

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

**СТАСЮК**  
Богдан Мирославович



УДК 539.3

**ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ  
ТРИВИМІРНИХ КОМПЗИТНИХ СТРУКТУР З НЕКАНОНІЧНИМИ  
ВКЛЮЧЕННЯМИ ТА ДЕФЕКТАМИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**РЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико–математичних наук

Львів – 2024

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України та Національному університеті «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант** – доктор фізико-математичних наук, професор **Михаськів Віктор Володимирович**, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, головний науковий співробітник відділу обчислювальної механіки деформівних систем.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, **Богданов Вячеслав Леонідович**, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка Національної академії наук України, завідувач відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ;

доктор фізико-математичних наук, професор **Дияк Іван Іванович**, Львівський національний університет ім. Івана Франка, декан факультету прикладної математики та інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор **Піскозуб Йосиф Збігнєвич**, Українська академія друкарства, завідувач кафедри прикладної математики і фізики.

Захист відбудеться “28” червня 2024 року о “15<sup>00</sup>” годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б та на Інтернет сторінці ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України <http://iapmm.lviv.ua/zakhyst.html>.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01,  
доктор технічних наук, професор



Михайло АНДРІЙЧУК

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Прогрес у авіа- ракето- та автомобілебудуванні, цивільному будівництві, медичній інженерії, електронній техніці, комунікаційному та енергетичному обладнанні здебільшого забезпечується застосуванням у них композитних матеріалів, зокрема пружних із зернистою структурою від наповнення просторовими включеннями. Внаслідок порівняної легкості виготовлення технологіями тривимірного друкування широкого впровадження у цих галузях набули коротковолокнисті композити, окремий інтерес у ролі скріплювальних покриттів та плівок становлять також композити з нанорозмірними включеннями. Стосовно механічних властивостей, то такі матеріали вирізняються високою міцністю за збереження легкості конструкцій, деформаційною адаптацією до різнотипних навантажень, опірністю до руйнування і корозії. Це досягається специфічним перенесенням та перерозподілом переміщень і напружень через поверхні поділу матеріалів у неоднорідній системі, а також взаємодією включень як її елементів. До основних факторів впливу на механічну поведінку композитів належать матеріальний контраст їх складових, форма, взаємне розташування та концентрація у них включень, а також якість міжфазних поверхонь. Важливим також є врахування у композитах можливих на стадіях їх виготовлення, обробки та експлуатації дефектів структури у вигляді внутрішніх тріщин та недосконалого контакту компонент. Тому актуальною є розробка фундаментальних теорій і ефективних методів такого дослідження у всій різноманітності та для маніпуляції цих проявів як на рівні локальних пружних полів, так і макромеханічних характеристик. До пріоритетів слід віднести придатність інструментарію до аналізу тривимірних задач з об'ємистими включеннями складної форми та за різних умов їх з'єднання з матричним середовищем, залучення в розрахунок моделей тонкостінних включень і тріщин, а також матеріалізованих поверхонь нановключень.

Більшість відомих теоретичних результатів щодо реакції композитних матеріалів на механічне навантаження та їх ефективних властивостей отримано аналітично за припущення присутності в них тунельних (двовимірні задачі) і еліпсоїдальних (тривимірні задачі) включень. Сучасний запит на числові методи розв'язання відповідних задач диктується можливістю їх застосування для тривимірних конфігурацій із включеннями загальної форми, зокрема для розгляду практично затребуваних композитів, армованих скінченними прямолінійними та викривленими циліндричними волокнами, та композитів з тонкостінними включеннями. Ці методи пристосовані також до передбачення стрибків міжфазних переміщень і напружень у композитах для моделювання контактних недосконалостей, наприклад внаслідок проковзування, присутності тонких міжфазних прошарків адгезивного походження чи характерних для нанорівня міжфазних поверхонь з власною пружністю. У цьому відношенні метод граничних елементів займає особливе місце завдяки необхідності дискретизації лише поверхневих характеристик та безпосередньому розрахунку через них внутрішніх полів, зокрема коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тонкостінних неоднорідностей та тріщин, а також можливості введення у гомогенізаційні співвідношення для ефективних параметрів композиту як репрезентативних розв'язків задач для безмежної пружної матриці з включенням.

Для практики важливо забезпечити комплексність числового дослідження з виявленням механізмів трансферу переміщень і зусиль у тривимірних композитних тілах з неканонічними як за формою, так і контактом з оточенням включеннями, зон концентрації у них напружень, ефектів взаємодії множинних включень та тріщин, нано-ефектів розмірозалежності, властивостей макроскопічної анізотропії-ізотропії композитів на широкому спектрі вхідних даних щодо їх геометричних, матеріальних та структурних особливостей.

З точки зору внутрішнього розвитку методу граничних елементів для механіки композитів актуальним є його наповнення обчислювальними алгоритмами високої ефективності та точності. Це передбачає зменшення розмірностей та розщеплення систем розрахункових рівнянь завдяки безпосередньому врахуванню у них контактних співвідношень та наближенню взаємодії включень в окремих випадках їх одностороннім впливом, регуляризації сингулярних ядер інтегральних рівнянь для можливості числового інтегрування квадратурами та отриманню добре обумовлених дискретних аналогів у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь з домінуючими діагональними елементами, використанню адаптованих до геометрії включень граничноелементних сіток та інтерполяційних функцій форми. В аспекті верифікації результатів доцільний вибір прикладів, які уможлиблювали б перевірку не тільки засобами числового, а й проведенням натурного експериментів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами.** Дослідження за темою дисертації виконані в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України: «Дослідження методом інтегральних рівнянь статичного і динамічного напруженого стану композитних структур з тріщинами та контактними неоднорідностями» (№ держреєстрації 0106U000449, 2006–2009 рр.), «Дослідження локальних та глобальних (ефективних) динамічних і термічних параметрів пружних матричних композитів методами граничних інтегральних рівнянь і нульового поля» (№ держреєстрації 0109U008763, 2010–2013 рр.), «Розвиток методів граничних інтегральних рівнянь та нульового поля стосовно статичної і динамічної взаємодії включень у пружних, термо- та електропружних тілах» (№ держреєстрації 0113U007683, 2014–2018 рр.), «Аналітично-числові методи для дослідження статичних і хвильових пружних полів у періодично- та наноструктурованих композитних середовищах» (№ держреєстрації 0119U100668, 2019–2023 рр.) та тем Національного університету «Львівська політехніка»: «Розроблення методів статичного і динамічного розрахунку елементів конструкцій з концентраторами напружень» (ДБ/СДР) (№ держреєстрації 0109U001158, 2009–2011 рр.), «Розроблення методів аналізу пружно-пластичного деформування і оцінки міцності магістральних трубопроводів з урахуванням наявності дефектів матеріалу» (ДБ/ІДЕЯ) (№ держреєстрації 0113U001349, 2013–2014 рр.), «Розроблення методик визначення несучої здатності та деформативності з/б конструкцій зміцнених новітніми матеріалами за дії навантаження» (ДБ/ЛКП) (№ держреєстрації 00115U000436, 2015–2016 рр.). Автор – виконавець та відповідальний виконавець тем.

Частина наукових результатів отримано під час реалізації Міжнародних наукових проектів "Мікромеханіка підкріплених волокнами обмежених та необмежених твердих тіл: ефективні локальні та нелокальні термопружні властивості, концентрація

напружень та крайові ефекти" (№ Р 110, 2003-2005 рр.) за програмою партнерських досліджень Українського науково-технологічного центру (УНТЦ) та "Об'єктно-орієнтовані розрахункові моделі і програмні засоби для ефективного прогнозування пружних і фононних властивостей тривимірних нанокompозитів і метаматеріалів" (№ 6247, 2017–2019) за спільною програмою розвиваючих ініціатив НАН України та УНТЦ, в яких автор був відповідальним виконавцем.

**Метою дисертаційної роботи є:** отримання інтегральних формулювань та розробка розрахункових алгоритмів методу граничних елементів для числового дослідження тривимірного напружено-деформованого стану необмежених і обмежених композитних тіл та ефективних пружних властивостей композитних середовищ з включеннями загальної форми за ідеального і неідеального їх контакту з матрицею та з урахуванням взаємодії між собою і внутрішніми тріщинами; реалізація гранично-елементних схем обчислень стосовно включень у вигляді скінченних прямолінійних і викривлених циліндричних волокон, міжфазних умов ковзного, через проміжковий тонкий шар та наділену на нанорівні власною пружністю та натягом поверхню контакту, моделей кругових тонкостінних включень і тріщин; визначення розподілів і концентрації пружних полів та ефективних модулів пружності для неklasичних за формою наповнювачів та присутністю контактних недосконалостей і внутрішніх дефектів композитних структур.

Досягнення мети роботи передбачає:

- використання прийому підобластей за неявного урахування умов спряження для інтегральних подань розв'язків та виведення граничних інтегральних рівнянь стосовно міжфазних переміщень та зусиль тривимірних задач теорії пружності для безмежної матриці з ідеально сконтактованим об'ємистим включенням;
- розробку адаптованих до числового розрахунку процедур дискретизації отриманих інтегральних рівнянь на сітках ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів на основі додискретизаційної регуляризації сингулярних та післядискретизаційної регуляризації слабосингулярних ядер рівнянь;
- запровадження техніки граничних елементів щодо тривимірних задач взаємодії об'ємистих та тонкостінних включень і тріщин у необмеженій матриці та з поверхнею обмеженого тіла, які характеризуються системами граничних інтегральних рівнянь дуального типу (у переміщеннях і напруженнях);
- залучення ітерацій одностороннього впливу для гранично-елементного аналізу тривимірної взаємодії множинних тонкостінних включень і тріщин;
- гранично-елементну апроксимацію розв'язків рівнянь у локальних системах координат для опису неідеального контакту між об'ємистим включенням і матрицею внаслідок проковзування чи тонкого прошарку;
- поєднання гранично-елементних наближень із скінченно-різницевиими для врахування нанорівневих співвідношень деформування матеріалізованої міжфазної поверхні;
- введення граничноелементних розв'язків у моделі гомогенізації тривимірних пружних композитів із розподіленими волокнистими включеннями та узагальнення підходу на моделі, які допускають стрибки переміщень або напружень на

міжфазних поверхнях композиту (нанокомпозиту);

- числовий розрахунок, верифікацію (шляхом співставлення з окремими відомими аналітичними та скінченноелементними розв'язками, а також даними проведеного натурального експерименту), та аналіз переміщень, напружень і ефективних модулів пружності тривимірних композитних тіл та середовищ у залежності від геометричної форми та розміру включень (нановключень), взаємного розташування включень, тріщин та зовнішніх поверхонь, умов контакту включень з матрицею, комбінації матеріалів у системі та показника об'ємної фракції розподілених наповнювачів.

**Об'єкт дослідження:** тривимірні пружні композити з поодинокими, множинними і розподіленими включеннями загальної форми за досконалого та недосконалого контакту з матричним середовищем та з урахуванням матричних і волоконних тріщин.

**Предмет дослідження:** напружено-деформований стан і ефективні пружні властивості композитних тіл та середовищ з неканонічними включеннями і дефектами структури та гранично-елементні схеми їх аналітично-числового визначення.

**Методи досліджень.** У дисертаційній роботі гранично-інтегральне формулювання тривимірних задач теорії пружності для композитних тіл досягається використанням методу підобластей, функціоналу теореми про взаємність робіт та фундаментальних розв'язків теорії пружності. Регуляризація присутніх сингулярних інтегралів забезпечується способом виокремлення особливостей та залученням спеціальних відображень з регуляризуючими якобіанами. З метою редукції та розщеплення розрахункових рівнянь задіяно прийом неявного врахування контактних умов та ітераційні процедури опису взаємодії компонент. Побудова дискретних аналогів інтегральних рівнянь базувалась на схемах граничноелементних три- та квадрангуляцій міжфазних поверхонь та застосуванні методу колокацій. Врахування масштабних ефектів під час числового дослідження полів напружень в околі нанорозмірних неоднорідностей здійснювалося в рамках теорії матеріалізованої поверхні Підстригача–Повстенка–Гуртіна–Мердока та на основі наведених у літературі експериментальних даних щодо поверхневих модулів пружності та натягу у типових наноматеріалах. Опис ефективних механічних властивостей композитних середовищ реалізовано методом гомогенізації за алгоритмом Морі-Танаки та на основі його узагальнення на структуру з недосконалим контактом компонент.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у:

- розробленні граничноелементних алгоритмів числового дослідження тривимірного напружено-деформованого стану композитних тіл і ефективних модулів пружності композитних середовищ з об'ємистими, тонкостінними і нанорозмірними включеннями та впливу на механічні властивості таких структур взаємодії включень, внутрішніх тріщин і недосконалостей міжфазного контакту;
- отриманні граничних інтегральних рівнянь із повним задоволенням у них умов досконалого, ковзного та адгезивного (через прошарок) механічного контакту складових для тривимірних пружних систем «об'ємисте включення –матриця»;
- отриманні граничних інтегральних рівнянь із задоволенням у них умов неперервної передачі зусиль через матеріалізовану міжфазну поверхню та їх замиканні дифере-

нціальними рівняннями деформування цієї поверхні для тривимірної пружної системи «нанорозмірне об'ємисте включення – матриця»;

- розробці граничноелементних схем регуляризації та дискретизації рівнянь через використання спеціальних відображень просторових ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів покриття міжфазної поверхні композитного тіла;
- поширенні граничноелементної дискретизації на системи дуальних граничних інтегральних рівнянь, якими описано тривимірну взаємодію об'ємистих та тонкостінних включень і тріщин у пружній матриці, а також з просторовою поверхнею композитного тіла;
- залученні ефективних полів для ітераційного врахування граничноелементними розв'язками взаємодії у множинних системах включень і тріщин;
- поєднанні методів граничних елементів і гомогенізації за алгоритмом Морі-Танаки та узагальненої гомогенізації (з допущенням розривів міжфазних переміщень або зусиль) у числовому дослідженні ефективних пружних властивостей композитів з розподіленими скінченними волокнами однакової та випадкової орієнтацій за їх ідеального та неідеального контакту з матричним середовищем;
- граничноелементному аналізі тривимірних переміщень, напружень і ефективних модулів пружності для композитних тіл і середовищ з поодинокими, множинними і розподіленими включеннями неканонічної форми, тонкими прошарками і матеріалізованими поверхнями поділу складових, матричними і волоконними тріщинними дефектами та виявленні ефектів концентрації пружних полів, макромеханічної ізотропії і анізотропії та нанорівневих ефектів розмірозалежності.

**Достовірність одержаних результатів** забезпечується застосуванням класичних моделей механіки деформівного твердого тіла; коректною математичною постановкою задач та використанням обґрунтованих методів їх розв'язання; оперуванням класом функцій та поверхонь, властивості яких регламентують межові значення в інтегральних поданнях полів за допомогою статичних потенціалів; узгодженням отриманих інтегральних формулювань за граничних переходів у контактних умовах та зведенням цих формулювань до відомих стосовно окремих задач, зокрема за рівності коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці та включень; перевіркою збіжності числових розв'язків за згущення граничноелементних сіток; узгодженням результатів, отриманих у роботі різними граничноелементними підходами в області їх спільної застосовності, та в окремих випадках з відомими в літературі; підтвердженням результатів числового моделювання натурним експериментом.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає у їх застосовності у технологіях проектування та виготовлення, покращення експлуатаційних характеристик, подовження ресурсу виробів та конструкцій, які виготовлені з композитних матеріалів, шляхом врахування у розрахункових моделях форми та структуризації їх наповнювачів, наявності контактних недосконалостей та тонких внутрішніх концентраторів напружень та з можливістю охоплення ефектів взаємодії армуючих елементів. Запропоновані методи числової симуляції придатні до прогнозування як локальних польових розподілів від навантаження, так і ефективних пружних характеристик мультикомпонентних матеріалів на широкому спектрі вхідних даних стосовно топології і жорсткості складових, що дозволяє використання інструментарію в оптимізації

створення композитів з наперед заданими механічними властивостями. Отримані розрахункові дані стосовно впливу натягу та власної матеріальності міжфазних поверхонь на пружні властивості наноструктурованих композитів можна кваліфікувати як маркерні для інженерних задач наномеханіки.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати роботи отримані автором самостійно. Результати, опубліковані у роботах [3, 5, 6, 9, 12-16, 19-24, 28, 29, 31-33, 35], отримані самостійно. У всіх працях, опублікованих у співавторстві, автору належать розвиток і реалізація підходів до розв'язання поставлених задач, інтерпретація отриманих результатів. Зокрема, у роботах [1, 2, 4, 8, 10, 26] автор брав участь у математичному моделюванні об'єкту досліджень та розробці методики числового моделювання. У статтях [7, 11, 17] автору належить числова реалізація моделей та участь в інтерпретації отриманих результатів. В роботах [18, 25, 27, 30, 34] автору належить ідея дослідження і її числова реалізація.

**Апробація результатів роботи.** Результати досліджень доповідались і обговорювались на: Міжнародній науковій школі «13th Summer School on Fracture Mechanics» (Вроцлав, 2013); Міжнародних симпозиумах українських інженерів-механіків у Львові (2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013); міжнародних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (2008, 2010, 2012, 2014); «Second Ukrainian-Greek Symposium on Fracture Mechanics of Materials» (2011); «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (2014, 2019); «International Conference on Materials Structure & Micro-mechanics of Fracture» (Брно, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції «Нанотехнології та наноматеріали» (Київ, 2018).

У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.В. Матуса; на загальноінститутському науковому семінарі «Математичні проблеми механіки деформівного твердого тіла» Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом академіка НАН України Р.М. Кушніра; на спільному науковому семінарі відділів динаміки та стійкості суцільних середовищ, обчислювальної механіки та техніки, механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В.Л. Богданова; на об'єднаному науковому семінарі кафедр обчислювальної математики та прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом проф. Р.С. Хапка.

**Публікації.** Основні наукові результати дисертації опубліковані у 35 наукових роботах, в тому числі у 16 статтях [1-16] у журналах і збірниках, які відповідають вимогам ДАК України до фахових видань. Десять статей [1-10] прореферовані у міжнародних наукометричних базах Scopus і Web of Science. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([1] входить до квартилю Q1, [4, 10] входить до квартилю Q2, [2, 3, 5-9] входять до квартилю Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 29.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, семи



розділів, які містять 144 рисунків та 15 таблиць, висновків, списку використаних джерел із 505 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 413 сторінок. Обсяг основного тексту – 336 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі досліджень, висвітлено новизну отриманих результатів та їх практичне значення, наведено дані про апробацію отриманих результатів і публікації, що відображають основний зміст роботи.

У **першому розділі** на підставі вивчення літературних джерел описано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем. Широкий клас двовимірних задач теорії пружності для матриці з тунельними неоднорідностями розв'язано І.В. Андріановим, С. Аткинсоном, Д.В. Грілицьким, В.В. Данішевським, Г.С. Кітом, О.Ф. Кривим, Я.І. Кунцем, Р.М. Кушніром, В.В. Лободою, Р.М. Мартиняком, В.В. Матусом, Р.С. Муцієм, Я.М. Пастернаком, Й.З. Піскозубом, В.Г. Поповим, Г.Я. Поповим, М.П. Савруком, М.Г. Стащуком, О.О. Стрельніковою, Г.Т. Сулимом, Л.Ф. Фільштинським, А.С. Хачикяном, К.С. Чобаняном та іншим науковцями, здебільшого через застосування методу функцій комплексної змінної. Тривимірні задачі для тіл з об'ємистими включеннями розглядалися в роботах Б. Ванга, В.Т. Головчана, Й. Гудієра, Дж. Ешелбі, М. Качанова, С.К. Канауна, В.С. Кирилюка, В.І. Куща, О.Г. Ніколаєва, Ю.М. Подільчука, Г. Сато, Л. Сана, І. Севостьянова, Ю.В. Токового, М. Чунфанга і переважно стосувалися кульових, еліпсоїдальних і сфероїдальних включень, напружений стан всередині яких за однорідного навантаження матриці на безмежності визначається тензором Ешелбі. Отримано також аналітичні розв'язки задач взаємодії таких включень між собою та з просторовими тріщинами у вигляді мультипольних розвинень у прив'язаних до геометрії включень системах координат.

Для врахування контактування з матричним середовищем тонкостінних включень ефективним виявився підхід, який передбачає введення стрибків переміщень чи напружень на їх серединній поверхні. Задачі з такими моделями тонкостінних неоднорідностей розглянуті, зокрема, в роботах В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Л.Т. Бережницького, І.І. Дияка, Г.С. Кіта, В.В. Михаськіва, О.Б. Мовчана, Т. Мура, С.М. Мхітаряна, В.В. Панасюка, Я.М. Пастернака, Г.Я. Попова, М.П. Саврука, В.П. Силованюка, М.М. Стадника, Г.Т. Сулима, А.О. Сяського, М.В. Хая, Г.П. Черепанова.

Результати поширено також на аналітичне дослідження напружено-деформованого стану тривимірних композитних тіл з включеннями за недосконалого контакту компонент та задач стійкості волокнистих композитів. Цьому присвячено роботи В.Л. Богданова, П.А. Бовіка, А. Бьострома, Г. Вікгема, Т.А. Грея, О.М. Гузя, Ю.Д. Каплунова, В.М. Назаренка, С.І. Рохліна, Я.Я. Рушицького, М.Ф. Селіванова, Р.Б. Томпсона та ін. Врахування власної деформативності міжфазної поверхні на нанорівні здійснено в роботах Я. Бенвеністе, Ю. Ванга, М.Е. Гуртіна, Х. Дуана, А. Землянової, В.І. Куща, А.І. Мердока, В.В. Михаськіва, С.Г. Могилевської, Л.В. Назаренко, Р.В. Огдена, Я.С. Підстригача, Ю.З. Повстенка, Г.К. Столярського, Л. Хі, Ж. Хуанга, В.Б. Шеноя, Д. Штайгмена, та інших.

Аналітичні підходи до оцінки ефективних пружних властивостей зернистих композитів на основі розгляду репрезентативних елементів з наповнювачами канонічної

форми застосовано в роботах Я. Бенвеністе, Дж. Венга, М. Ву, Я. Гуанга, Дж. Дворака, К. Джанга, Ч. Донга, В.І. Куца, Р.М. Крістенсена, В.В. Михаськіва, С.Г. Могилевської, Т. Морі, Т. Мура, Л.В. Назаренко, С. Немет-Насера, Г.Т. Сулима, М.Ф. Селіванова, Я.М. Пастернака, К. Танаки, Л.П. Хорошуна, Т. Чена, Х. Шодя та інших.

Впровадження числових методів дозволяє поширити аналіз на більш загальний клас задач для композитних структур за рахунок відсутності у них обмежень на топологію складових та спосіб навантаження. У цьому напрямку відомі роботи І. Альтенбаха, Дж. Аргіроса, Р. Галлагера, О.Я. Григоренка, К. Го, В.А. Декрета, І.І. Дияка, Б.Д. Дробенка, Я.О. Жука, О. Зенкевича, Р. Клаффа, Р. Куранта, Г. Мартіна, М.В. Марчука, О.О. Стрельнікової, Г. Стренга, М. Тернера, Л. Топпа, Дж. Фікса та інших науковців з числового дослідження реакції на механічне навантаження тривимірних зернистих і коротковолокнистих композитів методом скінченних елементів. Залучення цього методу у задачах з визначення ефективних модулів пружності композитів реалізовано в роботах В.А. Буряченка, Я. Бенвеністе, С. Штрікмана, З. Хашіна, Р. Хілла. Однак його застосування щодо тривимірних конфігурацій супроводжується введенням громіздких просторових сіток розбиттів в кожній із матеріальних підобластей композитної структури, необхідністю узгодження вузлів цих сіток для врахування у розрахункових моделях умов спряження компонент на поверхнях поділу матеріалів, розглядом у композитному середовищі періодичних розподілів включень для можливості постановок крайових умов на поверхні репрезентативного елемента.

Уникнути вказаних ускладнень дозволяє зведення відповідних задач до граничних інтегральних рівнянь стосовно поверхневих переміщень і напружень у випадку об'ємистих включень або їх стрибків у випадку тонкостінних включень і тріщин та залучення для числового розв'язання граничноелементних дискретизацій. Основи такого підходу з отриманням за допомогою фундаментальних розв'язків гранично-інтегральних формулювань зовнішніх і внутрішніх задач теорії пружності викладені у фундаментальних монографіях М.Х. Аліабаді, Р. Баттерфілда, П. Бенерджі, К. Бребія, В. Сладека, Я. Сладека. Стосовно аналізу тривимірних мультикомпонентних деформівних систем, то до особливостей методу граничних елементів слід віднести його оперування розрахунковими рівняннями пониженої розмірності, загальність щодо топології наповнювачів та контактних умов, придатність до розгляду різнорідних дефектів, а також безмежних репрезентативних елементів у гомогенізаційних схемах. Однак на даний час використання можливостей методу граничних елементів обмежене в основному демонстрацією розв'язків тривимірних задач теорії тонких включень та тріщин, отриманих, наприклад, в роботах О.М. Гузя, І.О. Гузя, Ч. Жанга, Х. Домінгуша, І.І. Дияка, В.В. Зозулі, К. Лі, О.В. Меньшікова, В.В. Михаськіва, Н. Нішімури, Х. Окади, Я.М. Пастернака, В.З. Станкевича, Г.Т. Сулима, М.В. Хая.

Аналіз літературних джерел свідчить про відсутність системного, базованого на граничноелементній симуляції, числового дослідження тривимірних пружних полів у композитних тілах з взаємодіючими включеннями неканонічної форми, урахуванням різнотипних контактних недосконалостей, нанорівневих матеріалізованих міжфазних поверхонь, а також внутрішніх тріщинних дефектів. Поза увагою дослідників залишилась також розробка схем із залучення граничноелементних розв'язків до визначення ефективних властивостей композитних середовищ з розподіленими неканонічними, зокрема нанорозмірними, включеннями.

У **другому розділі** дисертації викладена загальна схема виведення, регуляризації та граничноелементної дискретизації інтегральних рівнянь тривимірних задач пружної рівноваги безмежної матриці з об'ємистим включенням загальної форми. З використанням двох видів граничноелементних сіток – ізо- та суперпараметричних – числово досліджено механізми передачі навантажень у композитних системах з включенням у формі скінченного прямолінійного та викривленого циліндричного волокон.

Розглядається обмежене гладкою поверхнею  $S$  ізотропне включення  $\Omega_2$  у пружній безмежній ізотропній матриці  $\Omega_1$  за дії на неї статичного навантаження, яке викликає у однорідному матричному матеріалі розподіл переміщень  $\mathbf{u}_0$ , що вважається відомим. Деформування складових тіла підпорядковується рівнянням Ламе

$$\frac{1}{1-2\nu_k} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad k=1,2, \quad (1)$$

де  $\mathbf{u}^{(k)}(\boldsymbol{\eta})$  ( $k=1,2$ ) – переміщення у матриці  $\Omega_1$  та включенні  $\Omega_2$ , відповідно;  $\nu_k$  – коефіцієнти Пуассона матеріалів складових тіла.

Ідеальний механічний контакт компонент забезпечено умовами спряження на поверхні  $S$  у вигляді:

$$\mathbf{u}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{u}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}), \quad \mathbf{t}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{t}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{t}(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} \in S, \quad (2)$$

де  $\mathbf{t}^{(k)}(\boldsymbol{\eta})$  ( $k=1,2$ ) – вектори напружень на площинці із зовнішньою щодо включення нормаллю  $\mathbf{n}$  до поверхні  $S$ , які пов'язані з переміщеннями  $\mathbf{u}^{(k)}$  законом Гука.

Для гранично-інтегрального формулювання задачі застосовано метод підобластей, який полягає у розділенні композитного тіла на дві підобласті по міжфазній поверхні із заміною дії вилученої фази контактними зусиллями та переміщеннями. Тоді з формул Сомільяно для зовнішньої і внутрішньої задач до поверхні  $S$  отримано інтегральні подання переміщень у кожній підобласті виразами

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})\delta_{1k} + (-1)^k \left[ \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{u}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right], \quad k=1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k. \quad (3)$$

Тут ядра  $\mathbf{U}^{(k)}$ ,  $\mathbf{T}^{(k)}$  є відомими матрицями фундаментальних розв'язків з урахуванням вибраного напрямку нормалі  $\mathbf{n}$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Тоді аналогічне інтегральне подання компонент напружень у кожній із підобластей композитного тіла через межові значення полів здійснюється підстановкою співвідношень (3) у закон Гука, що передбачає диференціювання ядер  $\mathbf{U}^{(k)}$ ,  $\mathbf{T}^{(k)}$  та введення у співвідношення для матричної області компонент напружень  $\sigma_{ij}^{(0)}$  від переміщень  $\mathbf{u}_0$ .

Шляхом граничного переходу в інтегральних поданнях переміщень (3) для обох складових композитного тіла до точок поверхні  $S$  та з урахуванням властивостей пружних потенціалів приходимо до системи двох векторних граничних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно невідомих міжфазних переміщень та зусиль у формі

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) + (-1)^k \left[ \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{u}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right] = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

$$k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

Замкнутість системи ГР (4) забезпечено неявним врахуванням у ній контактних умов (2), а її зведення до слабосингулярної форми використанням узагальненого інтеграла Гауса для моделі абсолютно жорсткого включення. Як результат, маємо

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta_{1k} - \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

$$k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (5)$$

Другий етап досягнення повної регуляризації та схема дискретизації ГР (5) передбачає покриття міжфазної поверхні  $S$  компактною сіткою трикутних шестивузлових та чотирикутних восьмивузлових просторових граничних елементів (рис. 1) та апроксимацію інтегралів по граничних елементах квадратурами. У процесі дискретизації координати точки всередині  $q$ -го елемента з кількістю кутів  $N_q$ , а також дотичні до поверхні  $S$  орти  $\mathbf{k}^{(q)}$  та  $\mathbf{h}^{(q)}$ , визначаються через координати його вузлів  $\mathbf{x}_i^{(q)}$  ( $i = \overline{1, 2N_q}$ ) та біквадратичні функції форми  $R_i^{(N_q)}$  ( $i = \overline{1, 2N_q}$ ), що відображають поверхню елемента на правильний трикутник чи квадрат. Тоді якобіан відображення просторового граничного елемента на плоску область виражається через компоненти нормалі  $\mathbf{n}^{(q)}$  до поверхні  $S$  як векторного добутку дотичних ортів. Для можливості уточнення та верифікації результатів задіяно суперпараметричні та ізопараметричні граничні елементи з використанням, відповідно, лінійних та квадратичних інтерполяційних функцій  $M_s^{(N_q)}$  наближення міжфазних переміщень  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  та зусиль  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  у межах граничного елемента. Вузли інтерполяції шуканих функцій є опорними вузлами граничного елемента.

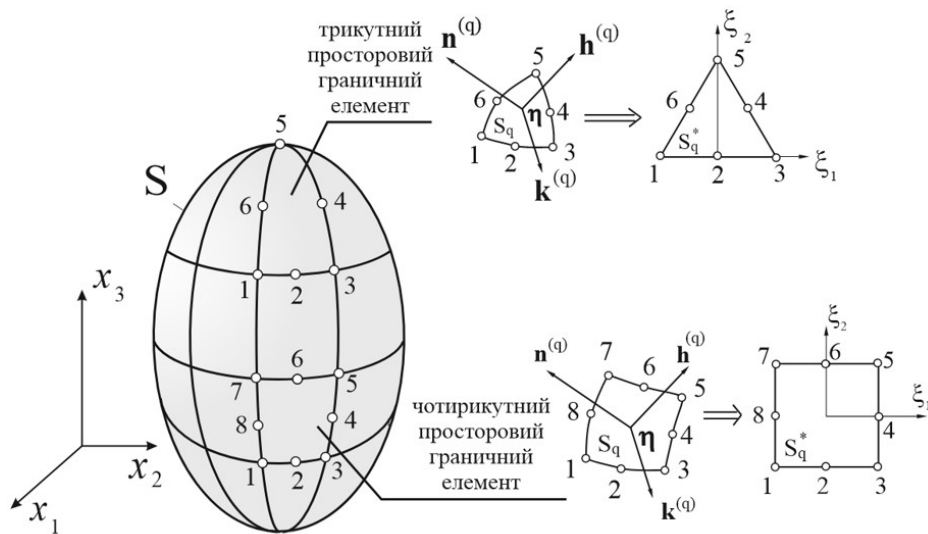


Рис. 1. Граничноелементний поділ міжфазної поверхні та переходи до плоских образів.

Для обох типів граничних елементів запропоновано спосіб усунення присутніх у ГР (5) слабких сингулярностей за збігу в опорному вузлі точки джерела  $\mathbf{x}$  і точки інтегрування  $\boldsymbol{\eta}$  на основі перетворення Лахата-Вотсона, що неафінно відображає трикутну область на квадрат. Специфіка розгляду чотирикутних суперпараметричних граничних елементів з опорними вузлами лише в кутових точках, трикутних і чотирикутних ізопараметричних з опорними точками також і на їх сторонах врахована додатковим розбиттям елементів по діагоналі у першому та на трикутні сектори у другому випадках. Зокрема, для найбільш загального варіанту додаткового розбиття граничного елемента (рис. 2) формули відображення для регуляризації якобіаном полярних особливостей мають вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(6)} &= -\frac{1}{2}(1 + \gamma_1); & \xi_2^{(6)} &= -\frac{1}{2}(1 - \gamma_1) + \frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1) \\ \xi_1^{(7)} &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_1); & \xi_2^{(7)} &= -\frac{1}{2}(1 - \gamma_1) + \frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1), \\ \xi_1^{(8)} &= -\frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1); & \xi_2^{(8)} &= \gamma_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Після описаної двокрокової (до- та післядискретизаційної) регуляризації інтегралів їх обчислення проводилось за допомогою стандартної чотириточкової квадратурної формули Гауса.

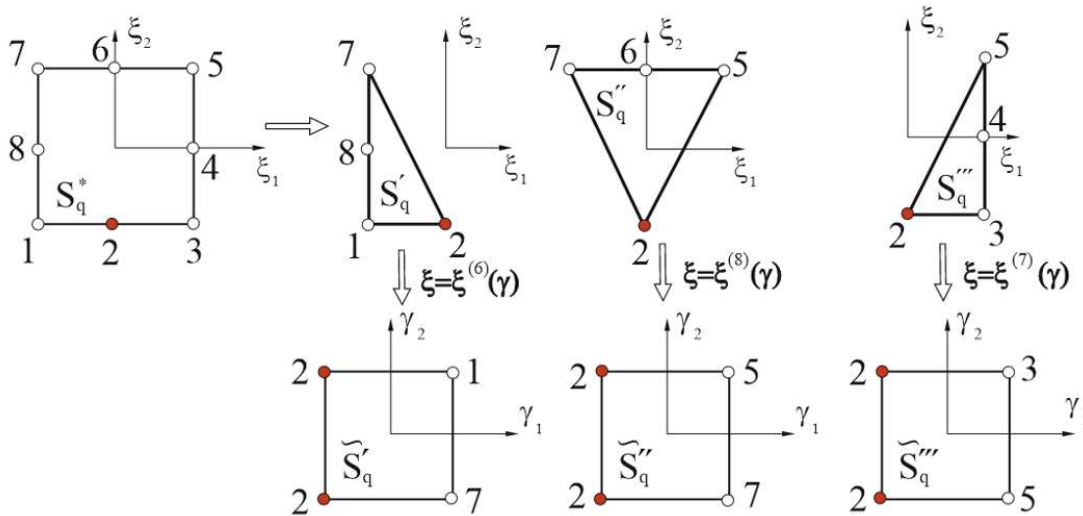


Рис. 2. Схема усунення слабкої сингулярності в парному вузлі ізопараметричного чотирикутного граничного елемента.

На основі введених апроксимацій на сітці з  $L_1$  граничних елементів та колокаційного задоволення ГР (5) у  $L_2$  опорних вузлах  $\mathbf{x}^w$  отримано дискретний аналог рівнянь відносно вузлових значень міжфазних переміщень і зусиль у вигляді такої системи  $6 \times L_2$  лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\delta_{1k} \mathbf{u}^w + \mathbf{C}^{(k)w} \mathbf{u}^w - \mathbf{A}^{(k)qsw} \mathbf{u}^{v(q,s)} + \mathbf{B}^{(k)qsw} \mathbf{t}^{v(q,s)} = \delta_{1k} \mathbf{u}_0^w, \quad k = 1, 2, \quad w = \overline{1, L_2}, \quad (7)$$

де сумування ведеться по індексах  $s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1$  для суперпараметричних або

$s = 1, 2, \dots, 2N_q$  для ізопараметричних граничних елементів та  $q = \overline{1, L_1}$ , функція  $v = v(q, s)$  визначає глобальний номер опорного вузла за номером  $q$  граничного елемента, до якого він належить, і локальним номером  $s$  опорного вузла всередині граничного елемента,  $\mathbf{u}^j, \mathbf{t}^j$  – вектори переміщень та зусиль у  $j$ -му опорному вузлі.

Коефіцієнти цієї системи визначаються за значеннями компонент матриць фундаментальних розв'язків у точках колокації та інтегрування, глобальних координат опорних вузлів граничних елементів, їх функцій форми  $R_m^{\langle N_q \rangle}$ , інтерполяційних функцій  $M_s^{\langle N_q \rangle}$  та регуляризованих якобіанів  $J^{(q)}(\xi^{(r)}(\gamma))$  і є універсальними стосовно форми граничних елементів. Зокрема, для випадку суперпараметричних граничних елементів вони мають вигляд:

$$\begin{cases} A_{ij}^{(k)qsw} \\ B_{ij}^{(k)qsw} \end{cases} = \begin{cases} \omega_1^q \begin{Bmatrix} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{Bmatrix} \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi^l) \right) M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi^l) \left| J^{(q)}(\xi^l) \right|; w \neq v(q, s), \\ \omega_2^q \begin{Bmatrix} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{Bmatrix} \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi^{(r)}(\gamma^p)) \right) M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi^{(r)}(\gamma^p)) \left| J^{(q)}(\xi^{(r)}(\gamma^p)) \right| (1 + \gamma_1^p), w = v(q, s), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(k)w} = & \omega_1^q T_{ij}^{(k)} \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi^l) \right) \left| J^{(q)}(\xi^l) \right| \Big|_{w \neq v(q,s)} - \\ & - \omega_2^q T_{ij}^{(k)} \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi^{(r)}(\gamma^p)) \right) \left| J^{(q)}(\xi^{(r)}(\gamma^p)) \right| (1 + \gamma_1^p) \Big|_{w = v(q,s)}. \end{aligned} \quad (9)$$

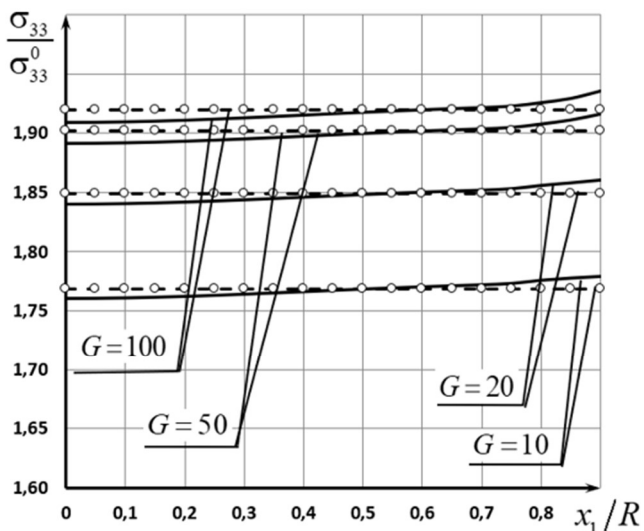


Рис. 3. Нормальні напруження в екваторіальній площині сферичного включення за однорідного розтягу  $\sigma_{33}^0$  матриці на безмежності.

ближення актуальної точки до поверхні.

З метою верифікації числових результатів на рис. 3 показано їх співставлення з аналітичним розв'язком Ешелбі (марковані лінії) для кульового включення за різних

Тут індекси  $m = \overline{1, 2N_q}$ ,  $l = \overline{1, 4^{N_q-3}}$ ,  $p = \overline{1, 4}$ ,  $r = 1$  для  $N_q = 3$  та  $r = 2, 3$  для  $N_q = 4$  передбачають сумування за ними,  $\xi^l$  та  $\gamma^p$  – вузли квадратур Гауса в регулярних та слабосингулярних інтегралах, відповідно,  $\omega_1^q = 3^{0,5N_q-2}$ ,  $\omega_2^q = -2^{N_q-5}/3^{0,5N_q-2}$ . У виразі (9) додатково здійснюємо сумування за індексами  $q = \overline{1, L_1}$  та  $s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1$ .

Поле внутрішніх напружень (у матриці та включенні) отримуємо шляхом підстановки розв'язків системи (7) у відповідні інтегральні подання та числового визначення регулярних інтегралів з використанням відомої з робіт Я. Сладека та В. Сладека їх адаптації до розрахунку за на-

відношень  $G$  його модуля зсуву  $G_2$  до матричного  $G_1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Відносне відхилення напружень від однорідних за аналітичним розв'язком складає менше 0,5 % за

умови залучення сітки з 384 суперпараметричних граничних елементів. На цьому ж прикладі зафіксовано узгодження результатів та досягнення такої ж точності за альтернативного застосування сітки ізопараметричних елементів меншої щільності, однак зі значним перевищенням у цьому випадку часу розрахунку, спричиненим збільшенням кількості опорних вузлів, а відтак розмірності дискретного аналога рівнянь. Проте за введених апроксимацій використання ізопараметричних граничних елементів

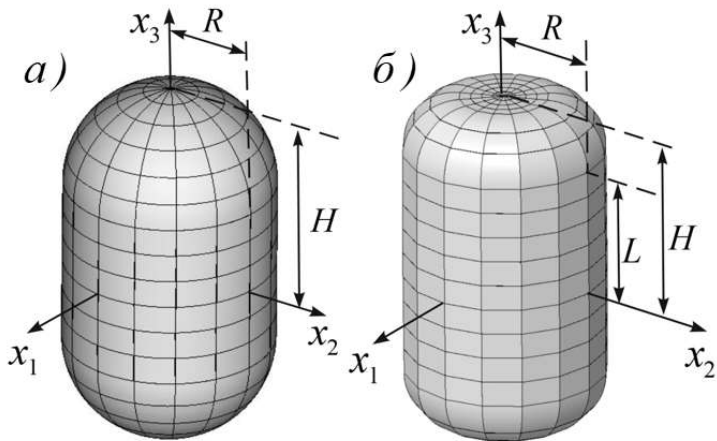


Рис. 4. Геометрія скінченних волокон та поверхнева сітка граничних елементів.

більш прийнятне для покриття сильно витягнутих поверхонь волокнистих включень, коли вимога щільності сітки приводить до кардинального збільшення кількості граничних елементів.

Для числового дослідження впливу форми включення на його реакцію у навантаженій матриці розглянуто задачі для скінченного циліндричного волокна зі сферичними (рис. 4 а) та заокруглено-плоскими (рис. 4 б) торцями за однорідного розтягу  $\sigma_{33}^0$  матриці на безмежності вздовж осі неоднорідності. Запропонованим граничноелементним підходом обчислено напруження всередині таких волокон за різної їх довжини  $H/R$  та контрасту модуля зсуву відносно матричного  $G = G_2/G_1$ .

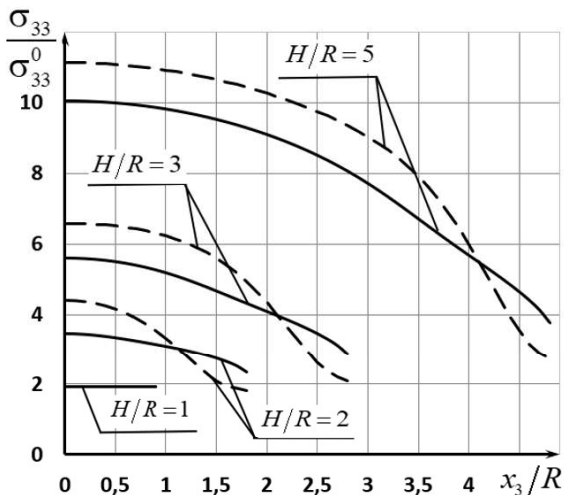


Рис. 5. Зміна нормальних напружень на осі скінченного волокна зі сферичними та плоскими торцями за його видовження для  $G = 100$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$ .

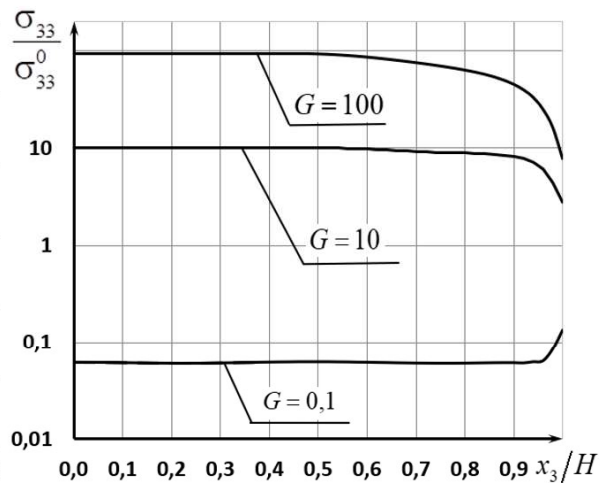


Рис. 6. Зміна нормальних напружень на осі сфероциліндричного волокна з різними відносними модулями зсуву для  $H/R = 100$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$ .

Рис. 5 та рис. 6 (із застосуванням логарифмічної шкали) демонструють неоднорідний розподіл напружень у скінченному сфероциліндричному волокні (суцільні криві) та волокні з плоскими торцями (штрихові криві) на протигагу від канонічних



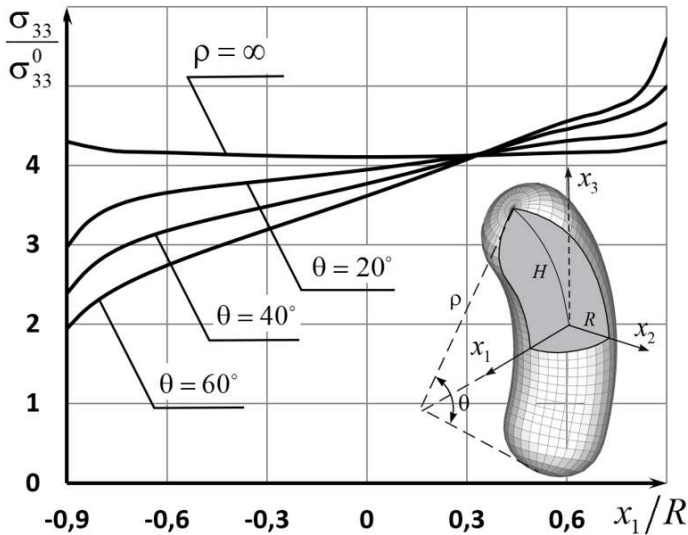


Рис. 7. Нормовані напруження у серединному перерізі викривленого волокна для  $G = 10$ ,  $H/R = 3$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$ .

осі у серединному поперечному перерізі волокна з фіксованим видовженням виявлено зменшення (збільшення) напружень з боку випуклої (ввігнутої) поверхні волокна за збільшення викривлення його осі та точку інваріантності напружень щодо викривлення волокна (рис. 7).

У третьому розділі дисертації граничноелементний аналіз узагальнено на тривимірні задачі пружної взаємодії у безмежній матриці скінченної кількості об'ємисто-неканонічних та плоских тонкостінних включень і тріщин (як матричних, так і волоконних). Описано і реалізовано модифікований граничноелементний підхід до числового врахування взаємодії у розріджено-великих системах наповнювачів на основі ітерацій односторонніх впливів. Проведено числове дослідження інтенсивності напружень в околі тріщин за їх сусідства з різнотипними за формою та жорсткістю включеннями.

Розглянуто сукупності із  $N_1$  об'ємистих включень з умовами їх ідеального контакту з матрицею по поверхнях  $S_s$  ( $s = \overline{2, N_1 + 1}$ ),  $N_2$  плоских тріщин з виконанням на їх поверхнях  $S_s$  ( $s = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$ ) крайових умов відсутності навантажень,  $N_3$  дискових податних включень з пропорційністю їх розкриття напруженням та  $N_4$  дискових абсолютно жорстких включень з умовами лінійності переміщень (поступальності і обертальності) в областях  $S_s$  ( $s = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$ ) і  $S_s$  ( $s = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$ ) таких неоднорідностей, відповідно. Пов'язавши з центром кожного наповнювача геометрично орієнтовану локальну систему координат  $O_i x_{1i} x_{2i} x_{3i}$  ( $i = \overline{2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$ ), їх взаємне розташування у матриці визначаємо через напрямні косинуси  $l_{ijkn}$  між  $i$ -тою та  $j$ -тою осями  $k$ -тої та  $n$ -тої систем координат, а також радіус-векторами  $\mathbf{d}_{kn}$  між центрами систем.

Спираючись на принцип суперпозиції, загальний напружено-деформований стан матриці у глобальній системі координат  $Ox_1 x_2 x_3$  описуємо сумами

сферичних і сфероїдних форм та передислокацію зон їх концентрації у залежності від видовження та жорсткості неоднорідності. У випадку сильно витягнутих волокон спостережено пропорційність напружень у центрі волокна параметрові  $G$ . Волокно з плоскими торцями характеризується більшою градієнтністю напружень, особливо за підходу до торців неоднорідності, де ці напруження менші, ніж у сфероциліндричному волокні. Результати поширено на випадок присутності у матриці викривленого сфероциліндричного волокна з віссю по дузі кола з кутом розхилу  $\theta$  та радіусом  $\rho$ . На неоднорідному розподілі напружень вздовж радіальної



$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}) \quad (10)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  - відомі компоненти основного стану від матричного навантаження, складові  $\boldsymbol{\sigma}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$  відповідають за внесок у поле кожного із взаємодіючих об'єктів (аналогічні суперпозиційні співвідношення використано також для переміщень і напружень у об'ємистих включеннях з внутрішніми тріщинами). Для інтегральних подань цих складових застосовано співвідношення виду (3) та їх трансформації для спарених поверхонь з протилежними напрямками нормалей, що моделюють тонкостінні неоднорідності.

Здійснюючи граничний перехід у інтегральних поданнях переміщень до поверхонь об'ємних та абсолютно жорстких включень, а у відповідних інтегральних поданнях напружень до поверхонь тріщин та тонких податливих включень, з крайових умов отримуємо зв'язану систему  $2N_1 + N_2 + N_3 + N_4$  векторних ГР дуального типу ( $2N_1 + N_4$  рівнянь у переміщеннях з сингулярностями і  $N_2 + N_3$  у напруженнях з гіперсингулярностями у ядрах). За присутності у матриці усіх чотирьох класів наповнювачів розрахункова система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{ss}) - \iint_{S_s} \left[ \mathbf{U}_{ss}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_s(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{ss}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_s(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S = 0, \quad \mathbf{x}_{ss} \in S_s, \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\ & \frac{1}{2} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{ss}) + \iint_{S_q} \left[ \mathbf{U}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_q(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S - \iint_{S_n} \mathbf{T}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S - \\ & \quad - \iint_{S_m} \mathbf{U}_{ms}^{(1)}(\mathbf{x}_{sm}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S = \mathbf{u}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}), \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{sm}, \mathbf{x}_{sq} \in S_s, \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\ & \iint_{S_n} \mathbf{L}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \iint_{S_m} \mathbf{D}_{ms}^{(1)}(\mathbf{x}_{sm}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \iint_{S_q} \left[ \mathbf{D}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_q(\boldsymbol{\xi}) - \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{L}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}), \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{sm}, \mathbf{x}_{sq} \in S_s, \quad s = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}, \\ & \quad \mathbf{g}_s \Delta \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{ss}) + \iint_{S_n} \mathbf{L}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \iint_{S_m} \mathbf{D}_{ms}^{(1)}(\mathbf{x}_{sm}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \\ & \quad + \iint_{S_q} \left[ \mathbf{D}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_q(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{L}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}), \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{sm}, \mathbf{x}_{sq} \in S_s, \\ & \quad s = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}, \\ & \quad \iint_{S_m} \mathbf{U}_{ms}^{(1)}(\mathbf{x}_{sm}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \iint_{S_n} \mathbf{T}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \\ & \quad + \iint_{S_q} \left[ \mathbf{U}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_q(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{T}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_q(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S = \mathbf{u}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}) + \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s \times \mathbf{x}_{ss}, \\ & \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{sm}, \mathbf{x}_{sq} \in S_s, \quad s = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

де по індексах  $m = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$ ,  $n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$ ,

$q = \overline{2, N_1 + 1}$ , проводиться сумування,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{t}_i$ ,  $\Delta\mathbf{u}_i$ ,  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$  – шукані вектори поверхневих переміщень і зусиль для  $i$ -го об’ємистого включення, стрибків переміщень в області  $i$ -тої тріщини або податливого включення та стрибків напружень в області  $i$ -го абсолютно жорсткого включення, відповідно,  $\mathbf{U}_{ij}^{(k)}$ ,  $\mathbf{T}_{ij}^{(k)}$ ,  $\mathbf{D}_{ij}^{(k)}$ ,  $\mathbf{L}_{ij}^{(k)}$  – матриці фундаментальних розв’язків першого і другого порядків з матеріальними характеристиками області  $\Omega_k$  ( $k = \overline{1, N_1 + 1}$ ), записані з врахуванням перетворення з  $i$ -тої до  $j$ -тої системи координат, тут і надалі перший індекс вектора координат точки  $\mathbf{x}_{ij}$  означає її належність до  $i$ -го об’єкту, а другий індекс – номер системи координат, в якій означений цей вектор,  $\mathbf{P}_{0s}$  та  $\mathbf{u}_{0s}$  – відомі вектори зусиль та переміщень від основного поля  $\boldsymbol{\sigma}_0$  та  $\mathbf{u}_0$  в області  $s$ -тої тріщини або податливого тонкого включення;  $\mathbf{g}_s$  – тензор віднесених до товщини пружних характеристик тонкого податного включення. Для врахування постійних векторів  $\mathbf{a}_s$  і  $\mathbf{b}_s$  система ГР (11) доповнюється також записаними в термінах стрибків напружень  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$  класичними рівняннями рівноваги кожного з абсолютно жорстких включень.

Відповідальні за взаємодію наповнювачів матриці ядра отриманих ГР (11) є регулярними через віддаленість у них точок джерела і інтегрування, тому допускають стандартне числове інтегрування. Дискретизація цієї системи рівнянь здійснена поєднанням описаного у попередньому розділі граничноелементного підходу для об’ємних включень та перенесених з робіт М.В. Хая та В.В. Михаськіва регуляризаційних і дискретизаційних процедур щодо ГР для тривимірних задач теорії тріщин та тонких включень.

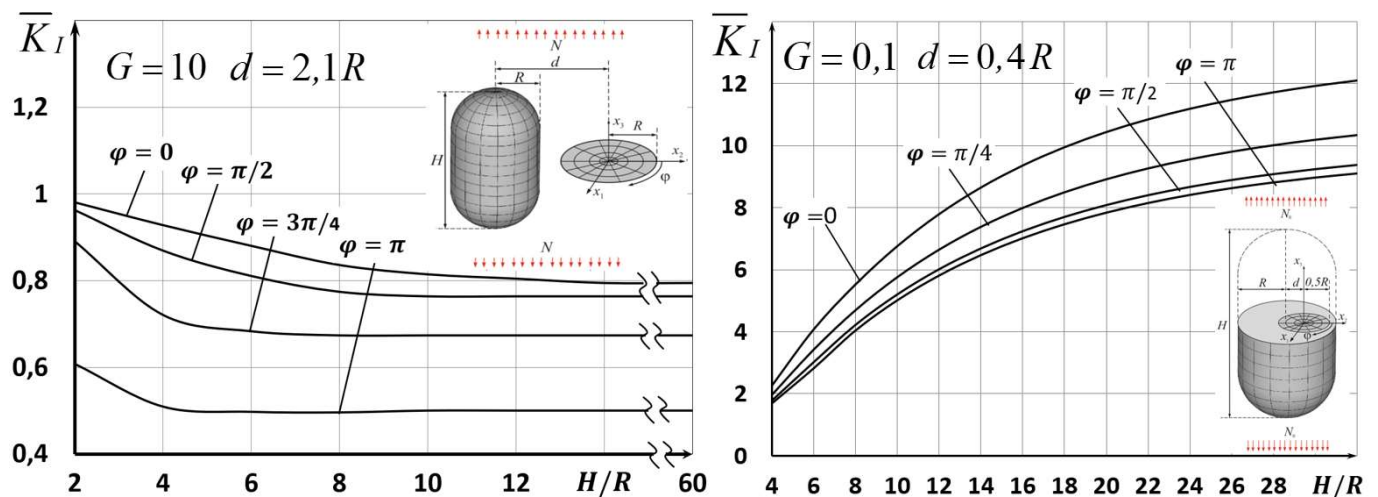


Рис. 8. Залежності нормованих КІН відриву в околі матричної (зліва) та волоконної (справа) кругової тріщини від довжини сфероциліндричного волокна.

Отримані числові результати стосуються вивчення впливу на коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) в околі кругової або еліптичної тріщини її внутрішнього розташування або у скінченному волокні, або у матричному матеріалі. Розглядалась симетрична задача локалізації дефекту у серединній площині волокна за однорідного осевого розтягу матриці, тобто в перпендикулярному до площини тріщини напрямку. Така конфігурація забезпечує зменшення кількості розрахункових ГР (11) до

семи скалярних інтегральних рівнянь відносно функцій розкриття тріщини по нормалі та компонент переміщень та зусиль на поверхні волокна.

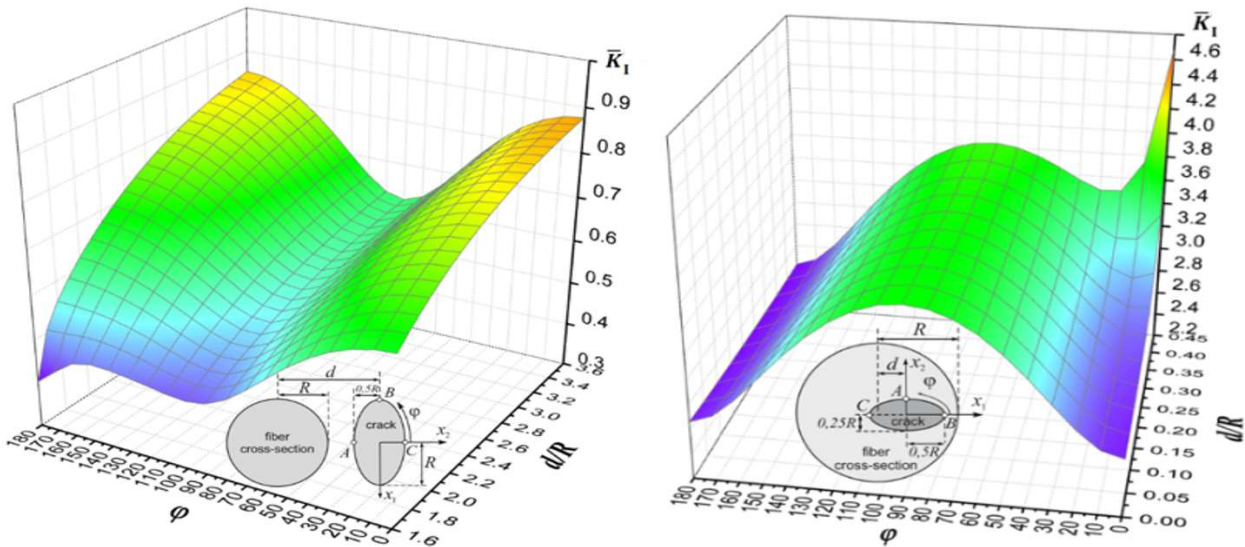


Рис. 9. Поведінка нормованих КІН відриву для матричної (зліва) та волоконної (справа) еліптичної тріщини з півосями  $a$  і  $b$  за кутовою координатою точки контуру дефекту та його відстанню до поверхні сфероциліндричного волокна для  $G = 10$ ,  $b/a = 0,5$ ,  $H/R = 6$ .

Проаналізовано спричинену тривимірністю задачі зміну КІН вздовж фронту тріщини та вплив на цю залежність розташування, жорсткості та видовження сфероциліндричного волокна (рис. 8, 9). Зафіксовано порогову довжину циліндричного волокна та відстань між волокном та тріщиною, за перевищення яких спостерігається відсутність зміни КІН. Верифікація числових результатів здійснена шляхом їх порівняння з відомими, отриманими іншими методами, для випадку кругової тріщини і виродження сфероциліндричного волокна у сферичне включення.

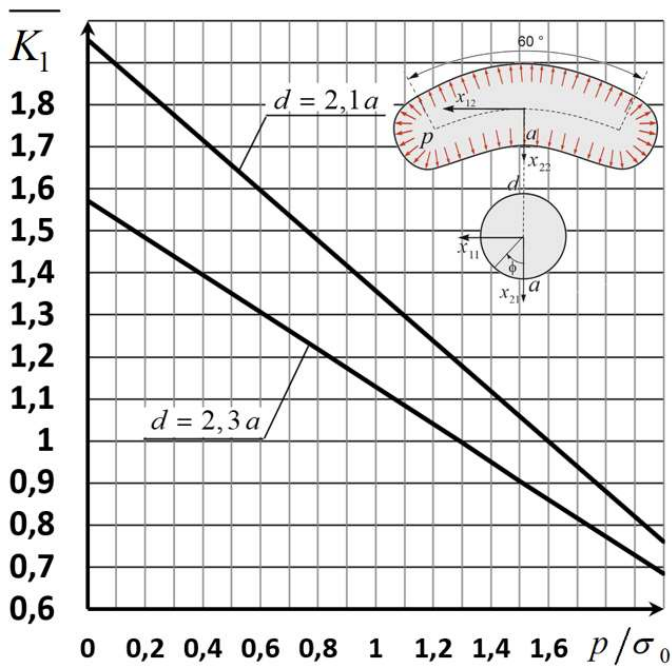


Рис. 10. Залежність нормованого КІН відриву в ближній до порожнини точці контуру кругової тріщини від внутрішнього тиску у порожнині.

Загальність запропонованих у цьому розділі гранично-інтегральних формулювань виду (11) використана для числового дослідження взаємодії тріщини з внутрішньо навантаженою порожниною неканонічної форми у пружному просторі. Тоді система дуальних інтегральних рівнянь (11) скорочується до шести скалярних відносно функцій розкриття тріщини та компонент переміщень поверхні порожнини. Зокрема, отримано числові дані щодо КІН для симетричної задачі сусідства кругової тріщини з викривленою по колу сфероциліндричною порожниною під внутрішнім тиском сумісно з навантаженням простору на безмежності

перпендикулярними до площини тріщини однорідними зусиллями  $\sigma_0$ . На прикладі характерного для піщанистих сланцевих порід матеріалу ( $G = 1,04 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,31$ ) простору досліджено закономірності поведінки КІН відриву вздовж контуру дефекту за різної його наближеності до порожнини як з боку від'ємної, так і додатної кривини її поверхні та різного тиску у порожнині (рис. 10).

Для розріджених систем з великими масивами взаємодіючих тріщин та різнотипних включень у безмежній пружній матриці запропоновано варіант модифікації граничноелементного аналізу на основі введення ефективних полів або ітерацій односторонніх взаємодій. Він полягає у виділенні у суперпозиційних співвідношеннях (10) складової напруженого стану від присутності кожного окремого  $j$ -того об'єкта взаємодії та заміні внеску інших попередньо розрахованими ефективними полями напружень  $\tilde{\sigma}_i$  ( $i \neq j$ ) чи переміщень  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  ( $i \neq j$ ) із розв'язку задач для матриці з поодинокими наповнювачами (на нульовій ітерації без складових ефективних полів), коли:

$$\sigma_1(\mathbf{x}) \approx \sigma_0(\mathbf{x}) + \sigma_j(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \tilde{\sigma}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}).$$

Далі для уточнення розв'язку задачі запроваджується циклічний перерахунок зворотного впливу наповнювачів один на одного з граничноелементним розв'язуванням на кожному етапі сукупностей незв'язаних ГР з інтегральним оператором задач для поодиноких об'єктів взаємодії та трансформованими на кожному циклі правими частинами. Зокрема, у такій інтерпретації врахування взаємодії  $s$ -ї тріщини з включеннями різних типів та іншими тріщинами зводиться до дискретизації одного векторного інтегрального рівняння:

$$\begin{aligned} \iint_{S_s} \mathbf{L}_{ss}^{(1)}(\mathbf{x}_{ss}, \xi) \Delta \mathbf{u}_s(\xi) d_\xi S &= \frac{1-\nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}) - \iint_{S_n} \mathbf{L}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \xi) \Delta \tilde{\mathbf{u}}_n(\xi) d_\xi S - \\ &- \iint_{S_m} \mathbf{D}_{ms}^{(1)}(\mathbf{x}_{sm}, \xi) \Delta \tilde{\sigma}_m(\xi) d_\xi S - \iint_{S_q} \left[ \mathbf{D}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \xi) \tilde{\mathbf{t}}_q(\xi) - \mathbf{L}_{qs}^{(1)}(\mathbf{x}_{sq}, \xi) \tilde{\mathbf{u}}_q(\xi) \right] d_\xi S, \\ \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{sm}, \mathbf{x}_{sq} &\in S_s, \end{aligned} \quad (12)$$

де сумування проводиться по індексах  $m = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$ ,  $n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$ ,  $n \neq s$ ,  $q = \overline{2, N_1 + 1}$ ;  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_n$ ,  $\Delta \tilde{\sigma}_m$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_q$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_q$  – відомі з попередніх ітерацій вектори стрибків переміщень на  $n$ -му тонкому податливому включенні чи тріщині, стрибків напружень на  $m$ -му тонкому жорсткому включенні та поверхневих переміщень і зусиль  $q$ -го об'ємного включення.

З метою порівняння, прямим та модифікованим граничноелементним методами на прикладі КІН відриву проаналізовано взаємодію у парі з рівновеликих кругових з радіусом  $a$  тріщини та тонкого податливого включення з товщиною  $h = 0,01a$  та жорсткістю  $G_2/G_1 = 0,01$  щодо матричної, які розташовані у паралельних площинах за перпендикулярного розтягу матриці на безмежності (рис. 11, штрихова крива відповідає розрахунку за прямим, а суцільні – за модифікованим підходами). Для відстаней

між тріщиною та включенням  $d/a > 0,8$  циклічне застосування модифікованого методу зводить похибку практично нанівець вже на другому кроці. Результати із застосуванням двох ітерацій модифікованого граничноелементного алгоритму поширено на задачу сусідства кругової доміантної щодо розміру тріщини з трьома розташованими в різно-орієнтованих площинах тріщинами (позначено зеленим кольором) радіусу  $0,1a$ , компланарним тонким податливим включенням радіусу  $0,2a$ , відносною товщиною  $h/0,2a = 0,01$  та відносною жорсткістю  $G_2/G_1 = 0,05$  (позначено синім кольором) та перпендикулярним до тріщини тонким абсолютно жорстким включенням радіусу  $0,3a$  (позначено жовтим кольором) з виявленням впливу кожного концентратора напружень на комбінацію КІН змішаної моди  $\tilde{C} = \left[ (1 - \nu_1)(K_1^2 + K_2^2) + K_3^2 \right] / (1 - \nu_1) K_*^2$  як функцію кутової координати  $\varphi$  точки фронту актуальної тріщини (рис. 13), де  $K_*$  – КІН відриву для поодинокі тріщини у просторі. Відстані між центрами неоднорідностей приймалися рівними  $1,2a, 1,15a, 1,2a, 1,25a, 1,2a$ , відповідно.

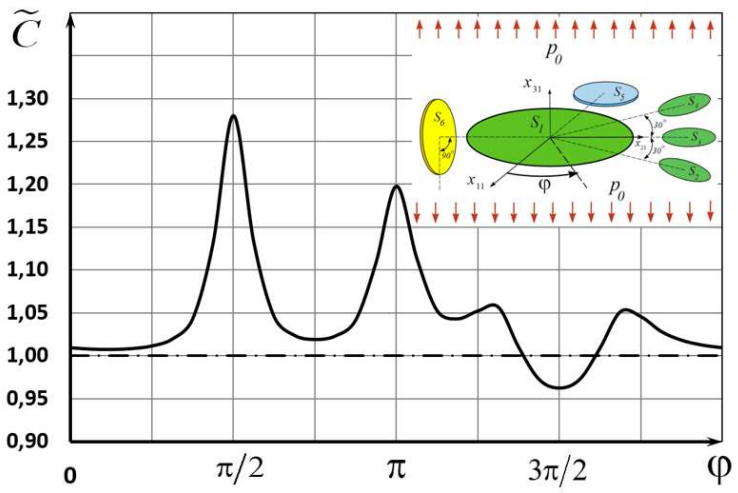
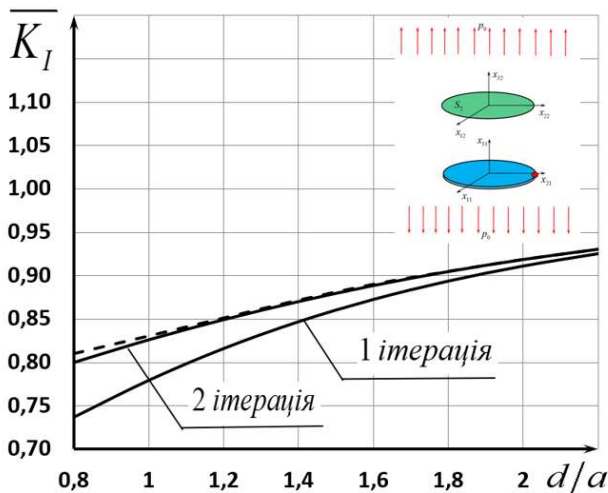


Рис. 11. Залежності нормованого КІН відриву на контурі кругової тріщини від відстані до паралельного тонкого податливого включення.

Рис. 12. Залежність нормованої комбінації КІН змішаної моди від кутової координати точки фронту тріщини за її взаємодії з тріщинами та включеннями різних типів.

Взаємодія тріщини з різними за жорсткістю та розташуванням неоднорідностями (рис. 12) приводить до складної поведінки КІН вздовж фронту дефекту з проявом як збільшення, так і зменшення КІН стосовно аналогічно навантаженої тріщини в однорідному тілі.

**Четвертий розділ** стосується перенесення числового дослідження на тривимірні задачі присутності  $N_1$  тонких податливих включень і  $N_2$  тріщин у обмеженому пружному тілі. На прикладах пружного порожнистого циліндра і призматичного тіла проаналізовано вплив поверхневих факторів на КІН в околі внутрішніх поодиноких і множинних тріщинних дефектів.

Співвідношення суперпозиції для опису напружено-деформованого стану у розглянутому композитному тілі у глобальній системі координат  $Ox_{11}x_{21}x_{31}$  мають вигляд



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \mathbf{u}_{m1}(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \boldsymbol{\sigma}_{m1}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

де складові  $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$  і  $\boldsymbol{\sigma}_{11}(\mathbf{x})$  відповідають за внесок у поле зовнішньої поверхні тіла  $S$ , а складові  $\boldsymbol{\sigma}_{m1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}_{m1}(\mathbf{x})$  ( $m = 2, \overline{N_1 + N_2 + 1}$ ) - за збурення від стрибків переміщень в областях внутрішніх тріщин і тонких включень. На зовнішній поверхні тіла  $S$  розглянуто змішані крайові умови із заданням на її підобласті  $S_U$  поверхневого переміщення  $\mathbf{u}_S$ , а на  $S_T$  - поверхневого зусилля  $\mathbf{t}_S$ .

Граничним переходом у інтегральних поданнях переміщень виду (2) до точок зовнішньої поверхні тіла та у інтегральних поданнях напружень до поверхонь тонких включень і тріщин, із крайових умов отримано систему  $1 + N_1 + N_2$  векторних ГП дуального типу у формі

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{11}) - \iint_{S_U} \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}_{11}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U + \iint_{S_T} \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{x}_{11}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T + \iint_{S_n} \mathbf{T}_{n1}^{(1)}(\mathbf{x}_{1n}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_n = \\ & = \mathbf{t}_S(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_T} \mathbf{U}_{11}^{(1)}(\mathbf{x}_{11}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T - \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_U} \mathbf{T}_{11}^{(1)}(\mathbf{x}_{11}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{1n} \in S = S_T \cup S_U, \\ & \iint_{S_n} \mathbf{L}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_n + \iint_{S_U} \mathbf{D}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U - \iint_{S_T} \mathbf{L}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T = \\ & = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}) - \mathbf{t}_S(\mathbf{x}_{s1}) \iint_{S_T} \mathbf{D}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T + \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_{s1}) \iint_{S_U} \mathbf{L}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U, \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{s1} \in S_s, \\ & \quad \quad \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\ & \mathbf{g}_s \Delta \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{ss}) + \iint_{S_n} \mathbf{L}_{ns}^{(1)}(\mathbf{x}_{sn}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_n + \iint_{S_U} \mathbf{D}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U - \iint_{S_T} \mathbf{L}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T = \\ & = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{0s}(\mathbf{x}_{ss}) - \mathbf{t}_S(\mathbf{x}_{s1}) \iint_{S_T} \mathbf{D}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_T + \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_{s1}) \iint_{S_U} \mathbf{L}_{1s}^{(1)}(\mathbf{x}_{s1}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_U, \quad \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sn}, \mathbf{x}_{s1} \in S_s, \\ & \quad \quad \quad s = \overline{2 + N_1, N_1 + N_2 + 1} \end{aligned} \quad (14)$$

відносно реактивних зусиль  $\mathbf{t}_1$  в точках поверхні  $S_U$ , переміщень  $\mathbf{u}_1$  точок поверхні  $S_T$ , а також стрибків переміщень на поверхнях тріщин та включень  $\Delta \mathbf{u}_n$ . Тут сумування проводиться по індексах  $n = \overline{2, N_1 + N_2 + 1}$ .

На основі описаних у попередніх розділах процедур розроблено граничноелементний алгоритм дискретизації ГП (14), який враховує силову та кінематичну дії на поверхню обмежених тіл з тонкостінними включеннями та тріщинами долученням до дискретного аналога вузлових значень на сітці покриття зовнішньої поверхні.

Числово розглянуто взаємодію двох рівновеликих кругових тонких податних включень (рис. 14) з механічними характеристиками  $G_2/G_1 = G_3/G_1 = 0,001$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$  їх матеріалів у кінцевому порожнистому циліндрі, навантаженому тиском  $p$  на внутрішній поверхні  $S_{in}$  і закріпленому по торцях  $S_{ef}$  (рис. 13). На зовнішній

поверхні порожнистого циліндра  $S_{out}$  навантаження відсутні. Включення перпендикулярні до площини серединного перерізу циліндра. На графіках залежностей КІН відриву від кутової координати точки фронту дефекту спостережено два чіткі та один менш виразний піки від двобічного впливу зовнішньої поверхні тіла та сусідньої тонкостінної неоднорідності, максимуми яких можуть бути як зі сторони навантаженої, так і ненавантаженої поверхні циліндра.

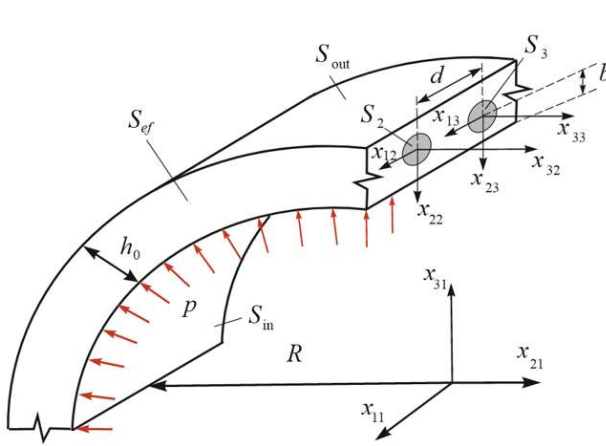


Рис. 13. Схема розташування податливих тонких включень у порожнистому циліндрі.

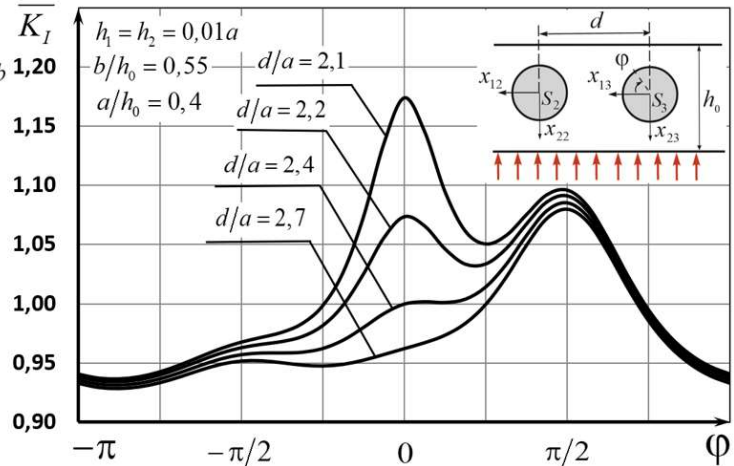


Рис. 14. Залежність нормованих КІН відриву кругового тонкого податливого включення від кутової координати точки контуру за різного його наближення до сусіднього включення в порожнистому циліндрі за дії внутрішнього тиску.

У роботі аналогічні числові дослідження проведено також для випадку порожнистого циліндра з круговою та еліптичною тріщинами. Зафіксовано ситуації зі зменшенням КІН в їх околі за рахунок додаткового тиску на зовнішній поверхні тіла, який виступає стримуючим фактором для поширення дефектів.

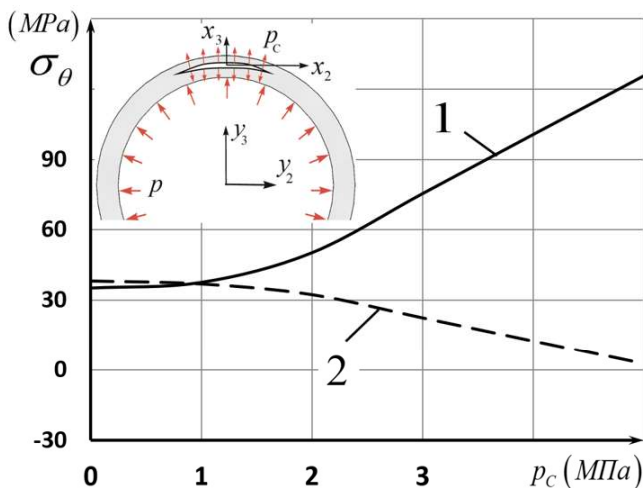


Рис. 15. Залежність кільцевих нормальних напружень на зовнішній (1) та внутрішній (2) поверхні порожнистого циліндра від тиску в повздовжній тріщині прямокутної форми.

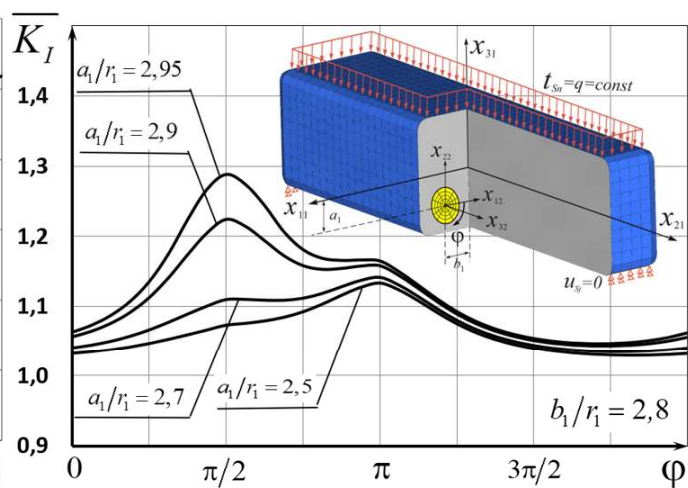


Рис. 16. Залежність нормованих КІН відриву для кругового тонкого податливого включення від кутової координати точки контуру за різного його наближення до зовнішньої поверхні призматичного тіла.

На основі числового розв'язання системи ГР (14) досліджено відхилення у кільцевих нормальних напруженнях поблизу внутрішньої та зовнішньої поверхонь порожнистого циліндра під внутрішнім тиском, спричинені внутрішньою поздовжньою прямокутною у плані із заокругленими кутами тріщиною за припущення тиску на її поверхнях. Для цієї форми дефекту під час регуляризації і дискретизації гіперсингулярних інтегралів застосовано конформне відображення області тріщини на круг одиничного радіуса. Результати на рис. 15 стосуються скінченно-витягнутого порожнистого циліндра з довжиною 1000 мм, зовнішнім діаметром 440 мм, товщиною стінки 18 мм, коефіцієнтом Пуассона  $\nu_1 = 0,3$  та модулем зсуву його матеріалу  $G = 81 \text{ ГПа}$ , тріщина розміром  $70 \times 210 \text{ мм}$ , розташовувалась на глибині 4 мм від зовнішньої поверхні циліндра. Характерно, що зі зростанням тиску у тріщині, вказані напруження мають протилежні тенденції до росту і спаду, відповідно.

Спроможності запропонованих граничноелементних розрахунків щодо обмежених тіл з тонкостінними неоднорідностями продемонстровано також на прикладі тонкого податливого кругового включення (тріщини в окремому випадку) у поверхнево навантаженому призматичному тілі. Зокрема, розглянуто ситуації з рівномірним навантаженням верхньої грані та закріпленням ребер торців нижньої грані такого тіла по схемі простої балки і розташуванням тонкого включення (тріщини) у його середньому поперечному перерізі у зоні напружень розтягу. Вхідними даними для показаних на рис. 16 обчислень КІН відриву в околі включення є такі: товщина включення  $h_2 = 0,01a$  ( $a$  – радіус неоднорідності); контраст матеріалів у тілі  $G_2/G_1 = 0,005$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ; розмір тіла  $20a \times 8a \times 8a$ ; радіус заокруглень його граней  $0,25a$ . Прослідковано чутливість КІН як факторів можливого руйнування до зближення дефекту із поверхнею призматичного тіла, максимумами яких можуть досягатися як зі сторони нижньої, так і бічної граней. Встановлено якісні та кількісні відмінності зміни КІН вздовж фронтів тонкого включення та тріщини у призматичному тілі, які виражаються у більш монотонних залежностях та передислокації максимумів КІН за менших відстаней до зовнішньої поверхні у першому випадку.

**У п'ятому розділі** граничноелементний аналіз поширено на тривимірні задачі про неідеальний контакт безмежної пружної матриці з пружним включенням загальної форми, що моделює проковзування та наявність тонкого податливого прошарку. Так умови ковзного контакту на міжфазній поверхні  $S$  в локальній системі координат, орієнтованій вздовж дотичних  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{h}$  та нормального  $\mathbf{n}$  до поверхні ортів, мають вигляд покомпонентних рівностей:

$$u_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad t_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad t_{\mathbf{h}}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{h}}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad t_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0.$$

Неявне врахування контактних умов проковзування досягнуто перетворенням вихідної системи ГР (4) шляхом введення нових невідомих величин, а саме вектора переміщень поверхні включення  $\mathbf{u}^{(2)}$  у глобальній системі координат та компонент нормальних зусиль  $t_{\mathbf{n}}$  і стрибків дотичних переміщень  $\Delta u_{\mathbf{h}}, \Delta u_{\mathbf{k}}$  на поверхні  $S$  у локальній системі координат. Тоді слабосингулярна форма двох векторних ГР у термінах цих величин буде



$$\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\mathbf{x})\delta_{1k} - \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left[ \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) - \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} t_n(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

$$k = 1, 2, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{h} \Delta u_{\mathbf{h}} + \mathbf{k} \Delta u_{\mathbf{k}}, \mathbf{x} \in S \quad (15)$$

Залучення локальної системи координат трансформує процес ансамблювання матриці отриманої колокацією ГР (15) розрахункової системи лінійних алгебраїчних рівнянь внаслідок необхідності визначення дотичних ортів в кожному опорному вузлі сітки граничних елементів, які мають різну локальну орієнтацію у випадку, коли локальні номери спільного опорного вузла у різних елементах відрізняються. З урахуванням відповідного перетворення компонент ортів за запропонованою у другому розділі схемою побудовано дискретні аналоги ГР (15) для двох типів сіток з  $L_1$  граничних елементів та  $L_2$  опорних вузлів у формі:

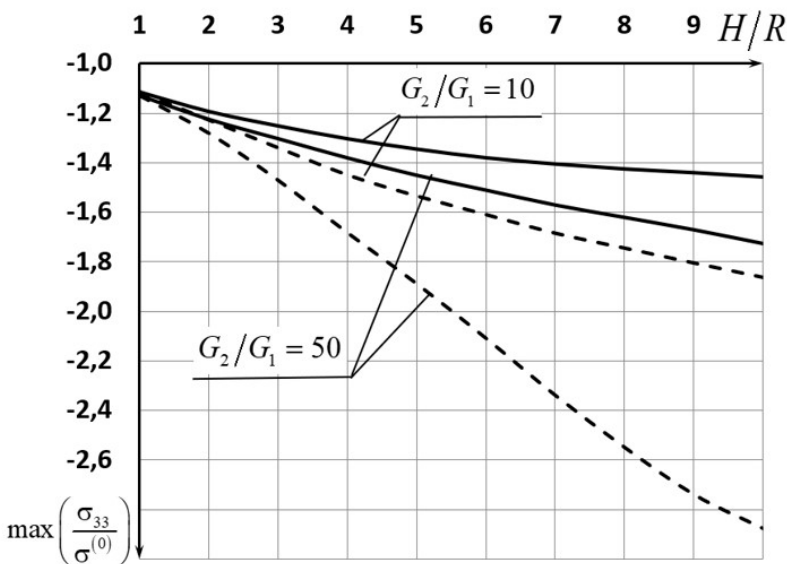
$$\delta_{1k} \left( \mathbf{u}^{(2)w} + \mathbf{h}^w \Delta u_{\mathbf{h}}^w + \mathbf{k}^w \Delta u_{\mathbf{k}}^w \right) + \mathbf{C}^{(k)w} \left( \mathbf{u}^{(2)w} + \left( \mathbf{h}^w \Delta u_{\mathbf{h}}^w + \mathbf{k}^w \Delta u_{\mathbf{k}}^w \right) \delta_{1k} \right) + \mathbf{B}^{(k)qsw} \mathbf{n}^{v(q,s)} t_n^{v(q,s)} -$$

$$-\mathbf{A}^{(k)qsw} \left( \mathbf{u}^{(2)v(q,s)} + \left( \mathbf{h}^{v(q,s)} \Delta u_{\mathbf{h}}^{v(q,s)} + \mathbf{k}^{v(q,s)} \Delta u_{\mathbf{k}}^{v(q,s)} \right) \delta_{1k} \right) = \delta_{1k} \mathbf{u}_0^w, k = 1, 2, w = \overline{1, L_2}, \quad (16)$$

де за індексами  $s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1$  для суперпараметричних або  $s = 1, 2, \dots, 2N_q$  для ізопараметричних граничних елементів та  $q = \overline{1, L_1}$  ведеться сумування.

Коефіцієнти матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  у рівняннях (16) мають форму (8)-(9), тобто процес дискретизації задачі з ковзним та досконалим контактом компонент композитного тіла відрізняється лише процедурами укладання матриці дискретного аналога відповідних систем ГР.

На числовому розв'язку задачі про скінченне сфероциліндричне включення у безмежній матриці за її всебічного стиску (рис. 17) показано відмінності напружень



всередині включення, спричинені ковзним контактом на міжфазній поверхні (штрихові криві відповідають випадку ідеального механічного контакту). У проведених дослідженнях зафіксовано суттєве зниження (релаксацію) напружень всередині включення за рахунок міжфазного проковзування з більш виразним проявом для видовжених включень.

У роботі також визначено відсутні за ідеального контакту стрибки дотичних переміщень на поверхні ковзного з'єднання матриці і сфероциліндричного включення.

Рис. 17. Залежність максимальних нормальних напружень в серединному перерізі сфероциліндричного включення за всебічного стиску матриці від відносної його довжини для ковзного та ідеального контактів на міжфазній поверхні.

Схема безпосереднього залучення контактних умов в гранично-інтегральне формулювання задачі впроваджена також щодо таких крайових умов тонкого податного прошарку між включенням та матрицею

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}), \quad \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}), \\ t_n(\mathbf{x}) &= f \Delta u_n(\mathbf{x}); \quad t_h(\mathbf{x}) = g \Delta u_h(\mathbf{x}), \quad t_k(\mathbf{x}) = g \Delta u_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \end{aligned} \quad (17)$$

де індексом  $\mathbf{n}$  позначено величини, що направлені вздовж нормалі до поверхні включення  $S$ , а індексами  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{k}$  – величини, що направлені по дотичній до цієї поверхні; константи  $f = 2G_0 / (h_0(1 - \nu_0))$  та  $g = G_0 / h_0$  залежать від заданих механічних характеристик матеріалу прошарку  $G_0$  і  $\nu_0$  та його товщини  $h_0$ . За розгляду умов (17) система ГР (4) набуває форми

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) \delta_{1k} - \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [\mathbf{u}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}} + \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} + \delta_{1k} \mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \\ - \delta_{1k} \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (18)$$

і вирізняється присутністю слабосингулярних інтегралів з ядрами, які вміщують фундаментальні розв'язки задачі з залежними від модулів пружності прошарку та компонент вектора нормалі множниками у формі

$$\begin{aligned} Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= \left( \frac{1}{f} + \frac{f-g}{f g} n_j^2 \right) T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{f-g}{f g} n_j n_m T_{im}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}), \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ Q_{ij}^*(\mathbf{x}) &= \frac{\delta_{ij}}{f} + \frac{f-g}{f g} n_i n_j + \left( \frac{1}{f} + \frac{f-g}{f g} n_j^2 \right) \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \frac{f-g}{f g} n_j n_m \iint_S T_{im}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S, \end{aligned}$$

де за індексом  $m = \overline{1, 3}$  проводиться сумування.

Це приводить у дискретному аналогові системи (18) до комбінацій відомих за розглядом ідеального контакту компонент композитного тіла матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  з додатковими  $\mathbf{D}$  і  $\mathbf{F}$ , а саме:

$$\begin{aligned} \delta_{1k} \mathbf{u}^{(k)w} + \mathbf{C}^{(k)w} \mathbf{u}^{(k)w} + \delta_{1k} \mathbf{D}^w \mathbf{t}^w - \mathbf{A}^{(k)qsw} \mathbf{u}^{(k)v(q,s)} + \left( \mathbf{B}^{(k)qsw} - \delta_{1k} \mathbf{F}^{qsw} \right) \mathbf{t}^{v(q,s)} = \delta_{1k} \mathbf{u}_0^w, \\ k = 1, 2, \quad w = \overline{1, L_2}, \end{aligned}$$

де за індексами  $s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1$  для суперпараметричних або  $s = 1, 2, \dots, 2N_q$  для ізопараметричних граничних елементів та  $q = \overline{1, L_1}$  ведеться сумування.

Зокрема, для суперпараметричних елементів коефіцієнти додаткових матриць будуть

$$F_{ij}^{qsw} = \begin{cases} \omega_1^q Q_{ij}^{(k)} \left( \mathbf{x}^w, \mathbf{x}_m^{v(q,s)} R_m^{(N_q)}(\boldsymbol{\xi}^l) \right) M_s^{(N_q)}(\boldsymbol{\xi}^l) \left| J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^l) \right|; w \neq v(q,s), \\ \omega_2^q Q_{ij}^{(k)} \left( \mathbf{x}^w, \mathbf{x}_m^{v(q,s)} R_m^{(N_q)}(\boldsymbol{\xi}^{(r)}(\boldsymbol{\gamma}^p)) \right) M_s^{(N_q)}(\boldsymbol{\xi}^{(r)}(\boldsymbol{\gamma}^p)) \left| J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(r)}(\boldsymbol{\gamma}^p)) \right| (1 + \gamma_1^p), w = v(q,s), \end{cases} \quad (19)$$

$$D_{ij}^w = \omega_1^q Q_{ij}^* \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^l) \right) \left| J^{(q)} (\xi^l) \right|_{w \neq v(q,s)} - \\ - \omega_2^q Q_{ij}^* \left( \mathbf{x}^w, x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)} (\gamma^p)) \right) \left| J^{(q)} (\xi^{(r)} (\gamma^p)) \right| (1 + \gamma_1^p) \Big|_{w=v(q,s)}. \quad (20)$$

Тут індекси  $m = \overline{1, 2N_q}$ ,  $l = \overline{1, 4^{N_q-3}}$ ,  $p = \overline{1, 4}$ ,  $r = 1$  для  $N_q = 3$  та  $r = 2, 3$  для  $N_q = 4$  передбачають сумування за ними. У виразі (20) додатково здійснюємо сумування за індексами  $q = \overline{1, L_1}$  та  $s = \overline{1, 3, \dots, 2N_q - 1}$ .

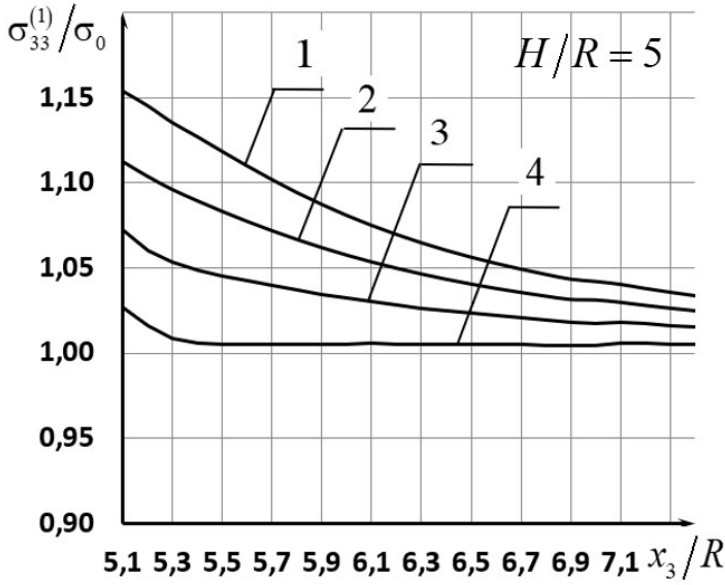


Рис. 18. Розподіл нормальних напружень у епоксидній матриці на продовженні осі сфероциліндричного скляного включення за її розтягу вздовж цієї осі за різної відносної жорсткості тонкого міжфазного прошарку.

Здійснено числові дослідження впливу прошарку на напружено-деформований стан епоксидної матриці ( $G_1 = 1,3 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = 0,22$ ) зі скляним включенням ( $G_2 = 30 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_2 = 0,35$ ) сфероциліндричної форми розміром  $H/R = 5$  (рис. 18) за розтягу вздовж осі волокна. Тонкий пружний прошарок товщиною  $h_0 = 0,01R$  має характеристики матеріалу  $\nu_0 = 0,3$ ; 1 –  $G_0/G_1 = 0,4$ ; 2 –  $G_0/G_1 = 0,3$ ; 3 –  $G_0/G_1 = 0,2$ ; 4 –  $G_0/G_1 = 0,1$ .

Податливіший прошарок приводить до менших напружень вздовж осі волокна включно із меншою їх концентрацією у вершинах неоднорідності.

Із залученням описаного у третьому розділі граничноелементного підходу до аналізу множинності наповнювачів числово досліджена взаємодія матричної плоскої тріщини, що займає область  $S_3$ , з об'ємним пружним включенням, обмеженим гладкою поверхнею  $S_2$ , з урахуванням ковзних умов зчеплення останнього з матрицею. Тоді для дискретизації використовується система дуальних ГІР

$$\tilde{\mathbf{u}}_2^{(k)}(\mathbf{x}_{22}) \delta_{1k} - \iint_{S_2} \mathbf{T}_{22}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \boldsymbol{\eta}) \left[ \tilde{\mathbf{u}}_2^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) - \tilde{\mathbf{u}}_2^{(k)}(\mathbf{x}_{22}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \iint_{S_2} \mathbf{U}_{22}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} t_n(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \\ - \delta_{1k} \iint_{S_3} \mathbf{T}_{32}^{(1)}(\mathbf{x}_{23}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_3(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{22}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{23} \in S_2, \\ \iint_{S_3} \mathbf{L}_{33}^{(1)}(\mathbf{x}_{33}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{u}_3(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S + \iint_{S_2} \left[ \mathbf{D}_{23}^{(1)}(\mathbf{x}_{32}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} t_n(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{L}_{23}^{(1)}(\mathbf{x}_{32}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{\mathbf{u}}_2^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S = \\ = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \mathbf{P}_{03}(\mathbf{x}_{33}), \quad \mathbf{x}_{33}, \mathbf{x}_{32} \in S_3.$$

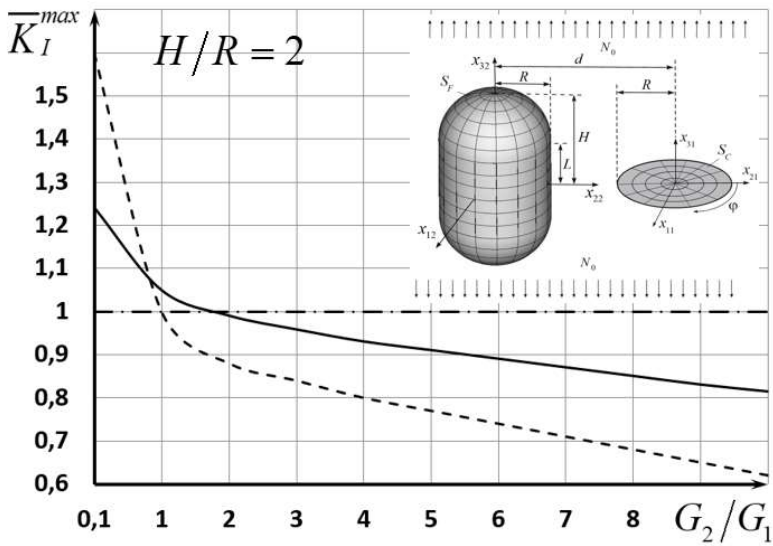


Рис. 19. Залежність максимальних нормованих КІН на контурі кругової тріщини від відносної жорсткості сусіднього сфероциліндричного включення за його ковзного (суцільна крива) та ідеального (штрихова крива) контакту з матрицею для  $d = 2,1R$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ ,  $H/R = 2$ .

ничноелементних розв'язків для репрезентативного елемента гетерогенного середовища. Шляхом узагальнення формул Морі-Танаки на присутність у структурі розривів міжфазних переміщень аналіз поширено на композити з ковзним контактом на міжфазних поверхнях. Підхід реалізовано для коротковолокнистих композитів з впорядкованою та випадковою орієнтаціями волокон (рис. 20).

Розглядається двофазний пружний композит, утворений ізотропною матрицею, характеристики матеріалу якої описуються тензором модулів пружності  $\mathbf{C}^{(1)}$ , і однорідно розподіленими ізотропними скінченними волокнами з концентрацією  $f$  та матеріалом з тензором модулів пружності  $\mathbf{C}^{(2)}$ .

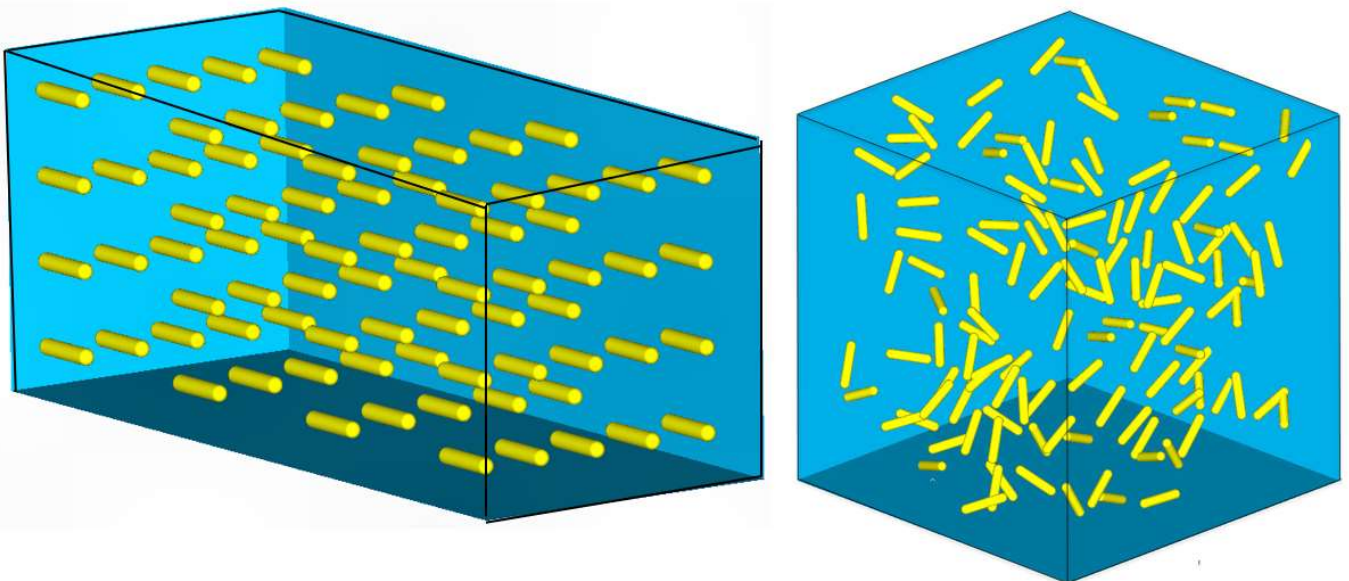


Рис. 20. Впорядкована та випадкова орієнтація включень в композиті.

Число встановлено неоднозначність фактору ковзного контакту матриці і включення щодо КІН в околі матричної тріщини. Так із залежностей КІН відриву (рис. 19) для кругової тріщини, розташованої у серединній площині сфероциліндричного включення, за розтягу матриці вздовж волокна впливає, що ковзний контакт збільшує КІН у випадку жорсткішого за матрицю включення і зменшує у випадку м'якої неоднорідності.

У шостому розділі запропоновано підхід до числового дослідження ефективних модулів пружності тривимірних композитів з неканонічними включеннями на основі введення у гомогенізаційні співвідношення Морі-Танаки граничноелементних розв'язків для репрезентативного елемента гетерогенного середовища.

За ідеального контакту компонент ефективні модулі пружності композиту  $\mathbf{C}^*$  визначаються співвідношенням Морі-Танаки у формі тензорної згортки

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + f(\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \left[ f\mathbf{I} + (1-f)(\mathbf{A}^{(2)})^{-1} \right]^{-1}, \quad (21)$$

де  $\mathbf{A}^{(2)}$  – невідомий тензор впливу, який пов’язує між собою усереднені деформації у включенні з деформуванням межі репрезентативного об’ємного елемента (РОЕ) композиту,  $\mathbf{I}$  – одиничний тензор.

З використанням відомої з робіт Бенвеністе концепції «зовнішнього спостерігача» отримано узагальнену гомогенізаційну модель

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + f \left[ (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{C}^{(1)} : \mathbf{A}^{(12)} \right] : \left[ (1-f)\mathbf{I} + f(\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(12)}) \right]^{-1}, \quad (22)$$

яка допускає стрибки переміщень на міжфазній поверхні, з додатковим тензором деформаційного впливу  $\mathbf{A}^{(12)}$  від існування контактної недосконалості. Компоненти вказаних тензорів впливу виражаються лише через міжфазні переміщення та їх стрибки поверхневими інтегралами

$$A_{ijml}^{(2)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \iint_S (u_i^{(2)ml} n_j + u_j^{(2)ml} n_i) dS, \quad A_{ijml}^{(12)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \iint_S (\Delta u_i^{ml} n_j + \Delta u_j^{ml} n_i) dS,$$

що дозволяє їх розрахунок інтегруванням граничноелементних розв’язків задач для безмежного РОЕ з поодиноким включенням заданої конфігурації та об’ємом  $V^{(2)}$ . Тоді у випадку композиту з односпрямованими волокнами як макроскопічно трансверсально-ізотропного середовища визначення компонент тензорів впливу забезпечується розв’язанням задач з шістьма варіантами однорідної деформації  $\varepsilon_{lm}^0 = const$  ( $m, l = \overline{1,3}$ ) розтягу та зсуву на безмежності в поздовжньому та поперечному щодо волокна напрямках.

Розрахунки проведено щодо п’яти ефективних технічних модулів пружності композиту, введених як

$$E_{11}^* = \frac{(C_{11}^* - C_{12}^*) \left[ C_{11}^* C_{33}^* + C_{12}^* C_{33}^* - 2(C_{13}^*)^2 \right]}{C_{11}^* C_{33}^* - (C_{13}^*)^2}, \quad E_{33}^* = C_{33}^* - \frac{2(C_{13}^*)^2}{C_{11}^* + C_{12}^*}, \quad G_{12}^* = \frac{C_{11}^* - C_{12}^*}{2},$$

$$G_{13}^* = C_{44}^*, \quad \nu_{13}^* = \frac{C_{13}^*}{C_{11}^* + C_{12}^*}.$$

Для верифікації отриманих числових результатів використано окремі відомі розв’язки задач з визначення ефективних технічних модулів пружності коротковолокнистого композиту з ідеальним контактом компонент на основі асимптотичних співвідношень сполучної моделі («bridging model») і методу скінченних елементів. Верифіковано також вплив ковзного контакту на ефективні властивості композиту з кульовими включеннями. В усіх випадках спостережено добре узгодження даних з літературними.

На ефективних технічних модулях пружності композиту зі сфероциліндричними однаково орієнтованими волокнами вивчено вплив на ці параметри ідеального та ковзного контакту складових у залежності від об'ємної частки та видовження волокон. Рис. 21 відповідає волокнам з відносною довжиною  $H/R = 15$  та комбінації матеріалів  $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ .

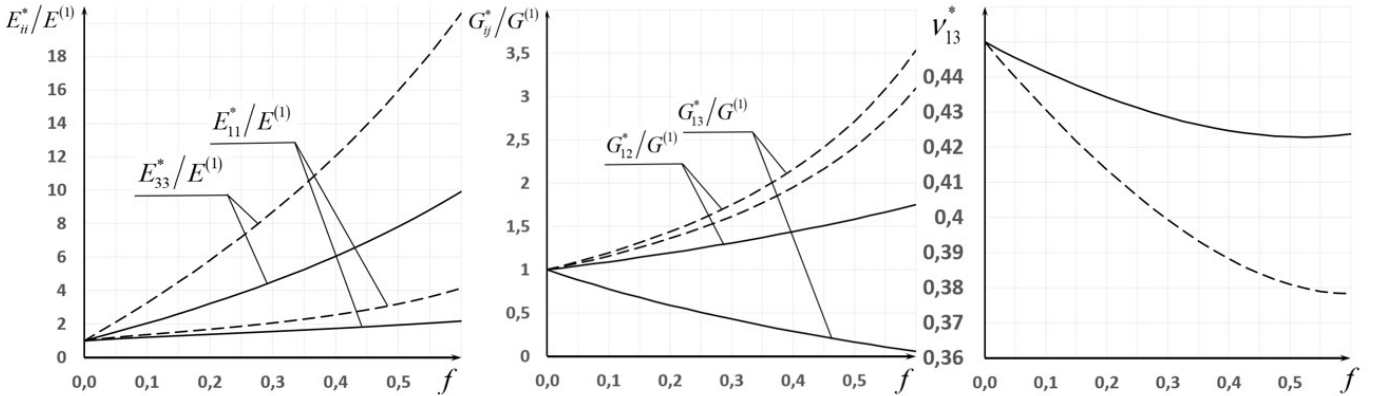


Рис. 21. Залежність ефективних технічних модулів пружності композиту з однаково орієнтованими скінченими волокнами від об'ємної фракції наповнювача (штрихові криві відповідають ідеальному, а суцільні – ковзному контактам на міжфазних поверхнях).

Випадково орієнтовані короткі волокна в пружній матриці утворюють макроізотропне середовище, для отримання ефективних модулів якого використовується додаткове усереднення тензора ефективних модулів пружності за просторовими кутами Ейлера у вигляді

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{C}^*(\varphi, \theta, \psi) \sin\theta d\varphi d\theta d\psi; \quad E^* = L_{11} - \frac{2L_{12}^2}{L_{11} + L_{12}}, \quad \nu^* = \frac{L_{12}}{L_{11} + L_{12}}, \quad (23)$$

де  $E^*$  і  $\nu^*$  – ефективний модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона.

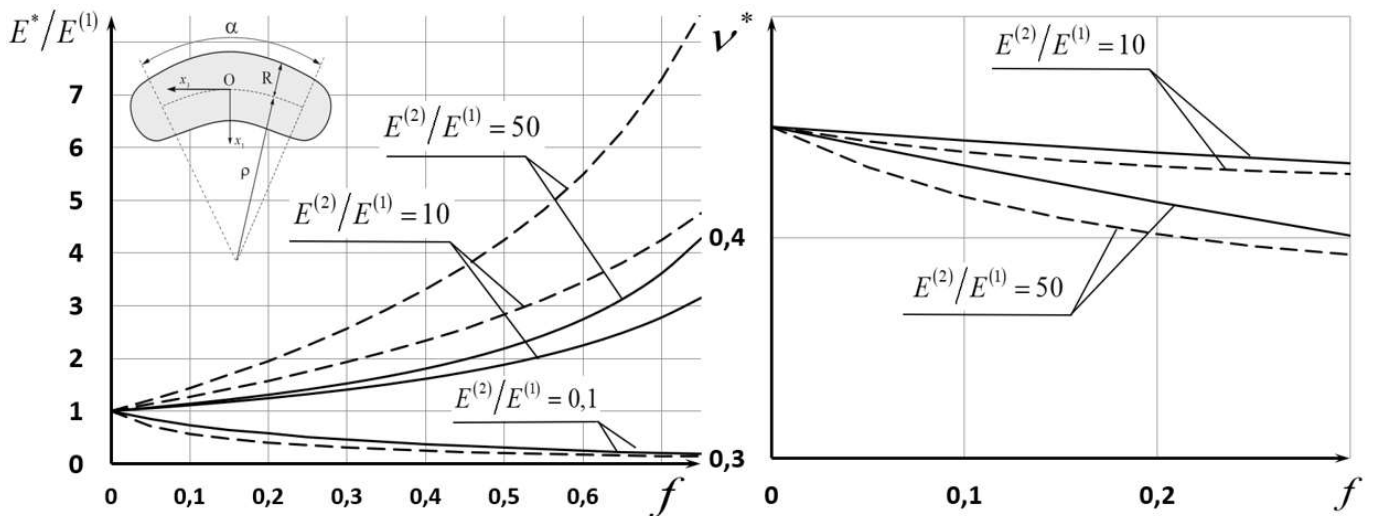


Рис. 22. Залежність ефективного модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона композиту з випадково орієнтованими скінченими волокнами з викривленою по дузі кола віссю (суцільні криві) та прямою віссю такої ж довжини (штрихові криві) за ідеального контакту з матрицею від об'ємної частки наповнювача ( $\rho/R = 10$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ).

У випадку осової симетрії форми хаотично орієнтованих волокон формула (23) приводить до аналітичних виразів для ефективних модулів. За відсутності осей симетрії включення усереднення (23) здійснено числово, дискретно варіюючи положення неоднорідності відносно напрямків деформаційного навантаження РОЕ. Такий спосіб застосовано для ідеально сконтакттованих з оточенням та випадково орієнтованих скінченних вигнутих волокон, коли ефективні модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона проаналізовано у порівнянні з відповідниками для композиту з прямими волокнами (рис. 22).

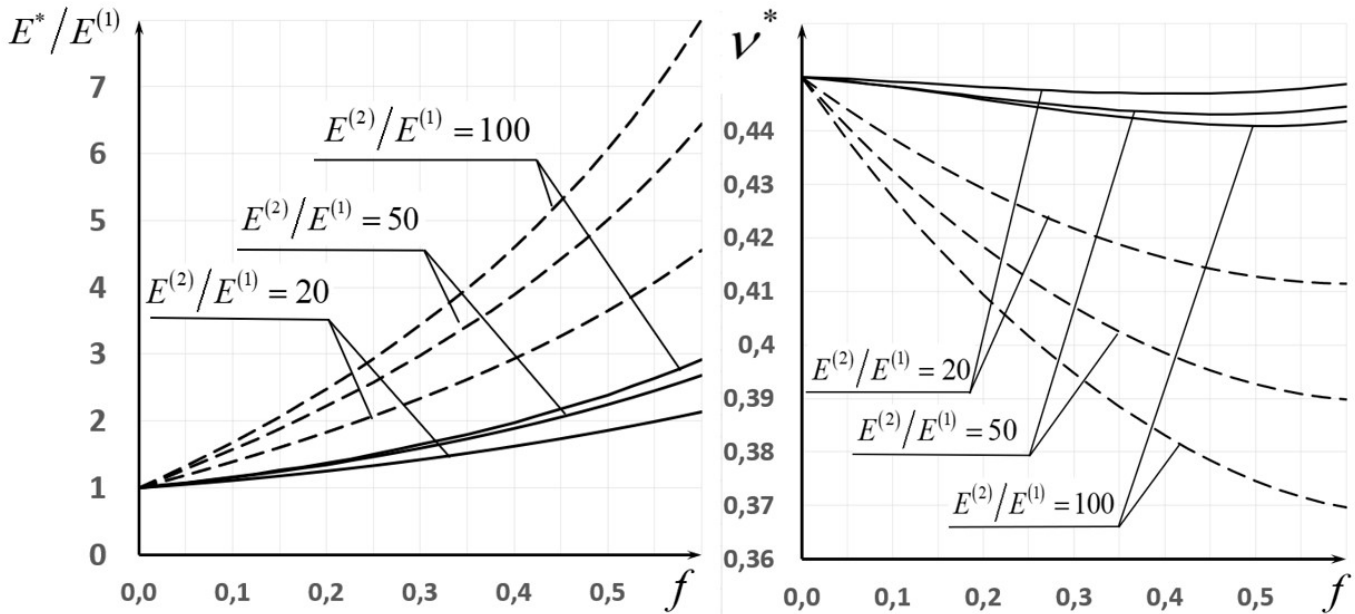


Рис. 23. Залежність ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона композиту з випадково орієнтованими скінченими прямими волокнами за ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) контакту з матрицею від об'ємної частки наповнювача для  $H/R = 15$ .

Результати щодо цих величин поширено (рис. 23) на аналіз композиту з випадково орієнтованими прямими сфероциліндричними волокнами з різною жорсткістю щодо матриці за ковзного та досконалого контакту компонент.

У випадках макроанізотропії композиту з однонаправленими скінченими волокнами і його макроізотропії для випадково орієнтованих волокон спостережено як збільшення, так і зменшення окремих ефективних модулів пружності від викривлення і проковзування волокон. Виявлений контраст виразніший для композитів з більшими об'ємною фракцією, жорсткістю та видовженням волокон.

Експериментальна верифікація числових розрахунків ефективних модулів пружності здійснювалася шляхом дослідження призматичних зразків фібробетону розміром  $100 \times 100 \times 400$  мм на стиск, виготовлених згідно з національним стандартом ДСТУ-Н Б В.2.6-218:2016. Бетон марки М250 класу В20 армувався сталлюю фіброю марки Wirand FF3 компанії Massaferrі довжиною 50 мм і діаметром 0,75 мм. Вимірювання стискуючих деформації призми на базі  $2/3$  її повної висоти при силі, близькій до третини руйнуючого навантаження, дозволяло визначити умовний ефективний модуль Юнга фібробетону. Досліди проведені на серіях призм з відносною концентрацією фібри  $15 \text{ кг/м}^3$ ,  $30 \text{ кг/м}^3$ ,  $45 \text{ кг/м}^3$ ,  $60 \text{ кг/м}^3$ ,  $75 \text{ кг/м}^3$ ,  $90 \text{ кг/м}^3$  по три зразки в



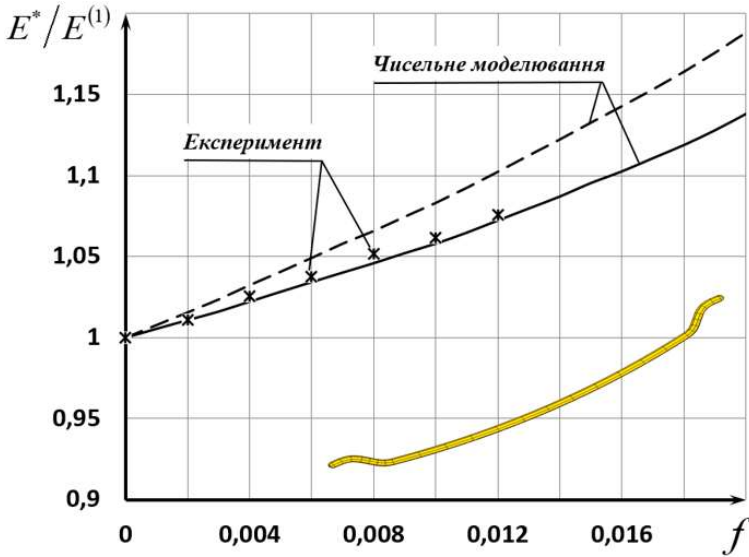


Рис. 24. Результати експерименту та залежність ефективного нормованого модуля Юнга фібробетону армованого криволінійною фіброю (суцільна крива) та прямими волокнами такої ж довжини (штрихова крива) від об'ємної частки фібри.

(власної пружності і натягу). Приведено результати його апробації на прикладах поодиноких та розподілених волокнистих нановключень і трубчастих нанопорожнин з дослідженням ефектів поверхневого натягу та розмірозалежності.

У роботі використана мембранна модель Підстригача–Повстенка–Гуртіна–Мердока деформування таких поверхонь, що передбачає рівність переміщень та стрибки напружень за наближення до міжфазної поверхні  $S$  з боку матриці та нановключення і записується у вигляді диференціальних зв'язків між ними. У введених на поверхні  $S$  локальних системах координат  $O\xi_{1'}\xi_{2'}\xi_{3'}$  (осі  $O\xi_{i'}$  ( $i' = \overline{1,3}$ ) орієнтовані вздовж дотичних  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  та нормального  $\mathbf{n}$  до міжфазної поверхні ортів) мембранні властивості матеріальної поверхні задаються співвідношеннями:

$$u_{i'}^{(1)} = u_{i'}^{(2)} \Rightarrow u_{i'}, \quad i' = \overline{1,3},$$

$$\Delta t_{3'} = \sigma_{3'3'}^{(1)} - \sigma_{3'3'}^{(2)} = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 \sigma_{3'1'}^s)}{\partial \xi_{1'}} + \frac{\partial (h_1 \sigma_{3'2'}^s)}{\partial \xi_{2'}} \right] + \frac{\sigma_{1'1'}^s}{\rho_{1'}} + \frac{\sigma_{2'2'}^s}{\rho_{2'}},$$

$$\Delta t_{i'} = \sigma_{3'i'}^{(1)} - \sigma_{3'i'}^{(2)} = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_{3-i'} \sigma_{i'i'}^s)}{\partial \xi_{i'}} + \frac{\partial (h_i \sigma_{3-i',i'}^s)}{\partial \xi_{3-i'}} + \sigma_{i',3-i'}^s \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_{3-i'}} - \sigma_{3-i',3-i'}^s \frac{\partial h_{3-i'}}{\partial \xi_{i'}} \right] - \frac{\sigma_{3'i'}^s}{\rho_{i'}}, \quad i' = 1, 2,$$

$$\sigma_{i'i'}^s = \tau_s + (2G_s - \tau_s) \varepsilon_{i'i'} + (\lambda_s + \tau_s) (\varepsilon_{1'1'} + \varepsilon_{2'2'}), \quad \sigma_{i'j'}^s = 2(G_s - \tau_s) \varepsilon_{i'j'} + \tau_s u_{i'j'},$$

$$\sigma_{3'i'}^s = \tau_s \left( \frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{3'}}{\partial \xi_{i'}} - \frac{u_{i'}}{\rho_{i'}} \right), \quad u_{i'j'} = \frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{j'}}{\partial \xi_{i'}} - \frac{u_{i'}}{h_{i'} h_{j'}} \frac{\partial h_{j'}}{\partial \xi_{i'}}, \quad \varepsilon_{i'i'} = \frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{i'}}{\partial \xi_{i'}} + \frac{u_{3-i'}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_{3-i'}} + \frac{u_{3'}}{\rho_{i'}},$$

кожній серії.

На рис. 24 продемонстровано добре узгодження з експериментальними результатами числового моделювання ефективного модуля Юнга фібробетону з відповідною до реальної криволінійною фіброю та розбіжність із випадком числового розгляду прямолінійної фібри.

У сьомому розділі дисертації дається гібридний граничноелементно-скінченнорізницевий алгоритм визначення локальних і ефективних пружних властивостей тривимірних композитних тіл та середовищ з урахуванням нанорівневої матеріальності міжфазних поверхонь



$$\varepsilon_{i'j'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{j'}}{\partial \xi_{i'}} + \frac{1}{h_{j'}} \frac{\partial u_{i'}}{\partial \xi_{j'}} - \frac{u_{i'}}{h_{i'} h_{2'}} \frac{\partial h_{j'}}{\partial \xi_{2'}} - \frac{u_{2'}}{h_{i'} h_{2'}} \frac{\partial h_{j'}}{\partial \xi_{i'}} \right], \quad i' \neq j'; \quad i', j' = 1, 2. \quad (24)$$

Тут  $\tau_s$ ,  $G_s$  і  $\lambda_s$  – задані натяг та пружні сталі Ляме матеріальної поверхні  $S$  з розмірністю  $[H/m]$ ,  $h_i$  – геометричні коефіцієнти Ляме поверхні  $S$ ,  $\rho_{i'}$  – локальні радіуси її головних кривин.

Тоді замкнутість розрахункових рівнянь задачі навантаження безмежної матриці зі сконтактованим через матеріальну поверхню нановключенням досягається доповненням співвідношеннями мембранної моделі (24) граничних інтегральних рівнянь (4), які за неявного врахування неперервності переміщень на поверхні  $S$  записуються як

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta_{1k} - \iint_S \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{t}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \\ & + \delta_{1k} \iint_S \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (\mathbf{n} \Delta t_{3'}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{k} \Delta t_{1'}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{p} \Delta t_{2'}(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S = \delta_{1k} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad k = 1, 2. \quad (25) \end{aligned}$$

У ГІР (22) невідомими є вектори поверхневих переміщень  $\mathbf{u}$  та зусиль  $\mathbf{t}^{(2)}$  зі сторони включення у глобальній системі координат, а також компоненти стрибків напружень  $\Delta t_{i'}$  ( $i' = \overline{1,3}$ ) на матеріальній міжфазній поверхні у локальній системі координат. Часткове задоволення у ГІР (25) умов присутності матеріальної поверхні лише щодо переміщень виправдане з огляду на задання решти умов диференціальними залежностями.

Відмінність розмірностей поверхневих та об'ємних пружних сталей у системі «матриця-матеріальна міжфазна поверхня-нановключення» породжує ефект розмірозалежності, коректне врахування якого з введенням характерного розміру  $R$  досягнуто переходом у рівняннях (24) та (25) до безрозмірних величин  $\tilde{u}_{i'} = u_{i'}/R$ ,  $\tilde{t}_i^{(2)} = t_i^{(2)}/G^{(1)}$ ,  $\Delta \tilde{t}_{i'} = \Delta t_{i'}/G^{(1)}$  ( $i' = \overline{1,3}$ ),  $\tilde{\tau}_s = \tau_s/G^{(1)}R$ ,  $\tilde{\lambda}_s = \lambda_s/G^{(1)}R$ ,  $\tilde{G}_s = G_s/G^{(1)}R$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}^{(k)} = RG^{(1)}\mathbf{U}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}^{(k)} = R^2\mathbf{T}^{(k)}$ .

У роботі здійснена деталізація рівнянь (24) щодо опису деформування матеріальної поверхні нановключення сфероциліндричної форми. Так для сферичної її частини із залученням сферичної системи координат  $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$ ;  $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$ ;  $x_3 = r \cos \theta$ ;  $0 < \theta < \pi$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$  та виразів головних кривин та коефіцієнтів Ляме сферичної поверхні  $\rho_\varphi = R$ ;  $\rho_\theta = R$ ;  $h_{1'} = R \sin \theta$ ;  $h_{2'} = R$  використано трансформацію цих рівнянь до вигляду

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{t}_n = 2\tilde{\tau}_s + 2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) & \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{u}_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + 2(2\tilde{G}_s + 2\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \tilde{u}_n - \\ & - \tilde{\tau}_s \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \theta^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{t}_\varphi = & -\frac{2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s)}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \varphi} - \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} - \\
& -\tilde{G}_s \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} \right] + \left[ \operatorname{ctg}^2 \theta \tilde{G}_s - \tilde{G}_s + 2\tilde{\tau}_s \right] \tilde{u}_\varphi; \\
\Delta \tilde{t}_\theta = & -2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} - \frac{\tilde{G}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi^2} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - \frac{\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \\
& + \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + (\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \operatorname{ctg}^2 \theta) \tilde{u}_\theta. \quad (26)
\end{aligned}$$

У циліндричній системі координат  $x_1 = r \cos \varphi$ ;  $x_2 = r \sin \varphi$ ;  $x_3 = z$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$  отримано також варіант рівнянь (21) для циліндричної частини такої поверхні з параметрами  $\rho_z = \infty$ ;  $\rho_\varphi = R$ ;  $h_1 = R$ ;  $h_2 = 1$ , а саме

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{t}_n = & \tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \tilde{u}_n - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + (\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial z^2}; \\
\Delta \tilde{t}_\varphi = & -(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - (\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z \partial \varphi} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial z^2} + \tilde{\tau}_s \tilde{u}_\varphi; \\
\Delta \tilde{t}_z = & -(\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial z} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \varphi^2} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} - (\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial z \partial \varphi}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Таким чином у випадку сфероциліндричного нановключення зв'язана система розрахункових рівнянь приведена до шести (у скалярній формі) інтегральних (25) і трьох диференціальних рівнянь на сферичній (26) та циліндричній (27) частинах його поверхні з погодженням невідомих умовами деформаційної сумісності на стику цих

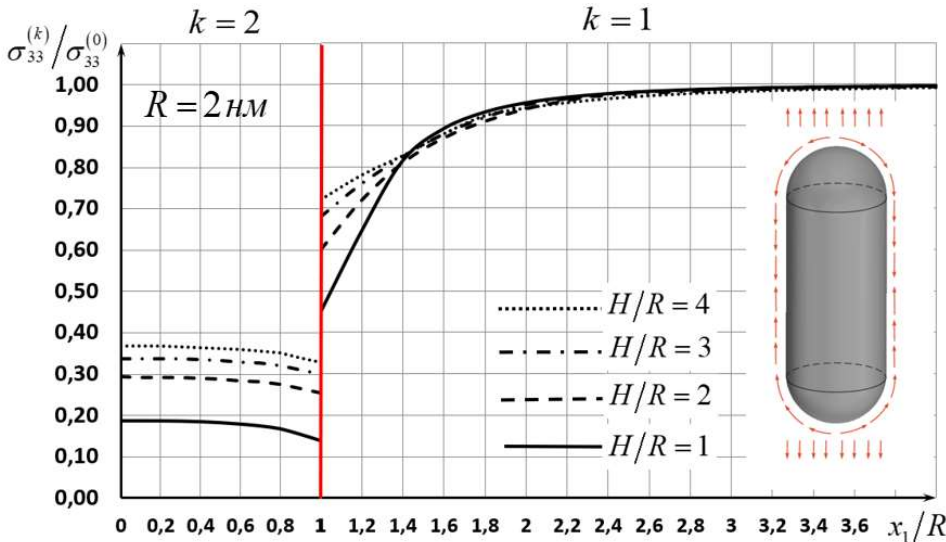


Рис. 25. Розподіл нормальних напружень у площині серединного перерізу сфероциліндричного нановключення за комбінованого навантаження натягом міжфазної поверхні  $\tau_s$  та віддаленим осьовим розтягом  $\sigma_{33}^{(0)} = \tau_s / R$ .

поверхонь. Як окрему, отримано систему шести скалярних рівнянь (по три інтегральних і диференціальних) для сфероциліндричної нанопорожнини у пружному тілі. Дискретизація інтегральних рівнянь проведена описаними у другому розділі граничноелементними підходами, у диференціальних рівняннях дотичні похідні від компонент вектора переміщень апроксимувались

скінченними різницями на вузлах, які збігаються з опорними граничноелементної сітки.

Як тестові, для числового аналізу використовувались відомі з літератури аналітичні результати щодо розподілів напружень у матриці із сферичними нановключенням та нанопорожниною. Точність у межах 0,5 % відносного відхилення забезпечувалась на сітці з 512 суперпараметричних граничних елементів та з використанням скінченнорізницевого дво- (для наближення перших похідних), три (для однойменних других) та п'ятиточкового (для змішаних) шаблонів на опорних вузлах цієї сітки.

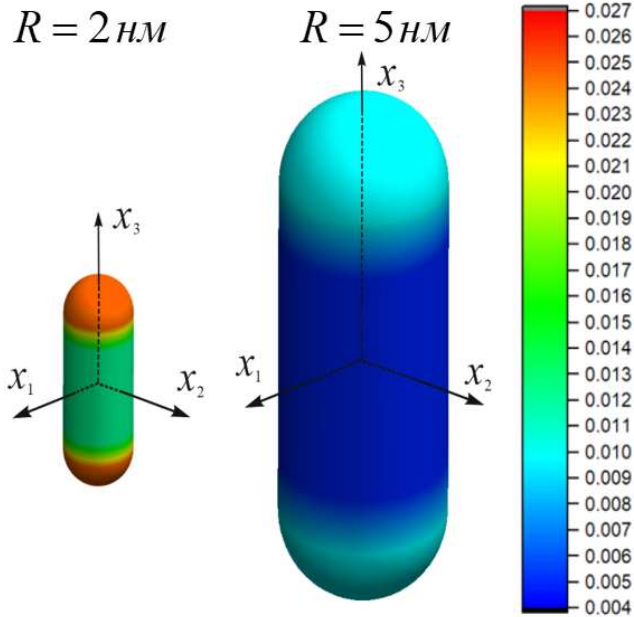


Рис. 26. 3-D діаграми викликані натягом  $\tau_s = 1,7 \text{ Н/м}$  розподілів відносного модуля вектора зусиль на поверхні нанопорожнини з відносною висотою  $H/R = 3$ .

Для матриці з нановключенням у формі скінченного сфероциліндричного волокна досліджено напружено-деформований стан компонент за заданого натягу міжфазної поверхні, а також у комбінуванні з віддаленим навантаженням матриці. Рис. 25 стосується напружень в серединному перерізі сфероциліндричного кремнієвого включення ( $G_2 = 69,4 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_2 = 0,3$ ) різної відносної довжини, спричинених поверхневим натягом  $\tau_s = 0,72 \text{ Н/м}$  матеріалізованої міжфазної поверхні ( $G_s = -6,218 \text{ Н/м}$ ,  $\lambda_s = 3,489 \text{ Н/м}$ ) та навантаженням алюмінієвої матриці ( $G^{(1)} = 34,7 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ) зусиллями  $\sigma_{33}^{(0)} = \tau_s/R$  вздовж осі включення.

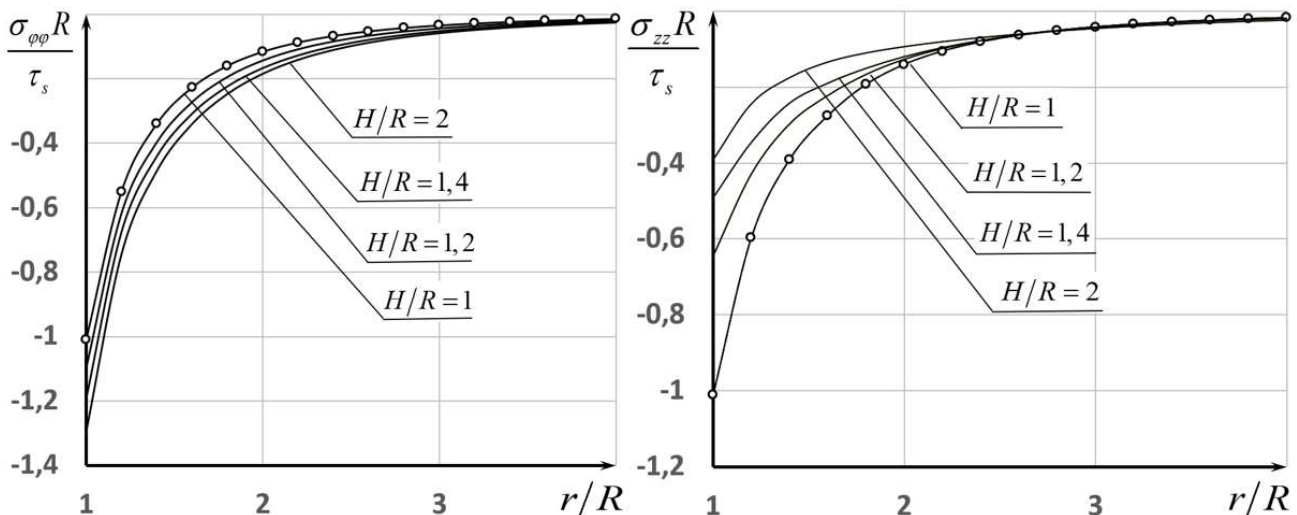


Рис. 27. Розподіл нормальних напружень в площині серединного перерізу сфероциліндричної нанопорожнини радіуса 5 нм за натягу її поверхні.

Числове виявлення впливу матеріальної поверхні пустотних наповнювачів проведено шляхом розрахунків стосовно сфероциліндричної нанопорожнини за її поверхневого натягу у матеріалі з характеристиками  $G_1 = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = 0,26$  та з поверхнею

зі свіжосколотого заліза  $G_s = 2,5 \text{ Н/м}$ ,  $\lambda_s = -8 \text{ Н/м}$ ,  $\tau_s = 1,7 \text{ Н/м}$  (рис. 26, 27).

Встановлено, що волокнисті включення та трубчасті порожнини внаслідок можливості маніпуляції їх поздовжнього і поперечного нанорозмірів приводять до урізноманітнення наноефектів, зокрема масштабного, з особливою роллю циліндричних частин поверхонь щодо розподілу та концентрації напружень у тілі, наприклад посилення тангенціальних до циліндричної поверхні напружень стиску від її натягу за збільшення висоти  $H/R$  з відповідним внеском у нанозміцнення.

З метою використання отриманих граничноелементних розв'язків як конструктивних в гомогенізаційній схемі Морі-Танакі запропоновано її узагальнення на випадок стрибків напружень на міжфазних поверхнях у композиті з розподіленими скінченними нановолокнами у вигляді

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^*)^{-1} = & (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} + f \left[ \left( (\mathbf{C}^{(2)})^{-1} - (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} \right) : \mathbf{B}^{(2)} + (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \mathbf{B}^{(12)} \right] : \\ & : \left[ (1-f)\mathbf{I} + f(\mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(12)}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

За такого узагальнення гомогенізаційні співвідношення (28) щодо тензора ефективних модулів пружності вміщують поряд із класичним тензором впливу  $\mathbf{B}^{(2)}$ , тензор впливу матеріалізованої міжфазної поверхні  $\mathbf{B}^{(12)}$ . Компоненти цих тензорів визначаються поверхневими інтегралами

$$B_{ijml}^{(2)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S t_i^{(2)ml} x_j dS; \quad B_{ijml}^{(12)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S \Delta t_i^{ml} x_j dS,$$

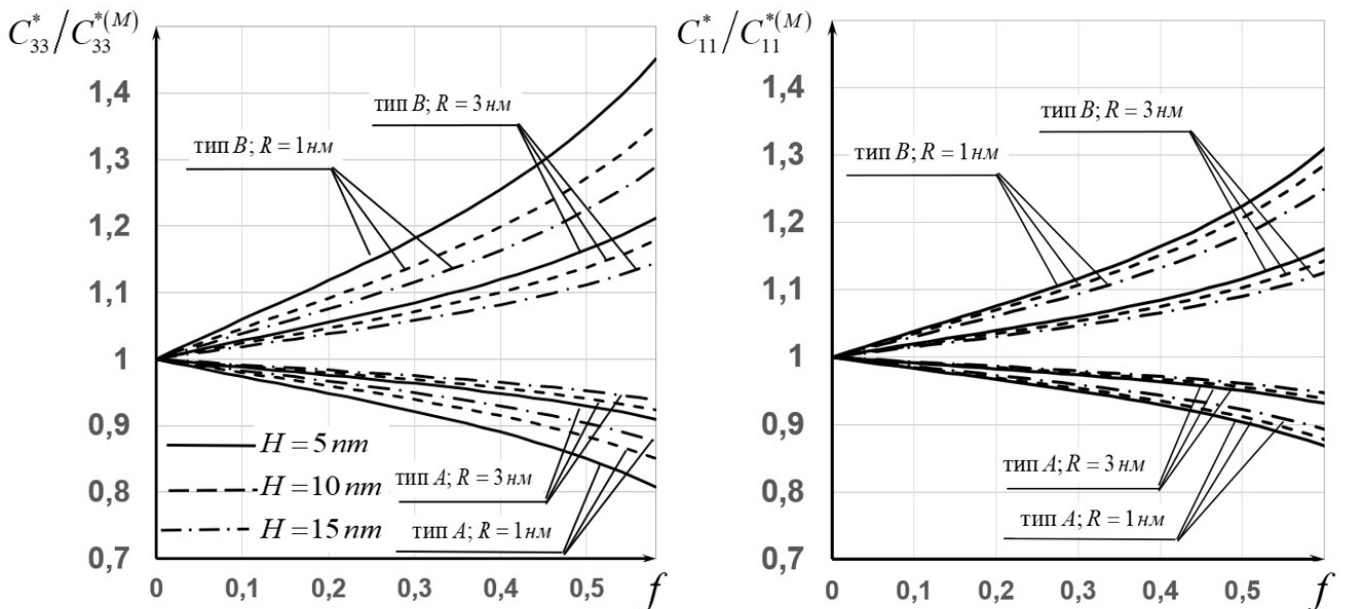


Рис. 28. Віднесені до аналогів для макропористого середовища поздовжній (зліва) та поперечний (справа) ефективні модулі пружності нанопористого середовища з однаково орієнтованими трубчастими нанопорами у залежності від концентрації порості.

де присутні під інтегралами зусилля на поверхні включення та стрибки зусиль на матеріалізованій поверхні  $S$  отримуються граничноелементним розв'язанням задач для

шістьох елементарних типів силового навантаження безмежної матриці з волокнистим нановключенням. Перехід до відповідного аналізу нанопористого середовища з наповнювачами трубчастої форми здійснюється зануленням у формулі (28) тензора впливу  $\mathbf{V}^{(2)}$  та підстановкою у неї розв'язків задач для безмежного простору з нанопорожниною.

Запропонованим числовим підходом розраховано ефективний 2D модуль всебічного стиску алюмінієвого середовища зі сферичними нанопорами для двох варіантів  $A$  і  $B$  кристалографічної поляризації на їх поверхнях та зафіксовано його узгодження з визначеним у літературі аналітично. Дані щодо пружних характеристик таких поверхонь наведено у роботі Міллера та Шеноу: для поверхні типу  $A$  (з орієнтацією відносно кристалографічних напрямків  $[100]$ )  $G_s^A = -6,218 \text{ Н/м}$ ,  $\lambda_s^A = 3,489 \text{ Н/м}$ ; для типу  $B$  (з орієнтацією  $[111]$ )  $G_s^B = -0,376 \text{ Н/м}$ ,  $\lambda_s^B = 6,842 \text{ Н/м}$ .

Результати поширено на дослідження ефективних модулів пружності нанопористого середовища з однорідно розподіленими, однаково (рис. 28) та хаотично орієнтованими сфероциліндричними нанопорожнинками (макроскопічно трансверсально ізотропного для першої та ізотропного для другої конфігурацій порожнин). Проаналізовано контраст пружних властивостей такого нанопористого середовища стосовно макропористого з наповнювачами такої ж форми та концентрації з фіксацією як більших, так і менших ефективних модулів пружності залежно від типу матеріальних поверхонь, та досліджено вплив на цей контраст видовження пустот.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему з розроблення базованих на інтегральних формулюваннях задач, граничноелементних алгоритмів числового дослідження тривимірного напружено-деформованого стану композитних тіл і ефективних модулів пружності композитних середовищ з об'ємисто-неканонічними, тонкостінними і нанорозмірними включеннями та впливу на механічні властивості таких структур взаємодії включень, внутрішніх тріщин і недосконалостей міжфазного контакту. В основу проведених досліджень покладено такі результати:

1. З використанням методу підобластей в інтегральних поданнях розв'язків та граничних інтегральних рівняннях тривимірних задач теорії пружності для матриці з ідеально сконтактованим об'ємистим включенням впроваджено неявне врахування умов неперервної передачі переміщень і зусиль через міжфазну поверхню загальної форми.

2. Розроблено процедури додискретизаційної регуляризації сингулярних ядер та післядискретизаційної регуляризації слабосингулярних ядер отриманих граничних інтегральних рівнянь на сітках ізо- та суперпараметричних граничних елементів з отриманням універсальних щодо форми та типу елементів виразів коефіцієнтів дискретних аналогів рівнянь через значення фундаментальних розв'язків, функцій форми, інтерполяційних функцій та якобіанів регуляризуючих відображень у точках локації.

3. Граничноелементні схеми узагальнено на числове розв'язання інтегральних рівнянь дуального типу (у переміщеннях і напруженнях), якими описується взаємодія пружних об'ємистих, тонкостінних податливих та жорстких включень і тріщин між

собою у необмеженій матриці та з зовнішньою поверхнею у обмеженому композитному тілі.

4. Для розріджено-великих систем тонкостінних включень і тріщин у пружній матриці запропоновано модифікацію граничноелементного підходу до числового аналізу їх взаємодії на основі ітерації полів одностороннього впливу з отриманням розщеплених систем розрахункових рівнянь.

5. Здійснено граничноелементну апроксимацію розв'язків інтегральних рівнянь у локальних системах координат з повним або частковим неявним врахуванням неідеального контакту між об'ємистим включенням і матрицею внаслідок проковзування, присутності тонкого прошарку чи нанорівневої матеріалізації міжфазної поверхні. Шляхом комбінованого вибору невідомих у глобальній та локальних системах координат забезпечено уніфікацію процедур регуляризації та дискретизації рівнянь для різних умов контакту на міжфазній поверхні.

6. Для задач з нанорозмірним включенням замкнутість розрахункових рівнянь досягнуто поєднанням граничноелементного дискретного аналога із скінченнорізничевим щодо співвідношень деформування матеріальної міжфазної поверхні. У випадку міжфазної поверхні, складеної із півсферичних і циліндричної частин (за розгляду скінченного нановолокна), проведено узгодження шуканих величин в різних системах координат та доповнення числової моделі умовами деформаційної сумісності підповерхонь.

7. Реалізовано схему безпосереднього внесення граничноелементних розв'язків у співвідношення гомогенізації пружних середовищ з розподіленими скінченними волокнами та порожнинами, зокрема в узагальнені моделі для неідеального та нанорівневого контакту компонент, які допускають існування стрибків переміщень або напружень на міжфазних і пустотних поверхнях.

Створений числовий інструментарій застосовано для визначення розподілів переміщень, напружень і ефективних модулів пружності у тривимірних композитних тілах та середовищах у залежності від геометричної форми включень, розміру нановключень, комбінації матеріалів у системі, взаємного розташування включень, тріщин та зовнішніх поверхонь, умов контакту включень з матрицею, показника об'ємної фракції та просторової орієнтації розподілених включень. Отримані числові результати дозволяють зробити такі висновки.

1. У тривимірних задачах навантаження безмежної пружної матриці з поодиноким включенням у вигляді скінченного циліндричного волокна за їх ідеального і неідеального контакту виявлено, що:

- специфіка форми включення проявляється у неоднорідності напружень у ньому навіть за однорідного навантаження матриці (на відміну від включення сфероїдної форми), вказана неоднорідність суттєвіша за наближення до поверхні волокна, більшого його видовження та контрасту жорсткості щодо матричної, а також за сплюснення торців та викривлення волокна. Наприклад, за розтягу матриці вздовж осі скінченного циліндричного волокна з відносною жорсткістю  $G_2/G_1 = 100$  щодо матричного матеріалу відхилення в розподілі нормальних напружень вздовж його осі у 1,5 разів менше для волокна зі сферичними торцями, ніж з плоскими тор-

цями. У серединному перерізі скінченного сфероциліндричного волокна з викривленою по дузі кола віссю зафіксовано точку інваріантності нормальних напружень щодо кривизни осі волокна на відстані  $0,33R$  від центра цього перерізу;

- неоднорідність напружень у волокні породжує зони їх концентрації, які можуть локалізуватись як у торцевій (для  $G_2/G_1 < 1$ ), так і серединній (для  $G_2/G_1 > 1$ ) частинах волокна. У жорсткому скінченому волокні зі сферичними торцями напруження в серединній його частині у 2-3 рази більше ніж у торцевій залежно від його довжини;
- міжфазне проковзування чи тонкий податний прошарок між матрицею і сфероциліндричним волокном є факторами зниження (релаксації) напружень з більш виразним проявом для видовжених волокон. Так за всебічного стиску матриці з волокном ковзний міжфазний контакт знижує нормальні напруження у серединному перерізі волокна на 10 – 40 % залежно від його відносної довжини та жорсткості. За розтягу епоксидної матриці зі скляним волокном, збільшення в 4 рази податливості тонкого міжфазного прошарку між ними зменшує концентрацію осьових нормальних напружень у матриці на 12-15 % залежно від товщини прошарку та відносної довжини волокна.

2. У тривимірних задачах взаємодії об'ємистих сфероциліндричних включень (скінчених волокон), тонкостінних дискових включень та кругових (еліптичних) тріщин у безмежній матриці і обмежених порожнистому циліндрі і призматичному тілі встановлено, що

- розташування тріщини поряд з міжфазною поверхнею як зі сторони матриці (матрична тріщина), так і волокна (волоконна тріщина) позначається на монотонності зміни КІН вздовж фронту дефекту та точках екстремальних значень КІН залежно від взаємного положення взаємодіючих об'єктів та жорсткостей волокон, у загальному сенсі виражається також у збільшенні чи зменшенні максимальних КІН. Зафіксовано збільшення КІН у ближній точці контуру кругової тріщини радіуса  $R$  до поверхні м'якого сфероциліндричного включення ( $G_2/G_1 = 0,1$ ) з рівновеликим з тріщиною серединним перерізом до 1,7 рази для матричних тріщин і до 12 разів для тріщин волокна порівняно з випадком поодинокі матричної тріщини залежно від довжини волокна. Характерним є спад такої взаємодії за віддалення тріщин, включень і зовнішніх поверхонь;
- для матричної і волоконної тріщин прослідковано порогове значення видовження волокна, за яким його вплив на КІН в околі дефекту нівелюється. Зокрема, гранична піввисота волокна, збільшення якої не приводить до зміни КІН для тріщини радіусу  $R$ , становить  $H = 6R$  у випадку матричної тріщини і  $H = 16R$  у випадку волоконної для матеріалу волокон, вдсятеро м'якішого за матричний, тоді як для вдсятеро жорсткіших за матрицю волокон ця регулярність виникає з довжини  $H = 14R$  у випадку матричної тріщини і  $H = 30R$  у випадку волоконної;
- ковзний контакт між матрицею та волокном приводить до зростання КІН в околі сусідньої матричної тріщини навіть за розгляду жорсткіших щодо матриці волокон (зафіксовано 5-30 % збільшення залежно від розташування та геометричних розмірів волокна). Також виявлено спеціальні ситуації такого контакту, коли КІН в околі матричної тріщини такі ж, як за її взаємодії з ідеально сконтактованим з матрицею волокном, чи збігаються з КІН за відсутності волокна;



- на контурі кругових тонкостінних податливих включень спостерігаються локальні максимуми КІН у точках наближених до зовнішньої поверхні обмеженого тіла, які є менш виразними, якщо поверхня навантажена тиском. Зменшення радіусу кривини зовнішньої поверхні тіла, модуля зсуву матеріалу включень та їх товщини приводить до збільшення КІН на контурі таких приповерхневих тріщинних неоднорідностей.
- наявність внутрішнього тиску  $p/G_0 = 0,03$  на викривлену поверхню порожнистого циліндра радіусом  $R = 90a$  зменшує КІН на контурі внутрішньої приповерхневої кругової тріщини радіусом  $a$  на 2-10 % залежно від її наближення до поверхні порівняно з випадком відсутності такого тиску;
- поздовжня внутрішня газонаповнена тріщина у порожнистому циліндрі, навантаженому внутрішнім тиском, збільшує кільцеві напруження на його зовнішній поверхні в 4 рази за умови зростання тиску газу у тріщині до рівня внутрішнього тиску у циліндрі.

4. Дослідження ефективних пружних властивостей композитних середовищ показали, що:

- викривлення осі коротких пружних волокон з відносною жорсткістю  $G^{(2)}/G^{(1)} = 10$ , як і ковзні умови їх зчеплення з матрицею, знижують ефективні модулі Юнга макроізотропного композиту з  $\nu$  у 1,5-2 рази за об'ємної частки наповнювача  $f = 0,3$  відносно ефективних модулів Юнга композиту армованого прямими ідеально сконтатованими з матрицею волокнами. Водночас ефективні коефіцієнти Пуассона зростають на 3-10 %;
- для фібробетонів, армованих сталлюю фіброю з стандартною густиною наповнювача  $60 \text{ кг/м}^3$ , неврахування кривизни осі сталлюю фібри призводить до похибки у визначенні ефективного модуля Юнга на 2-3 %;
- збільшення вдвічі відносної довжини ідеально зконтатованого з матрицею волокна з об'ємною часткою  $f = 0,2$  макроскопічно ізотропного композиту з  $5R$  до  $10R$  приводить до зростання ефективного модуля Юнга від 6 % для відносної жорсткості наповнювача  $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$  до 30 % для відносної жорсткості наповнювача  $E^{(2)}/E^{(1)} = 100$ . Для випадку ковзного контакту волокон з матрицею таке збільшення відбувається на 1-2 % незалежно від його відносної жорсткості;
- за ковзного контакту з матрицею прямих сфероциліндричних хаотично орієнтованих і випадково розташованих волокон за відносної їх жорсткості  $E^{(2)}/E^{(1)} > 50$  ці волокна можна вважати абсолютно жорсткими, оскільки цей параметр практично не впливає на ефективні пружні властивості макроскопічно ізотропного композиту. Ефективний коефіцієнт Пуассона такого середовища крім того не залежить від відносної довжини волокон.

5. У тривимірних задачах визначення нанорівневих локальних і ефективних пружних властивостей тривимірних композитних тіл та середовищ, встановлено, що:

- наповнення структури трубчастими нанопорами за різного їх видовження та типу матеріальних поверхонь розширює інструментарій керованої макроскопічної ані-



зотропії нанопористого матеріалу та досягнення контрасту ефективних властивостей щодо макропористого середовища через регулювання його ефективних властивостей (збільшення або зменшення ефективних пружних модулів за сталої об'ємної частки порот).

- ефекти поверхневого натягу та розмірозалежності проявляються як при визначенні локальних полів напружень так і за оцінки цілісних характеристик неоднорідних тіл за умови розміру неоднорідностей від 30 нм і менше;
- для сфероциліндричної нанопори у свіжосколотому залізі з геометричним параметром  $H = 3R$  поверхневі зусилля зменшуються в 2 рази, коли радіус серединного перерізу збільшується з  $R = 2\text{ нм}$  до  $R = 5\text{ нм}$ ;
- ефект нанозміцнення для трубчастої нанопорожнини за наближення до серединного її перерізу зі сторони матриці на 60 % менший, ніж за наближення до сферичної нанопорожнини такого ж радіуса;
- для керамічного нановключення сфероциліндричної форми ефект нанозміцнення в центральній його частині зменшується вдвічі за збільшення його відносної довжини в 4 рази.

### **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:**

1. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Stress intensification due to the crack outside/inside a finite fiber in 3-D elastic matrix. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 80. P. 133–142. (10.1016/j.tafmec.2015.10.002).
2. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 452–455. (10.4028/www.scientific.net/SSP.258.452).
3. Stasyuk B.M. Interacting cracks 3D analysis using boundary integral equation method. *AIMS Materials Science*. 2016. 3(4). P. 1796–1810. (10.3934/matensci.2016.4.1796).
4. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы. *Прикладная механика*. 2007. 43 (4). С. 27–35. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Numerical solution of three-dimensional static problems of elasticity for a body with a noncanonical inclusion. *International Applied Mechanics*. 2007. 43 (4). P. 380–387. (10.1007/s10778-007-0033-7).
5. Стасюк Б.М. Метод ефективного поля напружень в тривимірних задачах про взаємодію плоских тріщин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2009. 45 (1). С. 33–42. Те саме: Stasyuk B.M. Method of effective stress field in three-dimensional problems of interaction of plane cracks. *Materials Science*. 2009. 45(1). P. 28–40. (10.1007/s11003-009-9157-8).
6. Стасюк Б.М. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на напруження в околі сусідньої тріщини. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. 49 (6). С. 28–35. Те саме: Stasyuk B.M. Influence of a Gas-Filled Cavity of Complex Shape on Stresses in the Vicinity of a Neighboring Crack. *Materials Science*. 2014. 49 (6). P. 734–742 (10.1007/s11003-014-9668-9).
7. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Упругое состояние включения неканонической

- форми при умови скользящего контакту з трьохмерною матрицею. *Прикладна механіка*. 2015. 51 (6). С. 42–51. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix. *International Applied Mechanics*. 2015. 51 (6). P. 640–647. (10.1007/s10778-015-0720-8).
8. Стасюк Б.М., Крет Н.В., Звірко О.І., Штойко І.П. Аналіз напруженого стану труби газопроводу з макродефектом, ініційованим воднем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2019. 55 (1). С. 113–118. Те саме: Stasyuk B. M., Kret N.V., Zvirko O.I., Shtoiko I.P. Analysis of the Stressed State of a Pipe of Gas Pipeline with Hydrogen-Induced Macrodefect. *Materials Science*. 2019. 55 (1). P. 1–6. (10.1007/s11003-019-00259-2).
  9. Стасюк Б.М. Ефекти від поверхневого натягу сфероциліндричної нанопори у пружному середовищі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. 62 (3). С. 48–56. Те саме: Stasyuk B.M. Effects of the surface tension of a spherical-cylindrical nanopore in the elastic medium. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. 263 (1). P. 52–61. (10.1007/s10958-022-05906-9).
  10. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Ефективні модулі упругості коротковолокнистого композита при скользящем контакті на межфазних поверхностях. *Механіка композитних матеріалів*. 2021. 57 (5). С. 901–916. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic moduli of short-fiber composite with sliding contact conditions at interfaces. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. 57 (5), P. 635–646. (10.1007/s11029-021-09985-8).
  11. Хай М.В., Станкевич В.З., Стасюк Б.М. До теорії механіки руйнування. *Машинознавство*. 2002. № 11. С. 3–19.
  12. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *Машинознавство*. 2005. № 2. С. 17–21.
  13. Стасюк Б.М. Напружений стан гранульованих композитів у випадку рівності коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці і включення. *Машинознавство*. 2006. № 5. С. 14–22.
  14. Стасюк Б.М. Приближенне аналітичне рішення задачі о взаємодії компланарних дискообразних тріщин в упругому просторі. *Теоретическая и прикладная механика*. 2008. Вып. 44. С. 48–54.
  15. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. *Машинознавство*. 2009. № 10. С. 9–14.
  16. Стасюк Б.М. Напруження у порожнистому циліндрі, послабленому множинними тріщиноподібними дефектами. *Допов. НАН України. Механіка*. 2021. № 3. С. 33–39.
  17. Хай М.В., Стасюк Б.М. Про спрощення розрахунку на міцність пружних тіл, що містять плоскі тріщини. *5-й міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп.* (Львів, 16-18 травня 2001). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2001. С. 16–17.
  18. Хай М.В., Стасюк Б.М. Модифікований метод граничних інтегральних рівнянь при розрахунку на міцність тіл, послаблених великою кількістю взаємодіючих тріщин. *6-й міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: тези доповіді.* (Львів, 21-23 травня 2003). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2003. С. 44.
  19. Стасюк Б.М. Про міцність тіла, послабленого плоскою неоднорозв'язною тріщиною

- з коловими контурами. *Вісник НУ "Львівська політехніка". Динаміка, міцність та проектування машин і приладів.* 2003. № 483. С. 90–97.
20. Стасюк Б.М. Визначення концентрації напружень в околі багатозв'язної плоскої тріщини з внутрішніми контурами змінної кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*: Матеріали 3-ї міжнародної конференції під редакцією В.В. Панасюка. (Львів, 2004). Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка. 2004. С. 333–340.
  21. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *7-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 18-20 травня 2005). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2005. С. 44.
  22. Стасюк Б.М. Вплив наявності тріщин на напружений стан гранульованого композита. *8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 23-25 травня 2007). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2007. С. 53.
  23. Стасюк Б.М. Взаємодія тріщин та порожнин складної форми у безмежному пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 2-ї міжнародної конференції. (Львів, 22-24 жовтня, 2008). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2008. С. 77–78.
  24. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. *9-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 20-22 травня 2009). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2009. С. 100–102.
  25. Стасюк Б.М., Кіндрацький Б.І. Взаємодія в безмежному тілі плоских тріщин та тонких пружних включень малої жорсткості. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Матеріали 4-ї міжнародної конференції під ред. З. Назарчука, Б.І. Кіндрацького. (Львів, 11-13 листопада, 2010). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2010. – С. 485–490.
  26. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Децик Т.Б. Гранично-рівноважний стан бруса круглого попереччя з внутрішньою тріщиною під поперечним згином. *Вісник НУ „Львівська політехніка”, фізико-математичні науки.* 2011. № 718. С. 81–85.
  27. Kindratsky V. I., Stasiuk V. M. Three-dimensional elastic problem for a limited bodies with crack. *Fracture Mechanics of Materials*. proc. Second Ukrainian-Greek Symposium (Lviv, October 3–7 2011). Lviv: SPOLOM. 2011. P. 39–42.
  28. Стасюк Б. М. Пружна рівновага об'ємного включення довільної форми, що містить плоску тріщину. *10-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 25-27 травня 2011). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2011. С. 114–116.
  29. Стасюк Б. М. Взаємодія газонаповнених об'ємних порожнин у пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 3-ї міжнародної конференції. (Львів, 7-9 листопада, 2012). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2012. С. 56–57.
  30. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Концентрація напружень в околі плоскої тріщини та об'ємного пружного включення за умови їх взаємодії. *Сучасні проблеми механіки і математики*. Збірник наукових праць т. 2. Під ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. Львів. 2013. С. 74–76.
  31. Стасюк Б.М. Модель гладкого контакту об'ємного пружного включення довільної форми з безмежним тілом. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів-*

- механіків у Львові: тези доп.* (Львів, 15-17 травня 2013). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2013. С. 54–55.
32. Стасюк Б.М. Напружено-деформований стан магістрального трубопроводу, послабленого приповерхневою осьовою тріщиною. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. 4-ї міжнародної конференції.* (Львів, 30-31 жовтня, 2014). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2014. С. 91–92.
  33. Стасюк Б.М. Експериментальне та теоретичне визначення ефективних модулів пружності фібробетону. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наук. праць ІХ Міжнародної наукової конференції за ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра.* Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 156–158.
  34. Myk'as'kiv V. V., Stasyuk B. M. Effective elastic properties of 3D nanocomposites reinforced by short-fiber with Gurtin-Murdoch model of interphase. *Nanotechnology and nanomaterials. Abstract Book of participants of the international research and practice conference.* (Kyiv, August 27-30). Kyiv: SME Burlaka. 2018. P. 243.
  35. Стасюк Б.М. Моделювання поверхневого натягу в тривимірних нанокompозитах за умови змінної кривини міжфазної поверхні. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. збірник наукових праць Х Міжнародної наукової конференції за ред. Р.М. Кушніра, Г.С. Кіта.* Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2019. С. 144–145.

**Анотація. Стасюк Б.М. Гранично-елементний аналіз пружних властивостей тривимірних композитних структур з неканонічними включеннями та дефектами. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2024.

У дисертації розроблено узагальнені моделі та високопродуктивні алгоритми методу граничних елементів для аналітично-числового визначення тривимірного напружено-деформованого стану необмежених і обмежених композитних тіл та ефективних пружних властивостей композитних середовищ з включеннями неканонічної форми за ідеального і неідеального їх контакту з матрицею з урахуванням взаємодії включень між собою та з внутрішніми і матричними тріщинами.

Із застосуванням методу підобластей побудовано адаптовані до різнотипних контактних умов гранично-інтегральні формулювання тривимірних статичних задач пружної рівноваги необмежених та обмежених композитних тіл з об'ємистими включеннями неканонічної форми, тонкостінними неоднорідностями та плоскими тріщинами. Введено в аналіз ефективні поля напружень для наближеного врахування граничноелементними розв'язками взаємодії у множинних системах включень і тріщин.

Граничноелементні розв'язки задач для безмежних композитних тіл залучено до визначення ефективних властивостей композитних середовищ з наповнювачем неканонічної форми за його досконалого та недосконалого контакту з матричним середовищем та впорядкованою або хаотичною орієнтацією через гомогенізаційні схеми

Морі-Танаки, які узагальнено на присутність у структурі розривів міжфазних переміщень або напружень.

Проаналізовано тривимірні поля переміщень, напружень і ефективні модулі пружності для композитних тіл і середовищ з поодинокими, множинними і розподіленими включеннями неканонічної форми, тонкими прошарками і матеріалізованими поверхнями поділу складових, внутрішніми і інтерфейсними структурними дефектами та виявлено ефекти концентрації пружних полів, макромеханічної ізотропії і анізотропії та нанорівневі ефекти розмірозалежності.

**Ключові слова:** композитна структура, включення, тріщина, тонкий міжфазний прошарок, матеріалізована поверхня, нановключення, гомогенізація, метод граничних інтегральних рівнянь, метод граничних елементів, ефективні модулі пружності, коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Abstract. Stasyuk B.M. Boundary element analysis of elastic properties of three-dimensional composite structures with non-canonical inclusions and defects. – Manuscript.**

The thesis presented for a Doctor Degree in Physics and Mathematics (specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids). – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2024.

In this dissertation, generalized models and high-performance algorithms of the boundary element method are developed for analytical and numerical determination of the three-dimensional stress-strain state of unbounded and bounded composite bodies and effective elastic properties of composite media with non-canonical inclusions under ideal and imperfect contact with the matrix, taking into account the interaction of inclusions with each other and with internal and matrix cracks.

Using the method of subdomains, adapted to various contact conditions the boundary-integral formulations of three-dimensional static problems of elastic equilibrium of unbounded and bounded composite bodies with voluminous inclusions of non-canonical shape, thin-walled inhomogeneities and plane cracks are constructed.

A two-step regularization of the systems of singular integral equations with their pre-discretization analytical representation in a weakly singular form and post-discretization elimination of singularities based on the approximation of the interfacial surface by a mesh of superparametric or isoparametric boundary elements and non-affine regularizing mappings of their domains is applied.

The proposed analytical and numerical procedures for discretization and regularization are extended to solve dual integral formulations of three-dimensional problems of elastic interaction of bulk inclusions of non-canonical shape with thin-walled inhomogeneities and plane cracks that weaken both the matrix and the filler phases of a composite body.

Effective stress fields are introduced into the analysis for the approximate consideration of interaction in multiple systems of inclusions and cracks by boundary element solutions. A numerical study of the influence of fillers of different shapes, stiffnesses, and locations on the crack-like defects of a composite body is carried out.

By the combined representation of unknown interfacial displacements and forces in the global and local (linked to the topology of the interfacial surface) coordinate systems, the conditions for conjugation of imperfect contact of the components of the composite body

are implicitly taken into account in the systems of boundary integral equations of three-dimensional problems on the sliding or spring model of the connection of a volumetric inclusion of non-canonical shape with a matrix medium.

Boundary-element solutions of problems for infinite composite bodies are used to determine the effective properties of composite media with a filler of non-canonical shape under its perfect and imperfect contact with the matrix medium and with ordered or random orientation through the Mori-Tanaka homogenization schemes, which are generalized to the presence of discontinuities of interfacial displacements or stresses in the structure. Under the condition of the action of a homogeneous strain field in the first case and a stress field in the second at the boundary of a representative volume element, the components of these tensors are expressed only through jumps in the corresponding boundary values of the stress-strain state of this element, which allows their calculation by integrating boundary element solutions of problems for an infinite matrix with a single inclusion of a given configuration. To calculate the effective elastic moduli of a macroscopically isotropic composite medium with randomly oriented uniformly distributed short fibers, an additional averaging of the tensor of effective elastic moduli of a composite with orderly oriented similar fibers along the spatial Euler angles by discretely changing the fiber position relative to the directions of deformation or force loading of the representative element is applied.

To determine the nanoscale local and effective elastic properties of three-dimensional composite bodies, a hybrid boundary element – finite difference algorithm is proposed, taking into account the inherent elasticity and tension of interfacial surfaces using their membrane model. The differential equations of deformation of the cylindrical part of a spherocylindrical materialized surface are obtained, ensuring the coordination of unknowns and conditions of deformation compatibility at the nodes at the junction with its spherical part.

The three-dimensional fields of displacements, stresses, and effective elastic moduli for composite bodies and media with single, multiple, and distributed inclusions of non-canonical shape, thin layers and materialized interfaces, internal and interface structural defects are analyzed and the effects of elastic field concentration, macromechanical isotropy and anisotropy, and nanoscale size-dependent effects are revealed.

**Key words:** composite structure, inclusion, crack, thin interfacial layer, materialized surface, nanoinclusion, homogenization, boundary integral equation method, boundary element method, effective elastic moduli, stress intensity factors.





