

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ЖОГОЛЕВА
Надія Володимирівна

УДК 539.3:534.1

**НЕЛІНІЙНІ АНГАРМОНІЧНІ ЕФЕКТИ ПРИ РОЗПОВСЮДЖЕННІ
ПОВЕРХНЕВИХ І ЛОКАЛІЗОВАНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ В
СКЛАДЕНИХ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України (м. Слов'янськ).

Науковий керівник: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Шевченко Володимир Павлович,
Донецький національний університет
МОН України (м. Вінниця),
завідувач кафедри прикладної механіки і
комп'ютерних технологій.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Городецька Наталія Сергіївна,
Інститут гідромеханіки НАН України (м. Київ),
завідувач відділу гідродинамічної акустики;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Кунець Ярослав Іванович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України (м. Львів),
завідувач відділу обчислювальної механіки
деформівних систем.

Захист відбудеться “ 30 ” січня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано “ 29 ” грудня 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук



Ясінський А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Визначення закономірностей генерації та поширення нелінійних пружних хвиль відноситься сьогодні до числа найважливіших проблем механіки деформівного твердого тіла, актуальних як для подальшого розвитку фундаментальної науки, так і з огляду на потреби широкого кола впроваджень. Тематичні напрямки та застосовувані підходи у дослідженнях проблем теорії нелінійних пружних хвиль є дуже різноманітними. Одним із найбільш актуальних є питання аналізу ангармонічних нелінійних ефектів у процесах збудження і розповсюдження пружних хвиль малої інтенсивності в анізотропних пружних середовищах, а також генерації та взаємодії нелінійних вищих гармонік пружних хвиль і визначення низки характеристик нелінійних ангармонічних збурень із застосуванням методик розкладу за малим параметром у вигляді акустичного числа Маха. Проведені та опубліковані на сьогодні дослідження із зазначеної тематики стосуються переважно питань визначення нелінійних ангармонічних збурень у полях об'ємних хвиль деформацій в окремих типах кристалічних середовищ, у полях зсувних та поздовжньо-зсувних нормальних пружних хвиль в монокристалічному шарі з матеріалів кубічної системи за умов задання на його гранях однорідних крайових умов в переміщеннях чи напруженнях, чи різнотипних крайових умов змішаного типу. Водночас проблеми дослідження характеристик нелінійних ангармонічних збурень у полях поверхневих та локалізованих пружних хвиль в півнескінчених та складених анізотропних кристалічних тілах з врахуванням ефектів геометричної та фізичної нелінійності залишаються, практично, невивченими. Результати таких досліджень є вельми актуальними з огляду на можливість їх застосування у технологіях згортки та інтегрування хвильових сигналів в кристалічних акустoeлектронних пристроях, насамперед в ультраакустичних конвольверах, в схемах акустодіагностики пружних середовищ. Важливе значення наведених вище проблем для фундаментального розвитку теорії динамічних задач механіки деформівного твердого тіла та найсучасніших наукоємних впроваджень, а також наявний стан їх вивчення обумовили вибір тематики дисертаційного дослідження, зокрема змісту низки поставлених у роботі наукових завдань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладної математики і механіки НАН України: "Якісні методи дослідження нелінійних механічних систем, їх розвиток та застосування до задач динаміки твердого тіла" (№ д/р 0106U000045, 2006–2010 рр.); "Розробка конструктивних методів теорії керування і стійкості із застосуванням до задач машинобудування" (№ д/р 0111U000483, 2011–2015 рр.); "Керування та аналіз нелінійної динаміки коливальних механічних систем і процесів масопереносу" (№ д/р 0116U002033, 2016–2020 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є створення аналітико-числових методик аналізу математичних моделей динамічного геометрично та фізично нелінійного деформування, що описують нелінійні ангармонічні збурення при поширенні узагальнених поверхневих хвиль Лява у структурі анізотропний шар

монокристала кубічної системи на анізотропному півпросторі аналогічного класу симетрії, при розповсюдженні хвиль поперечного зсуву з локалізацією в монокристалічному шарі між різнотипними монокристалічними півпросторами з кубічною механічною симетрією, а також при поширенні локалізованих хвиль Стоунлі уздовж поверхні ідеального механічного контакту різнотипних монокристалічних півпросторів кубічної системи; аналіз й узагальнення відповідних хвильових ефектів.

Досягнення мети передбачає:

- формулювання неоднорідних крайових задач визначення нелінійних ангармонічних збурень для монохроматичних узагальнених поверхневих хвиль Лява, для хвиль поперечного зсуву з локалізацією в монокристалічному шарі між півпросторами, а також для локалізованих хвиль Стоунлі уздовж контакту різнотипних монокристалічних півпросторів;
- формулювання неоднорідної крайової задачі визначення нелінійних других гармонік для хвильового поля у вигляді суми двох поверхневих хвиль Лява з різними частотами і хвильовими числами;
- отримання співвідношень, що визначають компоненти вектора середнього за період потоку потужності у других гармоніках досліджуваних хвиль;
- створення теоретичних алгоритмів розв'язування неоднорідних крайових задач визначення других гармонік монохроматичних нормальних хвиль та других гармонік хвиль комбінаційного типу в аналізованих типах складених хвилеводних структур з використанням засобів комп'ютерної алгебри;
- розроблення програмних комплексів для числової комп'ютерної реалізації побудованих методик;
- реалізація числових досліджень, пов'язаних з аналізом й узагальненням кінематичних і енергетичних ефектів генерування других гармонік: узагальнених поверхневих хвиль Лява; хвиль поперечного зсуву з локалізацією в монокристалічному шарі між різнотипними монокристалічними півпросторами; хвиль Стоунлі уздовж поверхні ідеального механічного контакту різнотипних монокристалічних півпросторів кубічної системи.

Об'єктом дослідження є закономірності генерування слабо нелінійних пружних хвиль в деформівних твердих тілах, що класифікуються як нелінійні ангармонічні ефекти другого порядку.

Предметом дослідження є кінематичні та енергетичні характеристики других гармонік поверхневих і локалізованих пружних хвиль в декількох складових хвилеводних структурах, утворених з конкретних анізотропних монокристалічних матеріалів кубічної системи.

Методами дослідження є аналітико-числові методи математичної фізики, перш за все методи побудови розв'язків однорідних й неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь; методи комп'ютерної алгебри, з використанням яких розроблено алгоритм побудови аналітичної форми шуканих розв'язків неоднорідних крайових задач хвилевої механіки; методи комп'ютерної графіки для візуалізації результатів здійснюваних числових досліджень.

Наукова новизна одержаних результатів:

- побудовано аналітико-числові розв'язки крайових задач визначення нелінійних ангармонічних збурень, що генеруються у разі поширення монохроматичної узагальненої поверхневої хвилі Лява, а також у разі поширення двох узагальнених хвиль Лява з різними частотами у хвилеводі у вигляді анізотропного пружного шару монокристала класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, розташованому на анізотропному півпросторі того ж класу симетрії;
- отримано аналітико-числові розв'язки крайових задач визначення нелінійних ангармонічних збурень, що генеруються у разі поширення монохроматичних локалізованих SH хвиль в хвилеводі у вигляді шару з монокристалу класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, вміщеного з ідеальним або ковзним механічним контактом проміж однотипних або різнотипних півпросторів з монокристалічних матеріалів аналогічного класу анізотропії механічних властивостей;
- побудовано аналітико-числовий розв'язок крайової задачі визначення нелінійних ангармонічних збурень у випадку поширення узагальнених локалізованих хвиль Стоунлі в хвилеводі, що складається з двох ідеально контактуючих анізотропних півпросторів з монокристалічних матеріалів кубічної системи;
- на підставі аналізу побудованих аналітико-числових розв'язків досліджено та узагальнено амплітудно-частотні залежності для кінематичних і енергетичних характеристик нелінійних других гармонік для декількох типів монохроматичних поверхневих і локалізованих пружних хвиль, а також для їх вищих гармонік комбінаційного типу;
- проаналізовано та узагальнено ефекти впливу фізико-механічних характеристик розглянутих хвилеводних структур на амплітудні рівні, форми хвильових рухів і енергетичні показники нелінійних других гармонік досліджуваних поверхневих і локалізованих пружних хвиль;
- доповнено базу фундаментальних знань про структуру, амплітудно-частотні і енергетичні характеристики нелінійних других гармонік монохроматичних поверхневих і локалізованих хвиль у пружних анізотропних складових хвилеводах тривимірної геометрії.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливостях використання розроблених теоретичних методик, конкретних форм побудованих розв'язків, числових оцінок встановлених ефектів і узагальнених закономірностей при проведенні прикладних досліджень, пов'язаних із розробкою і оптимізацією параметрів акустoeлектронних пристроїв, які базуються на використанні ефектів нелінійної взаємодії поверхневих і локалізованих пружних хвиль; при дослідженнях у галузі методологій ультразвукової діагностики пружних середовищ з використанням нелінійних хвильових ефектів. Отримані результати можуть бути використані у навчальних курсах з хвильової механіки деформівних середовищ для студентів національних університетів і технічних навчальних закладів.

Достовірність отриманих результатів й висновків роботи обумовлені застосуванням відомих класичних методів математичної фізики до розв'язування спектральних крайових задач для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, сформульованих у рамках апробованих моделей теорії просторового

нелінійного динамічного деформування анізотропних кристалічних середовищ; наявністю представлених у публікаціях результатів теоретико-експериментальних перевірок концепції визначення ангармонічних збурень при дослідженнях нелінійних ефектів поширення пружних хвиль на підставі використання розкладів за ступенями малого параметру. Достовірність результатів комп'ютерної реалізації алгоритмів досліджень обґрунтовується контролем показників виконання межових умов крайових задач у зонах контакту різних складових відповідних хвильоводів з анізотропних матеріалів кубічної системи з огляду на використання точних розв'язків хвильових рівнянь; узгодженістю отриманих результатів з наявними апіорними фізичними уявленнями про характер і кількісні оцінки характеристик нелінійних ефектів; збігом побудованих розв'язків та одержаних з їх використанням числових оцінок, в окремих випадках, з результатами, представленими в публікаціях інших авторів.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У працях [1, 2, 4, 6 - 9, 11, 12, 14, 15], виконаних у співавторстві з В.П. Шевченком та В.І. Сторожевим, дисертанту належить: побудова розв'язків крайових задач про нелінійні другі гармоніки узагальнених поверхневих хвиль Лява, узагальнених хвиль Стоунлі, а також локалізованих зсувних хвиль; розроблення та реалізація алгоритмів числового аналізу і візуалізації отриманих результатів. Співавторам зазначених праць належить участь у постановках задач, консультаціях з вибору методів дослідження та участь в обговоренні отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертації доповідались і обговорювалися на: II Міжнародній конференції з нелінійної динаміки, присвяченій 150-річчю з дня народження академіка О.М. Ляпунова (Харків, 2007); XI Міжнародній конференції "Сучасні проблеми механіки суцільного середовища" (Ростов-на-Дону, 2007); V Міжнародній науковій конференції "Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла" (Мелекіне, 2008); Науковій конференції студентів математичного факультету Донецького національного університету (Донецьк, 2009); II Міжнародній науково-технічній конференції "Гірнична геологія, геомеханіка та екологічна безпека" (Донецьк, 2009); International conference "Analytic methods of mechanics and complex analysis" dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary (Kyiv, 2009); VI Міжнародній науковій конференції "Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла" (Мелекіне, 2010); XI Міжнародній конференції "Стійкість, керування і динаміка твердого тіла" (Мелекіне, 2011); Акустичному симпозіумі "Консонанс-2011" (Київ, 2011); XV Міжнародній конференції "Сучасні проблеми механіки суцільного середовища" (Ростов-на-Дону, 2011); XXII Міжнародній науковій школі "Деформування і руйнація матеріалів з дефектами і динамічні явища в гірських породах і виробках" (Алушта, 2012); IX Всеросійській школі-семінарі "Математичне моделювання і біомеханіка в сучасному університеті" (Дивноморське, 2014); XVIII International conference "Dynamical system modelling and stability investigation" (Kyiv, 2017); Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2017" (Львів, 2017).

Окремі результати досліджень дисертації доповідалися та обговорювалися на об'єднаних наукових семінарах з математичних проблем механіки суцільних середовищ кафедри теорії пружності та обчислювальної математики і кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій Донецького національного університету МОН України, а також відділу аналітичних методів механіки гірничих порід Інституту прикладної математики і механіки НАН України (2009-2014рр.).

У повному обсязі дисертація доповідалася та обговорювалася на науковому семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. О.Л. Зуєва (м. Слов'янськ, 2017р.); на науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Михаськіва та загальноінститутському науковому семінарі "Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ" під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Г.С. Кіта Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (м. Львів, 2017 р.) ; на науковому семінарі відділу гідродинамічної акустики під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н.С. Городецької (м. Київ, 2017 р.).

Публікації. За матеріалами дисертаційного дослідження опубліковано 19 наукових праць [1-19], зокрема 11 статей [1-11], серед яких 6 статей [1-6] у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України. Стаття [6] прореферована наукометричною базою Scopus. Вісім праць опубліковані автором одноосібно. Праці [1, 2, 7 - 9, 12 - 14] опубліковані під дівочим прізвищем Щербак Н. В.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 34 таблиці і 205 рисунків, висновків, списку використаних джерел із 194-х найменувань. Загальний обсяг дисертації – 277 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 248 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; подано інформацію про публікації за темою дисертації та особистий внесок у них здобувача, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У першому розділі роботи наведено аналітичний огляд основних методів та результатів досліджень, пов'язаних з її тематикою. Зазначено, що дослідження, окреслені метою і завданнями дисертації, мають за теоретичне підґрунтя наукові результати, викладені у роботах Дж. Алерса, Д. Бленда, А.А. Гедройца, Є.З. Говорової, З.А. Гольдберга, Н.С. Городецької, О.М. Гузя, Ю.К. Енгельбрехта, О.П. Жука, Л.К. Зарембо, О.С. Космодамианського, В.А. Красильникова, Я.І. Кунця, С.Г. Лейбфріда, В.В. Леманова, В.Є. Лямова, У.К. Нігула, О.Л. Полякової, О.В. Руденко, Я.Я. Руцицького, О.О. Самарського, І.Т. Селезова, Г.А. Смоленського, В.І. Сторожева, Р. Труелла, В.Ф. Чекуріна, В.П. Шевченка, J.D. Achenbach, C. Cattani, F. Mikio, M.D. Groves, V. Gusev, G.A. Holzapfel, G.A. Maugin, W.G. Mayer, D.F. Parker, M. Redwood, N. Sugimoto, J. Whitham та ряду інших вчених.

Далі у першому розділі наведено постановку досліджуваних задач та загальну характеристику розроблюваного для їх розв'язання підходу. В роботі розглядаються задачі визначення нелінійних ангармонічних збурень для поверхневих та локалізованих пружних хвиль у декількох типах анізотропних пружних хвилеводів просторової геометрії. При побудові використовуваної методології координатні змінні вважаються віднесеними до нормуючого параметра R_* , а безрозмірні характеристики $\tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, t)$ пружних хвильових зсувів віднесені до величини U_* , яка характеризує їх максимальний амплітудний рівень. Вибрано модель нелінійного динамічного деформування з урахуванням геометричної та фізичної нелінійностей, яка базується на тензорному представленні пружного потенціалу $\tilde{U}$ з квадратичними та кубічними членами за деформаціями $\tilde{\varepsilon}_{jq}$, та на тензорних представленнях для скінчених пружних деформацій:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \tilde{c}_{jqrk} \tilde{\varepsilon}_{jq} \tilde{\varepsilon}_{rk} + \frac{1}{6} \tilde{c}_{jqrklm} \tilde{\varepsilon}_{jq} \tilde{\varepsilon}_{rk} \tilde{\varepsilon}_{lm} \quad (j, q, r, k, l, m = \overline{1,3}); \quad (1)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rk} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{r,k} + \tilde{u}_{k,r} + \tilde{u}_{l,r} \tilde{u}_{l,k}), \quad (2)$$

в яких $\tilde{u}_{r,k} = \partial \tilde{u}_r / \partial \tilde{x}_k$, $\tilde{u}_r$ - компоненти вектору хвильових пружних переміщень. Відношення $\delta = U_*/R_*$ інтерпретується як малий параметр $\delta \ll 1$. При цьому $\tilde{u}_{r,k} = \delta u_{r,k}$, $u_{r,k} = \partial u_r / \partial x_k$. Безрозмірні нормовані компоненти тензора механічних напружень σ_{jd} записано як суму лінійних та нелінійних складових

$$\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d} \quad (j, d = \overline{1,3}), \quad (3)$$

$$\sigma_{jd} = \sigma_{jd}^{(0)} + \sigma_{jd}^{(1)}, \quad (4)$$

$$\sigma_{jd}^{(0)} = [c_{jdrk} u_{r,k}] \delta,$$

$$\sigma_{jd}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} c_{jdrk} u_{l,r} u_{l,k} + c_{pdrk} u_{j,p} u_{r,k} + \frac{1}{2} c_{jdrklm} u_{r,k} u_{l,m} \right] \delta^2, \quad (5)$$

а рівняння руху мають вигляд

$$\partial \tilde{\sigma}_{jd} / \partial \tilde{x}_d = \tilde{\rho} \partial^2 \tilde{u}_j / \partial t^2. \quad (6)$$

Матеріалами компонентів розглядуваних хвильоводів є монокристали класу $m3m$ кубічної системи з пружними властивостями, які характеризуються трьома пружними сталими другого порядку c_{11}, c_{12}, c_{44} та шістьма сталими третього порядку $c_{111}, c_{112}, c_{144}, c_{155}, c_{123}, c_{456}$. У задачі про нелінійні ангармонічні збурення при розповсюдженні узагальнених поверхневих хвиль Лява хвильовод віднесено до системи нормованих прямокутних координат, в якій шар займає область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -1 \leq x_3 \leq 0\}$, а півпростір область $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty\}$ й розглядаються такі варіанти крайових умов:

- ідеальний механічний контакт півпростору і шару поряд з відсутністю напружень на другій грані шару

$$(\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=-1} = 0, (\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=0} = (\sigma_{32}^{(2)})_{x_3=0}, (u_2^{(1)})_{x_3=0} = (u_2^{(2)})_{x_3=0}. \quad (7)$$

- жорстке закріплення зовнішньої грані шару або наявність на ній нерозтяжного мембранного покриття та ідеальний механічний контакт у площині торкання шару та півпростору

$$(u_2^{(1)})_{x_3=-1} = 0, (\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=0} = (\sigma_{32}^{(2)})_{x_3=0}, (u_2^{(1)})_{x_3=0} = (u_2^{(2)})_{x_3=0}. \quad (8)$$

У задачі про нелінійні ангармонічні збурення при розповсюдженні локалізованих пружних СН хвиль у шарі монокристалу класу $m3m$ кубічної системи, розташованому між півпросторами з монокристалів аналогічного класу симетрії, з відмінними властивостями, шар займає область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -1 \leq x_3 \leq 1\}$, а півпростори — області $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty \leq x_3 \leq -1\}$ і $V_3 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 1 \leq x_3 \leq \infty\}$.

Розглядаються такі варіанти крайових умов:

- ідеальний механічний контакт шару та півпросторів на межових поверхнях $x_3 = \pm 1$

$$(\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=-1} = (\sigma_{32}^{(2)})_{x_3=-1}, (u_2^{(1)})_{x_3=-1} = (u_2^{(2)})_{x_3=-1}, (\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=1} = (\sigma_{32}^{(2)})_{x_3=1}, \\ (u_2^{(1)})_{x_3=1} = (u_2^{(2)})_{x_3=1}. \quad (9)$$

- неідеальній ковзний контакт шару та півпросторів на межових поверхнях $x_3 = \pm 1$

$$(u_3^{(1)})_{x_3=1} = (u_3^{(3)})_{x_3=1}, (u_3^{(1)})_{x_3=-1} = (u_3^{(2)})_{x_3=-1}, (\sigma_{33}^{(1)})_{x_3=1} = (\sigma_{33}^{(3)})_{x_3=1}, \\ (\sigma_{33}^{(1)})_{x_3=-1} = (\sigma_{33}^{(2)})_{x_3=-1}, (\sigma_{3j}^{(1)})_{x_3=1} = 0, (\sigma_{3j}^{(1)})_{x_3=-1} = 0, (\sigma_{3j}^{(3)})_{x_3=1} = 0, \\ (\sigma_{3j}^{(2)})_{x_3=-1} = 0 \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (10)$$

У задачі про нелінійні ангармонічні збурення при розповсюдженні узагальнених хвиль Стоунлі розглядувана хвилеводна структура утворюється двома контактуючими півпросторами з монокристалів класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, що займають області $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 \leq 0\}$, $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty\}$ і мають ідеальний механічний контакт, який описується крайовими умовами

$$\begin{aligned} (\sigma_{31}^{(1)})_{x_3=0} &= (\sigma_{31}^{(2)})_{x_3=0}, (u_1^{(1)})_{x_3=0} = (u_1^{(2)})_{x_3=0}, (\sigma_{33}^{(1)})_{x_3=0} = (\sigma_{33}^{(2)})_{x_3=0}, \\ (u_3^{(1)})_{x_3=0} &= (u_3^{(2)})_{x_3=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Відповідно до концепції, що використовується, дослідження малих нелінійних хвильових ефектів на підставі методу малого параметру нормовані комплексні функції хвильових переміщень відшукуються у вигляді подання $u_j = u_j^{(p,l)} + \delta u_j^{(p,n)}$, в якому малий параметр має вигляд $\delta = u_* / R_*$. Складові $u_j^{(p,l)}$ визначаються з крайових задач для першого лінійного наближення. Крайові задачі для систем неоднорідних диференціальних рівнянь з правими частинами, які виражаються через складові $u_j^{(p,l)}$, визначають шукані характеристики $u_j^{(p,n)}$ малих нелінійних ангармонічних збурень й мають таку загальну структуру:

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho} R_*^2 / c_*) \cdot \partial^2 u_j^{(0)} / \partial t^2 - (\sigma_{jd,d}^{(0)})_{\bar{u}=\bar{u}^{(l)}} &= 0, \\ (\tilde{\rho} R_*^2 / c_*) \cdot \partial^2 u_j^{(k)} / \partial t^2 - (\sigma_{jd,d}^{(0)})_{\bar{u}=\bar{u}^{(n)}} &= (\sigma_{jd,d}^{(1)})_{\bar{u}=\bar{u}^{(l)}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Їх деталізовані співвідношення поряд з розв'язками задач для першого наближення наведені у першому підрозділі роботи для всіх типів розглядуваних хвилеводів. Сформульовані також завдання аналізу кінематичних характеристик нелінійних ангармонічних збурень та енергетичних характеристик других гармонік у вигляді компонент векторів густин потоків потужності

$$\begin{aligned} P_j &= P_j^{(l)} \delta + P_j^{(n)} \delta^3 \\ P_j^{(l)} &= \frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\bar{u}_{ia}^{(l)}(x_3) \sigma_{ija}^{(ll)} \right], \\ P_j^{(n)} &= \omega \text{Im} \left[\bar{u}_{ia}^{(n)}(x_3) \left(\sigma_{ija}^{(ln)} + \sigma_{ija}^{(nl)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Амплітуди нелінійних других гармонік пропорціональні квадрату амплітудного множника, який для локалізованих хвиль з реальними параметрами при $\delta \ll 1$ є малою величиною. Таким чином, реальний рівень нелінійних ефектів може бути оцінено при заданні конкретного значення малих амплітуд лінійних локалізованих хвиль.

Другий розділ роботи стосується визначення й аналізу нелінійних других гармонік узагальнених монохроматичних поверхневих хвиль Лява у розглядуваних типах хвилеводів. Показано, що другими гармоніками для хвиль цього типу є хвилі поздовжньо-зсувного типу з подвоєною фазою та ненульовими амплітудними функціями хвильових переміщень $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ для компонент V_p , які мають структуру

$$\begin{aligned}
u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \\
&+ \tilde{\mu}_{11} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{12} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \\
&+ \tilde{\mu}_{31} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{32} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3) + \gamma_1 \exp(2i\alpha^{(2)} x_3)) E_2, \\
u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3) + \gamma_3 \exp(2i\alpha^{(2)} x_3)) E_2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Отримані аналітичні представлення коефіцієнтів ν_i , χ_i , ξ_i , γ_i , $\tilde{\lambda}_{ij}$, $\tilde{\mu}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}$ для кожного досліджуваного випадку крайових умов.

Далі у другому розділі побудовано та досліджено розв'язок задачі про нелінійну взаємодію при одночасному поширенні двох узагальнених поверхневих хвиль Лява, які мають різні частоти ω_m , відмінні хвильові числа та належать до одної або різних мод відповідного дисперсійного спектру. При розгляді цієї задачі на першому етапі побудовано розв'язки задач про розповсюдження двох окремих монохроматичних лінійних узагальнених хвиль Лява з відмінними частотами ω_m , а на другому етапі будуються розв'язки неоднорідних задач відносно амплітудних характеристик других гармонік з частотами $2\omega_m$ ($m=1,2$) та гармоніки «комбінаційного» типу з частотою $\omega_1 + \omega_2$. Компоненти комплексного вектору хвильових переміщень $u_{j+}^{(p,n)}$ ($j=1;3$) для другої гармоніки «комбінаційного» типу с частотою $\omega_1 + \omega_2$, за умов що ангармонічне збурення у вигляді P-SV хвилі з частотою $\omega_1 + \omega_2$ та хвильовим числом $k_1 + k_2$ не належить до гілки спектру узагальнених поверхневих хвиль релєївського типу в розглядуваному хвильоводі, мають структуру

$$\begin{aligned}
u_{1+}^{(1,n)} &= (\lambda_{11+} \cos(\varsigma_{1+}^{(1)} x_3) + \lambda_{12+} \cos(\varsigma_{2+}^{(1)} x_3) + \mu_{11+} \sin(\varsigma_{1+}^{(1)} x_3) + \mu_{12+} \sin(\varsigma_{2+}^{(1)} x_3) + \\
&+ A_{1131} \cos((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{1132} \sin((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + \\
&+ A_{1133} \cos((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{1134} \sin((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3)) E_{12}, \\
u_{3+}^{(1,n)} &= (\lambda_{31+} \sin(\varsigma_{1+}^{(1)} x_3) + \lambda_{32+} \sin(\varsigma_{2+}^{(1)} x_3) + \mu_{31+} \cos(\varsigma_{1+}^{(1)} x_3) + \mu_{32+} \cos(\varsigma_{2+}^{(1)} x_3) + \\
&+ A_{3131} \sin((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{3132} \cos((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{3133} \sin((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3) + \\
&+ A_{3134} \cos((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3)) E_{12}, \\
u_{1+}^{(2,n)} &= (\beta_{11+} \exp(\varsigma_{1+}^{(2)} x_3) + \beta_{12+} \exp(\varsigma_{2+}^{(2)} x_3) + A_{1231} \exp(2i(\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3)) E_{12}, \\
u_{3+}^{(2,n)} &= (\beta_{31+} \exp(\varsigma_{1+}^{(2)} x_3) + \beta_{32+} \exp(\varsigma_{2+}^{(2)} x_3) + A_{3231} \exp(2i(\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3)) E_{12},
\end{aligned} \tag{15}$$

де $E_{12}(t, x_1, \omega_m, k_m) = \exp(-i((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x_1))$, а для коефіцієнтів A_{jlmq} , λ_{jlm} , μ_{jlm} , β_{jlm} та коренів $\varsigma_{j+}^{(p)}$ характеристичних поліномів отримано розгорнуті аналітичні представлення.

Числові дослідження кінематичних характеристик нелінійних других гармонік досліджуваних узагальнених хвиль Лява здійснено для двох типів хвильоводів – з

шару V_1 монокристалу германію та півпростору V_2 монокристалу кремнію, шару V_1 монокристалу солі $NaCl$ та півпростору V_2 з монокристалу кремнію. Результати розрахунків безрозмірних нормованих амплітуд пружних зсувних переміщень $|u_2^{(l)}/u_2^{(0)}|$ в узагальнених лінійних хвилях Лява й відповідних характеристик $|u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$, $|u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ їх других гармонік у зоні по товщині хвилеводу, яка обіймає область шару $\tilde{x}_3/h \in [-1; 0]$ та частину півпростору $\tilde{x}_3/h \in (0; 4]$, наведені на рис. 1 – 2 для випадків $\Omega(k_1)=3$, $\Omega(k_2)=7$ для хвилеводу першого типу із вільною зовнішньою поверхнею шару, де $\Omega(k_m)$ - приведені частоти узагальнених хвиль Лява з гілки m відповідного дисперсійного спектру. Розрахунки свідчать, що інтенсивні переміщення $|u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ та $|u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ для других гармонік локалізуються в шарі V_1 . При збільшенні Ω спостерігаються явища зростання осциляцій для амплітуд переміщень $|u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ и $|u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ в зоні шару. В півнескінченній компоненті хвилеводу V_2 зі збільшенням $\tilde{x}_3/h$ інтенсивність других гармонік швидко згасає.

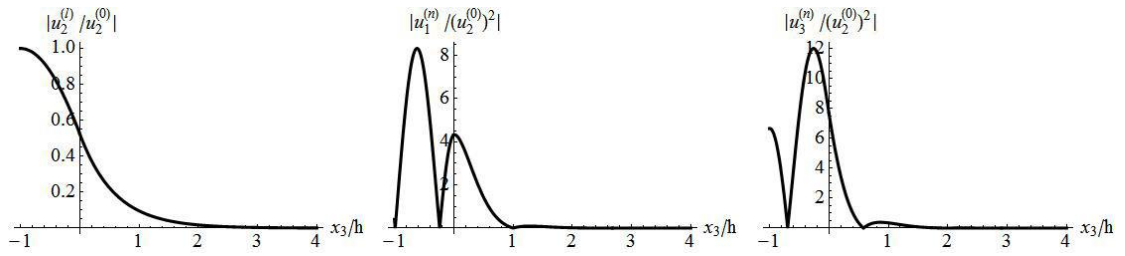


Рис.1. Розподіл нормованих значень $u_2^{(l)}$, $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ при $\Omega(k_1)=3$.

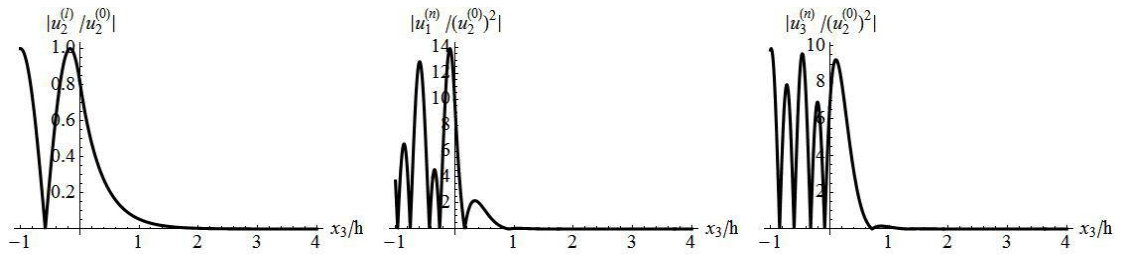


Рис.2. Розподіл нормованих значень $u_2^{(l)}$, $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ при $\Omega(k_2)=7$.

Проаналізовані також відмінності у розподілах кінематичних характеристик других гармонік монохроматичних узагальнених поверхневих хвиль Лява в хвилеводах з жорстким закріпленням зовнішньої грані шару, або за наявності на грані нерозтяжного мембранного покриття.

Досліджено амплітудно-частотні залежності для кінематичних характеристик нелінійної взаємодії двох узагальнених хвиль Лява у хвилеводі першого типу. Частотні розподіли для величин безрозмірних нормованих амплітудних характеристик $|u_{1+}^{(n)}/u_0^2|$ та $|u_{3+}^{(n)}/u_0^2|$ в площині контакту шару та півпростору у комбінаційних других гармоніках представлено на рис. 3 – 6 у вигляді тонованих

зображень, на яких збільшенню інтенсивності досліджуваної характеристики відповідає перехід від темних відтінків до світлих.

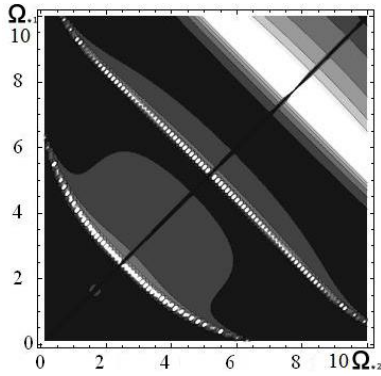


Рис.3.

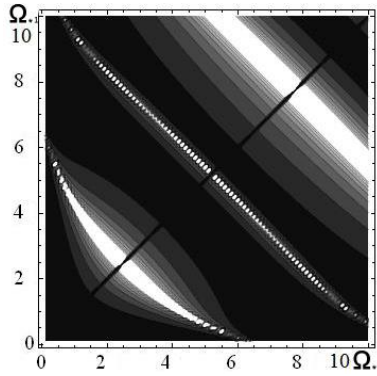


Рис.4.

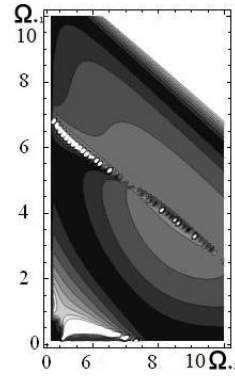


Рис.5.

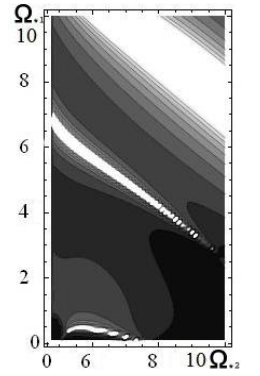


Рис. 6

Рис. 3 – 4 відповідно ілюструють розподіли $|u_{1+}^{(n)} / u_0|^2$ та $|u_{3+}^{(n)} / u_0|^2$ для двох хвиль із круговими частотами $\Omega_1(k_1)$ та $\Omega_2(k_1)$, які належать до першої (найнижчої) моди відповідного дисперсійного спектру, а рис. 5 – 6 описують розподіли інтенсивностей комбінаційних гармонік для пари хвиль Лява з круговими частотами $\Omega_1(k_1)$ та $\Omega_2(k_2)$, які відповідно відносяться до першої та другої гілок дисперсійного спектру. Наведені частотні розподіли характеризують частотні області різнорівневої нелінійної ангармонічної взаємодії узагальнених поверхневих хвиль Лява. Вони, зокрема, засвідчують, що при частотних параметрах $\Omega(k_1) = \{2,47745; 5,19315; 7,75\}$, $\Omega(k_2) = \{7,2492; 10,01\}$ ефекти значного зростання інтенсивності хвильових переміщень у комбінаційних ангармонічних збуреннях виникають, коли друга гармоніка у вигляді пружної хвилі P-SV типу з частотою $2\Omega(k_m)$ та хвильовим числом $2k_m$ належить до дисперсійного спектру узагальнених поверхневих хвиль релеївського типу у розглядуваному складеному хвильоводі.

У цьому ж розділі досліджено енергетичні ефекти генерації нелінійних других гармонік узагальнених поверхневих хвиль Лява, які характеризуються нормованими векторами густин середніх за період потоків потужності $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$. Зокрема, результати розрахунків $P_1^{(l)}$ в лінійних хвилях Лява, які належать до m -ї гілки дисперсійного спектру з частотами $\Omega(k_m)$, та $P_1^{(n)}$ для їх других гармонік відповідно представлені для хвильоводу першого типу на рис. 7 - 8 у випадках $\Omega(k_1) = 3$, $\Omega(k_2) = 6$.

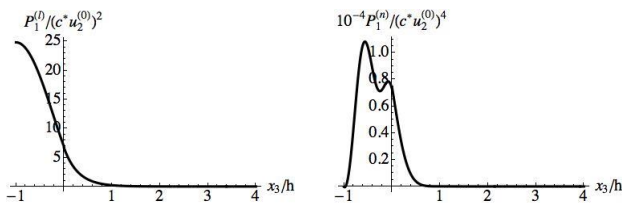


Рис.7. Розподіл нормованих значень $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ при $\Omega(k_1) = 3$.

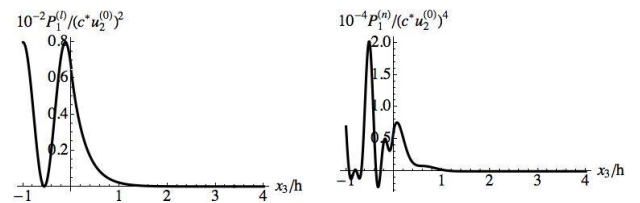


Рис. 8. Розподіл нормованих значень $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ при $\Omega(k_2) = 6$.

У випадку лінійних хвиль першої моди значення $P_1^{(l)}$ досягає максимуму на вільній поверхні шару V_1 і монотонно зменшується при відході від межевої поверхні вглиб хвилеводу. У випадку лінійних хвиль другої моди локальні максимуми $P_1^{(l)}$ досягаються як на поверхні хвилеводу, так і в середині шару. Натомість компонента $P_1^{(n)}$ досягає максимального значення в зоні шару. Зі збільшенням частоти Ω у товщинних розподілах для $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ спостерігається зростання амплітуд, а для $P_1^{(n)}$ також зростання частоти осциляцій в області шару V_1 .

У третьому розділі роботи досліджено проблему визначення нелінійних других гармонік локалізованих монохроматичних пружних хвиль зсуву в хвилеводі з анізотропного шару V_1 проміж півпросторами V_2 та V_3 аналогічного класу пружної симетрії з відмінними властивостями. Показано, що другими гармоніками досліджуваних SH хвиль є хвилі P-SV типу з компонентами вектору динамічних переміщень $u_j^{(p,n)}$ ($j=1, j=3$), які мають вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\mu}_{12} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\mu}_{32} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\mu}_{32} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
 u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3) + \gamma_1^{(2)} \exp(-2i\alpha^{(2)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3) + \gamma_3^{(2)} \exp(-2i\alpha^{(2)} x_3)) E_2, \\
 u_1^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(3)} \exp(\varsigma_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(3)} \exp(\varsigma_2^{(3)} x_3) + \gamma_1^{(3)} \exp(-2i\alpha^{(3)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(3)} \exp(\varsigma_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(3)} \exp(\varsigma_2^{(3)} x_3) + \gamma_3^{(3)} \exp(-2i\alpha^{(3)} x_3)) E_2.
 \end{aligned} \tag{16}$$

У випадках, коли хвилевод складається з анізотропного монокристалічного шару V_1 класу $m3m$ кубічної системи, розміщеного між півпросторами V_2 з однаковими фізико-механічними властивостями, окремо розглядаються задачі про розповсюдження симетричних та антисиметричних за товщиною шару локалізованих хвиль уздовж пружно-еквівалентного напрямку Ox_1 . При цьому у випадку симетричних хвиль для точок серединної площини шару $x_3 = 0$ виконується умова $\sigma_{31}^{(1)} = 0$, а у випадку антисиметричних хвиль – умова $(u_2^{(1)})_{x_3=0} = 0$, що дає змогу інтерпретувати розглянуті випадки як задачі про другі гармоніки неklasичних монохроматичних хвиль Лява у шарі з вільною або закріпленою зовнішньою поверхнею, на півпросторі аналогічного кристалографічного класу.

Також розглянуто задачу про розповсюдження симетричних за товщиною шару локалізованих хвиль уздовж пружно-еквівалентного напрямку Ox_1 в

хвильоводі, що складається з анізотропного монокристалічного шару V_1 класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, вміщеного з неідеальним ковзним контактом проміж півпросторами V_2 з однаковими фізико-механічними властивостями. Компоненти вектора динамічних переміщень $u_j^{(p,n)}$ ($j=1, j=3$) визначені в аналітичній формі та мають вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\mu}_{12} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\varsigma_1^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\mu}_{32} \cos(\varsigma_2^{(1)} x_3) + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) E_2, \\
 u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3)) E_2, \\
 u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\varsigma_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\varsigma_2^{(2)} x_3)) E_2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Далі в роботі представлено результати аналізу амплітудно-частотних залежностей для кінематичних характеристик других гармонік досліджуваних хвиль в шарі V_1 з монокристалу NaCl, вміщеному між півпростором V_2 з монокристалу кремнію та півпростором V_3 з монокристалу германію (хвильовод першого типу). Розрахунки характеристик $|u_2^{(l)}/u_2^{(0)}|$ в лінійних локалізованих зсувних хвилях та $|u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$, $|u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2|$ в їх других гармоніках здійснені для зазначених хвильоводів у зоні, яка включає область шару $\tilde{x}_3/h \in [-1; 1]$ та підобласті у півпросторах $\tilde{x}_3/h \in [-5; -1) \cup (1; 5]$. Окремі результати розрахунків наведені на рис. 9 – 10 для хвиль з варійованою частотою з двох нижчих гілок дисперсійного спектру хвильоводу першого типу. Поміж іншого, вони вказують на ефекти вираженої високочастотної короткохвильової локалізації нелінійних других гармонік в межах шару. Максимальні амплітудні рівні обох компонент хвильових переміщень у других гармоніках зі збільшенням частоти монотонно зростають і при цьому зростає співвідношення $|u_3^{(n)}/u_1^{(n)}|$, що означає домінування SV-компоненти в других гармоніках для хвиль першої та другої моди.

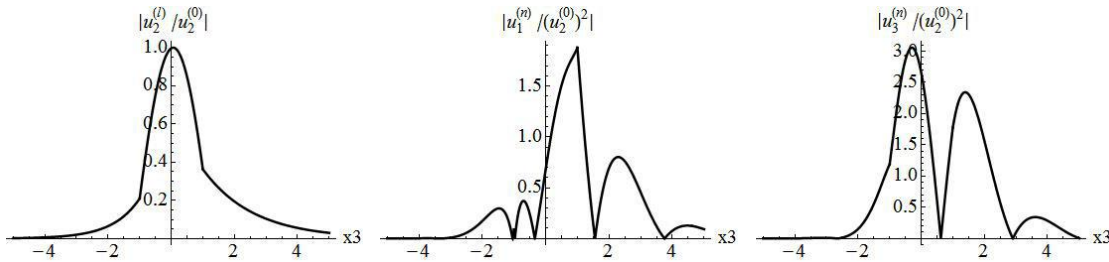


Рис. 9. Розподіл нормованих значень $u_2^{(l)}$, $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ при $\Omega(k_1) = 1.5$.

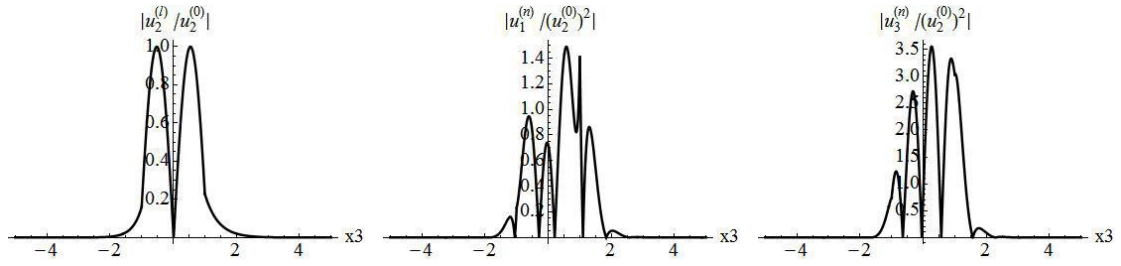


Рис. 10. Розподіл нормованих значень $u_2^{(l)}$, $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ при $\Omega(k_2) = 4$.

Проведено також розрахунки нормованих розподілів густин середніх за період потоків потужності $P_1^{(l)}$ в лінійних локалізованих SH хвилях та потоків $P_1^{(n)}$ у їх других гармоніках (рис. 11 – 12).

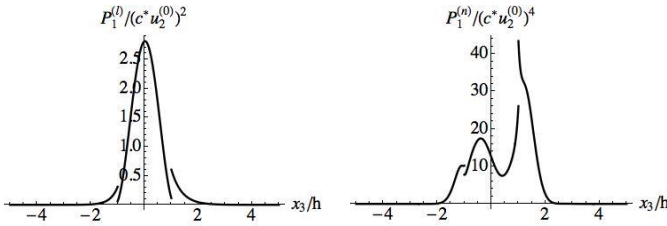


Рис. 11. Розподіл нормованих значень $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ при $\Omega(k_1) = 2$.

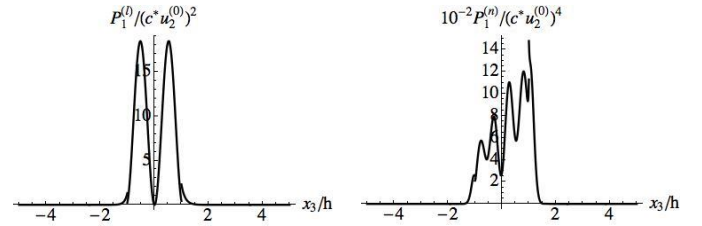


Рис. 12. Розподіл нормованих значень $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ при $\Omega(k_2) = 5$.

Вони також вказують на ефекти вираженої височастотної короткохвильової локалізації густин потоків потужності в других гармоніках у межах шару. Форми розподілів амплітудної компоненти $P_1^{(n)}$ для хвиль першої моди стабілізуються при $\Omega(k_1) \geq 4$, для хвиль другої моди — при $\Omega(k_2) \geq 5$. Максимальні амплітудні рівні компонент $P_1^{(l)}$, $P_1^{(n)}$ монотонно зростають зі збільшенням $\Omega(k_m)$. Для відносно довгих низькочастотних хвиль першої та другої моди спостерігаються виражені ефекти розриву густини потоку в других гармоніках поблизу границі контакту шару V_1 з монокристалу NaCl з верхнім півпростором V_2 з монокристалу кремнію (рис. 11). В частотному діапазоні вираженої локалізації для потоків потужності характерна істотна стратифікація з формуванням двох каналів підвищеної інтенсивності потоків потужності в других гармоніках хвиль першої моди і чотирьох каналів в других гармоніках хвиль другої моди.

Четвертий розділ роботи стосується побудови та дослідження розв'язку задачі про нелінійні другі гармоніки монохроматичних узагальнених хвиль Стоунлі, локалізованих біля поверхні ідеального механічного контакту різнотипних монокристалічних напівпросторів V_1 , V_2 з кубічною механічною симетрією, амплітудні характеристики яких визначаються за розробленим теоретичним алгоритмом та з використанням засобів комп'ютерної алгебри

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1,n)} &= (u^{(0)})^2 (\beta_1^{(1)} \exp((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)})x_3) + (\chi_{11}^{(1)}x_3 + \chi_{12}^{(1)}) \cdot \\
 &\cdot \exp(2\alpha_1^{(1)}x_3) + (\phi_{11}^{(1)}x_3 + \phi_{12}^{(1)}) \exp(2\alpha_2^{(1)}x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(1,n)} &= (u^{(0)})^2 (\beta_3^{(1)} \exp((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)})x_3) + (\chi_{31}^{(1)}x_3 + \chi_{32}^{(1)}) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp(2\alpha_1^{(1)} x_3) + (\varphi_{31}^{(1)} x_3 + \varphi_{32}^{(1)}) \exp(2\alpha_2^{(1)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
u_1^{(2,n)} = & (u^{(0)})^2 (\beta_1^{(2)} \exp((\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3) + (\chi_{11}^{(2)} x_3 + \chi_{12}^{(2)})) \cdot \\
& \cdot \exp(2\alpha_1^{(2)} x_3) + (\varphi_{11}^{(2)} x_3 + \varphi_{12}^{(2)}) \exp(2\alpha_2^{(2)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
u_3^{(2,n)} = & (u^{(0)})^2 (\beta_3^{(2)} \exp((\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3) + (\chi_{31}^{(2)} x_3 + \chi_{32}^{(2)})) \cdot \\
& \exp(2\alpha_1^{(2)} x_3) + (\varphi_{31}^{(2)} x_3 + \varphi_{32}^{(2)}) \exp(2\alpha_2^{(2)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)).
\end{aligned} \tag{18}$$

Числові дослідження кінематичних та енергетичних характеристик нелінійних других гармонік досліджуваних локалізованих Р-SV хвиль реалізовані для хвилеводу у вигляді ідеально контактуючих півпросторів V_i з монокристалів Ge та BaF_2 , й хвилеводу у вигляді ідеально контактуючих півпросторів V_i з монокристалів Si та $SrTiO_3$. Здійснено числові дослідження амплітудних рівнів нелінійних других гармонік локалізованих хвиль Стоунлі в розглянутих хвилеводних структурах залежно від частоти лінійних гармонік розглянутих хвиль, а також дослідження частотних залежностей форм хвильових переміщень в зазначених других гармоніках. Для порівняльного частотного параметричного аналізу проведено розрахунки і описані основні закономірності у розподілах безрозмірних нормованих амплітуд пружних поперечних зсувів $u_1^{(l)}/u^{(0)}$, $u_3^{(l)}/u^{(0)}$ для лінійних хвиль Стоунлі і характеристик $u_1^{(n)}/(u^{(0)})^2$, $u_3^{(n)}/(u^{(0)})^2$ для їх других гармонік в зоні за товщиною хвилеводу, що включає підобласті півпросторів V_i $\tilde{x}_3/h \in [-4; 0]$ й $\tilde{x}_3/h \in (0; 4]$. Проведено розрахунки нормованих розподілів густин середніх за період потоків потужності $P_1^{(l)}$ в лінійних локалізованих хвилях Стоунлі та потоків $P_1^{(n)}$ в їх других гармоніках.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання, яке полягало у створенні аналітико-числових методик аналізу математичних моделей динамічного геометрично та фізично нелінійного деформування, що описують нелінійні ангармонічні збурення при поширенні поверхневих та локалізованих пружних хвиль в складених анізотропних тілах.

Отримано такі основні наукові результати:

1. Створено і з використанням засобів комп'ютерної алгебри реалізовано теоретичний алгоритм розв'язування неоднорідних просторових крайових задач визначення геометрично й фізично нелінійних других гармонік монохроматичних узагальнених поверхневих хвиль Лява в хвилеводі у вигляді анізотропного пружного шару монокристалу класу $m3m$ кубічної системи з вільною, закріпленою або мембранованою зовнішньою поверхнею, який розташований з ідеальним механічним контактом на відмінному за властивостями анізотропному півпросторі того ж класу симетрії.
2. Розроблено і з використанням засобів комп'ютерної алгебри реалізовано

теоретичний алгоритм розв'язування неоднорідних просторових крайових задач визначення геометрично й фізично нелінійних комбінаційних других гармонік, які описують взаємодію двох узагальнених поверхневих хвиль Лява з відмінними частотами в хвилеводі у вигляді анізотропного пружного шару монокристалу класу $m3m$ кубічної системи з вільною зовнішньою поверхнею, який розташований з ідеальним механічним контактом на відмінному за властивостями анізотропному півпросторі того ж класу симетрії.

3. Створено і з використанням засобів комп'ютерної алгебри реалізовано теоретичний алгоритм розв'язування неоднорідних просторових крайових задач визначення геометрично й фізично нелінійних других гармонік монохроматичних хвиль поперечного зсуву з локалізацією в монокристалічному шарі між різнотипними або однотипними монокристалічними півпросторами з кубічною механічною симетрією.

4. Розроблено і з використанням засобів комп'ютерної алгебри реалізовано теоретичний алгоритм розв'язування неоднорідних просторових крайових задач визначення геометрично й фізично нелінійних других гармонік монохроматичних хвиль узагальнених хвиль Стоунлі, локалізованих біля поверхні ідеального механічного контакту різнотипних монокристалічних півпросторів з кубічною механічною симетрією.

5. З використанням побудованих аналітико-числових розв'язків реалізовано цикл числових досліджень, пов'язаних з аналізом й узагальненням кінематичних і енергетичних ефектів генерування нелінійних других гармонік при поширенні розглядуваних типів узагальнених поверхневих і локалізованих пружних хвиль в складених анізотропних тілах кубічного класу симетрії механічних властивостей при варіаціях частотних параметрів хвиль, характеру умов контакту складових хвилеводів, механічних характеристик їх компонент.

6. Дано характеристику низки закономірностей у частотних розподілах амплітуд хвильових переміщень та густин середніх за період потоків потужності, у розподілах амплітуд хвильових переміщень та густин середніх за період потоків потужності за товщинними координатами хвилеводів для нелінійних других гармонік узагальнених поверхневих і локалізованих пружних хвиль розглядуваних типів.

7. Результати проведених досліджень разом із їх внеском до бази фундаментальних знань про властивості та закономірності поширення нелінійних других гармонік узагальнених поверхневих і локалізованих пружних хвиль в складених анізотропних тілах кубічної системи мають суттєве значення для прикладних впроваджень, що пов'язані із розробкою, вдосконаленням і оптимізацією параметрів акустоелектронних пристроїв, принципи функціонування яких базуються на використанні ефектів нелінійної взаємодії поверхневих і локалізованих пружних хвиль, а також з розробками у галузі методологій ультразвукової діагностики пружних середовищ з використанням нелінійних хвильових ефектів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНО У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Щербак Н.В., Сторожев В.І. Нелінійні другі гармоніки узагальнених хвиль Лява в анізотропному шарі на анізотропному півпросторі. *Вісник Донецького ун-ту. Сер.А: Природничі науки*. 2008. Вип.2. С.75-80.
2. Щербак Н.В., Сторожев В.И. Анализ нелинейных ангармонических возмущений для упругих СН-волн, локализованных в кристаллическом слое между анизотропными полупространствами. *Труды института прикладной математики и механики*. 2009. Том 19. С 234–243.
3. Жоголева Н.В. Вторые гармоник нелинейных монохроматических волн Стоунли у поверхности контакта анизотропных полупространств. *Труды института прикладной математики и механики*. 2011. Том 22. С 91 – 98.
4. Жоголева Н.В., Сторожев В.И. Нелінійна ангармонічна взаємодія поверхневих хвиль Лява в анізотропному шарі на анізотропному півпросторі. *Вісник Донецького ун-ту. Сер.А: Природничі науки*. 2012. Вип.1. С.56-63.
5. Жоголева Н.В. Вторые гармоник волн Лява в анизотропных слое на полупространстве при жестком закреплении или мембранном покрытии внешней грани. *Вісник Донецького ун-ту. Сер.А: Природничі науки*. 2013. Вип.2. С. 44-50.
6. Жоголева Н.В., Шевченко В.П. Нелінійні другі гармоніки локалізованих хвиль зсуву в анізотропному шарі між анізотропними півпросторами за умов неідеального контакту. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2016. Т. 59, № 3. С. 169 – 179.
7. Scherbak N.V., Storozhev V I. Nonlinear anharmonic effects for Love waves in structure “anisotropic layer on the anisotropic halfspace”. *Nonlinear Dynamics – 2007: works of the second international conference (Kharkov, 25-28 September 2007)*. Kharkov, 2007. P. 283-288.
8. Щербак Н. В., Сторожев В.И. Энергетические характеристики нелинейных вторых гармоник поверхностных волн Лява в волноводе с кристаллическими компонентами кубической системы. *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XI Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 26-29 ноября 2007г.)*. Ростов-на-Дону, 2007. Т.2. С.173-177.
9. Щербак Н. В., Сторожев В.И. Нелинейные эффекты генерации высших гармоник упругих волн сдвига в слое между разнородными полупространствами. *Наукові праці УкрНДМІ НАН України / за ред. А.В. Анциферова*. Донецьк: УкрНДМІ НАН України, 2009. Вип. 5, Ч. 1. С. 258 – 266.
10. Жоголева Н.В. Комбинационные вторые гармоник нелинейных волн Лява в кристаллическом слое на кристаллическом полупространстве. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: материалы VI Междунар. науч. конф. (Донецк, 8-11 июня 2010г.)*. Донецк: Юго-Восток, 2010. С 149 – 153.
11. Жоголева Н.В., Сторожев В.И. Теоретический анализ нелинейных эффектов генерации вторых гармоник обобщенных поверхностных волн Лява. *Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: материалы XXII Междунар. науч. школы (Алушта, 20-26 сентября 2010г.)*. Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2012. С. 128-131.

12. Scherbak N.V., Storozhev V I. Nonlinear anharmonic effects for Love waves in structure “anisotropic layer on the anisotropic halfspace”. *Book of abstracts of the second international conference “Nonlinear Dynamics – 2007”*, Kharkov, P. 87.
13. Щербак Н.В. Форма решения задачи о нелинейных ангармонических возмущениях в обобщенных упругих волнах Стоунли. *Наукова конференція студентів математичного факультету*: зб. наук. та наук.-метод. праць (Донецьк, 15 травня 2009 р.). Донецьк: ДонНУ, 2009. С. 43-44.
14. Scherbak N.V., Storozhev V I. The nonlinear second harmonics of elastic Stoneley waves localized between anisotropic ideally contacting halfspaces. *Analytic methods of mechanics and complex analysis*: abstracts of International conference dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary (Kiev, 29 June – 5 July, 2009). Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2009. P. 48.
15. Жоголева Н.В., Сторожев В.И. Эффекты нелинейного ангармонического воздействия в полях обобщенных поверхностных волн Лява. *Устойчивость, управление и динамика твердого тела*: тезисы докладов XI Междунар. конф. (Донецк, 8-12 июня 2011г.). Донецк, 2011. С. 48-49.
16. Жоголева Н.В. Нелинейные вторые гармоники упругих волн Стоунли, локализованных между идеально контактирующими анизотропными полупространствами. *Консонанс – 2011. Акустичний симпозіум*: тези поповідей (Київ, 27-29 вересня 2011 р.). Київ: Інститут гідромеханіки НАН України, 2011. С. 26.
17. Жоголева Н.В. Нелинейные ангармонические возмущения для обобщенных волн Стоунли вдоль границы контакта анизотропных полупространств кубической системы. *Математическое моделирование и биомеханика в современном университете*: тезисы докладов IX Всерос. школы-семинара (Дивноморское, 26 – 30 мая 2014г.). Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федеральн. ун-та, 2014. С. 68.
18. Жоголева Н.В. Нелинейные вторые гармоники сдвиговых упругих волн в анизотропном слое между анизотропными полупространствами при неидеальном механическом контакте материалов. *Dynamical system modelling and stability investigation*: abstracts of XVIII International conference (Kyiv, May 24-26, 2017). Kyiv, 2017. P. 118.
19. Жоголева Н.В. Нелінійні другі гармоніки локалізованих пружних хвиль при неідеальному контакті матеріалів. *Підстригачівські читання – 2017*: тези доповідей конф. молодих учених (Львів, 23–25 травня 2017 р.). Львів, 2017. С.21-22.

Анотація. Жоголева Н.В. Нелінійні ангармонічні ефекти при розповсюдженні поверхневих і локалізованих пружних хвиль в складених анізотропних тілах. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів, 2017.

З використанням моделі геометрично та фізично нелінійного деформування анізотропного пружного середовища побудовано аналітико-числові розв'язки

крайових задач визначення нелінійних ангармонічних збурень, що генеруються: у випадку поширення поверхневої хвилі Лява, а також у разі поширення двох хвиль Лява в хвилеводі у вигляді анізотропного пружного шару монокристала класу $m3m$ кубічної системи, розташованому на півпросторі того ж класу симетрії; у випадку поширення локалізованої SH хвилі в хвилеводі у вигляді шару з монокристалу класу $m3m$ кубічної системи, вміщеного з ідеальним або ковзним механічним контактом проміж півпросторів аналогічного класу анізотропії; у разі поширення локалізованих хвиль Стоунлі в хвилеводі, що складається з двох ідеально контактуючих анізотропних півпросторів з монокристалічних матеріалів кубічної системи. Досліджено та узагальнено амплітудно-частотні залежності для кінематичних і енергетичних характеристик нелінійних других гармонік, розглянутих у роботі типів хвиль. Проаналізовано та узагальнено ефекти впливу фізико-механічних характеристик хвилеводних структур на амплітудні рівні, форми хвильових рухів і енергетичні показники нелінійних других гармонік досліджуваних поверхневих і локалізованих пружних хвиль.

Ключові слова: складені анізотропні тіла, монокристали кубічної системи, загальна нелінійність, ангармонічні хвильові ефекти, нелінійні другі гармоніки, поширення монохроматичних хвиль, нелінійна взаємодія, кінематичні та енергетичні характеристики, хвилі Лява, хвилі Стоунлі, шар проміж півпросторами, локалізовані хвилі зсуву.

Аннотация. Жоголева Н.В. Нелинейные ангармонические эффекты при распространении поверхностных и локализованных упругих волн в составных анизотропных телах. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2017.

На базе использования модели геометрически и физически нелинейного деформирования анизотропной упругой среды построены теоретические численно-аналитические решения краевых задач определения нелинейных ангармонических возмущений, генерируемых: при распространении поверхностной волны Лява, при распространении двух волн Лява в волноводе в виде анизотропного упругого слоя монокристалла класса $m3m$ кубической системы, расположенного на полупространстве того же класса симметрии; при распространении локализованных SH волн в волноводе в виде слоя из монокристалла класса $m3m$ кубической системы, вмененного с идеальным или неидеальным проскальзывающим механическим контактом между полупространствами; в случае распространения локализованных волн Стоунли в волноводе, состоящем из двух идеально контактирующих анизотропных полупространств монокристаллических материалов кубической системы. Исследованы и обобщены амплитудно-частотные зависимости для кинематических и энергетических характеристик нелинейных вторых гармоник для рассмотренных в работе типов волн. Проанализированы и обобщены эффекты влияния физико-механических характеристик волноводных структур на амплитудные уровни, формы волновых движений и энергетические показатели

нелинейных вторых гармоник исследуемых поверхностных и локализованных упругих волн.

Ключевые слова: составные анизотропные тела, монокристаллы кубической системы, общая нелинейность, ангармонические волновые эффекты, нелинейные вторые гармоники, распространение монохроматических волн, нелинейное взаимодействие, кинематические и энергетические характеристики, волны Лява, волны Стоунли, слой между полупространствами, локализованные волны сдвига.

Abstract. Zhogoleva N.V. Nonlinear unharmonic effects under the propagation of surface and localized elastic waves in anisotropic composite bodies. - Manuscript.

The thesis presented for Degree of the Candidate in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 - Mechanics of Deformable Solids. - Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2017.

Based on the model of geometrically and physically nonlinear deformation of an anisotropic elastic medium theoretical analytic and numerical solutions of boundary value problems for the determination of nonlinear anharmonic perturbations generated in the propagation of: surface Love wave and in the case of two Love waves propagation in the waveguide of anisotropic elastic layer of $m\bar{3}m$ class cubic system monocrystal located on the half-space of the same symmetry class; localized SH wave in the waveguide of anisotropic elastic layer of $m\bar{3}m$ class cubic system monocrystal located with the ideal or slide mechanical contact between two half-spaces; localized Stoneley waves in a waveguide, consisting of two perfectly contacting anisotropic half-spaces from monocrystalline materials of the cubic system are constructed. Based on the analysis of the constructed numerical-analytical solutions, the amplitude-frequency dependences are investigated and generalized for kinematic and energetic characteristics of nonlinear second harmonics for investigated elastic waves. The effects of the physico-mechanical characteristics influence of the considered waveguide structures on amplitude levels, wave motion patterns, and energy indices of studied surface and localized elastic waves and their nonlinear second harmonics are analyzed and generalized.

Keywords: composite anisotropic bodies, monocrystals of the cubic system, general nonlinearity, anharmonic wave effects, nonlinear second harmonics, propagation of monochromatic waves, nonlinear interaction, kinematic and energetic characteristics, Love waves, Stoneley waves, a layer between half-spaces, localized shear waves.

