НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ГОРЯЧКО ТАРАС ВСЕВОЛОДОВИЧ

УДК 539.3:531.3

ДИСЕРТАЦІЯ

АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН І ГОФРОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_______________Т.В. Горячко

Науковий керівник: Марчук Михайло Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради /Ясінський А.В./

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Горячко Т.В. Амплітудно-частотні характеристики шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів, 2019.

Дисертація присвячена розвитку методу збурень у поєднанні з методом скінченних елементів стосовно задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та геометрично нелінійного деформування. Для цього здійснено постановку початково-крайової задачі, яка описує динамічний напружено-деформований стан ортотропного криволінійного шару з довільною конфігурацією серединної поверхні за геометрично нелінійного деформування. На основі квадратичних апроксимацій за нормальною до серединної поверхні координати і загальної просторової теорії пружності розроблено теорію оболонок, яка враховує податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Одержані формули застосовано для побудови одновимірної варіаційної задачі для оболонок з довільною формою напрямної. Сформульовані варіаційні постановки задач з використанням просторової теорії пружності та теорії оболонок на основі зсувної моделі С.П. Тимошенка.

До розв’язання варіаційних задач застосовано ізопараметричні лінійні апроксимації на скінченних елементах. Виведено формули для знаходження коефіцієнтів лінійних і нелінійних складових матриць жорсткості, які дозволяють проводити їх швидке обчислення. Узагальнено метод збурень для розв’язання отриманих систем нелінійних звичаних диференціальних рівнянь, який дозволяє уникнути секулярного члена у розв’язку задачі. На цій основі розроблено методику знаходження власних частот за геометрично нелінійних коливань видовжених циліндричних панелей і гофрованих оболонок.

Показано доцільність використання моделі, побудованої на основі квадратичних апроксимації за нормальною до серединної поверхні шару координатою шляхом порівняння чисельних результатів, отриманих для одношарової пластини-смуги за просторовою теорією пружності та узагальненою теорією С.П. Тимошенка. Досліджено вплив податливості до трансверсьного зсуву на власні частоти одношарової пластини-смуги.

Отримано аналітичну формулу для обчислення власної частоти за нелінійних коливань через значення лінійної власної частоти, нелінійної матриці жорсткості та власних векторів лінійної задачі вільних коливань. Проведено порівняння значень власних частот коливань за нелінійного деформування отриманих з використанням запропонованої методики, яка базується на методі скінченних елементів і узагальненого методу збурень, з відомими аналітичними розв'язками і показано її ефективність.

Досліджено амплітудно-частотні характеристики за лінійних та геометрично нелінійних коливань тришарової пластини-смуги, що складається з двох металевих лицевих та гумового середнього шарів. Проаналізовано вплив структури тришарової пластини-смуги на значення власних частот. Для видовженої циліндричної панелі показано характер впливу кривини напрямної і товщини на її власні частот за лінійних і геометрично нелінійних коливань.

Отримано вирази для геометричних характеристик серединної поверхні гофрованої циліндричної оболонки, які характеризуються частотою та амплітудою гофрування. Проведено аналіз характеру залежності власної частоти за лінійних і геометрично нелінійних коливань гофрованих видовжених циліндричних панелей від частоти та амплітуди гофрування.

Для реалізації алгоритмів чисельних схем розроблено відповідне програмне забезпечення.

Ключові слова: пластина-смуга, гофрована циліндрична оболонка, метод скінченних елементів, метод збурень, вільні коливання, власна частота, геометрично-нелінійна динамічна теорія пружності, уточнена теорія оболонок, амплітудо-частотні характеристики.

ANNOTATION

Goriachko T.V. Amplitude-frequency characteristics of layered plates and corrugated cylindrical shells. – Qualification scientific work with the manuscript copyright.

Thesis for granting the Degree of Candidate of Physical-mathematical sciences in speciality 01.02.04 – «mechanics of deformable solids» – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, 2019.

This work is devoted to the development of the perturbation method in conjunction with the finite element method to determine the amplitude-frequency characteristics of layered plates and corrugated cylindrical shells for linear and geometrically nonlinear deformations. For this purpose, an initial-boundary problem is formulated, which describes the geometrically nonlinear dynamic stress-strain behavior of the orthotropic curvilinear layer with arbitrary configuration of the mid- surface. Using the quadratic approximations for the normal axis to the mid-surface and the general elasticity theory, a refined higher-order shell theory is developed, which takes into account the shear deformation and axial compression. This theory is used to construct a one-dimensional variational problem for shells for shells with an arbitrary generatrix. In addition to that, variational problems are formulated, using the general elasticity theory and the Timoshenko type theory of shells.

Isoparametric linear approximations are applied to discretized variational problems. Nonlinear ordinary differential equations are obtained with respect to nodal displacements. Formulas are derived for finding components of the linear and nonlinear components of the stiffness matrix. The perturbation method is generalized to find the solution of the equations, which helps to avoid the secular term in the solution of the problem. A new methodology is developed for finding the eigenfrequencies of geometrically nonlinear vibrations of elongated cylindrical panels and corrugated shells.

The efficiency is shown for the proposed model, which is based on quadratic approximations along the normal axis to the mid-surface, by comparing eigenfrequencies of an isotropic plate obtained by using different shell theories. The

influence of shear deformation and axial compression on the eigenfrequency of a plate is investigated.

The analytical formula for calculating the eigenfrequency for nonlinear vibrations is obtained. It involves the values of the eigenfrequency and eigenvectors of linear vibrations problem and nonlinear stiffness matrix. The eigenfrequencies are calculated for nonlinear vibrations with the use of the proposed method based on the finite element method and the generalized perturbation method and compared to analytical solutions obtained by other authors.

The linear and geometrically nonlinear vibrations are investigated for a three-layered plate that consists of two metallic facial and one rubber middle layers. The influence of its structure on the eigenfrequencies is analyzed.

The influence of the radius of curvature and thickness of an elongated cylindrical panel on the eigenfrequencies of linear and geometrically nonlinear vibration is investigated.

The expressions is obtained that describes the geometry of the mid-surface of the corrugated cylindrical shell, which are characterized by the frequency and amplitude of the corrugation. The influence of these geometric parameters on the eigenfrequencies is investigated for linear and geometrically nonlinear vibrations of the corrugated shell.

The software for implementation of numerical scheme has been developed and tested on different examples.

Keywords: plate, corrugated cylindrical shell, finite element method, perturbation method, free vibrations, eigenfrequency, geometric-nonlinear dynamic theory of elasticity, high-order shell theory, amplitude-frequency characteristics

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Geometrically Nonlinear Free Transversal Vibrations of Thin-Walled Elongated Panels with Arbitrary Generatrix. *Vibrations in Physical Systems*. 2014. Vol. 26. P. 153–160.
2. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Natural Frequencies of Layered Elongated Cylindrical Panels for Geometrically Nonlinear Deformation at Discrete Consideration of Components. *Vibrations in Physical Systems*. 2016. Vol. 27. P. 255–264.
3. Горячко Т.В., Пакош В.С. Метод збурень у задачах про вільні коливання анізотропних видовжених циліндричних панелей за геометрично нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2013. Вип.11. С. 199–204.
4. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні коливання шаруватих циліндричних панелей за динамічного нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2014. Вип. 12. С. 174–179.
5. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених гофрованих циліндричних панелей. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2017. Вип. 15. С. 180–184.
6. Goriachko T., Marchuk M. Influence of Discreteness of the Structure by Thickness on the Amplitude-Frequency Characteristics for Elongated Cylindrical Panels at Geometrically Nonlinear Vibrations. *Proceedings of the V Inter University Conference «Engineer of XXI Century» at the University of Bielsko-Biała (ATH)* (December 04, 2015, Bielsko-Biała, Poland). P. 201–208.
7. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Lesyk O. Method of determination of natural frequencies and forms of nonlinear vibrations for layered cylindrical panels. *Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics* (September 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine). P. 342–349.
8. Горячко Т.В. Метод збурень для дослідження геометрично нелінійних вільних коливань анізотропних видовжених циліндричних панелей. *Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника*. Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 1. С. 131–132.

9. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Yakimov F. Method for Determination the Finite Number of Natural Frequencies and Amplitudes of Geometrically Nonlinear Vibrations of Elongated Thin-Walled Composite Panels. *XVIII International Conference. Mechanics of Composite Materials. Book of Abstracts*. Riga, 2014. P. 125.
10. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Пакош В.С., Якімов Ф.П. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур.* Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 339–341.
11. Марчук М.В., Муха І.С., Горячко Т.В. Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *Abstracts of Conference Reports "Dynamical System Modelling and Stability Investigation".* Kyiv, 2011. P. 301.
12. Горячко Т.В. Лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання композитних пластин-смуг та видовжених циліндричних панелей. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2012».* Львів. 2012. С. 31.
13. Горячко Т.В. Дослідження геометрично нелінійного деформування композитних пластин-смуг і видовжених циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача*. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2011. С. 334.
14. Горячко Т.В. Дослідження геометрично-нелінійного деформування циліндричної тонкостінної конструкції . *13 Всеукраїнська (8 міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики*. Львів: ЛНУ. 2010. С. 28–29.
15. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V., Lesyk O. Amplitude-frequency characteristics of elongated panels with arbitrary generatrix for geometrically nonlinear vibrations. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра*. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 2. С. 170–171.

16. Марчук М.В., Горячко Т.В., Пакош В.С., Харченко В.М. Геометрично нелінійні коливання гофрованих у коловому напрямку циліндричних оболонок. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні: Тези доповідей І Міжнародної науково-технічної конференції*. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. 2018. С. 40–41.

17. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Узагальнений метод збурень стосовно проблеми нелінійних коливань оболонок. *Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики»* (26-28 вересня 2018, Львів). Львів: Вид-во Тараса Сороки. 2018. С. 42–46.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Завдяки раціональній матеріаломісткості та можливості забезпечення необхідної жорсткості у певних напрямках, зумовлених експлуатаційними умовами, оболонкові та пластинчаті елементи є найпоширенішими складниками навантажених конструкцій, споруд і приладів різноманітного цільового призначення, що піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Потреба уникнення резонансних явищ під час дії вібраційних навантажень зумовлює необхідність визначати спектри власних частот вказаних конструктивних елементів на стадії проектування. Інтенсивні циклічні, особливо поперечні, навантаження на тонкостінні елементи можуть спричинити коливання зі значними амплітудами, співвимірними з товщинами, що в свою чергу зумовлює геометрично нелінійний характер їхнього деформованого стану. В окремих випадках специфіка функціонального призначення потребує шаруватої будови за товщиною зі значними відмінностями у значеннях фізико-механічних властивостей складників, що вимагає їхнього дискретного розгляду при визначенні амплітудно-частотних характеристик.

Дослідженню вільних, як лінійних так і геометрично нелінійних, коливань оболонок і пластин з урахуванням вказаних особливостей будови та умов експлуатації присвячена значна кількість праць, в котрих наведені аналітичні та чисельні розв’язки. Однак, у випадку складної конфігурації серединної поверхні, зокрема неканонічності напрямної в оболонках обертання, відома незначна кількість наближених розв’язків. Тому цілком вмотивованим є вдосконалення існуючих та розробка нових математичних моделей та методів розрахунку динамічного геометрично нелінійного деформування шаруватих оболонок і пластин, що дозволяють створювати ефективні методології розв’язання задач визначення їх амплітудно-частотних характеристик.

Зв’язок роботи з науковими планами, темами і програмами.

Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем за відомчими замовленнями НАН України: «Моделювання напруженого стану технічних і природних структур з дефектами і врахуванням теплових полів та контактних процесів» (2007–2011 рр., № держреєстрації 0107U000360), «Розробка методик та алгоритмів для аналізу динамічного стану тонкостінних композитних конструкцій і оптимізації режимів керування та параметрів маніпуляційних і локомоційних систем стосовно задач біомеханіки» (2011–2013 рр., № держреєстрації 0110U004818), «Чисельно-аналітичні методи дослідження напруженого стану та міцності неоднорідних тонкостінних структур з недосконалостями на основі уточнених моделей за дії статичних і динамічних навантажень» (2012–2016 рр., № держреєстрації 0111U009686), «Розробка математичних моделей та методів визначення динамічної поведінки композитних структур та нелінійних робототехнічних систем» (2014–2018 рр., № держреєстрації 0113U007684) та наукових договірних робіт для Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» в рамках Генеральної Угоди про спільне науково-технічне співробітництво між Національною академією наук України та Державним підприємством «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» в галузі створення ракетно-космічної техніки (2013–2017 рр.).

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розвиток методу збурень у поєднанні з методом скінченних елементів стосовно задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та геометрично нелінійного деформування.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі завдання:

– формулювання постановки початково-крайових та варіаційних задач про геометрично нелінійне динамічне деформування шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок;
– виведення деформаційних співвідношень для оболонок з довільною напрямною;

- узагальнення методу збурень для розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, який дає змогу позбутися секулярного члена у розв'язку задачі;
- створення на основі розроблених алгоритмів програмного забезпечення для розв'язування задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за геометрично нелінійного деформування;
- розроблення методології проведення числових експериментів з метою встановлення достовірності запропонованого підходу;
- проведення розрахунків характеристик коливних процесів.

Об'єкт дослідження – процеси лінійних і геометрично нелінійних коливань шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок.

Предмет дослідження – спектри власних частот та амплітудно-частотні залежності шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійних та геометрично нелінійних коливань.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використано метод пониження розмірності початково крайових задач, що описують динамічне геометрично нелінійне деформування шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок; адаптований метод скінченних елементів для дискретизації варіаційної нелінійної задачі вільних коливань шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок; узагальнений метод збурень стосовно відшукання розв'язків результуючих систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що:

- уперше виведено деформаційні співвідношення для оболонок з довільною конфігурацією напрямної, які побудовані на основі просторової теорії пружності з використанням квадратичних апроксимацій для компонент вектора переміщень за нормальною координатою до серединної поверхні;
- на основі методу скінченних елементів та узагальненого в роботі методу збурень розроблено нову методику знаходження розв'язків задач про вільні

коливання шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за геометрично нелінійного деформування;

– на основі розробленої методики створено програмне забезпечення для розв'язування задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за геометрично нелінійного деформування, яке покладено в основу методології проведення числових експериментів з метою встановлення достовірності запропонованого підходу;
– отримано та проаналізовано залежності власних частот тришарової пластини-смуги від її структури;
– проведено дослідження впливу геометричних характеристик гофрованих оболонок на їх амплітудо-частотні характеристики.

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням коректних математичних моделей механіки деформівного твердого тіла, строгістю і точністю математичних аналітичних викладок, верифікацією створеного програмного забезпечення на відомих числових результатах, отриманих іншими дослідниками. Ступінь достовірності підвищується також збігом окремих числових результатів з відомими з літературних джерел аналітичними та числовими розв'язками задач.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні та реалізації ефективного аналітико-числового методу визначення амплітудно-частотних характеристик гофрованих оболонкових і пластинчатих елементів конструкцій із шаруватих матеріалів за геометрично нелінійного деформування. Розроблене програмне забезпечення використано для дослідження поведінки важливих структурних складових ракетно-космічної техніки.

Особистий внесок здобувача.

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. Роботи [30-38, 69, 70, 144, 162-166] виконані у співавторстві з М.В. Марчуком, В.С. Пакош, О.Ф. Лесик, Ф.П. Якімовим та І.С. Мухою.

У спільних наукових працях особистий внесок здобувача складає: дослідження математичної моделі деформування оболонок, формулювання варіаційної задачі про геометрично нелінійні вільні коливання оболонок, розробка чисельного методу для розв'язування варіаційної задачі, програмна реалізація використаних числових схем, отримання числових розв'язків у геометрично лінійній та нелінійній постановках та аналіз результатів.

Співавтори та науковий керівник М.В. Марчук брали участь у постановці задач, обговоренні отриманих результатів і формулюванні висновків.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

1) 13-тій Всеукраїнській (8 міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики (Львів, 2010);
2) IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 2011);
3) XV International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Київ, 2011);
4) Конференції молодих учених «Підстригачівські читання–2012» (Львів, 2012);
5) Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2013, 2018);
6) IX Міжнародній науковій конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (Львів, 2014);
7) XVIII International Conference "Mechanics of Composite Materials" (Riga, 2014);
8) V Inter University Conference «Engineer of XXI Century», (Bielsko-Biała, Poland, 2015);
9) 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics (Харків, 2016);
10) I Міжнародній науково-технічній конференції "Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні" (Харків, 2018);

11) XXIV Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, APAMCS-2018 (Львів, 2018).

В повному обсязі дисертаційна робота доповідалася та обговорювалася на:

- спільному науковому семінарі відділів моделювання композитних структур і складних систем та обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук Кунця Я.І.;
- семінарі кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» Міністерства освіти і науки України під керівництвом доктора технічних наук, професора Курпи Л.В.;
- загальноінститутському науковому семінарі «Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ» Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України, доктора фіз.-мат. наук, професора Кіта Г.С.;
- семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Жука Я.О.

Публікації.

За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 17 наукових праць, зокрема, 5 статей [32–34, 164, 165] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України, 6 статей [30, 31, 36, 144, 162, 166] у збірниках матеріалів наукових конференцій, а також 6 публікацій [35, 37, 38, 69, 70, 163] у збірниках тез наукових конференцій. Праці [164, 165] опубліковані у журналі, який реферується наукометричною базою Scopus. Праці [30, 35, 37, 38] опубліковано автором одноосібно.

Обсяг і структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, п’яти розділів, які містять 36 рисунків і 14 таблиць, висновків, списку використаних джерел із 195 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 135 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 109 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. ВИБІР НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Проблеми, пов'язані з коливаннями оболонок, зустрічаються у багатьох галузях промисловості. В аерокосмічній і машинобудівній галузях до більшості конструкцій ставляться вимоги стосовно зменшення ваги та підвищення міцності. У таких конструкціях під впливом різноманітних напружень виникають коливання з певними амплітудами. Згідно з лінійною теорією власні частоти та форми коливань не залежать від амплітуди. При значних деформаціях таке припущення є некоректним і необґрунтованим, оскільки у таких випадках виникають різноманітні нелінійні ефекти. Найбільший інтерес у дослідженні коливань нелінійних систем представляють геометрично нелінійні коливання, що виникають при переміщеннях, співмірних з розмірами конструкцій. Це зумовлює використання нелінійних співвідношень між деформаціями і просторовими переміщеннями.

Використання постановок задач в рамках просторової теорії пружності дозволяє в повній мірі проаналізувати напружено-деформований стан конструкцій, виконаних з нових матеріалів – композитів. Дослідження коливних процесів таких тонкостінних елементів на основі просторових співвідношень динамічної теорії пружності відображенні у працях Й.І. Воровича [20], О.М. Гузя [50], С.Г. Лехницького [64, 65], Л.С. Плевако, А.К. Приварникова, Р.М. Раппопорта [94], О.О. Рассказова, І.М. Турчина, Ю.А. Устінова, та інших. Даний підхід враховує всі аспекти коливних процесів композитних структур. Однак, складність тривимірних задач зумовило використання ряду гіпотез, які притаманні для тонкостінних конструкцій.

Завдяки універсальності і поширеності, метод скінченних елементів (МСЕ) займає особливе місце і є основним чисельним метод для дослідження механіки деформівного твердого тіла. Цей метод лежить в основі переважної більшості сучасних програмних комплексів, призначених для виконання розрахунків різних механічних конструкцій.

Вперше він був застосований в інженерній практиці на початку 50-х рр. XX ст. Спочатку цей метод розвивався у двох незалежних один від іншого напрямках – інженерному і математичному. На ранніх етапах МСЕ ґрунтувався на принципах будівельної механіки, що обмежувало сферу його застосування. І тільки тоді, коли були сформульовані основи методу в варіаційній формі, його поширення стало можливим на багато інших задач. Самей цей чинник, разом з прогресом сучасної комп'ютерної техніки, дали поштовх для швидкого подальшого розвитку МСЕ.

Значний внесок у розробку МСЕ був зроблений І. Аргірісом (J. Argyris). Ним вперше було подано загальне матричне формулювання розрахунку стрижневих систем на базі фундаментальних енергетичних принципів і введено поняття матриці жорсткості. Роботи І. Аргіріса та його співробітників, опубліковані в період 1954-1960 рр., стали відправною точкою для матричного формулювання відомих чисельних методів і застосування ЕОМ в розрахунках конструкцій.

Для розвитку МСЕ особливе значення мають варіаційні принципи механіки деформівного твердого тіла. Вони стали потужним засобом при математичному формулюванні методу скінченних елементів. Дискретизацію задачі на основі варіаційного методу Рітца вперше в 1943 р застосував Р. Курант (R. Courant). У 1956 р. американські вчені М. Тернер (M.J. Turner), Р. Клаф (R.W. Clough), Г. Мартін (H.C. Martin) і Л. Топп (L.J. Topp), які працювали у фірмі Боїнг, опублікували перші наукові праці [190], в яких остаточно формулюється концепція методу скінченних елементів. Вона полягає у розбитті будь-якого об’єкту на підобласті, а також формуванні матриці жорсткості і вектора вузлових сил для трикутних скінченних елементів. Назву “метод скінченних елементів” Р. Клаф увів в 1960 р. У 1967 р. видано першу монографію О. Зенкевича (O.C. Zienkiewicz) і І. Чанга (C.T. Chang) про МСЕ [55], в якій викладено основи методу та області його застосування.

У сімдесятих роках минулого століття сформувалася математична теорія методу скінченних елементів. Тут можна виділити праці І. Бабушки (I. Babuška), Р. Галлагера (R.H. Gallager) [27], Ж. Деклу, Дж. Одена (J.T. Oden) [83], Г. Стренга (G. Streng) та Дж. Фікса (G.J. Fix) [111].

Період останніх десятиліть особливо характерний для розвитку і застосування МСЕ в таких областях механіки суцільних середовищ, як оптимальне проектування, врахування нелінійного деформування та інших.

Метод скінченних елементів, як і багато інших чисельних методів, базується на розгляді дискретизованого варіанту моделі замість реальної континуальної і заміні диференціальних рівнянь, що описують напружено-деформований стан суцільного середовища, системою алгебраїчних рівнянь. Разом з тим МСЕ допускає зрозумілу геометричну і фізичну інтерпретацію. На сьогоднішній день цей метод є одним з найпоширеніших та найбільш придатних для розв'язування задач деформування оболонок і пластин.

Дослідження тонкостінних елементів конструкцій із традиційних матеріалів було започатковано на основі використання класичної теорії, що базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Фундаментальні результати в цьому напрямку отримано в працях В.З. Власова [14, 15], Й.І. Воровича [17-19, 21], К.З. Галімова [26], О.Л. Гольденвейзера [28-29], Л. Донелла, М.А. Колтунова [82], А.І. Лур'є [67], К. Маргерра, Х.М. Муштарі [77, 78], В.В. Новожилова [81], П.М. Огібалова [82], К.Ф. Черниха [118, 119] та інших учених.

Основні принципи застосування методу скінченних елементів до задач деформування пластин і оболонок викладено в працях А.С. Городецького, І.І. Дияка, В.С. Зарубіна, Б.Я. Лащеникова, А.М. Маслєннікова, В.Г. Піскунова [88], В.А. Постнова [90, 91], О.О. Рассказова, Л.А. Розіна [99, 100], Я.Г. Савули [102-104, 106, 107, 108], А.С. Сахарова [109], В.М. Кукуджанова [60], М.М. Шапошнікова, Г.А. Шинкаренка [8, 9], К. Бате (K.-J. Bathe), Е. Вілсона (E.L. Wilson) [7], О. Зенкевича (O.C. Zienkiewicz), Р.Б. Рікардса[97, 98], Піана (T.H. Pian), Спілкера (R.L. Spilker), Сьярле (P.G. Ciarlet) [112], I.M. Daniel [141] та ін.

При застосуванні МСЕ до розв'язування задач про деформування оболонок, які ґрунтуються на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, виникають труднощі пов'язані з тим, що варіаційна постановка задачі містить другі похідні від шуканої функції прогину. Це ускладнює побудову скінченно-елементних апроксимацій. Також слід відзначити, що такий підхід враховує анізотропію фізико-механічних характеристик лише в тангенціальних напрямках, однак не дозволяє дослідити вплив на амплітудно-частотні характеристики таких специфічних властивостей нових матеріалів - композитів, як податливість до трансверсальних зсуву та стиснення.

Суттєві результати у вирішенні цієї проблеми містяться в роботах І. Альтенбаха [3], С.О. Амбарцумяна [4], І.М. Векуа [11-13], К.З. Галімова [22-26], Я.М. Григоренка [41, 44, 47, 48], О.М. Гузя [51-53], Р. Міндліна, П. Нагді (P.M. Naghdi) [170], Б.Л Пелеха [84, 87], В.Г. Піскунова, Е. Рейснера, М.А. Сухорольського, В.П. Тамужа [68], С.П. Тимошенка [113-115], Л.П. Хорошуна [116, 117] та інших учених.

Використання уточнених теорій оболонок дозволяє застосовувати лінійні апроксимації у МСЕ, оскільки функціонали відповідних варіаційних задач містять тільки перші похідні від переміщень, що понижує вимоги до гладкості апроксимацій переміщень і зменшує порядок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Передумовою для стрімкої популярності уточнених теорій оболонок стала робота С.П. Тимошенка, в якій були висунута гіпотеза, що перпендикулярний елемент до серединної поверхні тіла в початковій конфігурації не є перпендикулярним після деформації. Дане припущення було застосовано до пластин в роботах Р. Міндліна і Е. Рейснера. Значний внесок у даному напрямку містять роботи О.М. Гузя, Б.Л. Пелеха [51-53, 84-87] та інших.

Застосування і розвиток МСЕ до уточнених теорії оболонок представлено, зокрема, у роботах М.В. Марчука [71, 72], Я.Г. Савули [101, 105], T.J.R. Hughes, Р.Б. Рікардса [97, 98], І.С. Мухи [75] та ін.

Як показує практика, в деяких випадках уточненої теорії першого порядку недостатньо, що і стало поштовхом для розвитку уточнених теорій оболонок вищих порядків. Дослідження в даному напрямку проводили M. Amabili [126], J.N. Reddy, C.F. Liu [180], С.О. Амбарцумян [4] та інші.

У переважній більшості досліджень багатошарових оболонок в основному використовуючи два основні підходи. До першого належать теорії, які використовують кінематичні гіпотези для всього пакета шарів в цілому. У цьому випадку при використанні МСЕ порядок результуючої системи алгебраїчних рівнянь не залежить від кількості шарів. Такому підходу присвячені роботи С.О. Амбарцумяна [4], Я.М. Григоренка і А.Т. Василенка [44, 45], Х.М. Муштарі [78], Б.Л Пелеха [87,87], Е. Рейснера, О.О. Рассказова [96], A.A. Khdeir [153] та інших. Однак, дослідження показують, що даний підхід є неприйнятним, якщо механічні характеристики шарів суттєво відрізняються між собою.

Тому в останні роки значний розвиток отримали роботи другого напрямку: кінематичні гіпотези приймаються для кожного шару окремо. Основний внесок в розвиток цього підходу в теорії багатошарових оболонок внесли В.В. Болотін [6], Е.І. Григолюк [39], Г.М. Куліков [61, 62], Б.Я. Кантор, Я.П. Бузько, О.Л. Рабинович, П.П. Чулков і багато інших вчених. Перевагою другого напрямку є те, що він дозволяє проаналізувати кожен шар оболонки окремо. Однак його суттєвим недоліком є складність і високий порядок отриманих рівнянь, який залежить від кількості шарів [56].

Монографії, присвячені дослідженню динамічної поведінки ортотропних і багатошарових пластин і циліндричних оболонок, за останні роки опубліковані J.N. Reddy [179], M.S. Qatu [176], W. Soedel [185], E.J. Barbero [130], В.В. Васільєвим [10], М.А. Алфутова [2], В.І. Большакова [7] та іншими.

Дослідження деформацій оболонок з великими прогинами має велике значення для практичних розрахунків в інженерних спорудах. Дія інтенсивних динамічних, зокрема циклічних, експлуатаційних навантажень часто спричиняє поперечні переміщення в тонкостінних елементах, які співмірні з їхніми товщинами. Це зумовлює геометрично нелінійний характер їх деформованого стану.

Геометрично нелінійна теорія пружних оболонок почала стрімко розвиватися у середині минулого століття. В працях І.Г. Бубнова описано методи розрахунку оболонок, які базуються на нелінійній теорії пружності. В.В. Новожилов розглянув пластинки та оболонки, використовуючи співвідношення нелінійної теорії пружності.

Нелінійна теорія оболонок, яка базується на геометрично нелінійній теорії Кармана і гіпотезах Кірхгофа-Ліява, розвинута в працях Н.А. Алумяе [1], В.Є. Вериженка, А.С. Вольміра [16], Й.І. Воровича [18], О.М. Гузя [52], К.З. Галімова [26], Я.Ф. Каюка [56, 57], М.С. Корнішина [59], А.І. Лур'є [67], М.Ф. Морозова [74], Х.М. Муштарі [77], В.В. Новожилова [81], А.В. Погорєлова, К.Ф. Черниха [120], І.С. Чернишенка та інших.

Необхідність урахування нелінійних ефектів у задачах деформування оболонок стала причиною розвитку чисельних методів для розв'язання нелінійних задач. На основі методу скінченних елементів, який добре зарекомендував себе для розв'язування лінійних задач, побудовано багато алгоритмів для побудови чисельного розв'язку нелінійних задач.

На даний час опубліковано багато зарубіжних монографій, які стосуються лише нелінійного скінченно-елементного аналізу. До них належать праці, опубліковані такими авторами як J.T. Oden, M.A. Crisfield [140], M. Kleiber [155], Zhong, J.C. Simo і T.J.R. Hughes [183] та J. Bonet і R.D. Wood [137]. Монографія J.T. Oden особливо заслуговує на увагу, оскільки у ній вперше був застосований метод скінченних елементів до нелінійних задач механіки. У монографіях T. Belytschko і T.J.R. Hughes [134, 135], O.C. Zienkiewicz і R.L. Taylor[195], K.-J. Bathe [133], J.N. Reddy [178] частково розглянуто застосування методу скінченних задач до нелінійних задач. Найбільш повний аналіз представлено у працях O.C. Zienkiewicz і R.L. Taylor [195] та K.-J. Bathe [133].

Також слід відзначити праці у даному напрямку таких вчених, як Я.М. Григоренка [41, 42, 48, 49], М.В. Марчука [73], І.С. Мухи [76], А.П. Мукоєда [48], Я.Г. Савули [102-104], Г.А. Шинкаренка [107, 108] та інших.

У даних роботах для розв’язання нелінійних задач була використана схема розв’язку, яка побудована на основі варіаційного принципу Лагранжа або принципу віртуальної роботи. Для розв’язування нелінійної варіаційної задачі застосовано методи лінеаризації і отримано варіаційну постановку задачі відносно приростів розв’язку. Після застосування апроксимацій на скінченних елементах розв’язок задачі можна отримати за допомогою ітераційного процесу. Для розв’язування динамічних задач використовують явні або неявні чисельні методи інтегрування. Однак, даний підхід не дозволяє чисельно знайти значення власних нелінійних частот.

Постановкам задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання пластин і оболонок та розробці методів їх розв'язання на основі застосування уточнених теорій присвячені праці О.І. Беспалової [136], В.В. Болотіна, В.Т. Грінченка, Е.І. Григолюка [39], О.Я. Григоренка, Я.М. Григоренка [47], Я.О. Жука [193, 194], Б.Я. Кантора, В.А. Криська [127–129], Л.В. Курпи [63], Р.М. Кушніра, М.В. Марчука [71, 72, 167], Я.Г. Савули [101], І.М. Турчина [186], С.П. Тимошенка, M. Amabili [122-125], J. Awrejcewicz [127–129], I.K. Banerjee [130, 137], I.C. Chen, Li.A. Dong, C.L. Dym [152], D.A. Evensen [142, 143], P.B. Goncalves, E.L. Jansen [147-151], L. Librescu [159], M.K. Singha [184], R. Daripa, S.R. Marur [168], M. Sundhakar, T. Ueda та інших учених.

До появи таких чисельних методів, як широко використовуваний метод скінченних елементів, для дослідження нелінійних коливань пластин і оболонок використовувалися аналітичні методи. Незважаючи на те, що в даний час доступні обчислювальні ресурси для використання методу скінченних елементів у поєднанні з чисельним інтегрування за часом, аналітичні або напіваналітичні підходи залишаються надалі актуальними для моделювання поведінки тонкостінних елементів конструкцій. Аналітичний метод знаходження розв’язку задач коливання пластин і оболонок полягає в прямому інтегруванні системи диференціальних рівнянь з відповідними початково-крайовими умовами.

Вперше метод збурень у механіці твердого деформівного тіла було застосовано у дисертації W.T. Koiter [156] для дослідження стійкості пружних тіл.

У 1973 році, використовуючи аналітичні методи, L.W. Rehfield [181] застосував метод збурень для дослідження нелінійних коливань пластин і оболонок за допомогою математичних підходів, описаних вченими B. Budiansky і J.W. Hutchinson у [138].

Широкої популярності для знаходження розв'язку динамічних нелінійних задач механіки метод збурення набув після опублікування роботи [173] вченими A.H. Nayfeh і D.T. Mook. У своїх роботах [171, 172] A.H. Nayfeh обґрунтував застосування методу збурень до звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. У праці [174], A.H. Nayfeh і P. Frank Pai, застосували метод збурень до лінійних і нелінійних задач механіки, використовуючи зсувну теорію балок, пластин, оболонок і просторову теорію пружності.

J. Wedel-Heinen [191] використав подібний підхід для дослідження малих коливань статично навантажених конструкцій.

У ряді робіт E.L. Jansen [147–151] використовував теорію оболонок Муштари-Донелла-Власова та напіваналітичний метод для дослідження нелінійних вільних і вимушених коливань ортотропних та композитних оболонок. Зокрема, E.L. Jansen [147] представив два варіанти розв'язку з різними рівнями точності та складності. У спрощеному варіанті використано метод Бубнова-Гальоркіна і до отриманої системи рівнянь застосовано чисельні методи інтегрування відносно змінної часу. У "розширеному аналізі" граничні умови оболонки задовольняються точно і для оцінки коливань з великими значеннями амплітуд використано метод збурень. У [150, 151] ці методики використано для визначення впливу геометричних недосконалостей та статичного навантаження на амплітудно-частотні характеристики оболонок з композитних матеріалів. У [148] проаналізовано нелінійні коливання багатошарових оболонок. E.L. Jansen [149] також використав напіваналітичний метод, який базується на методі збурень для аналізу впливу різних граничних умов на нелінійні коливання композитних оболонок.

Згодом дослідження у цьому напрямі було продовжено у працях T. Rahman [177], де застосовано метод скінченних елементів і метод збурення для дослідження нелінійних вільних коливань композитних замкнених циліндричних оболонок.

Подібний підхід – поєднання методу скінченних елементів і методу збурень було використано R. Lewandowski [158] для розв'язування задачі про власні нелінійні коливання балки.

M.H. Toorani і A.A. Lakis у [188, 189] вивчали нелінійні вільні коливання замкнутих циліндричних оболонок на основі зсувної моделі Тимошенка з використанням методу скінченних елементів.

Нелінійні коливання шаруватих композитних оболонок було досліджено M. Amabili в [123, 124] та у співавторстві з J.N. Reddy в [126], на основі теорії оболонок вищого порядку.

О.І. Беспалова і Г.П. Урусова [136] запропонували чисельний підхід для аналізу динамічної стійкості оболонок. T. Rahman [178] поєднав метод скінченних елементів з методом збурень для проведення аналізу стійкості замкнених циліндричних оболонок.

Термін "гофрований" означає ряд паралельних гребенів та борозен. У машинобудуванні будь-який тонкостінний елемент конструкції, який має гофровану поверхню або зроблений шляхом згинання, формування, штампування або будь-яких інших способів виробництва, називається гофрованим тонкостінним елементом. Такі елементи можуть бути класифіковані на три типи: гофрована труба, гофрований лист і гофрована панель. Основною спільною рисою всіх гофрованих елементів конструкцій є їхня висока анізотропія та висока жорсткість у поперечному до гофрування напрямку. Враховуючи цю важливу особливість, гофрування розглядається як простий і ефективний спосіб побудови легких елементів конструкцій з подібною до анізотропних матеріалів поведінкою і високою стійкістю. Такі елементи широко використовуються у промислових цілях та для проведення наукових експерементів.

Порівняно невелика кількість робіт присвячена саме коливанням гофрованих оболонок. У більшості досліджень у цьому напрямку розглядають гофровані панелі, як конструкції з приведеними механічними характеристиками.

Хоча даний підхід є простим у реалізації, його недоліком є те, що він не враховує «локальні» ефекти в структурі гофри.

Такі вчені, як Н.П. Семенюк, І.Ю. Бабич, Н.Б. Жукова [110, 182], використали класичну теорію оболонок і принцип Гамільтона, щоб забезпечити комплексне вивчення коливань гофрованої циліндричної оболонки. Було показано недоліки розгляду гофрованої оболонки, як узагальненої конструкції. Такий підхід є придатним лише в обмеженому діапазоні частоти гофрування. В ході іншого аналітичного дослідження, проведеного на основі теорії оболонок, G.R. Gulgazaryan і L.G. Gulgazaryan [145] встановили геометричні умови, які могли б призвести до наявності хвиль Релея вздовж вільного краю гофрованої циліндричної оболонки.

С.В. Пузирьов у роботах [92, 93] дослідив резонансні частоти некругових циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом.

В останні роки актуальним є аналіз гофрованих панелей зі складнішими профілями гофрування [157]. Вчені C. Thurnherr, T. Pedergnana, G. Kress та P. Ermanni у роботі [187] проаналізували вплив різноманітних профілів гофрування панелі на її жорсткість і міцність.

Експериментальні дослідження коливань гофрованих пластин проведені вченим N.K. Mandal [161]. У цих експериментах досліджувались трапецієподібні профілі гофрування.

Гофрована сендвіч-панель – панель з верхньою та нижньою пластинами, прикріпленими до гофрованого наповнювача у піках гофри. Саме такі панелі досліджені в роботах L.A. Carlsson, T. Nordstrand, B.O. Westerlind [139]. Вибором відповідних профілів, розмірів та матеріалів лицевих панелей і гофрованого наповнювача досягається необхідна жорсткість і міцність елементів при їхній незначній вазі. Характеристики цієї гофрованої структури залежать в основному від легкого гофрованого наповнювача, який відокремлює лицеві панелі і забезпечує необхідну жорсткість всієї панелі.

W. Hui і Y. Huan-ran [146] провели лінійний аналіз простої сендвіч-панелі з гофрованим наповнювачем. Ними розглянуто зсувну теорію першого порядку, у якій деформація зсуву незначна вздовж напрямку гофрування.

K.M. Liew та інші вчені у [160] використали безсіткові чисельні методи, щоб проаналізувати коливання гофрованої пластини.

Також даному напрямку досліджень присвячено ряд публікацій [154, 169, 192].

У більшості робіт, присвячених дослідженню коливань оболонок і пластин, використано технічну теорію на основі гіпотези С.П. Тимошенка, що не дозволяє враховувати податливість композитних пластин до деформацій поперечного стиснення. Врахування даної характеристики є особливо актуальною при розгляді конструкцій, виготовлених із сучасних композитних матеріалів на полімерній основі. Слід відзначити, що при аналізі коливань шаруватих пластин з використанням даної теорії за допомогою методу скінченних елементів виникають певні труднощі для врахування умов контакту між шарами. Також поперечне стиснення слід враховувати при коливаннях з великою амплітудою. Тому розгляд нових математичних моделей динамічного деформування, які дозволяють врахувати податливість до зсуву і стиснення композитних оболонок і пластин, є необхідним для аналізу лінійних так і нелінійних коливань.

Враховуючи те, що в літературі практично відсутні публікації, присвячені проблематиці коливань гофрованих оболонок за нелінійного деформування, актуальними є дослідження в даному напрямку.

Наведений аналіз літературних даних свідчить, що на даний момент все ще не існує універсального підходу до розв’язання задач динаміки пластин і оболонок, особливо у випадках неоднорідної будови за товщиною та складної геометрії серединної поверхні. Одним із найбільш придатних для цього є метод збурень у поєднанні з існуючими чисельними методами. Тому розвиток методу збурень в поєднанні з методом скінченних елементів стосовно задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та геометрично нелінійного деформування є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ ДИНАМІЧНО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Тонкі видовжені циліндричні оболонки є одними з найпоширеніших елементів конструкцій у промисловості, що піддаються впливу динамічних, зокрема циклічних, навантажень. Щоб уникнути резонансних явищ в експлуатаційних умовах, необхідно на стадії проектування визначити спектр власних частот зазначених конструктивних елементів. Через дефіцит і високі ціни на традиційні матеріали виникає потреба заміни їх новими конструкційними, зокрема композитними матеріалами, експлуатаційні властивості та характеристики міцності яких можна прогнозувати в широкому діапазоні на стадії проектування і регулювати в процесі виготовлення. Поряд з анізотропією пружних властивостей найбільш характерною особливістю деформування тонкостінних оболонок з композитів є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Однак в більшості робіт вільні коливання композитних тонкостінних елементів конструкцій досліджені з урахуванням тільки податливості до трансверсального зсуву.

В даному розділі розглянуто загальну постановку задач про геометрично нелінійне динамічне деформування ортотропного криволінійного пружного шару, описано співвідношення для знаходження компонент тензорів деформацій і напружень, записано відповідну одновимірну варіаційну постановку задачі.

2.1. Співвідношення просторової геометрично нелінійної динамічної теорії пружності в криволінійній системі координат

Розглянуто ортотропний криволінійний пружний шар (рис. 2.1) товщиною h, який перебуває під дією об’ємних F^i (i=1,2,3) та поверхневих f^i (i=1,2,3) динамічних зусиль. Введено таку нерухому криволінійну систему координат α_1, α_2, α_3 так, щоб осі α_1 і α_2 лежали на серединній поверхні даного шару.

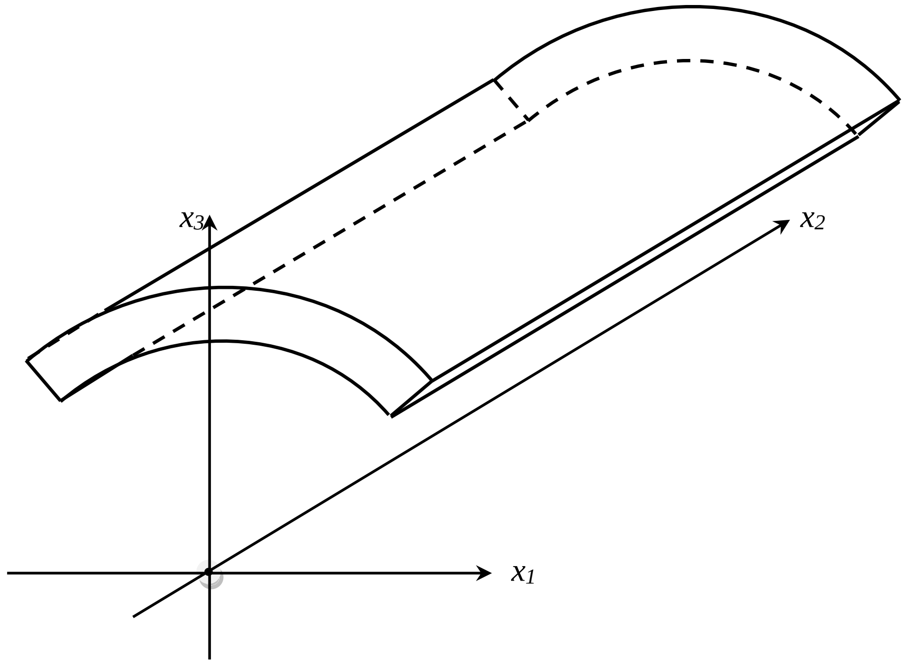


Рис 2.1. Криволінійний пружний шар у декартовій системі координат

Тоді напружено-деформований стан описується вектором переміщення $\vec{u} = u_i \vec{R}^i = u^i \vec{R}_i$, тензором деформацій $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{R}^i \vec{R}^j = \varepsilon^{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j$ і тензором напружень $\hat{\Sigma} = \sigma_{ij} \vec{R}^i \vec{R}^j = \sigma^{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j$, де $\vec{R}^i, \vec{R}_i$, i = 1,2,3, – контрваріантні та коваріантні базисні вектори системи α_i, i=1,2,3.

Компоненти тензора деформації визначаються через компоненти вектора переміщень точок шару за співвідношеннями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k\right), \tag{2.1}$$

де u_i, u^i – коваріантна і контрваріантна компоненти вектора переміщень відповідно, символ ∇_i означає коваріантну похідну компоненти вектора у системі координат α_i і виконується за формулами [121]:

$$\nabla_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - u_k G_{ij}^k, \tag{2.2}$$

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial \alpha_j} + u^k G^i_{kj}. \qquad (2.3)$$

У (2.2), (2.3) *i*, *j* = 1,2,3, – символи Крістофеля другого роду, які визначаються через компоненти метричного тензора $\hat{G} = g_{ij}\vec{R}^i\vec{R}^j = g^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j$ наступним чином:

$$G^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3} g^{mk}\left[\frac{\partial g_{im}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha_m}\right]. \qquad (2.4)$$

Компоненти метричного тензора в свою чергу визначаються через формули:

$$g^{ij} = \vec{R}^i\vec{R}^j,$$

$$g_{ij} = \vec{R}_i\vec{R}_j.$$

Оскільки шар є пружним, тобто не виходить в зону пластичності, використаємо узагальнений закон Гука, як співвідношення між деформаціями і напруженнями. Узагальнений закон Гука у тензорній постановці в тривимірному випадку має вигляд:

$$\hat{\Sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon},$$

або у покомпонентній формі:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkm}\varepsilon_{km}, \qquad (2.5)$$

де $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор пружних характеристик анізотропного шару. Він є тензором 4-го рангу з 81 компонентою. Для анізотропного тіла, якщо врахувати симетричність даного тензора

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{jilk} = C^{klij} = C^{lkij} = C^{klji} = C^{lkji},$$

число його незалежних компонент тензора скоротиться до 21. Також, враховуючи симетричність тензорів деформація і напружень

$$\begin{gathered}
\sigma^{11} = C^{1111}\varepsilon_{11} + C^{1122}\varepsilon_{22} + C^{1133}\varepsilon_{33} + C^{1112}2\varepsilon_{12} + C^{1113}2\varepsilon_{13} + C^{1123}2\varepsilon_{23}\\
\sigma^{22} = C^{2211}\varepsilon_{11} + C^{2222}\varepsilon_{22} + C^{2233}\varepsilon_{33} + C^{2212}2\varepsilon_{12} + C^{2213}2\varepsilon_{13} + C^{2223}2\varepsilon_{23}\\
\sigma^{33} = C^{3311}\varepsilon_{11} + C^{3322}\varepsilon_{22} + C^{3333}\varepsilon_{33} + C^{3312}2\varepsilon_{12} + C^{3313}2\varepsilon_{13} + C^{3323}2\varepsilon_{23}\\
\sigma^{12} = C^{1211}\varepsilon_{11} + C^{1222}\varepsilon_{22} + C^{1233}\varepsilon_{33} + C^{1212}2\varepsilon_{12} + C^{1213}2\varepsilon_{13} + C^{1223}2\varepsilon_{23}\\
\sigma^{13} = C^{1311}\varepsilon_{11} + C^{1322}\varepsilon_{22} + C^{1333}\varepsilon_{33} + C^{1312}2\varepsilon_{12} + C^{1313}2\varepsilon_{13} + C^{1323}2\varepsilon_{23}\\
\sigma^{23} = C^{2311}\varepsilon_{11} + C^{2322}\varepsilon_{22} + C^{2333}\varepsilon_{33} + C^{2312}2\varepsilon_{12} + C^{2313}2\varepsilon_{13} + C^{2323}2\varepsilon_{23},
\end{gathered}$$

закон Гука в матричній формі набуває вигляду:

$$\vec{\sigma} = C\vec{\varepsilon}\,, \tag{2.6}$$

де

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{22} & \sigma^{33} & \sigma^{12} & \sigma^{13} & \sigma^{23} \end{pmatrix}^T;$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}^T;$$

$$C = \begin{pmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ C^{1311} & C^{1322} & C^{1333} & C^{1312} & C^{1313} & C^{1323} \\ C^{2311} & C^{2322} & C^{2333} & C^{2312} & C^{2313} & C^{2323} \end{pmatrix}.$$

Після застосування наступних перетворень індексів:

$$11->1;22->2;33->3;12->4;13->5;23->6$$

і врахування симетричності компонент тензора $\overset{4}{\hat{C}}$, матриця C має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} & C^{13} & C^{14} & C^{15} & C^{16} \\ C^{12} & C^{22} & C^{23} & C^{24} & C^{25} & C^{26} \\ C^{13} & C^{23} & C^{33} & C^{34} & C^{35} & C^{36} \\ C^{14} & C^{24} & C^{34} & C^{44} & C^{45} & C^{46} \\ C^{15} & C^{25} & C^{35} & C^{45} & C^{55} & C^{56} \\ C^{16} & C^{26} & C^{36} & C^{46} & C^{56} & C^{66} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Розглянуто випадок ортотропного тіла [31, 35], у кожній точці якого є три площини симетрії, які збігаються з координатними площинами. Тоді число незалежних пружних сталих скорочується до 9 у матриці (2.7), яка має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} & C^{13} & 0 & 0 & 0 \\ C^{12} & C^{22} & C^{23} & 0 & 0 & 0 \\ C^{13} & C^{23} & C^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{66} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

У термінах коефіцієнтів пружності матриця (2.8) в декартовій системі координат матиме вигляд:

$$C=\begin{pmatrix} \bar{E}_1(1+\chi_1) & \bar{\nu}_{21}\bar{E}_1 & \lambda_1 E_0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\nu}_{12}\bar{E}_2 & \bar{E}_2(1+\chi_2) & \lambda_2 E_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 E_0 & \lambda_2 E_0 & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

де

$$\chi_1=\frac{(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})^2}{D}\frac{E_1}{E_3};$$

$$\chi_1=\frac{(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})^2}{D}\frac{E_2}{E_3};$$

$$\lambda_1=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{\delta^2}\frac{E_1}{E_3};$$

$$\lambda_2=\frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{\delta^2}\frac{E_2}{E_3};$$

$$\bar{\nu}_{12}=\nu_{12}+\frac{\nu}{D}\frac{E_1}{E_3};\ \bar{\nu}_{21}=\nu_{21}+\frac{\nu}{D}\frac{E_2}{E_3};$$

$$\bar{E}_i=\frac{E_i}{\delta^2},\, i=1,2;\ E_0=\frac{E_3\delta^2}{D};$$

$$D=1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{32}\nu_{23}-\nu_{13}\nu_{32}\nu_{21}-\nu_{32}\nu_{31}\nu_{12};$$

$$\nu=(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})\,(\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12});$$

$$\delta^2=1-\nu_{12}\nu_{21};$$

E_i – модулі Юнга в напрямках α_i;

ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона, які характеризують стиснення в напрямку α_j при розтягу в напрямку α_i;

G_{ij} – модулі зсуву між головними напрямками α_i та α_j (i, j=1,2,3).

Рівняння руху шару в координатах Лагранжа (недеформовній базі) мають вигляд:

$$div\,\hat{P} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \qquad (2.10)$$

де $\hat{P}$ – перший несиметричний тензор Кірхгофа-Піоли;

$\rho = \rho(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – скалярне поле, яке визначає густину шару;

t – змінна за часовою координатою.

Постійні в загальних інтегралах диференціальних рівнянь визначають з умов на граничних поверхнях шару $S_{\pm}$, що описуються рівняннями $\alpha_3 = \pm\frac{h}{2}$ на боковій поверхні $\Omega = \Omega_\sigma + \Omega_u$ та з початкових умов. Граничні умови записуються у вигляді

$$P^{3i}(\alpha_1, \alpha_2, \pm\frac{h}{2}, t) = X^{\pm}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, t),\ i = 1,\ 2,\ 3, \quad \alpha_1 \in [\alpha_1^{\ 0}, \alpha_1^{\ 1}], \alpha_2 \in [\alpha_2^{\ 0}, \alpha_2^{\ 1}]; \qquad (2.11)$$

$$P^{im}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)\, n_i = f^{\,m}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)\,, i = 1,2,3,\ m = 1,2,3, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Omega_\sigma; \qquad (2.12)$$

$$u^i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = g^{\,i}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t),\ i = 1,2,3, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Omega_u, \qquad (2.13)$$

де n_i – коваріантні компоненти вектора одиничної нормалі до бокової поверхні Ω_σ недеформованого шару;

$X^{\pm}_{3i}$ – складові вектора напруження на лицевих поверхнях $S_{\pm}$;

$f^{\,m}$ – складові вектора зусиль, що діють на бокову поверхню деформованого шару, але віднесені до одиниці площі бокової поверхні недеформованого шару;

$g^{\,i}$ – компоненти вектора пружного переміщення точок частини бокової поверхні Ω_u.

Рівняння руху (2.10) разом зі співвідношеннями (2.1) і (2.5) та граничними умовами (2.11) – (2.13) описують геометрично нелінійні поперечні коливання серединного перерізу панелі, якщо початкові умови в момент часу $t = t_0$ задати так:

$$u^i\big|_{t=t_0} = u_0^i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3);$$

$$\left.\frac{\partial u^i}{\partial t}\right|_{t=t_0} = v_0^i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.14}$$

Тут u_0^i і v_0^i, – задані функції.

2.2. Варіаційна постановка задачі

Для варіаційної постановки задачі використано принцип віртуальної роботи, який стверджує, що робота внутрішніх сил дорівнює роботі зовнішніх сил на будь-яких віртуальних переміщеннях. В інтегральній формі дане твердження записується наступним чином [133]:

$$\int_{V(t)} \delta\hat{E} : \hat{\tau} dV + \int_{V(t)} \rho \delta\vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\Omega_\sigma(t)} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dS, \tag{2.15}$$

$\forall \delta\vec{u} \in D_A = \left\{ \vec{u} : \vec{u} \in W_2^{(2)}; \vec{u} = \vec{g}, \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Omega_u, \forall t \right\}$ ($W_2^{(2)}$ – простір Соболєва),

де $\hat{\tau}$ – тензор напружень Коші;

$\vec{f}$ – вектор поверхневих зусиль (2.12);

$\delta\hat{E}$ – тензор лінійних деформацій, який відповідає варіації переміщень $\delta\vec{u}$.

Оскільки $V(t)$ є невідомим у випадку геометрично нелінійного деформування, при якому об'єм $V(t)$ суттєво відрізняється від початкового об'єму V_0, (2.15) у початковій (недеформованій) конфігурації має вигляд:

$$\int_{V_0} \delta \overset{0}{\hat{\varepsilon}} : \overset{0}{\hat{S}} dV + \int_{V_0} \rho_0 \delta\overset{0}{\vec{u}} \cdot \frac{\partial^2 \overset{0}{\vec{u}}}{\partial t^2} dV = \int_{\Omega_\sigma} \delta\overset{0}{\vec{u}} \cdot \vec{f} dS, \tag{2.16}$$

де $\overset{0}{\hat{S}}$ – другий симетричний тензор напружень Кірхгофа-Піоли, для якого справедлива формула $\hat{S} = \hat{P} \cdot \left(\hat{F}^{-1}\right)^T$, де $\hat{P}$ – тензор з формули (2.10), а $\hat{F} = \hat{G} + grad^T u$ – тензор градієнта локального руху;

$\delta \overset{0}{\hat{\varepsilon}}$ – тензор деформацій Гріна, який відповідає варіації переміщень $\delta\overset{0}{\vec{u}}$.

"0" над символом тензора означає, що його компоненти розглядаються в початковій конфігурації базових векторів.

У випадку лінійного деформування $V(t) \approx V_0$ та інтеграл (2.15) має вигляд:

$$\int_{V_0} \delta\hat{E} : \hat{\tau} dV + \int_{V_0} \rho \delta\vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\Omega_\sigma} \delta\vec{u} \cdot \vec{f} dS \ . \qquad (2.17)$$

2.3. Компоненти тензора деформацій в довільній системі координат

Компоненти тензора градієнта вектора $\vec{u}$ у матричному вигляді:

$$\{\nabla_i u_j\} = \begin{pmatrix} \nabla_1 u_1 & \nabla_1 u_2 & \nabla_1 u_3 \\ \nabla_2 u_1 & \nabla_2 u_2 & \nabla_2 u_3 \\ \nabla_3 u_1 & \nabla_3 u_2 & \nabla_3 u_3 \end{pmatrix}.$$

У векторному вигляді компоненти цього тензора можна записати через коваріантну похідну по α_j коваріантної компоненти вектора $\vec{u}\,(u_i)$:

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \begin{pmatrix} \nabla_1 u_1 & \nabla_2 u_1 & \nabla_3 u_1 & \nabla_1 u_2 & \nabla_2 u_2 & \nabla_3 u_2 & \nabla_1 u_3 & \nabla_2 u_3 & \nabla_3 u_3 \end{pmatrix}^T .$$

Враховуючи (2.2), для $\vec{\nabla}\vec{u}$ справедливе співвідношення:

$$\vec{\nabla}\vec{u} = B\tilde{u} \ , \qquad (2.18)$$

де $\tilde{u}$ – вектор, який складається з коваріантних компонент вектора $\vec{u}$ і їх часткових похідних:

$$\tilde{u} = \left(u_1 \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} \quad u_2 \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} \quad u_3 \quad \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \right)^T;$$

матриця $B = B(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ має наступний вигляд:

$$B=\begin{pmatrix} -G_{11}^{1} & 1 & 0 & 0 & -G_{11}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{11}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{12}^{1} & 0 & 1 & 0 & -G_{12}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{12}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{13}^{1} & 0 & 0 & 1 & -G_{13}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{13}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{21}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{21}^{2} & 1 & 0 & 0 & -G_{21}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{22}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{22}^{2} & 0 & 1 & 0 & -G_{22}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{23}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{23}^{2} & 0 & 0 & 1 & -G_{23}^{3} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{31}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{31}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{31}^{3} & 1 & 0 & 0 \\ -G_{32}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{32}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{32}^{3} & 0 & 1 & 0 \\ -G_{33}^{1} & 0 & 0 & 0 & -G_{33}^{2} & 0 & 0 & 0 & -G_{33}^{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Для вектора $\vec{u}$ справедливе наступне співвідношення:

$$\vec{u}=\tilde{B}\tilde{u}\,, \qquad (2.20)$$

де матриця $\tilde{B}$ матиме такий вигляд:

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Формулу для компонент тензора деформацій Гріна (2.1) можна переписати, використовуючи коваріантні похідні коваріантних компонент вектора переміщень:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_j u_i+\nabla_i u_j+\sum_{l,k} g^{lk}\nabla_i u_k \nabla_j u_l).$$

Компоненти тензора деформацій Гріна подано у векторній формі

$$\vec{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{22} \\ \tilde{E}_{33} \\ 2\tilde{E}_{12} \\ 2\tilde{E}_{13} \\ 2\tilde{E}_{23} \end{pmatrix}=\vec{e}+\vec{\eta}\,, \qquad (2.22)$$

де $\vec{e}$ – вектор, компоненти якого є лінійні складові тензора деформацій; $\vec{\eta}$ – вектор, компоненти якого є нелінійні складові тензора деформацій.

Виразимо $\vec{e}$ через $\vec{\nabla}\vec{u}$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_1 u_1 \\ \nabla_2 u_2 \\ \nabla_3 u_3 \\ \nabla_1 u_2 + \nabla_2 u_1 \\ \nabla_1 u_3 + \nabla_3 u_1 \\ \nabla_2 u_3 + \nabla_3 u_2 \end{pmatrix} = E\vec{\nabla}\vec{u}\,, \tag{2.23}$$

де матриця E матиме вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Оскільки $\vec{\eta}$ є квадратичною функцією від $\vec{\nabla}\vec{u}$, то існує два способи вираження компонент вектора $\vec{\eta}$ через компоненти вектора $\vec{\nabla}\vec{u}$. Використавши симетричність компонент метричного тензора, компоненти $\vec{\eta}$ можна представити наступним чином:

$$\vec{\eta}(\vec{u})=\begin{pmatrix}\tilde{E}_{11}\\ \tilde{E}_{22}\\ \tilde{E}_{33}\\ 2\tilde{E}_{12}\\ 2\tilde{E}_{13}\\ 2\tilde{E}_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_1u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_2u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_3u_k\nabla_3u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_2u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_3u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_3u_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_1u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_2u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_3u_k\nabla_3u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_2u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_3u_k\nabla_1u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_3u_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_1u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_2u_l\\ \frac{1}{2}\sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_3u_k\nabla_3u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_2u_k\nabla_1u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_1u_k\nabla_3u_l\\ \sum\limits_{l,k}g^{lk}\nabla_3u_k\nabla_2u_l\end{pmatrix}.$$

Справедливе наступне матричне співвідношення для $\vec{\eta}$:

$$\vec{\eta}=E_{NL}^{(1)}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)\vec{\nabla}\vec{u}=E_{NL}^{(2)}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)\vec{\nabla}\vec{u}, \tag{2.25}$$

де матриці $E_{NL}^{(1)}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)$ і $E_{NL}^{(2)}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)$ матимуть вигляд:

$$E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_{11}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{21}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{31}}{2}&0&0\\ 0&\frac{\lambda_{12}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{22}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{32}}{2}&0\\ 0&0&\frac{\lambda_{13}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{23}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{33}}{2}\\ 0&\lambda_{11}&0&0&\lambda_{21}&0&0&\lambda_{31}&0\\ \lambda_{13}&0&0&\lambda_{23}&0&0&\lambda_{33}&0&0\\ 0&0&\lambda_{12}&0&0&\lambda_{22}&0&0&\lambda_{32}\end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

$$E_{NL}^{(2)}(\vec{\nabla}\vec{u})=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_{11}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{21}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{31}}{2}&0&0\\ 0&\frac{\lambda_{12}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{22}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{32}}{2}&0\\ 0&0&\frac{\lambda_{13}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{23}}{2}&0&0&\frac{\lambda_{33}}{2}\\ \lambda_{12}&0&0&\lambda_{22}&0&0&\lambda_{32}&0&0\\ 0&0&\lambda_{11}&0&0&\lambda_{21}&0&0&\lambda_{31}\\ 0&\lambda_{13}&0&0&\lambda_{23}&0&0&\lambda_{33}&0\end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

де $\lambda_{ij}=\sum\limits_{k}g^{ik}\nabla_j u_k$.

Тобто, застосувавши перетворення (2.23) і (2.25), вираз (2.22) має вигляд:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{e} + \vec{\eta} = \left(E + E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)\vec{\nabla}\vec{u} = \left(E + E_{NL}^{(2)}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)\vec{\nabla}\vec{u}\,. \tag{2.28}$$

2.4. Фізичні компоненти переміщень і параметри Ламе

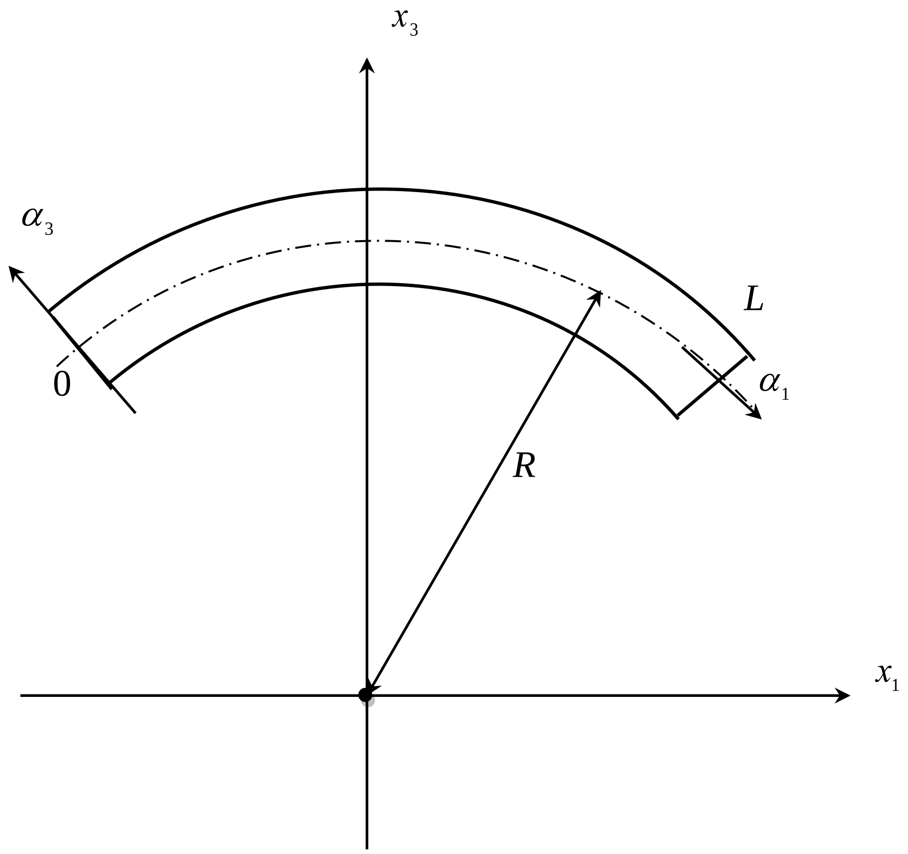


Рис.2.2. Циліндричний шар V в декартовій системі координат

У випадку ортогональної системи координат з метричним тензором

$$g_{11} = H_1^2; g_{22} = H_2^2; g_{33} = 1;$$

$$g_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \; i \neq j \tag{2.29}$$

символи Кристофеля другого роду мають вигляд:

$$G_{ii}^{j} = -\frac{H_i}{H_j^2}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j}, \tag{2.30.1}$$

$$G_{ik}^{i} = G_{ki}^{i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_k}, \tag{2.30.2}$$

де $i,\, j = 1,2,3; i \neq j; k = 1,2,3$.

Оскільки узагальнений закон Гука (2.5) записується в термінах фізичних компонент тензорів напружень і деформацій, то необхідно визначити коваріантні похідні від компонент вектора переміщення через фізичні компоненти $u_{[i]}$, які у змішаній системі координат визначаються за формулами [89]

$$u_{[i]} = H_i u^i = u_i / H_i, i = 1,2,3;. \tag{2.31}$$

Враховуючи (2.30) і (2.31), співвідношенням (2.18) надамо вигляду:

$$\vec{\nabla}\bar{u} = \underline{B}\bar{u}\,, \tag{2.32}$$

де

$$u = \begin{pmatrix} u_{[1]} & \dfrac{\partial u_{[1]}}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial u_{[1]}}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial u_{[1]}}{\partial \alpha_3} & u_{[2]} & \dfrac{\partial u_{[2]}}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial u_{[2]}}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial u_{[2]}}{\partial \alpha_3} & u_{[3]} & \dfrac{\partial u_{[3]}}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial u_{[3]}}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial u_{[3]}}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix}^T,$$

матриця $\underline{B} = \underline{B}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ такого вигляду:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 & \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{H_2} & 0 & -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & 0 & \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

Коефіцієнти λ_{ij} у матрицях (2.26) і (2.27) визначаються за формулами:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{H_i^2}\nabla_j u_{[i]}\,,\ \lambda_{3j} = \nabla_j u_{[3]}\,;$$

$$i = 1,2;\ j = 1,2,3\,.$$

Якщо розглядуваний шар має значно більший розмір вздовж осі α_2 у порівнянні з довжиною дуги перерізу $\alpha_2 = 0$ серединної поверхні $\alpha_3 = 0$ і вісь α_2 збігається з віссю x_2 декартової системи координат, тоді:

$$H_2 = 1. \tag{2.33}$$

Оскільки видовжені циліндричні панелі (рис. 2.2) належать до класу осесиметричних оболонок і врахувавши співвідношення Гауса-Кодаці [79], параметр Ламе H_1 можна виразити наступним чином:

$$H_1 = H_1(\alpha_1, \alpha_3) = A(\alpha_1)[1 + \alpha_3 K(\alpha_1)], \tag{2.34}$$

де $A(\alpha_1)$ – коефіцієнт першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки, $K(\alpha_1)$ – її головна кривина в напрямку осі α_1.

Враховуючи (2.33) і (2.34), матриця $\underline{B}$ з (2.32) має вигляд:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{A[1+\alpha_3 K]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{[1+\alpha_3 K]} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A[1+\alpha_3 K]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{K}{[1+\alpha_3 K]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A[1+\alpha_3 K]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

2.5. Варіаційна постановка задачі відносно переміщень

Оскільки співвідношення (2.6) виконується для $\vec{S}$, а згортку тензорів деформацій і напружень можна записати як векторний добуток, то справедливе наступне співвідношення:

$$\delta\hat{\varepsilon} : \hat{S} = \delta\varepsilon_{ij} S^{ij} = \delta\vec{\varepsilon}^{\,T} \vec{S} = \delta\vec{\varepsilon}^{\,T} C \vec{\varepsilon}\,, \tag{2.35}$$

де C – матриця (2.9) компонент тензора пружних характеристик;

$\vec{\varepsilon}$ – вектор з формули (2.22);

$\delta\vec{\varepsilon}$ – вектор компонент тензора деформацій Гріна, який відповідає варіації переміщень $\delta\vec{u}$.

Для варіації $\vec{\varepsilon}$ справедливо

$$\delta\vec{\varepsilon} = \delta\vec{e} + \delta\vec{\eta} = E\delta\vec{\nabla}\vec{u} + \delta E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\vec{\nabla}\vec{u} + E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\delta\vec{\nabla}\vec{u}\,. \tag{2.36}$$

Оскільки

$$\delta E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\vec{\nabla}\vec{u} = E_{NL}^{(1)}(\delta\vec{\nabla}\vec{u})\vec{\nabla}\vec{u} = E_{NL}^{(2)}(\vec{\nabla}\vec{u})\delta\vec{\nabla}\vec{u}\,,$$

то

$$\delta\vec{\varepsilon} = E\delta\vec{\nabla}\vec{u} + E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\delta\vec{\nabla}\vec{u} + E_{NL}^{(2)}(\vec{\nabla}\vec{u})\delta\vec{\nabla}\vec{u}\,. \tag{2.37}$$

Застосувавши перетворення (2.28) і (2.37), співвідношення (2.36) матиме вигляд:

$$\delta\vec{\varepsilon}^{\,T} C\vec{\varepsilon} = \delta\vec{\nabla}\vec{u}\left(E + E_{NL}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)^{T} C\left(E + E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)\vec{\nabla}\vec{u}\,, \tag{2.38}$$

де $E_{NL}(\vec{\nabla}\vec{u}) = E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u}) + E_{NL}^{(2)}(\vec{\nabla}\vec{u})$.

Використавши (2.32), отримаємо:

$$\delta\vec{\varepsilon}^{\,T} C\vec{\varepsilon} = \delta\overline{u}^{\,T}\, \underline{B}^{T}\left(E + E_{NL}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)^{T} C\left(E + E_{NL}^{(1)}(\vec{\nabla}\vec{u})\right)\underline{B}\overline{u}\,. \tag{2.39}$$

Тоді перший інтеграл формули (2.16) можна записати у матричному вигляді:

$$\int_{V_0} \delta\hat{\varepsilon} : \hat{S} dV = \int_{V_0} \delta\overline{u}^{\,T}\, \underline{B}^{T}\left(E + E_{NL}(\overline{u})\right)^{T} C\left(E + E_{NL}^{(1)}(\overline{u})\right)\underline{B}\overline{u}\, dV\,. \tag{2.40}$$

Застосувавши перетворення (2.20) до другого інтеграла формули (2.16), отримаємо

$$\int_{V_0} \rho_0 \delta\overline{u}^{\,T} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dV = \int_{V_0} \rho_0 \delta\overline{u}^{\,T} \tilde{B}^{T} \tilde{B} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} dV\,. \tag{2.41}$$

Тоді, використовуючи перетворення (2.40) і (2.41), співвідношення (2.16) матиме наступний вигляд:

$$\int_{V_0} \delta\overline{u}^{\,T}\, \underline{B}^{T}\left(E + E_{NL}(\overline{u})\right)^{T} C\left(E + E_{NL}^{(1)}(\overline{u})\right)\underline{B}\overline{u}\, dV + \int_{V_0} \rho_0 \delta\overline{u}^{\,T} \tilde{B}^{T} \tilde{B} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} dV = F_{out}\,. \tag{2.42}$$

2.6. Теорія оболонок, що базується на зсувній моделі С.П. Тимошенка

Використано гіпотези, згідно з якими компоненти вектора просторових переміщень u_1 і u_3 не залежать від α_2 і мають вигляд:

$$u_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_3) = u(\alpha_1) + \alpha_3 \gamma(\alpha_1); \tag{2.43}$$

$$u_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_3) = w(\alpha_1). \tag{2.44}$$

Оскільки кути поворотів є відносно великими, то для деформацій враховуємо величини, порядок яких не вище лінійних деформацій і квадратів лінійних поворотів [80]:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}, \tag{2.45}$$

де $\eta_{ii} = \frac{1}{2}\left(\omega_l^2 + \omega_k^2\right)$;

$\eta_{ik} = -\omega_i \omega_k$;

ω_i – лінійний кут поворотів,

$i, j, k, l = 1,2,3, i \neq k \neq l$.

Враховуючи відсутність переміщень вздовж осі α_2, лінійні деформації і кути поворотів з формули (2.45) обчислюються наступними співвідношеннями [69]:

$$\begin{gathered}
e_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{A(\alpha_1)K(\alpha_1)}{H_1} u_3; \\
e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3}; \\
e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - \frac{A(\alpha_1)K(\alpha_1)}{H_1} u_1 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}; \\
e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0; \\
\omega_2 = \frac{1}{2H_1}\left[H_1 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + A(\alpha_1)K(\alpha_1)u_1 - \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}\right]; \\
\omega_1 = \omega_3 = 0.
\end{gathered} \tag{2.46}$$

Оскільки у роботі розглянуто видовжені циліндричні панелі, то для них справедливі співвідношення (2.29), (2.33) і (2.34).

Використавши (2.43), (2.44), (2.33) і (2.34), формули (2.46) мають вигляд:

$$e_{11} = \frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}\left(\frac{du}{d\alpha_1} + \alpha_3 \frac{d\gamma}{d\alpha_1}\right) + \frac{1}{[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]} K(\alpha_1) w;$$

$$e_{13} = \gamma - \frac{K(\alpha_1)}{[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}(u + \alpha_3 \gamma) + \frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}\frac{dw}{d\alpha_1};$$

$$e_{22} = e_{12} = e_{23} = e_{33} = 0; \tag{2.47}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left[\gamma + \frac{K(\alpha_1)}{[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}(u + \alpha_3 \gamma) - \frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}\frac{dw}{d\alpha_1}\right];$$

$$\omega_1 = \omega_3 = 0.$$

Тоді лінійні деформації можна записати у вигляді:

$$e_{1j} = \frac{e_{1j0}(\alpha_1, t) + \alpha_3 e_{1j1}(\alpha_1, t)}{1+\alpha_3 K(\alpha_1)};$$

$$e_{22} = e_{12} = e_{23} = e_{33} = 0; \tag{2.48}$$

$$j = 1,3,$$

де

$$e_{110}(\alpha_1) = \frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du}{d\alpha_1} + wK(\alpha_1);$$

$$e_{111}(\alpha_1) = \frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{d\gamma}{d\alpha_1}; \tag{2.49}$$

$$e_{130}(\alpha_1) = -uK(\alpha_1) + \frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{dw}{d\alpha_1} + \gamma;$$

$$e_{131}(\alpha_1) = 0.$$

Лінійній кут повороту можна записати у вигляді:

$$\omega_2 = \frac{\omega_{20}(\alpha_1, t) + \alpha_3 \omega_{21}(\alpha_1, t)}{1+\alpha_3 K(\alpha_1)};$$

$$\omega_1 = \omega_3 = 0; \tag{2.50}$$

$$j = 1,3,$$

де

$$\omega_{20}=\frac{1}{2}\left[uK(\alpha_1)-\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{dw}{d\alpha_1}+\gamma\right];$$

$$\omega_{21}=K(\alpha_1)\gamma. \tag{2.51}$$

Враховуючи (2.50), ненульові компоненти нелінійних деформацій мають вигляд

$$\eta_{11}=\frac{1}{2}\omega_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{20}(\alpha_1,t)+\alpha_3\omega_{21}(\alpha_1,t)}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}\right)^2.$$

Використавши формулу [4]

$$\frac{1}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}=1-\alpha_3K(\alpha_1)+(\alpha_3)^2K(\alpha_1)-\ldots, \tag{2.52}$$

нехтуючи величинами порядку $o\left(\alpha_3{}^2\right)$, отримано наступні компоненти η_{11} у вигляді:

$$\eta_{11}\approx\frac{1}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}\frac{1}{2}\left(\omega_{20}{}^2(\alpha_1,t)+\alpha_3\left[2\omega_{20}(\alpha_1,t)\omega_{21}(\alpha_1,t)-K(\alpha_1)\omega_{20}{}^2(\alpha_1,t)\right]\right).$$

Нелінійні компоненти мають вигляд:

$$\eta_{11}=\frac{\eta_{110}(\alpha_1,t)+\alpha_3\eta_{111}(\alpha_1,t)}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}, \tag{2.53}$$

де

$$\eta_{11k}(\alpha_1)=[\omega_{20},\omega_{21}]\Theta_k(\alpha_1)[\omega_{20},\omega_{21}]^T; \tag{2.54}$$

$$\eta_{13k}(\alpha_1)=0,\ k=0{,}1,$$

Θ_k – матриці розміром 2х2:

$$\Theta_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-K(\alpha_1) & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Просумувавши (2.48) і (2.53), компоненти тензора деформацій Гріна можна записати наступним чином:

$$\varepsilon_{1j} = \frac{\varepsilon_{1j0}(\alpha_1, t) + \alpha_3 \varepsilon_{1j1}(\alpha_1, t)}{1 + \alpha_3 K(\alpha_1)};$$

$$\varepsilon_{33} = 0; \tag{2.55}$$

$$j = 1{,}3,$$

де $\varepsilon_{1jk}(\alpha_1, t) = e_{1jk}(\alpha_1, t) + \eta_{1jk}(\alpha_1, t), k = 0{,}1;$

$e_{1jk}(\alpha_1, t)$, $\eta_{1jk}(\alpha_1, t)$ – лінійна і нелінійна складові.

У випадку плоско-напруженого деформованого стану матриця (2.9) у законі Гука (2.6) має вигляд:

$$\widetilde{C} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} E_1 & \nu_{31}E_1 & 0 \\ \nu_{13}E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & DG_{13} \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

де $D = 1 - \nu_{31}\nu_{13}$.

Тоді, використовуючи (2.43) і (2.44), (2.16) можна записати наступним чином:

$$\int_0^L \delta\bar{\varepsilon}' C' \bar{\varepsilon}' A(\alpha_1) d\alpha_1 + \int_0^L \rho_0 \delta\bar{u}'^T B' \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial t^2} A(\alpha_1) d\alpha_1 = 0, \tag{2.57}$$

де $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon_{110} \quad \varepsilon_{111} \quad \varepsilon_{130})^T$;

$$\bar{u}' = \begin{pmatrix} u & \dfrac{du}{d\alpha_1} & \gamma & \dfrac{d\gamma}{d\alpha_1} & w & \dfrac{dw}{d\alpha_1} \end{pmatrix}^T;$$

C' –матриця розміром 3x3:

$$C' = \begin{pmatrix} C'_{110} & 0 & 0 \\ 0 & C'_{111} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{130} \end{pmatrix},$$

$C'_{110} = h\widetilde{C}_{1111}$, $C'_{111} = \dfrac{h^3}{12}\widetilde{C}_{11}, C'_{130} = hG_{13};$

B' – матриця розміром 6x6:

$$B' = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12A(\alpha_1)h\rho & 0 & A(\alpha_1)K(\alpha_1)h^3\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(\alpha_1)K(\alpha_1)h^3\rho & 0 & A(\alpha_1)h^3\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12A(\alpha_1)h\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як і в попередньому розділі знайдено $\bar{\varepsilon}'$ через $\bar{u}'$ за допомогою наступного співвідношення:

$$\bar{\varepsilon}' = \left(E' + E_{NL}'^{(1)}(\bar{u}')\right)\bar{u}' = \left(E' + E_{NL}'^{(2)}(\bar{u}')\right)\bar{u}', \qquad (2.58)$$

де матриці E', $E_{NL}'^{(1)}(\bar{u}')$ і $E_{NL}'^{(2)}(\bar{u}')$ побудовані на основі співвідношень (2.49), (2.51) і (2.54).

Використавши (2.58), рівняння принципу віртуальної роботи (2.57) матиме вигляд:

$$\int_0^L \delta\bar{u}'\left(E' + E_{NL}'\right)C'\left(E' + E_{NL}'^{(1)}\right)\bar{u}'A(\alpha_1)d\alpha_1 + \int_0^L \rho_0\delta\bar{u}'^T B'\frac{\partial^2\bar{u}'}{\partial t^2}A(\alpha_1)d\alpha_1 = 0. \qquad (2.59)$$

2.7. Побудова одновимірної моделі з використанням квадратичних апроксимацій на основі двовимірної

У випадку, коли розмір шару вздовж осі α_2 значно більший за довжину дуги перерізу $\alpha_2 = 0$ серединної поверхні $\alpha_3 = 0$, можна вважати, що крайові умови на віддалених торцях мають незначний вплив на характеристики його напружено-деформованого стану та $u_2 = 0$. Для решти компонент вектора переміщень u_1 і u_3 розподіл за координатою α_3 виражаємо формулами [38]:

$$u_1 = u_1(\alpha_1,\alpha_3) = u_{10}(\alpha_1)p_0(\alpha_3) + u_{11}(\alpha_1)p_1(\alpha_3) + u_{12}(\alpha_1)p_2(\alpha_3); \qquad (2.60)$$

$$u_3 = u_3(\alpha_1,\alpha_3) = u_{30}(\alpha_1)p_0(\alpha_3) + u_{31}(\alpha_1)p_1(\alpha_3) + u_{32}(\alpha_1)p_2(\alpha_3); \qquad (2.61)$$

де поліноми $p_0(\alpha_3)$, $p_1(\alpha_3)$, $p_2(\alpha_3)$ мають вигляд (рис. 2.3):

$$p_0(\alpha_3)=\frac{1}{2}-\frac{\alpha_3}{h};$$

$$p_1(\alpha_3)=\frac{1}{2}+\frac{\alpha_3}{h}; \qquad (2.62)$$

$$p_2(\alpha_3)=1-\left(\frac{2\alpha_3}{h}\right)^2,$$

де h – товщина шару.

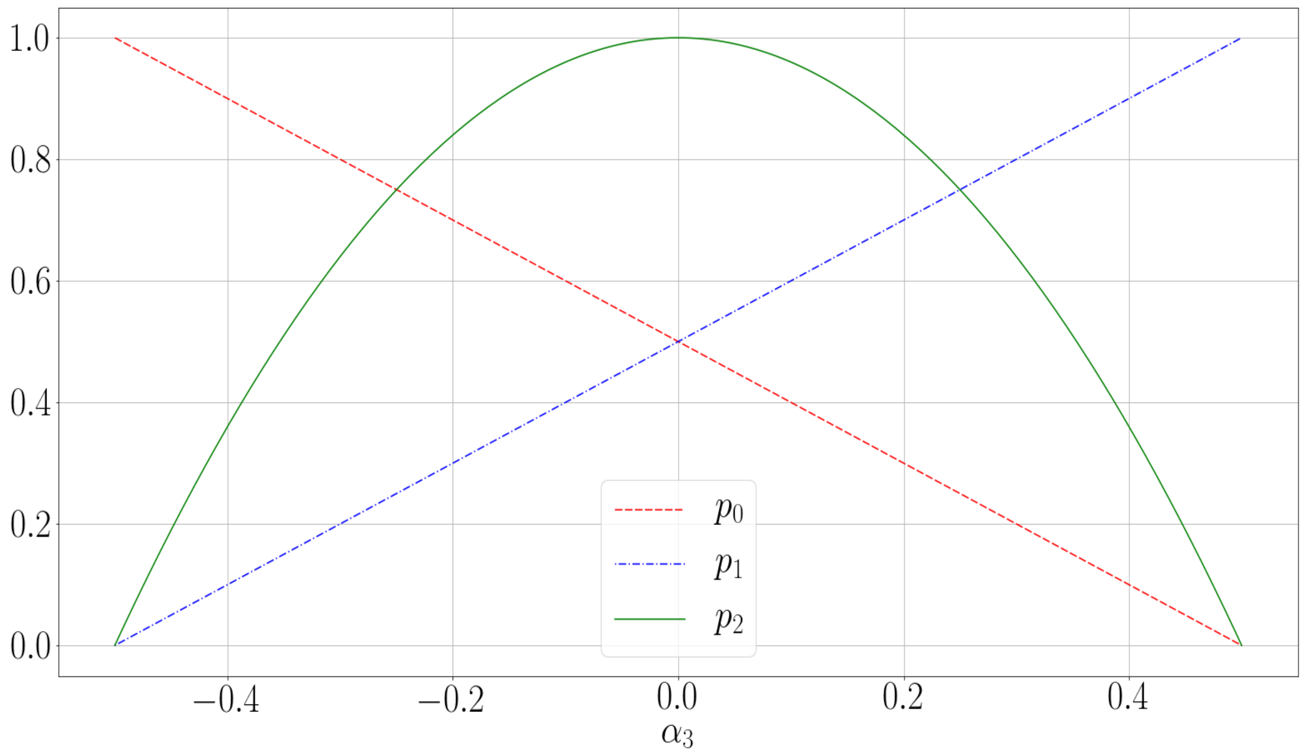


Рис. 2.3. Графіки поліномів $p_0(\alpha_3)$, $p_1(\alpha_3)$, $p_2(\alpha_3)$ на проміжку [-0.5;0.5]

З припущення, що кути поворотів є відносно великими, і формул (2.46), то для компонент тензора деформацій справедливі співвідношення:

$$e_{11}=\frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}\left(\frac{du_{10}}{d\alpha_1}p_0(\alpha_3)+\frac{du_{11}}{d\alpha_1}p_1(\alpha_3)+\frac{du_{12}}{d\alpha_1}p_2(\alpha_3)\right)+$$

$$+\frac{K(\alpha_1)}{[1+\alpha_3 K(\alpha_1)]}\left(u_{30}(\alpha_1)p_0(\alpha_3)+u_{31}(\alpha_1)p_1(\alpha_3)+u_{32}(\alpha_1)p_2(\alpha_3)\right);$$

$$e_{33}=\frac{dp_0}{d\alpha_3}u_{30}+\frac{dp_1}{d\alpha_3}u_{31}+\frac{dp_2}{d\alpha_3}u_{32};$$

$$e_{13}=\frac{dp_0}{d\alpha_3}u_{10}+\frac{dp_1}{d\alpha_3}u_{11}+\frac{dp_2}{d\alpha_3}u_{12}-$$

$$-\frac{K(\alpha_1)}{[1+\alpha_3K(\alpha_1)]}\left(u_{10}(\alpha_1)p_0(\alpha_3)+u_{11}(\alpha_1)p_1(\alpha_3)+u_{12}(\alpha_1)p_2(\alpha_3)\right)+$$

$$+\frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3K(\alpha_1)]}\left(\frac{du_{30}}{d\alpha_1}p_0(\alpha_3)+\frac{du_{31}}{d\alpha_1}p_1(\alpha_3)+\frac{du_{32}}{d\alpha_1}p_2(\alpha_3)\right);$$

$$e_{22}=e_{12}=e_{23}=0; \qquad (2.63)$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}\left[\frac{dp_0}{d\alpha_3}u_{10}+\frac{dp_1}{d\alpha_3}u_{11}+\frac{dp_2}{d\alpha_3}u_{12}+\right.$$

$$+\frac{K(\alpha_1)}{[1+\alpha_3K(\alpha_1)]}\left(u_{10}(\alpha_1)p_0(\alpha_3)+u_{11}(\alpha_1)p_1(\alpha_3)+u_{12}(\alpha_1)p_2(\alpha_3)\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{A(\alpha_1)[1+\alpha_3K(\alpha_1)]}\left(\frac{du_{30}}{d\alpha_1}p_0(\alpha_3)+\frac{du_{31}}{d\alpha_1}p_1(\alpha_3)+\frac{du_{32}}{d\alpha_1}p_2(\alpha_3)\right)\right];$$

$$\omega_1=\omega_3=0.$$

Оскільки, поліноми (2.62) мають наступні властивості:

$$\left(p_1(\alpha_3)+p_0(\alpha_3)\right)\equiv 1;\quad \left(p_1(\alpha_3)-p_0(\alpha_3)\right)\frac{h}{2}\equiv\alpha_3;\quad \left(p_1(\alpha_3)+p_0(\alpha_3)-p_2(\alpha_3)\right)\frac{h^2}{4}\equiv{\alpha_3}^2,$$

то

$$\frac{dp_0}{d\alpha_3}=-\frac{1}{h}=-\frac{1}{h}\left(p_1(\alpha_3)+p_0(\alpha_3)\right)\ \frac{dp_1}{d\alpha_3}=\frac{1}{h}=\frac{1}{h}\left(p_1(\alpha_3)+p_0(\alpha_3)\right) \qquad (2.64)$$

$$\frac{dp_2}{d\alpha_3}=-\frac{8}{h^2}\alpha_3=\frac{4}{h}\left(p_0(\alpha_3)-p_1(\alpha_3)\right)$$

Використавши (2.64) і погрупувавши члени, лінійні деформації з (2.62) матимуть вигляд:

$$e_{ij}=\frac{e_{ij0}(\alpha_1,t)p_0(\alpha_3)+e_{ij1}(\alpha_1,t)p_1(\alpha_3)+e_{ij2}(\alpha_1,t)p_2(\alpha_3)}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}, \qquad (2.65)$$

$$i,j,k,l=1,2,3, i\neq k\neq l,$$

де

$$e_{11k}(\alpha_1)=\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{1k}}{d\alpha_1}+u_{3k}K(\alpha_1),\; k=0,1,2,\; i,j=1,3;$$

$$e_{130}(\alpha_1)=u_{10}\left(-\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{11}\left(\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{12}\left(\frac{4}{h}-2K(\alpha_1)\right)+\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{30}}{d\alpha_1};$$

$$e_{131}(\alpha_1)=u_{10}\left(-\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{11}\left(\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{12}\left(-\frac{4}{h}-2K(\alpha_1)\right)+\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{31}}{d\alpha_1};$$

$$e_{132}(\alpha_1)=K(\alpha_1)u_{12}+\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{32}}{d\alpha_1}; \tag{2.66}$$

$$e_{330}(\alpha_1)=u_{30}\left(-\frac{1}{h}+\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{31}\left(\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{32}\left(\frac{4}{h}-2K(\alpha_1)\right);$$

$$e_{331}(\alpha_1)=u_{30}\left(-\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{31}\left(\frac{1}{h}+\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{32}\left(-\frac{4}{h}-2K(\alpha_1)\right);$$

$$e_{333}(\alpha_1)=2K(\alpha_1)u_{32}.$$

Аналогічним чином, отримано формули для лінійного кута повороту у вигляді:

$$\omega_2=\frac{\omega_{20}(\alpha_1,t)p_0(\alpha_3)+\omega_{21}(\alpha_1,t)p_1(\alpha_3)+\omega_{22}(\alpha_1,t)p_2(\alpha_3)}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}, \tag{2.67}$$

$$i,j,k,l=1,2,3,\, i\neq k\neq l,$$

де

$$\omega_{20}=\frac{1}{2}\left[u_{10}\left(-\frac{1}{h}+\frac{3K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{11}\left(\frac{1}{h}-\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{12}\left(\frac{4}{h}-2K(\alpha_1)\right)-\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{30}}{d\alpha_1}\right];$$

$$\omega_{21}=\frac{1}{2}\left[-u_{10}\left(\frac{1}{h}+\frac{K(\alpha_1)}{2}\right)+u_{11}\left(\frac{1}{h}+\frac{3K(\alpha_1)}{2}\right)-u_{12}\left(\frac{4}{h}+2K(\alpha_1)\right)-\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{31}}{d\alpha_1}\right]; \quad (2.68)$$

$$\omega_{22}(\alpha_1)=\frac{1}{2}\left[3K(\alpha_1)u_{12}-\frac{1}{A(\alpha_1)}\frac{du_{32}}{d\alpha_1}\right].$$

З (2.67), ненульові компоненти нелінійних деформацій мають вигляд

$$\eta_{11}=\frac{1}{2}\omega_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{20}(\alpha_1,t)p_0(\alpha_3)+\omega_{21}(\alpha_1,t)p_1(\alpha_3)+\omega_{22}(\alpha_1,t)p_2(\alpha_3)}{1+\alpha_3K(\alpha_1)}\right)^2.$$

Врахувавши (2.52) і нехтуючи величинами порядку $o(\alpha_3{}^3)$, отримано наступні співвідношення для $\eta_{ijk}(\alpha_1)$:

$$\eta_{iik}(\alpha_1)=[\omega_{20},\omega_{21},\omega_{22}]\Theta_k(\alpha_1)[\omega_{20},\omega_{21},\omega_{22}]^T; \quad (2.69)$$

$$\eta_{13k}(\alpha_1)=0,\ i=1{,}3,\ k=0{,}1{,}2,$$

де Θ_k – матриці розміром 3х3:

$$\Theta_0=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}16+6Kh+K^2h^2 & 4Kh+2K^2h^2 & 16+16Kh+4K^2h^2\\ 4Kh+2K^2h^2 & -2Kh+K^2h^2 & -16Kh+4K^2h^2\\ 16+16Kh+4K^2h^2 & -16Kh+4K^2h^2 & -16+8Kh+4K^2h^2\end{bmatrix};$$

$$\Theta_1=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}2Kh+K^2h^2 & -4Kh+2K^2h^2 & -16+4K^2h^2\\ -4Kh+2K^2h^2 & 16-6Kh+K^2h^2 & 16-16Kh+4K^2h^2\\ -16+4K^2h^2 & 16-16Kh+4K^2h^2 & -16-8Kh+4K^2h^2\end{bmatrix};$$

$$\Theta_2=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}-4-4Kh-K^2h^2 & 8-2K^2h^2 & 16-8Kh-K^2h^2\\ 8-2K^2h^2 & -4+4Kh-K^2h^2 & 16+8Kh-4K^2h^2\\ 16-8Kh-K^2h^2 & 16+8Kh-4K^2h^2 & 32-4K^2h^2\end{bmatrix}.$$

Підставивши (2.68) і (2.65) у (2.45), компоненти тензора деформацій Гріна можна записати наступним чином:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij0}(\alpha_1,t)p_0(\alpha_3) + \varepsilon_{ij1}(\alpha_1,t)p_1(\alpha_3) + \varepsilon_{ij2}(\alpha_1,t)p_2(\alpha_3)}{1+\alpha_3 K(\alpha_1)}, \qquad (2.70)$$

$$i, j, k, l = 1,2,3, i \neq k \neq l,$$

де $\varepsilon_{ijk}(\alpha_1,t) = e_{ijk}(\alpha_1,t) + \eta_{ijk}(\alpha_1,t)$,

$e_{ijk}(\alpha_1,t)$, $\eta_{ijk}(\alpha_1,t)$ – лінійна і нелінійна складові.

Тоді рівняння віртуальної роботи для даної моделі матиме вигляд [37]:

$$\int_0^L \delta\overline{u}'(E' + E'_{NL})C'(E' + E'^{(1)}_{NL})\overline{u}'A(\alpha_1)d\alpha_1 + \int_0^L \rho_0 \delta\overline{u}'^T B' \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2} A(\alpha_1)d\alpha_1 = 0, \qquad (2.71)$$

де $\overline{\varepsilon}' = (\varepsilon_{110} \quad \varepsilon_{111} \quad \varepsilon_{112} \quad \varepsilon_{330} \quad \varepsilon_{331} \quad \varepsilon_{332} \quad \varepsilon_{130} \quad \varepsilon_{131} \quad \varepsilon_{132})^T$;

$$\overline{u}' = \left(u_{10} \quad \frac{du_{10}}{d\alpha_1} \quad u_{11} \quad \frac{du_{11}}{d\alpha_1} \quad u_{12} \quad \frac{du_{12}}{d\alpha_1} \quad u_{30} \quad \frac{du_{30}}{d\alpha_1} \quad u_{31} \quad \frac{du_{31}}{d\alpha_1} \quad u_{32} \quad \frac{du_{32}}{d\alpha_1} \right)^T;$$

C' – блочна матриця розміром 9x9:

$$C' = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{13} & 0 \\ C'_{13} & C'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{55} \end{pmatrix},$$

де C'_{ij} – матриці 3x3 мають наступний вигляд:

$$C'_{ij} = C_{ij}h \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 8/15 \end{pmatrix},$$

C_{ij} – елементи матриці пружних сталих (2.8), $i, j = 1,...,6$;

B' – блочна матриця розміром 12х12:

$$B' = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix},$$

а матриця B_0 розмірності 6х6 має наступний вигляд:

$$B_0 = h\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 8/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці E', $E'^{(1)}_{NL}(\bar{u}')$ і $E'^{(2)}_{NL}(\bar{u}')$ побудовані на основі співвідношень (2.65), (2.67) і (2.69) і дозволяють виразити $\bar{\varepsilon}'$ через $\bar{u}'$ за допомогою наступного співвідношення:

$$\bar{\varepsilon}' = \left(E' + E'^{(1)}_{NL}(\bar{u}')\right)\bar{u}' = \left(E' + E'^{(2)}_{NL}(\bar{u}')\right)\bar{u}', \qquad (2.72)$$

2.8. Висновки до розділу 2

У розділі розглянуто загальну диференціальну постановку задачі про динамічний геометрично нелінійний напружено-деформований стан ортотропного криволінійного шару.

На цій основі сформульовані еквівалентні варіаційні задачі відносно компонент вектора просторових переміщень в довільній циліндричній системі координат.

Отримано співвідношення для компонент тензора деформацій Гріна шляхом використання квадратичних апроксимацій для компонент вектора переміщень за нормальною до серединної поверхні шару координатою.

Сформульовано одновимірну варіаційну задачу про динамічний напружено-деформований стан ортотропного криволінійного шару за геометрично нелінійного деформування для двох моделей, побудованих:

1) з використанням квадратичних апроксимації за нормальною до серединної поверхні шару координатою;
2) на основі теорії, що базується на зсувній моделі С.П. Тимошенка.

Основні положення цього розділу викладені у працях автора [31, 35, 37, 38, 69].

РОЗДІЛ 3. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗБУРЕНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ШАРУ

Криволінійний шар з циліндричною серединною поверхнею широко використовуються у промисловості в якості різноманітних тримких конструкцій. Для збільшення їхніх жорсткісних характеристик використовують анізотропні матеріали, які дозволяють витримувати значні напруження і коливання. Однак вони призводять до деформацій, які є співмірними з товщинами оболонок. Тому дослідження геометрично нелінійних вільних коливань анізотропних тіл є актуальною задачею, необхідною для усунення резонансних явищ, які можуть виникати в елементах конструкцій.

У даному розділі розроблена методика розв’язування варіаційної задачі вільних коливань ортотропного криволінійного шару за геометрично нелінійного деформування при використанні одновимірних, розглянутих у попередньому розділі, та двовимірної моделей.

3.1. Скінченно-елементні апроксимації для двовимірних моделей коливань криволінійного ортотропоного шару.

Для початкової конфігурації шару використано систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, подібну до циліндричної. Циліндричний шар V в даній системі координат матиме вигляд:

$$V = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1 \in [0, L], \alpha_2 \in [-\infty, +\infty], \alpha_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\},$$

де L – довжина дуги твірної циліндричної шару, h – товщина шару.

Шар має значно більший розмір вздовж осі α_2 у порівнянні з довжиною дуги перерізу $\alpha_2 = 0$ серединної поверхні $\alpha_3 = 0$, тому переміщеннями u_2 можемо знехтувати.

У задачах про вільні коливання відсутні зовнішні навантаження, тобто

$$F_{out} = 0 .$$

Оскільки, компоненти вектора переміщень u_1 і u_3 не залежать від α_2, то для них справедливі формули:

$$u_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_3); \tag{3.1}$$

$$u_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_3). \tag{3.2}$$

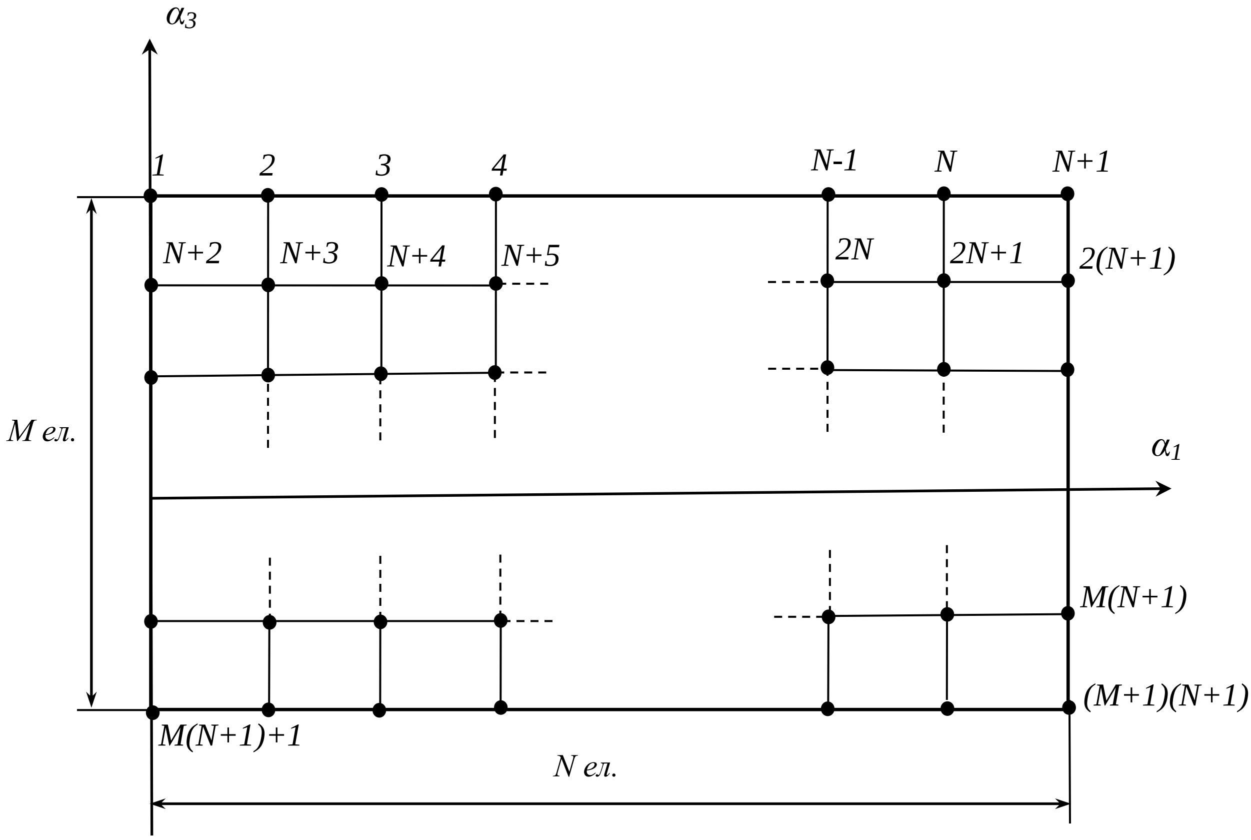


Рис. 3.1. Розбиття панелі на прямокутні скінченні елементи

Розглянуто площину α_1, α_3. Після розбиття області V на N прямокутних скінченних елементів вздовж осі α_1 і M – вздовж осі α_3

$$V = \bigcup_{e=1}^{NM} V^{(e)},$$

інтеграл (2.42) набуде вигляду:

$$\sum_{e=1}^{NM} \left[\int_{V^{(e)}} \delta \overline{u}^T \underline{B}^T \left(E + E_{NL}(\overline{u})\right)^T C\left(E + E_{NL}^{(1)}(\overline{u})\right) \underline{B} \overline{u} + \rho_0 \delta \overline{u}^T \tilde{B}^T \tilde{B} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} dV \right] = 0. \tag{3.3}$$

Для знаходження розв'язку задачі компоненти вектора просторових переміщень апроксимовано за допомогою значень у вузлових точках [73]. Для цього використано ізопараметричні лінійні апроксимаційні функції.

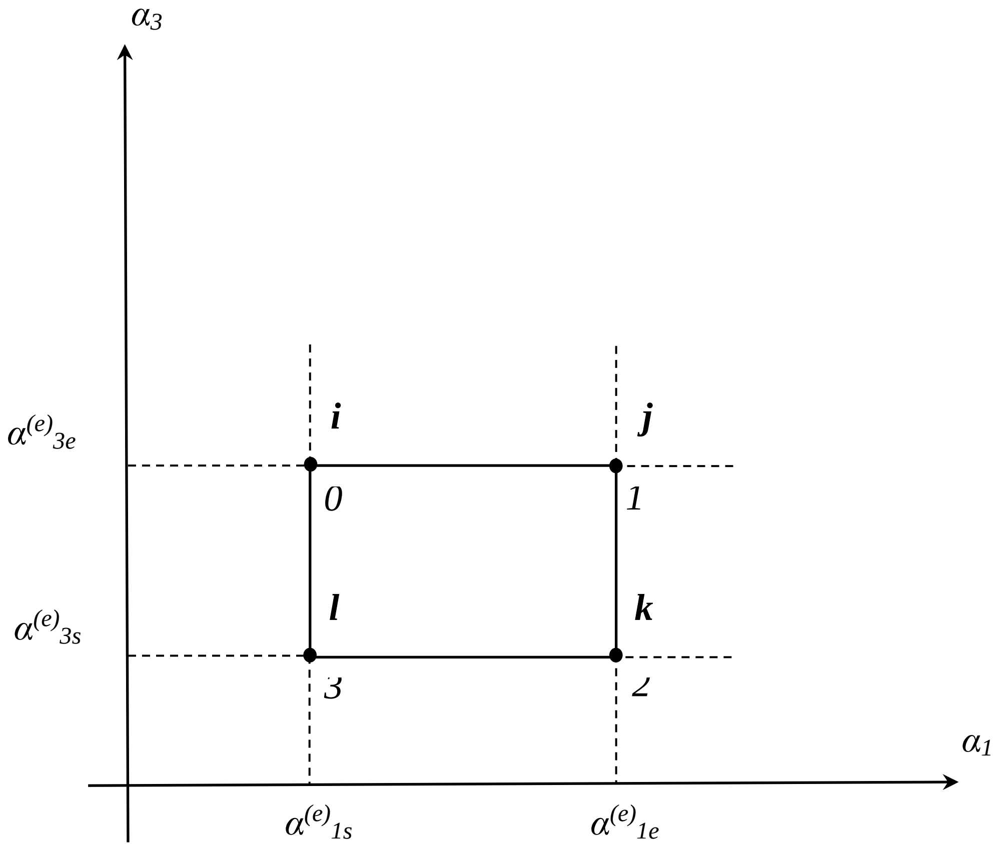


Рис. 3.2. Відповідність між лінійними функціями φ_m (m=0,…,3) і вузловими точками $\{i, j, k, l\}$ підобласті $V^{(e)}$

Розглянемо e-тий елемент $V^{(e)}$ з границями: $\alpha_1 \in \left[\alpha_{1s}^{(e)}, \alpha_{1e}^{(e)}\right]$, $\alpha_3 \in \left[\alpha_{3s}^{(e)}, \alpha_{3e}^{(e)}\right]$.

Використано перетворення координат:

$$\xi = \frac{2}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}} \alpha_1 + \frac{-\left(\alpha_{1e}^{(e)} + \alpha_{1s}^{(e)}\right)}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}};$$

$$\eta = \frac{2}{\alpha_{3e}^{(e)} - \alpha_{3s}^{(e)}} \alpha_3 + \frac{-\left(\alpha_{3e}^{(e)} + \alpha_{3s}^{(e)}\right)}{\alpha_{3e}^{(e)} - \alpha_{3s}^{(e)}},$$

де $\xi \in [-1,1]$, $\eta \in [-1,1]$.

Якобіан перетворення для такого перетворення координат має вигляд:

$$J^{(e)} = \frac{1}{4}(\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)})(\alpha_{3e}^{(e)} - \alpha_{3s}^{(e)}). \tag{3.4}$$

Вектор $\bar{u}$ з формули (2.32) у системі координат (ξ, η) має вигляд

$$\bar{u}_{(\alpha)} = I\bar{u}_{(\xi,\eta)}, \tag{3.5}$$

де $\bar{u}_{(\xi,\eta)} = \left(u_1(\xi,\eta) \quad \frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad u_3(\xi,\eta) \quad \frac{\partial u_3(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u_3(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right)^T$;

I – матриця вигляду:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial\xi/\partial\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial\eta/\partial\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial\xi/\partial\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial\eta/\partial\alpha_3 \end{pmatrix}; \tag{3.6}$$

$$\partial\xi/\partial\alpha_1 = \frac{2}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}}; \quad \partial\eta/\partial\alpha_3 = \frac{2}{\alpha_{3e}^{(e)} - \alpha_{3s}^{(e)}}.$$

На кожному зі скінченних елементів $V^{(e)}$ до значення компонент вектора $\bar{u}_{(\xi,\eta)}$ апроксимовано за допомогою вузлових значень $\overline{U}$ і лінійних функцій [102]:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \ \varphi_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \ \varphi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \ \varphi_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta).$$

Оскільки невідомими переміщеннями є лише u_1 і u_3, то у вектор $\overline{U}$ входять лише їх вузлові значення. Тобто

$$\overline{U} = \left(u_1^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad \cdots \quad u_1^{((M+1)(N+1))} \quad u_3^{(1)} \quad u_3^{(2)} \quad \cdots \quad u_3^{((M+1)(N+1))} \right)^T,$$

де $u_j^{(i)}$ – переміщення вузлової точки i в напрямку осі α_j, $i=1,...(N+1)(M+1)$, $j=1,3$.

Апроксимації $\overline{u}_{(\xi,\eta)}$ через $\overline{U}$ подано в матричному вигляді:

$$\overline{u}_{(\xi,\eta)} = H^{(e)}\overline{U}\ , \tag{3.7}$$

де $H^{(e)} = H^{(e)}(\xi,\eta)$ – матриця, розміром $6\times 2(M+1)(N+1)$, має вигляд:

$$H^{(e)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & n & & & & \Delta+n & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \varphi_m & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\xi} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\eta} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_m & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\xi} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\eta} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.8}$$

де $\Delta = (M+1)(N+1)$;

n – вузлова точка підобласті $V^{(e)}$;

φ_m – відповідна лінійна апроксимаційна функція.

Враховуючи, що $H^{(e)}$ не залежить від часу *t*, справедливе наступне співвідношення

$$\frac{\partial^2 \overline{u}_{(\xi,\eta)}}{\partial t^2} = H^{(e)}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = H^{(e)}\ddot{\overline{U}}\ . \tag{3.9}$$

Інтеграл (3.3) в системі координат (ξ,η), після застосування перетворення (3.5) і формули для якобіана (3.4), матиме вигляд:

$$\sum_{e=1}^{NM}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\delta\overline{u}_{(\xi,\eta)}^{\ T} I^T \underline{B}^T \left(E+E_{NL}(\overline{u})\right)^T C\left(E+E_{NL}^{(1)}(\overline{u})\right)\underline{B}IJ^{(\alpha)}J^{(e)}\overline{u}_{(\xi,\eta)}d\xi d\eta\right]+$$

$$+\sum_{e=1}^{NM}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\delta\overline{u}_{(\xi,\eta)}^{\ T}\rho_0 I^T\widetilde{B}^T\widetilde{B}IJ^{(e)}\frac{\partial^2\overline{u}_{(\xi,\eta)}}{\partial t^2}d\xi d\eta\right]=0 \tag{3.10}$$

Використано апроксимації (3.7) і (3.9) до $\overline{u}_{(\xi,\eta)}$ і $\delta\overline{u}_{(\xi,\eta)}$. Оскільки вектори $\delta\overline{U}$, $\overline{U}$ і $\ddot{\overline{U}}$ не залежать від ξ і η, їх винесено за знак інтегралу:

$$\delta\overline{U}^T K_L \overline{U} + \delta\overline{U}^T \left[K_{NL}^{(1)}(\overline{U}) + K_{NL}^{(2)}(\overline{U},\overline{U})\right]\overline{U} + \delta\overline{U}^T M \ddot{\overline{U}} = 0, \quad (3.11)$$

де

$$M = \sum_{e=1}^{NM}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H^{(i)^T} \rho_0 I^T \widetilde{B}^T G \widetilde{B} I H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta\right]; \quad (3.12)$$

$$K_L = \sum_{e=1}^{NM}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H^{(e)^T} I^T B^T E^T C E B I H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta\right]; \quad (3.13)$$

$$K_{NL}^{(1)}(\overline{U}) = \sum_{e=1}^{NM}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H^{(e)^T} I^T B^T E_{NL}{}^T(\overline{U}) C E B I H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta + \\ \displaystyle + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H^{(e)^T} I^T B^T E^T C E_{NL}^{(1)}(\overline{U}) B I H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta\end{array}\right]; \quad (3.14)$$

$$K_{NL}^{(2)}(\overline{U},\overline{U}) = \sum_{e=1}^{NM}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H^{(e)^T} I^T B^T E_{NL}{}^T(\overline{U}) C E_{NL}^{(1)}(\overline{U}) B I H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta\right]. \quad (3.15)$$

Враховуючи, що співвідношення (3.11) справедливе для будь-якого вектора $\delta\overline{U}$, отримано наступну систему [166] звичайних диференціальних рівнянь:

$$K_L \overline{U} + \left[K_{NL}^{(1)}(\overline{U}) + K_{NL}^{(2)}(\overline{U},\overline{U})\right]\overline{U} + M\ddot{\overline{U}} = 0. \quad (3.16)$$

3.2. Метод скінченних елементів стосовно одновимірних моделей

У випадку одновимірних моделей за V прийматимемо відрізок кривої довжини L, який утворюється внаслідок перетину площини $\alpha_2 = 0$ зі серединною поверхнею шару. Розбиваємо область V на N ізопараметричних скінченних одновимірних елементів.

Застосувавши описане розбиття, (2.59) або (2.71) матиме такий вигляд:

$$\sum_{e=1}^{N}\left[\int_{\alpha^{(e)}{}_{1s}}^{\alpha^{(e)}{}_{1e}}\left(\delta\overline{u}'\left(E' + E'_{NL}\right)C'\left(E' + E'^{(1)}_{NL}\right)\overline{u}' + \rho_0 \delta\overline{u}'^T B' \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2}\right)A(\alpha_1)d\alpha_1\right] = 0. \quad (3.17)$$

Для знаходження розв’язку використано ізопараметричні лінійні одновимірні скінченні елементи.

Для e-того елемента $V^{(e)}$ з границями: $\alpha_1 \in \left[\alpha_{1s}^{(e)}, \alpha_{1e}^{(e)}\right]$ застосовано перетворення координат:

$$\xi = \frac{2}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}}\alpha_1 + \frac{-\left(\alpha_{1e}^{(e)} + \alpha_{1s}^{(e)}\right)}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}},$$

де $\xi \in [-1,1]$.

Якобіан такого перетворення у систему координат (ξ) має вигляд:

$$J^{(e)} = \frac{1}{2}(\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}). \tag{3.18}$$

Вектор $\bar{u}'$ з (3.17) в системі координат (ξ)

$$\bar{u}'_{(\alpha)} = I'\bar{u}'_{(\xi)}, \tag{3.19}$$

де

$$\bar{u}'_{(\xi)} =$$

$$\begin{pmatrix} u_{10}(\xi) & \frac{du_{10}}{d\xi} & u_{11}(\xi) & \frac{du_{11}}{d\xi} & u_{12}(\xi) & \frac{du_{12}}{d\xi} & u_{30}(\xi) & \frac{du_{30}}{d\xi} & u_{31}(\xi) & \frac{du_{31}}{d\xi} & u_{32}(\xi) & \frac{du_{32}}{d\xi} \end{pmatrix}^T;$$

I – матриця 12x12, компоненти якої мають вигляд:

$$I_{ij} = 1; I_{kl} = \frac{2}{\alpha_{1e}^{(e)} - \alpha_{1s}^{(e)}};$$

$$i, j = 1,3,5,7,9,11; k,l = 2,4,6,8,10,12.$$

На кожному з скінченних елементів $V^{(e)}$ невідомий вектор $\bar{u}'_{(\xi)}$ апроксимовано за допомогою вузлових значень $\bar{U}'$

$$\bar{U}' = \begin{pmatrix} u_{10}^{(1)} & u_{11}^{(1)} & \cdots & u_{32}^{(1)} & \cdots & u_{10}^{(N+1)} & \cdots & u_{32}^{(N+1)} \end{pmatrix}^T,$$

де $u_{ij}^{(k)}$ – значення компонент просторових переміщень вузлової точки, $k = 1,..., N, N+1$; і лінійних функцій

$$\psi_0 = \frac{1}{2}(1-\xi), \ \psi_1 = \frac{1}{2}(1+\xi).$$

Апроксимації $\overline{u}'_{(\xi)}$ через $\overline{U}'$ подано в матричному вигляді:

$$\overline{u}'_{(\xi)} = H'^{(e)}\overline{U}', \tag{3.20}$$

де $H'^{(e)} = H'^{(e)}(\xi)$ – матриця, розміром $12 \times 6(N+1)$, має такий вигляд:

$$H'^{(e)} = \begin{pmatrix} & & k & & k+6 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \psi_0 & \cdots & \psi_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

де $k = 6n + i$, n – вузлова точка підобласті $V^{(e)}$, $i = 1,...,6$ – визначає компоненту переміщення у векторі $\overline{u}'_{(\xi)}$.

Враховуючи, що $H'^{(e)}$ не залежить від часу *t*, справедливе наступне співвідношення

$$\frac{\partial^2 \overline{u}'_{(\xi)}}{\partial t^2} = H'^{(e)} \frac{\partial^2 \overline{U}'}{\partial t^2} = H'^{(e)} \ddot{\overline{U}}'. \tag{3.22}$$

Після застосування перетворень (3.19) і формули якобіана (3.18) Інтеграл (3.17) в системі координат (ξ), , матиме вигляд:

$$\sum_{e=1}^{N} \int_{-1}^{1} \delta \overline{u}'_{(\xi)} I^T \left(E' + E'_{NL}\right) C' \left(E' + E'^{(1)}_{NL}\right) I \overline{u}'_{(\xi)} A(\xi) J^{(e)} d\xi +$$

$$+ \sum_{e=1}^{N} \int_{-1}^{1} \rho_0 \delta \overline{u}'^{\,T}_{(\xi)} I^T B' I \frac{\partial^2 \overline{u}'_{(\xi)}}{\partial t^2} A(\xi) J^{(e)} d\xi = 0. \tag{3.23}$$

Використавши апроксимації (3.20) і (3.22) до $\overline{u}'_{(\xi)}$ і $\delta \overline{u}'_{(\xi)}$, отримано :

$$\delta \overline{U}'^T K'_L \overline{U}' + \delta \overline{U}'^T \left[K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') + K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}', \overline{U}')\right] \overline{U}' + \delta \overline{U}'^T M' \ddot{\overline{U}}' = 0, \tag{3.24}$$

де

$$M' = \sum_{e=1}^{N} \left[\int_{-1}^{1} H'^{(e)T} \rho_0 I'^T B' I' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right]; \tag{3.25}$$

$$K'_L = \sum_{e=1}^{N} \left[\int_{-1}^{1} H'^{(e)T} I'^T E'^T C' E' I' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right]; \tag{3.26}$$

$$K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') = \sum_{e=1}^{N} \left[\begin{array}{l} \int_{-1}^{1} H'^{(e)T} I'^T E'^{\ T}_{NL}(\overline{U}') C' E' I' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi + \\ + \int_{-1}^{1} H'^{(e)T} I'^T E'^T C' E'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') I' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \end{array} \right]; \tag{3.27}$$

$$K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}', \overline{U}') = \sum_{e=1}^{N} \left[\int_{-1}^{1} H'^{(e)T} I'^T E'^{\ T}_{NL}(\overline{U}') C' E'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') I' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right]. \tag{3.28}$$

З урахуванням того, що співвідношення (3.24) справедливе для будь-якого вектора $\delta\overline{U}'$, отримаємо наступне рівняння:

$$K'_L \overline{U}' + \left[K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') + K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}', \overline{U}') \right] \overline{U}' + M' \ddot{\overline{U}}' = 0. \tag{3.29}$$

3.3. Узагальнення методу збурень для розв’язання результуючої системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

Розглянуто систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у вигляді:

$$K_L \overline{U} + \mu \left(K^1_{NL}(\overline{U}) + K^2_{NL}(\overline{U}, \overline{U}) \right) \overline{U} + M \ddot{\overline{U}} = 0, \tag{3.30}$$

де $\mu \, (0 \le \mu \le 1)$ – параметр збурення. При $\mu = 0$ маємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вектора $\overline{U}$, а при $\mu = 1$ нелінійність враховуємо повністю. Згідно з методом збурень шуканий вектор функцій $\overline{U}(t)$ подано у вигляді [30]

$$\overline{U}(t) = \overline{U}_0(t) + \mu \overline{U}_1(t) + \mu^2 \overline{U}_2(t) + O(\mu^3). \tag{3.31}$$

Однак використовуючи представлення (3.31), у розв’язку отримаємо секулярний член вигляду $t \sin(\omega t)$. Щоб позбутися цього доданку використано наступне співвідношення:

$$K_L = K - \mu K_{L1} - \mu^2 K_{L2} + O(\mu^3). \tag{3.32}$$

Узагальнення методу збурень [36] полягає у представлені матриці K_L (3.32), що дозволяє позбутися члена $t\sin(\omega t)$.

Початкові умови для задачі (3.30) мають вигляд

$$\left.\overline{U}\right|_{t=t_0} = \overline{A};$$

$$\left.\dot{\overline{U}}\right|_{t=t_0} = \overline{0}.$$

Вектор $\overline{A}$ можна апроксимувати за допомогою однієї з власних векторів лінійної задачі і певного скалярного значення

$$\overline{A} \approx A\overline{\phi},$$

де A – амплітудний параметр, $\overline{\phi}$ – один з власних векторів задачі на власні значення

$$K_L\overline{\phi} - \omega_0^2 M\overline{\phi} = 0,$$

де ω_0 – лінійна частота вільних коливань.

Наслідком підстановки (3.31) і (3.32) у (3.30) та групування виразів при однакових степенях μ є наступні рівняння:

$$K\overline{U}_0(t) + M\ddot{\overline{U}}_0(t) = 0; \tag{3.33}$$

$$K\overline{U}_1(t) + M\ddot{\overline{U}}_1(t) =$$
$$= K_{L1}\overline{U}_0(t) - K_{NL}^1(\overline{U}_0(t))\overline{U}_0(t) - K_{NL}^2(\overline{U}_0(t),\overline{U}_0(t))\overline{U}_0(t); \tag{3.34}$$

$$K\overline{U}_2(t) + M\ddot{\overline{U}}_2(t) =$$
$$= K_{L1}\overline{U}_1(t) + K_{L2}\overline{U}_0(t) - K_{NL}^1(\overline{U}_0(t))\overline{U}_1(t) - K_{NL}^1(\overline{U}_1(t))\overline{U}_0(t) -$$
$$- K_{NL}^2(\overline{U}_0(t),\overline{U}_0(t))\overline{U}_1(t) - 2K_{NL}^2(\overline{U}_0(t),\overline{U}_1(t))\overline{U}_0(t). \tag{3.35}$$

Для спрощення обмежимось розв'язками порядку $O(\mu)$, тобто розв'язуватимемо тільки рівняння (3.33) і (3.34). Початкові умови для функцій $\overline{U}_0(t)$ та $\overline{U}_1(t)$ можна подати у вигляді

$$\overline{U}_0(0) = \overline{A}, \quad \dot{\overline{U}}_0(0) = 0, \tag{3.36}$$

$$\overline{U}_1(0) = 0, \quad \dot{\overline{U}}_1(0) = 0.$$

Враховуючи початкові умови (3.36), розв'язок рівняння (3.33) має вигляд

$$\overline{U}_0(t) = \overline{A}\cos\omega t = A\overline{\phi}\cos\omega t\,, \tag{3.37}$$

де ω – шукана власна частота вільних коливань за геометрично нелінійного деформування.

Після підстановки (3.37) у (3.33), і домноживши на $\overline{\phi}^T$, власна частота нелінійних вільних коливань знаходиться з наступного співвідношення:

$$\omega^2 = \overline{\phi}^T K \overline{\phi}\,. \tag{3.38}$$

Розглянемо рівняння (3.44), розв'язок якого шукатимемо у вигляді

$$\overline{U}_1(t) = \overline{U}_1^*(t) + \overline{U}_1^\times(t)\,, \tag{3.39}$$

де $\overline{U}_1^*(t)$ і $\overline{U}_1^\times(t)$ – розв'язки однорідного та неоднорідного рівнянь (3.34).

Оскільки однорідне рівняння (3.34) співпадає з рівнянням (3.33), то $\overline{U}_1^*(t)$ має вигляд (3.37).

Використавши аналогічний підхід як у [158], матрицю K_{L1} подано у вигляді [34]

$$K_{L1} = \frac{3}{4}K_{NL}^2(A\overline{\phi}, A\overline{\phi})\,. \tag{3.40}$$

З врахуванням формул з [58]

$$\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\,,$$

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\,,$$

а також того, що $K_{NL}^1(\overline{U})$ і $K_{NL}^2(\overline{U},\overline{U})$ – лінійна і білінійна форми мають властивості

$$K_{NL}^1(a\vec{v}) = aK_{NL}^1(\vec{v})\,,$$

$$K_{NL}^2(a\vec{v}, b\vec{w}) = abK_{NL}^2(\vec{v},\vec{w})\,,$$

де a і b – скалярні величини, отримані наступні співвідношення:

$$K_{NL}^1(\overline{U}_0(t))\overline{U}_0(t) = K_{NL}^1(\overline{A})\overline{A}\cos^2\omega t =$$

$$=\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}+\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}\cos 2\omega t\,; \qquad (3.41)$$

$$K_{NL}^{2}(\overline{U}_{0}(t),\overline{U}_{0}(t))\overline{U}_{0}(t)=K_{NL}^{2}(\overline{A},\overline{A})\overline{A}\cos^{3}\omega t=$$

$$=\frac{3}{4}K_{NL}^{2}(\overline{A},\overline{A})\overline{A}\cos\omega t+\frac{1}{4}K_{NL}^{2}(\overline{A},\overline{A})\overline{A}\cos 3\omega t\,. \qquad (3.42)$$

Підставивши (3.40) – (3.42) у (3.34), для відшукання розв’язку $\overline{U}_{1}^{\times}(t)$ отримано рівняння [164]:

$$M\ddot{\overline{U}}_{1}^{\times}(t)+K\overline{U}_{1}^{\times}(t)=$$

$$=-\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}-\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}\cos 2\omega t-\frac{1}{4}K_{NL}^{2}(\overline{A},\overline{A})\overline{A}\cos 3\omega t\,, \qquad (3.43)$$

який шукаємо у вигляді [171]

$$\overline{U}_{1}^{\times}(t)=\overline{U}_{1}^{\times(1)}(t)+\overline{U}_{1}^{\times(2)}(t)+\overline{U}_{1}^{\times(3)}(t)\,, \qquad (3.44)$$

де $\overline{U}_{1}^{\times(1)}(t),\overline{U}_{1}^{\times(2)}(t)\,,\overline{U}_{1}^{\times(3)}(t)$ – часткові розв’язки неоднорідних рівнянь:

$$M\ddot{\overline{U}}_{1}^{\times(1)}(t)+K\overline{U}_{1}^{\times(1)}(t)=-\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}\,; \qquad (3.45)$$

$$M\ddot{\overline{U}}_{1}^{\times(2)}(t)+K\overline{U}_{1}^{\times(2)}(t)=-\frac{1}{2}K_{NL}^{1}(\overline{A})\overline{A}\cos 2\omega t\,; \qquad (3.46)$$

$$M\ddot{\overline{U}}_{1}^{\times(3)}(t)+K\overline{U}_{1}^{\times(3)}(t)=-\frac{1}{4}K_{NL}^{2}(\overline{A},\overline{A})\overline{A}\cos 3\omega t\,. \qquad (3.47)$$

Розв’язки $\overline{U}_{1}^{\times(1)}$, $\overline{U}_{1}^{\times(2)}(t)$ і $\overline{U}_{1}^{\times(3)}(t)$ шукатимемо у вигляді

$$\overline{U}_{1}^{\times(1)}=\overline{\phi}x_{1}(t)\,;$$

$$\overline{U}_{1}^{\times(2)}=\overline{\phi}x_{2}(t)\,;$$

$$\overline{U}_{1}^{\times(3)}=\overline{\phi}x_{3}(t)\,.$$

Права частина рівняння (3.45) не залежить від t, тому $\overline{U}_{1}^{\times(1)}$ також не залежить від t:

$$\overline{U}_{1}^{\times(1)}=\tilde{x}_{1}\overline{\phi}\,. \qquad (3.48)$$

Враховуючи (3.32) і (3.40), маємо

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2\omega^2}\bar{\phi}^T K_{NL}^1(\bar{A})\bar{A}. \qquad (3.49)$$

Розв’язки рівнянь (3.54) і (3.55) $\bar{U}_1^{\times(2)}(t)$ і $\bar{U}_1^{\times(3)}(t)$ шукаємо у вигляді

$$\bar{U}_1^{\times(2)}(t) = \tilde{x}_2\bar{\phi}\cos 2\omega t, \qquad (3.50)$$

$$\bar{U}_1^{\times(3)}(t) = \tilde{x}_3\bar{\phi}\cos 3\omega t. \qquad (3.51)$$

Після підстановки (3.50) і (3.51) у рівняння (3.46) і (3.47) відповідно, отримано наступні співвідношення для визначення амплітуд $\tilde{x}_2$ і $\tilde{x}_3$:

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{6\omega^2}\bar{\phi}^T K_{NL}^1(\bar{A})\bar{A}; \qquad (3.52)$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{1}{32\omega^2}\bar{\phi}^T K_{NL}^2(\bar{A},\bar{A})\bar{A}. \qquad (3.53)$$

Врахувавши початкові умови і формули (3.37), (3.48) – (3.53), розв’язок рівняння (3.30) матиме наступний вигляд:

$$\bar{U}(t) = \left[\left(A - \mu\left(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3\right)\right)\cos\omega t + \mu\left(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\cos(2\omega t) + \tilde{x}_3\cos(3\omega t)\right)\right]\bar{\phi}. \qquad (3.54)$$

Задача нелінійних коливань з початковими умовами заданими наступним чином:

$$\vec{u}\,\Big|_{t=t_0} = \vec{u}_0(\alpha_1,\alpha_3);$$

$$\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right|_{t=t_0} = 0,$$

зводиться до систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (3.16) або (3.29), які мають одинаковий вигляд. Нехай матриці $K_{NL}'^{(1)}(\bar{U}')$ і $K_{NL}'^{(2)}(\bar{U}',\bar{U}')$ мають спільний параметр збурень μ , тобто:

$$K_{NL}'^{(1)}(\bar{U}') = \mu K_{NL}^{(1)}(\bar{U}); \qquad (3.55)$$

$$K_{NL}'^{(2)}(\bar{U}',\bar{U}') = \mu K_{NL}^{(2)}(\bar{U},\bar{U}).$$

Тоді, з урахуванням (3.32) і (3.40), матриця K набуде вигляду:

$$K = K_L' + \frac{3}{4}K_{NL}'^2(\bar{A},\bar{A}). \qquad (3.56)$$

Після внесення параметра збурення μ у вирази амплітуд $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ і $\tilde{x}_3$, і врахувавши (3.55), отримуємо

$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{2\omega^2}\bar{\phi}^T K'^1_{NL}(\bar{A})\bar{A};$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{6\omega^2}\bar{\phi}^T K'^1_{NL}(\bar{A})\bar{A}; \qquad (3.57)$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{1}{32\omega^2}\bar{\phi}^T K'^2_{NL}(\bar{A},\bar{A})\bar{A}.$$

Це дало змогу побудувати наступну методику [163, 164] відшукання розв'язку задачі про геометрично нелінійні вільні коливання:

1) Використовуючи розбиття на скінченні елементи, знаходимо розв'язок лінійної задачі

$$K'_L\bar{\phi} - \omega_0^2 M'\bar{\phi} = 0.$$

2) Знаходимо вектор $\bar{A} = A\bar{\phi}$ – апроксимацію початкової умови $\vec{u}_0(\alpha_1,\alpha_3)$ у вузлових точках сітки з умови:

$$\min_{\phi\in\Phi}\left\|\vec{u}_0(\alpha_1,\alpha_3) - u_\phi(\alpha_1,\alpha_3)\right\|,$$

де Φ – множина власних векторів лінійної задачі,

$u_\phi(\alpha_1,\alpha_3)$ – скінченно-елементна апроксимація $\vec{u}_0(\alpha_1,\alpha_3)$.

3) Обчислюємо K за допомогою формули (3.56).

4) Знаходимо власну частоту значення ω^2 геометрично нелінійних вільних коливань

$$\omega^2 = \bar{\phi}^T K\bar{\phi}.$$

5) Знаходимо амплітуди, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ за допомогою формул (3.57).

6) За розв'язок приймаємо наступну функцію

$$\bar{U}(t) = \left[\left(A - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3\right)\cos\omega t + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\cos(2\omega t) + \tilde{x}_3\cos(3\omega t)\right]\bar{\phi}.$$

через яку визначаються амплітудно-частотні характеристики розглянутого ортотропного пружного криволінійного шару.

3.4. Висновки до розділу 3

У розділі розроблена методика розв’язування варіаційної задачі про вільні коливання ортотропного криволінійного шару за геометрично нелінійного деформування.

На основі застосування двовимірної схеми методу скінченних елементів отримано у матричному вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно векторів вузлових переміщень, завдяки яким визначаються амплітудно-частотні характеристики криволінійного пружного шару.

Аналогічним чином застосовано метод скінченних елементів до одновимірної варіаційної задачі, побудованої шляхом використання квадратичних апроксимації за нормальною до серединної поверхні шару координатою та отримано однотипну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Виведені аналітичні формули для коефіцієнтів лінійних і нелінійних складових матриці жорсткості, які дозволяють проводити їх швидке обчислення.

Для розв’язання отриманих систем узагальнено метод збурень. На цій основі розроблено методику знаходження загального розв'язку задачі про нелінійні коливання криволінійного шару з довільною формою напрямної.

Основні положення цього розділу викладені у працях автора [30, 34, 36, 163, 164, 166].

РОЗДІЛ 4. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН-СМУГ ТА ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

Гнучкі шаруваті пластини-смуги та циліндричні панелі складають вагому частину різноманітних споруд і технічних засобів. Специфіка їх функціонального призначення часто зумовлює не канонічність форми твірної, що практично робить неможливим на даний час знаходження аналітичних розв’язків у замкненому вигляді задач міцнісного розрахунку навіть у лінійно пружній постановці. Дія інтенсивних динамічних (зокрема, циклічних) навантажень, як правило, є причиною геометрично нелінійного напружено-деформованого стану. Різка відмінність фізико-механічних властивостей складових шарів спричиняє потребу дискретного розгляду будови за товщиною вище вказаних об’єктів, оскільки усереднений підхід може привести до суттєвих похибок при оцінці тримкої здатності чи визначенні їхніх амплітудно-частотних характеристик.

У даному розділі показано ефективність моделі, яка базується на квадратичних апроксимаціях вздовж нормальної координати до серединної поверхні за допомогою порівняння значень власних частот лінійних коливань одношарової пластини-смуги отриманих за допомогою інших теорій оболонок. Проведено порівняння значень власних частот коливань за нелінійного деформування, отриманих з використанням запропонованої методики, яка базується на методі скінченних елементів і узагальненому методі збурень, з відомими аналітичними розв’язками.

Досліджено і проаналізовано поперечні вільні коливання тришарової пластини-смуги, що складається з двох металевих лицевих та гумового середнього шарів, та видовженої циліндричної панелі.

4.1. Пластина-смуга

Розглянуто пластину-смугу, як частковий випадок циліндричної панелі, кривина якої дорівнює 0.

У цьому випадку система координат криволінійного шару $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ співпадає з декартовою:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3.$$

Враховуючи, що коефіцієнти Ламе:

$$H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 1.$$

Тоді

$$A(\alpha_1) = 1, K(\alpha_1) = 0.$$

4.1.1 Одношарова пластина-смуга

Розглянуто пластину-смугу, видовжені краї якої защемлені (рис. 4.1), з геометричними $l = 1$ м; $h = 0{,}1$ м та фізико-механічними $E_1 = E$; $\nu_{13} = \nu_{31} = \nu = 0{,}3$; $G_{13} = G$ характеристиками.

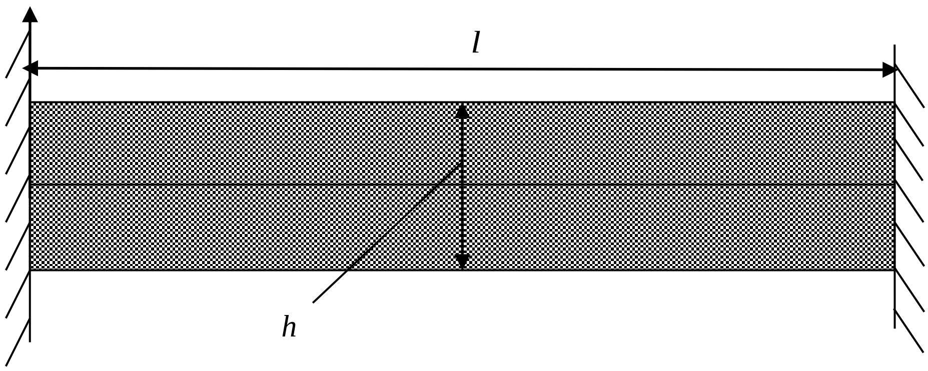


Рис. 4.1. Пластина-смуга з защемленими краями

4.1.1.1 Лінійні коливання

Розглянуто випадок вільних лінійних коливань одношарової пластини смуги. Порівняно збіжність методу скінченних елементів для моделей побудованих на основі зсувної теорії Тимошенка, яка не враховує поперечне стиснення, на основі просторової теорії пружності і теорії, яка базується на квадратичних апроксимаціях вздовж нормальної координати до серединної поверхні. Матеріал, з якого виготовлено пластину, має наступні механічні характеристики

$E = 40000$ МН/м^2; $E_3 = E$;

$G_{13} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 15385$ МН/м^2

Для загальної просторової теорії використано 8 скінченних елементів в поперечному напрямку.

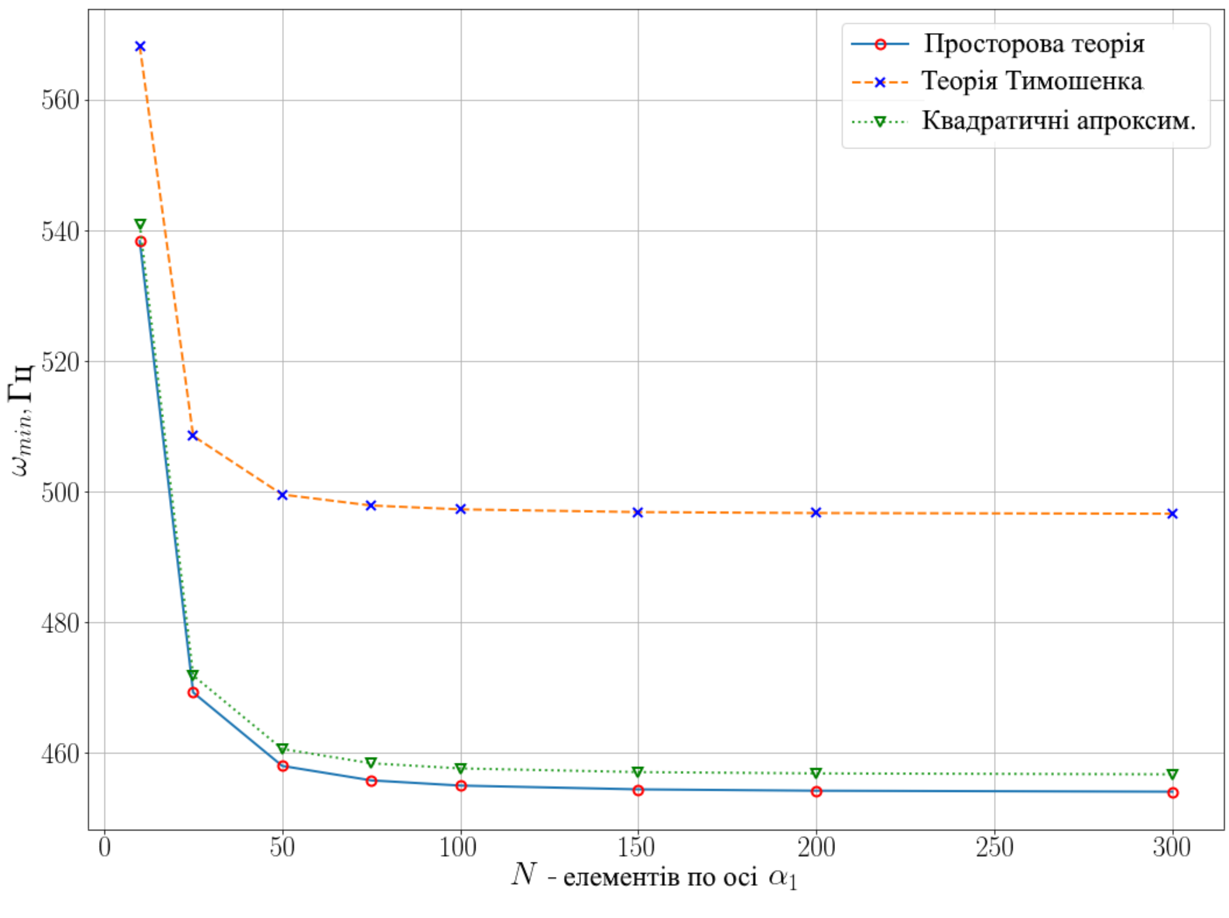


Рис 4.2.

Рисунок 4.2 ілюструє збіжність процесу відшукання значення мінімальної власної частоти при збільшенні кількості скінченних елементів вздовж осі α_1 для лінійних моделей: зсувної теорії Тимошенка (×), квадратичних апроксимацій просторових переміщень (∇) і просторової теорії пружності (○).

Збіжність чисельного методу досягається при використанні 100 лінійних скінченних елементів вздовж осі α_1. Подальше збільшення кількості скінченних елементів дозволяє покращити значення мінімальної власної частоти максимум на 0,1%.

Моделі з врахуванням стиснення дають більш точніші результати для визначення мінімальної власної частоти (табл. 4.1).

Таблиця 4.1. Мінімальні частоти для різних теорій за різного розбиття

	10	25	50	75	100	150	200	300
Загальна просторова теорія	538.3	469.2	458.0	455.8	455.0	454.4	454.2	454.0
Квадратична апроксимація переміщень	540.4	471.3	460.1	457.9	457.1	456.5	456.3	456.2
Зсувна теорія Тимошенка	568.2	508.5	499.5	497.9	497.3	496.9	496.7	496.6

Різниця між значеннями мінімальної власної частоти з врахуванням і без врахування стиснення складає 9%, що є суттєвим при розрахунках коливань конструкцій. Однак ця різниця може збільшуватися для композитних матеріалів, у яких модуль Юнга в поперечному напрямку E_3 значно відрізняється від його значення E в тангенціальному напрямку або модуль зсуву може G_{13} бути значно меншим, ніж у ізотропному випадку.

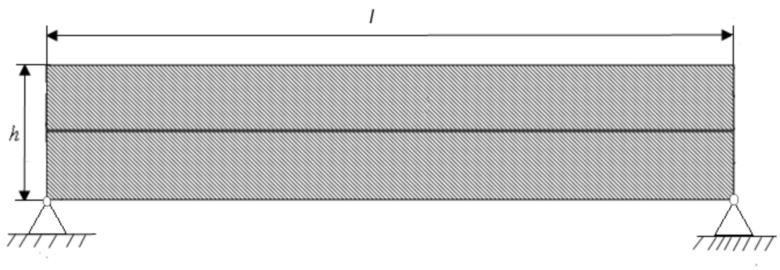


Рис. 4.3. Пластина-смуга з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

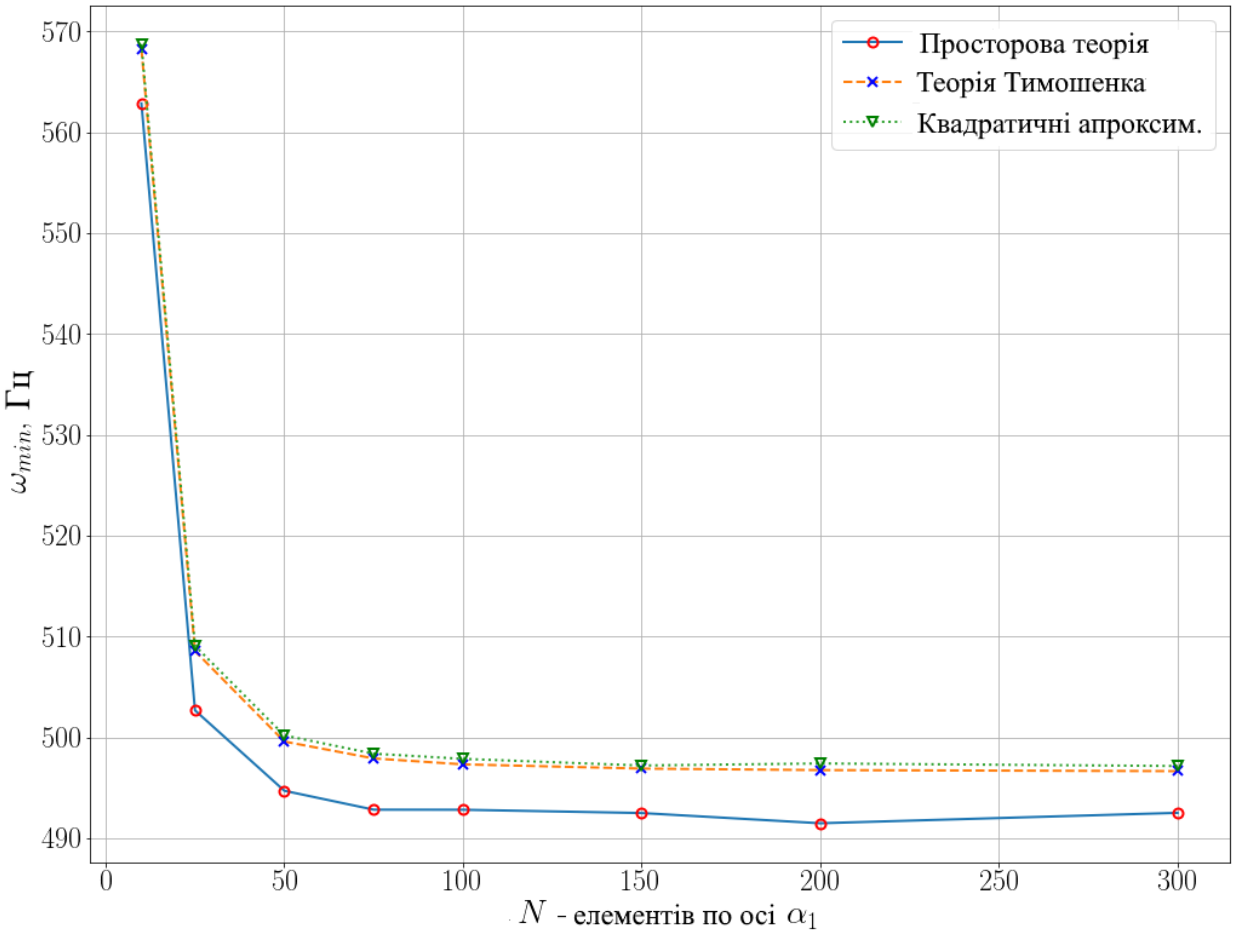


Рис 4.4. Збіжність процесу відшукання значення мінімальної власної частоти при збільшенні кількості скінченних елементів вздовж осі α_1 без врахування стиснення ($E / E_3 \to 0$)

Вплив стиснення на значення мінімальної власної частоти вільних коливань ортотропної пластини-смуги продемонстровано на рисунку 4.4. Якщо $E / E_3 \to 0$, то моделі з врахуванням стиснення дають такі ж результати, як і у моделі для з використання зсувної теорії Тимошенка, яка не враховує стиснення.

Вплив значення модуля трансверсального зсуву на значення мінімальної власної частоти показано на рисунку 4.5, за допомогою співвідношення:

$$G_{13} = \frac{E}{k2(1+v)} ,$$

де $k = 1,2,3,...$ – параметр врахування зсуву.

Збільшення параметра k, котрий характеризує опірність до деформацій трансверсального зсуву, приводить до пониження значень власних частот пластини.

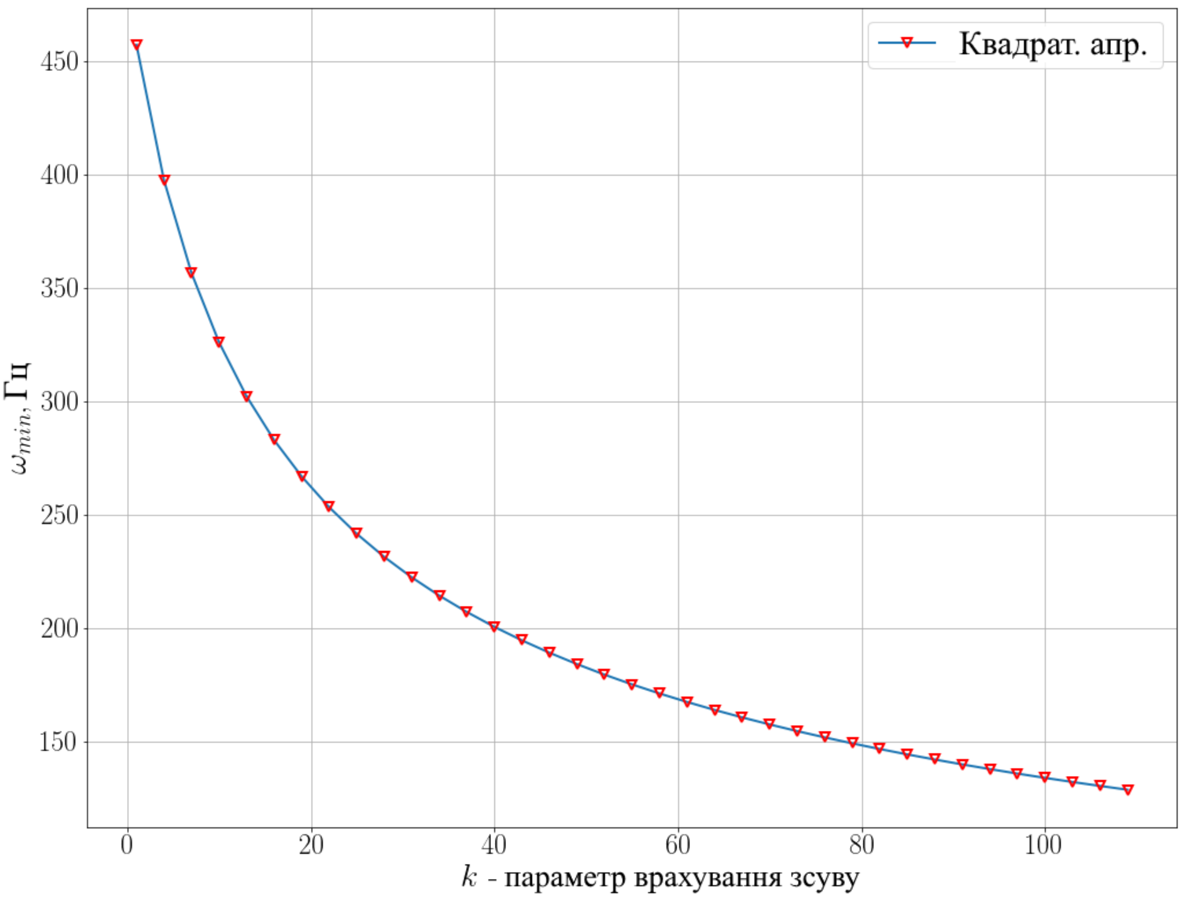


Рис 4.5. Вплив значення модуля трансверсального зсуву на власну мінімальну частоту

Розглянута теорія оболонок, яка базується на квадратичних апроксимаціях вздовж нормальної координати до серединної поверхні, і має квадратичний порядок апроксимацій переміщень. Тому вона дозволяє краще моделювати оболонки з більшим параметром тонкостінності у порівнянні з зсувною теорією Тимошенка.

Показано (рис. 4.6), що модель з квадратичним наближенням вздовж поперечної осі, дає прийнятні результати з похибкою до 3% при параметрі тонкостінності $\frac{h}{L} \leq \frac{1}{5}$.

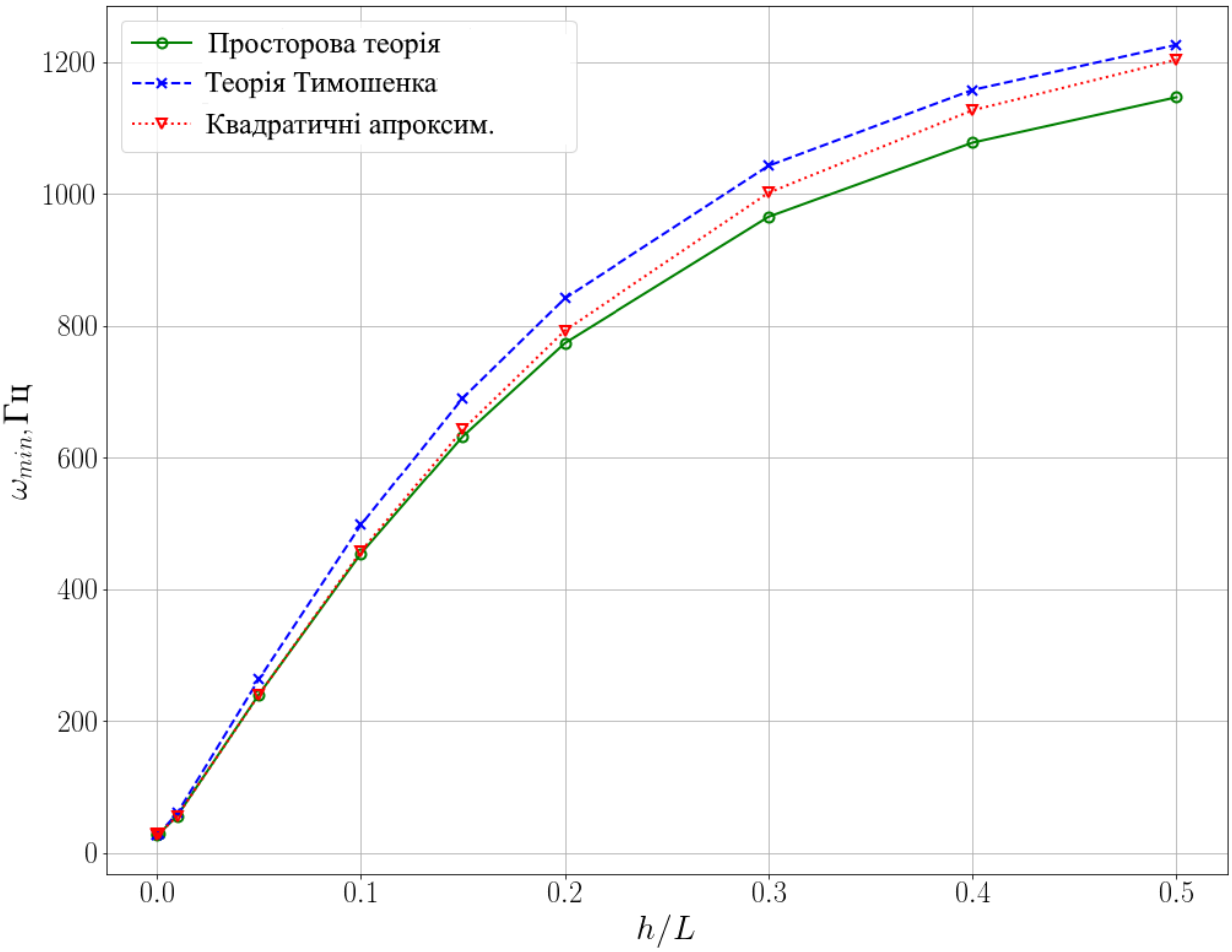
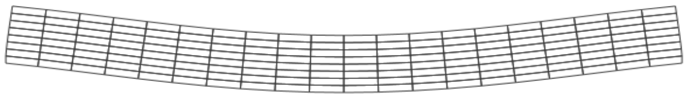


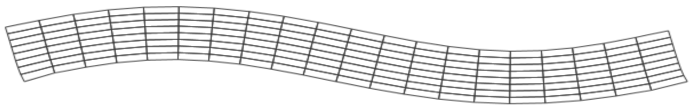
Рис 4.6. Вплив параметра тонкостінності на власну мінімальну частоту.

Для перевірки лінійної моделі також розглянуто панель видовжені краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині (рис. 4.3). Геометричні і механічні характеристики такої панелі ідентичні з попереднім випадком.

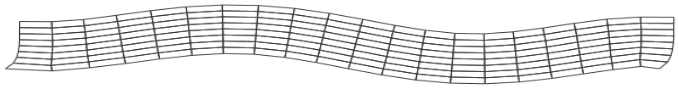
На рис. 4.7 зображено чотири перші власні форми (моди) за геометрично лінійних коливань розглянутої пластини-смуги.



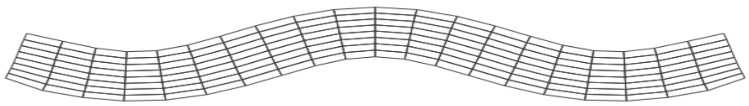
а)



б)



в)



г)

Рис. 4.7. Вигляд пластини-смуги в різних модах: а) – перша мода;
б) – друга; в) – третя; г) – четверта.

Защемлення країв пластини призводить до збільшення геометричної жорсткості пластини. З результатів наведених у табл. 4.2 видно, що нерухомі шарніри на краях пластини зменшують значення власних частот пластини.

Таблиця 4.2. Перші мінімальні власні частоти за різних граничних умов.

	Защемлені краї	Нерухомі шарніри
ω_1, Гц	456.38	317.16
ω_2, Гц	1173.89	711.40
ω_3, Гц	2128.80	1574.38
ω_4, Гц	2355.92	1716.20
ω_5, Гц	3241.88	2870.51

Отже, теорія оболонок, яка базується на квадратичних апроксимаціях вздовж нормальної координати до серединної поверхні, враховує більше фізичних характеристик коливних процесів, які притаманні композитам, у порівнянні з зсувною теорією Тимошенка, а також є більш ефективною в плані чисельного розв'язку порівняно з просторовою теорією.

4.1.1.2 Геометрично нелінійні коливання

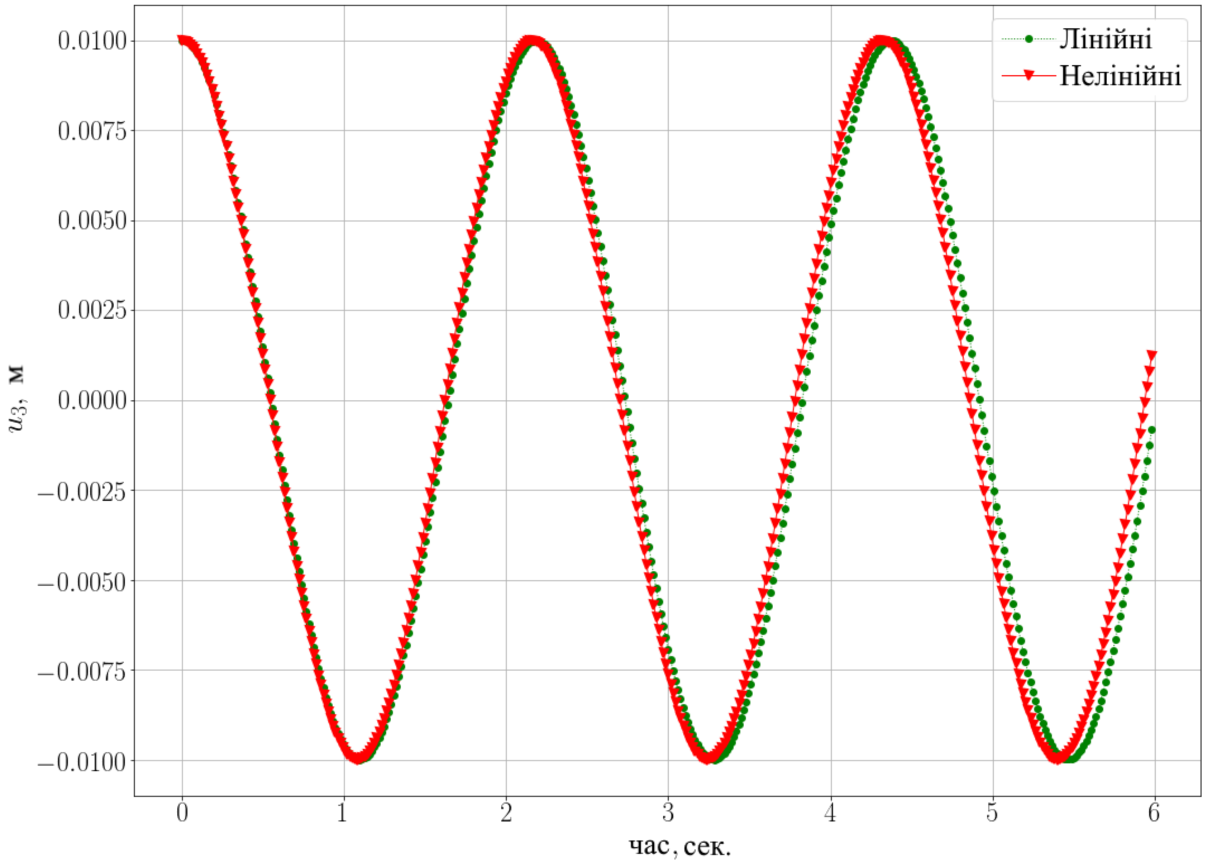


Рис. 4.8. Лінійні (●) і нелінійні (▼) вільні коливання точки панелі з координатами $(l/2;0)$ при $w_{max} = 0.1h$.

За допомогою узагальненого методу збурення, розглянутого у розділі 3, проаналізовано геометрично нелінійні коливання ізотропної панелі, видовжені краї якої защемлені (рис. 4.1). Панель має такі геометричні та механічні характеристики: $l = 1$ м; $h = 0{,}1$ м; $\nu_{13} = \nu_{31} = \nu = 0{,}3$; $E_3 = E_1 = 40000$ Н/м^2; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 15385$ Н/м^2.

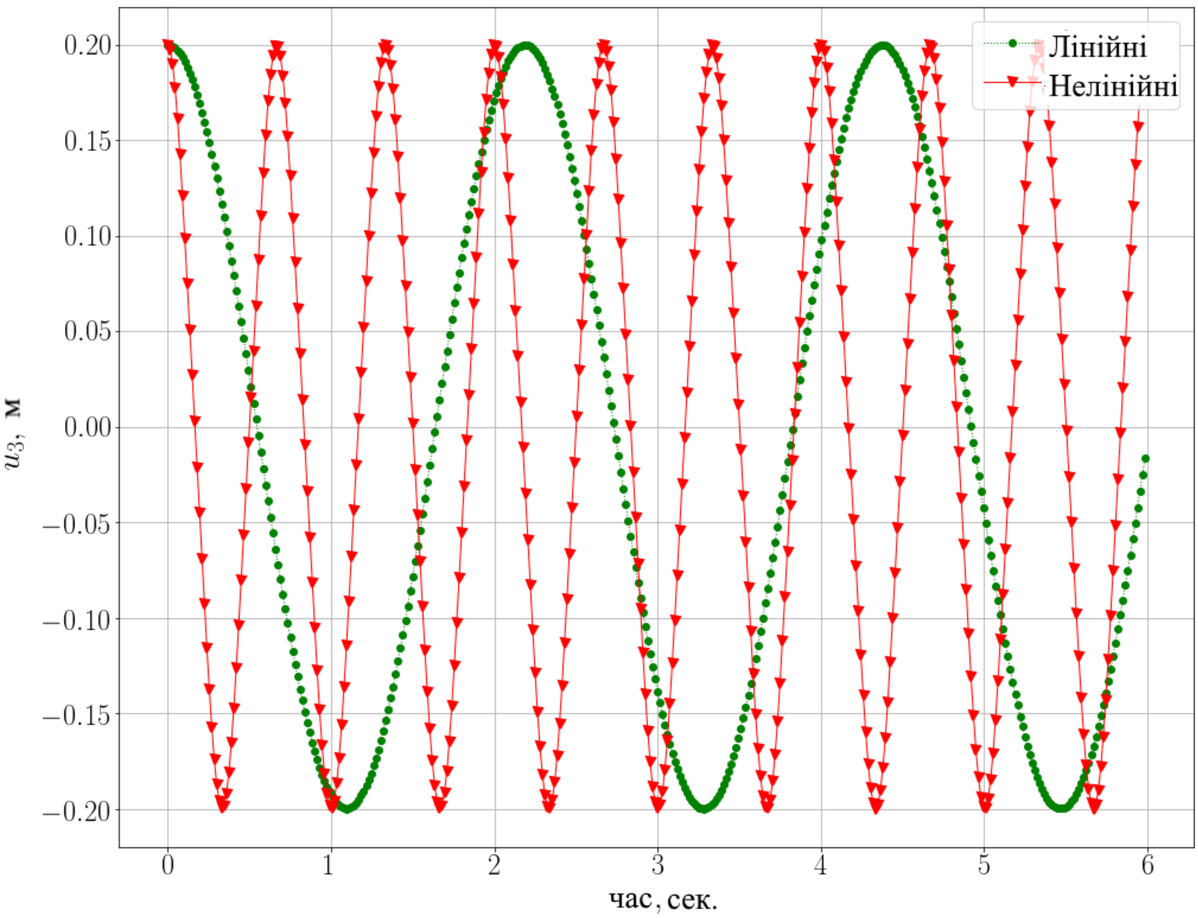


Рис. 4.9. Лінійні (●) і нелінійні (▼) коливання точки панелі з координатами $(l/2;0)$ при $w_{\max} = 2h$.

Для побудови амплітудно-частотних характеристик геометрично нелінійних вільних коливань, за початкове наближення використано перший власний вектор лінійної задачі вільних коливань, нормований з певним параметром $w_{\max}$. Тобто:

$$\bar{U}\Big|_{t=t_0} = \bar{A} = A\bar{\phi}\,, \qquad (4.1)$$

$$\dot{\bar{U}}\Big|_{t=t_0} = \bar{0}, \tag{4.2}$$

де $A = \dfrac{w_{\max}}{\left\|\bar{\phi}\right\|_3}$,

$\bar{\phi}$ – власний розв’язок лінійної задачі вільних коливань,

$w_{\max}$ – значення максимального прогину в початковій умові,

$\left\|\bar{\phi}\right\|_3 = \max\limits_{i \in W}\left\{\bar{\phi}\right\}$, W – множина індексів компонентів вектора $\bar{\phi}$, які відповідають прогину.

На рисунках 4.8 і 4.9 показані вільні коливання пластини у точці з координатами $(l/2;0)$ як функцію часу для лінійного і нелінійного випадків. При малих початкових відхиленнях ($w_{\max} = 0.1h$) геометрично нелінійний і лінійний розв’язки практично співпадають. При збільшенні максимального прогину $w_{\max}$ нелінійна частота ω зростає.

На рис. 4.10 наведено скелетні криві, побудовані за допомогою вдосконаленого методу збурень для різних моделей, побудованих на основі просторової теорії пружності, теорії оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка) і теорії оболонок, яка базується на квадратичних апроксимаціях переміщень за нормальною координатою. Дані результати порівняно з аналітичними розв’язками для моделі оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка), наведеними у праці [167]. З графіка видно, що амплітудно-частотні характеристики(▼), отримані у праці [167], збігаються з отриманими чисельними результатами (×) за допомогою узагальненого методу збурень і методу скінченних елементів для моделі оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка).

Скелетна крива отримана для моделі, побудованої на основі просторової теорії пружності(■), де враховується повна геометрична нелінійність і ефект трансверсального зсуву і поперечного стиснення, суттєво відрізняється від кривої, отриманої для моделі оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка). Також відзначено, що результати для моделі з квадратичною апроксимацією переміщень за нормальною координатою (●), де враховується стиснення, є більш точнішими для геометрично нелінійних вільних коливань у порівнянні з моделлю оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка).

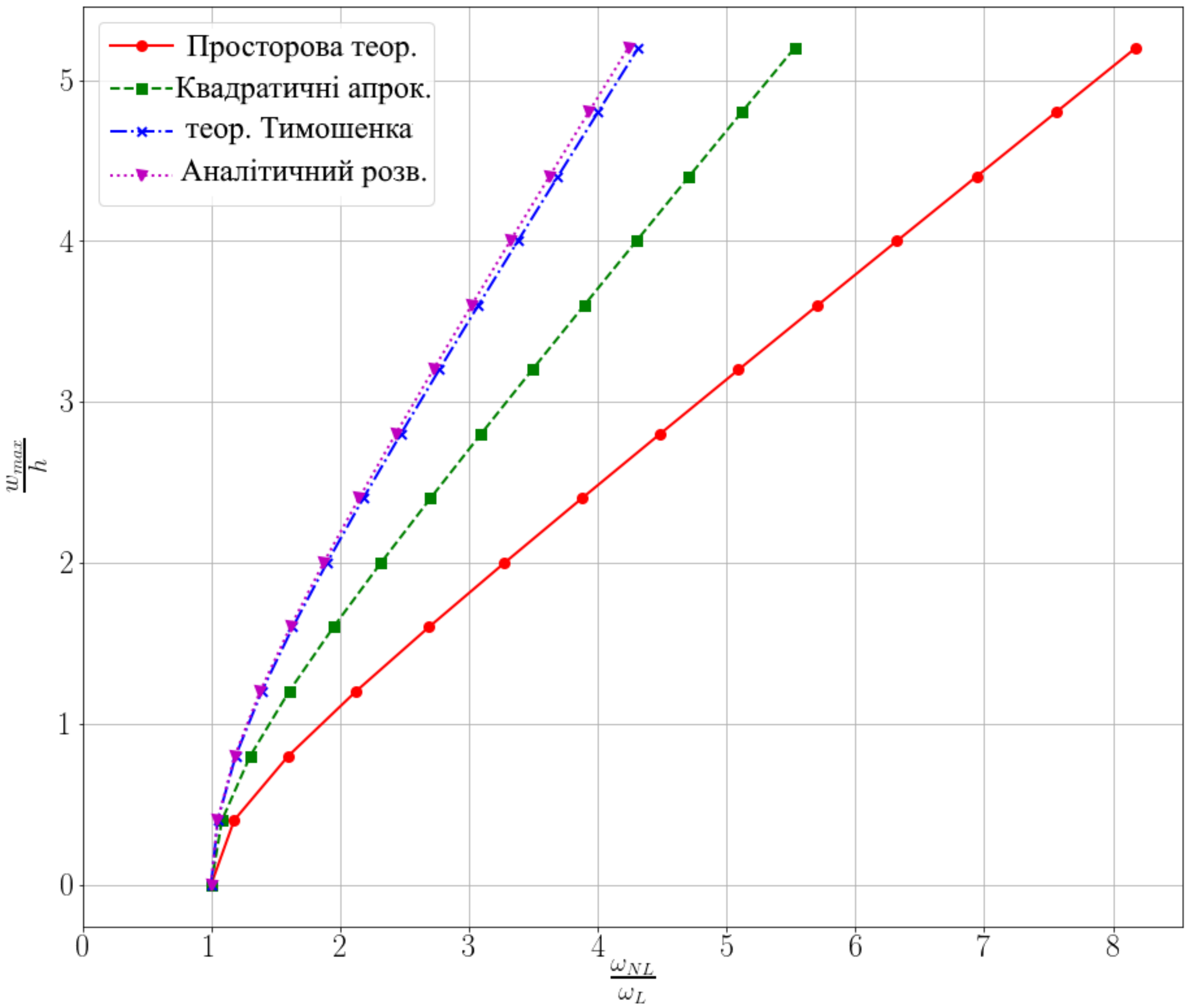


Рис 4.10. Амплітудно-частотні характеристики, отримані за допомогою узагальненого методу збурень для панелі, видовжені краї якої защемлені.

Для більш ефективного порівняння результатів виведено аналітичну формулу для знаходження власної частоти коливань пластини-смуги за геометрично нелінійних деформацій. Для цього записано співвідношення для визначення власної частоти з врахуванням геометрично нелінійних деформацій

$$\omega^2 = \bar{\phi}^T K \bar{\phi} , \tag{4.3}$$

де $K = K_L + \frac{3}{4} K_{NL}^2(\overline{A}, \overline{A})$, $\overline{\phi}$ – власний вектор лінійної задачі.

Враховуючи властивості власних векторів

$$\phi^T K_L \phi = \omega_0^{\ 2},$$

і матриці K_{NL}^2, (4.3) можна записати у вигляді:

$$\omega^2 = \omega_0^{\ 2} \left(1 + \frac{3}{4} X \left(\frac{w_{\max}}{h} \right)^2 \right), \tag{4.4}$$

де $X = \dfrac{\overline{\phi}^T K_{NL}^2 \left(\overline{\phi} h \big/ \|\overline{\phi}\|_3 , \overline{\phi} h \big/ \|\overline{\phi}\|_3 \right) \overline{\phi}}{\omega_0^{\ 2}}$,

$\omega_0^{\ 2}$ – лінійна власна частота,

$\omega^{\ 2}$ – нелінійна власна частота.

Відношення (4.4) між лінійною і нелінійною власними частотами, за формою співпадає з отриманим у праці [167], де X обчислено аналітично для жорстко защемленої пластини

$$X = \frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{k'} \left(\frac{E}{G'} \right) \frac{1+\alpha}{1-\nu^2}. \tag{4.5}$$

Таблиця 4.3. Значення параметра X для різних моделей панелі, видовжені краї якої защемлені

	X
Аналітичний розв’язок [167]	0.8363
Модель оболонок з врахуванням зсуву (типу Тимошенка)	0.8694
Модель з квадратичною апроксимацією переміщень за нормальною координатою	1.4586
Просторова теорія пружності	3.2488

У таблиці 4.3 порівняно значення параметра X, отриманого за допомогою узагальненого методу збурень (4.4) для різних моделей пластин, з аналітичним значенням (4.5), отриманим для пластини з врахуванням зсуву (типу Тимошенка) з жорстко защемленими краями.

На рисунку 4.11 наведено скелетні криві, побудовані за допомогою узагальненого методу збурень для моделей, побудованих на основі просторової теорії пружності і моделі, з квадратичною апроксимацією переміщень за нормальною координатою для ізотропної панелі, видовжені краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині (рис. 4.3).

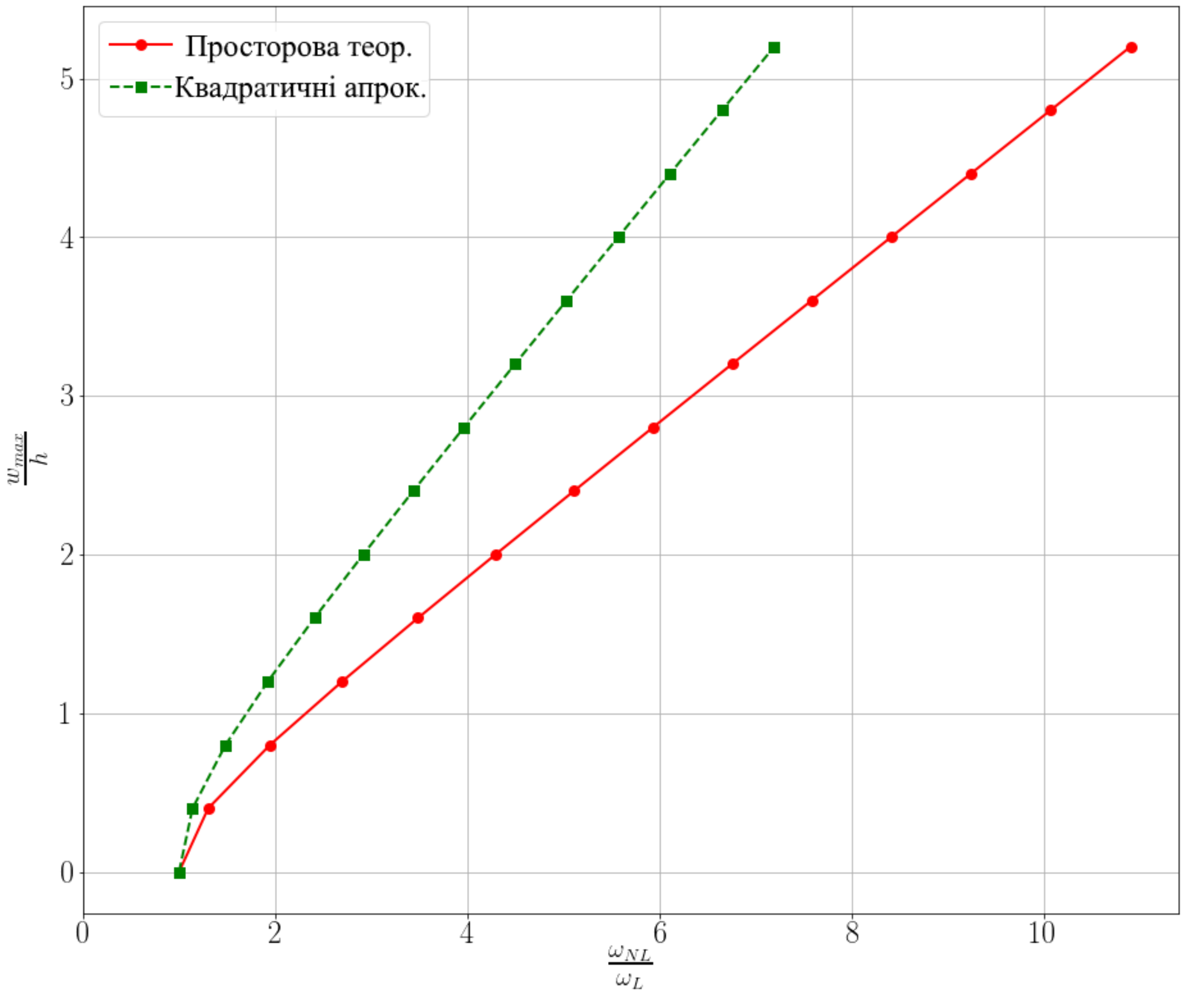


Рис 4.11. Амплітудно-частотні характеристики, отримані за допомогою вдосконаленого методу збурень для панелі з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

У таблиці 4.4 наведено значення параметра X для шарнірно закріпленої на видовжених краях панелі за двох різних моделей її деформованого стану.

Оскільки шарніри знаходяться на нижній лицевій площині, а не на середині бокових граней панелі, аналітичного результату немає.

Таблиця 4.4. Значення параметра X для панелі з нерухомими шарнірами на видовжених краях

	X
Модель з квадратичною апроксимацією переміщень за нормальною координатою	2.5014
Просторова теорія пружності	5.8088

Формула (4.4) показує, що параметр X характеризує нелінійні ефекти, які виникають при коливних процесах з великими амплітудами. А саме, при збільшені значення параметра X, вплив амплітуди коливань на нелінійну власну частоту збільшується. Це призводить до збільшення жорсткості пластини.

Аналіз значень параметра X для різних типів закріплення пластини, показує, що амплітуда коливань має більший вплив на нелінійну власну частоту для панелі з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

4.1.2 Шаруваті пластини-смуги

Нехай панель складається з N шарів (рис. 4.12). Кожен *k*-тий шар розглядається як окрема тонка панель з власними механічними і фізичними характеристиками.

$$V = \bigcup_{k=1}^{N} V^k$$

Закон Гука для кожного шару можна записати так:

$$S^{ij} = C_{(k)}^{ijlm} \varepsilon_{lm},\ i, j, l, m = 1,2,3, \tag{4.6}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V^k,\ k = 1...., N$$

де $C_{(k)}^{ijlm}$ – компоненти тензора пружних сталих *k*-того анізотропного шару.

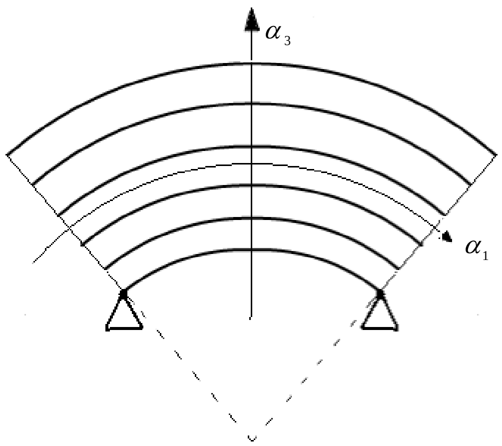


Рис. 4.12. Шарувата циліндрична панель з нерухомими шарнірами на видовжених краях

Оскільки значення координати α_3 в верхній точці k-того шару дорівнює h_k, і $h_0 = -h/2$, то умови контакту між шарами записуються наступним чином [33]

$$u_i^{(k-1)}(\alpha_1, h_{k-1}, t) = u_i^{(k)}(\alpha_1, h_k, t), \quad i = 1,\ 3, \tag{4.7}$$

$$S^{(k-1)3i}(\alpha_1, h_{k-1}, t) = S^{(k)3i}(\alpha_1, h_k, t), \quad \alpha_1 \in [0, L], \ k = 2, ..., N, \tag{4.8}$$

з граничними умовами на зовнішній і внутрішній поверхнях панелі

$$S^{(m)31}(\alpha_1, h_m, t) = S^{(m)33}(\alpha_1, h_m, t) = 0, \ \alpha_1 \in [0, L], \ m = 0, N. \tag{4.9}$$

На видовжених краях $\alpha_1 = 0, L$ панель закріплена на нерухомих шарнірах на внутрішній поверхні $\alpha_3 = -h/2$, де граничні умови записуються у формі

$$S^{(k)1i}(\alpha_1, \alpha_3, t) = 0, \ k = 1, N, \tag{4.10}$$

$$u_i^{(N)}(\alpha_1, \pm h/2, t) = 0, \quad |\alpha_3| \le h/2, \quad i = 1, 3, \quad \alpha_1 = 0, L \tag{4.11}$$

Квадратичні апроксимації вздовж осі α_3 для компонент вектора просторового переміщення u_1 і u_3 [165] мають вигляд

$$u_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_3) = \sum_{j=0}^{2} u_{ij}^{(k)}(\alpha_1) p_j(\alpha_3), \ i = 1, 3, \tag{4.12}$$

де

$$p_0(\alpha_3) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha_3 - h_{k-1} - h_k}{2(h_k - h_{k-1})},\ p_1(\alpha_3) = \frac{1}{2} + \frac{2\alpha_3 - h_{k-1} - h_k}{2(h_k - h_{k-1})},$$

$$p_2(\alpha_3) = 1 - \left(\frac{2\alpha_3 - h_{k-1} - h_k}{h_k - h_{k-1}}\right)^2, \quad \alpha_3 \in [h_{k-1}, h_k].$$

Для знаходження невідомих функцій $u_{ij}^{(k)}(\alpha_1)$ в (4.12), використані одновимірні лінійні ізопараметричні скінченні елементи вздовж тангенціальної осі α_1

$$u_{ij}^{(k)(e)} = \sum_{j,m}^{2} u_{ijm}^{(k)(e)}(\alpha_1)\varphi_m^{(e)}(\xi), \tag{4.13}$$

де $\xi = \dfrac{2\alpha_1}{\alpha_{12}^{(e)} - \alpha_{11}^{(e)}} - 1;$

e – номер скінченного елемента в k-тому шарі;

$u_{ijm}^{(k)(e)} = u_{ij}^{(k)}(\alpha_{1m}^{(e)})$,

$m = 1, 2$ є значеннями шуканих функцій у вузлових точках $\alpha_{1m}^{(e)}(\alpha_1)$ скінченного елемента;

$\varphi_1^{(e)}(\xi) = \dfrac{1}{2}(1-\xi)$; $\varphi_2^{(e)}(\xi) = \dfrac{1}{2}(1+\xi)$.

Застосувавши формули (4.6)-(4.12), принцип віртуальної роботи має вигляд [162]

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^L \delta\overline{u}'^{(k)T}\left(E'^{(k)} + E'^{(k)}_{NL}\right)C'^{(k)}\left(E'^{(k)} + E'^{(1)(k)}_{NL}\right)\overline{u}'^{(k)}A(\alpha_1)d\alpha_1\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^L \rho_0^{(k)}\delta\overline{u}'^{(k)T}B'^{(k)}\frac{\partial^2\overline{u}'^{(k)}}{\partial t^2}A(\alpha_1)d\alpha_1\right) = 0. \tag{4.12}$$

Після застосування апроксимацій (4.13) для кожного шару панелі, (4.12) має вигляд

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\left[\int_{-1}^{1}\delta\overline{u}'^{(e)(k)T}_{(\xi)}I^{(e)T}\left(E'^{(k)} + E'^{(k)}_{NL}\right)C'^{(k)}\left(E'^{(k)} + E'^{(1)(k)}_{NL}\right)I^{(e)}\overline{u}'^{(k)(e)}_{(\xi)}A(\xi)J^{(e)(k)}d\xi\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\left[\int_{-1}^{1}\rho_0^{(k)}\delta\overline{u}'^{(e)(k)T}_{(\xi)}I^{(e)T}B'^{(k)}I^{(e)}\frac{\partial^2\overline{u}'^{(e)(k)}_{(\xi)}}{\partial t^2}A(\xi)J^{(e)(k)}d\xi\right] = 0. \tag{4.14}$$

Рівняння (4.14) у матричній формі матиме вигляд:

$$\delta\overline{U}'^{T}K'_{L}\overline{U}' + \delta\overline{U}'^{T}\left[K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') + K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}',\overline{U}')\right]\overline{U}' + \delta\overline{U}'^{T}M'\ddot{\overline{U}}' = 0 \qquad (4.15)$$

де $\overline{U}' = \left(u_{10}^{(1)(1)} \quad \cdots \quad u_{32}^{(M+1)(1)} \quad \cdots \quad u_{ij}^{(l)(k)} \quad \cdots \quad \cdots \quad u_{32}^{(M+1)(N)}\right)^{T}$,

$u_{ij}^{(l)(k)}$ – значення компонент просторових переміщень у вузловій точці l шару k, $k = 1,...,N$; $l = 1,...,M+1$; $i = 1,3$; $j = 0,1,2$;

$$M' = \sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\left[\int_{-1}^{1}\rho_{0}^{(k)}H'^{(e)(k)T}I'^{(k)T}B'^{(k)}I'^{(k)}H'^{(e)(k)}J'^{(e)(k)}A(\xi)d\xi\right]; \qquad (4.16)$$

$$K'_{L} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\left[\int_{-1}^{1}H'^{(e)(k)T}I'^{(e)(k)T}E'^{(k)T}C'^{(k)}E'^{(k)}I'^{(e)(k)}H'^{(e)(k)}J'^{(e)(k)}A(\xi)d\xi\right]; \qquad (4.17)$$

$$K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') = \sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\int_{-1}^{1}H'^{(e)(k)T}I'^{(e)(k)T}\left[E'^{(k)T}_{NL}(\overline{U}')C'^{(k)}E'^{(k)} + \right.$$

$$\left. + E'^{(k)T}C'^{(k)}E'^{(1)(k)}_{NL}(\overline{U}')\right]I'^{(e)(k)}H'^{(e)(k)}J'^{(e)(k)}A(\xi)d\xi; \qquad (4.18)$$

$$K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}',\overline{U}') = \sum_{k=1}^{N}\sum_{e=(k-1)M+1}^{kM}\int_{-1}^{1}H'^{(e)(k)T}I'^{(e)(k)T}E'^{(k)T}_{NL}(\overline{U}')C'^{(k)} \times$$

$$\times E'^{(1)(k)}_{NL}(\overline{U}')I'^{(e)(k)}H'^{(e)(k)}J'^{(e)(k)}A^{(k)}(\xi)d\xi \qquad (4.19)$$

Враховуючи, що співвідношення (4.15) справедливе для будь-якого вектора $\delta\overline{U}'$, отримано наступне матричне співвідношення:

$$K'_{L}\overline{U}' + \left[K'^{(1)}_{NL}(\overline{U}') + K'^{(2)}_{NL}(\overline{U}',\overline{U}')\right]\overline{U}' + M'\ddot{\overline{U}}' = 0, \qquad (4.20)$$

Вигляд рівняння (4.20) дозволив застосувати узагальнений метод збурень для знаходження власної частоти.

Розглянуто багатошарову пластину-смугу [144], видовжені краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині (рис. 4.13). Геометричні характеристики пластини-смуги такі $l = 1$м, $h = 0{,}1$м.

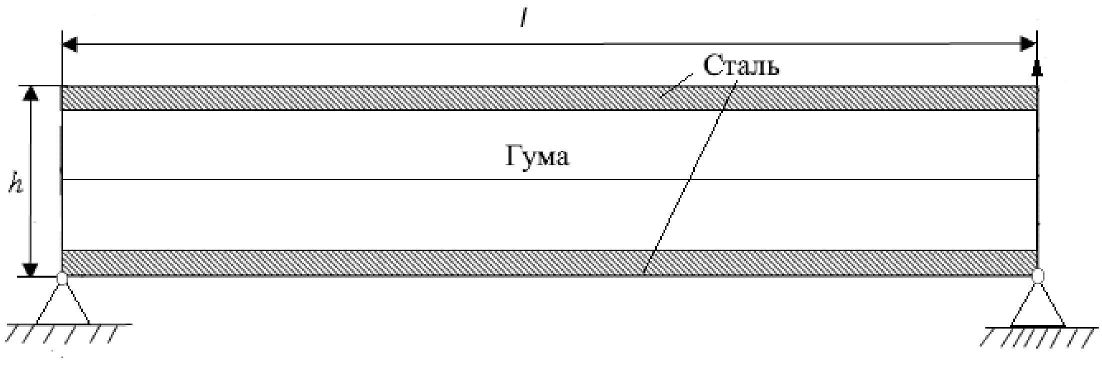


Рис. 4.13. Тришарова пластина-смуга з нерухомими шарнірами на видовжених краях

Вона складається з трьох шарів з наступними механічними характеристиками:

Гума – $E = 0.1 \cdot 10^9 \ H/m^2$, $\nu = 0{,}49$;

Сталь – $E = 210 \cdot 10^9 \ H/m^2$, $\nu = 0{,}3$.

Таблиця 4.5. Перші п’ять мінімальних власних мінімальних частот тришарової пластини-смуги з $\frac{h_{rubber}}{h} = 0.8$

n	1	2	3	4	5
ω_n, Гц	69.056	161.369	303.913	312.588	481.880

У таблиці 4.5 наведені перші п’ять власних частот вільних лінійних коливань пластини-смуги, яка складається з трьох шарів: шари сталі мають товщину 0.01*m*, а шар гуми – 0.08*m*. Також на рис. 4.14 зображено початкову конфігурацію(--) і першу власну мода (-) цієї ж три-шарової пластини-смуги.

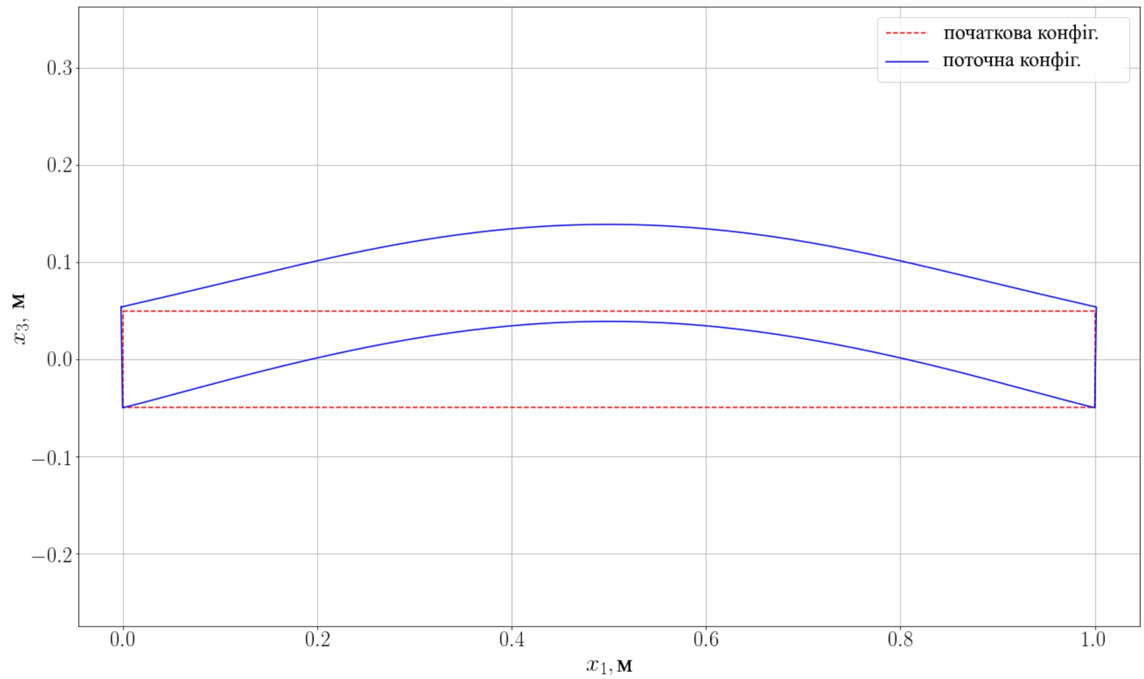


Рис. 4.14. Початкова конфігурація(--) і перша власна мода (-) тришарової пластини-смуги з нерухомими шарнірами на видовжених краях $\frac{h_{rubber}}{h} = 0.8$

Таблиця 4.6. Вплив товщини шару гуми на мінімальну власну частоту

$\frac{h_{rubber}}{h}$	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0
ω_1, Гц	25.061	72.121	69.587	69.056	84.453	111.765	375.763

У таблиці 4.6 показано залежність між мінімальною власною частотою і товщиною серединного шару(гуми) $\frac{h_{rubber}}{h}$. При збільшені товщини серединного шару, мінімальна власна частота, а отже, і жорсткість пластини-смуги зменшується.

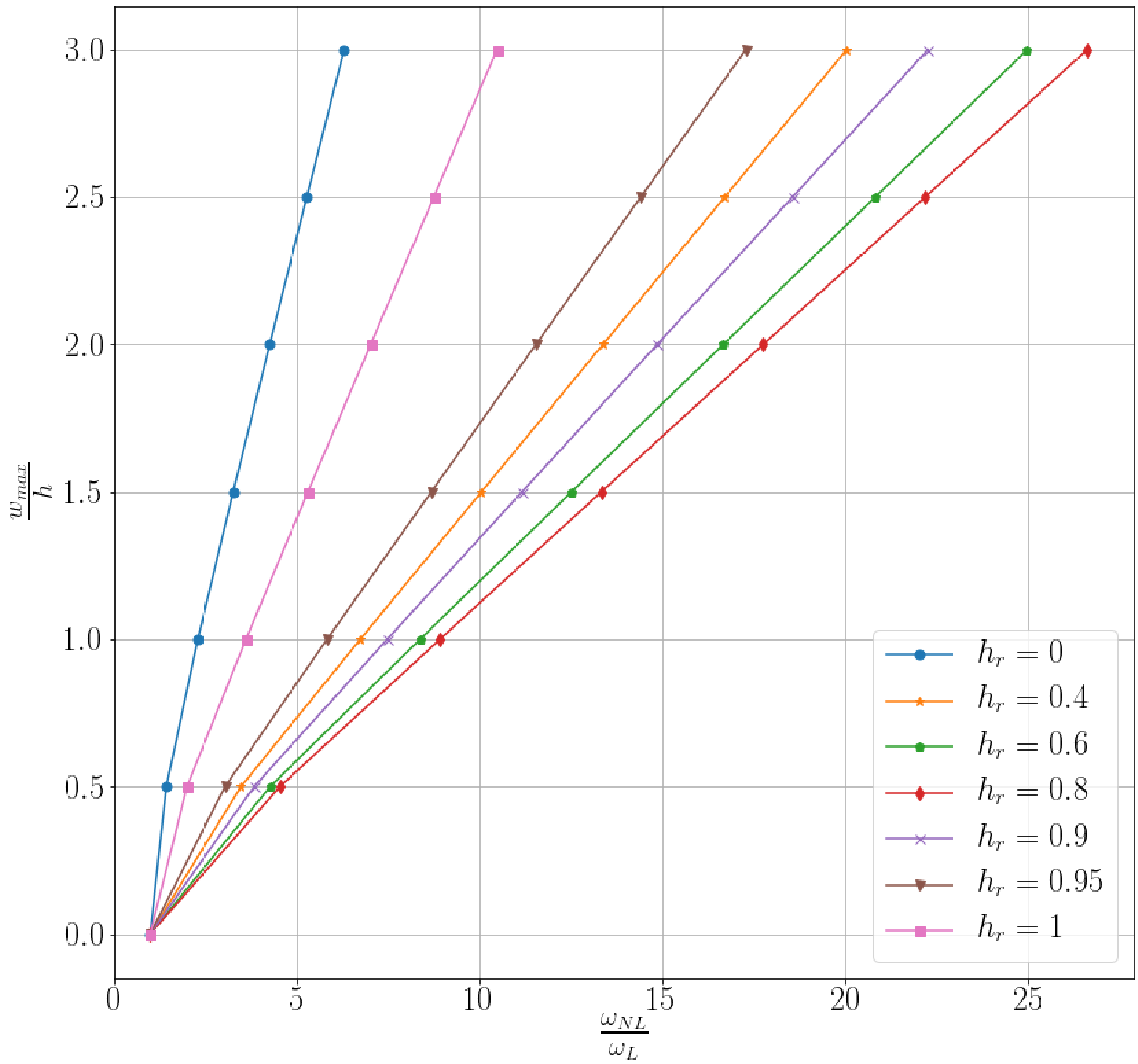


Рис. 4.15. Амплітудно-частотні характеристики тришарової панелі з нерухомими шарнірами на видовжених краях для різних значень h_r.

На рисунку 4.15 наведено скелетні криві тришарової платини-смуги, побудовані за допомогою узагальненого методу збурень, для різних товщин серединного шару(гуми) – $h_r = \frac{h_{rubber}}{h}$. При $h_r = 1$, пластина повністю складається з гуми, при $h_r = 0$ – із сталі.

У таблиці 4.7 наведені значення параметра X з формули (4.4) для різних товщин серединного шару(гуми) тришарової платини-смуги – $h_r = \frac{h_{rubber}}{h}$.

Таблиця 4.7. Вплив товщини шару гуми на значення параметра X

$\frac{h_{rubber}}{h}$	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0
X	16.1053	44.0470	73.2043	104.7005	92.1796	59.2721	5.7266

З рис. 4.15 і даних у таблиці 4.7 видно, що три-шарова пластина-смуга з товщиною серединного шару (гуми) $h_r = \frac{h_{rubber}}{h} = 0.8$, враховуючи геометрично нелінійний характер вільних коливань пластини, є найбільш жорсткою – $X = 104.7005$. При амплітуді коливань $w_{\max} = 3h$, власна частота нелінійних коливань $\omega_{NL} = 1837.11$ Гц.

4.2. Видовжені циліндричні панелі

Дослідження вільних коливання видовжених композитних циліндричних панелей з одночасним урахуванням трансверсального зсуву і поперечного стиснення представляють великий інтерес, оскільки застосовуються у різних сферах промисловості. Для їх дослідження знайдено формули для коефіцієнтів першої квадратичної форми серединної поверхні циліндричної панелі і її кривини.

4.2.1. Геометричні співвідношення і базові вектори для видовженої циліндричної панелі

Співвідношення між декартовою (x_1, x_2, x_3) і локальною $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ системами координат видовженої циліндричної панелі описується таким чином:

$$x_1 = qR\cos(\theta),$$

$$x_2 = \alpha_2, \tag{4.21}$$

$$x_3 = qR\sin(\theta),$$

де $\theta = \theta(\alpha_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{R}\left(\frac{L}{2} - \alpha_1\right);$

$q = q(\alpha_3) = (R + \alpha_3)\frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{R}\alpha_3;$

R – радіус кривизни панелі (відстань від осі панелі до твірної).

Радіус вектор для даної системи координат:

$$\bar{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \tag{4.22}$$

Продиференціювавши радіус вектор (4.22) з використанням формул (4.21), отримано вектори коваріантної бази:

$$\vec{R}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1} = q(\sin(\theta)\vec{e}_1 - \cos(\theta)\vec{e}_3)$$

$$\vec{R}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2} = \vec{e}_2 \tag{4.23}$$

$$\vec{R}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_3} = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_3$$

З формул (4.23) знайдено вектори контрваріантної бази:

$$R_1 \cdot (R_2 \times R_3) = q$$

$$R^1 = \frac{R_1}{q^2} = \frac{1}{q}(\sin(\theta)\vec{e}_1 - \cos(\theta)\vec{e}_3)$$

$$\vec{R}^2 = \vec{R}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_3} = \vec{e}_2 \tag{4.24}$$

$$\vec{R}^3 = \vec{R}_3 = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_3$$

Коваріантні компоненти метричного тензора, отримані з формул (4.23)

$$\{g_{ij}\} = \{R_i R_j\} = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Контрваріантні компоненти метричного тензора, отримані з формул (4.24)

$$\left\{g^{ij}\right\}=\left\{R^{i}R^{j}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{q^{2}} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.26}$$

З (4.25) і (4.26) отримано коефіцієнти Ламе для видовженої циліндричної панелі:

$$\begin{aligned}H_1 &= 1+\frac{1}{R}\alpha_3,\\ H_2 &= 1,\\ H_3 &= 1,\end{aligned} \tag{4.27}$$

За формулами (4.27) коефіцієнт першої квадратичної форми серединної поверхні і головна кривина в напрямку осі α_1 мають вигляд

$$\begin{aligned}A(\alpha_1) &= 1\\ K(\alpha_1) &= \frac{1}{R}\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.2.2. Геометрично нелінійні коливання ортотропної циліндричної панелі

Розглянута п’ятишарова панель, краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицевій площині (див. рис.4.3) з геометричними $l=1$м; $h=0{,}01$м та фізико-механічними характеристиками:

$$E_1=40E_3, G_{13}=0{,}6E_3, \nu_{13}=0{,}25.$$

Для аналізу достовірності результатів розглянуто панель з радіусом кривини $K=0$ м$^{-1}$ де розв’язки відомі.

Для знаходження власних частот і значень, застосовано розбиття на 50 скінченних елементів по координаті α_1. Початкові умови задано у вигляді (4.1)-(4.2), де $w_{\max}$ – величина максимального прогину.

Таблиця 4.8. Порівняння результатів в залежності від початкових умов

$\frac{w_{\max}}{h}$	ω_{NL}/ω_L	
	[63]	Узагальнений метод збурень
0,2	1,0313	1,0401
0,4	1,1198	1,1214
0,6	1,2536	1,2695
0,8	1,4199	1,4418
1,0	1,6086	1,6588
1,2	1,8127	1,8627

У таблиці 4.8 порівняно отримані значення ω_{NL}/ω_L для різних величин амплітуди $\frac{w_{\max}}{h}$ вільних коливань п'ятишарової прямої панелі з результатами, наведеними у роботі [63].

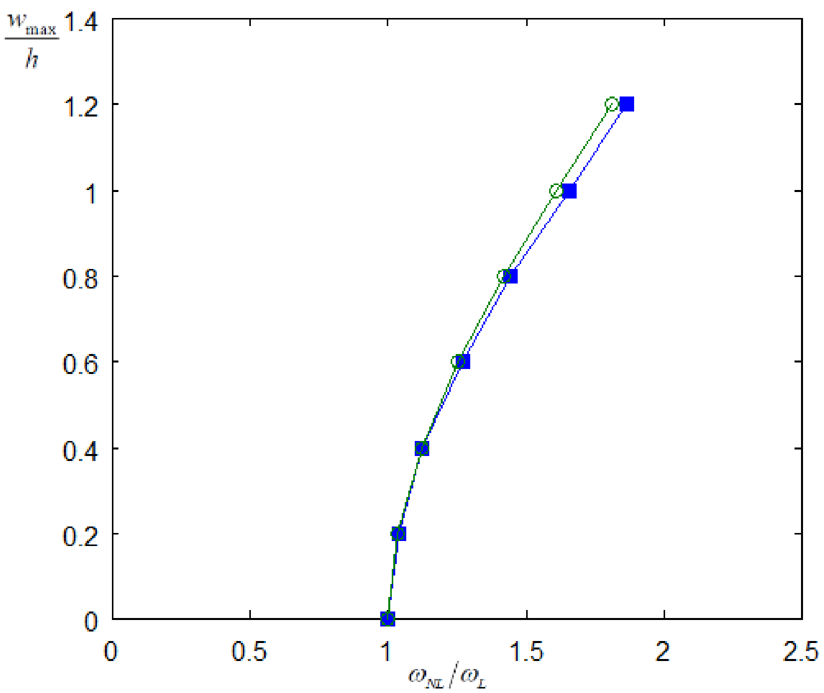
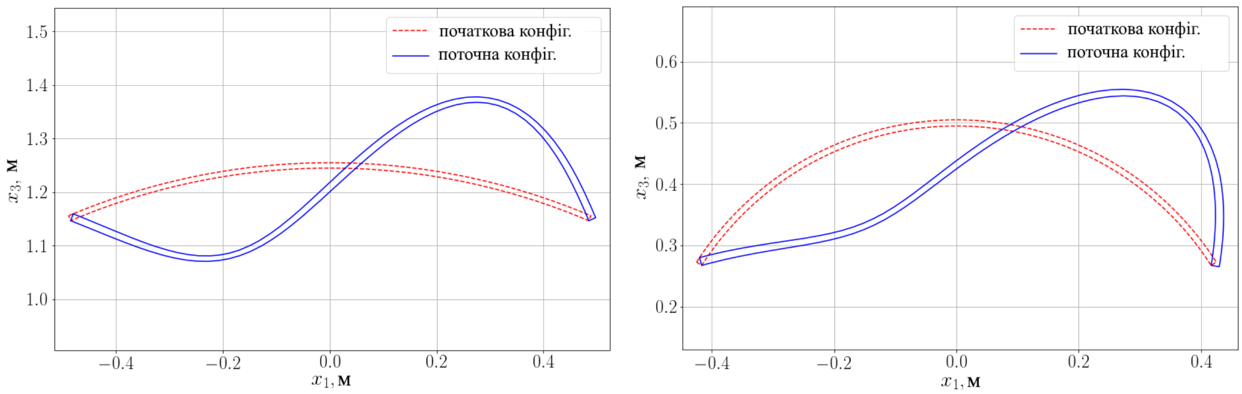


Рис. 4.16. Порівняння амплітудно-частотної характеристики, отриманої зі застосуванням методу збурень та результатів праці [63]

Максимальна відносна похибка у табл. 4.8 не перевищує 3%, що свідчить про ефективність запропонованої методики, яка базується на узагальненому методі збурень. Порівняльний аналіз графіків на рис. 4.16 свідчить про достовірність отриманих результатів за допомогою розробленої методики.

На рис. 4.16 наведено скелетні криві [122], побудовані за допомогою запропонованого методики у розділі 3 (■) та з результатами, наведеними в праці [63] (o).

Досліджено вплив радіуса кривизни K на лінійній вільні коливання циліндричної панелі з вуглепластику товщиною $h = 0{,}01$м.



а)

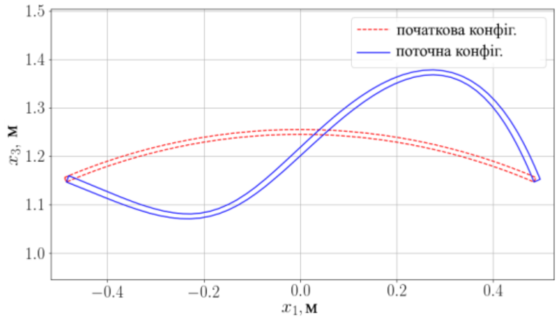
б)

Рис. 4.17. Перша мода циліндричної панелі з вуглепластику для різної кривини: а) $K = 0.8$ м$^{-1}$; б) $K = 2$ м$^{-1}$

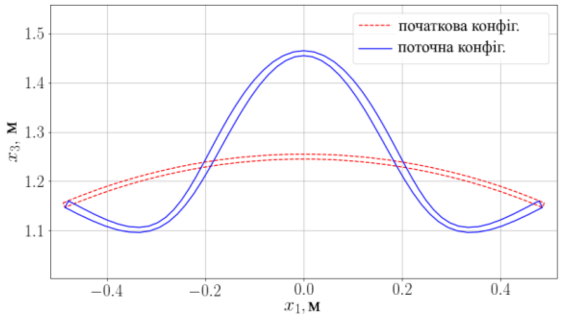
На рис. 4.17 зображені перші моди лінійних коливань панелі при різних значення кривини панелі. Відмічена несиметричність вектора переміщень першої моди коливань.

Таблиця 4.9. Залежність найменшої власної частоти від радіуса кривини циліндричної панелі

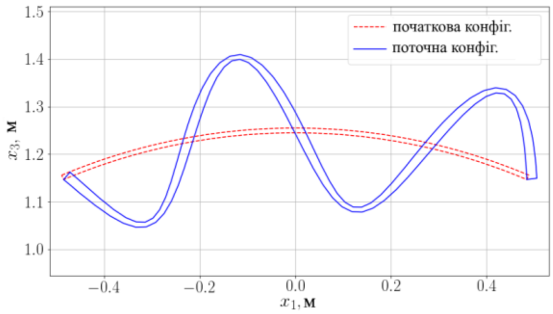
K, м$^{-1}$	0.5	0.8	1	1.5	2
X	257.203	255.364	253.954	250.099	246.300



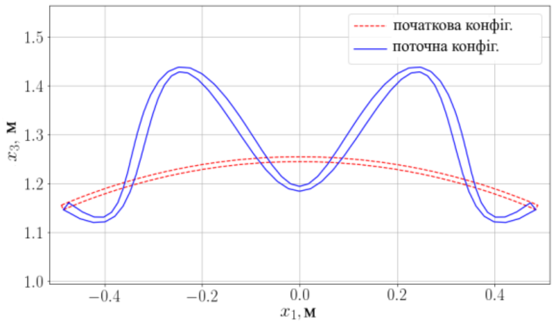
а)



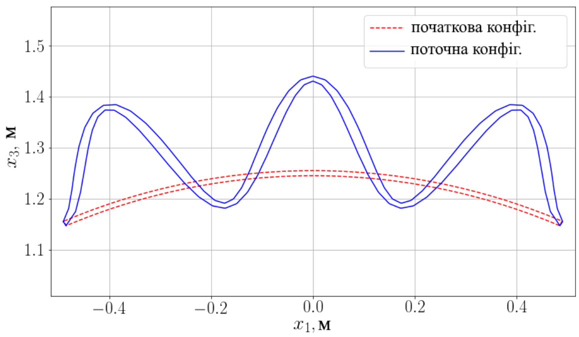
б)



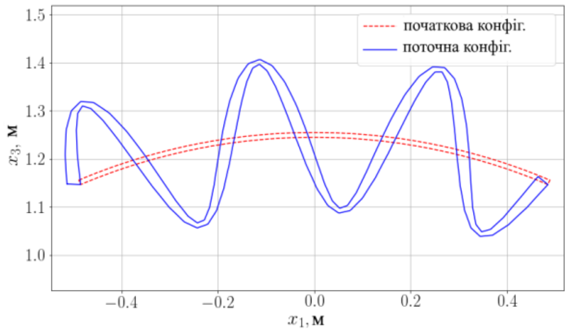
в)



г)



д)



е)

Рис. 4.18. Вигляд циліндричної панелі $K = 0.8$ м$^{-1}$ з вуглепластику в різних модах: а) – перша мода; б) – друга; в) – третя; г) – четверта; д) – п’ята; е) – шоста.

На рис. 4.18 зображені перші шість мод лінійних вільних коливань панелі при радіусі кривини $K = 0.8$м$^{-1}$. Також відмічено, що при розгляді вищих власних частот появляється потреба у врахуванні стиснення панелей.

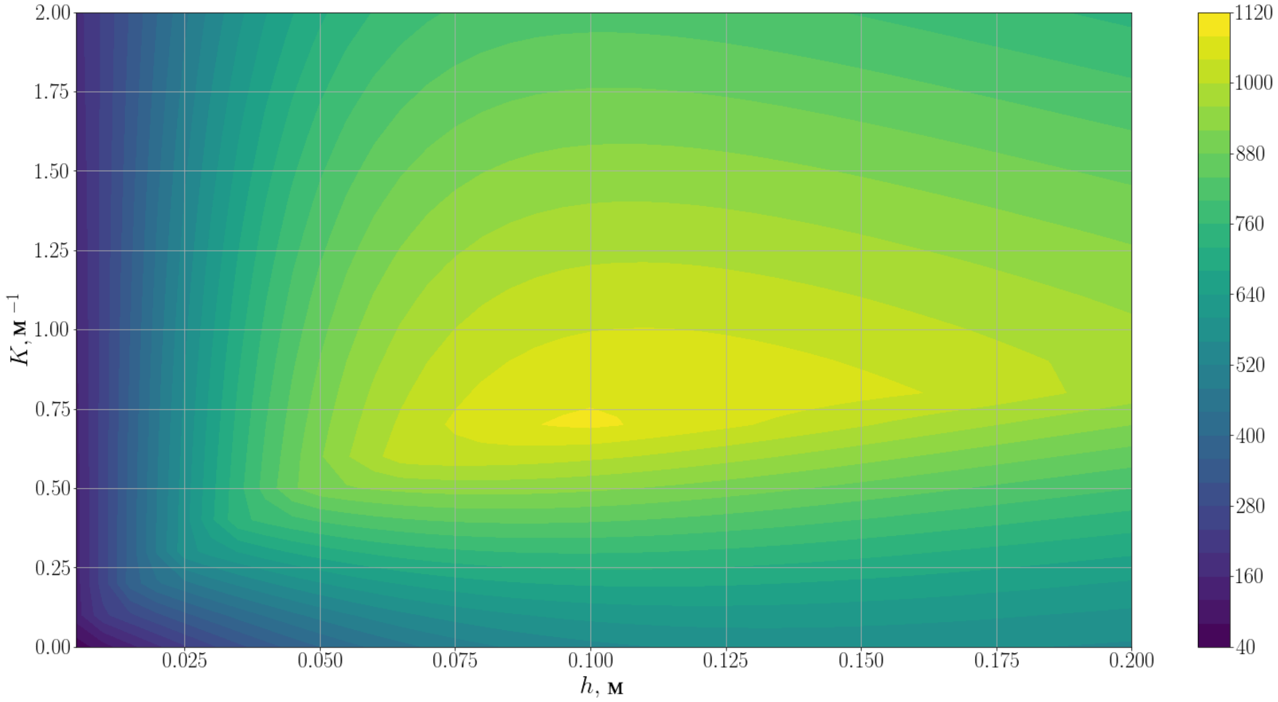


Рис. 4.19. Залежність найменшої власної частоти від радіуса кривини K і товщини h циліндричної панелі

У таблиці 4.9 наведено значення найменшої лінійної власної частоти ω_1 для різних значень кривини панелі K. З результатів видно, що значення ω_1 зменшується при збільшені кривини панелі K. Тобто циліндрична панель стає менш жорсткою при збільшені радіуса кривини серединної поверхні для лінійних коливань.

На рис. 4.19 показана залежність лінійної найменшої власної частоти від форми кривини і товщини п’ятишарової панелі з вуглепластика. З рисунку видно, що найбільш жорсткою панель є коли $K = 0.7$ м$^{-1}$ і $h = 0.1$м.

Таблиця 4.10. Вплив кривини панелі на значення параметра X з формули (4.4)

K, м$^{-1}$	0.5	0.8	1	1.5	2
X	4.442	4.203	4.002	3.421	2.855

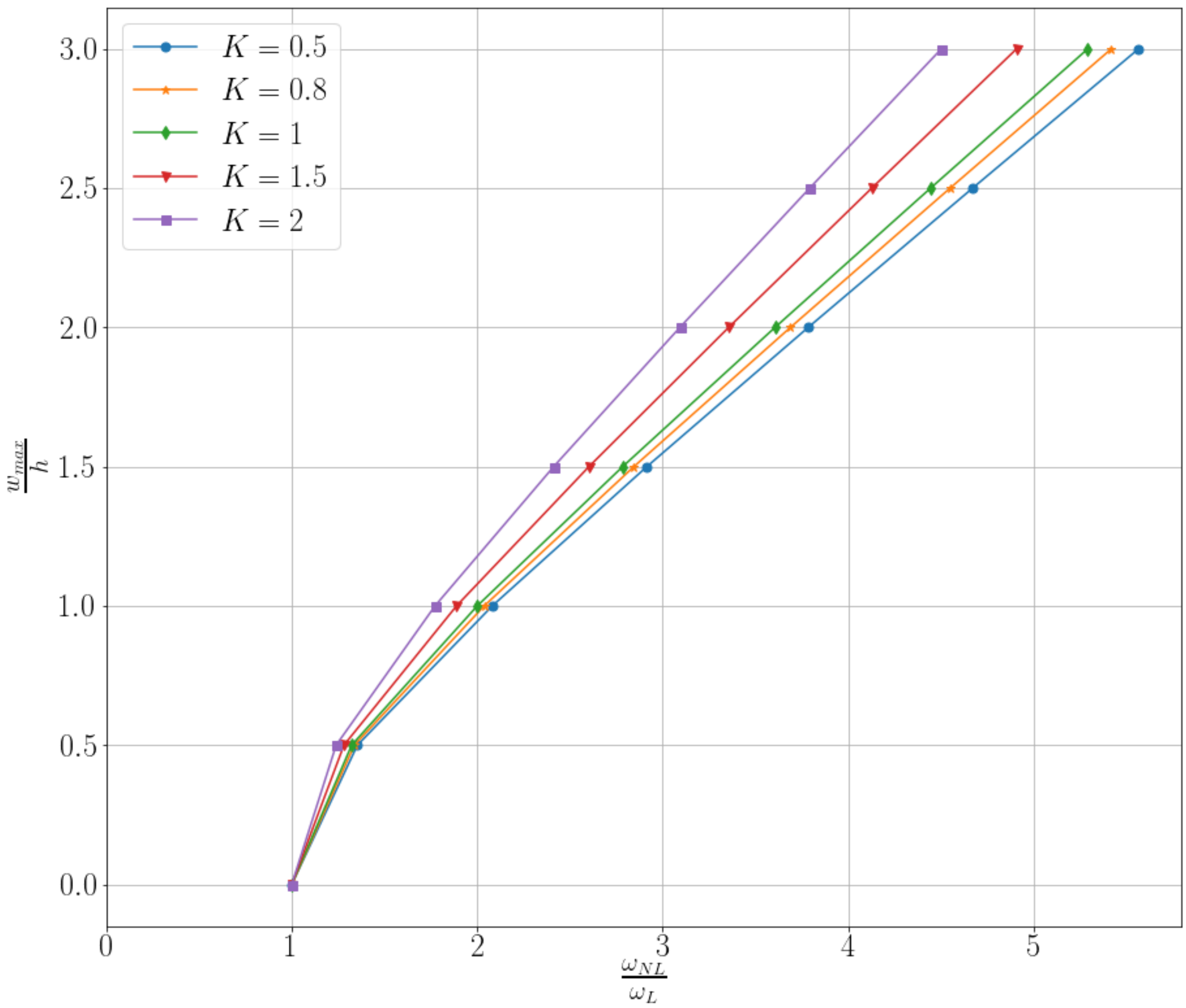


Рис. 4.20. Амплітудно-частотні характеристики для панелі з вуглепластика з для різних значень K.

Проаналізовано вплив кривини серединної поверхні на амплітудо-частотні характеристики розглянутої панелі. На рис. 4.20 і у таблиці 4.10 показано вплив кривини панелі на геометрично нелінійні коливання панелі. З даних результатів видно, що значення параметра X з формули (4.4) зменшується при збільшенні кривини панелі K. Тобто вплив геометричної нелінійності зменшується.

4.3. Висновки до розділу 4

Показано доцільність використання моделі, побудованої на основі квадратичних апроксимації за нормальною до серединної поверхні шару координатою, шляхом порівняння чисельних результатів отриманих за просторовою теорією пружності та узагальненою теорією С.П. Тимошенка.

На основі розробленої методики отримані числові результати порівняно з розв'язками, отриманими іншими авторами для одношарової пластини-смуги. Це дозволило встановити її ефективність.

У випадку тришарової пластини смуги, що складається двох металевих лицевих та гумового середнього елементів, встановлено, що зі зростанням товщини гумового шару, мінімальна лінійна власна частота спадає. Встановлено, що максимальне значення першої власної частоти за нелінійних коливань досягається при 80% заповнені пластини смуги гумовим складником.

Для циліндричної панелі встановлено, що зі зростанням кривини вона стає менш жорсткою за нелінійних коливань. Максимальне значення власної лінійної частоти досягається при $K = 0.7$ м$^{-1}$ і $h = 0.1$м.

Основні положення цього розділу викладені у працях автора [33, 144, 165].

РОЗДІЛ 5. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГОФРОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Через раціональну матеріаломісткість та необхідну жорсткість у певних напрямках, зумовлених експлуатаційними умовами, оболонкові елементи є найпоширенішими складниками навантажених конструкцій, приладів і споруд різноманітного цільового призначення. Серед них слід виокремити циліндричні оболонки та їх фрагменти, зокрема, видовжені панелі. Моделюванню деформування та методам їх розрахунку присвячено чимало праць. Менш досліджені гофровані циліндричні оболонки, особливо за динамічного геометрично нелінійного деформування, зокрема, їхніх коливань. Для запобігання резонансних явищ під час вібраційних навантажень необхідно на стадії проектування визначати спектри власних частот вказаних конструктивних елементів.

У даному розділі розглянуто вільні коливання гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та нелінійного деформування. Досліджено вплив частот та амплітуд гофрування на першу власну частоту гофрованої циліндричної оболонки. Отримано вирази для геометричної характеристики гофрованої поверхні.

5.1. Геометричні співвідношення і базові вектори для гофрованої циліндричної оболонки

Розглянутий циліндричний гофрований шар V, що описується співвідношенням

$$V = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1 \in [0, L], \alpha_2 \in [-\infty, +\infty], \alpha_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\},$$

де L – довжина дуги твірної шару;

h – товщина шару.

Гофрування подано наступними параметрами:

- g_A – амплітуда гофрування (рис. 5.1, а);
- g_v – частота гофрування.

Співвідношення між декартовою (x_1, x_2, x_3) і локальною ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) системами координат мають наступний вигляд:

$$x_1 = \left(qR + g_A \cos\left(g_v\theta\right)\right)\cos(\theta);$$
$$x_2 = \alpha_2; \tag{5.1}$$
$$x_3 = \left(qR + g_A \cos\left(g_v\theta\right)\right)\sin(\theta),$$

де $\theta = \theta(\alpha_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{R}\left(\frac{L}{2} - \alpha_1\right);$

$q = q(\alpha_3) = (R + \alpha_3)\frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{R}\alpha_3;$

R – відстань від осі панелі до напрямної циліндричного шару (рис. 5.1, б).

Виразимо співвідношення між декартовою (x_1, x_2, x_3) і локальною (a_1, a_2, a_3) системами координат за допомогою радіус-вектора:

$$\overline{R} = \overline{r}(\alpha_1) + \alpha_3 \overline{n}(\alpha_1), \tag{5.2}$$

де $\overline{r}(\alpha_1)$ – радіус-вектор дотичної до твірної;

$\overline{n}(\alpha_1)$ – вектор нормалі до твірної.

Для радіус-вектора серединної поверхні гофрованого шару маємо:

$$\overline{r}(\alpha_1) = \left(R + g_A Cos\left(g_v\theta\right)\right)Cos(\theta)\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \left(R + g_A Cos\left(g_v\theta\right)\right)Sin(\theta)\vec{e}_3 \tag{5.3}$$

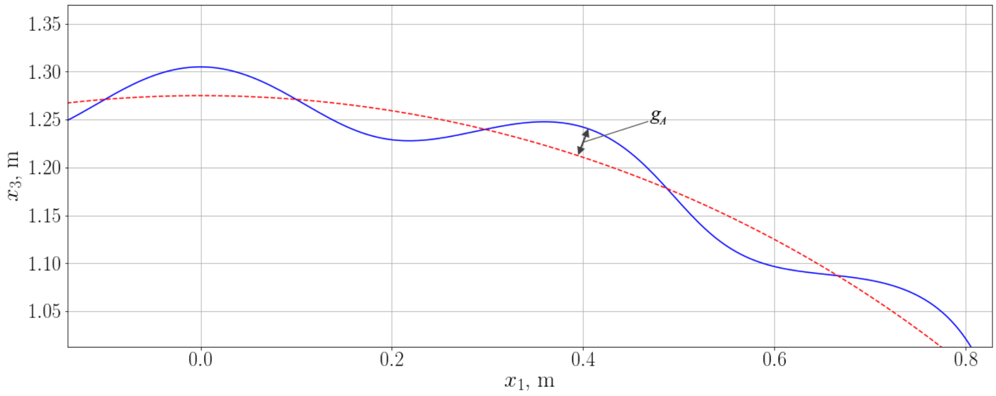
де $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$ – базові вектори декартової системи координат.

Після диференціювання (5.3) вираз до дотичної до серединної поверхні набуде вигляду:

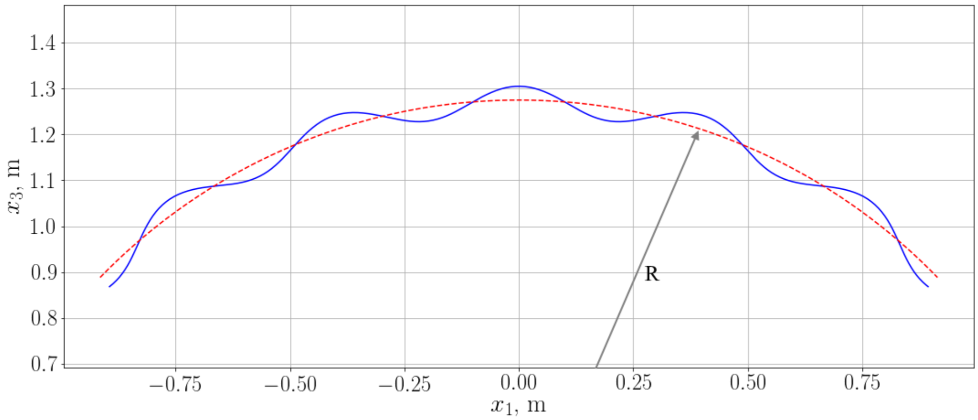
$$\overline{r}'(\alpha_1) = \frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} = \left(wSin(\theta) + zCos(\theta)\right)\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \left(-wCos(\theta) + zSin(\theta)\right)\vec{e}_3, \tag{5.4}$$

де

$$w = 1 + \frac{g_A}{R}Cos\left(g_v\theta\right);\; z = \frac{g_A g_v}{R}Sin\left(g_v\theta\right). \tag{5.5}$$



а)



б)

Рис. 5.1. Геометричні характеристики серединної поверхні гофрованої оболонки за частоти гофрування $g_v = 20$.

Тоді, з врахуванням (5.4), вираз для нормалі до серединної поверхні гофрованої оболонки (рис. 5.2) матиме вигляд:

$$\bar{n}(\alpha_1) = \frac{-\bar{r}'(\alpha_1)_3}{\|\bar{r}'(\alpha_1)\|}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{\bar{r}'(\alpha_1)_1}{\|\bar{r}'(\alpha_1)\|}\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{wCos(\theta) - zSin(\theta)}{\sqrt{w^2 + z^2}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{wSin(\theta) + zCos(\theta)}{\sqrt{w^2 + z^2}}\vec{e}_3. \quad (5.6)$$

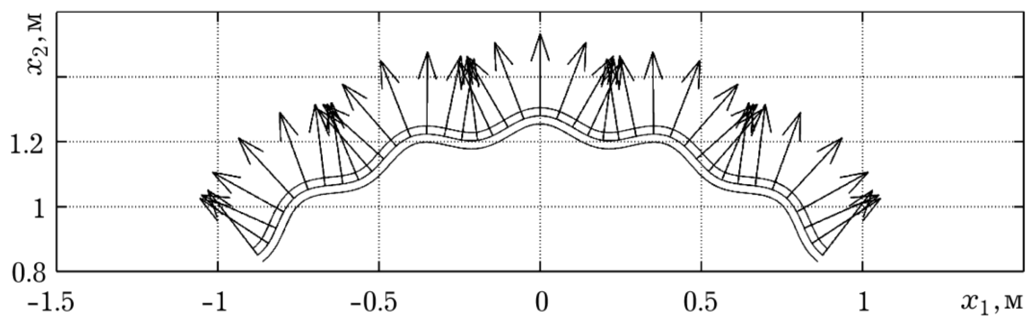


Рис. 5.2. Вигляд гофрованої панелі і нормалей до серединної поверхні: $L = 2$ м, $h = 0.05$ м, $R = 1.25$ м, $g_A = 0.03$ м, $g_v = 20$.

Продиференціювавши радіус-вектор (5.2), векторам коваріантної бази надамо вигляду:

$$\overline{R}_1 = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} + \alpha_3 \frac{\partial \overline{n}}{\partial \alpha_1};$$

$$R_2 = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \alpha_2} = \vec{e}_2; \tag{5.7}$$

$$R_3 = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \alpha_3} = \overline{n}(\alpha_1).$$

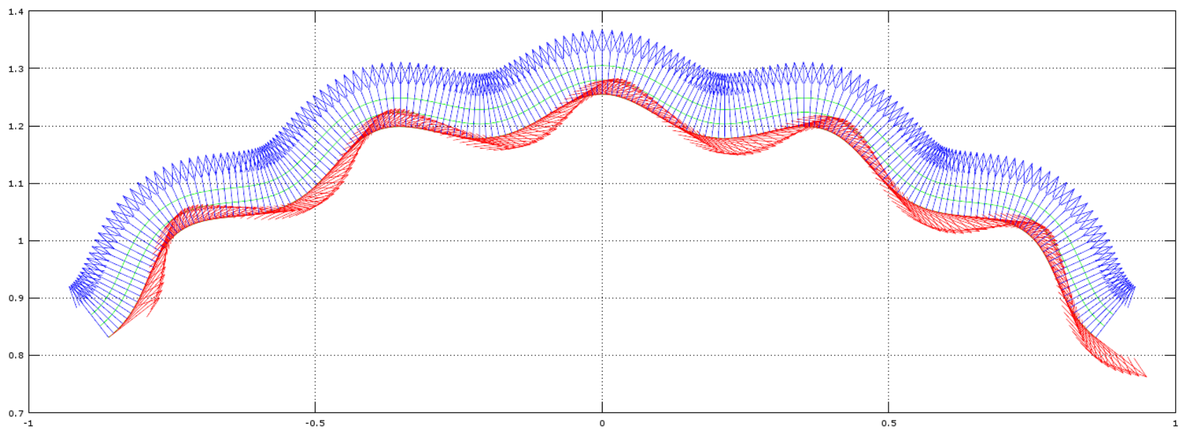


Рис. 5.3. Вектори коваріантної бази $\overline{R}_1$ (червоний колір) і $\overline{R}_3$ (синій колір) на нижній поверхні панелі. $L = 2$ м, $h = 0.05$ м, $R = 1.25$ м, $g_A = 0.03$ м, $g_v = 20$

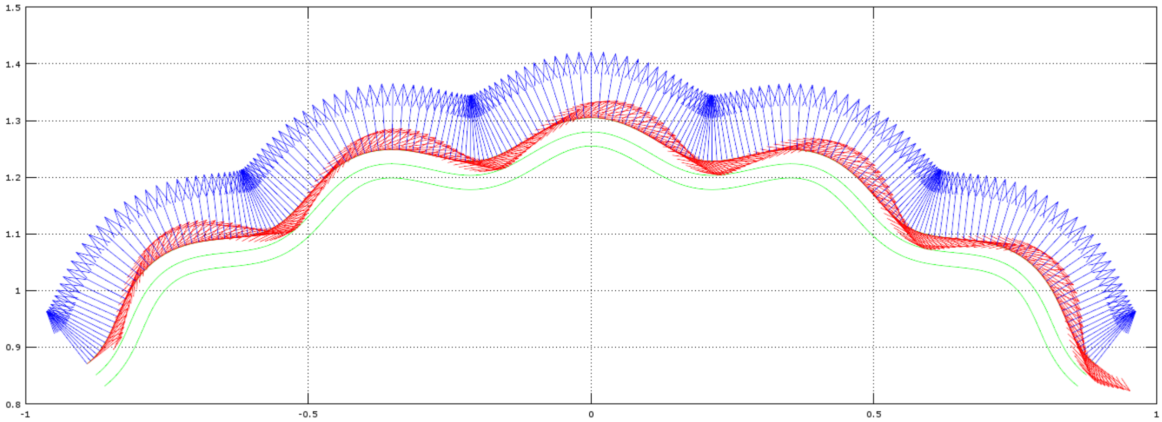


Рис. 5.4. Вектори коваріантної бази $\overline{R}_1$ (червоний колір) і $\overline{R}_3$ (синій колір) на верхній поверхні панелі. $L = 2$ м, $h = 0.05$ м, $R = 1.25$ м, $g_A = 0.03$ м, $g_v = 20$

Аналогічно побудовано контрваріантну базу для локальної системи координат гофрованої оболонки.

Враховуючи (5.6), і те, що $\overline{n}(\alpha_1) \cdot \overline{n}(\alpha_1) = 1$ та $\dfrac{\partial \overline{n}}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial \overline{n}}{\partial \alpha_1} = 0$, для коваріантних компонент метричного тензора з формул (5.7) отримуємо:

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Параметри Ламе для гофрованої оболонки:

$$H_1^2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha_1};$$

$$H_2^2 = 1; \tag{5.9}$$

$$H_3^2 = 1.$$

Підставивши (5.4) у (5.9), отримаємо параметри Ламе для видовженої циліндричної оболонки:

$$H_1 = A(\alpha_1)(1 + K(\alpha_1)\alpha_3),$$

де $A(\alpha_1)$ – коефіцієнт першої квадратичної форми серединної поверхні;

$K(\alpha_1)$ – головна кривина в напрямку осі α_1 і мають вигляд [70]:

$$A(\alpha_1) = \sqrt{w^2 + z^2}\ ;$$

$$K(\alpha_1) = \frac{\left(wy + \frac{2}{R}z^2\right)}{\left(w^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де w і z представлені у формулах (5.5);

$y = -\frac{1}{R}w + \frac{g_A g_v^2}{R^2} Cos(g_v \theta).$

5.2. Вільні коливання гофрованої циліндричної оболонки

Розглянута гофрована в коловому напрямку циліндрична оболонка з довжиною твірної $L = 2$ м, радіусом серединної поверхні оболонки, лицеві поверхні якої перетинають вершини гофрів, $R = 1.25$ м, пружними характеристиками: $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu_{13} = 0.3$, $G_{13} = 8.1 \cdot 10^{10}$ Н/м^2 та густиною $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Товщина панелі $h = 0.05$ м; амплітуда гофрування $g_A = 0.03$ м.

Для знаходження власних частот і значень застосовано розбиття на 200 скінченних елементів по координаті α_1. Початкові умови задано у вигляді (4.1)-(4.2), де $w_{\max}$ – величина максимального прогину. На видовжених краях $\alpha_1 = 0, L$ панель закріплена на нерухомих шарнірах на внутрішній поверхні $\alpha_3 = -h/2$.

5.2.1 Лінійні вільні коливання

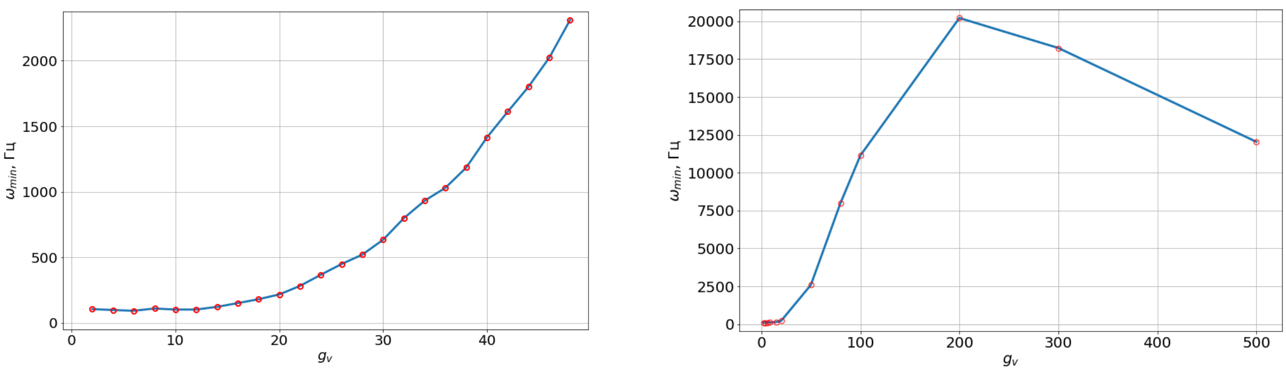
Досліджено вплив частоти гофрування g_v на лінійні вільні коливання розглянутої оболонки. У таблиці 5.1 наведено значення найменшої лінійної власної частоти ω_1 для різних значень g_v.

Таблиця 5.1. Залежність найменшої власної частоти ($\omega_{\min}$)

від частоти гофрування (g_v) оболонки

g_v	2	4	6	8	15	20	50	80	100	200	300	500
$\omega_{\min}$, Гц	105	98	92	110	132	217	2588	8007	11138	20220	18239	12042

Як видно з результатів, наведених у таблиці 5.1 та графіків на рис. 5.5, мінімум $\omega_{\min}$ досягається при $g_v = 6$, що збігається з висновками праці [93]. Також з рис. 5.5 б) можна зробити висновок, що при $g_v \to \infty$ величина $\omega_{\min}$ прямує до певного значення, більшого за першу власну частоту коливань негофрованої кругової циліндричної оболонки [32].

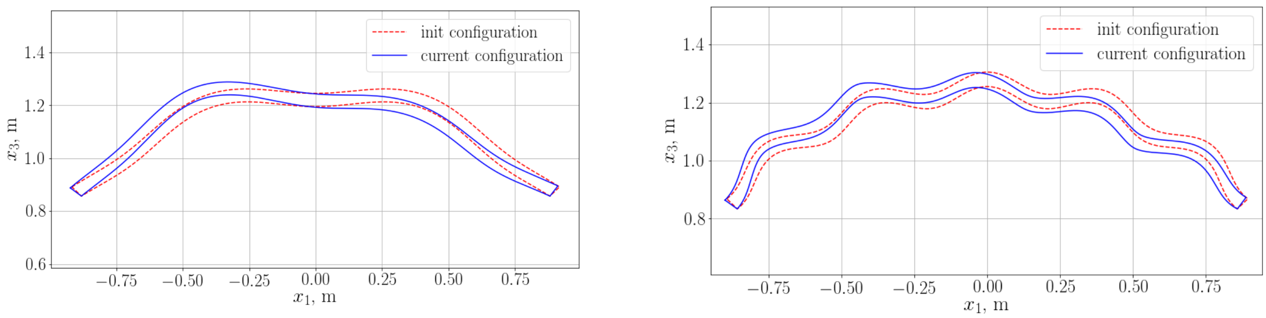


а) *б)*

Рис. 5.5. Залежність найменшої власної частоти ($\omega_{\min}$)

від частоти гофрування (g_v) циліндричної оболонки

На рис. 5.6 зображено перші моди(-) лінійних коливань панелі при різних значення частоти гофрування. Початкова конфігурація оболонки зображена штрих-пунктирною лінією(--). Відзначимо несиметричність вектора переміщень першої моди коливань.

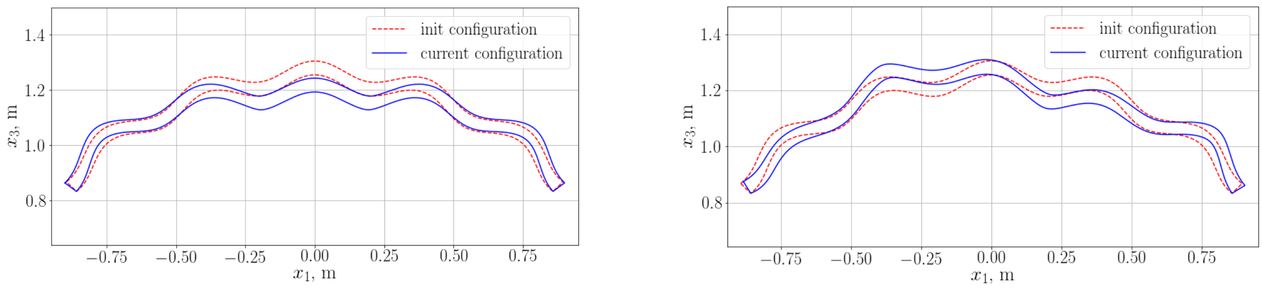


а) б)

Рис. 5.6. Перша мода гофрованої циліндричної оболонки з різними частотами гофрування:

а) $g_v = 10$; б) $g_v = 20$

На рис. 5.7 зображено другу і третю моди лінійних вільних коливань панелі при частоті гофрування $g_v = 20$. Відзначимо рівномірність розподілення вузлових точок коливань вздовж напрямної серединної поверхні циліндричної оболонки.

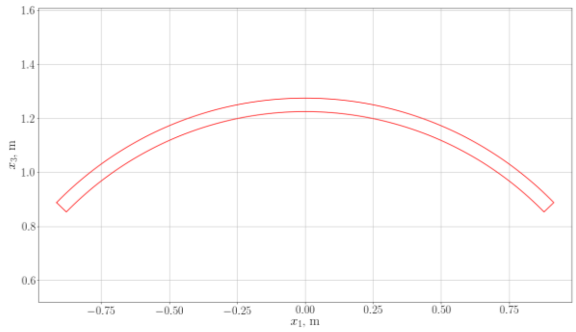


а) б)

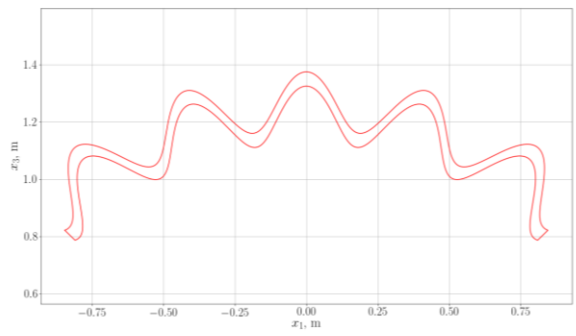
Рис. 5.7. Вигляд гофрованої циліндричної оболонки в різних модах:

а) – друга; б) – третя

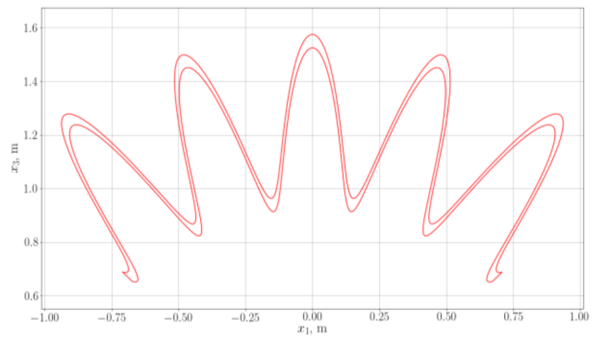
Досліджено вплив амплітуди гофрування g_A на значення мінімальної власної частоти вільних коливань оболонки. На рисунку 5.8 видно, що при $g_A = 0$ циліндрична оболонка є негофрованою.



а)



б)



в)

Рис. 5.8. Вигляд гофрованої циліндричної оболонки при:

а) $g_A = 0$; б) $g_A = 0.1$м; в) $g_A = 0.3$м.

Таблиця 5.2. Залежність найменшої власної частоти ($\omega_{\min}$)

від амплітуди гофрування (g_A) оболонки

g_A, м	0	0,015	0,03	0,06	0,1	0,2	0,25	0,3
$\omega_{\min}$, Гц	101	143	217	377	622	675	552	461

З результатів у таблиці 5.2 та графіка на рис. 5.9 видно, що максимум мінімальної лінійної власної частоти досягається при $g_A = 0.2$ м.

Для обох наведених випадків залежності мінімальної власної частоти від параметрів гофрування характерна наявність інтервалів її зростання та спадання.

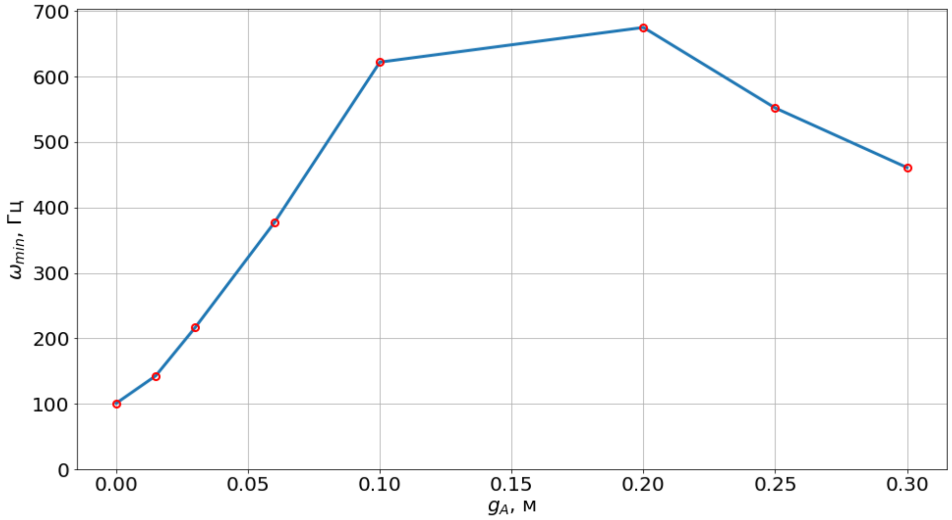


Рис. 5.9. Залежність найменшої власної частоти ($\omega_{\min}$)

від амплітуди гофрування (g_A) циліндричної оболонки

5.2.2 Вільні коливання за геометрично нелінійного деформування

Досліджено вплив параметрів гофрування на вільні коливання гофрованої оболонки за геометрично нелінійного деформування.

У таблиці 5.2 показано вплив частоти гофрування g_v на значення коефіцієнта X з формули (4.4), через який визначається жорсткість оболонки за нелінійних коливань.

Таблиця 5.2. Вплив g_v на значення параметра X з формули (4.4)

g_v	2	6	15	20	50
X	6.6324	7.5217	2.9688	1.2465	0.0728

На рис. 5.8 наведено скелетні криві[16], побудовані за допомогою узагальненого методу збурень, розглянутого у розділі 3, для різних значень частоти гофрування g_v.

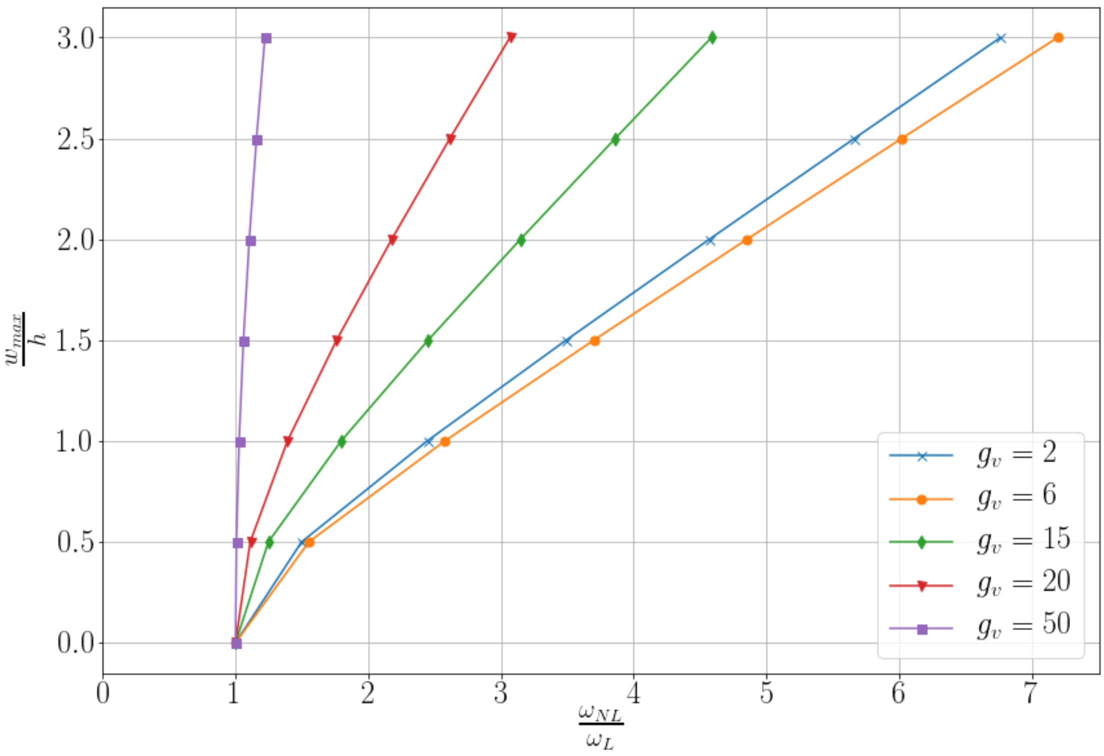


Рис. 5.8. Амплітудно-частотні характеристики гофрованої оболонки для різних значень g_v.

Таблиця 5.3. Вплив g_A на значення параметра X з формули (4.4)

g_A, м	0	0.03	0.1	0.2	0.25	0.3
X	6.5853	1.2465	0.0815	2.4986	7.5377	40.1717

З наведених вище результатів видно, що значення параметра X зменшується при збільшенні частоти гофрування g_v. Тобто, вплив амплітуди вільних коливань за геометрично нелінійного деформування на власну частоту зменшується.

Найбільш жорстка оболонка при $g_v = 6$, як і за лінійних коливань.

Значення параметра X для різних значень амплітуди гофрування g_A оболонки наведено у таблиці 5.3.

На рис. 5.9 показано амплітудно-частотні характеристики, побудовані на основі даних таблиці 5.3.

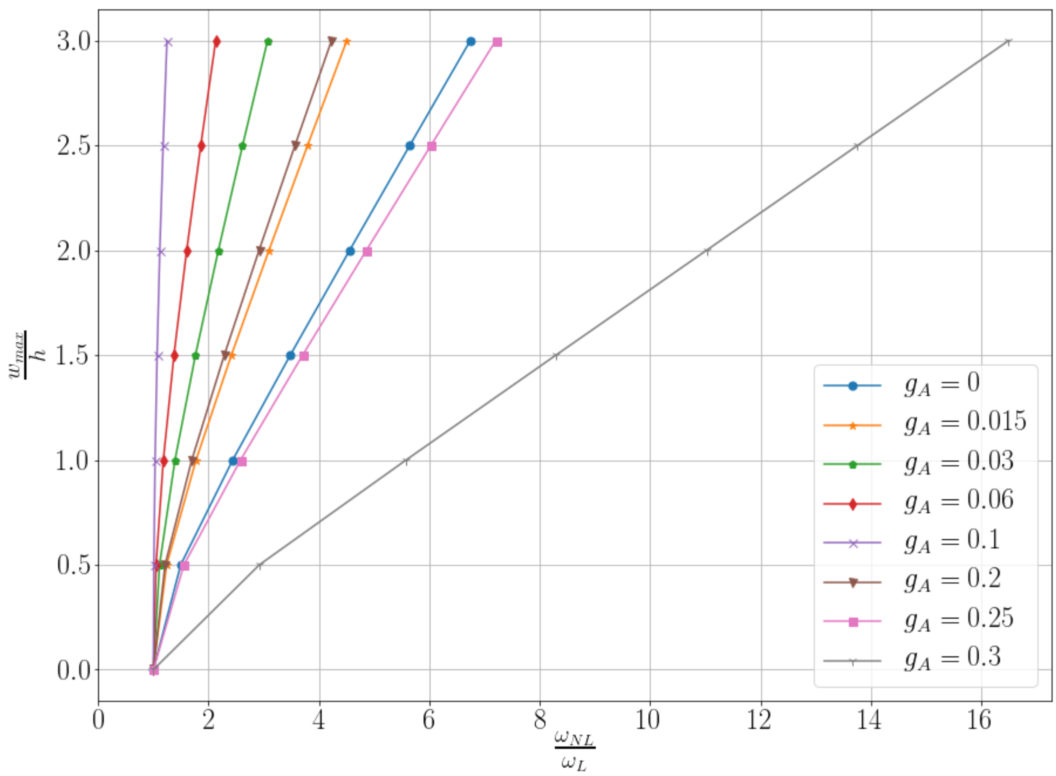


Рис. 5.9. Амплітудно-частотні характеристики гофрованої панелі для різних значень g_A.

Значення параметра X досягає свого мінімуму при амплітуді гофрування $g_A = 0.1$м. Тобто, при такому значені амплітуди гофрування оболонка є найменш жорсткою.

Порівняльний аналіз графіків свідчить про достовірність отриманих результатів за допомогою розробленої методики. Також у даних випадках, як і при лінійних коливаннях, наявні інтервали зростання і спадання жорсткості оболонки.

5.3. Висновки до розділу 5

Отримано вирази для геометричних характеристик серединної поверхні гофрованої оболонки.

У випадку лінійних коливань проаналізовано залежності між власною частотою і параметрами гофрування. Встановлено, що мінімум власної частоти досягається при $g_v = 6$. При $g_v \to \infty$ величина $\omega_{\min}$ прямує до певного значення, більшого за першу власну частоту коливань негофрованої кругової циліндричної оболонки. Виявлено, що максимум власної частоти досягається при $g_v = 200$ та $g_A = 0.2$ м.

Проаналізовано залежності між власною частотою і параметрами гофрування у випадку вільних коливань за геометрично нелінійного деформування. Встановлено характер впливу частоти та амплітуди гофрування на жорсткість розглянутої оболонки.

Основні положення цього розділу викладені у працях автора [32, 70, 163].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне науково-практичне завдання з розвитку методу збурень у поєднанні з методом скінченних елементів стосовно задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та геометрично нелінійного деформування. При цьому отримано наступні результати:

1) Побудовано нову модель геометрично нелінійного деформування видовжених циліндричних оболонок на основі квадратичних апроксимацій компонент вектора переміщень за нормальною координатою до серединної поверхні шару і показано її ефективність.
2) Узагальнено метод збурень для розв'язання систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, які отримуються у задачах визначення амплітудно-частотних характеристик пластин і оболонок за геометрично нелінійного деформування.
3) Розроблено нову методику знаходження розв’язку задачі про вільні коливання за геометрично нелінійного деформування на основі методу скінченних елементів і методу збурень. Показано її ефективність шляхом порівняння з розв'язками, отриманими іншими авторами.
4) Досліджено лінійні та геометрично нелінійні коливання тришарових пластин-смуг, які складаються з двох металевих лицевих та гумового середнього шарів. Встановлено кількісний вплив товщини гумового шару на мінімальну власну частоту за лінійного та геометрично нелінійного деформування, а також визначено співвідношення між товщинами шарів при якому вона досягає максимального значення.
5) Проаналізовано лінійні та геометрично нелінійні коливання видовжених циліндричних панелей. Встановлено характер впливу кривини панелей та типу коливань на їхню жорсткість.
6) Сформульовано постановки задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання гофрованої циліндричної оболонки на основі використання

співвідношень просторових теорій пружності. Встановлено вплив частоти та амплітуди гофрування оболонки на її жорсткість. Виявлено інтервали зростання та спадання першої власної частоти видовженої гофрованої циліндричної панелі за геометрично нелінійного деформування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алумяэ Н.А. О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек. *Прикл. математика и механика*. 1956. 20, № 1. С. 136–139.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва: Машиностроение. 1984. 264 с.
3. Альтенбах И., Альтенбах Х., Наст Э. Моделирование и расчет многослойных оболочек на основе теории типа Тимошенко с 6 степенями свободы. *Механика композит. материалов*. 1993. № 4. С. 500–510.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 448 с.
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат. 1982. 448 с.
6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение. 1980. 375 с.
7. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: Пороги. 2008. 196 с.
8. Вагін П.П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А. Аналіз зсувних оболонок: постановка та коректність варіаційних задач динамікию. *Мат. студії*. 1998. 10, № 2. С. 188–198.
9. Вагін П. П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г. А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статики зсувних оболонок. Мат. *методи та фіз.-мех. поля*. 1999. 42, № 2. С. 53–61.
10. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва: Машиностроение. 1988. 264 с.
11. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Москва: Наука. 1982. 286 с.
12. Векуа И.Н. О метагармонических функциях. *Труды Тбилисского матем. ин-та АН Грузинской ССР*. 12. 1943. С. 105–174.
13. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тбилиси: Мецниереба. 1965. 103 с.
14. Власов В.З. Избранные труды. Москва: Изд-во АН СССР, 1962. Т.1. 528 с.

15. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Ленинград: Гостехтеоретиздат. 1949. 784 с.
16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек . Москва: Наука. 1972. – 432 с.
17. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. *Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела*. Москва: Наука. 1966. С. 116–136.
18. Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. *Прикл. математика и механика*. 1956. 20, № 4. С. 449–474.
19. Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты. *Прикл. математика и механика*. 1970. 34, № 5. С. 870–876.
20. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. Некоторые общие свойства трехмерного напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты симметричного строения. *Тр. 9-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин*. Ленинград: Судостроение. 1975. С. 36–37.
21. Ворович И.И., Лебедев Л.П. Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 4. С. 3–19.
22. Галимов К.З. К построению нелинейной теории тонких оболочек сложной формы с учетом поперечных сдвигов и обжатия. *Исследования по теории пластин и оболочек: В 2-х ч.* Казань: Изд-во Казан. ун-та.1984. Вып. 17. Ч. 1. С. 70–109.
23. Галимов К.З. Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко. *Исследования по теории пластин и оболочек.* Казань: Изд-во Казан. ун-та.1975. С. 92–126
24. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1975. 326 с.
25. Галимов К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1977. 212 с.
26. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г. Основания нелинейной теории оболочек. Казань: Фэн, 1996. 215 с.

27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. Москва: Мир. 1984. 428 с.
28. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука. 1976. 512 с.
29. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва: Наука. 1979. 384 с.
30. Горячко Т.В. Метод збурень для дослідження геометрично нелінійних вільних коливань анізотропних видовжених циліндричних панелей. *Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника*. Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 1. С. 131–132.
31. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Пакош В.С., Якімов Ф.П. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур.* Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 339–341.
32. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених гофрованих циліндричних панелей. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2017. Вип. 15. С. 180–184.
33. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні коливання шаруватих циліндричних панелей за динамічного нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2014. Вип. 12. С. 174–179.
34. Горячко Т.В., Пакош В.С. Метод збурень у задачах про вільні коливання анізотропних видовжених циліндричних панелей за геометрично нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2013. Вип.11. С. 199–204.
35. Горячко Т.В. Дослідження геометрично нелінійного деформування композитних пластин-смуг і видовжених циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача*. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2011. С. 334.
36. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Узагальнений метод збурень стосовно проблеми нелінійних коливань оболонок. *Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та*

інформатики» (26-28 вересня 2018, Львів). Львів: Вид-во Тараса Сороки. 2018. С. 42–46.

37. Горячко Т.В. Дослідження геометрично-нелінійного деформування циліндричної тонкостінної конструкції . *13 Всеукраїнська (8 міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики*. Львів: ЛНУ. 2010. С. 28–29.
38. Горячко Т.В. Лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання композитних пластин-смуг та видовжених циліндричних панелей. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2012».* Львів. 2012. С. 31.
39. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек. *Механика композит. материалов*. 1988. № 2. С. 287–298.
40. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. Думка. 1973. 228 с.
41. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках. *Прикл. механика*. 1996. 32, № 6. С. 3–31.
42. Григоренко Я.М., Бахрамова З.Н., Судавцова Г.К. Численное решение краевых задач о больших прогибах длинной цилиндрической панели. *Прикл. механика*. 1978. 14, № 10. С. 47–51.
43. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.В., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. Думка. 1986. 171 с.
44. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. Москва: Наука. 1992. 336 с.
45. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. Думка. 1981. *Методы расчета оболочек: В 5 т.* / Под общ. ред. акад. А.Н. Гузя. Т. 4. 544 с.
46. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Статика элементов конструкций. К.: «А.С.К. ». 1999. *Механика композитов: В 12 т*. Под общ. ред. акад. А. Н. Гузя. Киев: Наук. Думка. 1993–2003. Т. 8. 379 с.
47. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Захарійченко Л.І. Розв’язування задач і дослідження напруженого стану циліндричних оболонок змінної товщини з

некруговим поперечним перерізом на основі сплайн-апроксимації. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2006. 49, № 1. С. 7–19.

48. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 286 с.
49. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха И.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения. *Прикладная механика*. Т.36 , № 8. 2000. С.3 – 27.
50. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев: Вища шк. 1980. 168 с.
51. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Динамические задачи теории упругости с ограничениями в виде неравенств. *Доп. АН УРСР*. 1991. № 5. С. 47–50.
52. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Том 1: Механика материалов. Киев: Наук. думка, 1982. 368 с.
53. Гузь А.Н., Шульга Н.А., Бабич И.Ю., Космодамианский А.С., Лапуста Ю.Н., Подлипенец А.Н., Рущицкий Я.Я., Сторожев В.И., Чехов В.Н., Шпак В.А. Динамика и устойчивость материалов. К.: Наук. думка «А.С.К.». 1993. *Механика композитов: В 12 т.* Под общ. ред. акад. А.Н. Гузя. Т. 2. 429 с.
54. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПб: Политехн. ун-т. 2006. 167 с.
55. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. Нью-Йорк, 1967. Пер. с англ. А. П. Троицкого и С. В. Соловьёва под ред. докт. техн наук Ю- К. Зарецкого. М., «Недра». 1974. 240 с.
56. Каюк Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. Наукова думка. 1987. 208 с.
57. Каюк Я.Ф. Об аналитическом продолжении решений нелинейных дифференциальных уравнений по параметра. *Украинский математический журнал*. 1967. Т. 19. №. 05. С. 131-138.
58. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике. Москва: Наука. 1974. 832 с.
59. Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. М. Наука. 1968. 260 с

60. Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сплошных сред. *Курс лекций*. Москва: "МАТИ"–РГТУ. 2006. 158 с.
61. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка. *Механика композит. материалов*. 2002. 38, № 5. С. 607–620.
62. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка. *Механика композит. материалов*. 2002. 38, № 6. С. 815–826.
63. Курпа Л.В., Будников Н.А. Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации. Вісник *Донецького національного університету*. Серія А. Природничі науки. 2013. № 1. С. 55–60.
64. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1957. 463 с.
65. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва.: Наука, 1977. 416 с.
66. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва.: Наука, 1980. 512 с.
67. Лурье А.И. Теория упругости. Москва.: Наука, 1970. 940 с.
68. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд., перераб. и доп. Рига: Зинатне. 1980. 572 с.
69. Марчук М.В., Муха І.С., Горячко Т.В. Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *Abstracts of Conference Reports "Dynamical System Modelling and Stability Investigation".* Kyiv, 2011. P. 301.
70. Марчук М.В., Горячко Т.В., Пакош В.С., Харченко В.М. Геометрично нелінійні коливання гофрованих у коловому напрямку циліндричних оболонок. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні: Тези доповідей І Міжнародної науково-технічної конференції*. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. 2018. С. 40-41.

71. Марчук М.В. Геометрично нелінійне поперечне деформування податливої до трансверсального стиснення пластини-смуги. Прикл. проблеми механіки і математики, 2008. Вип. 6. С. 167–170.
72. Марчук М.В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок. Машинознавство, 2005. № 10. С. 9–14.
73. Марчук М.В., Хом'як М.М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. Львів: Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і матуматики ім. Я.С. Підстригача. 2003. 216 с.
74. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та. 1978. 182 с.
75. Муха І.С. Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів. *Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.* 1997. Вип. 46. С. 35–42.
76. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл. *Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат*. 1995. Вип.41. С. 82–91.
77. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат. 1957. 431 с.
78. Муштари Х.М. О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек. *Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностроение.* 1960. №6. С.163-165.
79. Мяченков В.И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода и др. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
80. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Ленинград-Москва: Гостехиздат. 1958. 211 с.
81. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Судпромиздат. 1962. 431 с.
82. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластинки. Москва: Изд-во МГУ. 1969. 695 с.

83. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Пер. с англ. Москва: Мир. 1976. 464 с.
84. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. Думка. 1973. 248 с.
85. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев: Наук. Думка. 1982. 296 с.
86. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. Думка. 1988. 280 с.
87. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Про один новий підхід до побудови теорії оболонок з врахуванням граничних умов на поверхнях. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1978. № 5. С. 441– 444.
88. Пискунов В.Г., Вережко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. Киев. 1986. 178 с.
89. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. Москва: Изд-во Моск. ун-та (МГУ). 1984. 336 с.
90. Постнов В.А., Слезина Н.Г. Учет физической и геометрической нелинейности в задачах изгиба оболочек вращения при использовании метода конечных элементов. *Изв АН СССР. МТТ.* 1976. № 6. С. 78–85.
91. Постнов В.А., Хархурин И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение. 1974. 342 с.
92. Пузырев С.В. Исследование свободных колебаний гофрированных цилиндрических оболочек. *Теорет. и прикл. механика*. 2010. 1, № 47. С. 106–113.
93. Пузырев С.В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением. *Зб. наук. праць Нац. ун-ту кораблебудування* . 2013. № 1. С. 47–53.
94. Раппопорт Р.М. К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды. *Изв. Всесоюзн. НИИ гидротехники им. Б.Е. Веденеева*. 1963. 73. С. 193–04.
95. Рассказов А.О. К теории колебаний многослойных ортотропных пологих оболочек. *Прикладная механика*. 1977. Т. 13, № 8. С. 23–29.

96. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек. *Прикладная механика*. 1976. Т. 12, № 11. С. 50–56.
97. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне. 1988. 284 с.
98. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне. 1974. 310 с.
99. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград: ЛГУ, 1978. 223 с.
100. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. Москва: Стройиздат. 1977. 129 с.
101. Савула Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с резными срединными поверхностями. *Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук*. Казань, 1986. 47 с.
102. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. Київ: НМК ВО. 1993. 100 с.
103. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка. 2004. 221 с.
104. Савула Я.Г., Коссак О.С. Чисельне моделювання вільних коливань пружних тіл з тонким покриттям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1999. 42, № 1. С. 118–124.
105. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Про одне можливе розширення класу оболонок канонічних форм. *Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат*. 1974. Вип. 9. С. 101–105.
106. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. Львов: Вища школа. 1989. 172 с.
107. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів: Вища школа. 1976. 80 с.
108. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов: Изд-во Львов. ун-та. 1981. 88 с.
109. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа. 1982. 479 с.
110. Семенюк Н.П., Бабич И.Ю., Жукова Н.Б. Свободные колебания гофрированных цилиндрических оболочек. *Прикл. механика*. 2005. 41, № 5. С. 58–67.

111. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Москва: Мир. 1977. 349 с.
112. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Пер. с англ. Москва: Мир. 1980. 512 с.
113. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Москва: Физматгиз. 1959. 440 с.
114. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. Москва: Наука. 1971. 807 с.
115. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Физматгиз. 1963. 635 с.
116. Хорошун Л.П. Новая математическая модель неоднородного деформирования композитов. *Механика композит. материалов.* 1995. 31, № 3. С. 310–318.
117. Хорошун Л.П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 1978. 14, № 10. С. 3–21.
118. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ленинград: ЛГУ. Ч. I. 1962. 274 с.
119. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ленинград: ЛГУ. Ч. II. 1964. 395 с.
120. Черных К.Ф. Нелинейная теория изотропно упругих оболочек. *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 2. С. 148–159.
121. Черных К.Ф., Алешков Ю.З., Понятовский В.В., Шамина В.А. Введение в механику сплошных сред. Учебное пособие. Ленинград. Издательство Ленинградского университета, 1984. 280 с.
122. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. New York: Cambridge Univ. Press. 2008. 374 p.
123. Amabili M. Internal resonances in non-linear vibrations of a laminated circular cylindrical shell. *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 69, No. 3. P. 755–770.
124. Amabili M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *Composite Structures.* 2011. Vol. 94, No.1. P. 207-220.
125. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments. *Composite Structures.* 2004. 82(31-32). P. 2587–2605.

126. Amabili M., Reddy J.N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2010. Vol. 45, No. 4. P. 409-418.

127. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2003, monograph. 428 p.

128. Awrejcewicz J., Krys'ko V.A., Vakakis A. F. Nonlinear dynamics of continuous elastic systems. *Springer Science & Business Media*. 2013. 341 p.

129. Awrejcewicz J., Vakakis A.F., Krysko V.A. Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2004, monograph. 341 p.

130. Banerjee J.R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach . *Computers & structures*. 1997. Vol. 63, No. 1. P. 101–103.

131. Banerjee J.R. Explicit analytical expressions for frequency equation and mode shapes of composite beams. *Int. J. Solids and Struct.* 2001. 38, No. 14. P. 2415–2426.

132. Barbero E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials. CRC Press, Taylor & Francis Group. 2008. 331 p.

133. Bathe Klaus-Jurgen. Finite Element Procedures. 2nd edition. Watertown, MA. 2014. 1063 p.

134. Belytschko T., Hughes T.J.R. Computational methods for transient analysis. Amsterdam, North-Holland. *Computational Methods in Mechanics*. 1983. Vol. 1. 523 p.

135. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodar Kh. Nonlinear finite elements for continua and structures. 2nd edition. *John wiley & sons*. 2014. 830 p.

136. Bespalova E.I., Urusova G.P. Identifying the domains of dynamic instability for inhomogeneous shell systems under periodic loads. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, No. 2. P. 186–194.

137. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge university press, 1997. 340 p.

138. Budiansky B., Hutchinson J.W. Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures. *Applied Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1966. P. 636–651.

139. Carlsson L.A., Nordstrand T., Westerlind B.O. On the elastic stiffnesses of corrugated core sandwich. *Journal of Sandwich Structures & Materials.* 2001. Vol. 3, No. 4. P. 253–267.

140. Crisfield M.A., Verhoosel C.V., De Borst R., Remmers J.J.C. Non-linear finite element analysis of solids and structures. New York. 1991.Vol. 1. P. 1–345.

141. Daniel I.M., Ishai O. Title Engineering mechanics of composite materials. New York. 2006. 432 p.

142. Evensen D.A. Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions. *AIAA journal*. 1968. Vol. 6, No. 2. P. 370–372.

143. Evensen D.A. Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells. *Thin-shell structures*. 1974. P. 133–155.

144. Goriachko T., Marchuk M. Influence of Discreteness of the Structure by Thickness on the Amplitude-Frequency Characteristics for Elongated Cylindrical Panels at Geometrically Nonlinear Vibrations. *Proceedings of the V Inter University Conference «Engineer of XXI Century» at the University of Bielsko-Biała (ATH)* (December 04, 2015, Bielsko-Biała, Poland). P. 201–208.

145. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shell with free edges. *International Applied Mechanics*. Vol. 42, No. 12. 2006. P. 1398–1413.

146. Hui W., Huan-ran Y. Natural frequency for rectangular orthotropic corrugated-core sandwich plates with all edges simply-supported. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2001. Vol. 22, No. 9. P. 1019–1027.

147. Jansen E.L. A comparison of analytical–numerical models for nonlinear vibrations of cylindrical shells. *Computers & structures*. 2004. Vol. 82, N 31-32. P. 2647–2658.

148. Jansen E.L. A perturbation method for nonlinear vibrations of imperfect structures: application to cylindrical shell vibrations. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45, No. 3-4. P. 1124–1145.

149. Jansen E.L. Effect of boundary conditions on nonlinear vibration and flutter of laminated cylindrical shells. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2008. Vol. 130, No. 1. P. 011003.

150. Jansen E.L. The effect of geometric imperfections on the vibrations of anisotropic cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2007. Vol. 45, No. 3. P. 274–282.

151. Jansen E.L. The effect of static loading and imperfections on the nonlinear vibrations of laminated cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 315. No. 4-5. P. 1035–1046.

152. Kalnins A., Dym C.L. Vibration: beams, plates, and shells. *Dowden Hutchinson and Ross*. 1976. Vol. 8. 413 p.

153. Khdeir A.A., Reddy J. N. Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches. *International journal of solids and structures*. 1997. Vol. 34. No. 10. P. 1217–1234.

154. Kim Young-Wann. Vibration Analysis of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells. *Transactions of the Korean Soc. for Noise and Vibration Eng*. 2016. 26. P. 851–856.

155. Kleiber M. Incremental finite element modelling in non-linear solid mechanics. *Ellis Horwood*. 1989. 187 p.

156. Koiter W.T. The stability of elastic equilibrium. Stanford univ. CA dept. of aeronautics and astronautics. 1970. 322 p.

157. Kress G., Winkler M. Corrugated laminate homogenization model. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92, No. 3. P. 795–810.

158. Lewandowski R. Free vibration of structures with cubic non-linearity-remarks on amplitude equation and Rayleigh quotient. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2003. 192(13). P. 1681–1709.

159. Librescu L., Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: A survey. *Composite Struct*. 2000. 48. P. 1-17.

160. Liew K.M., Peng L.X., Kitipornchai S. Vibration analysis of corrugated Reissner–Mindlin plates using a mesh-free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2009. Vol. 51, No. 9-10. P. 642–652.

161. Mandal N.K. Experimental studies of quasi-longitudinal waves power flow in corrugated plates. *Journal of sound and vibration.* 2006. Vol. 297. No. 1-2. P. 227-242.

162. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Lesyk O. Method of determination of natural frequencies and forms of nonlinear vibrations for layered cylindrical panels. *Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics* (September 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine). P. 342–349.

163. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Yakimov F. Method for Determination the Finite Number of Natural Frequencies and Amplitudes of Geometrically Nonlinear Vibrations of Elongated Thin-Walled Composite Panels. *XVIII*

International Conference. Mechanics of Composite Materials. Book of Abstracts. Riga, 2014. P. 125.

164. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Geometrically Nonlinear Free Transversal Vibrations of Thin-Walled Elongated Panels with Arbitrary Generatrix. *Vibrations in Physical Systems*. 2014. Vol. 26. P. 153–160.
165. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Natural Frequencies of Layered Elongated Cylindrical Panels for Geometrically Nonlinear Deformation at Discrete Consideration of Components. *Vibrations in Physical Systems*. 2016. Vol. 27. P. 255–264.
166. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V., Lesyk O. Amplitude-frequency characteristics of elongated panels with arbitrary generatrix for geometrically nonlinear vibrations. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра*. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 2. С. 170–171.
167. Marchuk M., Pakosh V., Lesyk O., Hurayewska I. Infuence of Pliability to Transversal Deformations of Shear and Compression on Correlation Frequency from Amplitude for Nonlinear Oscillations of Composite Plates. *Vibrations in Physical Systems*. 2006. Vol.XXII. P. 251-256.
168. Marur S.R. Advances in nonlinear vibration analysis of structures. Part. I. Beams. Sadhana. 2001. 26, No. 3. P. 243 – 249.
169. Mousa Kh.A. Solving the vibration problem of inhomogeneous orthotropic cylindrical shells withhoop-corrugated oval cross section. *C. R. Mecanique* . 343. 2015. P. 482–494.
170. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shell. *Quarterly Appl. Math*. 1957. 14, No. 4. – P. 369–380.
171. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. John Wiley & Sons. 2011. 533 p.
172. Nayfeh A.H. Perturbation methods. John Wiley & Sons. 2008. 426 p.
173. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. John Wiley & Sons. 2008. 720 p.
174. Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and nonlinear structural mechanics. John Wiley & Sons. 2008. 746 p.

175. Qatu M.S. Accurate equations for laminated composite deep thick shells. *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36, No. 19. P. 2917–2941.

176. Rahman T., Jansen E.L., Gürdal Z. Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method. *Nonlinear Dynamics*. 2011. Vol. 66, No. 3. P. 389–401.

177. Rahman T., Jansen E.L., Tiso P.A finite element-based perturbation method for nonlinear free vibration analysis of composite cylindrical shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. Vol. 11, No. 04. P. 717–734.

178. Reddy J.N. An introduction to nonlinear finite element analysis. Oxford University Press. 2004. 488 p.

179. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press, 2004. 835 p.

180. Reddy J.N., Liu C.F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*. 1985. Vol. 23, No. 3. P. 319–330.

181. Rehfield L.W. Large amplitude forced vibrations of elastic structures. *AIAA Journal*. 1974. Vol. 12. No. 3. P. 388-390.

182. Semenyuk N.P., Babich I.Yu., Zhukova N.B. Natural vibrations of corrugated cylindrical shells. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, No. 5. P. 512–519.

183. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational inelasticity. *Springer Science & Business Media.* 2006. Vol. 7. 392 p.

184. Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42, No. 9. P. 1144–1152.

185. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. Third Edition. Marcel Dekker, Inc., New York. 2004. 688 p.

186. Sulym H. Hutsaylyuk V., Pasternak I., Turchyn I. Stress-strain state of an elastic rectangular plate under dynamic load. *Mechanics*. 2013. 19. №. 6. 620-626 pp.

187. Thurnherr C., Pedergnana T., Kress G., Ermanni P. Non-classical vibration behavior of highly anisotropic corrugated laminates. *Composite Structures*. 2017. Vol. 168. P. 84–91.

188. Toorani M.H. Dynamics of the geometrically non-linear analysis of anisotropic laminated cylindrical shells. *International journal of non-linear mechanics*. 2003. Vol. 38, No. 9. P. 1315–1335.
189. Toorani M.H., Lakis A.A. Large amplitude vibrations of anisotropic cylindrical shells. *Computers & structures*. 2004. Vol. 82, No. 23-26. P. 2015-2025.
190. Turner M. J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffiness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Science*. 1956. Vol. 23, No. 9. P. 805–823.
191. Wedel-Heinen J. Vibration of geometrically imperfect beam and shell structures. *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, No. 1. P. 29-47.
192. Zeng He, Guixiang Liu, Wen Jiang, Zheng Huang, Dongliang Zhang. Nonlinear dynamic responses of a corrugated shell structure under uniform Load. *J. Eng. Mech.* 2014. 140. P.1-16.
193. Zhuk Y.A., Senchenkov I.K. Resonance vibrations and dissipative heating of thin-walled laminated elements made of physically nonlinear materials. *International Applied Mechanics*. 2004. 40. №. 7. 794-802 pp.
194. Zhuk Y.A., Guz I.A. Features of plane wave propagation along the layers of a prestrained nanocomposite. *International Applied Mechanics*. 2007. 43. №. 4. 361-379 pp.
195. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method Set. 6th Edition. Butterworth-Heinemann, 2005. 1872 p.

ДОДАТОК

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

1. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Geometrically Nonlinear Free Transversal Vibrations of Thin-Walled Elongated Panels with Arbitrary Generatrix. *Vibrations in Physical Systems*. 2014. Vol. 26. P. 153–160.
2. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. Natural Frequencies of Layered Elongated Cylindrical Panels for Geometrically Nonlinear Deformation at Discrete Consideration of Components. *Vibrations in Physical Systems*. 2016. Vol. 27. P. 255–264.
3. Горячко Т.В., Пакош В.С. Метод збурень у задачах про вільні коливання анізотропних видовжених циліндричних панелей за геометрично нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2013. Вип.11. С. 199–204.
4. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні коливання шаруватих циліндричних панелей за динамічного нелінійного деформування. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2014. Вип. 12. С. 174–179.
5. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Марчук М.В., Пакош В.С. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених гофрованих циліндричних панелей. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2017. Вип. 15. С. 180–184.
6. Goriachko T., Marchuk M. Influence of Discreteness of the Structure by Thickness on the Amplitude-Frequency Characteristics for Elongated Cylindrical Panels at Geometrically Nonlinear Vibrations. *Proceedings of the V Inter University Conference «Engineer of XXI Century» at the University of Bielsko-Biała (ATH)* (December 04, 2015, Bielsko-Biała, Poland). P. 201–208.
7. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Lesyk O. Method of determination of natural frequencies and forms of nonlinear vibrations for layered cylindrical panels. *Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics* (September 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine). P. 342–349.
8. Горячко Т.В. Метод збурень для дослідження геометрично нелінійних вільних коливань анізотропних видовжених циліндричних панелей. *Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника*.

Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 1. С. 131–132.

9. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V. and Yakimov F. Method for Determination the Finite Number of Natural Frequencies and Amplitudes of Geometrically Nonlinear Vibrations of Elongated Thin-Walled Composite Panels. *XVIII International Conference. Mechanics of Composite Materials. Book of Abstracts*. Riga, 2014. P. 125.
10. Горячко Т.В., Лесик О.Ф., Пакош В.С., Якімов Ф.П. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур.* Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 339–341.
11. Марчук М.В., Муха І.С., Горячко Т.В. Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *Abstracts of Conference Reports "Dynamical System Modelling and Stability Investigation".* Kyiv, 2011. P. 301.
12. Горячко Т.В. Лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання композитних пластин-смуг та видовжених циліндричних панелей. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2012».* Львів. 2012. С. 31.
13. Горячко Т.В. Дослідження геометрично нелінійного деформування композитних пластин-смуг і видовжених циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності. *IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача*. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ. 2011. С. 334.
14. Горячко Т.В. Дослідження геометрично-нелінійного деформування циліндричної тонкостінної конструкції . *13 Всеукраїнська (8 міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики*. Львів: ЛНУ. 2010. С. 28–29.
15. Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V., Lesyk O. Amplitude-frequency characteristics of elongated panels with arbitrary generatrix for geometrically nonlinear vibrations. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра*. Ін-т

прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 2. С. 170–171.

16. Марчук М.В., Горячко Т.В., Пакош В.С., Харченко В.М. Геометрично нелінійні коливання гофрованих у коловому напрямку циліндричних оболонок. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні: Тези доповідей І Міжнародної науково-технічної конференції*. Харків: Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. 2018. С. 40–41.
17. Горячко Т.В., Марчук М.В., Пакош В.С. Узагальнений метод збурень стосовно проблеми нелінійних коливань оболонок. *Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики»* (26-28 вересня 2018, Львів). Львів: Вид-во Тараса Сороки. 2018. С. 42–46.

Апробація результатів дисертації: 13-та Всеукраїнська (8-а Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики (Львів, 2010); IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 2011); XV International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Київ, 2011); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2012» (Львів, 2012); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013, 2018); IX Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2014); XVIII International Conference «Mechanics of Composite Materials» (Riga, 2014); V Inter University Conference «Engineer of XXI Century», (Bielsko-Biała, Poland, 2015); 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics (Харків, 2016); І Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2018); XXIV Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», APAMCS-2018 (Львів, 2018).