповідні значення на поверхні поділу тіло-покриття:

$$\tilde{\mathbf{t}}_j = \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{t}}_T, \quad j = \overline{0, n}, \quad (11)$$

$$\text{де} \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} q_i^{11} & q_i^{12} \\ q_i^{21} & q_i^{22} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді з (9), (11) дістанемо такі рекурентні співвідношення:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_{i-1}, \quad i = \overline{1, n},$$

звідки
$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{D}_{i-1} \dots \mathbf{D}_1 = \prod_{j=1}^i \mathbf{D}_{i-j+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

З (11) та (10), зокрема, випливає:

$$\mathbf{t}_i^+ = \mathbf{Q}_i^{(1)} \tilde{\mathbf{t}}_T, \quad (12)$$

де $\mathbf{Q}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} q_i^{11} & q_i^{12} \end{bmatrix}.$

Підставляючи (11) і (12) при $i = n$ у граничну умову променево-конвективного теплообміну (3), на поверхні поділу основа–покриття отримуємо:

$$[\mu, \lambda_n] \mathbf{Q}_n \tilde{\mathbf{t}}_T + \sigma_0 \varepsilon (\mathbf{Q}_n^{(1)} \tilde{\mathbf{t}}_T)^4 - \mu t_C - \sigma_0 \varepsilon t_C^4 = 0. \quad (13)$$

Оскільки співвідношення (13) пов'язує граничні значення температури t_T та її похідної $\partial t_T / \partial \gamma$ у тілі зі значенням температури t_C у середовищі, то його можна трактувати як *узагальнену граничну умову* для визначення температури в тілі, яка враховує вплив багат шарового покриття на теплоперенесення в тілі.

Для тонких покриттів умову (13) можна суттєво спростити, розвинувши в ряд за степенями малих товщин δ_i відповідні доданки та нехтуючи члени, які містять $\delta_i^q \delta_i^s$ при $q + s > 2$ за умови $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} / \frac{\delta}{\lambda_T} \leq 1$. Тоді УГУ запишемо у вигляді

$$c_1 t_T + c_2 \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} + \mu (t_C - t_T) + \sigma_0 \varepsilon \left[t_C^4 - \sum_{j=0}^4 c_{j+3} t_T^{4-j} \left(\frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \right)^j \right] = 0, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{i=1}^n \left(1 - 2(K - \tilde{K}_{i-1}) + \mu (H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1}) \right) \tilde{\Delta}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_{i,1} - \\ &\quad - \left[(1 - 2K + \mu H^{-1}) \Omega + \sum_{i=1}^n (2\tilde{K}_{i-1/2} - \mu H_{i-1/2}^{-1}) \Omega_i \right] \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ c_2 &= -\lambda_T \delta^{-1} \left[1 - 2K + \sum_{i=1}^n (4K_i \tilde{K}_i - K_{li} K_{2i}) + \mu \left(H^{-1} - 2 \sum_{i=1}^n \tilde{K}_{i-1/2} h_i^{-1} \right) - \sum_{i=1}^n H_{i-1/2}^{-1} \left(\tilde{\Delta}_i - \Omega_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right], \\ c_{j+3} &= C_4^j (\lambda_T H^{-1} \delta^{-1})^j \left[1 - (4-j) \left(\sum_{i=1}^n ((H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1}) \tilde{\Delta}_i - (\Omega H^{-1} - \Omega_i H_{i-1/2}^{-1})) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right], j = \overline{0, 4}, \\ C_4^j &= \frac{4!}{j!(4-j)!} - \text{біноміальні коефіцієнти}, \quad \tilde{\Delta}_i = \Lambda_i \Delta_i; \quad \tilde{\Delta}_{i,1} = \frac{\lambda_i \delta_i^2}{2} \Delta_{i,1}; \quad \Lambda_i = \lambda_i \delta_i, \quad \Omega_i = \omega_i \delta_i, \\ h_i &= \lambda_i / \delta_i, \quad K_i = k_i \delta_i, \quad K_{li} = k_{li} \delta_i, \quad K_{2i} = k_{2i} \delta_i - \text{приведені теплопровідність, теплоємність,} \\ &\text{теплопроникливість і кривини } i\text{-го шару; } \Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i, \quad H^{-1} = \sum_{i=1}^n h_i^{-1}, \quad K = \sum_{i=1}^n K_i - \\ &\text{приведені теплоємність, термічний опір та кривина усього покриття; } H_i^{-1} = \sum_{j=1}^i h_j^{-1}; \\ H_0^{-1} &= 0; \quad H_{i-1/2}^{-1} = H_{i-1}^{-1} + (2h_i)^{-1}; \quad \tilde{K}_i = \sum_{j=1}^i k_j \delta_j; \quad \tilde{K}_{i-1/2} = \tilde{K}_i - \frac{k_i \delta_i}{2}. \end{aligned}$$

Якщо у (13) залишити лише лінійні члени за товщинами шарів δ_i , то у випадку, коли головні кривини і коефіцієнти першої квадратичної форми поверхонь поділу шарів наближено прийняти рівними відповідним величинам поверхні поділу тіло-покриття ($k_i = k^*$, $A_{1i} = A_1$, $A_{2i} = A_2$, $i = \overline{1, n}$), отримаємо

$$\tilde{\Delta} t_T - \lambda_T (1 - 2K + \mu H^{-1}) \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} + \mu (t_C - t_T) + \sigma_0 \varepsilon \left[t_C^4 - \sum_{j=0}^4 c_{j+3} t_T^{4-j} \left(\frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \right)^j \right] = \Omega \frac{\partial t_T}{\partial \tau}, \quad (15)$$

де $\tilde{\Delta} = \Lambda \Delta$, $\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]$, $\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i$ – приведена

теплопровідність усього покриття, $K = k^* \delta$.

Слід зауважити, що УГУ (15) містить похідні за часом від граничної температури t_T , а УГУ (14) – ще й від її похідної $\partial t_T / \partial \gamma$. З контактних умов (5) і початкової умови (6) отримаємо

$$t_T \Big|_{\gamma=0, \tau=0} = t_{10}(\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0, \tau=0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_T} \frac{\partial t_{10}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}. \quad (16)$$

Як альтернативний варіант можна використати вираз через усереднене значення початкової температури за товщиною багат шарового покриття:

$$t_T \Big|_{\gamma=0, \tau=0} = \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{i0}(\varsigma) d\varsigma \right). \quad (17)$$

Порівняння з відомими в літературі УГУ (Г. Карслоу, Д. Єгер, Я.С. Підстригач, П.Р. Шевчук, В.С. Равин, Д.В. Івашук, Ю.М. Коляно, Є.П. Хомякевич, А.А. Березовський, І.О. Мотовиловець, В.І. Козлов, О.П. Гаврись, Н.П. Флейшман, О.В. Аттетков, М.С. Беляков, Н.О. Гембара, Й.Й. Лучко, О.Д. Горбунов, М.А. Al Nimr, F. Du, M.R. Lovell, T.W. Wu, H. Wang, Q. Qin та ін.) показало, що вони є частковими випадками загальної граничної умови (13).

Після визначення температурного поля в тілі на основі розв'язування відповідної крайової задачі з УГУ, можна знайти розподіл температури за товщиною покриття за допомогою формул відновлення.

Підставляючи вирази (8), (10) і (11) у розвинення (7), подамо температуру в покритті так:

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma - \gamma_{i-1})^m [c_{i,m} d_{i,m}] \mathbf{Q}_{i-1} \tilde{t}_T, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Обмежившись лінійними членами розвинення в (18), отримуємо

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = t_T \Big|_{\gamma=0} + \lambda_T \left(H_{i-1}^{-1} + \frac{\gamma - \gamma_{i-1}}{\lambda_i} \right) \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

а врахувавши квадратичні –

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \left[1 + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(-\tilde{\Delta}_j + \Omega_j \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (\gamma - \gamma_{i-1}) + \left(-\Delta_i + \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{(\gamma - \gamma_{i-1})^2}{2} \right] t_T \Big|_{\gamma=0} + \frac{\lambda_T}{\lambda_i} \left[\lambda_i H_{i-1}^{-1} + (1 - 2\tilde{K}_{i-1}) (\gamma - \gamma_{i-1}) - k_i (\gamma - \gamma_{i-1})^2 \right] \frac{\partial t_T}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Таким чином, методика визначення теплового стану в тілах з багатошаровими покриттями реалізується у два етапи:

- 1) розв'язування неklasичної крайової задачі теплопровідності в тілі з УГУ;
- 2) знаходження температурного поля в покритті за формулами відновлення.

На прикладі задачі конвективного нагріву циліндра з покриттям проаналізовано випадки, коли слід враховувати члени вищого порядку в розрахункових варіантах УГУ.

У підрозділі 1.2 виведено УГУ механічного спряження тіла зі середовищем для випадків ізотропного та трансверсально ізотропного покриттів з використанням рівнянь теорії термопружності тонких оболонок.

Для ізотропного покриття сукупність рівнянь механічної рівноваги оболонки покриття, геометричних співвідношень між деформаціями і переміщеннями, конститутивних співвідношень, умов ідеального механічного контакту між тілом і покриттям, умови на межі покриття-середовище замінено УГУ механічного спряження при врахуванні температурних деформацій у покритті

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^T - C_2 A_j^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^T}{\partial \alpha_j} + \mathbf{L}_j [u_T, v_T, w_T]^T = \sigma_{j3}^C + C_1 A_j^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^C}{\partial \alpha_j} - A_j^{-1} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha_j}, & j=1,2, \\ (1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^T + \mathbf{L}_3 [u_T, v_T, w_T]^T = (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C + \delta V[\sigma_{13}^C, \sigma_{23}^C] + (k_{11} + k_{21}) N_t - \Delta M_t, \end{cases} \quad (21)$$

які пов'язують компоненти тензора напружень σ_{pq}^T і компоненти вектора переміщень u_i^T на поверхні поділу тіло-покриття із заданим поверхневим навантаженням σ_{pq}^C на границі покриття-середовище. Тут

$$\mathbf{L}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \mathbf{P}, \quad m = 1, 2, 3;$$

$\mathbf{F}_m$ – певні диференціальні оператори; $\mathbf{K}$ – жорсткісна матриця пружних констант у співвідношеннях зв'язку зусиль і моментів з компонентами деформації базисної поверхні оболонки; $\mathbf{P}$ – матриця диференціальних операторів у геометричних співвідношеннях (26) між компонентами деформації та переміщеннями цієї поверхні; C_j , D_j – певні величини, що визначаються властивостями покриття;

$$N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i, \quad M_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*, \quad T_i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (t_i - t_{i0}) d\gamma, \quad T_i^* = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (t_i - t_{i0}) \gamma d\gamma;$$

E_i , ν_i , β_i – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) i -го шару покриття ($i = \overline{1, n}$) відповідно,

$$V[\phi_1, \phi_2] = A_1^{-1} A_2^{-1} \left(\frac{\partial A_2 \phi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \phi_2}{\partial \alpha_2} \right).$$

Для часткового випадку напружено-деформованого стану, при якому відсутні згинні деформації і кручення поверхні поділу тіло-покриття, можна отримати спрощений варіант УГУ, у якому наявні лише компоненти тензора напружень:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{j3}^T + \mathbf{p}_j [\sigma_{11}^T, \sigma_{22}^T, \sigma_{33}^T, \sigma_{12}^T]^T - C_2 A_j^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^T}{\partial \alpha_j} - \beta_T A_j^{-1} (G_{11} + G_{12}) \frac{\partial t_T}{\partial \alpha_j} = \\ = \sigma_{j3}^C + C_1 A_j^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^C}{\partial \alpha_j} - A_j^{-1} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha_j}, \quad j=1,2, \quad (22) \\ (1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^T + \mathbf{p}_3 [\sigma_{11}^T, \sigma_{22}^T, \sigma_{33}^T, \sigma_{12}^T]^T + (G_{11} + G_{12}) (k_{11} + k_{21}) \beta_T t_T - \\ - (G_{21} + G_{22}) \beta_T \Delta t_T = (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C + \delta V[\sigma_{13}^C, \sigma_{23}^C] + (k_{11} + k_{21}) N_t, \end{aligned} \right.$$

де $\mathbf{p}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \mathbf{\Pi}_\sigma$, $m=1,2,3$; $\mathbf{\Pi}_\sigma$ – матриця пружних сталих тіла; β_T – КЛТР тіла; G_{jl} – коефіцієнти жорсткості покриття.

Для анізотропних покриттів при виведенні УГУ механічного спряження тіла з середовищем через тонке покриття використано гіпотезу Кірхгофа-Лява, однак, через відмінність між модулями Юнга трансверсально ізотропного покриття, беремо до уваги поперечну деформацію ε_3^i кожного шару оболонки як додатковий ступінь свободи. Порівняно з випадком ізотропного покриття, додатково враховуються нормальне поперечне зусилля N_3 і моменти першого порядку напружень поперечного зсуву M_{j3} , що виникають у покритті. Остаточо, УГУ в цьому випадку мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{j3}^T + \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^T - \frac{\delta^2}{12} d_j V[\sigma_{13}^T, \sigma_{23}^T] + \bar{\mathbf{L}}_j [u_T, v_T, w_T]^T = \\ = \sigma_{j3}^C - \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^C - \frac{\delta^2}{12} d_j V[\sigma_{13}^C, \sigma_{23}^C] + f_{jt}, \quad j=1,2, \\ \left(1 + \frac{\delta}{2} d_3\right) \sigma_{33}^T - \frac{\delta^2}{12} d_3 V[\sigma_{13}^T, \sigma_{23}^T] + \bar{\mathbf{L}}_3 [u_T, v_T, w_T]^T = \\ = \left(1 - \frac{\delta}{2} d_3\right) \sigma_{33}^C - \frac{\delta^2}{12} d_3 V[\sigma_{13}^C, \sigma_{23}^C] + f_{3t}. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

де $\bar{\mathbf{L}}_m$, d_m ($m=1,2,3$) – певні оператори і величини; f_{mt} – величини, які залежать від властивостей покриття та враховують температурну деформацію.

Аналогічно отримано УГУ у випадку відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло-покриття.

Після визначення напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності з використанням УГУ, можна знайти напружений стан в покритті за допомогою формул відновлення.

Зокрема, для випадку ізотропного багатошарового покриття напруження визначаються за формулами

$$\sigma_{33}^i(\gamma) = \frac{\sigma_{33}^C + \sigma_{33}^T}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \left(3 - \left(1 - \frac{2\gamma}{\delta}\right)^2\right) \frac{\sigma_{33}^C - \sigma_{33}^T}{2}, \quad (24)$$

$$\sigma_{mm}^i(\gamma) = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_m + \nu_i \varepsilon_{3-m} + (\kappa_m + \nu_i \kappa_{3-m}) \gamma) + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \sigma_{33}^i(\gamma) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \beta_i (t_i(\gamma) - t_{i0}(\gamma)), \quad m=1,2, \quad (25)$$

$$\sigma_{12}^i(\gamma) = \frac{2E_i}{1+\nu_i} (\varepsilon_{12} + \kappa_{12} \gamma), \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, n},$$

де компоненти деформації відлікової поверхні поділу тіло–покриття пов’язані з переміщеннями цієї поверхні співвідношеннями

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^T = \Pi[u_T, v_T, w_T]^T \quad \text{при } \gamma = 0. \quad (26)$$

Таким чином, визначення термонапруженого стану системи тіло–покриття відбувається у два етапи:

- 1) розв’язування неklasичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням УГУ;
- 2) знаходження температурних напружень у покритті за формулами відновлення.

Другий розділ «Термопружність півпростору та пластини з тонкими багат шаровими покриттями» стосується теоретичного дослідження впливу тонких покриттів на термонапружений стан тіл з плоскими межами.

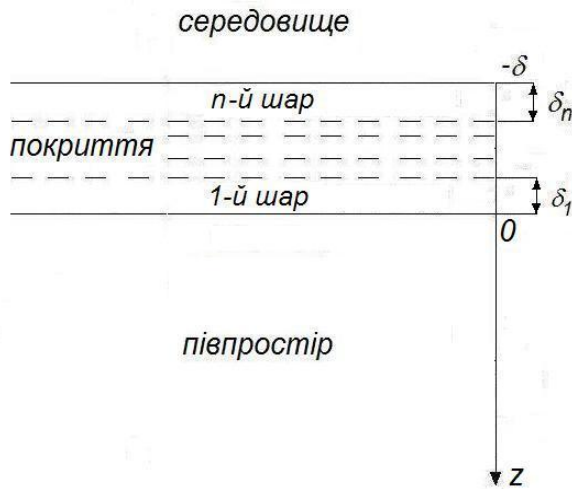


Рис. 2. Схема півпростору з багат шаровим покриттям

Сформульовано нестационарні задачі теплопровідності та відповідні задачі термопружності для півпростору з одностороннім та пластини з двостороннім багат шаровим покриттям. На основі застосування запропонованої у першому розділі математичної моделі з використанням узагальнених граничних умов отримано аналітичні розв’язки низки задач теплопровідності за конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем для півпростору та пластини.

Постановка крайової задачі теплопровідності для півпростору включає:

рівняння теплопровідності
$$\frac{\partial t_T}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 t_T}{\partial z^2}, \quad (27)$$

початкову умову
$$t_T|_{\tau=0} = t_{T0}(z), \quad 0 \leq z < \infty, \quad (28)$$

УГУ
$$\lambda_T \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_T}{\partial z} + \mu (t_C - t_T) = \Omega \frac{\partial t_T}{\partial \tau}, \quad t_T|_{\tau=0} = t_0 \quad \text{при } z = 0, \quad (29)$$

де $t_0 = \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} t_{i0}(\zeta) d\zeta \right)$ – усереднене значення початкової температури за товщиною багат шарового покриття,

та умову на безмежності $\lim_{z \rightarrow \infty} t_T = \lim_{z \rightarrow \infty} t_{T0}(z)$. (30)

Тут $z_0 = 0$, $z_i = -\sum_{m=1}^i \delta_m$, $i = \overline{1, n}$.

В роботі отримано аналітичні розв'язки сформульованої задачі для випадків:

- а) неоднорідної початкової умови за сталої температури довкілля;
- б) експоненціального початкового розподілу температури;
- в) сталого початкового розподілу температури;
- г) циклічного нагріву за кусково-однорідної зміни температури зовнішнього середовища з однорідною початковою умовою.

Виведено асимптотичні формули для великих та малих часів. Відповідно до формул відновлення (19) записано вирази для температури в шарах покриття.

Зокрема, у випадку сталого початкового розподілу температури розв'язок задачі при $\Omega \neq 0$ і $\lambda_T^2 (1 + \mu H^{-1})^2 - 4\Omega\mu a_T \neq 0$ має вигляд:

$$\mathcal{G}_T(\bar{z}, Fo) = \operatorname{erfc} \bar{\varphi} - \frac{1}{2\Upsilon} [(1 + \Upsilon)F_1(\bar{z}, Fo) - (1 - \Upsilon)F_2(\bar{z}, Fo)], \quad 0 \leq \bar{z} < \infty, \quad (31)$$

$$\mathcal{G}_i(\bar{z}, Fo) = 1 - \frac{1}{2\Upsilon} \sum_{m=1}^2 ((-1)^{m+1} + \Upsilon) (1 + \tilde{r}_i(\bar{z})\bar{q}_m) F_m(0, Fo), \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i-1}. \quad (32)$$

Тут $\mathcal{G}_j = (t_j - t_0)/(t_C - t_0)$, $j = T, 1, 2, \dots, n$ – безрозмірні температури; $\bar{z} = z/z_*$ – безрозмірна координата; $\bar{z}_j = z_j/z_*$, $j = \overline{0, n}$; z_* – масштабний параметр; $Fo = a_T \tau / z_*^2$ – число Фур'є; $\bar{\varphi} = \bar{z}/(2\sqrt{Fo})$; $\Upsilon = \sqrt{1 - 4\eta Bi / (1 + \xi Bi)^2}$; $Bi = \mu z_* / \lambda_T$ – критерій Біо; $\xi = H^{-1}/(z_* / \lambda_T)$ – відносний ефективний термічний опір покриття; $\eta = \Omega/(\omega_T z_*)$ – відносна ефективна теплоємність покриття; $\operatorname{erfc} \zeta$ – доповнююча функція помилок; $F_m(\bar{z}, Fo) = \exp(\bar{q}_m \bar{z} + \bar{q}_m^2 Fo) \operatorname{erfc}(\bar{\varphi} + \bar{q}_m \sqrt{Fo})$, $m = 1, 2$;

$$\bar{q}_1 = (1 - \Upsilon)\kappa, \quad \bar{q}_2 = (1 + \Upsilon)\kappa; \quad \tilde{r}_i(\bar{z}) = \lambda_T \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j / (z_* \lambda_j) + (\bar{z} - \bar{z}_{i-1}) / \lambda_i \right), \quad \kappa = \frac{1 + \xi Bi}{2\eta}.$$

На основі рис. 3 і 4 можна оцінити величину максимальної температури тіла при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем. Як і слід було очікувати, наявність покриття знижує температуру поверхні (крива 1 на рис. 3 – покриття відсутнє). Зі збільшенням товщини покриття, зменшенням теплопровідності і збільшенням теплоємності матеріалу його шарів зростає термоізолююча здатність покриття (рис. 3).

На рис. 4 показано розподіл температури за просторовою координатою в системі півпростір–тришарове покриття для деяких моментів часу для різних значень Bi при таких співвідношеннях геометричних і теплофізичних параметрів різних шарів покриття:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1, \quad \delta / z_* = 0.01, \quad (33)$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_T = 3 : 10 : 2 : 30, \quad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_T = 3 : 6 : 1 : 3. \quad (34)$$

Як видно з рис. 4, при великих значеннях Bi розподіл температури за товщиною покриття більше відхиляється від рівномірного.

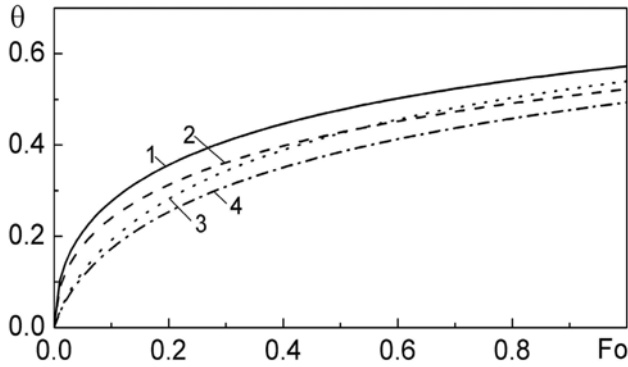


Рис 3. Зміна в часі контактної температури на поверхні поділу півпростір–покриття залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття при $Bi = 1$:
 $\xi = 0, \eta = 0$ (1); $\xi = 0.2, \eta = 0$ (2);
 $\xi = 0, \eta = 0.2$ (3); $\xi = 0.2, \eta = 0.2$ (4)

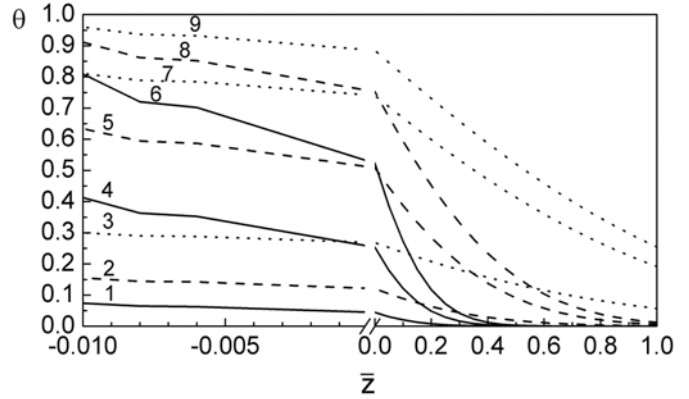


Рис 4. Температурний профіль для значень $Fo = 0.02$ (суцільні криві 1, 4, 6), $Fo = 0.1$ (штрихові криві 2, 5, 8), $Fo = 0.5$ (пунктирні криві 3, 7, 9), для значень критерію $Bi = 1$ (криві 1, 2, 3) $Bi = 4$ (криві 4, 5, 6), $Bi = 20$ (криві 7, 8, 9)

Для випадку вільної від зовнішнього навантаження поверхні покриття зі зміною температури ненульові напруження в системі описуються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^T = \sigma_{yy}^T = \sigma^T(\bar{z}, Fo) &= -\frac{E_T}{1-\nu_T}(t_c - t_0)\beta_T \mathcal{G}_T(\bar{z}, Fo), \quad 0 \leq \bar{z} < \infty, \\ \sigma_{xx}^i = \sigma_{yy}^i = \sigma^i(\bar{z}, Fo) &= -\frac{E_i}{1-\nu_i}(t_c - t_0)\beta_i \mathcal{G}_i(\bar{z}, Fo), \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (35)$$

На рис. 5 показано розподіл безрозмірних напружень $\tilde{\sigma} = \sigma^j(\bar{z}, Fo) / \frac{E_T \beta_T (t_c - t_0)}{1 - \nu_T}$ ($j = T, 1, 2, 3$) за просторовою координатою у системі півпростір–тришарове покриття за геометричних (33), теплофізичних (34) та термомеханічних співвідношень

$$\frac{E_1 \beta_1}{1 - \nu_1} : \frac{E_2 \beta_2}{1 - \nu_2} : \frac{E_3 \beta_3}{1 - \nu_3} : \frac{E_T \beta_T}{1 - \nu_T} = 10 : 2 : 4 : 5$$

параметрів шарів покриття і тіла. З рис. 5 бачимо, що напруження в покритті мають розривний характер, зростаючи з часом за абсолютною величиною. Згідно з формулами (35) їх стрибок на поверхнях поділу шарів покриття залежить від величини

$$\frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} / \frac{E_{i-1} \beta_{i-1}}{1 - \nu_{i-1}} \quad (i = \overline{2, n}), \quad \text{а на поверхні контакту покриття з тілом – від} \quad \frac{E_1 \beta_1}{1 - \nu_1} / \frac{E_T \beta_T}{1 - \nu_T}.$$

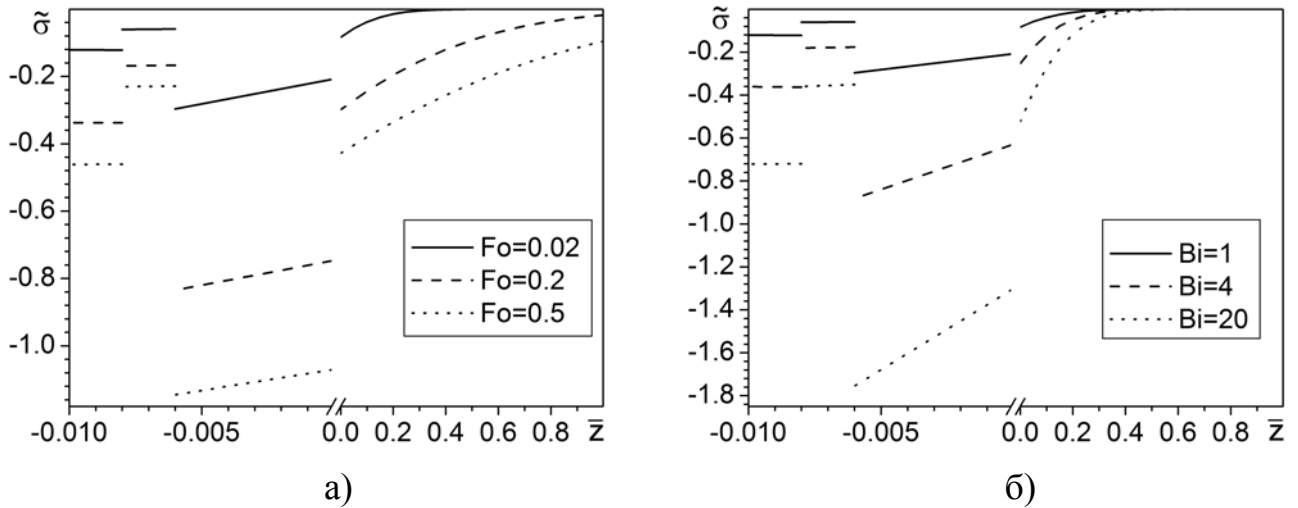


Рис 5. Розподіл напружень за просторовою координатою у системі півпростір–тришарове покриття для деяких моментів часу при $Bi = 1$ (а), для різних значень Bi при $Fo = 0.02$ (б)

Зауважимо, що розрахунок температурного поля за моделлю з УГУ (29) дає можливість отримати розподіл напружень за товщиною у шарах покриття, відмінний від рівномірного (рис. 5), що є неможливим при використанні моделі з УГУ, побудованою із використанням концепції «зосередженої ємності» (Єржанов та ін., 1992). Причому за більших значень Bi це відхилення від рівномірного за товщиною у шарах покриття зростає (рис. 5 б).

Із застосуванням УГУ, методу інтегрального перетворення Лапласа та інтегральних співвідношень Дюгамеля отримано аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатшаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву при довільних температурах зовнішніх середовищ. Записано вирази розв'язків задачі для випадків лінійної, експоненціальної, логарифмічної та періодичної функцій температур довкілля.

На прикладі задачі одностороннього стаціонарного нагріву пластини з тришаровим покриттям верифіковано застосовану методику та показано її ефективність.

Детально розглянуто задачу про симетричний нагрів пластини з ідентичними тришаровими покриттями для випадку експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища. На рис. 6 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \vartheta(1, Fo)$ на поверхні пластини–покриття залежно від критеріїв Біо $Bi = \mu h / \lambda_T$ та

Предводителя $Pd = \left(\frac{d}{dFo} \left(\frac{t_C(Fo) - t_0}{t_C^m - t_0} \right) \right)_{\max}$. Тут $Fo = a_T \tau / h^2$, h – товщина пластини,

t_C^m – максимальна температура середовища. Розрахунки для рис. 6а виконано при

$\xi = \frac{H^{-1}}{h / \lambda_T} = 0.1$, $\eta = \frac{\Omega}{\omega_T h} = 0.1$, $Pd = 1$; для рис. 6б – при $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$, $Bi = 1$.

Штриховими кривими показано зміну в часі температури середовища. Цей рисунок ілюструє вплив умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальної

температури в пластині на поверхні контакту з покриттям. Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо Bi) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя Pd) спричиняє зростання контактної температури.

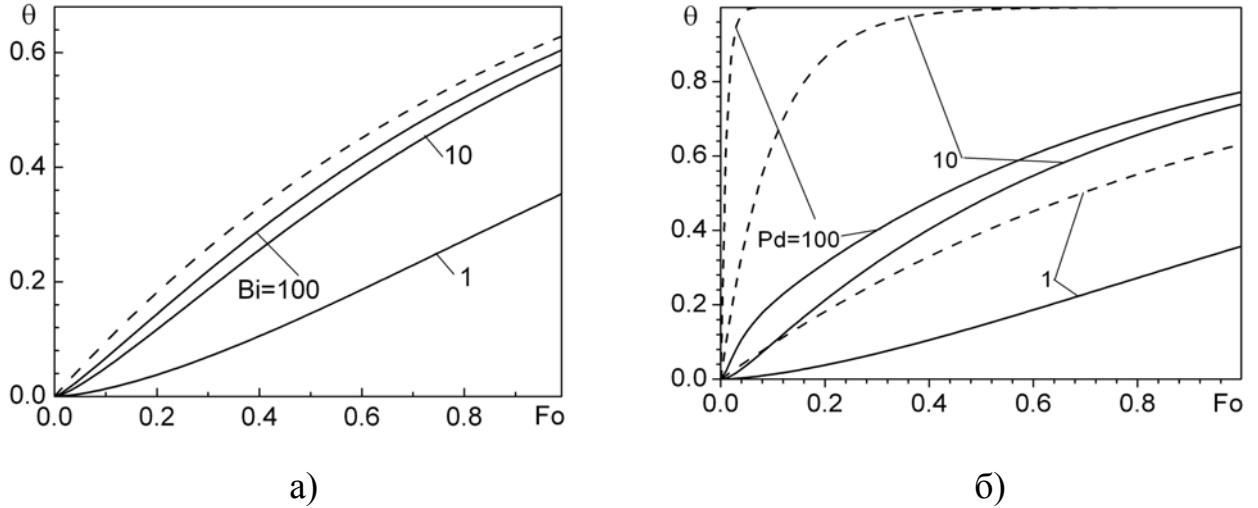


Рис 6. Зміна в часі контактної температури при різних значеннях Bi та Pd

За вільних від зовнішнього навантаження поверхонь покриття зі зміною температури за товщиною напруження в системі описують співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{xx}^T = \tilde{\sigma}_{yy}^T = \tilde{\sigma}^T(\bar{z}, Fo) = b_1(Fo) + b_2(Fo)\bar{z} - \mathcal{G}_T(\bar{z}, Fo),$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^T = \tilde{\sigma}_{xz}^T = \tilde{\sigma}_{yz}^T = \tilde{\sigma}_{xy}^T = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1,$$

$$\tilde{\sigma}_{i,xx}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{i,yy}^{(l)} = \tilde{\sigma}_i^{(l)}(\bar{z}, Fo) = \chi_i^{(l)} \left[b_1(Fo) + b_2(Fo)\bar{z} - \frac{\beta_i^{(l)}}{\beta_T} \mathcal{G}_i^{(l)}(\bar{z}, Fo) \right],$$

$$\tilde{\sigma}_{i,zz}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{i,xz}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{i,yz}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{i,xy}^{(l)} = 0, \quad \bar{z}_{i-l+1}^{(l)} \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i+l-2}^{(l)}, \quad l=1,2, \quad i=\overline{1, n^{(l)}},$$

де $\tilde{\sigma}(\bar{z}, Fo) = \sigma(\bar{z}, Fo) / \frac{E_T \beta_T (t_C^m - t_0)}{1 - \nu_T}$ – безрозмірні напруження;

$b_1(Fo)$, $b_2(Fo)$ – невідомі функції, які визначають з умов рівноваги поперечного перерізу пластини з покриттями; $\bar{z} = z/h$; $z_0^{(1)} = 0$, $z_i^{(1)} = -\sum_{j=1}^i \delta_j^{(1)}$, $\overline{1, n^{(1)}}$, $z_0^{(2)} = h$,

$z_i^{(2)} = h + \sum_{j=1}^i \delta_j^{(2)}$, $\overline{1, n^{(2)}}$; $\delta_j^{(l)}$ – товщина j -го шару l -го покриття; $\mathcal{G}_T(\bar{z}, Fo)$, $\mathcal{G}_i^{(l)}(\bar{z}, Fo)$ –

отриманий розв'язок відповідної задачі теплопровідності; $n^{(l)}$ – кількість шарів l -го

покриття; $\chi_i^{(l)} = \frac{E_i^{(l)}}{1 - \nu_i^{(l)}} / \frac{E_T}{1 - \nu_T}$. Індекс $l=1$ стосується покриття, нанесеного на

поверхню $z=0$ пластини, а $l=2$ – покриття, нанесеного на поверхню $z=h$.

Цікавими є наближені формули для напружень в усталеному режимі, коли пластина з ідентичними покриттями ($n = n^{(l)}$, $\delta_i = \delta_i^{(l)}$, $\chi_i = \chi_i^{(l)}$, $\beta_i = \beta_i^{(l)}$, $i = \overline{1, n}$, $l = 1, 2$) рівномірно прогрівается до температури середовища. У цьому випадку для покриття з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла (зокрема, для тонких покриттів з модулями Юнга, що не перевищують суттєво модуль Юнга підкладки) отримано наближену формулу для усталених напружень у тілі:

$$\tilde{\sigma}^T = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j - \beta_T}{\beta_T} \chi_j \frac{\delta_j}{h}. \quad (36)$$

Для усталених напружень в i -му шарі покриття з малою жорсткістю, коли КЛТР інших шарів несуттєво перевищує КЛТР пластини, справедлива наближена формула

$$\tilde{\sigma}_i^{(l)} = \chi_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_T} \right), \quad l = 1, 2; \quad i = \overline{1, n}. \quad (37)$$

Рис. 7 ілюструє вплив теплофізичних і механічних характеристик покриття та умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальних значень розтягувальних напружень на серединній поверхні пластини $\bar{z} = 0.5$ при $\beta_i > \beta_T$. При розрахунках приймали $\beta_i = 2\beta_T$, $i = 1, 2, 3$; умови (33) при $z_* = h$, умову $\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 = 5 : 2 : 8$; окрім того, для рис. 7а і 7в – $Bi = 10$, $Pd = 10$, для рис. 7а і 7б – ще умова $\chi_1 = 1$, а для рис. 7б і 7в – умови (34).

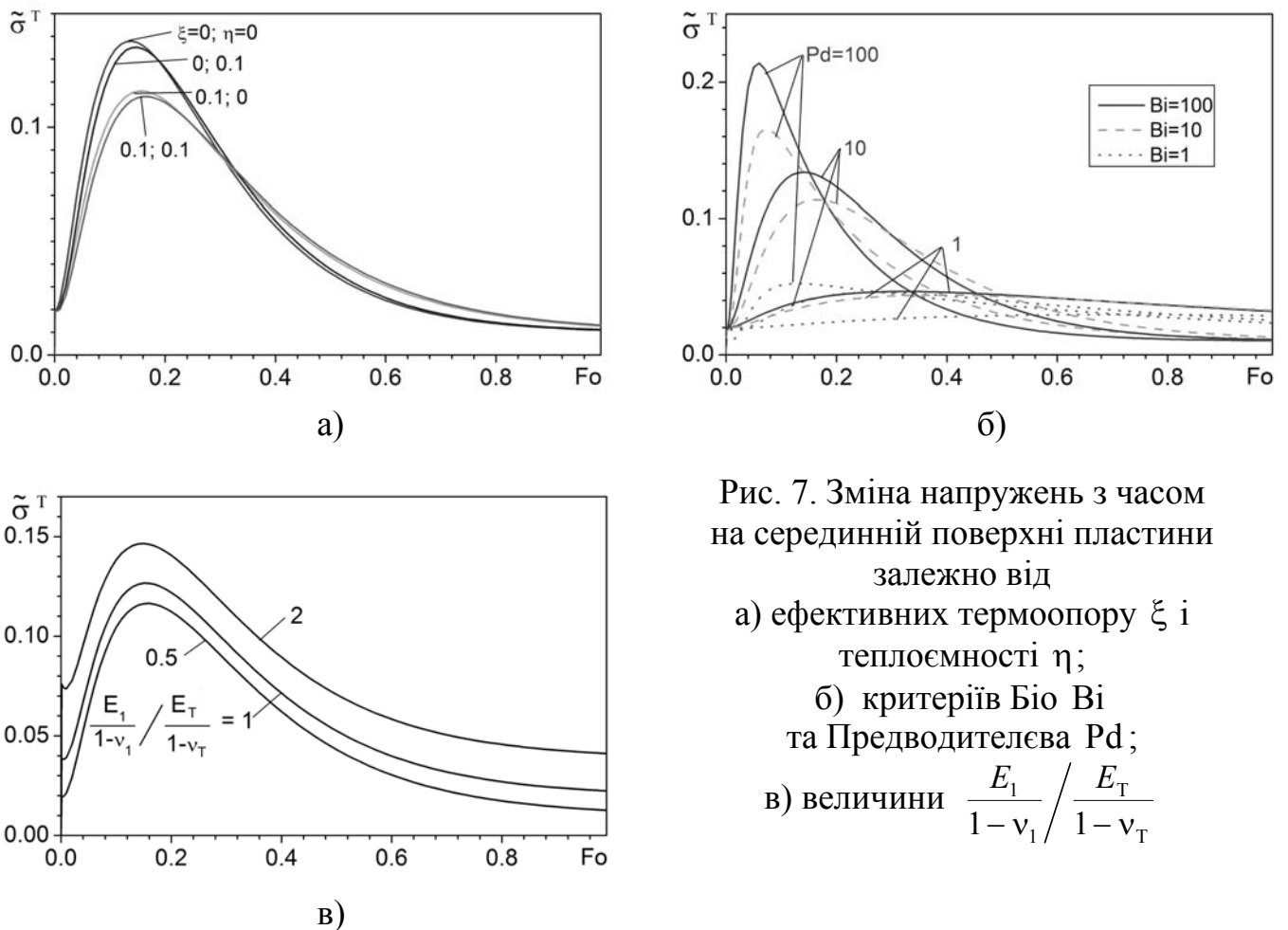


Рис. 7. Зміна напружень з часом на серединній поверхні пластини залежно від

а) ефективних термоопору ξ і теплоємності η ;

б) критеріїв Біо Bi та Предводителяева Pd ;

в) величини $\frac{E_1}{1-\nu_1} / \frac{E_T}{1-\nu_T}$

Наявність покриття призводить до зменшення рівня розтягувальних напружень (крива $\xi=0$, $\eta=0$ на рис. 7а – термоопір та теплоємність покриття відсутні). Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо Bi) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя Pd) спричиняє зростання максимального значення розтягувальних напружень на серединній поверхні пластини (рис. 7б), причому, як і слід було очікувати, максимальне значення напружень досягається при відповідних максимальних значеннях Bi та Pd .

Отже, виявлено, що визначальними параметрами впливу на розподіл температури та напружень є ефективні теплофізичні характеристики покриття – приведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття та швидкість зміни температури зовнішнього середовища.

У третьому розділі «Термопружність півпростору з тонким багат шаровим покриттями за променево-конвективного теплообміну» на основі розв’язаних нелінійної нестационарної задачі теплопровідності та відповідної задачі термопружності досліджено вплив променевої складової теплообміну з довкіллям на термонапружений стан системи.

З використанням УГУ нелінійна крайова задача теплопровідності для півпростору (рис. 2) в безрозмірних величинах має вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_T(\bar{z}, Fo)}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_T(\bar{z}, Fo)}{\partial Fo}, \quad \bar{z} > 0, Fo > 0, \quad (38)$$

$$\theta_T(\bar{z}, 0) = \theta_0, \quad (39) \quad \lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \theta_T(\bar{z}, Fo) = \theta_0, \quad (40)$$

$$(1 + \xi Bi) \frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}} + Bi(\theta_c - \theta_T) - \eta \frac{\partial \theta_T}{\partial Fo} - \\ - Sk \left[\sum_{j=0}^4 (-1)^j C_4^j \xi^j \theta_T^{4-j} \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}} \right)^j - \theta_c^4 \right] = 0, \quad \theta_{T|Fo=0} = \theta_0 \quad \text{при } \bar{z} = 0. \quad (41)$$

$$\text{Тут} \quad \theta_T = t_T / t_*, \quad \theta_0 = t_0 / t_*, \quad \theta_c = t_c / t_* \quad (42)$$

– безрозмірні температури, де відлікова температура

$$t_* = \begin{cases} t_c & \text{під час нагрівання системи,} \\ t_0 & \text{під час охолодження.} \end{cases} \quad (43)$$

Додатково до уже використовуваних безрозмірної координати $\bar{z}$, часу Fo , критерію Біо Bi , відносних ефективного термоопору ξ і ефективної теплоємності η покриття уведено критерій Старка $Sk = \sigma_0 \varepsilon t_*^3 z_* / \lambda_T$. Таке введення безрозмірної температури θ_T за допомогою формул (42) і (43) дає можливість сформулювати нелінійну задачу теплопровідності за променево-конвективного нагрівання чи охолодження, включаючи охолодження в середовищі з нульовою температурою, однією системою співвідношень.

Для розв’язання крайової задачі (38)–(41) застосовано ітераційну процедуру на основі методу квазілінеаризації. Задачу для k -го наближення подамо так:

$$\frac{\partial^2 \theta_T^{(k)}(\bar{z}, Fo)}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_T^{(k)}(\bar{z}, Fo)}{\partial Fo}, \quad \bar{z} > 0, Fo > 0, \quad (44)$$

$$\theta_T^{(k)}(\bar{z}, 0) = \theta_0, \quad (45)$$

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \theta_T^{(k)}(\bar{z}, Fo) = \theta_0, \quad (46)$$

$$(1 + \xi Bi) \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial \bar{z}} + Bi(\theta_c - \theta_T^{(k)}) - \eta \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial Fo} - \\ - Sk \left[\sum_{j=0}^4 (-1)^j C_4^j \xi^j (\theta_T^{(k)})^{4-j} \left(\frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right)^j - \theta_c^4 \right] = 0 \quad \text{при } \bar{z} = 0, \quad \theta_T^{(k)}(0, 0) = \theta_0. \quad (47)$$

Для лінеаризації нелінійного члена в граничній умові (47) використано формулу

$$f\left(\theta_T^{(k)}, \frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial \bar{z}}\right) = f\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial \bar{z}}\right) + f'_{\theta_T}\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial \bar{z}}\right)(\theta_T^{(k)} - \theta_T^{(k-1)}) + \\ + f'_{\frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}}}\left(\theta_T^{(k-1)}, \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial \bar{z}}\right)\left(\frac{\partial \theta_T^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_T^{(k-1)}}{\partial \bar{z}}\right), \quad (48)$$

де $f\left(\theta_T, \frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}}\right) = \sum_{j=0}^4 (-1)^j C_4^j \xi^j \theta_T^{4-j} \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}}\right)^j$. Тоді лінеаризована умова (47) матиме

вигляд

$$\frac{\partial \theta_T^{(k)}(0, Fo)}{\partial \bar{z}} - M^{(k)}(Fo) \frac{\partial \theta_T^{(k)}(0, Fo)}{\partial Fo} = \widetilde{Bi}^{(k)}(Fo) \theta_T^{(k)}(0, Fo) + Q^{(k)}(Fo), \quad \theta_T^{(k)}(0, 0) = \theta_0. \quad (49)$$

де $\widetilde{Bi}^{(k)}$, $M^{(k)}$, $Q^{(k)}$ визначаються через Bi , Sk , ξ , η , $\theta_T^{(k-1)}$, $\partial \theta_T^{(k-1)} / \partial \bar{z}$.

Аналітичний розв'язок лінеаризованої задачі (44)-(46), (49) знайдено за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. За формулою відновлення (19) отримано вирази для температури в i -му шарі покриття на останній ітерації.

На прикладі задачі про радіаційне випромінювання півпростору в середовище нульової температури за відсутності покриття проведено порівняльний аналіз результатів розрахунків нестационарного температурного поля в півпросторі з використанням методів Пікара, зведення вихідної задачі до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри, послідовних наближень та квазілінеаризації, на підставі якого показано кращу збіжність підходу на основі методу квазілінеаризації.

Далі узагальнено дослідження задачі термопружності для півпростору з багат шаровим покриттям за конвективного теплообміну, розглянутої у другому розділі, для випадку врахування променевої складової на прикладі променево-конвективного нагрівання півпростору з нержавкої сталі 316L з двошаровим зносостійким покриттям із ніхрому Cr-Ni (внутрішній шар) товщиною $\delta_1 = 0.1$ мм та сплаву WC-Co (зовнішній шар) товщиною $\delta_2 = 0.3$ мм при $t_c = 1073$ К, $t_0 = 293$ К, $\varepsilon = 0.5$, $z_* = 1$ м.

Рисунок 8 ілюструє вплив зростання інтенсивності конвективного (суцільні криві) та променево-конвективного (штрихові) нагрівання на зміну з часом контактної температури $\theta = \theta_T(0, Fo)$. Як бачимо, якщо при значенні коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покриття $\mu = 20$ Вт/(м² · К) ($Bi \approx 1.18$) та $\mu = 100$ Вт/(м² · К) ($Bi \approx 5.88$) променева складова ($Sk = 2.06$) суттєво підвищує контактну температуру, то при $\mu \geq 500$ Вт/(м² · К) (відповідно $Bi \geq 29.41$) її вплив на нагрівання системи незначний (верхні штрихова і суцільна криві практично зливаються).

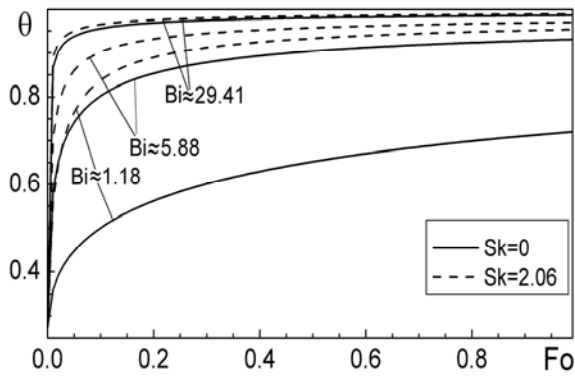


Рис. 8. Вплив інтенсивності нагрівання на зміну контактної температури

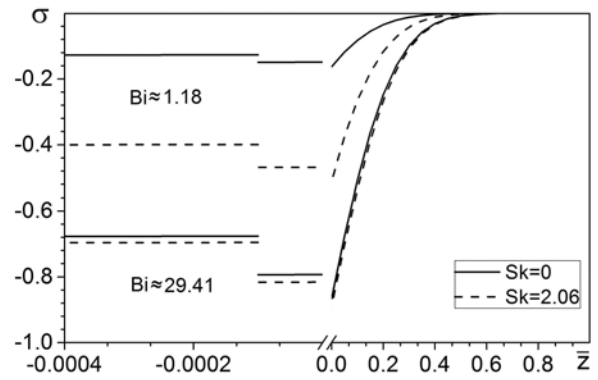


Рис. 9. Розподіл напружень у системі основа–двошарове покриття

На рис. 9 подано розподіл напружень $\sigma = \tilde{\sigma}^j(\bar{z}, Fo)$ за просторовою координатою в системі півпростір–двошарове покриття за променево-конвективного нагрівання для різних значень Bi та Sk при $Fo = 0.02$. Як і для температурного поля, якщо $\mu \geq 500$ Вт/(м² · К) ($Bi \geq 29.41$), променева складова не суттєво впливає на термонапружений стан системи, що помітно проявляється у характері розподілу стискальних напружень вглиб півпростору та дещо менше – на їх значення в шарах покриття.

У четвертому розділі «Термопружність циліндричних тіл з тонкими багатшаровими покриттями» на основі аналітичного розв'язку статичної задачі пружності для циліндра з тонким багатшаровим покриттям, отриманого із застосуванням УГУ, проаналізовано вплив геометричних і фізико-механічних характеристик покриття і підкладки, а також умов закріплення торців циліндра на залишковий напружений стан системи тіло–багатшарове покриття. Виявлено умови, за яких можуть виникати небезпечні радіальні, колові та осьові напруження.

Із застосуванням запропонованої у першому розділі математичної моделі з УГУ теплообміну тіл із середовищем через тонкі багатшарові покриття та інтегрального перетворення Лапласа побудовано аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для циліндра з багатшаровим покриттям за конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Записано розрахункові формули для визначення температури в підкладці та в довільному шарі покриття. Знайдено асимптотики розв'язку для великих та малих значень часу. Ефективність запропонованого підходу показано порівнянням результатів, одержаних при його застосуванні, з розв'язком тестової задачі нагрівання циліндра з тришаровим покриттям. Ці результати якісно співпадають з результатами аналогічних задач для півпростору і пластини.

Для розв'язування задачі термопружності для суцільного циліндра радіуса R з ізотропним n -шаровим покриттям застосовано УГУ термомеханічного спряження підкладки з середовищем через тонке покриття:

$$\left(1 - \frac{\nu_T(G_{11} + G_{12})}{RE_1}\right) \sigma_{rr}^T|_{r=R} + \frac{G_{11} - \nu_T G_{12}}{RE_T} \sigma_{\varphi\varphi}^T|_{r=R} + \frac{G_{12} - \nu_T G_{11}}{RE_T} \sigma_{zz}^T|_{r=R} = \frac{N_t - (G_{11} + G_{12})\beta_T(t_T|_{r=R} - t_0)}{R},$$

де коефіцієнти жорсткості покриття $\{G_{11}, G_{12}\} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \delta_i}{1 - \nu_i^2} \{1, \nu_i\}$.

Із використанням цієї умови отримано аналітичний розв'язок задачі термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Досліджено вплив геометричних і термомеханічних характеристик покриття, умов закріплення торців циліндричної підкладки та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термопружний стан системи тіло–багатошарове покриття за конвективного нагрівання. Для випадку покриттів малої жорсткості одержано наближені формули, які є зручними для якісного оцінювання усталених напружень в системі.

У п'ятому розділі «Розв'язування статичних задач термомеханіки для циліндричних тіл з покриттями довільної товщини» розвинуто метод безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги й суцільності в напруженнях одновимірних задач теорії пружності та термопружності для циліндричних тіл з неоднорідними трансверсально ізотропними покриттями.

Розглянуто довгий круговий ізотропний циліндр ($0 \leq r \leq R_T$) з фіксованими торцями, на бічну поверхню якого нанесено шар трансверсально ізотропного неоднорідного за радіальним напрямом покриттям ($R_T \leq r \leq R_\Pi$). Індеси «Т» і «П» відносяться до підкладки (тіла) і покриття, відповідно.

Використовуючи підхід, запропонований у роботах В.М. Вігака і Б.М. Калиняка, вихідну систему рівнянь рівноваги, умов суцільності та фізичних співвідношень одновимірної задачі термопружності для двошарового циліндра зведено до системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду для радіальної компоненти тензора напружень σ_{rr} і сумарного напруження $\sigma_s = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}$

$$\sigma_s^j(r) = (\bar{\beta}_1^j)^{-1} (\bar{A}^j + \mathfrak{x}^j(r) + \omega^j(r)), \quad j = T, \Pi, \quad (50)$$

$$r^2 \sigma_{rr}^j(r) = \int_0^r \sigma_s \zeta d\zeta, \quad j = T, \Pi, \quad (51)$$

де
$$\mathfrak{x}^j(r) = \int_{R_q}^r \left[\Phi_r^j(t_j) - \left(1 + \frac{a_{13}^j - a_{23}^j}{a_{33}^j} \right) \Phi_z^j(t_j) \right] \zeta^{-1} d\zeta - \left(1 - \frac{a_{23}^j}{a_{33}^j} \right) \Phi_z^j(t_j),$$

$$\omega^j(r) = \int_{R_q}^r \sigma_{rr}^j \left(\bar{\beta}_3^j \zeta^{-1} + \frac{d\bar{\beta}_2^j}{d\zeta} \right) d\zeta, \quad q = \begin{cases} 0, & j = T, \\ T, & j = \Pi, \end{cases} \quad R_0 = 0,$$

$\Phi_l^j(t) = \int_{t_0}^t \beta_l^j(t') dt' \quad (l = r, \varphi, z; j = T, \Pi)$ – теплові деформації (тут $\Phi_l^T = \Phi^T$, $\Phi_\varphi^\Pi = \Phi_z^\Pi$), β_l^j – КЛТР як функції абсолютної температури t^j , t_0 – початковий температурний розподіл, величини $\bar{\beta}_1^j$, $\bar{\beta}_2^j$ та $\bar{\beta}_3^j$ виражаються через пружні податливості матеріалу підкладки і покриття a_{ml}^j .

Невідомі константи $\bar{A}^T$ і $\bar{A}^\Pi$ визначаються підстановкою (50) і (51) в умову ідеального механічного контакту $\sigma_{rr}^T(R_T) = \sigma_{rr}^\Pi(R_T)$ та інтегральну умову рівноваги

$$\int_0^{R_\Pi} \sigma_s \zeta d\zeta = 0, \quad (52)$$

яка впливає з (51) при $r = R_{\Pi}$ за врахування відсутності силового навантаження на поверхні покриття.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь (50), (51) застосовано метод простої ітерації. Завдяки раціональному вибору початкового наближення для випадку рівномірного нагрівання, коли використовується отриманий точний аналітичний розв'язок відповідної задачі для ізотропного циліндра-підкладки з однорідним трансверсально ізотропним покриттям, одержано швидкозбіжну ітеративну схему розв'язування вихідної задачі термопружності.

У шостому розділі «Дослідження процесів накопичення пошкоджень в керамічних покриттях» розроблені підходи до визначення їх напружено деформованого стану застосовано для аналізу еволюції пошкоджень у керамічних тонких багат шарових і товстих одношарових покриттях під впливом теплових навантажень.

Математичне моделювання процесу накопичення пошкоджень у крихких покриттях під дією теплових навантажень ґрунтується на підході континуальної механіки руйнування (Najar, 1987). Параметр пошкоджуваності, введений у континуально-механічну модель, характеризує макроскопічний розвиток руйнування у керамічних покриттях, пов'язаний з накопиченням дефектів на мікроскопічному рівні. Поточне значення параметра пошкодження D визначається локальним рівнем деформацій і початковим пошкодженням D_0 відповідно до наступного співвідношення для анізотропного випадку (Najar, Silberschmidt, 1998; Shevchuk, Silberschmidt, 2005)

$$D = D_0 \exp \left(\frac{E_j \langle e_{jj}^* \rangle^2}{2W} \right)$$

з підсумовуванням по всіх невід'ємних головних пружних деформаціях e_{jj}^* . Тут кутові дужки є дужками Маколея (Macaulay brackets), тобто $\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$ W – питома енергія, пов'язана з накопиченням пошкоджень, E_j – модулі Юнга непошкодженого трансверсально ізотропного матеріалу.

При рівномірному нагріванні використовується така ітераційна процедура для визначення зміни параметра пошкоджуваності:

$$D(t + \bar{t}) = D_0 \exp \left(\frac{E_j \langle e_{jj}^*(t, B_{pq}(D(t))) \rangle^2}{2W(t)} \right), \quad (53)$$

де B_{pq} – пружні коефіцієнти трансверсально ізотропного тіла. На кожному кроці нагрівання, яке характеризується температурним приростом $\bar{t}$, здійснюється розрахунок поля деформації і відповідного розподілу пошкодження.

Цю загальну числову процедуру можна спростити для багатьох практично важливих випадків включенням аналітичного розв'язку відповідної проміжної задачі термопружності в обчислювальну схему, отримуючи, таким чином, аналітично-чисельний підхід до дослідження еволюції пошкоджень в покриттях при тепловому навантаженні.

Для випадку тонких покриттів можна застосувати підхід, що ґрунтується на використанні математичної моделі з УГУ термомеханічного спряження підкладки з середовищем через покриття. Хоча при такому підході в обчислювальній схемі використовуються значно простіші формули, його застосування обмежується випадками малої товщини покриття.

Розглянуто задачу термопружності для суцільного циліндра радіуса R з керамічним n -шаровим покриттям за рівномірного нагріву. Торці циліндра зафіксовані в осьовому напрямку, і всі напруження на межі покриття–середовище відсутні.

Оскільки керамічні покриття виявляють суттєву трансверсальну анізотропію, то використано варіант УГУ для трансверсально ізотропних покриттів, який у даному випадку осьової симетрії задачі за врахування температурної залежності КЛТР має такий вигляд при $r = R$

$$(1 + \bar{p}_{33})\sigma_{33}^T + \bar{p}_{31}\sigma_{11}^T + \bar{p}_{32}\sigma_{22}^T + \bar{p}_{3t}\Phi^T(t_T) = f_{3t}, \quad (54)$$

де коефіцієнти $\bar{p}_{3j}$ ($j=1,2,3,t$) визначаються через геометричні та механічні властивості шарів покриття і тіла.

Остаточно, знайдено головні невід’ємні пружні деформації в покритті e_{33}^{*i}, e_{22}^{*i} ($i=\overline{1,n}$), які забезпечують необхідні дані для правої частини формули (53) для обчислення розподілу пошкоджень на кожному кроці рівномірного нагріву.

Числові розрахунки проведено для циліндра радіуса 5 см з титанового сплаву Ti-6Al-4V із зафіксованими торцями, з модельним тришаровим керамічним покриттям з товщинами шарів $\delta_2 = \delta_3 = 2\delta_4 = 200$ мкм і проміжним шаром товщиною $\delta_1 = 100$ мкм для трьох типів розподілу за товщиною початкового пошкодження, пов’язаного з технологічно зумовленою пористістю:

- 1) рівномірного (*uniform*) з величиною $D_0 = (D_{\min} + D_{\max}) / 2$,
- 2) лінійно зростаючого від $D_{\min}$ на поверхні поділу покриття–підкладка до $D_{\max}$ на зовнішній вільній поверхні (*Type 1*),
- 3) лінійно спадаючого з $D_{\max}$ на поверхні поділу до $D_{\min}$ на вільній поверхні (*Type 2*).

У числових розрахунках приймали $D_{\min} = 0.02$ і $D_{\max} = 0.10$, що приводить до $D_0 = 0.06$.

На рис. 10 проілюстровано вплив температури на еволюцію пошкодження в різних шарах покриття за наявності та відсутності проміжного шару за рівномірного початкового пошкодження. Оскільки коефіцієнт температурного розширення і модуль Юнга модельного проміжного шару подібні до звичайно використовуваних на практиці, то можна зробити висновок, що вплив проміжного шару на еволюцію пошкоджень нехтувально малий. Спостерігається істотна різниця в процесах еволюції пошкоджень в різних шарах навіть для тонкого багатшарового покриття, хоча в усіх випадках присутні основні етапи процесу: відносно повільна еволюція на початковій стадії і різке збільшення рівня пошкоджень на фінальній стадії.

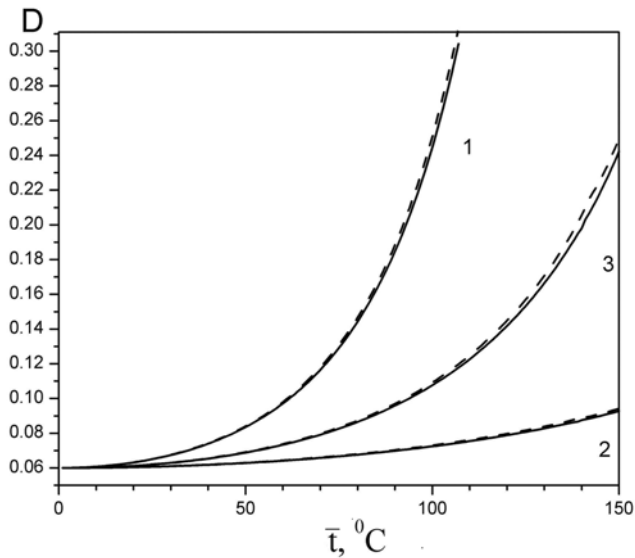


Рис 10. Вплив температури на еволюцію пошкоджень у різних шарах покриття без проміжного шару (суцільні криві) і з ним (штрихові криві)

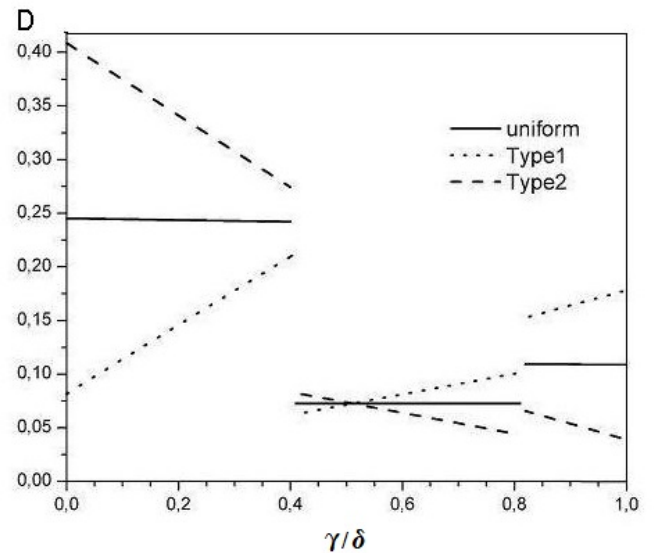


Рис 11. Розподіл пошкодження за координатою $\gamma = r - R$, викликаного зміною температури $\bar{t} = 100^\circ\text{C}$ для різних типів початкового розподілу пошкоджень

З рис. 11 бачимо, що на відміну від одношарового покриття, для випадку багатшарового покриття пошкодження є кусково-неперервною, немонотонною функцією, хоча в межах окремого шару пошкодження є неперервною і монотонною функцією.

У випадку покриттів довільної товщини доцільно для визначення напружено-деформованого стану використати підхід, викладений в розділі 5.

Розглянуто ізотропний циліндр з трансверсально ізотропним і неоднорідним в радіальному напрямі покриттям. Компоненти тензорів напружень і деформацій знайдено згідно із зазначеним підходом, а головні деформації визначено як $e_{jj}^* = e_{jj}^\Pi - \Phi_j^\Pi(t)$ ($j = r, \varphi, z$) для правої частини формули (53) на кожному кроці теплового навантаження.

Аналіз еволюції пошкоджень в керамічному покритті на циліндричній металевій підкладці виконано для довгого циліндра радіуса 0.5 см, з фіксованими кінцями в осьовому напрямі з нанесеним шаром оксиду алюмінію. Як і раніше, розглядаються три типи розподілу за товщиною початкового пошкодження, пов'язаного з технологічно зумовленою пористістю. Ці три типи покриттів вивчаються для двох випадків матеріалу підкладки: вольфраму і сплаву Ti-6Al-4V. Розглядаємо систему суто під тепловим навантаженням і вважаємо, що початковий стан вільний від напружень.

Слід зазначити, що тип підкладки суттєво впливає на характер накопичення пошкоджень в керамічному покритті. З рис. 12 випливає, що зі збільшенням товщини покриття на підкладці з титанового сплаву швидкість накопичення пошкоджень зменшується, тоді як для випадку вольфрамової підкладки вона зменшується в області зовнішньої поверхні, але зростає в області контакту.

Ці відмінності в особливостях еволюції пошкодження для двох типів підкладок визначаються різними типами невідповідності в коефіцієнтах теплового розширення підкладки і покриття (КЛТР титанового сплаву більший, а вольфраму менший, ніж КЛТР оксиду алюмінію).

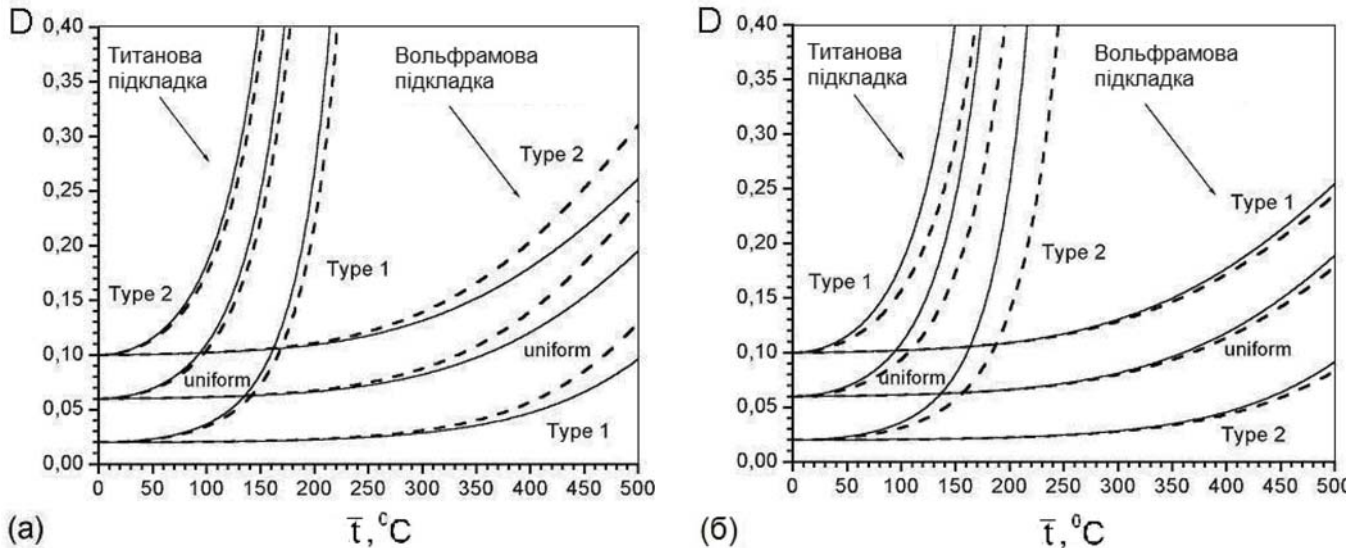


Рис. 12. Вплив температури на накопичення пошкоджень в покриттях товщиною 50мкм (суцільні криві) і 500мкм (штрихові криві):

(а) біля поверхні поділу та (б) біля зовнішньої поверхні для різних типів початкового розподілу пошкоджень і різних підкладок

Для товстих покриттів, на відміну від тонких, нерівномірний розподіл початкової пористості не завжди небезпечніший відносно можливості ініціювання тріщин, ніж рівномірний.

У сьомому розділі «Термопружний стан півпростору з багатошаровим покриттями з тріщиною під покриттям» розглянуто нестационарну задачу термопружності за конвективного нагріву системи з трансверсальною тріщиною довжини $l = c - b$ (рис. 13).



Рис. 13. Схема об'єкту

Якщо підкладка є значно товстішою за покриття і розмір тріщини, то систему можна трактувати як пружне багатошарове покриття, з'єднане з півскінченною пружною основою. Система перебуває в рівномірному температурному полі t_0 , а поверхня покриття конвективно обмінюється теплом з довкіллям температури t_c .

Вважаємо, що матеріали підкладки і шарів покриття є однорідними та ізотропними з незалежними від температури термомеханічними сталими.

Задачу розв'язано на основі принципу суперпозиції. Спочатку визначено в замкнутій аналітичній формі нестационарні розподіли температури та відповідні температурні напруження для системи без тріщини за допомогою моделі з УГУ теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття. Далі задачу з тріщиною сформульовано як збурену змішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини є рівним та протилежним за знаком термічним напруженням, отриманим для задачі без тріщини.

Квазістатична плоска задача теорії пружності для тріщини описується рівняннями рівноваги для кожного шару покриття та півпростору, співвідношеннями між напруженнями та переміщеннями, граничною умовою на зовнішній поверхні, вільній від навантаження, умовою симетрії при $x=0$, умовами регулярності на нескінченності, умовами ідеального контакту між шарами покриття і покриттям та півпростором, змішаними граничними умовами на площині з тріщиною

$$u^i(0, y, \tau) = 0, \quad y_i \leq y \leq y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad u^T(0, y, \tau) = 0, \quad 0 \leq y < b, \quad c < y < \infty, \\ \sigma_{xx}^T(0, y, \tau) = -\sigma^T(y, \tau), \quad b < y < c,$$

де $u^j \in x$ -компонента вектора переміщень; $y_0 = 0$, $y_i = -\sum_{m=1}^i \delta_m$, $i = \overline{1, n}$;

$-\sigma^T$ є нормальні напруження, прикладені на поверхнях тріщини, та відповідно до принципу суперпозиції рівні за величиною і протилежні за знаком температурним напруженням, які визначаються із задачі для півпростору без тріщини:

$$\sigma^T(y, \tau) = -\frac{E_T}{1-\nu_T} \beta_T(t_T(y, \tau) - t_0). \quad (55)$$

Тут $t_T(y, \tau)$ – розв'язок задачі теплопровідності (27)-(30) за сталої початкової температури (за врахування перепозначення змінної z на y).

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) біля вершин тріщини $y = b$ і $y = c$ визначаються як

$$k_1(b, \tau) = \lim_{y \rightarrow b-0} \sqrt{2(b-y)} \sigma_{xx}^T(0, y, \tau), \quad k_1(c, \tau) = \lim_{y \rightarrow c+0} \sqrt{2(y-c)} \sigma_{xx}^T(0, y, \tau). \quad (56)$$

Визначаючи функцію стрибка переміщень $g(y, \tau)$ вздовж берегів тріщини як похідну від переміщень $g(y, \tau) = \frac{\partial u^T(0, y, \tau)}{\partial y}$, $0 \leq y < \infty$ і застосовуючи методику, запропоновану в роботі Wang, Mai, Noda 2002, зводимо задачу до результуючого сингулярного інтегрального рівняння для шуканої функції $g(y, \tau)$:

$$\frac{1}{\pi} \frac{4G_T}{1+\bar{\nu}_T} \int_b^c \frac{1}{\zeta - y} g(\zeta, \tau) d\zeta + \int_b^c \Pi(y, \zeta) g(\zeta, \tau) d\zeta = -\sigma^T(y, \tau), \quad b < y < c, \quad (57)$$

де G_T – модуль зсуву, $\bar{\nu}_T = 3 - 4\nu_T$, ядро $\Pi(y, \zeta)$ визначене геометричними та механічними параметрами покриття.

Для випадку внутрішньої тріщини $g(y, \tau)$ повинна задовольняти умову однозначності

$$\int_b^c g(\zeta, \tau) d\zeta = 0. \quad (58)$$

Після нормалізації рівняння (57), (58) набувають вигляду:

$$\frac{1}{\pi} \frac{4G_T}{1+\bar{\nu}_T} \int_{-1}^1 \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{y}} \bar{g}(\bar{\zeta}, \tau) d\bar{\zeta} + \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \bar{\Pi}(\bar{y}, \bar{\zeta}) \bar{g}(\bar{\zeta}, \tau) d\bar{\zeta} = -\bar{\sigma}^T(\bar{y}, \tau), \quad -1 < \bar{y} < 1, \quad (59)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{g}(\bar{\zeta}, \tau) d\bar{\zeta} = 0. \quad (60)$$

де інтегральне рівняння (59) має сингулярне ядро типу Коші.

Для задачі з внутрішньою тріщиною розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\bar{g}(\bar{\zeta}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}} \sum_{m=1}^M B_m(\tau) T_m(\bar{\zeta}), \quad (61)$$

де $B_m(\tau)$ – невідомі сталі для кожного заданого моменту часу τ , M – число членів скінченної суми ряду, T_m – поліном Чебишева першого роду порядку m . Розвинення (61) тотожно задовольняє умову однозначності (60).

Відповідно до схеми методу колокацій підставляння (61) в (59) приводить до системи алгебричних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^M B_m(\tau) \left(\frac{4G_T}{1+\bar{\nu}_T} U_{m-1}(\bar{y}_k) + \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \bar{\Pi}(\bar{y}_k, \bar{\zeta}) \frac{T_m(\bar{\zeta})}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}} d\bar{\zeta} \right) = -\bar{\sigma}^T(\bar{y}_k, \tau), \quad k = \overline{1, M}, \quad (62)$$

де U_m – поліном Чебишева другого роду порядку m ; корені полінома Чебишева першого роду $\bar{y}_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2M}$ (де M – загальна кількість вузлів колокації) використовуються як точки колокації для шуканої функції $\bar{g}(\bar{y}, \tau)$ в інтервалі $-1 < \bar{y} < 1$.

Для КІН маємо розрахункові формули

$$k_1(b, \tau) = \frac{4G_T}{1+\bar{\nu}_T} \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{m=1}^M (-1)^m B_m(\tau), \quad k_1(c, \tau) = -\frac{4G_T}{1+\bar{\nu}_T} \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{m=1}^M B_m(\tau). \quad (63)$$

Тут $B_m(\tau)$ визначаються як розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (62).

Безрозмірний КІН може бути визначений як $\tilde{k}_1 = k_1 / (\sigma_* \sqrt{y_*})$, де y_* – масштабний параметр, який використовується для обезрозмірювання просторової та часової $Fo = a_T \tau / y_*^2$ координат, а $\sigma_* = -E_T \beta_T (t_c - t_0) / (1 - \nu_T)$.

Викладений підхід був верифікований шляхом розв'язування декількох тестових задач, для яких було досягнуто добре узгодження з відомими розв'язками.

Проведено числовий аналіз КІН для випадку тріщини під покриттям в підкладці з нержавкої сталі 316L з двошаровим покриттям WC–Co/Cr–Ni під час процесу конвективного охолодження. Відношення $\delta_2 : \delta_1$ товщини верхнього шару WC–Co до товщини зв'язуючого шару Cr–Ni приймається як 4:1. Масштабний параметр y_* береться як половина довжини тріщини $y_* = l/2$, $Bi = \mu y_* / \lambda_T$.

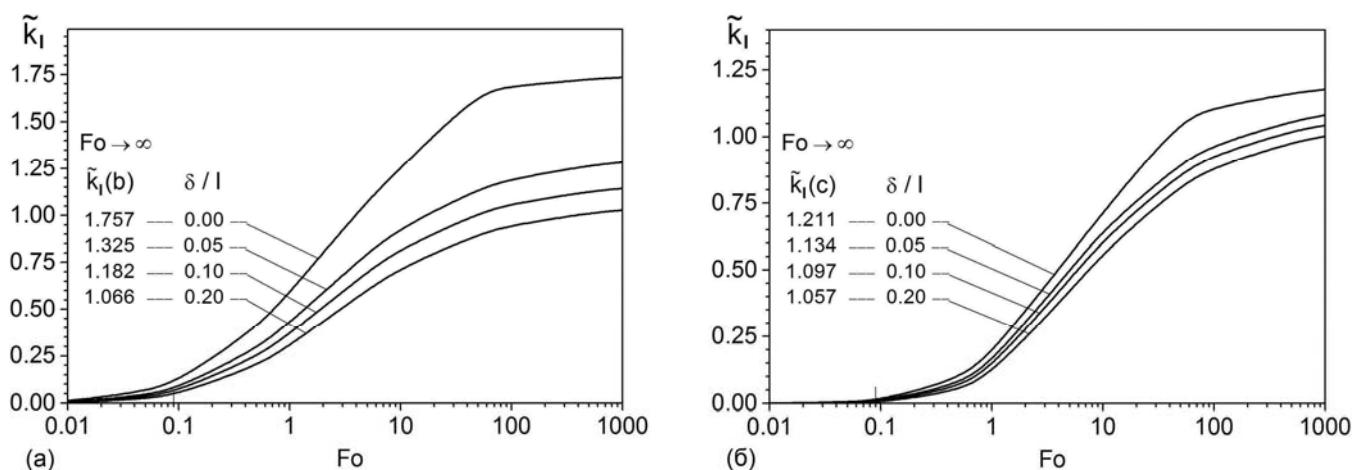


Рис. 14. Зміна з часом КІН залежно від параметра δ/l на краю b (14а) та краю c (14б)

Результати зміни з часом КІН наведено на рис. 14 на різних краях для різних товщин покриття. Як можна було очікувати, наявність покриття та збільшення його товщини призводять до зменшення КІН (оскільки фактичне збільшення відстані між тріщиною та зовнішньою поверхнею, а також термобар'єрні властивості покриття спричиняють зменшення градієнта і величини температурних напружень).

Числові розрахунки дали змогу оцінити вплив геометричних і термомеханічних параметрів системи тіло–покриття на термічні напруження та коефіцієнти інтенсивності термічних напружень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну науково-прикладну проблему побудови адекватних математичних моделей та розроблення ефективних методів розрахунку і аналізу термонапруженого стану тіл з багатошаровими тонкими та одношаровими неоднорідними ізотропними та анізотропними покриттями за силового і теплового навантаження.

При цьому отримано такі наукові і практичні результати.

- Розроблено методологію розв'язування задач термомеханіки тіл з тонкими багатошаровими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні впливу покриттів на тепловий і механічний стани тіла узагальненими граничними умовами.
- На основі сформульованої математичної моделі поставлено і розв'язано нестационарні крайові задачі термопружності для тіл плоскої та циліндричної геометрії з багатошаровими тонкими покриттями за зовнішньої теплової дії.
- Із використанням математичної моделі теплових процесів у тілах з тонкими шаруватими покриттями сформульовано нелінійну нестационарну задачу теплопровідності та відповідну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. На основі методу квазілінеаризації з використанням інтегрального перетворення Лапласа побудовано ітераційну схему розв'язання поставленої нелінійної задачі теплопровідності з аналітичним визначенням розв'язку лінеаризованої задачі для кожної ітерації.

- Розроблено методику розв'язування одновимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів для випадку ортотропних властивостей матеріалу циліндра, яка ґрунтується на використанні методу безпосереднього інтегрування вихідних диференціальних рівнянь з подальшим зведенням до інтегральних рівнянь, розв'язаних методом простої ітерації.

На цій основі побудовано алгоритм розв'язування задачі нагріву суцільного ізотропного циліндра з неоднорідним трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини для дослідження еволюції накопичення пошкоджень у керамічних покриттях циліндричних елементів конструкцій.

- Розроблено напіваналітичні підходи для дослідження процесу накопичення пошкоджень у елементах конструкцій з керамічними тонкими шаруватими і товстими неоднорідними покриттями за впливу теплових навантажень із загальною обчислювальною схемою у вигляді ітераційної процедури визначення параметрів еволюції пошкоджень, яка використовує аналітичний розв'язок відповідної проміжної граничної задачі термопружності на кожному ітераційному кроці.

Для випадку неоднорідних тонких багат шарових керамічних покриттів процедуру розв'язування спрощено завдяки використанню математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження підкладки зі середовищем через покриття.

Для покриттів довільної товщини застосовано підхід, який базується на зведенні вихідної задачі термопружності до системи інтегральних рівнянь.

- На основі принципу суперпозиції розроблено методику дослідження впливу на термонапружений стан системи півпростір–багат шарове покриття трансверсальної тріщини під покриттям за нестационарного теплового навантаження. Розподіли температури та відповідних термонапружень для системи без тріщини отримано в замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття. Задачу з тріщиною сформульовано як збурену змішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини компенсує температурні напруження, визначені із задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язується чисельно.

Із проведеного дослідження можна зробити такі висновки:

- Методологія розв'язування задач термомеханіки тіл з тонкими багат шаровими покриттями, яка ґрунтується на використанні узагальнених граничних умов, має такі переваги:
 - 1) дає змогу суттєво спростити обчислення і зменшити затрати обчислювального часу;
 - 2) уможливорює отримання відносно простих аналітичних розв'язків практично важливих задач, які надають апіорну оцінку термонапруженого стану без громіздких обчислень;
 - 3) підвищує ефективність визначення термомеханічних полів зі зменшенням товщини покриття порівняно з прямими методами, застосування яких у цьому випадку є ускладненим.

- Встановлено, що визначальними параметрами впливу на розподіл температури та напружень в тілі є ефективні теплофізичні характеристики покриття – приведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття, швидкість зміни температури зовнішнього середовища, а у випадку термоциклічного навантаження – зміни тривалості циклу та моментів перемикання періодів у межах одного циклу.
- Виявлено область зміни коефіцієнта теплообміну, в межах якої вплив променевої складової на термонапружений стан системи півпростір–двошарове зносостійке покриття несуттєвий.
- Встановлено, що знак усталених напружень в шарах покриття при тепловому навантаженні визначається різницею коефіцієнтів лінійного температурного розширення підкладки та шарів, а їх абсолютні значення для покриттів малої жорсткості суттєво перевищують відповідні напруження в підкладці.
- З’ясовано умови виникнення небезпечних напружень відриву при тепловому навантаженні циліндра з багатошаровим покриттям та визначено їх залежність від ефективних теплофізичних властивостей покриття.
- Виявлено особливості процесу еволюції пошкоджень, які визначаються неоднорідністю властивостей та товщиною керамічних покриттів, зокрема:
 - вплив проміжкового шару на еволюцію пошкоджень нехтувально малий;
 - суттєва різниця в процесах еволюції пошкодження спостерігається в різних шарах навіть для тонких багатошарових покриттів;
 - на відміну від одношарового, незалежно від типу початкового розподілу пошкоджень, у випадку багатошарового покриття пошкодження є кусково-неперервною, немонотонною функцією, хоча в межах окремого шару – неперервною і монотонною функцією;
 - перехід до макроскопічного руйнування для випадку багатошарових покриттів визначається не лише найвищим локальним рівнем початкової пористості, на відміну від ситуації для тонкого одношарового покриття;
 - у випадку товстих покриттів, на відміну від тонких, нерівномірний розподіл початкової пористості не завжди є небезпечнішим за рівномірний щодо можливості ініціювання тріщин;
 - розподіл пошкоджень, викликаний нагрівом, відхиляється від початкового суттєвіше зі збільшенням товщини покриття.
- Для системи тіло–покриття з внутрішньою тріщиною, перпендикулярною до поверхні поділу, оцінено вплив різних геометричних і термомеханічних параметрів системи на термонапруження та коефіцієнти інтенсивності термічних напружень. Зокрема виявлено, що збільшення товщини покриття та довжини тріщини, а також зменшення коефіцієнта теплообміну з поверхні покриття, приводить до зменшення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Прикладне значення отриманих наукових результатів визначається можливістю використання розробленої методики дослідження задач термомеханіки тіл з покриттями з метою виявлення якісних та кількісних особливостей впливу геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність конструктивних елементів з неоднорідними покриттями.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у фахових виданнях України

1. Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие. *Математические методы и физико-механические поля*. 1995. Вып. 38. С. 116-120.
 The same: Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin covering. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 81. No. 6. P. 3099-3102.
2. Шевчук В.А. Одновимірні задачі пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 4. С. 104-112.
3. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багат шаровими покриттями. *Машинознавство*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41.
4. Шевчук В.А., Калиняк Б.М. Напружений стан циліндричних тіл з багат шаровими неоднорідними покриттями. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35-41.
 The same: Shevchuk V.A., Kalynyak B.M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746-755.
5. Шевчук В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття. *Доповіді НАН України*. 2011. № 7. С.76–82.
6. Шевчук В.А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багат шаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54. № 2. С.179–185.
 The same: Shevchuk V.A. Nonstationary one-dimensional problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 184. No. 2. P. 215-223.
7. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка*. 2011. Т. 19. № 5. Вип. 15, т. 1. С. 129–139.
8. Шевчук В.А. Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багат шаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2012. Вип. 10. С. 159-167.
9. Шевчук В.А. Задача термопружності для півпростору з багат шаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2013. Вип. 11. С. 157-163.

10. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 4. С. 90-97.
 The same: Shevchuk V.A., Havrys' O. P. Choice of the iterative method for the solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction for a half space in the course of radiative cooling. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. No. 2. P. 226-234.
11. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Вип. 20. С. 229-240.
12. Шевчук В.А. Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестационарного нагріву. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 181-190.
 The same: Shevchuk V.A. Heat conduction in plates with thin two-sided multilayer coatings under the conditions of nonstationary heating. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223. No. 2. P. 184-197.
13. Шевчук В.А. Термонапружений стан пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестационарного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С. 113-122.
14. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір-багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 130-140.
15. Шевчук В.А. Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2017. Т. 60. № 2. С. 117-129.
 The same: Shevchuk V.A. Problem of thermoelasticity for a cylinder with thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 243. No. 1. P. 145-161.
16. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2017. Вип. 15. С. 171-179.
17. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. Том 62. № 2. С. 82-97.

Статті у закордонних виданнях

18. Shevchuk V.A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *Lecture Notes in Computer Sciences*. 2002. Vol. 2330. P. 500-509.
19. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. No. 16-17. P. 4738-4757.
20. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system "body-multilayer coating". *Heat Transfer Research*. 2006. Vol. 37. No. 5. P. 412-423.
21. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *Materials Science and Engineering A*. 2006. Vol. 426. No. 1-2. P. 121-127.
22. Шевчук В.А. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием. *Инженерно-физический журнал*. 2013. Т. 86. № 2. С. 423–431.
 The same: Shevchuk V.A. Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2013. Vol. 86. No. 2. P. 450–459.
23. Shevchuk V.A. Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*. 2017. Vol. 40. No. 10. P. 1215-1230.
24. Шевчук В.А., Гаврись А.П. Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды. *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 6. С. 1543-1551.
 The same: Shevchuk V.A., Gavrys A.P. Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020. Vol. 93. No. 6. P. 1489–1457.

Статті, які додатково відображають зміст дисертації

25. Шевчук В.А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями. *Проблемы прочности*. 2000. №1. С. 136-150.
 The same: Shevchuk V.A. Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings. *Strength of Materials*. 2000. Vol. 32. No 1. P. 92-102.
26. Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R.B. Hetnarski. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer. 2014. Vol. 4. P. 1942–1953.

Праці апробаційного характеру

27. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови механічного спряження тіла із середовищем через тонке багатопшарове тонке покриття. *IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур*: тези доповідей (Тернопіль, 19-22 вересня 1995 р.). Тернопіль, 1995. С. 171.
28. Шевчук В. Наближений підхід до розв'язування задач теорії пружності для тіл з багатопшаровими покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-28 травня 1998 р.). Львів, 1998. С. 137-138.

29. Shevchuk V. Approximate calculation of stresses in solids with thin multilayer coatings. *The Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics : Book of Abstracts* (Edinburgh, Scotland, 5-9 July 1999). Edinburgh, 1999. P. 309.
30. Shevchuk V.A. Effective boundary conditions incorporating the influence of a thin multilayer coating upon the mechanical state of bodies. *4th Euromech Solid Mechanics Conference : Book of Abstracts II* (Mets, France, 26-30 June 2000). Mets: University of Mets, 2000. P. 261.
31. Шевчук В.А. Застосування узагальнених граничних умов до розв'язку статичних задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Український математичний конгрес-2001. Секція 8: Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки : тези доповідей* (Київ, 21-23 серпня 2001 р.). Київ, 2001. С 53.
32. Shevchuk V.A. Procedure of calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *VIII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» : тези доповідей* (Львів, 25-27 вересня 2001 р.). Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. С. 73-74.
33. Шевчук В.А. Розрахунок теплового стану тіл з багатошаровими покриттями. *Наукові читання, присвячені пам'яті академіка Я.С. Підстригача* (Львів, 23-24 травня 2002 р.). Львів, 2002. С. 18.
34. Shevchuk V. Approximate calculation of thermal stresses in solids with thin multilayer coatings. *Fifth World Congress on Computational Mechanics : Book of Abstracts* (Vienna, Austria, 7-12 July 2002). Vienna: Vienna University of Technology, 2002. Volume II. P. 135.
35. Шевчук В. Визначення термонапруженого стану в тілах з тонкими багатошаровими покриттями. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур : матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф.* (Львів, 26-29 травня 2003 р.). Львів, 2003. С. 169-170.
36. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analytico-numerical approach to evaluation of damage of ceramic coatings under heating. *Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics* (TS2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, Virginia). Blacksburg, 2003. Vol. 1. pp. MA-6-2-1-4.
37. Шевчук В. А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе теломногослойное покрытие. *Материалы 5-го Международного форума по теплообмену* (Минск, Беларусь, 24-28 мая 2004 г.). Минск: CD-ROM. Стаття №3-36. 10с.
38. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thin multi-layer coatings under thermal loading. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (TS2005, Vienna, Austria, 26-29 May 2005). Vienna: Vienna University of Technology, 2005. Vol. 1. P. 313-316.
39. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Computational analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *EUROMECH Colloquium 466 Computational and Experimental Mechanics of Materials : Book of Abstracts* (Loughborough, UK, 20-22 July 2005). Loughborough: Loughborough University, 2005. P. 12.

40. Шевчук В. Розв'язування одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних циліндричних тіл. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. Т. 1. С. 121-123.
41. Shevchuk V.A. Determining mechanical state of the body – multilayer coating system. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2006. Vol. 6. No. 1. P. 267-268.
42. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses* (TS 2007, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007). Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. Vol. 2. P. 549–552.
43. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів, 2008. Т. 1. С. 244-245.
44. Гаврись О., Шевчук В., Шевчук П. Математичне моделювання радіаційно-конвективного теплообміну при високотемпературному нанесенні на тіло багат шарових покриттів. *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* / Під заг. ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 258-259.
45. Shevchuk V.A. Analytical-numerical treatment of elasticity and thermoelasticity problems for nonhomogeneous orthotropic cylindrical bodies. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2009. Vol. 9. No. 1. P. 649-650.
46. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Узагальнені граничні умови променево-конвективної взаємодії системи тіло-багат шарове покриття з робочим середовищем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. С. 305–307.
47. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими покрытиями. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу*: матеріали III міжнародної наукової конференції (Дніпропетровськ, 4-6 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 93–95.
48. Shevchuk V.A. Approximate analytical solution to one-dimensional heat conduction problem for cylinder with thin multilayer coating. *Proceedings of The 9th International Congress on Thermal Stresses* (Budapest, Hungary, 5-9 June 2011). Budapest: Hungary University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences. On CD-ROM. 4p.
49. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Методика розв'язання нелінійної задачі теплопровідності радіаційної взаємодії півпростору з довкіллям. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 185-187.

50. Шевчук В. Вплив нестационарного нагрівання на температурне поле пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О.І. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 171-173.
51. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Визначення температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : наукові праці IX міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 173-175.
52. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку термонапруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 269-270. URL: www.iarpm.lviv.ua/MPT2016.
53. Шевчук В. Аналітико-числова процедура розрахунку накопичення пошкоджень в керамічних покриттях за теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 284-285. URL: www.iarpm.lviv.ua/MPT2016.
54. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження термонапруженого стану системи півпростір-багатошарове покриття за променево-конвективного теплообміну. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 246-247. URL: www.iarpm.lviv.ua/MPT2016.
55. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за циклічної зміни температури довкілля. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. А.М. Самойленка, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 214-215. URL: www.iarpm.lviv.ua/mpmm2018.
56. Шевчук В., Гаврись О. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за термоциклічної обробки. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Г.С. Кіта. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2019. Вип. 5. С. 129-130.
57. Shevchuk V., Havrys O., Tokovyy Yu., Gao C.-F. Thermocyclic loading of a half-space with a multilayer coating under piecewise-uniform variation of the ambient temperature. *Proceedings of 12th International Congress on Thermal Stresses (TS 2019, Hangzhou, China, 1–5 June 2019)*. Hangzhou: Zhejiang University, 2019. P. 300–303.

Анотація. Шевчук В.А. Математичні моделі та методи термомеханіки тіл з покриттями. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2021.

В дисертації побудовано математичні моделі та розроблено ефективні методи розрахунку і дослідження термонапруженого стану тіл з покриттями за силового та теплового навантаження.

Розвинуто методологію розв’язування задач термомеханіки тіл з тонкими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні впливу таких покриттів узагальненими граничними умовами.

Сформульовано відповідні неklasичні лінійні та нелінійні крайові задачі та отримано розв’язки низки нових задач термопружності для тіл з багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні.

Розроблено методику розв’язування задач пружності та термопружності для циліндричних тіл з трансверсально ізотропними неоднорідними покриттями, яку застосовано до дослідження процесу накопичення пошкоджень у керамічних покриттях довільної товщини.

Ключові слова: теплопровідність, термопружність, термомеханіка, багатошарові покриття, керамічні покриття, узагальнені граничні умови, променево-конвективний теплообмін, накопичення пошкоджень, метод квазілінеаризації, інтегральне рівняння.

Аннотация. Шевчук В.А. Математические модели и методы термомеханики тел с покрытиями. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт прикладных проблем механики и математики имени Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2021.

В диссертации построены математические модели и разработаны эффективные методы расчета и исследования термонапряженного состояния тел с покрытиями при силовом и тепловом нагружении.

Предложена методология решения задач термомеханики тел с тонкими покрытиями, основанная на моделировании влияния таких покрытий обобщенными граничными условиями.

Сформулированы соответствующие неклассические линейные и нелинейные краевые задачи и получены решения ряда новых задач термоупругости для тел с многослойными тонкими покрытиями при тепловой нагрузке.

Разработана методика решения задач упругости и термоупругости для цилиндрических тел с трансверсально изотропными неоднородными покрытиями, которая применена к исследованию процесса накопления повреждений в керамических покрытиях произвольной толщины.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, термомеханика, многослойные покрытия, керамические покрытия, обобщенные граничные условия, лучисто-конвективный теплообмен, накопление повреждений, метод квазилинеаризации, интегральное уравнение.

Abstract. Shevchuk V.A. Mathematical models and methods of thermomechanics of bodies with coatings. – Manuscript.

Thesis for a degree of Doctor in Physics and Mathematics. Speciality 01.02.04 “Mechanics of Deformable Solid”. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2021.

The thesis focuses on the development of adequate mathematical models and elaboration of effective methods of calculation and investigation of thermal stressed state of bodies with coatings under mechanical and thermal loading.

The methodology for solving problems of thermomechanics of bodies with thin coatings is developed, which is based on the simulation of such coatings by shells with the corresponding thermomechanical properties of the coating. Within this approach, the influence of the coating on the thermal and mechanical state of the entire body-coating system is described by special generalized boundary conditions (GBCs).

For the problem of heat conduction, an approach to the construction of generalized boundary conditions of the radiation-convection heat exchange of bodies with the ambient medium via a thin nonplanar coating is suggested, which is based on the use of an exact equation of heat conduction in a coating and the expansion of the temperature function over the thickness of the coating in the power series. This approach gives a possibility to obtain the computational variants of GBCs with different accuracy.

A comparison with the boundary conditions, known in the literature, has shown that they are partial modifications of the derived computation variants of GBCs.

By the example of the test problem of convective heating of a cylinder with a coating, those cases when it is important to keep additional terms of higher order in the computational variants of the GBCs are illustrated.

The derivation of GBCs of the mechanical conjugation of a body with an ambient medium is carried out for two cases – isotropic and transversally isotropic coatings using the equations of the theory of thermoelasticity of thin shells.

A simplified version of the GBCs is also written for the case of the absence of bending strains and twisting of the body-coating interface, which contains only the components of the stress tensor.

Thus, the technique of the solving the heat conduction problem in thin-coated bodies consists of two stages:

- 1) solving a non-classical boundary-value problem of heat conduction for a body with a generalized boundary condition;
- 2) finding the temperature field in the coating according to the recovery formula in terms of boundary values of temperature and its derivative in a body.

Accordingly, further determination of the thermal stress state of the body-coating system consists of two stages:

- 1) solving the non-classical boundary-value problem of thermoelasticity for a body using generalized boundary conditions;
- 2) finding thermal stresses in the coating by the recovery formulas in terms of boundary values of stress tensor and vector displacements components (in the case of absence of bending strains and twisting of the body-coating interface – only stresses).

The corresponding non-classical boundary value problems are formulated, and a number of new thermoelasticity problems for bodies with multilayer thin coatings under thermal load are obtained. The influence of thermophysical and thermomechanical characteristics of the system and the conditions of interaction with the ambient medium on the distribution of temperature and stresses is studied.

With the use of the integral Laplace transform and the quasilinearization method, an analytical-numerical method for solving a non-stationary thermoelastic problem for bodies with coatings with a nonlinear GBC of radiation-convection heat transfer is elaborated.

The direct integration method of differential equilibrium and compatibility equations in terms of stresses to one-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for cylindrical bodies with nonhomogeneous transversally isotropic coatings is developed. Original problems have been reduced to integral equations, which are solved by the method of successive approximations.

An effective semi-analytical approach for investigating the process of damage evolution in brittle thin multilayer and thick single-layer coatings under influence of thermal loads has been developed. It is based on a general computational scheme to determine damage evolution parameters, which incorporates an analytical solution of the appropriate interim boundary-value thermoelasticity problem. For thin multilayer coatings, the simplification in the analysis is achieved by applying a mathematical model with GBCs of the thermomechanical conjugation of the substrate with the ambient medium via the coating, and for the coatings with arbitrary thickness, the study is based on the application of the approach with the reduction of the original problem of thermoelasticity to the system of equivalent integral equations. The approach is tested by the examples of uniform heating of a thin model three-layer coating on a titanium alloy substrate and a single-layer coating of aluminum oxide on the titanium-alloy and tungsten substrates.

The transient thermoelasticity problem for a half-space with a multilayer coating under thermal surface loading containing an undercoat crack, perpendicular to the interface, is considered. The problem is solved using the principle of superposition. Transient temperature distribution and corresponding thermal stresses for the uncracked multilayer assembly are obtained in a closed analytical form using the model with GBC of heat exchange of a half-space with ambient media via the coating. The crack problem is formulated as a perturbation mixed boundary value problem, in which the crack surface loading should be equal and opposite to the thermal stresses obtained for the uncracked medium, and is reduced to a singular integral equation which is solved numerically. Numerical computations are performed for the analysis of influence of the coating upon thermal stresses and thermal stress intensity factors.

Keywords: heat conduction, thermal elasticity, thermomechanics, multilayer coatings, ceramic coatings, generalized boundary conditions, radiation-convection heat exchange, damage evolution, quasilinearization method, integral equation.