НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Калиняк Богдан Миколайович

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ЦІЛЬОВІ ТЕРМОНАПРУЖЕНІ СТАНИ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла
прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
Б. М. Калиняк

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради /Андрійчук М. І./

Львів 2023

АНОТАЦІЯ

Калиняк Б.М. **Аналітичне визначення термосилових навантажень, які забезпечують цільові термонапружені стани у неоднорідних тілах**. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2023.

Дисертація стосується проблеми визначення термосилових навантажень, а також характеристик матеріалів неоднорідних тіл, виготовлених, зокрема, з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), для забезпечення у них відсутності напружень або їх цільового розподілу.

Об’єктом дослідження є порожнисті і суцільні неоднорідні циліндр, куля, неоднорідний шар.

Предмет дослідження – математичні моделі, методи термомеханіки для неоднорідних тіл щодо визначення температурних полів і характеристик матеріалів, які забезпечують заданий розподіл термонапружень, зокрема, їх відсутність, а також побудова аналітичних розв’язків відповідних обернених задач термопружності.

Наукова новизна дисертаційного дослідження полягає в тому, що

- адаптовано математичні моделі на основі інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду для встановлення умов відсутності або отримання заданого розподілу напружень у неоднорідних тілах з урахуванням залежності характеристик матеріалів від однієї та двох координат;
- сформульовано клас обернених задач про визначення температурних полів, які спричинюють заданий, зокрема нульовий, розподіл певної компоненти тензора напружень;

- розроблено методики визначення температурних полів та характеристик матеріалів, залежних від однієї та двох координат, які не викликають термонапружень у неоднорідних тілах;
- отримано точні аналітичні розв’язки поставлених обернених задач для двокомпонентних ФГМ, характеристики яких описано моделлю простої суміші;
- побудовано і досліджено розв’язки задач термопружності стосовно забезпечення відсутності термонапружень та заданих компонент тензора напружень у неоднорідних тілах на основі запропонованих методик та алгоритмів.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Результати роботи можуть використовуватись для проєктування матеріалів конструкцій, які широко використовують в умовах перепадів температур, з метою збільшення терміну їх експлуатації, зменшення енергозатрат для їх виготовлення, для перевірки адекватності моделей характеристик ФГМ через характеристики їх складових в широких діапазонах температур. Окремі результати, викладені в дисертації, були використані під час виконання низки госпдоговорів фундаментального та прикладного спрямування.

Робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатку.

У **вступі** подано обґрунтування актуальності теми досліджень, яка обумовлена:

- сучасними тенденціями покращення енергоефективності, які базуються на використанні природних джерел енергії, продовженням терміну служби виробів з матеріалів, виготовлення яких є енергозатратним (плавлення металів, добування сировини, виготовлення і очищення композитних, керамічних матеріалів тощо);
- розвитком технологій виготовлення композиційних матеріалів, зокрема ФГМ;

- наявністю достовірних моделей опису напружено-деформованого стану, викликаного взаємодією полів різної природи.

Висвітлено, мету роботи, завдання, об’єкт, предмети дослідження, наукову новизну, практичне і теоретичне значення.

У **першому** розділі подано огляд і аналіз літературних джерел, які обґрунтовують мету та завдання досліджень.

У **другому** розділі наведено теоретичні основи роботи. За основу взято диференціальні рівняння незв’язаної теорії пружності у напруженнях у тензорному формулюванні в ортогональних криволінійних системах координат. Фізико-механічні характеристики матеріалу та характеристики напруженого стану залежать від однієї координати та дії температурного поля, вплив якого описано доданком у зв’язках між складовими тензора деформацій та напружень.

Відповідні задачі теорії пружності у коваріантній тензорній формі зведено до інтегральних рівнянь Вольтерри з інтегральними умовами або рівняння Фредгольма другого роду відносно фізичних компонент тензора напружень. З них отримано інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, для визначення температурного поля через термомеханічні характеристики неоднорідних матеріалів та силові навантаження, яке призводить до заданого розподілу термонапружень або їх відсутності.

У випадку залежності характеристик матеріалу від двох координат сформульовано задачі відсутності термонапружень у довгому прямокутному брусі та скінченому круговому циліндрі.

У **третьому** розділі отримані аналітичні розв’язки побудованих у другому розділі інтегральних рівнянь, залежних від однієї координати відносно температурних полів, які не викликають термонапружень у тілах простої форми при заданих фізико-механічних характеристиках матеріалу. Встановлені зв’язки між характеристиками матеріалів при заданих умовах нагрівання, які забезпечують відсутність термонапружень. Показано можливість створення таких стаціонарних і нестаціонарних температурних полів за рахунок умов на межі та теплових джерел.

У **четвертому** розділі отримані аналітичні вирази для характеристик матеріалів, які забезпечують відсутність термонапружень при заданих умовах нагрівання у тілах простої форми. Розглянуто числові приклади.

У **п'ятому** розділі отримано аналітичні вирази, які зв'язують температурні поля та характеристики матеріалів при заданих радіальних складових тензора напружень, викликаного температурним полем. Для оцінки значень технічно допустимих термонапружень і умов нагрівання розроблено методику розв'язування інтегральних рівнянь, яка може бути використана для багатошарових неоднорідних і термочутливих у кожному шарі тіл. Показано збіг результатів обчислення температурного поля з рівняння теплопровідності при заданих умовах теплообміну та з рівняння термопружності через механічні характеристики і коефіцієнт лінійного теплового розширення. Запропоновані методики розв'язку інтегральних рівнянь застосовано також до визначення термонапружень в одно- і багатошарових структурах з врахуванням залежності характеристик матеріалів від координат і температури. Розраховано температурні поля, які спричиняють цільовий розподіл колових та сумарних напружень.

У **шостому** розділі встановлено умови відсутності термонапружень у довгому прямокутному брусі, виготовленого з матеріалу, характеристики якого залежать від двох координат. З рівнянь теорії пружності отримані точні аналітичні вирази для класу температурних полів, які не викликають напружень у брусі, через механічні характеристики матеріалів та коефіцієнт лінійного теплового розширення. З вимоги, що ці температурні поля повинні бути розв'язками відповідних класичних задач теплопровідності, встановлено аналітичні зв'язки між характеристиками матеріалів, тепловими та механічними навантаженнями, які забезпечують відсутність термонапружень. Відповідні характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність напружень при допустимих узгоджених умовах нагрівання є розв'язками запропонованих нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, розв'язки яких для випадку характеристик матеріалів, описаних моделлю простої суміші виражаються через функції нормального розподілу Ґауса.

У **сьомому** розділі визначено умови відсутності термонапружень у скінченому циліндрі, характеристики якого залежать від радіальної та поздовжньої координат. Побудовано і розв'язано відповідні нелінійні диференціальні рівняння для визначення температурного поля, яке не створює напружень в ньому з різними узгодженими умовами теплообміну із зовнішнім середовищем. Отримано аналітично функції розподілу характеристик матеріалу в циліндрі при заданих теплових навантаженнях. Проведені обчислення температурних полів, які не викликають термонапружень при заданих теплових навантаженнях на бічній або торцевій поверхнях циліндра.

Ключові слова: пружне неоднорідне тіло, інтегральні рівняння, обернені задачі, характеристики матеріалів залежні від координат і температури, термопружність, функціонально-градієнтні матеріали.

ABSTRACT

Kalynyak B. M. **Analytical determination of thermo-force loading of inhomogeneous bodies to ensure target thermal stress states**.– Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences specialty 01.02.04 “Mechanics of Deformable Solids”. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2023.

The dissertation deals with the determination of heat load of inhomogeneous bodies made of functional-gradient materials (FGM) in order to establish the absence of thermal stresses or their specified components, as well as to determine the characteristics of materials that meet the established conditions.

The object of research is canonical bodies - hollow and solid inhomogeneous cylinder, sphere, and inhomogeneous layer.

The subject of research is the development of mathematical models and methods of classical thermomechanics in inhomogeneous bodies to determine temperature fields and characteristics of materials that ensure the absence of thermal stresses and the installation of specified components of the stress tensor in them, as well as construction of analytical solutions.

The scientific novelty of the dissertation research is that

• new mathematical models based on Fredholm integral equations of the 2nd kind are built to establish the conditions of absence or obtaining a given stress distribution in inhomogeneous bodies, taking into account the dependence of material characteristics on one and two coordinates;

• a class of inverse problems on determining the temperature fields that cause a given, in particular, zero distribution of the stress tensor component is formulated;

• necessary and sufficient conditions for the absence of stresses in inhomogeneous bodies with appropriate stationary and non-stationary thermal fields are formulated;

• developed methods for determining stationary and non-stationary temperature fields and characteristics of materials depending on one and two coordinates that do not cause thermal stresses in bodies;

• the exact analytical solutions of the inverse problems for two-component FGM are obtained, the characteristics of which are described by the model of a simple mixture;

• solutions of a number of specific problems of thermoelasticity concerning maintenance of absence of thermal stresses and the set components of a stress tensor in inhomogeneous bodies on the basis of the offered techniques and algorithms are constructed and investigated.

Theoretical and practical significance of the obtained results. The results can be used to design materials and structures that work in conditions of temperature differences, to increase their service life, save energy for their manufacture, test the results of calculations of stress-strain state of bodies whose properties are described by different models due to the characteristics of their components with different load conditions, to verify the adequacy of the models of FGM characteristics through the characteristics of their components in a wide range of temperatures. Some theoretical and applied results presented in the dissertation were used during the implementation of a number of economic contracts of practical direction.

The work consists of an introduction, seven chapters, conclusions and a list of sources used.

The i**ntroduction** provides a justification for the relevance of the research topic, which is conditioned

• current trends in improving energy efficiency based on the use of natural energy sources, extending the service life of products from materials that are energy-intensive (melting metals, extracting raw materials, manufacturing and cleaning of composite, ceramic materials, etc.);

• high development of technologies for the production of composite materials, in particular FGM;

• the presence of reliable models for describing the stress-strain state caused by the interaction of fields of different nature. The purpose of work, tasks, object, subjects of research, scientific novelty, practical and theoretical value are covered.

The **first** section provides an overview and analysis of literature sources that substantiate the purpose and objectives of research.

The **second** section presents the theoretical foundations of the work. The differential equations of the theory of elasticity in stresses in tensor formulation in orthogonal curvilinear coordinate systems are taken as a basis. Physico-mechanical characteristics of the material and the characteristics of the stress state will be considered to depend on one coordinate and possibly on the action of the external field, which is described by the term in the relationships between the components of the strain and stress tensor.

The thermal stress state model is presented in covariant tensor form. The corresponding problems of the theory of elasticity are reduced to integral equations of Volterra with integral conditions or Fredholm of the second kind. From these equations, the integral Fredholm equations of the second kind are obtained, which determine the form of the temperature field, which leads to the absence of thermal stresses or their given given distribution.

Problems of absence of thermal stresses in a long rectangular beam and an axisymmetric cylinder are formulated, for the case of dependence of material characteristics on two coordinates.Keywords: elastic composite body, layered bodies, integral equations, inverse problems, characteristics of materials depending on coordinates and temperature, thermoelasticity, functional-gradient materials.

In the **third** section we obtain analytical solutions of the integral equations constructed in the second section, which depend on one coordinate with respect to stationary and nonstationary temperature fields, which do not cause thermal stresses in simple bodies with given physical and mechanical characteristics. Relationships have been established between the characteristics of materials under given heating conditions, which ensure the absence of thermal stresses. The possibility of creating such stationary and non-stationary temperature fields due to boundary conditions and heat sources is shown. Numerical examples that allow a temperature difference between surfaces of several hundred degrees are considered.

In the **fourth** section, analytical expressions for the characteristics of materials that ensure the absence of thermal stresses under given heating conditions in bodies of simple shape are obtained. Numerical examples are considered.

In the fifth section, analytical expressions are obtained that relate the temperature fields and characteristics of materials at given radial components of the stress tensor caused by the temperature field. To estimate the values of technically permissible thermal stresses and heating conditions, a method for solving integral equations has been developed, which can be used for multilayer inhomogeneous and thermosensitive bodies in each layer. The convergence of the results of the calculation of the temperature field from the equation of thermal conductivity under given heat exchange conditions and from the equation of thermoelasticity due to mechanical characteristics and the coefficient of linear thermal expansion. The proposed methods for solving integral equations are also applied to the determination of thermal stresses in single and multilayer structures, taking into account the dependence of the characteristics of materials on coordinates and temperature.

The **sixth** section sets out the necessary and sufficient conditions for the absence of thermal stresses in a long rectangular beam made of a material whose characteristics depend on two coordinates. Exact analytical expressions for the class of temperature fields that do not cause stresses in the beam are obtained from the equations of the theory of elasticity due to the mechanical characteristics of materials and the coefficient of linear thermal expansion. Analytical connections between the characteristics of materials, thermal and mechanical loads, which ensure the absence of thermal stresses, have been established on the requirement that these temperature fields should be solutions of the corresponding classical problems of thermal conductivity. Relevant characteristics of materials that ensure the absence of stresses under acceptable agreed heating conditions are solutions of the proposed nonlinear differential equations with partial derivatives, the solutions of which for the case of characteristics of materials drawn by a simple mixture model are expressed through normal Gaussian distribution functions.

The **seventh** section defines the necessary and sufficient conditions for the absence of thermal stresses. The corresponding nonlinear differential equations for the determination of the temperature field, which does not create stresses in the axisymmetric cylinder under different conditions of heat exchange with the external environment, are constructed and solved. The functions of distribution of characteristics of material in the cylinder at the set thermal loadings are analytically received. Calculations of temperature fields that do not cause thermal stresses at given thermal loads on the side or end surfaces of the cylinder are performed.

Key words: elastic inhomogeneous body, integral equations, inverse problems, characteristics of materials depending on coordinates and temperature, thermoelasticity, functional-gradient materials.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у фахових виданнях

1. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2004. Т. 82. № 4. С. 3–9.
2. Попович В.С., Калиняк Б. М. Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2005. Т. 48. № 2. С. 126–136.
3. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2005. Т. 83. № 2. С. 22–30.
4. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 2. С. 79–87.
5. Калиняк Б. М., Яцків І. І. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2009. Вип. 7. С. 142–150.
6. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння змінною верхньою межею динамічної задачі пружності у напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 8. С. 60–69.
7. Шевчук В. А., Калиняк Б. М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покривами. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41.
7. Те саме: Shevchuk V. A., Kalynyak B. M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746–755. https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y.
9. Калиняк Б. М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013.

Т. 56. № 3. С. 141-–147.

8. Те саме: Kalynyak B.M. Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205. No. 5. P. 659–666. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0.
9. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 2. С. 169–186. Те саме: Popovych V. S., Kalynyak B. M. Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders. *Journal of Mathematical Sciences.* 2016. Vol. 215. No. 2. P. 218 – 242. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y.
10. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Визначення температурного поля, що забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідній порожнистій кулі. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2014. Вип. 12. С. 104–111.
11. Калиняк Б. М. Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2015. № 6. С. 46 – 56.
12. Артемюк В. Ю., Калиняк Б.М. Інтегральне рівняння для визначення радіальних напружень у радіально-неоднорідній термочутливій порожнистій кулі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 109–117. Те саме: Artemyuk V. Yu., Kalynyak B. M. Integral equation for the radial stresses in a radially inhomogeneous hollow sphere. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223. No. 2. P. 132 – 144. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3343-2.
13. Калиняк Б. М. Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні термонапруження у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2015. Спецвипуск. С. 97–100.

14. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Характеристики матеріалу неоднорідної вздовж радіуса порожнистої кулі, які забезпечують відсутність у ній радіальних напружень, коли задані теплові навантаження. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2015. Вип. 13. С. 141–148.
15. Горошко В. О., Калиняк Б. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Математичне моделювання і визначення термопружного стану тришарової порожнистої кулі за складного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С.123–132.
16. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2016. Т. 52. № 1. С. 91–97. Те саме: Kalynyak B. M. Attainment of zero radial stresses in inhomogeneous long hollow cylinders by stationary temperature fields. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 1. P. 99 – 107. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9931-3.
17. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі за рахунок неоднорідності матеріалу. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2016. Т. 52. № 2. С. 104–110. Те саме: Kalynyak, B.M. Guaranteeing the absence of radial stresses in a long hollow cylinder by the inhomogeneity of material. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 2. P. 261–268. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9953-x.
18. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59. № 3. С. 28–42. Те саме: Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V., Yasinskyy A.V. Direct and snverse inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 236. No. 1. P. 21–34. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3.
19. Калиняк Б. М. Нестаціонарне температурне поле у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі, яке забезпечує відсутність

напружень. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2017. Вип. 3. С. 67–70.

20. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарової термочутливої нескінченної плити. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2018. Вип. 27. С. 19–27.
21. Гарматій Г. Ю, Калиняк Б. М., Кутнів М. В. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2018. Т. 61. № 4. С. 66–77.
   Те саме: Harmatiy G. Y., Kalynyak B. M., Kutniv M. V. Uncoupled quasistatic problem of thermoelasticity for a two-layer hollow thermally sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. V. 256. P. 439–454.https://doi.org/10.1007/s10958-021-05437-9.
22. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2019. Вип.1. С.66–69.
23. Калиняк Б. М. Стаціонарне температурне поле, яке забезпечує відсутність термонапружень у неоднорідному прямокутному брусі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. Т. 62. №4. С. 172–179. Те саме: Kalynyak B. M. Stationary temperature field ensuring the absence of stresses in an inhomogeneous rectangular beam. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265. No.3. P.551–560. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06070-w.
24. Калиняк Б. М. Температурні поля, які не викликають напружень у неоднорідному осесиметричному порожнистому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2021. Т. 64. № 1. С. 149–160.
25. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Вплив термочутливості матеріалів на термонапружений стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну. Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2022. Т. 58.

№ 3. С. 97–104. Те саме: Harmatiy G.Y., Kalynyak B.M. Influence of thermal sensitivity of materials on the thermal stressed state of a three-layer hollow cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Materials Science*. 2022. Vol. 58. P. 385–394. https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

26. Ma C. C., Tokovyy Yu. V., Kalynyak B.M. Nonhomogeneous solids: Integral equation approach. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Editor: Prof. Richard B. Hetnarski. Springer edition. 2014. Vol. 7. P. 3350 – 3356.
27. Kalynyak B. M., Popovych V. S. Thermal stresses in multi-layer thermal sensitive cylinder at asymptotic thermal conditions. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (Thermal Stresses 2005. Mai 26 – 29, Vienna, Austria). 2005. P.119–122.
28. Shevchuk V., Kalynyak B., Tokovyy Yu. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007. 4–7 June. National Taiwan University of Science and Technology, Taipei, Taiwan). 2007. P. 549–552.
29. Yasinskiy A., Kalynyak B., TokovyyYu., Yuzvyak M. Identification of thermal and thermostressed states at frictional heating via the surface displacements for a two-layer cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007, 4-7 June, National Taiwan University of Science and Technology. Taipei. Taiwan). 2007. P. 567–570.
30. Калиняк Б. М. Вклади температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу у розподіл температури і напружень у довгому шаруватому порожнистому циліндрі при асимптотичному тепловому режимі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф.* (Львів, 26–29 травня 2003 р.). Національна академія наук України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, Львів. 2003. С. 118–121.

31. Kalynyak B., Teslyuk A., Tokovyy Yu. The analysis of elastic and thermoelastic equilibrium of inhomogeneous in radial direction circular cylinders. *Proceedings of the 35-th Solid Mechanics Conference* (Kraków, September 4–8, 2006). 2006. P. 318.
32. Калиняк Б. М. Прості аналітичні вирази для визначення напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2006. С. 198–199.
33. Kushnir R., Yasinskyy A., Kalynyak B. Identification of thernal stressed state in nonhomogeneous thermal sensitive cylindrical bodies using the surface displacements. *Proceedings of the 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)* (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), June 30 – July 5, 2008, Venice, Italy). 2008. 2 pp.
34. Калиняк Б. М., Шевчук В. А. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів. 2008. Т. 1. С. 244–245.
35. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння квазістатичної теорії пружності у напруженнях у неоднорідних тілах простої форми при змішаних граничних умовах *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* /Під заг.ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2009. С. 118–119.
36. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння динамічної теорії пружності в напруженнях у довгому неоднорідному циліндрі. *Сучасні проблеми механіки*. (Львів, грудень 7–9. 2009). 2009. С. 71.
37. Tokovyy Yu., Yasinskyy A., Kalynyak B. An efficient method for analysis of steady-state stresses and optimal heating control in inhomogeneous composites.

The Sixteenth International Conference on Mechanics of Composite Materials: Book of Abstracts. (Riga, Latvia, May 24–28, 2010). Riga: Institute of Polymer Mechanics, 2010. P. 97.

38. Калиняк Б. М. Керування температурними напруженнями і переміщеннями у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Інститут прикладних. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 2. С. 213–214.
39. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* /під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів. 2014. С. 181 – 183.
40. Кушнір Р. М., Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термонапруженого стану багатошарових термочутливих куль. *Матеріали* III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 27–29 серпня 2015 р.) Київ. 2015. С. 45.
41. Калиняк Б. М. Температурні поля і характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки, 27–29 серпня 2015 р.). Київ. 2015. С. 33.
42. Kushnir R. M., Popovych V. S., Kalynyak B. M. Modelling and methods for determination of the thermo-stressed state in the hollow multi-layer thermal sensitive spheres. *International V. Skorobahatko Mathematical Conference*.

Abstracts (August 25–28. 2015. Drohobych, Ukraine), Lviv, 2015. P. 91.

43. Калиняк Б. М, Токовий Ю. В,, Ясінський А. В. Розвиток ідей професора Василя Вігака стосовно розв'язування прямих та обернених задач термомеханіки. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня, 2016 р., Львів.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.39–46. Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

44. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Харченко В. М. Про дослідження термопружного стану довгих термочутливих шаруватих циліндричних тіл. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.263. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.pdf.

45. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі за умов нестаціонарного теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016, С.268. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf.

46. Калиняк Б. М, Шевчук В. А. Методика розрахунку термо¬напруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць /за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24вересня 2016 р., Львів). Інститут

прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.269. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf.

47. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Аналітико-числові методи визначення термопружного стану довгих термочутливих шаруватих порожнистих тіл. Тези конференції «*Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасо-переносу*». (28–30 вересня 2016 р. Дніпро). Дніпропетровський національний університет. Дніпро. 2016. С. 94.

48. Калиняк Б. М. Забезпечення відсутності напружень, викликаних нестаціонарним температурним полем у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі умовами теплообміну. Матеріали конференції (5-а Міжнародна науково-технічна конференція «*Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*». 27–28 жовтня 2016 р., Львів). КІНПАТРІ ЛТД. Львів. 2016. С. 29–31. https://znc.com.ua/ukr/news/2016/201610_konferenz10.pdf.

49. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідних тілах простої форми та деякі способи їх реалізації. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 1. С. 235. https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

50. Грматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Неусталений термопружний стан термочутливої двошарової плити із залежними від поперечної координати характеристиками. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2018, Т. 1. С. 157–158. https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

51. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за

товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. Теорія та практика раціонального проектування, виготов¬лення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї Міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2018. С. 41–42. http://znc.com.ua/ukr/news/2016/201810_konf1.pdf.

52. Калиняк Б. М., Стащук М. Г. Напруження, викликані концентрацією водню у суцільному металевому тілі. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Тези* доповідей (Друга міжнародна науково-технічна конференція пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження). Дніпро 10–12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 163–164.

53. Калиняк Б. М. Необхідні умови відсутності термонапружень у неоднорідному довгому стержні з прямокутним перерізом і можливість їх реалізації. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції /за заг. ред. Р. М. Кушніра і Г. С. Кіта. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України Львів. 2019. Вип. 5. С. 259.

54. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Матеріали* V Міжнародної наукової конференція «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 28–30 серпня 2019 р.). Київ. 2019. сС. 91.

55. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному порожнистому циліндрі скінченної довжини та способи їх реалізації. *Сучасні проблеми термомеханіки* – 2021: збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів (за заг. ред. Р. М. К Кушніра і Ю. В. Токового). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. С. 175–176.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасні конструкції характеризуються дедалі більшим використанням неоднорідних матеріалів, на які одночасно діють різноманітні навантаження. До неоднорідних матеріалів віднесемо також матеріали, які змінюють свої фізико-механічні характеристики під дією зовнішніх полів, наприклад, температурного, електромагнітного тощо. Міцність та термін придатності цих матеріалів залежать від дії зовнішніх факторів, які змінюють їх фізико-механічні характеристики. Прикладами таких факторів є атмосферні впливи, наявність водню, хімічно агресивні середовища. Вплив таких факторів на характеристики матеріалів елементів конструкцій залежить від їх напруженого стану та зовнішніх полів.

Важливою тенденцією розвитку сучасних технологій є також зменшення енергозатрат на виготовлення елементів конструкцій при виробництві матеріалів та власне їх створення. Одним з можливих шляхів вирішення цього завдання є створення матеріалів, оптимальних за складом та характеристиками для забезпечення довговічності конструктивних елементів в умовах їх експлуатації.

Елементи сучасних конструкцій працюють часто в умовах одночасної дії різних факторів та полів, які призводять до залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від дії цих полів. Наприклад, труби, по яких подається пара на турбіни працюють в умовах високих внутрішніх температур пари, тиску, перепаду температури за товщиною. Труби в газо- і нафтопроводах піддаються дії домішок у газі чи нафті. Конструкції на повітрі зазнають хімічного впливу зовнішнього середовища. Дія водню у пристроях для його накопичення, у двигунах внутрішнього згоряння, у місцях контакту з металічними та неметалічними елементами призводить до зміни фізико-механічних характеристик матеріалу, а отже і до зміни ресурсу використання даної конструкції. Вплив згаданих зовнішніх факторів на елементи конструкцій залежить від їх напруженого стану.

Тому розвиток методів визначення напруженого стану у конструкціях, створених з неоднорідних матеріалів, викликаних дією зовнішніх полів є важливим з точки зору виявлення місць можливої активізації дії середовища.

Сучасні технології застосовують дедалі частіше композитні матеріали, зокрема з наперед заданою технологічно зміною фізико-механічних характеристик в тілі. Такі композитні матеріали називають функціонально-градієнтними. Тому важливо дослідити можливість існування станів з відсутністю напружень або наперед заданими напруженнями, викликаних дією зовнішніх полів, у неоднорідних матеріалах, а також вказати можливість їх реалізації.

Задачі щодо визначення умов досягнення станів з відсутністю напружень є оберненими задачами теорії пружності, тобто задачами, в яких за відомим наслідком (відсутність напружень або мінімальні напруження) потрібно визначити параметри зовнішніх полів та характеристик матеріалів, які можуть забезпечувати визначений напружений стан.

Метою роботи є адаптація математичних моделей і методів щодо визначення напружено-деформованого стану, залежного від однієї або двох координат, які дозволяють одночасно використовувати їх для визначення напружень та деформацій, викликаних зовнішнім стаціонарним або нестаціонарним полем та для визначення характеристик поля і матеріалів, які призводять до відсутності напружень або заданих напружень у неоднорідних тілах. Ці моделі застосовано для формулювання прямих та обернених задач та їх розв’язання аналітичними або аналітично-чисельними методами.

Для досягнення мети роботи:

– задачу визначення напружено-деформованого стану, викликаного зовнішнім стаціонарним або нестаціонарними полем для тіла у довільній ортогональній системі координат з врахуванням неоднорідності матеріалу та (або) впливу поля на характеристики матеріалу зведено до інтегральних рівнянь;

– на основі отриманих рівнянь поставлені задачі визначення напружено-деформованого стану одношарових та багатошарових неоднорідних у кожному шарі тіл канонічної форми і задачі отримання заданих напружень або їх відсутності, викликаних додатковим полем;
– визначено умови існування заданих напружено-деформованих станів у неоднорідних тілах;
– розвинуто методику аналітичного та аналітико-чисельного розв'язування згаданих вище поставлених задач;
– досліджено можливість досягнення заданих напружено-деформованих станів викликаних зовнішніми, зокрема, тепловими полями за рахунок умов нагрівання та можливості створення на основі існуючих сьогодні технологій функціонально-градієнтних матеріалів з заданими неоднорідними характеристиками;

Об'єкт дослідження: тіла простої форми (шар, циліндр, куля, брус), виготовлені з неоднорідних, зокрема, функціонально-градієнтних матеріалів, під дією зовнішніх теплових та силових навантажень.

Предмет дослідження: поля температури, напружень, переміщень, деформацій, оптимізація умов на межах та характеристик матеріалів для досягнення заданого напружено-деформованого стану у тілах канонічної форми в рамках незв'язаної теорії термопружності.

Методи досліджень. Як основу використано загальні положення термопружності в неоднорідних тілах. При дослідженні напружено-деформованого стану використано метод зведення відповідних прямих задач до інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерри другого роду. Відповідний формалізм поширено на довільну ортогональну систему координат з використанням апарату тензорного числення. Для отримання точних та наближених розв'язків інтегральних рівнянь використано відомі методи їх розв'язування, а також квадратурні формули. Застосовано моделі подання характеристик функціонально-градієнтних матеріалів через характеристики їх складових.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України: «Моделі та методи прямих і обернених задач для дослідження фізико-механічних процесів у неоднорідних шаруватих структурах із залишковими деформаціями та дефектами» (№ держреєстрації 0106U000592, 2006–2009 рр.), «Математичні моделі та методи дослідження напруженого стану неоднорідних тіл та тіл з покриттями за дії силових і теплових навантажень та наявності дефектів і залишкових деформацій» (№ держреєстрації 0109U008764, 2010–2013 рр.), «Моделювання та оптимізація термомеханічної поведінки структурно неоднорідних тіл за сталого та змінного навантаження» (№ держреєстрації 0113U007685, 2014–2018 рр.).

Частина наукових результатів отримана в рамках інших тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України: «Прямі та обернені задачі теплопровідності і термопружності шаруватих середовищ і композитних конструкцій» (№ держреєстрації 0108U006250, 2008–2009 рр.). Автор – виконавець та відповідальний виконавець тем.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у:

- адаптовано математичні моделі теорії термопружності на основі інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду для встановлення умов забезпечення заданого розподілу термонапружень, зокрема, їх відсутності, у неоднорідних тілах з урахуванням залежності характеристик матеріалів від однієї та двох координат;
- сформульовано клас обернених задач про визначення температурних полів, які спричинюють прогнозований розподіл компоненти тензора напружень;
- сформульовано необхідні та достатні умови відсутності напружень у неоднорідних тілах при відповідних теплових полях та обґрунтовано способи їх забезпечення;

- отримано точні аналітичні розв’язки поставлених обернених задач для двокомпонентних ФГМ, характеристики яких описано моделлю простої суміші;
- побудовано і досліджено розв’язки конкретних задач термопружності стосовно забезпечення відсутності термонапружень у неоднорідних тілах на основі запропонованих методик та алгоритмів.

Вірогідність основних наукових положень та отриманих результатів забезпечується: використанням класичних добре апробованих математичних моделей визначення напружено-деформованого стану, викликаних температурними полями у деформівних тілах; строгістю математичної постановки задач і використання математичних методів для отримання основних рівнянь; перевіркою отриманих результатів шляхом їх підстановки у ключові рівняння; відповідністю висновків та результатів фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне значення отриманих результатів. Підставою для розгляду умов відсутності напружень або отримання заданого розподіл компонент тензора напружень у неоднорідних тілах канонічної форми були:

- задачі про температурні поля в однорідних тілах, які не викликають напружень;
- розвиток технології виготовлення композитних, зокрема функціонально-градієнтних матеріалів;
- наукові дані про вплив напружено-деформованого стану на деструкцію матеріалу конструкцій, які працюють в широких діапазонах температур за рахунок інших чинників;
- енергетичні затрати на виготовлення композитних матеріалів.

Тому результати даної роботи можуть використовуватись для створення матеріалів і конструкцій, які працюють в умовах перепаду температур задля зростання терміну їх експлуатації, а отже економії енергозатрат для їх виготовлення, збільшення терміну експлуатації існуючих конструкцій за рахунок оптимізації взаємодії з зовнішнім середовищем, при тестуванні результатів розрахунків напружено-деформованого стану тіл, характеристики яких описуються різними моделями через характеристики їх складових з різними умовами навантажень.

Оскільки методи, запропоновані в роботі, придатні до неоднорідних і термочутливих тіл, то відкривається можливість перевірки адекватності моделей характеристик матеріалів через їх складові в широких діапазонах температур.

Окремі теоретичні і прикладні результати, викладені в дисертації, були отримані під час виконання низки госпдоговорів практичного спрямування.

Апробація результатів роботи.

Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на Міжнародних наукових конференціях з механіки неоднорідних структур (Львів, 2003, 2006, 2010, 2014, 2019, 2021); International Congress on Thermal Stresses (Відень, Австрія, 2005; Тайпей, Тайвань, 2007); 35-th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006), Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2008, 2013, 2018), WCCM 8 – ECCOMAS 2008 (Венеція, Італія, 2008), «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» (Львів, 2009), 16-th International Conference on Mechanics of Composite Materials (Рига, Латвія, 2010), Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2015, 2017, 2019), International V. Skorobahatko Mathematical Conference (Дрогобич, 2015), Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016), Міжнародних науково-технічних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2016, 2018), Міжнародній конференції «Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу» (Дніпро, 2016), Другій міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (Дніпро, 2019).

У повному обсязі робота доповідалася на семінарах відділу механіки деформівного твердого тіла, об'єднаному семінарі відділів механіки деформівного твердого тіла та термомеханіки, кваліфікаційному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України, спільному засіданні комісій механіки і матеріалознавства Наукового товариства імені Шевченка, наукових семінарах кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, кафедри теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова, кафедри теоретичної і комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації опубліковані у 45 наукових роботах, в тому числі у 25 статтях у журналах і збірниках, які відповідають вимогам ДАК України до фахових видань. Десять статей прореферовані у міжнародних наукометричних базах Scopus і Web of Science. Всього за темою дисертації опубліковано 55 наукових праць. Самостійно опубліковано 11 статей і 14 тез. У працях, опублікованих у співавторстві, автору належать постановки задач, розвиток і реалізація підходів до їх розв'язання, інтерпретація отриманих результатів [5, 10, 12, 14]. У статтях [1, 3, 15] автор брав участь у зведенні відповідних задач термопружності до інтегральних рівнянь, їх розв'язуванні та написанні програм для розрахунку. У працях [2, 18, 20–21, 25–28, 31, 40, 42–44, 47, 50] авторові належить частина, яка стосується визначення напружено-деформованого стану та оптимізації характеристик матеріалу; у працях [7, 34, 46] – аналіз напруженого стану тонких неоднорідних покриттів, отриманого з допомогою запропонованого розв'язку інтегральних рівнянь та іншими методами; у праці [9] – отримання розв'язків інтегральних рівнянь; у працях [29, 33, 37] – адаптація відповідних інтегральних рівнянь до поставлених задач; у роботі [52] – застосування методу безпосереднього інтегрування рівнянь теорії пружності до розрахунку напружень, викликаних концентрацією водню.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, які містять 107 рисунків та 23 таблиці, висновків, переліку використаних джерел із 382 найменувань, двох додатків. Загальний обсяг роботи становить 345 сторінок. Обсяг основного тексту – 264 сторінки.

РОЗДІЛ 1

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

1.1. Технології виготовлення неоднорідних матеріалів

Одним з чинників, який обумовив формулювання завдань дисертаційної роботи, є розвиток виробництва та застосування композитних, зокрема функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) у різних ділянках людської діяльності. ФГМ – це порівняно новий клас матеріалів, у яких складники або мікроструктури неперервно змінюються в одному або кількох просторових напрямках, що призводить до поступової зміни властивостей. У працях [24, 235, 239, 277, 283, 291, 299, 301, 307, 315, 316, 336, 337] наведено огляд технологій виготовлення композитів та ФГМ. Ці технології різні автори класифікують по різному.

Класифікація технологій виготовлення ФГМ металокерамічного типу на основі агрегатного стану складових у процесі виготовлення подана в працях [298, 315]. Відповідно до цих праць технологічні процеси виготовлення ФГМ ділять на процеси твердого, рідкого та газоподібного стану.

До процесів твердого стану належать порошкова металургія, дифузійне з’єднання, спікання іскровою плазмою.

До процесів рідкого стану належать інфільтрація, осаджування (зокрема осаджування з хімічного розчину, електрофоретичне осаджування, лазерне осаджування), відцентрове лиття, контрольоване наповнення ливарних форм, зокрема, лиття під тиском, гелеве лиття, шлікерне лиття, спрямоване затвердіння, електрохімічна градація, горіння.

Можливими процесами газоподібного стану є нанесення парою, нанесення спреєм, електронанесення, лазерне нанесення, процеси поверхневої реакції, хімічне випаровування/інфільтрація випарів, газотермічне напилення.

Поширені також адитивні технології виробництва ФГМ. Це [165] «процес з'єднання матеріалів для створення об'єктів заданими тривимірними цифровими моделями, зазвичай шар за шаром, на відміну від субтрактивних технологічних процесів». У працях [165, 166, 268, 381] подано огляд адитивних технологій, зокрема таких, як витискування матеріалу, розбризкування основного матеріалу, розбризкування в'яжучого матеріалу, з'єднання листових матеріалів, фотополімеризація у ванні, розплавлення порошкового матеріалу в наперед сформованому шарі, безпосереднє підведення енергії у місце побудови. Там же розглянуто поєднання цих технологій з 3D друком. З цих робіт видно, що кожен зі згаданих технологічних процесів є не до кінця розв'язаною науково-технічною проблемою, над вирішенням якої працюють цілі інститути та виробничі центри. У монографії [149] розглянуто проблеми виготовлення ФГМ сучасними методами імпульсного впливу електричного струму, лазерного випромінювання або плазмових потоків, тісно пов'язаними зі спіканням порошків.

1.2. Математичні моделі термонапруженого стану у неоднорідних і термочутливих тілах при дії полів різної природи

У цьому пункті розглянемо літературні джерела, які відображають моделі напруженого стану у пружних неоднорідних тілах, які стосуються:

- визначення напруженого стану у неоднорідних тілах у полях різноманітної природи;
- керування напруженим станом (отримання або відтворення заданого напруженого стану за рахунок інших параметрів, які наявні в моделі), тобто огляд обернених задач з точки зору причинно-наслідкових зв'язків;

– методів розв'язування відповідних задач теорії пружності.

Основою подальших досліджень будуть моделі класичної теорії пружності відповідно узагальнені стосовно неоднорідних тіл. Відзначимо, що неоднорідність характеристик матеріалів може бути природною або викликаною, створеною дією додаткового поля, зокрема, температурного.

Теорія пружності бере початок з праць Нав'є, Пуассона, Сен-Венана, Коші з початку 19 століття. Історія розвитку подана в працях [209, 343, 358]. У перших дослідженнях з теорії пружності характеристики матеріалів вважали постійними. Це припущення використовували досить довго і отримані результати розрахунку напруженого стану різноманітних конструкцій на основі таких моделей успішно застосовують до сьогоднішнього дня. Пізніше практичне використання та виготовлення елементів конструкцій, моделювання земної кори призвело до необхідності враховувати залежності характеристик матеріалу від координат (неоднорідні матеріали) та одночасного впливу полів різної природи (силових, теплових, електричних тощо) та інших навантажень.

1.2.1. Математичні моделі термонапруженого стану

Розв'язування згаданих задач базується на математичних моделях суцільного середовища, які враховують взаємодію полів різної фізичної природи. Такі підходи висвітлені у працях Я.Й. Бурака, О.Р. Гачкевича, Я.М. Григоренка, В.Т. Грінченка, В.Г. Карнаухова, І.Ф. Киричока, Ю.М. Коляна, В.В. Лободи, Б.П. Победрі, І.А. Рябцева, І.К. Сенченкова, Л.І. Сєдова, М.Г. Стащука, А.Ф. Улітка, В.Ф. Чекуріна, О. П. Червінко, Ю.М. Шевченка, М.О. Шульги, Я.С. Підстригача, B. Boley, A. Eringen, E. Melan, W. Nowacki, H. Parcus, J. Weiner та інших [18, 22, 41, 42, 55, 56, 76, 120, 137, 148, 157, 158, 169, 176, 200, 201, 204, 206, 212, 221, 222, 224, 255]. В цих роботах подані моделі напружено-деформованого стану в тілах різної форми з врахуванням одночасної дії зовнішніх усталених і неусталених полів різної фізичної природи, а також електрохімічної взаємодії середовища з металом внаслідок впливу механічних напружень. Зокрема, наведено моделі термомеханіки неоднорідних елементів конструкцій з врахуванням намагнечуваних електропровідних, напівпровідникових, п'єзоелектричних, в'язкопружних, поляризаційних та інших характеристик матеріалів, з яких виготовлені ці елементи.

1.2.2. Моделі неоднорідних тіл

Математичні моделі та методи визначення і дослідження поведінки однорідних, неоднорідних, термочутливих, контактно взаємодіючих тіл та оболонок в умовах пружного та в'язкопружнопластичного деформування матеріалу розглянуті в працях Д.В. Акімова, В.З.Грищака та інших [1, 2], О.Є. Андрейківа [5, 6], М.О. Бабешка [221], І.А. Біргера [14], Я.Й. Бурака [22, 23], А.Т. Василенка [48, 49], В.М. Вігака [29, 30, 32], О.Р. Гачкевича [23, 44], Я.М. Григоренка [48, 49], О.Я. Григоренка [47], Д.В. Гриліцького [51, 52], В.Т. Грінченка [53, 54], В.С. Гудрамовича [59, 60, 61, 151], О.М. Гузя [62 – 64], М.І. Дмитріва [141], Я.О. Жука [344, 382], С.О. Калоєрова [107, 108], В.Г. Карнаухова [110 – 112, 344], Г.С. Кіта [115, 116], М.І. Клименка і ін. [117], А.Д. Коваленка [К091], В.І. Козлова [110, 153], Ю.М. Коляна [120], Р.М. Кушніра [124, 128, 129, 133, 295, 296, 297], О.В. Максимука [140], Р.М. Мартиняка [141], В.В. Мелешка [53], В.А. Мерзлякова [309], В.В.Михаськіва [150, 156], І.О. Мотовиловця [152, 153], Р. С. Мусія [41, 154], Ю.М.Неміша [63], М.М. Николишина [133], В.А. Осадчука [114, 133], Я.С. Підстригача [167, 178], Й.З. Піскозуба [207], Б.Є. Победрі [169], Ю.З. Повстенка [179], В.С. Поповича [295, 126, 332], Ю.С. Постольника [187, 188], І.О. Прусова [192], Б.В. Процюка [297, 130, 189, 190], В.Л. Рвачова [194], К.М. Русинка [195], Я.Я. Рущицького [196], М.П. Саврука [197], Я.Г. Савули [198], В.Г. Савченка [222], І.Т. Селєзова [203], І.К. Сенченкова [344], М. Г. Стащука [140], Г.Т. Сулима [16, 207], Р.Г. Терехова [221], Р.Ф. Терлецького [23], Ю.В. Токового [32, 366, 380], А.Ф. Улітка [54], Л.А. Фільштинського [213, 214], М.В.Хая [115], Л.П. Хорошуна [216], В.Ф. Чекуріна [22], Р.М. Швеця [180], В.П. Шевченка [220], Ю.М. Шевченка [221, 222], П.Р. Шевчука [181], Г.А.Шинкаренка [198], А.В.Ясінського [380], М.Юзвяка [380] B. Boley [17], R.S. Dhaliwal [250], A. El-Naggar й інших [254], K.P. Ghadle [266], C. Hwu [284], E. Melan [148], W. Olszak [323], W. Nowacki [157, 158], H. Parcus [148], Y. Shulman [303], J. Weiner [17] та інших науковців. Цікавими є праці [250, 303], в яких у задачах термопружності враховано скінченну швидкість поширення тепла в анізотропних тілах та час, потрібний для зміни потоку тепла і ефект зв’язку між температурою та швидкістю деформації, що призводить до зв’язаних гіперболічних рівнянь.

1.2.3. Математичні моделі ФГМ та композитів

Значний інтерес до прикладних та теоретичних досліджень композитних структурно неоднорідних тіл зумовлений розвитком шести основних напрямів технологій: нанотехнології, біомеханіка, сенсорні технології, енергоощадність, виготовлення високотехнологічних матеріалів (high-performance materials), а також паливних елементів [377]. Огляд публікацій до 2010 року щодо досліджень напруженого стану тіл із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) поданий у праці [166]. Ретельний огляд літератури, пов’язаної з отриманням розв’язків задач теорії пружності, залежних від трьох координат поданий у [357].

Обширний аналіз робіт, пов’язаний зі структурною реакцією конструкцій, виготовлених з ФГМ, проведено у [275]. Основна увага приділена характеристикам пластин/оболонок з ФГМ при дії термоелектромеханічних навантажень з різними умовами на межах та характеристиками навколишнього середовища. Звернено увагу також на різноманітні технології виготовлення ФГМ, а також на аналіз майбутніх напрямків досліджень, які необхідні для належного впровадження цих матеріалів у проектування елементів конструкцій.

З огляду на значне збільшення дослідницької активності щодо ФГМ за останні кілька років, праця [285] є спробою виділити найактуальнішу тематику і публікації, які стосуються ФГМ. Подано критичний огляд досліджень термопружного та вібраційного аналізу функціонально-градієнтних плит з акцентом на останніх роботах, опублікованих з 1998 року. Огляд, стосується проблем деформації, напружень, коливань та стабільності пластин, виготовлених з ФГМ. У висновках вказано найважливіші ділянки майбутніх досліджень для успішного впровадження ФГМ у проектування конструкцій.

Задачі визначення термонапруженого стану та залишкових напружень у тілах канонічної форми, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів з врахуванням та без врахування термочутливості розглянуті в працях [141, 229, 230, 237,244, 243, 251, 275, 285, 294, 305, 306, 299, 320, 321, 324, 333, 338, 339, 345, 346, 350, 352, 372].

У цих працях досліджено гіперболічний закон теплопровідності у порожнистих кулі та нескінченно довгому циліндрі, виготовленому з ФГМ та отримано напіваналітичний розв’язок відповідних задач теплопровідності. Вважали, що характеристики ФГМ постійно змінюються вздовж радіального напрямку за степеневим законом. Показано, що застосування ФГМ в умовах високих температур для забезпечення плавного переходу від одного матеріалу до іншого може зменшити теплові напруження, залишкові напруження та фактори концентрації напружень. Проведено дослідження і аналіз теплопередачі та перехідних температурних напружень у двовимірних ФГМ на основі методу скінченних елементів з застосуванням системи ABAQUS (програмний продукт для аналізу різних об’єктів методом скінчених елементів) [227, 228, 233]. Підпрограми розроблені в ABAQUS для вирішення градації характеристик матеріалу в межах скінченого елемента. Визначено оптимальні скінчені елементи для інженерного аналізу.

Проведено термомеханічний аналіз виготовлених з ФГМ порожнистих круглих циліндрів під дією осесиметричних механічних та нестаціонарних теплових навантажень. Термомеханічні властивості ФГМ не залежать від температури і змінюються в радіальному напрямку циліндра. Як приклад розглянуто ФГМ молібден/муліт з характеристиками матеріалу описаними експоненціальною функцією [345]. У [346] отримано аналітичний розв'язок для поперечно ізотропного, термопружного товстостінного порожнистого циліндра (або диска) під дією джерела тепла. Для моделювання проблеми використана лінійна теорія узагальненої термопружності (модель Лорда – Шульмана [303]) з припущеннями, що жорсткість матеріалу та теплопровідність змінюються лише вздовж радіальної координати.

У працях [352, 357] подано всебічний огляд різних теоретичних моделей для прогнозування глобальних реакцій плит та оболонок, виготовлених з ФГМ при механічних та теплових навантаженнях і вичерпний огляд різних методів, що застосовуються для вивчення статичної, динамічної та стабільної поведінки пластин. Розглянуто як аналітичні, так і числові методи. Обговорено вплив зміни характеристик матеріалу по товщині, тип навантаження, умови на межах, вплив кутів, відношення ширини до товщини та вплив нелінійних ефектів на термопружну поведінку пластин. Основною метою цих праць є задоволення інтересів дослідників та інженерів, які вже задіяні в аналізі та проектуванні конструкцій ФГМ. Серед дослідницьких публікацій, що стосуються структур ФГМ, бракує досліджень у галузі оптимізації проектування.

Праці [299, 372] стосуються дослідження покриттів, виготовлених з ФГМ. Досліджена числовими методами динамічна зв'язана задача термопружності для системи "покриття-підкладка". Подано ряд моделей термопружної деформації системи "покриття-підкладка" з термомеханічними характеристиками, які можуть змінюватися як постійно, так і періодично. Для розв'язання цих задач використано варіаційний принцип зв'язаної термопружності, просторове перетворення Лапласа та гіпотези щодо розподілу температури та переміщень. Обернене перетворення Лапласа реалізоване методом Дурбіна [253]. Розрахунки проводились на основі запропонованих спрощених моделей та методу скінчених елементів. Подано також огляд літератури щодо використання тонких покриттів з ФГМ для збільшення термоопору елементів конструкцій, які працюють в умовах теплового удару. Описані основні методи термічного напилення, що застосовуються для виготовлення функціонально градієнтних покриттів. Розглянуто такі властивості функціональних покриттів: і) механічні (адгезія, в'язкість, твердість); (ii) фізичні (пористість, теплопровідність і дифузійність, термічне розширення, фотокаталітична активність); (iii) біоактивні та імітацію корозії. Нарешті, обговорено деякі майбутні можливі застосування функціональних термонапилених покриттів, наприклад, для покриття полімерних підкладок або використання дешевої технології методу розпилення холодного газу низького тиску замість дорогої технології вакуумного плазмового напилення для отримання захисних покриттів.

В працях [58, 273] отримано наближені аналітичні розв’язки для вимушених нелінійних коливань пологих оболонок, що складаються з функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ) змінної в часі товщини, на основі гібридного асимптотичного підходу з використанням методів збурень та фазових інтегралів (методу ВКБ).

Моделі, які описують характеристики композитних матеріалів, зокрема, ФГМ через характеристики їх складових розглянуто у [57, 276, 277, 286, 109, 142, 310, 311, 338, 339, 340, 341]. У цих працях наведено огляд проблем, пов’язаних з визначенням термонапруженого стану у ФГМ. Відзначено два підходи до моделювання характеристик ФГМ: а) макроскопічний підхід через подання характеристик матеріалу як функції заданих концентрацій його складових; б) мікромеханічний підхід, коли ФГМ охарактеризовано переходом від дисперсійної фази до альтернативної структури із мережевою структурою між ними з врахуванням або ні міжчастинкової взаємодії. Побудовано варіант структурної 3D-моделі для визначення пружних характеристик і температурного розширення армованого композитного шару. Встановлено, що уточнені формули повороту для коефіцієнтів матриці жорсткості залежать як від кута укладання волокон, так і від модуля Юнґа та добутків коефіцієнтів Пуассона в трансверсальному напрямі. Виявлено, що за симетричного перехресного армування в межах двошарової моделі композит є ортотропним матеріалом, для якого встановлені всі пружні константи, що дає змогу використовувати їх у скінченно-елементному аналізі. Проведено комплексний огляд математичних моделей композитів, зокрема і характеристик анізотропних та ізотропних гетерогенних багатофазних композитів. Описані моделі Гашіна, простої суміші, Морі-Танака й інших. Запропоновано моделі механічних властивостей армованих гумових та полімерних матеріалів пакувального призначення. Важливе місце займає монографія [340], в якій подані основні праці доктора Паґано, що стосуються мікро- та макромеханічного опису термонапруженого стану композитів, зокрема волокнистих та ламінатів, зв’язку між математичними та фізичними характеристиками напруженого стану. Розглянуто зв’язки між експериментальними даними і теоретичними обчисленнями.

Задачі теорії пружності розв’язувались різноманітними методами. З математичної точки зору простішими задачами є задачі в нескінчених областях, заповненими однорідним матеріалом зі сталими характеристиками, тому що диференціальні рівняння, які описують напружений стан є або зі сталими коефіцієнтами або з коефіцієнтами залежними від координат за рахунок врахування метрики простору. Крім того при згаданих припущеннях у нескінченних областях застосовні інтегральні перетворення, які дозволяють суттєво спростити розв’язування відповідних систем диференціальних рівнянь. Похідні в нескінченних областях існують всюди, а тому нема потреби узгоджувати умови на границі з відповідними рівняннями. Застосування класичних математичних моделей до тіл скінчених розмірів призводить до задання крайових умов, які потрібно узгодити [193, 208], а також до певних обмежень на саму поверхню задля можливості отримати розв’язок задачі. Тому кількість аналітичних точних розв’язків задач теорії пружності різко зменшується з розширенням області застосування відповідних математичних моделей до анізотропних, неперервно неоднорідних, кусково-неоднорідних тіл, до врахування залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від дії зовнішніх полів. Це обумовлено також тим, що відповідні рівняння стають або нелінійними, або зі змінними коефіцієнтами та недостатньою кількістю достовірних експериментальних даних щодо фізико-механічних характеристик неоднорідного матеріалу та їх залежностей від врахування дії фізико-механічних полів.

Розвиток обчислювальної техніки призвів до посиленого зацікавлення та подальшого розвитку методу інтегральних рівнянь у задачах і проблемах фізики суцільного середовища. Причиною такого зацікавлення останнім часом є, мабуть, факт, що проблема зводиться до інтегрального рівняння або розв’язок подається через інтеграли, в яких залежність від координат і можливо часу знаходиться у підінтегральній функції або ядрі інтегрального рівняння. При такому поданні важко без достатніх обчислювальних потужностей виявити якісні закономірності та будувати відповідні графіки залежностей від координат.

Метод інтегральних рівнянь полягає у зведенні відповідних задач теорії пружності для однорідних та неоднорідних тіл до регулярних або сингулярних інтегральних рівнянь. Теоретична основа для такого підходу тягнеться від часу виникнення теорії інтегральних рівнянь та дослідження їх зв’язку з задачами для диференціальних рівнянь [138, 215, 256, 259]. Задачі теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл з залежністю напруженого стану від однієї координати було розв’язано у працях [164, 246, 261 – 264, 300, 325 – 327].

У роботах В.М. Вігака та його колег [31 – 33, 210, 211, 380] даний підхід було систематизовано та поширено на випадок плоскої осесиметричної задачі для циліндрично-ортотропного радіально-неоднорідного та термочутливого циліндра й тонкого диска з використанням методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги в напруженнях, які не містять залежностей від пружних властивостей матеріалу. У працях [359, 361, 364] цей підхід було поширено для одно-, дво-, і навіть в поодиноких випадках тривимірних областей. Відповідні задачі теорії пружності для неоднорідних вздовж однієї координати областей також з врахуванням анізотропії було зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма або Вольтерри з інтегральними умовами [364, 365, 380]. Цей метод застосований до обернених задач термопружості.

Переліки літературних джерел середини двацятого століття стосовно визначення напружень і деформацій у задачах теорії пружності, термопружності та пластичності, подані [121 – 123].

1.2.4. Обернені задачі. Оптимізація

За даними [312] питома вага наукових теорій та засобів моделювання прогресивних матеріалів у загальному процесі розробки та виробництва за десятибальною шкалою складає 5–8 балів, тобто, чинить істотний вплив. Такі засоби моделювання потребують розв’язання обернених задач (отримати задані властивості з використанням відомих та новостворених математичних моделей).

Проблеми оптимізації у композиційних та функціонально-градієнтних матеріалах та класифікація оптимізаційних задач подані в оглядах [318, 319].

Відповідно до цієї класифікації, яка стосується ознак цільових функцій, змінних та обмежень, задачі оптимізації композитних та, зокрема, функціонально-градієнтних матеріалів можна поділити на

А. проблеми оптимізації на основі спроб, помилок та функцій. Спроби та помилки – це процес, при якому вплив параметрів конструкції на цілі не діагностується. З іншого боку, в деяких випадках існує очевидне формулювання, що визначає кореляцію між конструктивними змінними та цільовими функціями. Такі проблеми називаються функціональними задачами оптимізації.

Б. Однонаправлені та різноспрямовані проблеми оптимізації. Ця категорія пов'язана з кількістю змінних проєкту. У випадку однієї змінної, проєктування проблема називається одновимірною задачею оптимізації, тоді як багатонаправлені задачі мають справу з кількома змінними конструкції.

В. Дискретні та неперервні проблеми оптимізації. Ця класифікація базується на якості змінних конструкції. Коли конструктивні змінні дискретні, проблема оптимізації також позначається як дискретна. Наприклад, кількість шарів є прикладом дискретної змінної конструкції. На відміну від цього, у задачах неперервної оптимізації змінні проектування є неперервними.

Г. Обмежені та необмежені проблеми оптимізації. У деяких підходах оптимізації, поряд із зміною змінних проєкту, повинні бути задоволені певні обмеження. Вони називаються обмеженими проблемами оптимізації. Навпаки, у процедурі необмежених проблем оптимізації конструктивні змінні можуть вільно змінюватися без будь-яких обмежень.

Ґ. Проблеми оптимізації локального пошуку та випадкового пошуку. У задачах локального пошуку процес оптимізації починається в певній точці, яка була діагностована математично, щоб отримати кращі та точніші результати. Ці методи мають високий коефіцієнт збіжності. Однак існує ймовірність прорахунку навколо точок екстремуму на відміну від випадкових проблем пошуку, де кращі результати отримуються за можливими закономірностями. Тому передбачити ефективність алгоритму складно. Коефіцієнт збіжності цих методів нижчий, ніж проблеми локального пошуку, тоді як шанс отримати глобальну оптимуму вищий.

Д. Одноцільові та багатоцільові завдання оптимізації. Ця відмінна категоризація пов'язана з кількістю цільових функцій, коли для оцінки оптимальних результатів існує лише один критерій або цільова функція. Однак у випадку багатоцільової оптимізації декілька цільових функцій часто конфліктують між собою, і є кілька оптимальних результатів щодо пріоритетності цілей. Цей набір оптимальних результатів називається фронтом Парето.

Е. Проблеми статичної та динамічної оптимізації. Якщо процедура оптимізації залежить від часу, а оптимальність змінюється через певний проміжок часу, це відоме як динамічна проблема оптимізації на відміну від статичного типу, коли оптимальна конструкція не покладається на час.

Усі вищезазначені особливості задач оптимізації виявились у різних типах алгоритмів, класифікованих за трьома основними категоріями:

I. Сліпий алгоритм пошуку: ці алгоритми, здатні лише диференціювати цілі та отримати деякі альтернативні результати, потребують широкого простору пошуку. Це призводить до недоліку низького рівня збіжності.

II. Евристичні алгоритми пошуку: основна стратегія, яка використовується в цих алгоритмах полягає у виборі вузла, який є більш імовірним для досягнення оптимальних результатів. Ця функція робить ці методи більш практичними, ніж алгоритми сліпого пошуку. Метод, заснований на градієнті (GBM), є найпопулярнішим евристичним типом.

III. Мета-евристичні алгоритми: у більшості випадків виникає реальна проблема оптимізації з численними ефективними параметрами, так що розгляд усіх їх призводить до точного оптимального результату за необґрунтовано тривалий проміжок часу. Таким чином, для компромісу між точністю результатів та обчислювальними витратами було запропоновано мета-евристичні алгоритми, які ведуть до сусідньої точки з суттєво меншими затрат на обчислення.

Найпоширенішими і застосовними мета-евристичними алгоритмами є генетичний алгоритм (GA), який вперше був представлений Джоном Голландом [282] в 1975 році, оптимізація колонії мурашок (ACO), оптимізація роїв частинок (PSO), модельоване відпалювання (SA), імперіалістичний конкурентний алгоритм (ICA) та алгоритм Firefly (FA) - це інші найбільш часто використовувані алгоритми в задачах оптимізації.

Класифікацію обернених задач механіки деформованого твердого тіла стосовно величин, включених у відповідні математичні моделі, подано в праці [26]. У цій праці розглянуто різні класи обернених задач механіки деформованого твердого тіла: ретроспективні, граничні, коефіцієнтні, геометричні, в яких за деякою додатковою експериментальною інформацією про розв’язки визначаються коефіцієнти диференціальних операторів, початкові умови, умови на межах, геометрію внутрішніх дефектів (порожнин, тріщин). Подано постановки задач, основи загальних підходів в теорії обернених і некоректних задач, особливості ітераційних схем і методів регуляризації при вирішенні конкретних обернених задач теорії пружності, акустики, в’язкопружності, електропружності, теплопровідності. Наведено схеми побудови операторних рівнянь з компактними операторами, методи доведення теорем єдиності, запропоновано різні способи побудови наближених розв’язків, подано чисельні результати, отримані на основі методів регуляризації.

Щодо прикладних застосувань обернені задачі механіки стосуються оптимізації форми та структури [12, 118, 231], теоретичних та експериментальних методів раціонального розподілу матеріалу тонкостінних елементів конструкцій [61, 182, 219], оптимального за швидкодією нагрівання (охолодження) тіл при обмеження на напруження чи температуру [19– 21, 29, 30, 42 – 46], ідентифікації термонапруженого стану тіл при неповній інформації про умови нагрівання на поверхні [10, 11, 131, 132, 225, 226, 292], ідентифікації дефектів у тілах [113, 217, 218], ідентифікації теплових характеристик твердих тіл [143–147], основи методики розрахунку таких температурних полів в оболонках, тілах та покриттях, які забезпечують при локальному нагріванні низький рівень температурних напружень [177], зокрема їх відсутність [148, 155, 167, 182], мінімізації напружень за рахунок характеристик матеріалу [66, 67, 113, 78, 160 – 163, 170 – 172, 245, 249, 252, 272, 274, 287, 314, 317, 342, 351, 353 – 355, 371, 375].

Наукових праць, які стосуються характеристик матеріалу, як цільової функції є порівняно небагато і появились вони в основному в кінці 20 століття. З точки зору характеристик матеріалів до задач їх оптимізації можна віднести також задачі керування товщинами (геометрією) шаруватих матеріалів. В одній з перших праць [353] для оптимізації (тобто мінімізації) розподілу теплових напружень проводяться чисельні розрахунки та визначається оптимальний склад матеріалу з урахуванням впливу температурної залежності властивостей матеріалу з використанням методу Пауелла [135]. Як чисельний приклад розглянуто порожнистий круглий циліндр, що складається з оксиду цирконію (ZrO_2) та титанового сплаву (ТÌ-6А1-4V). У згаданих працях розроблений гібридний генетичний алгоритм із комплексним методом для оптимізації матеріального складу багатошарової ФГМ пластини із залежними від температури властивостями матеріалу з метою мінімізації теплових напружень, що виникають у пластині при усталених теплових навантаженнях. Поставлено і розв’язано задачі оптимізації матеріального складу порожнистої сфери з ФГМ з кусково-степеневим законом неоднорідності для релаксації теплового напруження. Задачі з цільовими функціями – загальна маса конструкції та її перша власна частота, при якій перша повинна бути мінімальною, а друга – максимальною з єдиним інженерним змінним та керованим параметром, якою є функція розподілу матеріалів по діаметру, розв’язана з допомогою генетичного алгоритму. Оптимізація об'ємної частки для мінімізації стаціонарних теплових напружень у термостійких композитах ФГМ Ni – Al_2O_3 числовими методами розглянута в праці [245].

1.3. Фізико-хімічні підстави досліджень

У цьому пункті дамо короткий огляд вчення С. Подолинського [174, 175, 329 – 331] про відношення праці та енергії, а також досліджень, пов'язаних з деструктивним впливом зовнішнього середовища на навантажені елементи конструкцій.

С. Подолинський зауважив, що діяльність людини, використовує, в основному механічну енергію і її праця спрямована на збільшення запасу переміноздатної енергії (енергії, яку можна безпосередньо або опосередковано перетворити в механічну) задля перетворення її в механічну. Використовуючи тогочасний (1880 – 1883 рр.) розвиток вчення про теплоту і роботу, а також результати експериментів тогочасних науковців щодо енергетичних ресурсів людського і тваринного організмів та статистичні дані щодо розвитку сільського господарства і промисловості в різних країнах Європи, він прийшов до таких висновків:

- «люди перш за все потребують великих кількостей поживи, матеріалів для палива і механічних сил. Отже, найкориснішими формами фізичних сил були б: 1) більше або менше свобідні хемічні споріднення – в формі харчових засобів – рослинного або звіринного походження або в формі матеріялів для палива, і 2) механічний рух, котрий міг би служити рушійною силою для машин, які працюють на користь людства.
- наша земля сама по собі дає людству надзвичайно мало фізичних сил в такій найбільше корисній формі;
- промінна енергія сонця є майже єдиним джерелом всіх корисних людям сил, котрі находяться на поверхні землі;
- можна сказати, не боячись помилитися, що ми отримуємо на Землі енергію Сонця не в дуже перетворюваному, але і не в надто вже

усталеному вигляді. Висока температура, світло, хімічні промені – все це такі види енергії, які, правда, з великою втратою на розсіювання, але все-таки частиною переводяться на земній поверхні в більш перетворювані, вищі види енергії, якими є – механічна робота машин, скорочення м'язів і, ймовірно, психічна діяльність;

- загальна кількість енергії, що отримується поверхнею Землі зсередини і від Сонця, поступово зменшується. У той же час загальна кількість енергії, накопиченої на земній поверхні і знаходиться в розпорядженні людства, поступово збільшується;
- збільшення це відбувається під впливом праці людини і домашніх тварин. Під ім'ям корисної праці ми розуміємо всяке споживання механічної і психічної роботи людини і тварин, що має результатом збільшення бюджету перетворюваної енергії на земній поверхні;
- людина має відомими економічними еквівалентом, який зменшується в міру того, як потреби людини зростають;
- продуктивність праці людини збільшується в міру зменшення її економічного еквівалента, і з розвитком його потреб велика частина їх задовольняється працею;
- продуктивність праці людини значно збільшується споживанням цього праці на перетворення нижчих видів енергії до вищих, наприклад вихованням робочої худоби, пристроєм машин та інше;
- застосування сонячної енергії в якості безпосереднього двигуна і приготування поживних речовин з неорганічних матеріалів є головними питаннями, які стоять на черзі для продовження найвигіднішого накопичення енергії на Землі;
- поки кожна людина може володіти сумою технічної роботи, що перевищує в стільки разів його власну, у скільки разів знаменник його економічного еквівалента більше свого чисельника; до тих пір існування і розмноження людей забезпечено, так як механічна робота

завжди в будь-якому відношенні може бути виражена в поживних речовинах та інших засобах задоволення людських потреб;

- межею цього закону є тільки абсолютна кількість енергії, одержуваної від Сонця, і неорганічних матеріалів, що знаходяться на Землі.
- дії, які мають результатом явища, протилежні праці, представляють розкрадання енергії, тобто збільшення кількості енергії, що розсіюється у простір;
- головною метою людства при праці повинно бути абсолютне збільшення енергетичного бюджету, так як при постійній його величиною перетворення нижчої енергії у вищу скоро досягає межі, далі якого воно не може йти без зайвих втрат на розсіювання енергії.»

З цих положень слідує, що тематика наукових досліджень мала б бути спрямована на зменшення розсіювання і накопичення переміноздатної енергії. Ці положення підкреслюють важливість формулювання і розробки методів розв'язування обернених задач, в яких за відомими наслідками, встановлюються причини їх виникнення. З цієї точки зору будь-яку математичну модель можна розглядати як модель прямої та оберненої задачі.

Відомо також [5, 25, 68, 69, 241, 257, 278, 270, 368], що деструкція матеріалів відбувається під дією несилових факторів зовнішнього середовища (хімічні впливи: корозія, наводнення, окислення тощо, фізичні впливи: електричні поля, теплові поля тощо). Наявність силових навантажень може суттєво впливати на швидкість зміни структури матеріалу під дією хімічних, теплових, електричних факторів, а отже зміни фізико-механічних характеристик матеріалу внаслідок силових навантажень. Силові навантаження можуть бути при цьому малими з точки зору міцності елементів конструкцій в даний момент часу. Іншими словами навантаження можуть мати величину, набагато меншу від навантажень, з досягненням яких матеріал слід описувати моделями пластичності, в'язкопружності, крихкості, плинності тощо. У згаданих працях розглянуті, зокрема, моделі взаємодії металу з воднем, досліджено впливи напруженого стану на швидкість корозії, оптимальне щодо швидкості корозійного процесу проектування конструкцій, які одночасно знаходяться у зовнішніх корозійних середовищах та напруженому стані. Розглянуто аналіз експериментальних даних з точки зору впливу напруженого стану в у виробах з нікель-алюмінієвих сплавів на способи їх взаємодію з воднем.

1.4. Висновки

З огляду літературних джерел бачимо, що

- кількість досліджень впливу невеликих термосилових навантажень, які деструктивно змінюють фізико-механічні характеристики матеріалів за рахунок взаємодії елементів конструкцій з агресивним середовищем і знижують термін їх експлуатації є недостатньою. Такий вплив не узгоджуються із сучасними тенденціями збільшення енергоефективності, які базуються на використанні природних джерел енергії, продовження терміну служби виробів з матеріалів, виготовлення яких є енергозатратним (плавлення металів, добування сировини, виготовлення і очищення композитних, керамічних матеріалів тощо);
- наявні і розвиваються математичні моделі визначення фізико-механічних характеристик композитів, зокрема, ФГМ через відповідні характеристики їх складових;
- розвиток методів проєктування матеріалів для їх тривалої експлуатації в елементах конструкцій в умовах тремосилових навантажень при наявності технологій виготовлення ФГМ, наявних математичних моделях напружено-деформованого стану однорідних та неоднорідних тіл різноманітної форми під одночасною дією фізичних полів різної природи є недостатнім;

– наявні технологічні процеси виготовлення елементів конструкцій з композитних, зокрема, функціонально-градієнтних матеріалів, хоч і можуть забезпечити вимоги до їх практичного застосування, потребують постійного вдосконалення, а їх розробка є окремою науковою проблемою.

Це є підставою для проведених у даній роботі досліджень, які стосуються проблеми виготовлення неоднорідних матеріалів для реальних умов їх використання в елементах конструкцій. Основну увагу приділено аналітичному визначенню температурних полів, які призводять до заданого розподілу термонапружень, зокрема, їх відсутності та способів їх забезпечення. Задачі такого типу з точки зору, наведених у п.1.2.4 класифікацій обернених задач, належать до обмежених, неперервних, коефіцієнтних задач оптимізації локального пошуку.

РОЗДІЛ 2

КЛЮЧОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ, ЯКІ СПРИЧИНЯЮТЬ ЦІЛЬОВІ РОЗПОДІЛИ НАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

У розділі подані теоретичні основи роботи. За основу взято диференціальні рівняння теорії пружності у напруженнях у тензорному формулюванні в ортогональних криволінійних системах координат. Ортогональна криволінійна система координат – це система координат, в якій матриця її метричного тензора (коваріантного чи контраваріантного) містить ненульові елементи тільки на діагоналі [4, 15, 168, 202]. Фізико-механічні характеристики матеріалу та компоненти тензора термонапруженого стану вважатимемо залежними від однієї просторової координати певної криволінійної системи координат та температурного поля, залежного від цієї координати.

За такого припущення подамо основоположні рівняння моделі термонапруженого стану неоднорідних тіл у коваріантній тензорній формі. Відповідні задачі теорії термопружності зведемо до інтегральних рівнянь Вольтерри з інтегральними умовами або Фредгольма другого роду. Такий підхід є узагальненням праць [4, 31, 34, 35, 83, 84, 90, 94, 101], в яких подібний метод застосовано до довгих циліндрів, куль, плит у різних системах координат. Цей підхід, запропонований В.М. Вігаком, названий методом безпосереднього інтегрування [360, 362]. Однією з його переваг, яка використовується у цій роботі є точне задоволення умов на межі тіла та можливість зведення задач до розв’язування інтегральних рівнянь. Ці рівняння є зручними у використанні для розв’язання прямих та обернених задач теорії пружності у випадку довільної залежності характеристики матеріалів від координат. Такі обернені задачі, зокрема, стосуються визначення умов відсутності термонапружень або формування їх заданого розподілу у тілах, які зазнають температурного впливу. Забезпечення таких напружених станів здійснюють за рахунок спеціально підібраних температурних полів при заданому розподілі теплофізичних характеристик неоднорідного матеріалу або формування відповідних профілів неоднорідності матеріалу при заданих термосилових навантаженнях.

Результати цього розділу відображені в працях [9, 82, 84, 85 – 91, 94, 95, 97, 98, 102, 104].

2.1. Математична постановка задач термопружності для неоднорідних термочутливих тіл у криволінійних ортогональних координатах

Подамо рівняння та зв'язки, які описують напружений стан у коваріантній формі у довільній криволінійній системі координат для малих деформацій та напружень [4, 15, 50]. Рівняння записані з використанням правила сумування [15, 168, 202]: індекс сумування повинен повторюватися два рази – один раз вверху і один раз внизу та приймати значення від одиниці до трьох. Коваріантну похідну [4, 202, 168] відносно j-ї криволінійної координати ξ^j позначатимемо «$,j$» у нижньому індексі (наприклад, запис $\sigma^{kj}_{,k}$ означає коваріантну похідну відносно криволінійної координати ξ^k і сумування по k від одиниці до трьох), по грецьких індексах сумування не проводиться.

У цьому контексті задачі теорії пружності у напруженнях подані через

- рівняння рівноваги

$$\overline{\sigma}^{mk}_{,m} + F^k = 0\,, \tag{2.1}$$

- зв'язки між фізичними деформаціями, напруженнями та зовнішніми полями

$$e_{km} = C^{ij}_{km}\sigma_{ij} + \Phi_{km}\,, \tag{2.2}$$

- рівняння сумісності

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial\xi^n \partial\xi^p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial\xi^m \partial\xi^q} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial\xi^m \partial\xi^p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mp}}{\partial\xi^n \partial\xi^q} - 2\varepsilon_{rs}(\Gamma^r_{qm}\Gamma^s_{pn} - \Gamma^r_{mp}\Gamma^s_{qn}) +$$

$$+2\Gamma^r_{np}\varepsilon_{mqr} + 2\Gamma^r_{qm}\varepsilon_{npr} - 2\Gamma^r_{nq}\varepsilon_{mpr} - 2\Gamma^r_{mp}\varepsilon_{nqr} = 0, \qquad (2.3)$$

та умови на межі, які записані нижче. Тут F^k – масові сили, Φ_{km} – деформації, викликані додатковим, зокрема, температурним полем, $\Gamma^l_{ik} = \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ls} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial\xi^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial\xi^s} \right)$ – символи Крістоффеля (не тензори) другого роду, $\varepsilon_{npr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{pr}}{\partial\xi^n} + \frac{\partial\varepsilon_{rn}}{\partial\xi^p} - \frac{\partial\varepsilon_{np}}{\partial\xi^r} \right)$, ε_{nq} – коваріантні компоненти тензорів деформацій,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \qquad (2.4)$$

$e_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ – фізичні компоненти деформацій і напружень, які відповідають криволінійним координатам з локальними одиничними базовими векторами і дозволяють записати зв’язки між деформаціями та напруженнями зі збереженням розмірності [4, 15, 50, 168], C^{ij}_{km} – коефіцієнти пропорційності.

У рівнянні сумісності (2.3), яке є наслідком рівності нулеві різниці тензорів кривини Рімана-Крістоффеля у деформованому і недеформованому тілах, індекси $mnpq$ приймають тільки такі значення 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132. Коваріантна похідна визначена як [4, 50, 202, 168]:

$$T^i_{k,s} = \frac{\partial T^i_k}{\partial\xi^s} - \sum_r \Gamma^r_{ks} T^i_r + \sum_r \Gamma^i_{rs} T^r_k, \text{ для мішаного тензора 2-го рангу,}$$

$$T^{mn}_{,s} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial\xi^s} + \Gamma^m_{rs} T^{rn} + \Gamma^n_{rs} T^{mr}, \text{ для контраваріантного тензора 2-го рангу,}$$

$$T_{ik,s} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial\xi^s} - \Gamma^r_{si} T_{rk} - \Gamma^r_{sk} T_{ir}, \quad \text{для коваріантного тензора 2-го рангу.} \qquad (2.5)$$

Правило для обчислення коваріантної похідної від тензора довільного рангу можна сформулювати так: щоб одержати коваріантну похідну тензора довільного рангу відносно координати ξ_s треба до звичайної похідної додати додаткові члени. Кожному контраваріантному індексові j відповідає доданок «$+\Gamma^{j}_{rs}T^{..r..}_{...}$», а коваріантному індексові i – доданок «$-\Gamma^{r}_{is}T^{...}_{..r..}$».

До рівнянь (2.1) – (2.3) слід додати умови на межі тіла вигляду

$$\sigma^{mk}n_k = T^m \tag{2.6a}$$

у напруженнях або

$$\bar{u}\big|_S = \bar{u}_0\,, \tag{2.6b}$$

у переміщеннях, де n_k – складові вектора нормалі до поверхні S, p^m – задані навантаження, $\bar{u}$ – вектор переміщення, на поверхні, $\bar{u}_0$ – його задане значення на поверхні.

Подамо рівняння (2.1) – (2.3) для випадку, якщо відповідні характеристики матеріалу та напруженого стану залежать тільки від однієї координати, наприклад ξ^1, і криволінійна система координат ортогональна. Додатково наведемо умови відсутності напружень і деформацій, які відповідають зсувам і поворотам: $\sigma_{ij}=0$, $\varepsilon_{ij}=0$ для $i\neq j$ і врахуємо вирази для символів Крістоффеля для ортогональних систем координат ($g^{ij}=0$ для $i\neq j$) [15]:

$$g^{ij}=\frac{1}{g_{ij}},\;\; \Gamma^m_{mm}=\frac{1}{2}g^{mm}\frac{\partial g_{mm}}{\partial\xi^m},\; \Gamma^m_{ll}=-\frac{1}{2}g^{mm}\frac{\partial g_{ll}}{\partial\xi^m},$$

$$\Gamma^m_{ml}=\frac{1}{2}g^{mm}\frac{\partial g_{mm}}{\partial\xi^l},\quad \Gamma^m_{kl}=0\,. \tag{2.7}$$

У працях [15, 258] подано великий перелік ортогональних криволінійних систем координат з їх зв’язками з декартовою прямокутною системою координат та з обчисленими компонентами метричного тензора та символів Крістоффеля і коефіцієнтів Ляме.

Запишемо відповідні рівняння для випадку, коли всі характеристики є залежними від однієї координати ξ^1. Тоді рівняння (2.1) – (2.3) матимуть вигляд:

- рівняння рівноваги

$$\sigma^{11}_{,1} + F^1 = 0$$

або з урахування означення коваріантної похідної (2.5)

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \xi^1} + (2\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13})\sigma^{11} + \Gamma^1_{22}\sigma^{22} + \Gamma^1_{33}\sigma^{33} + F^1 = 0, \qquad (2.8)$$

- зв'язок (2.2) між деформаціями, напруженнями та температурним полем, в якому $\Phi_{ij} = 0$, коли $i \neq j$,
- рівняння сумісності при $mnpq$ =1212

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi^2 \partial \xi^1} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - 2\varepsilon_{rs}(\Gamma^r_{21}\Gamma^s_{12} - \Gamma^r_{11}\Gamma^s_{22}) +$$

$$+2\Gamma^r_{21}\varepsilon_{12r} + 2\Gamma^r_{21}\varepsilon_{21r} - 2\Gamma^r_{22}\varepsilon_{11r} - 2\Gamma^r_{11}\varepsilon_{22r} = 0,$$

яке з урахуванням $\varepsilon_{ij} = 0$, для $i \neq j$ та рівності нулеві похідних відносно координат ξ^2, ξ^3 має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} + 2\varepsilon_{11}(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}) + 2\varepsilon_{22}(\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}) - 2\varepsilon_{33}\Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22} -$$

$$-2\Gamma^r_{21}\varepsilon_{12r} - 2\Gamma^r_{21}\varepsilon_{21r} + 2\Gamma^r_{22}\varepsilon_{11r} + 2\Gamma^r_{11}\varepsilon_{22r} = 0,$$

де

$$\varepsilon_{12r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{2r}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \varepsilon_{r1}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^r}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1}\delta^2_r,$$

$$\varepsilon_{21r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{1r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \varepsilon_{r2}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial \xi^r}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1}\delta^2_r,$$

$$\varepsilon_{11r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{1r}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \varepsilon_{r1}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi^r}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi^1}\delta^1_r,$$

$$\varepsilon_{22r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{2r}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial\varepsilon_{r2}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1}\delta_r^1 .$$

Після сумування та врахування значень ненульових компонент символів Рімана-Крістоффеля відповідні рівняння сумісності можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1\partial\xi^1} + 2\varepsilon_{11}(\Gamma_{21}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1) + 2\varepsilon_{22}(\Gamma_{21}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2) - 2\varepsilon_{33}\Gamma_{11}^3\Gamma_{22}^3 -$$

$$-(2\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^1)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1} + \Gamma_{22}^1\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^1} = 0, \tag{2.9}$$

Врахувавши вирази (2.7) для символів Крістоффеля в ортогональних координатах, подамо рівняння (2.9) у вигляді:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial(\xi^1)^2} - \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^1} - \left(\frac{1}{g^{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1} + \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^1}\right)\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1} +$$

$$+\varepsilon_{11}\frac{1}{2(g^{11})^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^2}\right)^2 + \frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\right] +$$

$$+\varepsilon_{22}\frac{1}{2(g_{22})^2}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\right)^2 + \frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^2}\right] - \varepsilon_{33}\frac{1}{2(g^{33})^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^3}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^3} = 0, \tag{2.10}$$

Далі будемо писати замість двох індексів, які повторюються вгорі або внизу, один індекс. Запишемо відповідні зв’язки між складовими тензорів деформацій та напружень, викликаних дією зовнішнього поля, якщо всі характеристики залежні від однієї координати, для випадку трансверсально анізотропних та ортотропних середовищ [4, 136]. Відповідні зв’язки на основі (2.2) між фізичними компонентами мають вигляд:

$$e_\alpha = a_\alpha^j\sigma_j + \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{2.11}$$

(у випадку трансверсально-ізотропного середовища [4, 136] $\alpha_3^1 = \alpha_3^2$).

Отже задача визначення напруженого стану, викликаного температурним полем, звелася до розв’язування сукупності рівнянь рівноваги (2.8), сумісності (2.10), зв’язків між деформаціями та напруженнями (2.11), умов на межі (2.6). Ці рівняння виражені через фізичні характеристики з використанням (2.4) матимуть вигляд:

- рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi^1}+\left(\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g^3}\frac{\partial g_3}{\partial\xi^1}\right)\sigma_1-$$

$$-\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\frac{\sigma_2}{g_2}-\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_3}{\partial\xi^1}\frac{\sigma_3}{g_3}+\sqrt{g^1}F_1=0, \qquad (2.12)$$

- зв'язки між деформаціями і напруженнями

$$e_\alpha=a_\alpha^j\sigma_j+\Phi_\alpha,\ \alpha=1,2,3 \qquad (2.13)$$

- рівняння сумісності

$$\frac{\partial^2(g_2e_2)}{\partial(\xi^1)^2}-\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\frac{\partial(g_1e_1)}{\partial\xi^1}-\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\right)\frac{\partial(g_2e_2)}{\partial\xi^1}+$$

$$+\frac{e_1}{2g_1}\left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right]+\frac{e_2}{2g_2}\left[\left(\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^2}\right]-\frac{e_3}{2g_3}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^3}=0, \qquad (2.14)$$

- умови на межах

$$\sigma_1(\xi^1_{(1)})=-p_1,\ \ \sigma_1(\xi^1_{(2)})=-p_2, \qquad (2.15)$$

де $\xi^1=\xi^1_{(1)}$, $\xi^1=\xi^1_{(2)}$ – рівняння координатних поверхонь, або інші умови, які стосуються переміщень та зусиль на інших координатних поверхнях.

2.2. Зведення задачі термопружності до інтегральних рівнянь Вольтерри та Фредгольма другого роду

У цьому пункті задачі п. 2.1. теорії пружності у напруженнях у криволінійних ортогональних координатах зведені до інтегральних рівнянь другого роду.

Зведення задачі термопружності у вигляді системи трьох груп рівнянь та умов на межі до розв'язування одного інтегрального рівняння є важливим з точки зору застосування отриманого рівняння до розв'язування обернених задач. Однією з таких задач є дослідження умов відсутності напружень викликаних зовнішнім полем та шляхів отримання такого стану.

Алгоритм отримання інтегральних рівнянь є таким:

1. вибір визначальних напружень так, щоб рівняння рівноваги можна було безпосередньо проінтегрувати;
2. вираження зв'язків між деформаціями та напруженнями через визначальні напруження з (2.13);
3. заміна у рівняннях сумісності (2.14) компонент тензора деформації на вирази, отриманими у попередньому пункті через напруження, та спрощення отриманих диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами наскільки це можливо для їх розв'язання з використанням рівняння рівноваги;
4. безпосереднє інтегрування рівняння рівноваги з використанням зв'язків між деформаціями та напруженнями, умов на межі;
5. безпосереднє інтегрування отриманого у п. 3 рівняння сумісності відносно визначального напруження;
6. з отриманих у п. 4, 5 інтегральних рівнянь (зв'язків) між визначальним напруженням і компонентою тензора напружень отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри відносно визначального напруження і інтегральну умову для визначення сталої;
7. після виключення з інтегральних рівнянь одного з визначальних напружень та підставляння них сталих, виражених аналітично, отримаємо з використанням інтегральної умови інтегральне рівняння Фредгольма.

Перш ніж почати зведення задачі (2.12) – (2.15) до інтегральних рівнянь, виключимо напруження σ_3 з рівняння рівноваги (2.12) та зв'язків між деформаціями та напруженнями (2.13). У результаті матимемо:

$$\sigma_3 = \frac{e_3}{a_3^3} - \frac{a_3^1}{a_3^3}\sigma_1 - \frac{a_3^2}{a_3^3}\sigma_2 - \frac{\Phi_3}{a_3^3}. \tag{2.16}$$

Після підставляння виразу (2.16) у (2.12) та групування членів біля σ_1 та σ_2 матимемо:

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi^1} + \frac{f_1\,\sigma_1 - f_2\,\sigma_2}{\xi^1} - f_3\,e_3 + f_3\,\Phi_3 + \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} = 0, \tag{2.17}$$

де

$$f_1 = \frac{\xi^1}{g_1}\left[\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1} + \frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1} + \frac{1}{2g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\xi^1}(1 + \frac{a_3^1}{a_3^3})\right],$$

$$f_2 = \frac{\xi^1}{2g_1}\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1} - \frac{1}{g_3}\frac{a_3^2}{a_3^3}\frac{\partial g_3}{\partial\xi^1}\right), \qquad f_3 = \frac{1}{2g_{11}g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial\xi^1}\frac{1}{a_3^3}.$$

Рівняння (2.17) можна спростити, якщо за визначальне напруження взяти:

$$\sigma = f_1\,\sigma_1 - f_2\,\sigma_2,. \tag{2.18}$$

Тоді рівняння (2.17) матиме вигляд

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi^1} + \frac{\sigma}{\xi^1} - f_3\,e_3 + f_3\,\Phi_3 + \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} = 0. \tag{2.19}$$

Після інтегрування (2.19) в межах від $\xi^1_{(1)}$ ($\xi^1 = \xi^1_{(\alpha)}$ $\alpha = 1,2$ – координатні поверхні) до ξ^1 отримаємо зв'язок між напруженнями σ_1 та σ:

$$\sigma_1(\xi^1) = \sigma_1(\xi^1_{(1)}) - \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1}\frac{\sigma}{\eta}d\eta + \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1} f_3\,e_3 d\eta - \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1} f_3\,\Phi_3 d\eta - \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1}\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}d\eta. \tag{2.20}$$

З використанням умов на межі (2.15) отримаємо інтегральну умову

$$\int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}}\frac{\sigma}{\eta}d\eta = p_2 - p_1 + \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} f_3\,e_3 d\eta - \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} f_3\,\Phi_3 d\eta - \int_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}}\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}d\eta. \tag{2.21}$$

Якщо на межах використовувати інші умови, наприклад, для переміщень, то інтегральну умову вигідніше подати у вигляді

$$\int\limits_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} \frac{\sigma}{\eta} d\eta = \sigma_1(\xi^1_{(1)}) - \sigma_1(\xi^1_{(2)}) + \int\limits_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} f_3\, e_{33} d\eta - \int\limits_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} f_3\, \Phi_3 d\eta - \int\limits_{\xi^1_{(1)}}^{\xi^1_{(2)}} \frac{F_1}{\sqrt{g_1}} d\eta,$$

де $\sigma_1(\xi^1_{(2)})$ і $\sigma_1(\xi^1_{(1)})$ слід виразити через деформації чи переміщення на поверхні.

З метою зведення рівняння сумісності до інтегрального рівняння слід:

- записати рівняння сумісності (2.14) у компонентах напружень σ і σ_1 з використанням зв'язків між компонентами тензорів деформацій та напружень,
- замінити відповідну задачу для диференціального рівняння другого порядку з умовами на межі рівняннями Вольтерри та Фредгольма за відомим алгоритмом [348,376].

Попередньо виразимо зв'язки між деформаціями та напруженнями (2.13) через σ і σ_1. Для цього підставимо вираз (2.16) у (2.13) і зведемо подібні члени, в результаті отримаємо

$$e_1 = b_1^1\sigma_1 + b_1^2\sigma + b_1^3 e_3 + \Phi_1^3,$$
$$e_2 = b_2^1\sigma_1 + b_2^2\sigma + b_2^3 e_3 + \Phi_2^3, \tag{2.22}$$

де

$$b_1^1 = a_1^1 + a_1^2\frac{f_1}{f_2} - \frac{a_1^3}{a_3^3}\left(a_3^1 + a_3^2\frac{f_1}{f_2}\right), \qquad b_1^2 = \frac{1}{f_2}\left(a_1^3\frac{a_3^2}{a_3^3} - a_1^2\right),$$

$$b_1^3 = \frac{a_1^3}{a_3^3}, \qquad \Phi_1^3 = -\frac{a_1^3}{a_3^3}\Phi_3 + \Phi_1,$$

$$b_2^1 = a_2^1 + a_2^2\frac{f_1}{f_2} - \frac{a_2^3}{a_3^3}\left(a_3^1 + a_3^2\frac{f_1}{f_2}\right), \qquad b_2^2 = \frac{1}{f_2}\left(a_2^3\frac{a_3^2}{a_3^3} - a_2^2\right),$$

$$b_2^3 = \frac{a_2^3}{a_3^3}, \qquad \Phi_2^3 = -a_2^3\frac{\Phi_3}{a_3^3} + \Phi_2. \tag{2.23}$$

Щоб записати рівняння сумісності у напруженнях підставимо вирази (В.13) у рівняння сумісності (2.14) з використанням (2.20), (2.22), (2.23). Отримаємо:

$$\frac{\partial^2(g_2 e_2)}{\partial(\xi^1)^2}-\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\frac{\partial(g_1 e_1)}{\partial\xi^1}-\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\right)\frac{\partial(g_2 e_2)}{\partial\xi^1}+$$

$$+\frac{e_1}{2g^1}\left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right]+\frac{e_2}{2g_2}\left[\left(\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^2}\right]-\frac{e_3}{2g_3}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^3}=0,$$

Це рівняння можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial(\xi^1)^2}-d_{11}\frac{\partial e_1}{\partial\xi^1}+d_{21}\frac{\partial e_2}{\partial\xi^1}+d_1 e_1+d_2 e_2-d_3 e_3=0, \tag{2.24}$$

де

$$d_{11}=\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1},\quad d_{21}=\frac{2}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}-\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\right),$$

$$d_1=\frac{1}{2g_1 g_2}\left\{\left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right]-\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\right\},$$

$$d_2=\frac{1}{g_2}\frac{\partial^2 g_2}{\partial(\xi^1)^2}+\frac{1}{2g_2 g_2}\left[\left(\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}\right)^2+\frac{\partial g_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^2}\right]-\left(\frac{1}{g_2 g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{2g_1 g_2}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^1}\right)\frac{\partial g_2}{\partial\xi^1},$$

$$d_3=\frac{1}{2g_3 g_2}\frac{\partial g_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial g_2}{\partial\xi^3}.$$

Коефіцієнти d_{11}, d_1, d_2, d_3 повинні залежати від однієї змінної ξ^1. В іншому випадку не існує станів, коли компоненти тензора напружень є функцією однієї координати. Вимога залежності коефіцієнтів d_{11}, d_{21}, d_1, d_2, d_3 від однієї координати накладає додаткові умови на вигляд метричного тензора.

Отже $d_{11}=d_{11}(\xi^1)$ і $d_{21}=d_{21}(\xi^1)$, якщо $g_2(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=g_{2\xi^1}(\xi^1)g_{2\xi^2}(\xi^2)g_{2\xi^3}(\xi^3)$ і

$g_2(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=g_{2\xi^1}(\xi^1)g_{2\xi^2}(\xi^2)g_{2\xi^3}(\xi^3)$, $\quad d_1=d_1(\xi^1)$ виконується, коли $\dfrac{\partial g_1}{\partial \xi^2}=0$ або $\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial \xi^2}\right)^2=const\cdot f(\xi^1)g_{1\xi^3}(\xi^3)g_{2\xi^2}(\xi^2)g_{2\xi^3}(\xi^3)$, $\quad d_2=d_2(\xi^1)$ – якщо $\dfrac{\partial g_1}{\partial \xi^2}=0$, $\ d_3=d_3(\xi^1)$ або $d_3=\dfrac{1}{2g_3g_2}\dfrac{\partial g_1}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial g_2}{\partial \xi^3}$ це можливо, коли $g_1=g_1(\xi_1,\xi_2)$ і $g_2=g_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ або $g_2=g_2(\xi_1,\xi_2)$ і $g_1=g_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ або $\dfrac{\partial g_1}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial g_2}{\partial \xi^3}=const\cdot f(\xi^1)g_{3\xi^2}(\xi^2)g_{3\xi^3}(\xi^3)g_{2\xi^2}(\xi^2)g_{2\xi^3}(\xi^3)$.

З використанням зв'язків між деформаціями та напруженнями (2.22) рівняння сумісності (2.24) у напруженнях матиме вигляд:

$$b_2^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\xi^1)^2}+D_{21}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^1}+D_2\sigma+b_2^1\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial(\xi^1)^2}+D_{11}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi^1}+D_1\sigma_1+D_3e_3+D_\Phi=0, \qquad (2.25)$$

де

$$D_{11}=\left[2\frac{\partial b_2^1}{\partial\xi^1}-d_{11}b_1^1+d_{21}b_2^1\right],\ D_{21}=\left[2\frac{\partial b_2^2}{\partial\xi^1}-d_{11}b_1^2+d_{21}b_2^2\right],$$

$$D_1=\left[\frac{\partial^2 b_2^1}{\partial(\xi^1)^2}-d_{11}\frac{\partial b_1^1}{\partial\xi^1}+d_{21}\frac{\partial b_2^1}{\partial\xi^1}+d_1b_1^1+d_2b_2^1\right],$$

$$D_2=\left[\frac{\partial^2 b_2^2}{\partial(\xi^1)^2}-d_{11}\frac{\partial b_1^2}{\partial\xi^1}+d_{21}\frac{\partial b_2^2}{\partial\xi^1}+d_2b_2^2+d_1b_1^2\right],$$

$$D_3=\left[d_1b_1^3+d_{21}\frac{\partial b_2^3}{\partial\xi^1}+d_2b_2^3-d_3e_3-d_{11}\frac{\partial b_1^3}{\partial\xi^1}+\frac{\partial^2 b_2^3}{\partial(\xi^1)^2}\right],$$

$$D_\Phi=d_1\Phi_1^3+d_{21}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\Phi_2^3-d_{11}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\Phi_1^3+d_2\Phi_2^3+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2}\Phi_2^3.$$

З використанням рівняння рівноваги (2.19) рівняння (2.25) приймає вигляд

$$b_2^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\xi^1)^2}+\left(D_{21}-b_2^1\frac{1}{\xi^1}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^1}+\left(D_2+b_2^1\frac{1}{(\xi^1)^2}-\frac{D_{11}}{\xi^1}\right)\sigma+$$

$$+b_2^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}(f_3\,e_3)-b_2^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}(f_3\,\Phi_3)-b_2^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}\right)+$$

$$+\left(D_{11}f_3\;+D_3\right)e_3+D_1\,\sigma_1-D_{11}f_3\,\Phi_3+D_\Phi-D_{11}\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}=0\,. \qquad (2.26)$$

Як відомо, відповідна задача для диференціального рівняння другого порядку може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерри або Фредгольма в залежності від умов на межах (задача Коші або гранична задача) [290, 335]. Зведемо рівняння сумісності (2.26) до інтегрального рівняння. Змінну ξ^1 надалі позначатимемо через ξ. Як відомо це рівняння відносно змінної σ можна звести до рівняння Вольтерри [348,376] з заданими значеннями функції $\sigma(\xi_1)$ та її похідної $\sigma'(\xi_1)=\left.\dfrac{d\sigma(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$ у точці ξ_1. Для цього використаємо готовий результат з [348].

Нехай задано звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+A_1\,(x)\frac{d}{dx}y(x)+B_1\,(x)y(x)=G_1\,(x) \qquad (2.27)$$

та значення похідних $y(x_0)=y_0$ і $\left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=y_1$. Тоді розв’язок такої задачі (задачі Коші) еквівалентний розв’язку рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x)-\int\limits_{x_0}^{x}K_1\,(x,t)y(t)dt=U_1\,(x)\,, \qquad (2.28)$$

де

$$K_1\,(x,t)=-A_1\,(t)-(x-t)\left[B_1\,(t)-\frac{dA_1\,(t)}{dt}\right],$$

$$U_1\,(x)=y_0\left[1+A_1\,(x_0)(x-x_0)\right]+y_1\,(x-x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)G_1\,(t)dt\,. \qquad (2.29)$$

З рівнянь (2.26) і (2.27) видно, що роль $y(x)$ виконує $\sigma(\xi)$, а

$$A_1(\xi)=\frac{D_{21}-\dfrac{b_2^1}{\xi}}{b_2^2},\quad B_1(\xi)=\frac{D_2+b_2^1\dfrac{1}{\xi^2}-\dfrac{D_{11}}{\xi}}{b_2^2},$$

$$G_1(\xi)=-\frac{D_1\sigma_1}{b_2^2}-\frac{D_{11}f_3+D_3+b_2^1}{b_2^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi}e_3+\frac{b_2^1}{b_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}\right)+$$

$$+\frac{b_2^1}{b_2^2}\frac{\partial(f_3\Phi_3)}{\partial\xi}+\frac{D_{11}f_3}{b_2^2}\Phi_3-\frac{D_\Phi}{b_2^2}+\frac{D_{11}}{b_2^2}\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}.$$

$$K_1(\xi,\eta)=-\frac{D_{21}(\eta)-\dfrac{b_2^1(\eta)}{\eta}}{b_2^2(\eta)}-$$

$$-(\xi-\eta)\left[\frac{D_2(\eta)+b_2^1(\eta)\dfrac{1}{\eta^2}-\dfrac{D_{11}(\eta)}{\eta}}{b_2^2(\eta)}-\frac{d\left(\dfrac{D_{21}(\eta)}{b_2^2(\eta)}-\dfrac{b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)\eta}\right)}{d\eta}\right]. \qquad (2.30)$$

Відповідне інтегральне рівняння відносно $\sigma(\xi)$, отримане з (2.28), (2.29) після заміни $\sigma_1(\xi)$ у виразі (2.30) для $G_1(\xi)$ та інтегрування частинами має вигляд:

$$\sigma(\xi)+\int_{\xi_1}^{\xi}K(\xi,\eta)\sigma(\eta)d\eta=\sigma(\xi_1)f_\sigma(\xi)-e_3\int_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)g_e(\eta)d\eta+Q(\xi), \qquad (2.31)$$

де

$$K(\xi,\eta)=L_{1\eta}(\eta)-\frac{1}{\eta}L_{2\xi}(\xi)-\xi L_{3\eta}(\eta),$$

$$f_\sigma(\xi)=1+\left(A_1(\xi_1)-\frac{1}{\xi}\right)(\xi-\xi_1)-\int_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)\frac{D_1(\eta)}{b_2^2(\eta)}d\eta,$$

$$Q(\xi)=\int_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)g_\Phi(\eta)d\eta+\int_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)g_F(\eta)d\eta,$$

$$L_{1\eta}(\eta)=-\frac{D_{21}(\eta)-\dfrac{b_2^1(\eta)}{\eta}}{b_2^2(\eta)}-\frac{W(\eta)}{\eta}+$$

$$+\eta\left[\frac{D_2(\eta)}{b_2^2(\eta)}+\frac{1}{\eta^2}\frac{b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)}-\frac{D_{11}(\eta)}{b_2^2(\eta)\eta}-\frac{d}{d\eta}\left(\frac{D_{21}(\eta)}{b_2^2(\eta)}-\frac{b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)\eta}\right)\right],$$

$$L_{2\xi}(\xi)=\xi V(\xi)-W(\xi),$$

$$L_3(\eta)=\frac{D_2(\eta)+b_2^1(\eta)\dfrac{1}{\eta^2}-\dfrac{D_{11}(\eta)}{\eta}}{b_2^2(\eta)}-\frac{V(\eta)}{\eta}-\frac{d\left(\dfrac{D_{21}(\eta)}{b_2^2(\eta)}-\dfrac{b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)\eta}\right)}{d\eta},$$

$\sigma(\xi_1)$, e_3 – сталі, які визначають з умов на межі (у багатьох випадках $e_3=0$),

$$V(\eta)=\int\limits_{\xi_1}^{\eta}\frac{D_1(t)}{b_2^2(t)}dt,\qquad W(\eta)=\int\limits_{\xi_1}^{\eta}t\frac{D_1(t)}{b_2^2(t)}dt,$$

$$g_e(\xi)=f_3(\xi-\xi_1)-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)\frac{D_{11}(\eta)f_3(\eta)+D_3(\eta)+b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)}\frac{\partial f_3(\eta)}{\partial\eta}d\eta+$$

$$+\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[V(\xi)-V(\eta)\right]f_3(\eta)d\eta-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[W(\xi)-W(\eta)\right]f_3(\eta)d\eta,$$

$$g_\Phi(\xi)=\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[V(\xi)-V(\eta)\right]f_3(\eta)\Phi_3(\eta)d\eta-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[W(\xi)-W(\eta)\right]f_3(\eta)\Phi_3(\eta)d\eta-$$

$$-f_3\Phi_3(\xi-\xi_1)+\int\limits_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)\frac{b_2^1(\eta)}{b_2^2(\eta)}\frac{\partial(f_3\Phi_3)}{\partial\eta}d\eta+$$

$$+\int\limits_{\xi_1}^{\xi}(\xi-\eta)\left[\frac{D_{11}(\eta)f_3(\eta)}{b_2^2(\eta)}\Phi_3(\eta)-\frac{D_\Phi(\eta)}{b_2^2(\eta)}\right]d\eta,$$

$$g_F(\xi)=-\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}(\xi-\xi_1)+\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[V(\xi)-V(\eta)\right]\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}d\eta-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[W(\xi)-W(\eta)\right]\frac{F_1}{\sqrt{g_1}}d\eta+$$

$$+\int\limits_{\xi_1}^{\xi} (\xi-\eta)\frac{D_{11}(\eta)}{b_2^2(\eta)}\frac{F_1\ (\eta)}{\sqrt{g_1}}d\eta+\int\limits_{\xi_1}^{\xi} (\xi-\eta)\frac{b_2^1}{b_2^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{F_1\ (\eta)}{\sqrt{g_1}}\right)d\eta\,.$$

У правій стороні інтегрального рівняння (2.31) виділено доданки, які характеризують вплив зовнішнього поля, силових навантажень, пов'язані з метрикою криволінійної системи координат.

Сукупність інтегральних рівнянь (2.20), (2.31) зведемо до одного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду. Для цього слід:

- підставити інтегральне рівняння (2.31) в інтегральну умову (2.21), та отримати лінійне алгебричне рівняння відносно $\sigma(\xi_1)$;
- розв'язати отримане рівняння відносно $\sigma(\xi_1)$;
- підставити отриманий розв'язок у рівняння (2.31), звести кратні інтеграли до однократного інтегруванням застосовуючи метод інтегрування частинами;
- згрупувати члени з $\sigma(\xi)$.

В результаті отримаємо ключове інтегральне рівняння наступного вигляду:

$$\sigma(\xi)+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} K_F(\xi,\eta)\sigma(\eta)d\eta=f_F(\xi),$$

де

$$f_F(\xi)=-\frac{f_\sigma(\xi)}{A_{11}}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{f(\eta)}{\eta}d\eta+Q(\xi),$$

$$K_F(\xi,\eta)=\begin{cases} K(\xi,\eta)-\dfrac{f_\sigma(\xi)}{A_{11}}K_{1\eta}(\eta), & \eta\le\xi \\ -\dfrac{f_\sigma(\xi)}{A_{11}}K_{1\eta}(\eta), & \eta>\xi \end{cases}$$

$$K_{1\eta}(\eta) = \frac{1 - \left[V_{L2}(\xi_2) - V_{L2}(\eta) \right]}{\eta} + \ln \frac{\xi_2}{\zeta} L_{1\eta}(\eta) - (\xi_2 - \eta) L_{3\eta}(\eta),$$

$$V_{L2}(\eta) = \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{1}{\zeta} L_{2\zeta}(\zeta) d\zeta .$$

Отже, рівняння Вольтерри і Фредгольма можуть бути різними в залежності від способу вибору визначальних напружень. Спосіб вибору встановлюється від варіанту задання умов на межі. Детальніше про різні способи вибору визначальних напружень буде сказано у наступному пункті.

2.3. Інтегральні рівняння для визначення термонапруженого стану у різних ортогональних системах координат

У цьому пункті запишемо відповідні інтегральні рівняння у різних системах координат. Спочатку перевіримо, чи з запропонованих рівнянь рівноваги та сумісності у тензорному вигляді можна отримати відомі диференціальні рівняння у декартовій, циліндричній та сферичній системах координат. Запишемо відповідні рівняння до (2.19), (2.20) (рівняння рівноваги та інтегральна умова) і рівняння сумісності (2.31) у цих же системах координат. Покажемо також у випадку різних систем координат можливість вибору різних способів введення визначальних напружень та побудови відповідного формалізму щодо задачі визначення термонапруженого стану у переміщеннях.

Вважаємо, що характеристики матеріалу описані відомими функціями координат і температури, яка може залежати також і від інших характеристик.

Для переходу до різних систем координат будуть потрібні метричні тензори та символи Крістоффеля, які наведені у Додатку 1.

2.3.1. Рівняння рівноваги і сумісності у циліндричній системі координат

Якщо відповідні значення метричного тензора та символів Крістоффеля (А.1) (А.2) з Додатку А підставити у рівняння рівноваги (2.8), то отримаємо

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=-rF_r\ .$$

Введемо змінну $\rho=r/L_0$, де L_0 – характерна довжина. Якщо врахувати означення визначальних напружень (2.18), то рівняння рівноваги у цих визначальних напруженнях матиме вигляд

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{\rho}=-\rho F_r\ . \tag{2.32}$$

Подібно з рівняння сумісності (2.14) матимемо

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{de_\varphi}{d\rho}\right)-\frac{de_r}{d\rho}=0\,,$$

з якого отримуємо з врахуванням співвідношень Коші [281] відоме рівняння

$$\rho\frac{de_\varphi}{d\rho}=e_r-e_\varphi \tag{2.33}$$

сумісності у циліндричних координатах.

Відповідні зв'язки між тензорами деформацій та переміщень (2.11) мають вигляд з використанням означення коваріантних похідних, зв'язку між фізичними і тензорними компонентами

$$e_i\ =a_i^j\sigma_j+\Phi_i\ ,$$

де

$$a_1^1(\rho)=\frac{1}{E_r(\rho)},\ \ a_2^2(\rho)=\frac{1}{E_\varphi(\rho)},\ \ a_3^3(\rho)=\frac{1}{E_z(\rho)},\ \ a_1^2(\rho)=-\frac{\nu_{r\varphi}(\rho)}{E_\varphi(\rho)},$$

$$a_1^3(\rho)=-\frac{\nu_{rz}(\rho)}{E_z(\rho)},\ a_2^3(\rho)=-\frac{\nu_{\varphi z}(\rho)}{E_z(\rho)},\ a_1^2(\rho)=a_2^1(\rho)\,,$$

$$a_1^3(\rho) = a_3^1(\rho),\ a_2^3(\rho) = a_3^2(\rho).$$

Ці зв'язки, виражені через $\sigma_1 = \sigma_r$ і σ, мають вигляд:

$$e_r = b_{11}\sigma_r + b_{12}\sigma + b_{13}e_z + \Phi_r,$$

$$e_\varphi = b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma + b_{23}e_z + \Phi_\varphi,$$

$$\sigma_z = b_{31}\sigma_r + b_{32}\sigma + b_{33}e_z + \Phi_z, \qquad (2.34)$$

де

$$b_{11} = a_{11} + a_{12} - \frac{a_{13}a_{31} + a_{13}a_{32}}{a_{33}},\ b_{12} = -a_{12} + \frac{a_{13}a_{32}}{a_{33}},\ b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{33}},$$

$$\Phi_r = \Phi_1 - \frac{a_{13}}{a_{33}}\Phi_3,$$

$$b_{21} = a_{21} + a_{22} - a_{23}\frac{a_{31} + a_{32}}{a_{33}},\ b_{22} = -a_{22} + \frac{a_{23}a_{32}}{a_{33}},\ b_{23} = \frac{a_{23}}{a_{33}},$$

$$\Phi_\varphi = \Phi_2 - \frac{a_{23}}{a_{33}}\Phi_3,$$

$$b_{31} = -\frac{a_{31} + a_{32}}{a_{33}},\ b_{32} = \frac{a_{32}}{a_{33}},\ b_{33} = \frac{1}{a_{33}},\ \Phi_z = -\frac{1}{a_{33}}\Phi_3. \qquad (2.35)$$

Рівняння сумісності (2.33) з урахуванням зв'язків (2.35) у напруженнях матимуть вигляд

$$\frac{d\sigma}{d\rho} + \sigma\frac{1}{b_{22}}\left(\frac{db_{22}}{d\rho} - \frac{b_{21} + b_{12} - b_{22}}{\rho}\right) = \frac{\sigma_r}{b_{22}}\left(\frac{b_{11} - b_{21}}{\rho} - \frac{db_{21}}{d\rho}\right) +$$

$$+ e_z\frac{1}{b_{22}}\left(\frac{(b_{13} - b_{23})}{\rho} - \frac{db_{23}}{d\rho}\right) + \frac{1}{b_{22}}\left(\frac{\Phi_r - \Phi_\varphi}{\rho} - \frac{d\Phi_\varphi}{d\rho}\right) - \frac{b_{21}}{b_{22}}\rho F_r.$$

Можна взяти також інше визначальне напруження $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_r + \sigma_\varphi$.

Відповідні рівняння рівноваги та суцільності (2.32) та (2.33) з врахуванням залежностей між деформаціями та переміщеннями $e_i = a_i^j \sigma_j + \Phi_i$ мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sigma_r) = \rho\sigma + \rho^2 F_r \ , \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[b_{22}\sigma \right] = \frac{1}{\rho}\left[b_{11} + b_{21} - \rho \frac{\partial b_{21}}{\partial \rho} \right] \sigma_r(\rho) + \frac{1}{\rho}\left[b_{13} - b_{23} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} b_{23} \right] e_z - b_{21} F_r \ , \tag{2.37}$$

де зв’язки між деформаціями та переміщеннями задані виразами (2.34) і

$$b_{11}(\rho) = a_{11}(\rho) - a_{12}(\rho) - a_{13}(\rho)\frac{a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)},$$

$$b_{12}(\rho) = a_{12}(\rho) - \frac{a_{13}(\rho) a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \ b_{13} = \frac{a_{13}(\rho)}{a_{33}(\rho)},$$

$$b_{21}(\rho) = a_{12}(\rho) - a_{22}(\rho) - a_{23}(\rho)\frac{a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \ b_{23}(\rho) = \frac{a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)} \ ,$$

$$b_{22}(\rho) = a_{22}(\rho) - \frac{a_{23}^2(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \qquad b_{31}(\rho) = a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho)\,, b_{32}(\rho) = a_{23}(\rho)\,,$$

$$b_{33}(\rho) = a_{33}(\rho)\,. \tag{2.38}$$

У випадку ізотропного середовища

$$b_{11}(\rho) = \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}, \quad b_{12}(\rho) = -\frac{\nu(\rho)\left[1+\nu(\rho)\right]}{E(\rho)}, \quad b_{13}(\rho) = -\nu(\rho)\,,$$

$$b_{21}(\rho) = -\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{22}(\rho) = \frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{23}(\rho) = -\nu(\rho)\,,$$

$$b_{31}(\rho) = 0\,, \qquad b_{32}(\rho) = -\frac{\nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{33}(\rho) = \frac{1}{E(\rho)}\,. \tag{2.39}$$

2.3.2. Рівняння рівноваги і сумісності у сферичній системі координат

Рівняння рівноваги і сумісності у сферичній системі координат запишемо для ізотропних тіл. Аналогічно, використовуючи символи Крістоффеля і метричні тензори у сферичній системі координат (А.3), (А.4) з врахуванням виразів зв'язків між деформаціями та переміщення з рівняння (2.8) матимемо:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{d\rho}+\frac{2}{\rho}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})=-F_r\ .$$

Після введення визначального напруження $\sigma=\frac{1}{2}\sigma_1+\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_r+\sigma_\varphi$, отримаємо

- рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^3\sigma_r)=2\rho^2\sigma-\rho^3F_r\ , \tag{2.40}$$

- зв'язки між компонентами тензорів деформацій і напружень

$$e_r=\frac{1+\nu}{E}\sigma_r-2\frac{\nu}{E}\sigma+\Phi, \qquad e_\varphi=-\frac{1}{2}\sigma_r\frac{1+\nu}{E}+\frac{1-\nu}{E}\sigma+\Phi, \tag{2.41}$$

- рівняння сумісності з використанням (2.41) у визначальних напруженнях

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\nu}{E}\sigma+\Phi\right]=\frac{\sigma_r}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)-\frac{F_r}{2}\frac{1+\nu}{E}. \tag{2.42}$$

2.3.3. Зведення задачі термопружності до інтегральних рівнянь Вольтерри у циліндричній системі координат

Випадок 1. Виберемо напруження $\sigma=\sigma_r-\sigma_\varphi$ за визначальне. Тоді після інтегрування (2.32) або використання (2.20) матимемо інтегральне рівняння

$$\sigma_r(\rho)=\sigma_r(\rho_1)-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\sigma(\eta)}{\eta}d\eta-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta F_r(\eta)d\eta, \tag{2.43}$$

та інтегральну умову

$$\sigma_r(\rho_2)-\sigma_r(\rho_1)=-\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\sigma(\eta)}{\eta}d\eta-\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\eta F_r(\eta)d\eta. \tag{2.44}$$

В результаті безпосереднього інтегрування рівнянь сумісності у напруженнях отримаємо з використанням інтегрування частинами [70] таке інтегральне рівняння Вольтерри другого роду відносно визначального напруження $\sigma=\sigma_r-\sigma_\varphi$

$$\sigma(\rho)+\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\sigma(\eta)\frac{1}{b_{22}}\left(\frac{db_{22}}{d\eta}-\frac{b_{21}+b_{12}-b_{22}+\left[V(\rho)-V(\eta)\right]}{\eta}\right)d\eta=$$

$$=\sigma(\rho_1)+e_z\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{b_{22}}\left(\frac{(b_{13}-b_{23})}{\rho}-\frac{db_{23}}{d\rho}\right)+\sigma_r(\rho_1)V(\rho)+$$

$$-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[V(\rho)-V(\eta)\right]\eta F_r(\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{b_{22}}\left(\frac{\Phi_r-\Phi_\varphi}{\eta}-\frac{d\Phi_\varphi}{d\rho}\eta\right)d\eta-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{b_{21}}{b_{22}}\eta F_r\,d\eta, \tag{2.45}$$

де

$$V(\eta)=\int\limits_{\rho_1}^{\eta}\frac{1}{b_{22}(\xi)}\left(\frac{b_{11}(\xi)-b_{21}(\xi)}{\xi}-\frac{db_{21}(\xi)}{d\xi}\right)d\xi.$$

постійні $\sigma(\rho_1)$, e_z, які входять у розв’язок інтегрального рівняння (2.45) визначаються з інтегральної умови (2.43) та умови на зусилля

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\eta\sigma_z(\eta)d\eta=\frac{p}{2\pi}\ , \tag{2.46}$$

де p – осьові зусилля, постійні $\sigma_r(\rho_1)$, $\sigma_r(\rho_2)$ – з умов на межах. Зокрема якщо на межах задані напруження, то $\sigma_r(\rho_1) = -p_1$, $\sigma_r(\rho_2) = -p_2$.

Випадок 2. Виберемо як визначальне напруження $\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi$. Тоді аналоги рівнянь (2.43) – (2.45), отримані з рівнянь рівноваги (2.36) та сумісності (2.37) з використанням зв'язків між деформаціями та напруженнями (2.38) будуть

$$\sigma_r(\rho) = \frac{\rho_1^2}{\rho^2}\sigma_r(\rho_1) + \frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho} \eta\Big(\sigma\ (\eta) - \eta F_r\ (\eta)\Big) d\eta, \tag{2.47}$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \eta\Big(\sigma\ (\eta) - \eta F_r\ (\eta)\Big) d\eta = \rho_2^2\sigma_r(\rho_2) - \rho_1^2\sigma_r^{(j)}(\rho_1), \tag{2.48}$$

$$\sigma(\rho) - \frac{1}{b_{22}(\rho)}\int_{\rho_1}^{\rho} \left[\varphi(\rho) - \varphi(\eta)\right]\eta\sigma(\eta)d\eta = \Psi_F(\rho) + \Psi_T(\rho) +$$

$$+\frac{1}{b_{22}(\rho)}\left[b_{22}(\rho_1)\sigma(\rho_1) + e_z\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\left[b_{13}(\eta) - b_{23}(\eta) - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}b_{23}(\eta)\right] d\eta \right],$$

де

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^3}\left[b_{11}(\eta) + b_{21}(\eta) - \eta\frac{\partial b_{21}(\eta)}{\partial\eta}\right] d\eta, \quad \varphi(\rho_1) = 0, \quad w(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\frac{b_{31}(\eta)}{b_{33}(\eta)}d\eta,$$

$$\Psi_T = \frac{1}{b_{22}(\rho)}\int_{\rho_1}^{\rho} \left[\frac{1}{\eta}\left(\Phi_r(\eta) - \Phi_\varphi(\eta) - \frac{a_{13}(\eta) - a_{23}(\eta)}{a_{33}(\eta)}\Phi_z(\eta)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\left(\Phi_\varphi(\eta) - \dfrac{a_{23}(\eta)}{a_{33}(\eta)}\Phi_z(\eta)\right)}{\partial\eta} \right] d\eta,$$

$$\Psi_F(\rho) = \frac{\rho_1^2\varphi(\rho)}{b_{22}(\rho)}p_1 - \frac{1}{b_{22}(\rho)}\int_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho) - \varphi(\eta) - \frac{b_{21}(\eta)}{\eta^2}\right]\eta^2 F_r\ (\eta)d\eta .$$

Відповідні коефіцієнти у зв'язках між тензорами деформацій та напруженнями (2.34) матимуть вигляд (2.38).

Як приклад запишемо інтегральне рівняння відносно радіальних напружень для ізотропного порожнистого циліндра. Для цього відповідне рівняння сумісності треба подати з використанням рівняння рівноваги через радіальні напруження з використанням зв'язків між тензорами деформацій та напружень (2.34), (2.39) і звести з використанням інтегрування частинами до інтегрального рівняння Вольтерри, яке подано як

$$\sigma_r(\rho)-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[V(\rho)-V(\eta)\right]\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta=$$

$$=A\frac{V(\rho)}{\rho^2}+e_z\frac{W(\rho)}{\rho^2}+f_T(\rho)+f_F(\rho), \tag{2.49}$$

де

$$f_T=-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{E(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}(1+\nu(\eta))\Phi(\eta)d\eta,$$

$$f_F(\rho)=-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\left[\left(V(\rho)-V(\eta)\right)\frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}+\eta\right]F(\eta)d\eta+\frac{1}{\rho^2}\rho_1^2\sigma_r(\rho_1),$$

$$V(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{E\eta}{1-\nu^2}d\eta,\quad W(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\nu\frac{E}{1-\nu^2}d\eta.$$

У цьому випадку сумарні напруження визначаються з рівняння рівноваги, сталі A, e_z у рівняння (2.49) – з інтегральних умов (2.48), (2.46), колові напруження з означення визначальних напружень, осьові напруження, компоненти тензора деформації, переміщення – зі зв'язків між деформаціями і напруженнями (2.34), (2.39) і співвідношень Коші.

2.3.4. Інтегральні рівняння Вольтерри у сферичній системі координат

Запишемо відповідні інтегральні рівняння у сферичній системі координат для неоднорідного ізотропного тіла. Після інтегрування рівнянь рівноваги (2.40) і (2.42) отримаємо відповідно [7, 9]

$$\sigma_r = \frac{\rho_1^3}{\rho^3}\sigma_r(\rho_1) + \frac{1}{\rho^3}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \Big(2\sigma(\eta) - \eta F_r\,(\eta)\Big) d\eta\,,$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \eta^2 \Big(2\sigma(\eta) - \eta F_r\,(\eta)\Big) d\eta = \rho_2^3\sigma_r(\rho_2) - \rho_1^3\sigma_r(\rho_1)\,, \tag{2.50}$$

$$\sigma_r(\rho) - \frac{1}{\rho^3}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \big[V(\rho) - V(\eta)\big]\varphi'(\eta)\sigma_r(\eta) d\eta =$$

$$= 2B\frac{V(\rho)}{\rho^3} + H(\rho) + Q(\rho) - \frac{\rho_1^3}{\rho^3}\sigma_r(\rho_1)\,, \tag{2.51}$$

де

$$V(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} d\eta\,, \quad H(\rho) = -\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \Big(2\eta^2 F_r\,(\eta) + \eta^3 F_r\,(\eta)\Big) d\eta\,,$$

$$Q(\rho) = -\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} 2\eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \Phi\big(T(\eta)\big) d\eta\,,$$

а постійна B визначається з інтегральної умови (2.50).

2.3.5. Інтегральні рівняння Фредгольма для порожнистих циліндра і кулі

Для порожнистого циліндра у випадку умов на межах

$$\sigma_r(\rho_1) = -p_1\,, \quad \sigma_r(\rho_2) = -p_2\,, \quad \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sigma_z(\eta) d\eta = p$$

інтегральне рівняння (2.49) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напружень шляхом визначення сталих A та e_z з інтегральних умов та їх підставляння у інтегральне рівняння. Відповідно отримаємо:

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} K(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta = Q(\rho), \tag{2.52}$$

де

$$K(\rho,\eta) = \begin{cases} K_1(\rho,\eta), \eta < \rho, \\ K_2(\rho,\eta), \eta > \rho, \end{cases} \tag{2.53}$$

$$K_1(\rho,\eta) = \left[\frac{V(\eta) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$K_2(\rho,\eta) = \left[\frac{V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$K_1(\rho,\rho) = K_2(\rho,\rho) = \left[\frac{V(\rho) - V(\rho)Z_1(\rho) + W(\rho)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(\rho_2)V(\rho) - W(\rho_2)W(\rho)}{\left[V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)\right]}, \qquad Z_2(\rho) = \frac{W(\rho_2)V(\rho) - V(\rho_2)W(\rho)}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)},$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2}\frac{d_1V(\rho_2) - d_2W(\rho_2)}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2}\frac{d_2V(\rho_2) - d_1W(\rho_2)}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)} + f(\rho),$$

$$f(\rho) = f_T(\rho) + f_F(\rho),$$

$$f_T(\rho) = -\frac{1}{\rho}\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{E(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}\left[1+\nu(\eta)\right]\Phi(\eta)d\eta,$$

$$f_F = -\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho} \eta\left[\left(V(\rho) - V(\eta)\right)\frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)} + \eta\right]F_r(\eta)d\eta - \frac{1}{\rho^2}\rho_1^2 p_1,$$

$$d_1 = -p_2 - f(\rho_2), \qquad d_2 = p + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \eta E \Phi(T) d\eta + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[W(\rho_2) - W(\eta) \right] \frac{1+\nu}{E} \eta F d\eta +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\eta E \nu}{1-\nu^2} (1+\nu) \Phi(T(\eta)) d\eta. \qquad (2.54)$$

Подібна методика дозволяє записати рівняння Фредгольма для порожнистої кулі у сферичній системі координат, якщо умови на межах $\sigma_r(\rho_1) = -p_1$, $\sigma_r(\rho_2) = -p_2$, використавши інтегральні рівняння Вольтерри для порожнистої кулі (2.51) та інтегральну умову (2.50), звідки

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} K(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta = \Psi(\rho), \qquad (2.55)$$

де

$$\varphi(\rho) = \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}, \;\; \varphi'(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)} \right), \; V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} d\eta,$$

$$H(\rho) = -\frac{1}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} \left(2\eta^2 F(\eta) + \eta^3 F_r(\eta) \right) d\eta,$$

$$Q(\rho) = -\frac{2}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \Phi(T(\eta)) d\eta,$$

$$\Psi(\rho) = H(\rho) - \frac{H(\rho_2)\rho_2^3}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(\rho_2)} + Q(\rho) - \frac{Q(\rho_2)\rho_2^3}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(\rho_2)} +$$

$$+ \frac{p_1 \rho_1^3}{\rho^3} \left[\frac{V(\rho)}{V(\rho_2)} - 1 \right] - \frac{p_2 \rho_2^3}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(\rho_2)},$$

$$K(\rho, \eta) = \begin{cases} K_{\eta\rho}(\rho, \eta) & \eta \le \rho \\ K_{\rho\eta}(\rho, \eta), & \eta \ge \rho \end{cases},$$

де

$$K_{\eta\rho}(\rho, \eta) = V(\eta) \left[1 - \frac{V(\rho)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta)}{2\rho^3}, \; K_{\rho\eta}(\rho, \eta) = V(\rho) \left[1 - \frac{V(\eta)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta)}{2\rho^3}.$$

2.3.6. Інтегральні рівняння Вольтерри і Фредгольма відносно переміщень у циліндричній системі координат

Щоб отримати відповідні інтегральні рівняння відносно переміщень потрібно записати відповідну задачу визначення термонапруженого стану у переміщеннях з урахуванням неоднорідності матеріалу. Для цього потрібно у циліндричній системі координат використати рівняння рівноваги (2.36) та зв'язки між напруженнями і деформаціями, вираженими формулами Коші [4, 281]

$$\sigma_r = E^*(1-\nu)\frac{du_r}{d\rho} + E^*\nu\frac{u_r}{\rho} + E^*\nu e_z - E^*(1+\nu)\Phi,$$

$$\sigma = E^*\frac{du_r}{d\rho} + E^*\frac{u_r}{\rho} + 2E^*\nu e_z - 2E^*(1+\nu)\Phi,$$

$$\sigma_z = e_z - \nu\sigma + E\Phi(T), \qquad E^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{2.56}$$

які для плоского деформованого стану збігаються з зв'язками поданими у [4, 281]. Підставляння (2.56) у рівняння рівноваги (2.36) призводить до такого диференціального рівняння відносно переміщень:

$$\frac{d^2u_r}{d\rho^2} + A(\rho)\frac{du_r}{d\rho} + B(\rho)u_r = f(\rho) + q(\rho)e_z, \tag{2.57}$$

де

$$f(\rho) = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{d\ln E^*}{d\rho} - (1+\nu)\frac{d\ln(1-\nu)}{d\rho} + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{d\Phi}{d\rho} + \frac{F_r}{E^*(1-\nu)},$$

$$q(\rho) = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\frac{d\ln(\nu E^*)}{d\rho}, \qquad A(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{d\ln E^*}{d\rho} + \frac{d\ln(1-\nu)}{d\rho},$$

$$B(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\ln(1-\nu)}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho(1-\nu)}\frac{d\ln E^*}{d\rho}.$$

Рівняння (2.57) є аналогічним до рівняння, отриманого в [322], записаному відносно переміщень через модуль зсуву та радіальну змінну $\overline{r} = \dfrac{r}{R_2 - R_1}$.

Відомо, що задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами з заданими умовами на межах можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [290, 335]. Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + A(\rho)\frac{du(\rho)}{d\rho} + B(\rho)u(\rho) = C(\rho) \tag{2.58}$$

з умовами на межах

$$u(\rho_1) = u_1\,,\ \ u(\rho_2) = \rho_2\,. \tag{2.59}$$

У нашому випадку

$$C(\rho) = f(\rho) + q(\rho)e_z\,.$$

Така задача зводиться двократним інтегруванням диференціального рівняння (2.58) з використанням умов на межі (2.59) до інтегрального рівняння Фредгольма вигляду

$$u(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} K(\rho,\eta)u(\rho)d\eta + D(\rho)\,, \tag{2.60}$$

де

$$D(\rho) = u_1 + \int_{\rho_1}^{\rho} (\rho-\eta)C(\eta)d\eta + \frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\left[u_2 - u_1 - \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho_2-\eta)C(\eta)d\eta\right],$$

$$K(\rho,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\left\{A(\eta) - (\rho_2-\eta)\left[\dfrac{dA(\eta)}{d\eta} - B(\eta)\right]\right\}, & \rho < \eta, \\ A(\eta)\left[\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1} - 1\right] - \dfrac{(\eta-\rho_1)(\rho_2-\rho)}{\rho_2-\rho_1}\left[\dfrac{dA(\eta)}{d\eta} - B(\eta)\right], & \rho > \eta. \end{cases}$$

Отже, рівняння (2.60) є інтегральним рівнянням Фредгольма відносно переміщень у припущенні сталих осьових деформацій. Плоскому деформованому стану відповідає $e_z = 0$ (жорстко в поздовжньому напрямі закріплений циліндр).

Відомо, що задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами з заданими умовами на одній з меж (функція і її похідна) можна звести до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду [290, 335]. Це вказує на те, що задача теорії пружності має розв'язок, якщо задати на одній з поверхонь циліндра переміщення і навантаження. Це відповідатиме умовам

$$u(\rho_1) = u_1 ,$$

$$\sigma_r(\rho_1) = E^*(1-\nu(\rho_1))\frac{du_r(\rho_1)}{d\rho} + E^*(\rho_1)\nu(\rho_1)\frac{u_r(\rho_1)}{\rho} + E^*(\rho_1)\nu(\rho_1)e_z -$$

$$-E^*(\rho_1)(1+\nu(\rho_1))\Phi(\rho_1) = -p_1 ,$$

звідки

$$\frac{du_r(\rho_1)}{d\rho} = -\frac{\nu(\rho_1)}{(1-\nu(\rho_1))}\frac{u_1}{\rho_1} - \frac{\nu(\rho_1)}{(1-\nu(\rho_1))}e_z + \frac{(1+\nu(\rho_1))}{(1-\nu(\rho_1))}\Phi(\rho_1) - p_1 .$$

Відповідне інтегральне рівняння Вольтерри має вигляд

$$u_r(\rho) + \int\limits_{\rho_1}^{\rho} \left\{ A(\eta) - (\rho-\eta)\left[\frac{dA(\eta)}{d\eta} - B(\eta)\right]\right\} u_r(\eta)d\eta = \left(1 + A(\rho_1)\right)u_r(\rho_1)(\rho-\rho_1) -$$

$$-\left[\frac{\nu(\rho_1)}{(1-\nu(\rho_1))}\frac{u_1}{\rho_1} + \frac{\nu(\rho_1)}{(1-\nu(\rho_1))}e_z - \frac{(1+\nu(\rho_1))}{(1-\nu(\rho_1))}\Phi(\rho_1) + p_1\right](\rho-\rho_1) +$$

$$+\int\limits_{\rho_1}^{\rho} (\rho-\eta)f(\eta)d\eta + e_z\int\limits_{\rho_1}^{\rho} (\rho-\eta)q(\eta)d\eta .$$

Постійну e_z визначають з інтегральної умови $\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \eta\sigma_z(\eta)d\eta = p$ або вважають її заданою.

Отримані рівняння Вольтерри і Фредгольма можна використовувати для визначення напруженого, зокрема термонапруженого стану (коли $\Phi = \alpha(\rho)(T(\rho) - T_0)$ для неоднорідного тіла або $\Phi = \int\limits_{T_0}^{T(\rho)} \alpha(\rho, \tau)(\tau - T_0)d\tau$ для неоднорідного і темочутливого тіла), якщо задані зовнішні навантаження або переміщення. Рівняння Фредгольма можуть бути використані для отримання умов відсутності компонент тензора напружень або отримання заданого розподілу компонент тензора напружень.

2.4. Температурні поля, які не викликають напружень

У попередніх параграфах відповідна задача термопружності для різних неоднорідних тіл канонічної форми зведена до інтегральних рівнянь Вольтерри або Фредгольма другого роду. Тому що отримані інтегральні рівняння містять також умови на межах, їх можна інтерпретувати як рівняння математичної моделі, яка описує зв'язки між напруженнями, залежними від координати або/і від температури характеристиками матеріалів, зовнішніми полями в рамках теорії пружності. Це дозволяє, на основі згаданих інтегральних рівнянь ставити обернені задачі про визначення таких температурних і/або інших полів, описаних доданком у рівняннях зв'язку між тензорами деформацій та напружень, які не спричиняють напружень у згаданих тілах або викликають заданий розподіл напружень.

Розглянуто, переважно, випадки, які можна описати точними аналітичними розв'язками відповідних обернених задач. Ці розв'язки стосовно температурного поля, отримані із запропонованих інтегральних рівнянь теорії пружності повинні задовольняти відповідні задачі визначення дії зовнішніх полів на згадані неоднорідні тіла.

2.4.1. Неоднорідний довгий порожнистий циліндр.

Базовим рівнянням є рівняння Фредгольма другого роду (2.52), записане у п. 2.3. при $L_0 = R_2$ (згадаємо, що $\rho = r / L_0$, де r – радіальна змінна, а L_0 – характериний розмір, тоді $\rho_2 = 1$)

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^{1} \mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)\, d\eta = Q(\rho), \qquad (2.61)$$

де

$$\mathrm{K}(\rho,\eta) = \begin{cases} \mathrm{K}_1(\rho,\eta), & \eta \le \rho, \\ \mathrm{K}_2(\rho,\eta), & \eta > \rho, \end{cases}$$

$$\mathrm{K}_1(\rho,\eta) = \left[-\frac{V(\rho) - V(\eta)}{\rho^2} + \frac{V(\rho) - V(\eta) Z_1(\rho) + W(\eta) Z_2(\rho)}{\rho^2} \right] \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$\mathrm{K}_2(\rho,\eta) = \left[\frac{V(\rho) - V(\eta) Z_1(\rho) + W(\eta) Z_2(\rho)}{\rho^2} \right] \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$\mathrm{K}_1(\rho,\rho) = \mathrm{K}_2(\rho,\rho) = \left[\frac{V(\rho) - V(\rho) Z_1(\rho) + W(\rho) Z_2(\rho)}{\rho^2} \right] \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(1)V(\rho) - W(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}, \quad Z_2(\rho) = \frac{W(1)V(\rho) - V(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2} \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2} \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho),$$

$$f(\rho) = f_T(\rho) + f_F(\rho),$$

$$f_T(\rho) = -\frac{1}{\rho} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{E(\eta)}{1 - \nu^2(\eta)} \left[1 + \nu(\eta) \right] \Phi(\eta) d\eta,$$

$$f_F = -\frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta \left[\left(V(\rho) - V(\eta) \right) \frac{1 + \nu(\eta)}{E(\eta)} + \eta \right] F_r(\eta) d\eta - \frac{1}{\rho^2} \rho_1^2 p_1,$$

$$d_1 = -p_2 - f(1),$$

$$d_2 = p + \int\limits_{\rho_1}^{1} \eta E \Phi(T(\eta)) d\eta + \int\limits_{\rho_1}^{1} \left[W(1) - W(\eta)\right] \frac{1+\nu}{E} \eta F(\eta) d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\rho_1}^{1} \frac{\eta E \nu}{1-\nu^2} (1+\nu) \Phi(T(\eta)) d\eta. \qquad (2.62)$$

Вважатимемо, що напруження відсутні, іншими словами, компоненти тензора напружень дорівнюють нулеві

$$\sigma_r(\rho) = \sigma_\varphi(\rho) = \sigma_z(\rho) = 0.$$

Потрібно визначити зв’язок між температурним полем та характеристиками матеріалів, які призводять до відсутності, однієї або декількох компонент тензора напружень. Це означає, що у рівнянні (2.61) потрібно покласти $\sigma_r(\rho) = 0$ та розв’язати рівняння

$$Q(\rho) = 0$$

відносно $\Phi(\rho)$ – членів, які описуються дію зовнішнього поля (полів). Припустимо, що масові сили відсутні, тоді

$$\frac{V(\rho)}{\rho^2} \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2} \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho) = 0. \qquad (2.63)$$

Якщо використати вирази для $V(\rho)$ і $W(\rho)$, то з (2.63) отримаємо таке інтегральне рівняння, яке зв’язує температурне поле, навантаження і фізико-механічні властивості матеріалу:

$$(1+\nu(\rho))\Phi(T(\rho)) - \frac{(1+\nu(\rho))}{V(1)+W(1)} \int\limits_{\rho_1}^{1} \frac{dV(\eta)}{d\eta} (1+\nu(\eta)) \Phi(T(\eta)) d\eta =$$

$$-p \frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}. \qquad (2.64)$$

Якщо $\Phi(T) = \alpha(\rho)(T - T_0)$, то T повинна задовольняти рівняння теплопровідності [27, 93, 139]

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right) + q_v(\rho) = 0 \qquad (2.65)$$

та відповідні умови на межах, наприклад умови конвективного теплообміну

$$\lambda(\rho_1)\frac{dT(\rho_1)}{d\rho}-\beta_1\left[T(\rho_1)-T_1\right]=0,$$

$$\lambda(\rho_2)\frac{dT(\rho_2)}{d\rho}+\beta_2\left[T(\rho_2)-T_2\right]=0. \tag{2.66}$$

або, зокрема, умови конвективно-променевого теплообміну

$$\lambda(\rho_1)\frac{dT(\rho_1)}{d\rho}-\beta_1\left[T(\rho_1)-T_1\right]-\varepsilon(T^4(\rho_1)-T_0^4)=0,$$

$$\lambda\left(\rho_2\right)\frac{dT\left(\rho_2\right)}{d\rho}+\beta_2\left[T\left(\rho_2\right)-T_2\right]+\varepsilon(T^4\left(\rho_2\right)-T_0^4)=0, \tag{2.67}$$

де T_0 – відлікова температура (як правило температура, при якій відсутні напруження), T_1, T_2 – температури навколишнього середовища на поверхнях, ε – ступінь чорноти поверхні.

З рівнянь теплопровідності потрібно за заданим температурним полем, отриманого з інтегрального рівняння, яке пов’язує напруження і температурні деформації, визначити в рамках заданої моделі умови теплообміну та теплові джерела, які створюють потрібне температурне поле. Окремо слід проаналізувати умови теплообміну, при яких отриманий вираз для температурного поля може задовольняти задачу теплопровідності при відсутності теплових джерел.

Подібну задачу можна поставити, якщо рівняння теплопровідності нестаціонарне. У цьому випадку відповідне температурне поле має задовольняти нестаціонарне рівняння теплопровідності та початковий розподіл температури і відповідні умови на межах. Слід відзначити, що початковий розподіл температури та умови на межах повинні бути узгодженими. Іншими словами, умови теплообміну на поверхнях, взагалі кажучи залежні від часу, повинні забезпечити температуру, яка в початковий момент часу збігається зі значеннями початкової температур на поверхні.

Одна з відповідних обернених задач теплопровідності (відрізняються умовами на межах) має вигляд

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dT(\rho,\tau)}{d\rho}\right)-C_v(\rho)\frac{dT(\rho,\tau)}{d\tau}+q_v(\rho,\tau)=0$$

$$\lambda(\rho_1)\frac{\partial T(\rho_1,\tau)}{\partial\rho}-\beta_1(T(\rho_1,\tau)-T_{e1}(\tau))=0,$$

$$\lambda(\rho_2)\frac{\partial T(\rho_2,\tau)}{\partial\rho}+\beta_2(T(\rho_2,\tau)-T_{e2}(\tau))=0$$

$$T(\rho,0)=\psi(\rho), \tag{2.68}$$

де τ – часова змінна, $\psi(\rho)$ – початковий розподіл температури, β_1, β_2 – коефіцієнти тепловіддачі, $T_{e1}(\tau)$, $T_{e2}(\tau)$ – змінні в часі температури навколишнього середовища на поверхнях, $C_v(\rho)$ – об'ємна теплоємність.

Відоме температурне поле, виражене з інтегрального рівняння (2.64) через термомеханічні характеристики матеріалу та силові навантаження повинно бути розв'язком задач теплопровідності (2.65), (2.66), (2.65), (2.67), а також (2.68). Це накладає умови на параметри і характеристики, які входять в задачу теплопровідності, зокрема на коефіцієнти теплообміну, температури навколишнього середовища, коефіцієнти теплопровідності, теплоємність, густина теплових джерел, коефіцієнт теплового лінійного розширення. Зокрема з умов (2.68) випливає, що вони повинні бути узгодженими у початковий момент часу. В іншому випадку, враховуючи той факт, що числові дані отримують для дискретних моментів часу як завгодно близьких до початкового, неузгодженість початкових умов та умов на межах фактично означає лінійне досягнення відповідних значень температури за перший крок зміни часу. Умови узгодження мають такий вигляд

$$\lambda(\rho_1)\frac{\partial\psi(\rho_1)}{\partial\rho}-\beta_1(\psi(\rho_1)-T_{e1}(0))=0,$$

$$\lambda(\rho_2)\frac{\partial\psi(\rho_2)}{\partial\rho}+\beta_2(\psi(\rho_2)-T_{e2}(0))=0,$$

які відображають факт виконання умов на межах у початковий момент часу. Ця природна умова є суттєвою при формулюванні обернених задач теплопровідності, бо усуває неоднозначність розв’язку обернених задач за рахунок неузгодження початкової та межових умов. Зрозуміло, що без узгодження умов, взагалі кажучи, неможливо дістати розв’язок сформульованої оберненої задачі теплопровідності.

Важливим моментом є виокремлення технологій, які дозволяють сьогодні керувати згаданими параметрами і характеристик механічних та теплових процесів. Технологічно складною є реалізація заданого розподілу густини теплових джерел в об’ємі тіла. Це можна, наприклад, здійснити у композитних матеріалах в усередненому сенсі, якщо забезпечити відповідну густину провідників електричного струму. Тоді однак слід знехтувати, напруженнями, які виникають на межі контакту провідних і непровідних середовищ (провідник і матриця). Тому першочерговий інтерес полягає у дослідженні процесів з відсутністю об’ємних теплових джерел. Це в свою чергу накладає певні умови на теплообмін. Тому, в основному, відповідні задачі теплопровідності, які моделюють теплообмін з навколишнім середовищем, розв’язуватимуться стосовно

- умов теплообміну, температур зовнішнього середовища, якщо задані характеристики матеріалів;
- характеристик матеріалів, якщо відомі умови теплообміну.

Конкретна математична модель відповідних обернених задач може бути сформульована тільки після отримання розв’язків відповідних інтегральних рівнянь (2.64) відносно температури. Для цього треба дослідити ці рівняння на наявність власних значень та існування розв’язків, що буде зроблено в наступних розділах.

З задачі теплопровідності видно, що механічні характеристики матеріалів входять у рівняння теплопровідності, як відомий вигляд температурного поля, виражений з рівнянь теорії пружності. Наявність великої кількості характеристик дає з одного боку більшу «свободу» вибору розв'язків обернених задач, а з другого обмежує їх кількість через відсутність моделі зв'язків між, скажімо, механічними, тепловими, тощо характеристиками.

Наступною задачею є визначення температурного поля, яке забезпечує заданий розподіл радіальних напружень. Відповідна задача полягатиме у визначенні розв'язків інтегрального рівняння (2.62)

$$Q_r(\rho) = \sigma_r(\rho) - \int_{\rho_1}^{1} K_r(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta, \tag{2.69}$$

відносно $y(\rho) = (1+\nu(\rho))\Phi(\rho)$, яке входить у $Q_r(\rho)$. Це рівняння відносно $y(\rho) = (1+\nu(\rho))\Phi(\rho)$ можна подати у вигляді

$$y(\rho) - \frac{(1+\nu(\rho))}{V(1)+W(1)}\int_{\rho_1}^{1}\frac{\eta E}{1-\nu^2}y(\eta)d\eta = \Theta(\rho), \tag{2.70}$$

де

$$\Theta(\rho) = \frac{V(1)\left\{\left[\rho_1^2 p_1 - p_2\right] + \nu(\rho)p\right\} - W(1)\left\{p + \nu(\rho)\left[\rho_1^2 p_1 - p_2\right]\right\}}{V^2(1) - W^2(1)} -$$

$$-\frac{1-\nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\sigma_r(\rho)\right] - \frac{1-\nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)}\int_{\rho_1}^{1}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2 K_r(\rho,\eta)\right]\sigma_r(\eta)d\eta,$$

де $\sigma_r(\rho)$ – відома величина.

2.4.2. Неоднорідна порожниста куля.

Припустимо, що у неоднорідній порожнистій кулі радіальні напруження $\sigma_r(\rho)$ задано. На основі цього припущення виникає задача встановлення таких зв'язків між температурним полем і характеристиками матеріалу, які забезпечують у порожнистій неоднорідній кулі заданий розподіл радіальних напружень.

Сформульована вище задача для неоднорідної термочутливої кулі є досить складною та вимагає ретельнішого дослідження. Тому надалі будемо розглядати випадок відсутності залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від температури.

При відомій залежності радіального напруження від радіальної координати права частина інтегрального рівняння (2.55) дорівнюватиме відомій функції:

$$\Psi(\rho)=\sigma_r(\rho)+\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta. \qquad (2.71)$$

Нехай такі фізичні характеристики матеріалу як модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт теплопровідності та коефіцієнт лінійного теплового розширення виражаються деякими неперервними залежними від радіальної координати функціями

$$E=E(\rho),\ \nu=\nu(\rho),\ \lambda=\lambda(\rho),\ \alpha=\alpha(\rho).$$

Будемо також вважати, що розподіл масових сил вздовж радіальної координати є рівним нулеві $f_r(\rho)=0$. А тому, відповідно, і $F(\rho)=0$ та $H(\rho)=0$.

Тоді на основі виразів (2.71), (2.55) можна записати:

$$Q(\rho)-\frac{Q(1)}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}+\frac{\rho_1^3 p_1}{\rho^3}\left[\frac{V(\rho)}{V(1)}-1\right]-\frac{p_2}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}=$$

$$=\sigma_r(\rho)+\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta. \qquad (2.72)$$

Підставляючи у (2.72) вираз для $Q(\rho)$ із (2.55), маємо

$$-\frac{1}{\rho^3}\int_{\rho_1}^{\rho}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\Phi\big(T(\eta)\big)d\eta+\frac{1}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}\int_{\rho_1}^{1}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\Phi\big(T(\eta)\big)d\eta+$$

$$+\frac{\rho_1^3 p_1}{\rho^3}\left[\frac{V(\rho)}{V(1)}-1\right]-\frac{p_2}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}=\sigma_r(\rho)+\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta.$$

Введемо для зручності деяку функцію відносної температури $t(\rho)=T(\rho)-T_0$. Тоді

$$\Phi(\rho)=\alpha(\rho)t(\rho). \tag{2.73}$$

Отже

$$\frac{1}{\rho^3}\int_{\rho_1}^{\rho}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta-\frac{1}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}\int_{\rho_1}^{1}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta=$$

$$=\frac{\rho_1^3p_1}{\rho^3}\left[\frac{V(\rho)}{V(1)}-1\right]-\frac{p_2}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}-\sigma_r(\rho)-\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta,$$

звідки

$$V(1)\int_{\rho_1}^{\rho}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta-V(\rho)\int_{\rho_1}^{1}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta=$$

$$=\rho_1^3p_1\left[V(\rho)-V(1)\right]-p_2V(\rho)-V(1)\rho^3\sigma_r(\rho)-V(1)\rho^3\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta. \tag{2.74}$$

Продиференціюємо обидві частини рівності (2.74) по ρ. Тоді

$$V(1)\cdot 2\rho^2\frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)}\alpha(\rho)t(\rho)-\rho^2\frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)}\int_{\rho_1}^{1}2\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t_1(\eta)d\eta=$$

$$=\rho_1^3p_1\cdot\rho^2\frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)}-p_2\cdot\rho^2\frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)}-V(1)\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\sigma_r(\rho)\right)-$$

$$-V(1)\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta\right). \tag{2.75}$$

Поділимо обидві частини рівняння (2.75) на $2V(1)\rho^2\dfrac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)}$.

Отримаємо

$$\alpha(\rho)t(\rho)-\frac{1}{V(1)}\int_{\rho_1}^{1}\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta=\frac{1}{2V(1)}L(\rho),$$

де

$$L(\rho)=\rho_1^3 p_1 - p_2 - V(1)\frac{1-\nu(\rho)}{\rho^2 E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\sigma_r(\rho)\right)-$$

$$-V(1)\frac{1-\nu(\rho)}{\rho^2 E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta\right).$$

Отже, отримано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно теплової деформації $\Phi(\rho)$, заданої виразом (2.73) із виродженим (сепарабельним) ядром відносно, у вигляді:

$$\Phi(\rho)-\chi\int_{\rho_1}^{1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}\Phi(\eta)d\eta=\mathrm{X}(\rho), \tag{2.76}$$

де $\chi=\dfrac{1}{V(1)}$, $\mathrm{X}(\rho)=\dfrac{1}{2V(1)}L(\rho)$.

Вважаємо, що в незв'язаній задачі термопружності температурне поле задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right)+q_v(\rho)=0 \tag{2.77}$$

і межові умови

$$t(\rho_1)=t_1\,, \qquad t(1)=t_2\,. \tag{2.78}$$

Температурне поле, визначене з інтегрального рівняння (2.76) повинно задовольняти задачу теплопровідності (2.77), (2.78). Замість умов (2.78) можна взяти інші умови теплообміну, наприклад, конвективні, променеві або заданий потік тепла.

У випадку нестаціонарного температурного поля відповідна задача має вигляд:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda(\rho)\frac{dt(\rho,\tau)}{d\rho}\right)+q_v(\rho,\tau)-C_v(\rho)\frac{dt(\rho,\tau)}{d\tau}=0\,,$$

$$\lambda(\rho_1)\frac{\partial t(\rho_1,\tau)}{\partial\rho}-\beta_1(t(\rho_1,\tau)-t_{e1}(\tau))=0\,,$$

$$\lambda(1)\frac{\partial t(1,\tau)}{\partial\rho}+\beta_2(t(1,\tau)-t_{e2}(\tau))=0\,,$$

$$t(\rho,0)=\varphi(\rho). \qquad (2.79)$$

Початкові умови повинні бути узгоджені з умовами на межах

$$\lambda(\rho_1)\frac{\partial\varphi(\rho_1)}{\partial\rho}-\beta_1(\varphi(\rho_1)-t_{e1}(0))=0,$$

$$\lambda(1)\frac{\partial\varphi(1)}{\partial\rho}+\beta_2(\varphi(1)-t_{e2}(0))=0, \qquad (2.80)$$

а температурне поле визначене з інтегрального рівняння (2.76), яке містить час τ як параметр, є відомим розв'язком рівнянь (2.79), (2.80). З (2.79), (2.80) потрібно визначити параметри теплообміну та густину теплових джерел, які забезпечують однозначність розв’язку стаціонарної або нестаціонарної задачі теплопровідності або характеристики матеріалу, якщо відомі теплові навантаження.

2.4.3. Неоднорідний за товщиною нескінчений шар

У випадку залежності термонапруженого стану та характеристик неоднорідного шару з поверхнями $z=z_1$, $z=z_2$ $(z_2>z_1)$ від товщини можливі різні типи умов. Це може бути, плоско-деформований стан [17, 125] або задані інтегральні умови у перерізі. В обох випадках пряма задача для визначення напружень має точні розв’язки [17, 125], на відміну від циліндра чи кулі. Це обумовлено тим, що рівняння стосовно поперечних і поздовжніх напружень відокремлюються.

Відповідні результати при відсутності масових сил мають вигляд [17, 125]

$$\sigma(z)=\frac{E(z)}{1-\nu(z)}\left[\frac{AN_t z-BM_t z+AM_t-CN_t}{A^2-BC}-\Phi(z)\right]=0$$

або

$$\sigma(z)=\frac{E(z)}{1-\nu(z)}\left[\frac{N_t(Az-C)+M_t(A-Bz)}{A^2-BC}-\Phi(z)\right], \qquad (2.81)$$

де

$$A=\int\limits_{z_1}^{z_2}\eta E^*(\eta)d\eta,\ B=\int\limits_{z_1}^{z_2}E^*(\eta)d\eta,\ C=\int\limits_{z_1}^{z_2}\eta^2E^*(\eta)d\eta,$$

$$N_t=\int\limits_{z_1}^{z_2}E^*(\eta)\Phi(\eta)d\eta,\ M_t=\int\limits_{z_1}^{z_2}\eta E^*(\eta)\Phi(\eta)d\eta,$$

$$E^*(x)=\frac{E(x)}{1-\nu(x)}.$$

у випадку моментних умов і

$$\sigma(z)=\frac{\nu}{1-\nu}\int\limits_0^z F_z(\xi)d\xi-\frac{\nu(z)}{1-\nu(z)}p_1-\frac{E(z)}{1-\nu(z)}\Phi(T(z))+e\frac{E(z)}{1-\nu(z)},\qquad(2.82)$$

$$e=\frac{P-\int\limits_{z_1}^{z_2}\left[\frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}\int\limits_{z_1}^{\xi}F_x(x)dx-\frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}p_1-\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}\Phi(T(\xi))\right]d\xi}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}.$$

у випадку плоского деформованого стану.

Рівняння для визначення зовнішнього поля, яке забезпечує відсутність поздовжніх напружень має вигляд

$$\sigma(z)=0,$$

звідки на основі (2.81) отримаємо:

- у випадку моментних умов

$$\Phi(z)-\frac{(Az-C)}{A^2-BC}\int\limits_{z_1}^{z_2}E^*(\eta)\Phi(\eta)d\eta-\frac{(A-Bz)}{A^2-BC}\int\limits_{z_1}^{z_2}\eta E^*(\eta)\Phi(\eta)d\eta=0;\qquad(2.83)$$

- у випадку плоского деформованого стану

$$\Phi(z)-\frac{\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}\Phi(T(\xi))d\xi}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}=0\cdot\qquad(2.84)$$

Температурне поле, визначене з $\Phi(z)=\alpha(z)(T-T_0)$ повинно задовольняти рівняння теплопровідності, побудоване на основі закону теплопровідності Фур’є

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}T(z)\right]=-q_v(z) \text{ (стаціонарний випадок)} \qquad (2.85)$$

або

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial}{\partial z}T(z,\tau)\right]-C_v(z)\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau}=-q_v(z) \text{ (нестаціонарний випадок)} \qquad (2.86)$$

та відповідну початкову умову у випадку нестаціонарного теплообміну,

$$T(z,0)=\varphi(z) \qquad (2.87)$$

й умови на межах, наприклад, конвективного теплообміну.

$$\left[\lambda(z)\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z}-\beta_1(T(z,\tau)-T_1(\tau))\right]\Bigg|_{z=z_1}=0,$$

$$\left[\lambda(z)\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z}+\beta_2(T(z,\tau)-T_2(\tau))\right]\Bigg|_{z=z_2}=0. \qquad (2.88)$$

Початкові умови та умови на межах повинні бути узгоджені:

$$\left[\lambda(z)\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}-\beta_1(T(z,0)-T_1(0)\right]\Bigg|_{z=z_1}=0,$$

$$\left[\lambda(z)\frac{\partial \varphi(0)}{\partial z}+\beta_2(T(z,0)-T_2(0))\right]\Bigg|_{z=z_2}=0. \qquad (2.89)$$

У задачі теплопровідності (2.85), (2.88) або (2.86), (2.87), (2.89) температурне поле визначено з інтегрального рівняння (2.83) або (2.84). З задач теплопровідності (2.85) – (2.89) потрібно визначити умови відсутності напружень та способи їх виконання, узгодженням умов навантаження та характеристик неоднорідного матеріалу.

2.4.4. Довгий неоднорідний прямокутний брус

Розглянемо довгий неоднорідний прямокутний брус, віднесений до декартової системи координат $Oxyz$, початок якої розмістимо на перетині діагоналей прямокутника $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, а вісь Oz спрямуємо вздовж осі бруса. Всі характеристики матеріалу вважатимемо функціями від координат x, y. Для такого бруса розглянемо незв'язану стаціонарну задачу термопружності, яка описується [4]

– *рівняннями рівноваги*

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = F_x(x,y), \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = F_y(x,y), \tag{2.90}$$

– *рівняннями сумісності деформацій*

$$2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \tag{2.91}$$

– *зв'язками між деформаціями і напруженнями*

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \Phi, \quad e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) + \Phi,$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \Phi, \quad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}, \tag{2.92}$$

де σ_{ij}, e_{ij} $i, j = x, y, z$, – компоненти тензорів напружень та деформації, $e_{zz} = \mathrm{const}$, $E = E(x,y)$ – модуль пружності, $\nu = \nu(x,y)$ – коефіцієнт Пуассона, $F_x = F_x(x,y)$, $F_y = F_y(x,y)$ – компоненти вектора масових сил, а адитивний член Φ описує вклад температурного поля $T(x,y)$ у тензор деформацій. У випадку, коли коефіцієнт лінійного теплового розширення циліндра α залежить від координат і температури (термочутливий матеріал), $\alpha = \alpha(x, y, T(x,y))$, цей адитивний член має вигляд

$$\Phi \equiv \Phi(x, y, T(x,y)) = \int\limits_{T_0}^{T(x,y)} \alpha(x, y, \overline{T})\, d\overline{T}\,.$$

Якщо знехтувати температурною залежністю коефіцієнта лінійного температурного розширення, коли $\alpha = \alpha(x, y)$, тоді маємо $\Phi = \alpha(x, y)(T(x, y) - T_0)$, де T_0 – початкова температура ненапруженого бруса.

– На поверхнях бруса задаємо умови

$$\sigma_{xx}(\pm a, y) = -p_x^{\pm}(y), \qquad \sigma_{yy}(x, \pm b) = -p_y^{\pm}(x),$$

$$\sigma_{xy}(\pm a, y) = -q_x^{\pm}(y), \qquad \sigma_{xy}(x, \pm b) = -q_y^{\pm}(x). \tag{2.93}$$

Тут $p_x^{\pm}(y), p_y^{\pm}(x)$, $q_x^{\pm}(y)$, $q_y^{\pm}(x)$ – силові навантаження на відповідних поверхнях бруса. Отже з рівнянь (2.90) – (2.93) потрібно визначити $\Phi(x, y)$ при відсутності навантажень і відомих компонентах тензора напружень. Отриманий вираз, який є температурним полем, що не спричиняє напружень, повинен задовольняти відповідну задачу теплопровідності. Інакше, стаціонарне температурне поле $t(x, y) = T(x, y) - T_0$ повинно бути розв'язком задачі теплопровідності, яка відповідає закону теплопровідності Фур'є і описується рівнянням [27]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial x}t(x, y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial y}t(x, y)\right] = -q_v(x, y) \tag{2.94}$$

та умовами конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через сторони прямокутного перерізу:

$$\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial x}t(x, y) - \beta_{-a}(t(x, y) - t_{-a}(y))\right]\Bigg|_{x=-a} = 0,$$

$$\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial x}t(x, y) + \beta_{a}(t(x, y) - t_{a}(y))\right]\Bigg|_{x=a} = 0,$$

$$\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial y}t(x, y) - \beta_{-b}(t(x, y) - t_{-b}(x))\right]\Bigg|_{y=-b} = 0,$$

$$\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial y}T(x, y) + \beta_{b}(T(x, y) - T_{b}(x))\right]\Bigg|_{y=b} = 0, \tag{2.95}$$

де $\lambda(x,y)$ – коефіцієнт теплопровідності, β_k, t_k, $(k=\pm a,\pm b)$ – коефіцієнти теплообміну та значення температури навколишнього середовища. Таке відоме температурне поле, виражене через силові навантаження на поверхнях та термомеханічні характеристики матеріалу, призводить до певних умов узгодження на межі та коефіцієнтів теплообміну. Завдання полягатиме у визначення вигляду температурного поля $t(x,y)$ з задачі (2.90) – (2.93) та визначенні точних аналітичних розв'язків задачі (2.94), (2.95) з відомою функцією $t(x,y)$ відносно параметрів теплообміну та характеристик матеріалів.

2.4.5. Неоднорідний скінчений циліндр

Розглянемо круговий порожнистий неоднорідний циліндр, віднесений до циліндричної системи координат $Or\varphi z$, початок якої розмістимо на осі Oz, яка збігається з його віссю симетрії , $-r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $z_1 \le z \le z_2$, де r_1 , r_2 – радіуси внутрішніх і зовнішніх колових поверхонь циліндра, а z_1 z_2 координати площин по осі Oz. Всі характеристики матеріалу вважатимемо функціями від координат r, z. Для такого циліндра розглянемо математичну модель незв'язаної термопружності, яка описується [4]

– *рівняннями рівноваги*

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_r)+\rho\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}-\sigma_\theta=-\rho^2 F_r\ , \quad \rho\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\rho}+\sigma_{rz}+\rho\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\rho^2 F_z\ , \qquad (2.96)$$

– *рівняннями сумісності деформацій*

$$\rho\frac{\partial e_\theta}{\partial\rho}=e_r-e_\theta,\quad \rho\frac{\partial^2 e_\theta}{\partial z^2}-\frac{\partial e_{rz}}{\partial z}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial\rho}=0\,, \qquad (2.97)$$

– *зв'язками між деформаціями і напруженнями*

$$e_r(\rho,z)=\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\sigma_r(\rho,z)-\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\sigma(\rho,z)+\Phi(\rho,z),$$

$$e_\varphi(\rho,z)=\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\sigma_\varphi(\rho,z)-\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\sigma(\rho,z)+\Phi(\rho,z),$$

$$e_z(\rho,z)=\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\sigma_z(\rho,z)-\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\sigma(\rho,z)+\Phi(\rho,z),\quad e_{rz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{rz},\qquad(2.98)$$

де σ_{ij}, e_{ij} $i,j=r,\varphi,z$, – компоненти тензорів напружень та деформації, $e_{zz}=\mathrm{const}$, $E=E(\rho,z)$ – модуль пружності, $\nu=\nu(r,z)$ – коефіцієнт Пуассона, $F_r=F_r(\rho,z)$, $F_z=F_z(\rho,z)$ – компоненти вектора масових сил, а адитивний член Φ описує вклад температурного поля $T(r,z)$ у деформації. У випадку, коли коефіцієнт лінійного теплового розширення циліндра α залежить від координат і температури (термочутливий матеріал), $\alpha=\alpha(\rho,z,T(\rho,z))$, цей адитивний член має вигляд

$$\Phi\equiv\Phi(\rho,z,T(\rho,z))=\int_{T_0}^{T(\rho,z)}\alpha(\rho,z,\overline{T})\,d\overline{T}.$$

Якщо знехтувати температурною залежністю коефіцієнта лінійного температурного розширення, коли $\alpha=\alpha(\rho,z)$, тоді маємо $\Phi=\alpha(\rho,z)(T(\rho,z)-T_0)$, де T_0 – початкова температура ненапруженого циліндра.

– На поверхнях циліндра задаємо умови

$$\sigma_{rr}(\rho_i,z)=-p_{i\rho}(z),\qquad \sigma_{zz}(\rho,z_i)=-p_{iz}(\rho),$$

$$\sigma_{\rho z}(\rho_i,z)=-q_{i\rho}(z),\qquad \sigma_{\rho z}(\rho,z_i)=-q_{iz}(\rho).\qquad(2.99)$$

Тут $p_{i\rho}(z)$, $p_{iz}(\rho)$, $q_{i\rho}(z)$, $q_{iz}(\rho)$ – силові навантаження на відповідних поверхнях циліндра.

Рівняння (2.96) – (2.99) потрібно розв'язати відносно теплових деформацій $\Phi(\rho,z)$. З виразу для $\Phi(\rho,z)$ визначено температурне поле

$$t(\rho,z)=T(\rho,z)-T_0=\frac{\Phi(\rho,z)}{\alpha(\rho,z)},\qquad(2.100)$$

яке повинно бути розв'язком задачі теплопровідності, що містить рівняння теплопровідності за законом Фур'є

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial z}\right)=-q_v(\rho,z)\,, \qquad (2.101)$$

де $\lambda(\rho,z)$ – коефіцієнт теплопровідності, $q_v(\rho,z)$– густина теплових джерел та умови на межах, наприклад, конвективного теплообміну

$$\lambda(\rho_1,z)\frac{\partial t(\rho_1,z)}{\partial\rho}-\beta_{\rho_1}(t(\rho_1,z)-t_{\rho_1}(z))=0\,,$$

$$\lambda(\rho_2,z)\frac{\partial t(\rho_2,z)}{\partial\rho}+\beta_{\rho_2}(t(\rho_1,z)-t_{\rho_2}(z))=0\,,$$

$$\lambda(\rho,z_1)\frac{\partial t(\rho,z_1)}{\partial z}-\beta_{z_1}(t(\rho,z_1)-t_{z_1}(\rho))=0\,,$$

$$\lambda(\rho,z_2)\frac{\partial t(\rho,z_1)}{\partial z}+\beta_{z_2}(t(\rho,z_1)-t_{z_2}(\rho))=0\,. \qquad (2.102)$$

У формулах (2.102) нижні індекси біля коефіцієнта теплообміну β та температур зовнішнього середовища $t(\rho)$ і $t(z)$ означають поверхні, на яких задані ці величини. На перетині поверхонь повинні виконуватись умови рівності температур середовища

$$t_{z_1}(\rho_1)=t_{\rho_1}(z_1)\,,\ t_{z_1}(\rho_2)=t_{\rho_2}(z_1)\,,\ t_{z_2}(\rho_1)=t_{\rho_1}(z_2)\,,\ t_{z_2}(\rho_2)=t_{\rho_2}(z_2)\,. \qquad (2.103)$$

Отже визначення умов існування температурного поля (2.100), яке не створює термонапружень, звелось до визначення обмежень на умови нагрівання та характеристики матеріалів з рівняння теплопровідності (2.101) і умови на межах (2.102), (2.103) після підставляння у них відомого класу розв'язків задачі теплопровідності (2.100).

2.5. Висновки

Задачі термопружності для неоднорідних тіл канонічної форми зведені до рівнянь Вольтерри і Фредгольма другого роду для визначальних напружень, вибраних різними способами з використанням апарату тензорного числення.

На основі цих рівнянь сформульовані задачі визначення температурних полів в неоднорідних тілах, які не створюють напружень, або призводять до заданого розподілу компоненти напружень, якщо характеристики термонапруженого стану залежать від однієї та координати.

Показано, що у випадку залежності характеристик термонапруженого стану та матеріалів від однієї координати рівність нулеві однієї з компонент тензора напружень призводить при відсутності масових сил і поздовжніх навантажень до відсутності всіх інших.

Сформульовані задачі визначення температурних полів, які не створюють напружень для неоднорідних довгого прямокутного бруса та кругового порожнистого циліндра.

Розподіл температури, який не викликає напружень або створює заданий розподіл компоненти тензора напружень, виражений через термомеханічні характеристики матеріалу з рівнянь теорії пружності повинен бути розв’язком відповідної задачі теплопровідності. Це робить можливим трактувати задачу теплопровідності, як умови на характеристики неоднорідного матеріалу і теплові навантаження, які забезпечують заданий термонапружений стан, зокрема, відсутність напружень.

РОЗДІЛ 3

ВИЗНАЧЕННЯ УМОВ НАГРІВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ВІДСУТНІСТЬ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ

Сучасні технології дозволяють виготовляти елементи конструкцій із використанням матеріалів з заданими розподілами їх пружних і теплофізичних характеристик [229, 240, 260] з метою продовження терміну експлуатації виробів при теплових та силових навантаженнях. Тому виникає проблема визначення таких температурних полів при заданій залежності характеристик матеріалу від координати, які б мінімізували або забезпечували відсутність однієї із складових напружень.

Не менш актуальною задачею є підбір таких характеристик неоднорідного матеріалу, який би забезпечував відсутність переміщень чи напружень при заданих теплових чи силових навантаженнях.

У розділі запропоновано методику визначення температурних полів, які б забезпечували певні розподіли компонент тензора напружень, зокрема їх відсутність, у неоднорідних порожнистих довгому циліндрі і кулі та неоднорідному шарі шляхом розв’язування відповідної оберненої задачі некласичної стаціонарної термопружності у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [7, 8, 87 – 90, 94, 98 – 101, 105].

3.1. Визначення температурних полів, які не викликають напружень у циліндричних тілах

3.1.1. Стаціонарне температурне поле

Для встановлення температурного поля, яке не викликає радіальних напружень використано інтегральне рівняння Фредгольма

$$(1+\nu(\rho))\Phi(T(\rho))-\frac{1+\nu(\rho)}{V(1)+W(1)}\int\limits_{\rho_1}^{1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}(1+\nu(\eta))\Phi(T(\eta))d\eta=$$

$$=-p\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{V^2(1)-W^2(1)}, \tag{3.1}$$

отримане з інтегрального рівняння (2.64). Тут $\rho=r/R_2$, $V(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}d\eta$, $W(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E(\eta)\nu(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}d\eta$. Розв’язок інтегрального рівняння (3.1) з виродженим ядром, яке має власне значення, відносно температурних деформацій $\Phi(T(\rho))$, а отже й температури $T(\rho)$, є необхідною умовою існування відсутності радіальних напружень у неоднорідному порожнистому циліндрі. Цей розв’язок має вигляд [290]:

$$(1+\nu(\rho))\Phi(T(\rho))=\widetilde{C}\frac{1+\nu(\rho)}{V(1)+W(1)}-p\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{V^2(1)-W^2(1)},$$

звідки

$$T(\rho)=\widetilde{C}\frac{1}{\alpha(\rho)\left[V(1)+W(1)\right]}-p\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{\alpha(\rho)\left[V^2(1)-W^2(1)\right](1+\nu(\rho))}+T_0, \tag{3.2}$$

де $\widetilde{C}$ – довільна стала, T_0 – відлікова температура, при якій напруження відсутні. Коли осьове силове навантаження відсутнє ($p=0$ або $\nu(\rho)=const$) вираз для температури (3.2) спрощується

$$t(\rho)=T(\rho)-T_0=\frac{C}{\alpha(\rho)}, \tag{3.3}$$

де $C=\widetilde{C}/\left[V(1)+W(1)\right]$. Вирази (3.2) і (3.3) визначають температурне поле, яке не спричиняє радіальних напружень $(\sigma_r(\rho)=0)$. Це поле не спричиняє колових напружень ($\sigma_\varphi(\rho)=0$) при відсутності масових сил, як це випливає з рівняння рівноваги (2.32). Температурне поле (3.3) не спричиняє також поздовжніх напружень ($\sigma_z(\rho)=0$) при відсутності силових навантажень на проверхні і в перерізі ($p_1=p_2=p=0$). Справді, зі зв’язків між деформаціями і напруженнями (2.34), (2.39) отримаємо для ізотропного тіла $\sigma_z(\rho)=E(\rho)e_z-E(\rho)\Phi(\rho)=E(\rho)(e_z-C)$, коли $(\sigma_r(\rho)=\sigma_\varphi(\rho)=0)$. Використання умови $\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\sigma_z(\eta)d\eta=0$ призводить до рівності $e_z=C$, а отже і до рівності $\sigma_z = 0$. Наявність силових навантажень в інтегральній умові $p \neq 0$ призводить до наявності поздовжніх напружень. Вираз (3.3) не є умовою відсутності напружень при сталому коефіцієнті Пуассона, якщо $p \neq 0$. У випадку $p \neq 0$, $\nu(\rho) = const$ вираз (3.3) є умовою відсутності тільки колових і радіальних напружень. Розподіл осьових напружень у цьому випадку повторює профіль розподілу модуля пружності $E(\rho)$ і відрізняється тільки сталим множником, залежним від осьового силового навантаження.

Розподіли температури (3.2) або (3.3) повинні бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right) + q_v(\rho) = 0 \tag{3.4}$$

з класичними умовами на поверхнях $\rho = \rho_1$ і $\rho = 1$, наприклад

$$\lambda(\rho_1)\frac{dt(\rho_1)}{d\rho} - \beta_1\left[\, t(\rho_1) - t_1 \,\right] = 0,$$

$$\lambda(1)\frac{dt(1)}{d\rho} + \beta_2\left[t(1) - t_2\,\right] = 0, \tag{3.5}$$

або

$$t(\rho_1) = t_1\,, \qquad t(1) = t_2\,, \tag{3.6}$$

де β_1, β_2 – коефіцієнти теплообміну з середовищами, які мають прирости температури t_1, t_2 відносно T_0 відповідно.

Розглянемо вимоги, які накладає розв'язок вигляду (3.3) на умови конвективного теплообміну (3.5), обумовлені наявності однієї довільної сталої у виразі для температури (3.3) та двох умов на межах циліндра. З урахуванням (3.3) і (3.5) отримаємо умови узгодження температур на поверхнях циліндра:

$$\left[\lambda(\rho)\frac{C}{\alpha^2(\rho)}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} + \beta_1\frac{C}{\alpha(\rho)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1} = \beta_1 t_1\,,$$

$$\left[-\lambda(\rho)\frac{C}{\alpha^2(\rho)}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}+\beta_2\frac{C}{\alpha(\rho)}\right]\Bigg|_{\rho=1}=\beta_2 t_2. \tag{3.7}$$

З виразу (3.7) можна визначити такий зв'язок між температурами зовнішніх середовищ, який забезпечує нульові радіальні напруження

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho)}-\dfrac{\lambda(\rho)}{\beta_2\alpha^2(\rho)}\dfrac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right]\Bigg|_{\rho=1}}{\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho)}+\dfrac{\lambda(\rho)}{\beta_1\alpha^2(\rho)}\dfrac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right]_{\rho=\rho_1}}.$$

Подібні простіші формули можна записати для умов першого і другого роду на межах. Зокрема, якщо на поверхнях циліндра задано сталі температури (3.6), то $C=t_1\,\alpha(\rho_1)$ і $C=t_2\alpha(1)$, а тому і $t_1\,\alpha(\rho_1)=t_2\alpha(1)$. Якщо вираз для температури (3.2) підставити у (3.4), то для теплових джерел, які забезпечують нульові напруження при наявності заданих теплових і осьових силових навантажень дістанемо

$$q_v(\rho)=-\frac{1}{\rho}\left[C-p\frac{1}{\left[V^2(1)-W^2(1)\right]}\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{1+\nu(\rho)}\right]\times$$

$$\times\left\{-\frac{d\left[\rho\lambda(\rho)\right]}{d\rho}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}+\rho\lambda(\rho)\left[\frac{2}{\alpha(\rho)}\left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right)^2-\frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2}\right]\right\}-$$

$$-\frac{2p}{\left[V^2(1)-W^2(1)\right]}\lambda(\rho)\frac{1}{\alpha^2(\rho)}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{1+\nu(\rho)}\right]+$$

$$+\frac{p}{\rho}\frac{1}{\left[V^2(1)-W^2(1)\right]}\frac{1}{\alpha(\rho)}\left\{\frac{d\left[\rho\lambda(\rho)\right]}{d\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{1+\nu(\rho)}\right]+\right.$$

$$\left.+\rho\lambda(\rho)\frac{d^2}{d\rho^2}\left[\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{1+\nu(\rho)}\right]\right\}. \tag{3.8}$$

У випадку відсутності осьових силових навантажень вираз (3.8) матиме вигляд:

$$q_v(\rho) = -\frac{C}{\rho}\left\{-\frac{d\left[\rho\lambda(\rho)\right]}{d\rho}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} + \rho\lambda(\rho)\left[\frac{2}{\alpha(\rho)}\left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right)^2 - \frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2}\right]\right\}. \quad (3.9)$$

Як приклад розглянемо порожнистий циліндр при відсутності масових сил, силових навантажень ($p_1 = p_2 = p = 0$), виготовлений з функціонально-градієнтного металокерамічного матеріалу з таким характеристиками його складових [347]: $\nu_c = \nu_1 = 0.249$, $\nu_m = \nu_2 = 0.33$, $\lambda_c = \lambda_1 = 3.13$ Вт/(м·К), $\lambda_m = \lambda_2 = 7.5$ Вт / (м·К), $E_c = E_1 = 1.95 \cdot 10^{11}$ Па, $E_m = E_2 = 1.16 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha_c = \alpha_1 = 9.5 \cdot 10^{-6}$ 1 / K, $\alpha_m = \alpha_2 = 12.0 \cdot 10^{-6}$ 1 / K. Температура, при якій напруження відсутні $T_0 = 300$ K, а температура поверхонь циліндра – $t_1 = 680$ K, $t_2 = 780$ K, а густину теплових джерел виражає формула (3.9).

Нехай характеристики матеріалу циліндра описуються моделлю простої суміші

$$P(\rho) = P_2 + (P_1 - P_2)S(\rho), \quad (3.10)$$

де $P(\rho)$ – характеристика ФГМ з характеристиками складових P_1, P_2, $S(\rho) \in [0,1]$ – концентрація першої складової у ФГМ другій. Вважаємо, що $S(\rho) = \left[(\rho - \rho_1) / (1 - \rho_1)\right]^s$, де стала s приймає значення $s = s_i$, $i = \overline{1,3}$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$. Температурні поля та густини теплових джерел, обчислені за формулами (3.3), (3.9), що задовольняють рівняння теплопровідності (3.4) та умову (3.6) з заданим перепадом температур 100 K між поверхнями і призводять до нульових радіальних напружень, зображено на рис. 3.1, 3.2.

Отже, при достатньо великому перепаді температур між поверхнями неоднорідного циліндра можна створити температурні поля, які забезпечують відсутність термонапружень. Розподіли температури вздовж радіуса обернено пропорційні до розподілів коефіцієнтів лінійного теплового розширення у випадку задання температур поверхонь і суттєво залежать від його профілю.

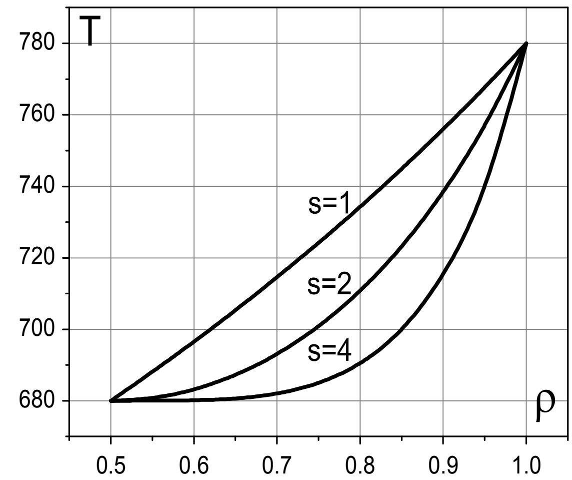


Рис. 3.1. Залежність температури від параметра *s*

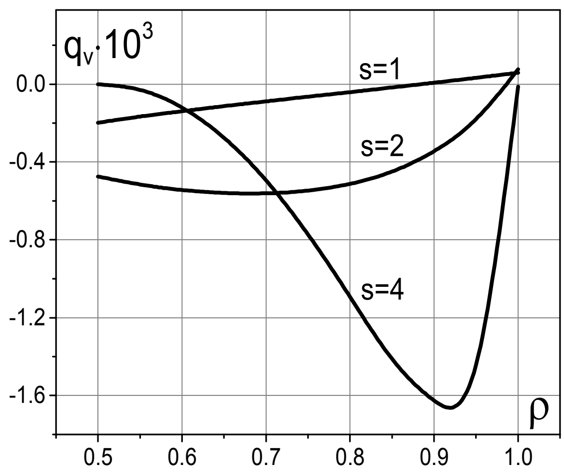


Рис. 3.2. Розподіл густини теплових джерел в залежності від *s*

Густини теплових джерел, які потрібні для створення заданого профілю температурного поля залежать від профілю неоднорідності ще суттєвіше. Це випливає з виразу (3.9) для густини теплових джерел, який містить залежності від похідних по радіальній координаті від теплових та термомеханічних характеристик матеріалу.

3.1.2. Нестаціонарне температурне поле

Розглянемо довгий неоднорідний вздовж радіальної змінної ρ (в одиницях R_2) порожнистий циліндр з внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім R_2. У циліндрі з нульовими навантаженнями на його обмежувальних поверхнях та сталою вздовж радіуса осьовою деформацією ($e_z = e_z(\tau)$) і густиною теплових джерел $q_v(\rho,\tau)$ наявне залежне від радіальної координати ρ температурне поле $t(\rho,\tau)$, яке визначене як розв'язок нестаціонарного рівняння теплопровідності [139]

$$\frac{1}{\rho C_v(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{\partial t(\rho,\tau)}{\partial\rho}\right) - \frac{\partial t(\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{q_v(\rho,\tau)}{C_v(\rho)} \tag{3.11}$$

з умовами на поверхнях $\rho = \rho_1 = R_1 \ / \ R_2$ і $\rho = R_2 \ / \ R_2 = 1$

$$t(\rho_1, \tau) = \psi_1(\tau), \qquad t(\rho_2, \tau) = \psi_2(\tau) \tag{3.12}$$

та початковою умовою

$$t(\rho, 0) = \varphi(\rho). \tag{3.13}$$

У формулах (3.11) – (3.13) τ – час, $q_v(\rho, \tau)$ – густина теплових джерел, $\lambda(\rho)$– коефіцієнт теплопровідності, $C_v(\rho)$ – об'ємна теплоємність, $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)$ – відомі функції від часу.

Дослідження проводяться в межах квазістатичної незв'язаної моделі термопружності, в якій час є параметром у рівняннях, що описують термонапружений стан. Тому використано результати праць [90, 91] для незв'язаної стаціонарної задачі термопружності стосовно умови відсутності радіальних напружень. Для нестаціонарних теплових навантажень та відсутніх масових сил ця умова має вигляд

$$T(\rho, \tau) = \overline{C}(\tau) \frac{1}{\alpha(\rho)\left[V(1) + W(1)\right]} - p(\tau) \frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{\alpha(\rho)\left[V^2(1) - W^2(1)\right](1 + \nu(\rho))} + T_0, \tag{3.14}$$

де $\overline{C}(\tau)$– довільна функція від часу, T_0 – відлікова температура, за якої відсутні напруження і переміщення (надалі вважатимемо її початком відліку температури – «нульовою» температурою), $p(\tau)$ залежне від часу осьове навантаження. Вираз (3.14), отримано в [90] із запропонованого інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [84] відносно радіального напруження, до розв'язування якого зведено класичну задачу незв'язної термопружності у напруженнях для неоднорідного довгого порожнистого циліндра зі сталими осьовими деформаціями. За відсутності силових навантажень вздовж осі циліндра ($p(\tau) = 0$) або сталого коефіцієнта Пуассона ($\nu(\rho) = \text{const}$) вираз (3.14) набуває простішого вигляду

$$t(\rho, \tau) = \frac{C(\tau)}{\alpha(\rho)}, \tag{3.15}$$

де $C(\tau)=\overline{C}(\tau)/\left[V(1)+W(1)\right]$. Отже, задачу забезпечення нульових напружень у циліндрі зведено до визначення температурного поля вигляду (3.14) або (3.15), яке задовольняє рівняння теплопровідності (3.11), умови на межах (3.12) або інші, які описують ті чи інші умови теплообміну з зовнішнім середовищем та початковий розподіл температури (3.13). Ці вимоги щодо температурного поля (3.14) або (3.15) накладають, взагалі кажучи, певні обмеження на початкові та межові умови, характеристики матеріалів, а також на густину розподілу теплових джерел. Визначимо ці умови та покажемо, що їх можна задовольнити.

Вважатимемо, що масові сили та осьові навантаження відсутні, а на поверхнях циліндра задано закони зміни температури з часом (3.12).

Тоді з урахуванням (3.15) умови (3.12), (3.13) мають вигляд

$$t(\rho,0)=\varphi(\rho), \qquad \frac{C(\tau)}{\alpha(\rho_1)}=\psi_1(\tau), \qquad \frac{C(\tau)}{\alpha(1)}=\psi_2(\tau), \tag{3.16}$$

звідки після виключення $C(\tau)$ отримаємо залежність між значеннями температури на межових поверхнях

$$\psi_2(\tau)=\frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(1)}\psi_1(\tau). \tag{3.17}$$

Якщо вираз (3.14) для температури підставити у диференціальне рівняння (3.11) і подати густину теплового джерела у вигляді $q_v(\rho,\tau)=q_1(\rho)C(\tau)$, то отримаємо таке диференціальне рівняння, яке пов’язує характеристики матеріалів та функцію часу $C(\tau)$

$$C(\tau)\frac{1}{c(\rho)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\lambda(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)\right]-q_1(\rho)\right]-\frac{1}{\alpha(\rho)}\frac{\partial C(t)}{\partial\tau}=0. \tag{3.18}$$

Розв’язком рівняння (3.18) відносно $C(\tau)$ після відокремлення змінних є вираз

$$C(\tau)=C_1\exp(Q\tau), \tag{3.19}$$

де

$$Q = \frac{\alpha(\rho)}{c(\rho)}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\lambda(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)\right] - q_1(\rho)\right\} = const\,, \tag{3.20}$$

де C_1 і Q – сталі, які потрібно визначити.

З використанням формул (3.15) та (3.19) отримаємо такий розв’язок рівняння теплопровідності (3.11):

$$t(\rho,\tau) = \frac{C_1}{\alpha(\rho)}\exp(Q\tau)\,. \tag{3.21}$$

На основі виразу (3.15) для температурного поля, початкової умови з (3.16) та виразу (видно, що початковий розподіл температури має вигляд $\varphi(\rho) = \frac{C(0)}{\alpha(\rho)} = \frac{C_1}{\alpha(\rho)}$. Зокрема, якщо відомим значенням початкового розподілу на внутрішній поверхні отримаємо

$$C_1 = \alpha(\rho_1)\varphi(\rho_1)\,. \tag{3.22}$$

Отже для забезпечення відсутності радіальних напружень початкова умова згідно з (3.13) повинна мати вигляд:

$$\varphi(\rho) = \frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(\rho)}\varphi(\rho_1)\,. \tag{3.23}$$

Якщо відоме відповідне значення початкового розподілу на зовнішній поверхні циліндра, то матимемо

$$C_1 = \alpha(1)\varphi(1)\,, \quad \varphi(\rho) = \frac{\alpha(1)\varphi(1)}{\alpha(\rho)}\,. \tag{3.24}$$

Отже, можна задати температуру у початковий момент часу на внутрішній стороні циліндра. Тоді стала C_1 визначається з формули (3.22), а температура на зовнішній стороні з формули (3.23). Якщо задати температуру на зовнішній стороні, то відповідні значення сталої C_1 та температури на внутрішній поверхні у початковий момент часу $\tau = 0$ визначаються з формули (3.24). Умови на межах з використанням (3.12) та (3.15) матимуть вигляд

$$t(\rho_1,\tau)=\psi_1(\tau)=\varphi(\rho_1)\exp(Q\tau),$$

$$t(1,\tau)=\psi_2(\tau)=\frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(1)}\varphi(\rho_1)\exp(Q\tau). \qquad (3.25)$$

Сталу Q задаємо (див.(3.20)), виходячи з технологічних можливостей виготовлення відповідних матеріалів, забезпечення відповідної густини теплових джерел та можливості змінювати температуру на поверхні.

Температурне поле вигляду (3.21) забезпечує нульові радіальні напруження, якщо відсутні масові сили та осьові навантаження. Це температурне поле є розв'язком нестаціонарної задачі теплопровідності. У випадку межових умов першого роду (3.12) та початкових (3.13). Стала C_1 та початкова умова мають вигляд (3.22), (3.23) або (3.24), а межові умови – (3.12). Між межовими умовами встановлена залежність (3.17), а між початковою і умовами на межі (3.25).

Вираз (3.20) можна трактувати як зв'язок між характеристиками неоднорідного матеріалу та радіальною залежністю густини теплових джерел, при якому вираз (3.21) буде розв'язком нестаціонарного рівняння теплопровідності (3.11). Воно є нелінійним диференціальним або алгебричним рівнянням стосовно коефіцієнта теплопровідності або об'ємної теплоємності матеріалу відповідно. Диференціальне рівняння (3.20) має точні аналітичні розв'язки відносно об'ємної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності:

$$C_v(\rho)=\frac{\alpha(\rho)}{Q}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\lambda(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)\right]-q_1(\rho)\right\},$$

$$\lambda(\rho)=\frac{\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta c(\eta)\left[\frac{Q}{\alpha(\eta)}+q_1(\eta)\right]d\eta}{\rho\frac{d\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)}{d\rho}}+\frac{C_0}{\rho\frac{d\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)}{d\rho}}. \qquad (3.26)$$

На відміну від стаціонарного теплового режиму [139] точний аналітичний розв'язок рівняння (3.20) (нелінійного відносно $\alpha(\rho)$) відносно коефіцієнта лінійного теплового розширення визначити не вдалося.

Отже маємо такі можливості забезпечення відсутності напружень у довгому неоднорідному циліндрі: потрібне температурне поле створюється з допомогою внутрішніх теплових джерел або забезпечується з допомогою характеристик матеріалу, які задовольняють рівності (3.20) або (3.26), зокрема, і при відсутності теплових джерел (тоді матимемо обмеження тільки на характеристики матеріалів). З виразу (3.20) маємо

$$q_1(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{d\dfrac{1}{\alpha(\rho)}}{d\rho}\right) - \frac{Qc(\rho)}{\alpha(\rho)}.$$

Тоді права частина рівняння теплопровідності (3.20), якщо задані характеристики матеріалу, описує розподіл густини теплових джерел у вигляді

$$\frac{q_v(\rho,\tau)}{c(\rho)} = C_1 \exp(Q\tau)\left[\frac{1}{\rho c(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{d\dfrac{1}{\alpha(\rho)}}{d\rho}\right) - \frac{1}{\alpha(\rho)}Q\right].$$

Розглянемо приклад для підтвердження існування розв'язків поставленої задачі щодо забезпечення відсутності напружень, яка полягає у визначенні розв'язку вигляду (3.15) нестаціонарної задачі теплопровідності (3.11) – (3.13) та відповідних зв'язків між характеристиками матеріалу, густиною теплових джерел, початковими та межовими умовами.

Нехай порожнистий циліндр, виготовлений з двокомпонентного функціонально-градієнтного матеріалу, характеристики якого описуються формулою (3.10) з параметром $s = 1$. Нехай $R_2 = 1$м, радіуси поверхонь $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$, відлікова температура $T_0 = 300$K.

Табл. 3.1

Характеристики складових [347]

Характеристика	Матеріал	
	Оксид цирконію	Нітрид кремнію
C_v [Дж·м/(кг·К)]	$7.0 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$
λ [Вт /(м · К)]	1.7	13.0
α [1 / K]	$12.1 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-6}$

Вважатимемо, що характеристики ФГМ змінюються за законом (3.10). Тоді з виразів (3.22), (3.25) отримано, $C_1 = -0.0042$, $\psi_1(\tau) = 700 \exp(-0{,}01\tau)$, $\psi_2(\tau) = 350 \exp(-0.01\tau)$, $\varphi(1) = 350\,\mathrm{K}$, $\varphi(\rho_1) = 700\,\mathrm{K}$, $Q = -0{,}01$ c^{-1}.

Відповідні початковий розподіл температури, залежності умов на межі від часу та залежності густини теплових джерел від координат та часу, які забезпечують відсутність радіальних напружень у неоднорідному

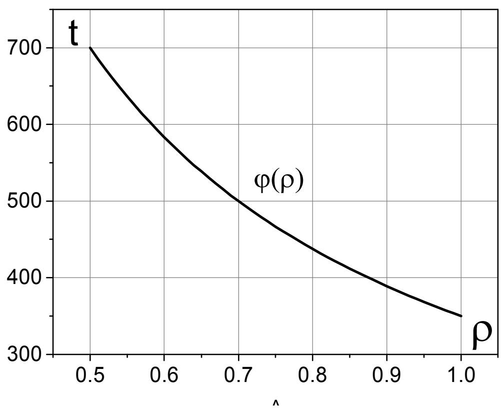


Рис. 3.3. Початковий розподіл температури $\varphi(\rho)$

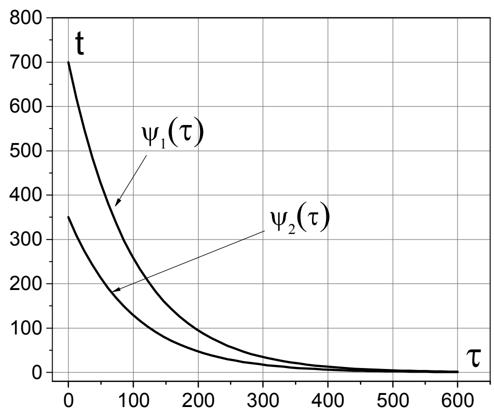
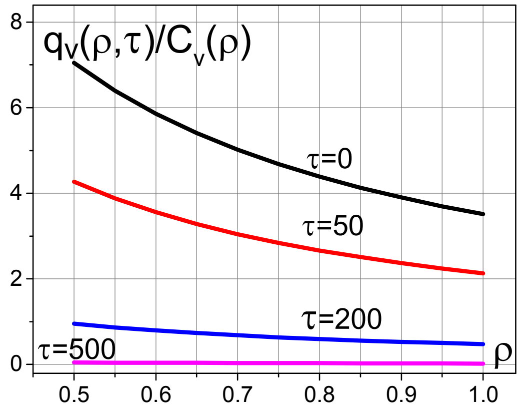


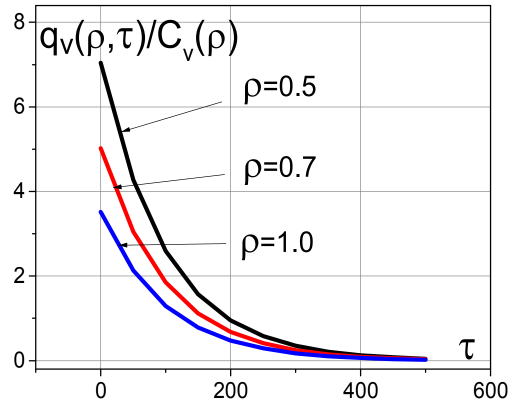
Рис. 3.4.Залежність температури на межах від часу

порожнистому циліндрі зображені на рис. 3.3 – 3.5.

З виразу (3.21) для температурного поля видно, що параметр Q повинен бути від'ємним, тому що в іншому випадку температура буде зростати з часом без досягнення стаціонарного розподілу.



(а)



(б)

Рис. 3.5.Залежність густини теплових джерел від координати (а) та часу (б)

Рис. 3.3 – 3.5 вказують на можливість підтримувати стан відсутності термонапружень у неоднорідному циліндрі аж до встановлення стаціонарного режиму, коли обидві поверхні досягають практично однакової температури. Як видно з рис. 3.3 для забезпечення відсутності напружень початковий розподіл температури повинен виражатись формулами (3.23) або (3.24), а також виконуватись умови узгодження початкового розподілу температури (3.23) або (3.24) з заданими температур на межах (3.25) у початковий момент часу.

3.2. Визначення температурних полів, які не викликають напружень у сферичних тілах

Якщо прийняти, що по всій товщині порожнистої кулі радіальні напруження є рівними нулеві, то права частина рівняння) (2.55) є тотожно рівною нулеві. Отже на основі того ж рівняння (2.55) розглядаємо обернену задачу яка полягає у визначені температурного поля, яке задовольняє

1) рівняння $\Psi(\rho)=0$, як умову рівності нулеві радіальних напружень, в тому числі на границях ($p_1=p_2=0$), 2) рівняння теплопровідності (В.134), 3) і, наприклад, межові умови $T(\rho_1)=T_1$, $T(1)=T_2$.

Рівняння $\Psi(\rho)=0$ з урахуванням явного вигляду виразів у формулі (В.125) у випадку відсутності масових сил і навантажень на поверхнях з врахуванням, що $\rho=r/R_2$ запишемо у вигляді

$$\frac{1}{\rho^3}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{\rho^3}\frac{V(\rho)}{V(1)}\int_{\rho_1}^{1}\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\alpha(\eta)t_1(\eta)d\eta=0, \qquad (3.27)$$

де $t(\rho)=T(\rho)-T_0$, а $\Phi(\rho)=\alpha(\rho)t(\rho)$.

Якщо вираз (3.27) продиференціювати по ρ та спростити, то отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду із виродженим ядром відносно температури

$$t(\rho)-\frac{1}{V(1)}\frac{1}{\alpha(\rho)}\int_{\rho_1}^{1}\frac{dV(\eta)}{d\eta}\alpha(\eta)t(\eta)d\eta=0. \qquad (3.28)$$

Його ненульовим розв’язком згідно з [173] є аналітичний вираз $t(\rho)=\dfrac{\overline{C}}{V(1)}\dfrac{1}{\alpha(\rho)}$ або

$$t(\rho)=\frac{C}{\alpha(\rho)}, \qquad (3.29)$$

де $\overline{C}$, а отже і $C=\dfrac{\overline{C}}{V(1)}$– довільні сталі внаслідок наявності власного значення ядра інтегрального рівняння (3.28). Це означає зо замість рівняння $\Psi(\rho)=0$ у постановці задачі про визначення відповідного температурного поля можна використовувати формулу (3.29). Якщо врахувати той факт, що в межах існуючої математичної моделі термопружності температурне поле повинно задовольняти також рівняння теплопровідності (В.134) і межові умови $T(\rho_1) = T_1$, $T(1) = T_2$, а формула (3.29) виражає множину температурних полів, що відповідають довільним значенням C, та призводять до нульових радіальних напружень, то для визначення відповідного температурного поля отримаємо таку некласичну задачу теплопровідності

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \cdot \lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right) + q_v(\rho) = 0, \tag{3.30}$$

$$t(\rho_1) = t_1 \,,\; t(1) = t_2 \,, \tag{3.31}$$

$$t(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)}. \tag{3.32}$$

Тобто, потрібно визначити умови, які повинні задовольняти температури поверхонь у виразі (3.31), щоб розв’язок вигляду (3.32) задовольняв задачу (3.30), (3.31), якщо відомі, взагалі кажучи, довільні залежності характеристик матеріалів від радіальної координати. Як відомо з теорії диференціальних рівнянь задача (3.30) – (3.31) має єдиний розв’язок. Оскільки є дві умови (3.31) і (3.32) на функцію $t(\rho)$, то це повинно вплинути на межові умови і (або) вигляд густини теплових джерел, оскільки вважаємо, що характеристики матеріалу задані, а загальний розв’язок диференціального рівняння (3.30) відомий і буде записаний явно нижче. Справді з умов (3.31) і (3.32) маємо

$$t_1 = \frac{C}{\alpha(\rho_1)}, \qquad t_2 = \frac{C}{\alpha(1)},$$

звідки отримуємо умову зв’язку між граничними умовами (3.31)

$$t_1 \alpha(\rho_1) = t_2 \alpha(1)$$

або

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha(1)}{\alpha(\rho_1)}. \tag{3.33}$$

Отже, з формули (3.33) ясно, що значення температури на межах порожнистої кулі не можна задавати довільно, а тільки так, щоб виконувалась рівність (3.33). Тобто, якщо задане значення t_1, то $t_2 = t_1 \dfrac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(1)}$, а значення сталої $C = t_1 \alpha(\rho_1)$; якщо задане значення t_2, то $t_1 = \dfrac{\alpha(1)}{\alpha(\rho_1)} t_2$, а стала $C = t_2 \alpha(1)$. Тоді розв'язок задачі теплопровідності повинен мати вигляд (3.32) для забезпечення нульових радіальних напружень та задовольняти рівняння теплопровідності (3.30). Це можливо тоді, коли розподіл густини теплових джерел має вигляд

$$q_v(\rho) = -\frac{C}{\alpha^2(\rho)} \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \left\{ \frac{2}{\rho} + \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} - \frac{2\lambda(\rho)}{\alpha(\rho)} \left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \right) \right\} - \frac{C\lambda(\rho)}{\alpha^2(\rho)} \left(\frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2} \right). \quad (3.34)$$

Вираз (3.34) для густини внутрішніх теплових джерел отриманий шляхом підставляння виразу для температури (3.32), який забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідне рівняння теплопровідності (3.30) з врахуванням одної із заданих межових умов для визначення сталої C. З виразів (3.31), (3.32), зокрема випливає, що одну з температур можна вибирати з певних фізичних міркувань, наприклад заданого перепаду температур між поверхнями, тоді $C\left[\dfrac{1}{\alpha(1)} - \dfrac{1}{\alpha(\rho_1)}\right] = t_2 - t_1$, звідки

$$C = \frac{(t_2 - t_1)}{\left[\dfrac{1}{\alpha(1)} - \dfrac{1}{\alpha(\rho_1)}\right]}.$$

Іншими словами, задання однієї з граничних умов (3.31) можна замінити з тих чи інших міркувань заданням сталої C стосовно межових умов або густини джерел тепла.

Отже, температурне поле (3.29), яке забезпечує нульові радіальні напруження можна отримати заданням однієї з межових умов на поверхні кулі (3.31) та тепловими джерелами, питома густина яких визначена виразом (3.34), а стала C в залежності від заданої межової умови – виразом $C = t_1 \alpha(\rho_1)$ або $C = t_2 \alpha(1)$.

Відомий загальний розв'язок стаціонарного рівняння теплопровідності (3.30), отриманий його повторним інтегруванням має вигляд:

$$t(\rho) = C_1 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta^2 \lambda(\eta)} + C_2 - \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\eta^2 \cdot \lambda(\eta)} \int_{\rho_1}^{\eta} \xi^2 q_v(\xi) d\xi d\eta .$$

Використання межових умов (3.31), отриманих вище описаним способом, надає можливість однозначно визначити сталі C_1 та C_2. Порівняння цього розв'язку та виразу (3.29) з визначеною відповідною сталою C повинні за постановкою задачі приводити до однакового результату, а тому різниця між ними

$$C_1 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta^2 \cdot \lambda(\eta)} + C_2 - \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\eta^2 \cdot \lambda(\eta)} \int_{\rho_1}^{\eta} \xi^2 q_v(\xi) d\xi d\eta - \frac{C}{\alpha(\rho)} = 0$$

є додатковим способом перевірки правильності отриманих виразів для температурного поля як розв'язку некласичної задачі теплопровідності (3.30) – (3.32).

Розглянемо порожнисту кулю, виготовлену з двокомпонентного металокерамічного ФГМ з радіусом внутрішньої поверхні $\rho_1 = 0,5$ та зовнішньої поверхні $\rho_2 = 1$. Залежність фізичних характеристик двокомпонентного матеріалу опишемо з використанням моделі [347] формулою (3.10). Вважаємо, що у кулі закон зміни концентрації складової 1 вздовж радіуса має вигляд $S(\rho) = \left(\frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1} \right)^s$, $s = const$. Фізико-механічні характеристики складових ФГМ подано в табл. 3.2 [347].

Таблиця 3.2.

Характеристики складових

Характеристи-ка	Матеріал	
	Оксид алюмінію	Нержавіюча сталь
E [Па]	$3.0757 \cdot 10^{11}$	$1.7065 \cdot 10^{11}$
ν	0.26	0.3178
$\alpha\ [1/K]$	$7.2033 \cdot 10^{-6}$	$15{,}321 \cdot 10^{-6}$
λ [Вт /(м · К)]	64.9894	12.1429

У такому випадку для різних значень s радіальні залежності модуля пружності E, коефіцієнта Пуассона ν (суцільні лінії), коефіцієнта теплопровідності λ та коефіцієнта лінійного розширення α (штрихові лінії) мають вигляд зображений на рис. 3.6 – 3.7.

Виберемо сталу C так, щоб різниця температур на внутрішній та зовнішній поверхнях кулі була 200 градусів при температурі ненапруженого стану $T_0 = 300\,K$. Ця різниця досягається при $C = 2.72 \cdot 10^{-3}$, визначеній з умови $t(1) - t(\rho_1) = 200$ К або $C\left[\dfrac{1}{\alpha(1)} - \dfrac{1}{\alpha(\rho_1)}\right] = 200$ К та таких межових умовах $T_1 = 477{,}63$ К, $T_2 = 677.60$ К.

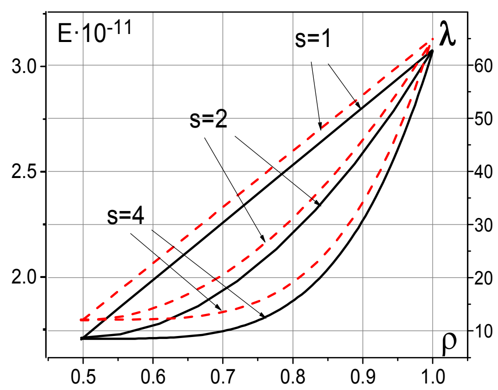


Рис. 3.6. Залежності модуля пружності, коефіцієнта теплопровід–ності від радіальної координати

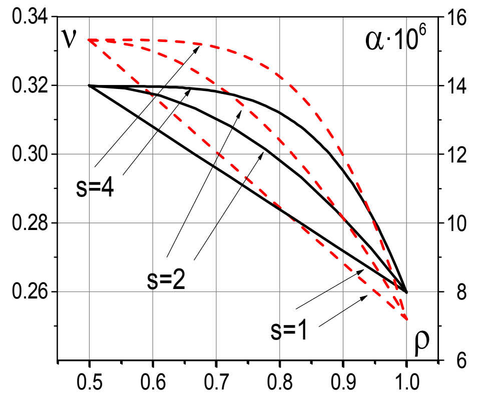


Рис. 3.7. Залежності коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта лінійного розширення від радіальної координати

Відповідні температурні поля та густини теплових джерел подані на рис. 3.8 – 3.9. Залежності коефіцієнта Пуассона та модуля пружності від координати подані для можливості перевірки отримання нульових напружень як розв’язків прямої задачі термопружності з заданими значеннями температур на поверхнях.

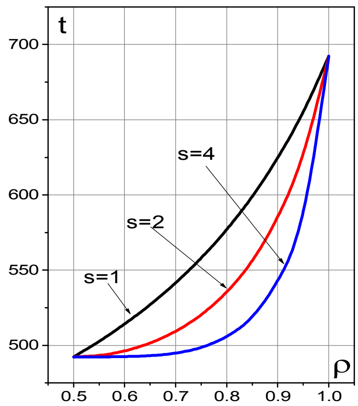


Рис. 3.8. Розподіл температури, який забезпечує нульові радіальні напруження

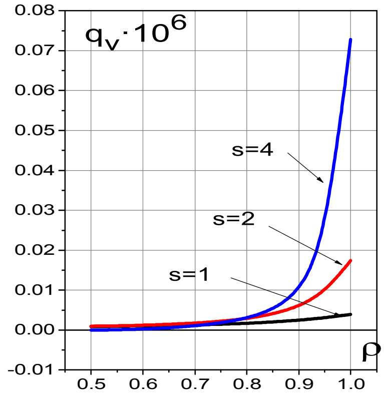


Рис. 3.9. Розподіл густини теплових джерел, який забезпечує розподіл температури на рис. 3.8.

При достатньо великому перепаді температур між поверхнями порожнистої кулі, виготовленої з ФГМ можна створити температурні поля, які забезпечують відсутність термонапружень. Розподіли температури вздовж радіуса суттєво залежать від його профілю розподілів коефіцієнту лінійного теплового розширення. Максимальні значення густини теплових джерел, які потрібні для створення заданого профілю температурного поля збільшуються із зростом показника степеня *s* у виразі для концентрації складових.

3.3. Визначення температурних полів, які не викликають напружень у шарі

3.3.1. Випадок сталих поздовжніх деформацій

Розглянемо нескінчений неоднорідний по товщині *h* вздовж осі *Oz* шар, на який діють силові та стаціонарні теплові навантаження, викликані внутрішніми тепловими джерелами з густиною $q_v(z)$ та конвективним теплообміном з середовищами з температурою T_1 на нижньому шарі з координатою $z = z_1$ і T_2 – на верхньому шарі з координатою $z = z_2$ ($z_2 - z_1 = h$)відповідно. Вважатимемо, що у перерізі відсутні згинні моменти, а деформації $e_x = e_y = e = \text{const}$ вздовж осей Ox та Oy – сталі. Характеристики матеріалу: модуль пружності E, коефіцієнт лінійного теплового розширення α, коефіцієнт теплопровідності λ, коефіцієнт Пуассона ν, і стаціонарне температурне поле T вважаємо функціями координати z Потрібно встановити умови відсутності термонапружень у такому шарі і використати їх для визначення характеристик матеріалів. Вираз для поздовжніх напружень та деформацій у неоднорідному шарі, коли наявні силові та температурні навантаження в неоднорідному шарі можна записати при відсутності силових навантажень [125]:

$$\sigma(z) = -\frac{E(z)}{1-\nu E(z)}\Phi(T(z)) + e\frac{E(z)}{1-\nu(z)}, \tag{3.35}$$

$$e = \frac{-\int\limits_{z_1}^{z_1} \frac{E(\zeta)}{1-\nu(\zeta)}\Phi(T(\zeta)d\zeta}{\int\limits_{z_1}^{z_1} \frac{E(\zeta)}{1-\nu(\zeta)}d\zeta}, \tag{3.36}$$

де $\Phi(z)$ – може описувати вплив довільного зовнішнього поля, зокрема температурного. У цьому випадку $\Phi(z) = \alpha(T(z) - T_0)$, де T_0 –відлікова температура, при якій відсутні напруження. Напруження у поперечному напрямі будуть відсутніми, якщо нема поперечних силових навантажень. Відповідне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду для визначення умов відсутності термонапружень отримаємо з виразів (3.35), (3.36), якщо напруження і всі силові навантаження дорівнюють нулеві

$$\Phi(T(z)) - \frac{\int\limits_{z_1}^{z_1} \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \Phi(T(\xi)) d\xi}{\int\limits_{z_1}^{z_1} \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} d\xi} = 0\,. \tag{3.37}$$

Розв’язком інтегрального рівняння (3.37) як рівняння з виродженим ядром, що має власні значення є:

$$\Phi(T(z)) = D\,, \tag{3.38}$$

де D – довільна стала. З виразу (3.38) отримано вираз для температурного поля

$$t(z) = \frac{D}{\alpha(z)}, \qquad t(z) = T(z) - T_0\,, \tag{3.39}$$

яке повинно бути розв’язком відповідної стаціонарної задачі теплопровідності (взято випадок умов конвективного теплообміну):

$$\frac{d}{dx}(\lambda(z)\frac{dt}{dz}) = -q_v(z)\,, \tag{3.40}$$

$$\left[\lambda(z)\frac{dt(z)}{dz} - \beta_1\left(t(z) - t_1\right)\right]\Bigg|_{z=z_1} = 0\,,$$

$$\left[\lambda(z)\frac{dt(z)}{dz} + \beta_2\left(t(z) - t_2\right)\right]\Bigg|_{z=z_2} = 0\,, \tag{3.41}$$

де $t_1 = T(z_1) - T_1$, де $t_2 = T(z_2) - T_2$, T_1, T_2 – температури оточуючих середовищ, $q_v(z)$ – густина теплових джерел. Отже з виразів (3.39) – (3.41) випливає, що розв’язок (3.39), який містить одну довільну сталу повинен задовольняти диференціальне рівняння (3.40) і дві умови (3.41).

Умови на межах (3.41) накладають зв’язки між температурами середовищ, коефіцієнтами теплообміну з середовищем, значеннями коефіцієнта лінійного теплового розширення на межах, а диференціальне рівняння (3.40) – між густиною теплових джерел, коефіцієнтом лінійного теплового розширення та коефіцієнтом теплопровідності. Ці зв’язки, отримані після підставляння виразу (3.39) у рівняння (3.40) та умови (3.41), мають вигляд

$$\frac{t_2}{t_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(z)} + \beta_2 \frac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_1}}{\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(z)} - \beta_1 \frac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_2}}, \tag{3.42}$$

$$\lambda(z) = \frac{\alpha^2(z)\left(\int\limits_{z_1}^{z} Q(\zeta)d\zeta + C\right)}{D\dfrac{d\alpha(z)}{dz}},$$

$$\alpha(z) = \frac{D}{-\int\limits_{z_1}^{z} \ln\left(\dfrac{\lambda(z)}{\lambda(\zeta)}\right)Q(\zeta)d\zeta + \int\limits_{z_1}^{z} \dfrac{C_1}{\lambda(\zeta)}d\zeta + C_2},$$

$$q_v(z) = -\frac{d}{dz}\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\left(\frac{C}{\alpha(z)}\right)\right],$$

де C, C_1, C_2 – довільні сталі. Сталу D визначаємо з однієї з умов (3.41), отримаємо

$$D = -\frac{\beta_1 t_1}{\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(z)} - \beta_1 \frac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_1}} \quad \text{або} \quad D = \frac{\beta_2 t_2}{\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(z)} + \beta_2 \frac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_2}}.$$

Рівняння (3.40) можна трактувати як вираз густини теплових джерел через коефіцієнт лінійного теплового розширення та коефіцієнт теплопровідності. Тому найпростішим теоретичним способом отримання відсутності напружень є створення густини теплових джерел, отриманих з рівняння (3.40) після підставляння в нього характеристик матеріалів та темпеартурного поля (3.39) з врахуванням обмежень на умови теплообміну (3.42).

Визначимо густину теплових джерел для шару з такими значеннями коефіцієнтів тепловіддачі і характеристиками складових: $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 10$, $t_1 = 400$ K, $\nu_1 = 0.26$, $\nu_2 = 0.318$, $E_1 = 320.235$ ҐПа, $E_2 = 207.7877$ ҐПа, $\alpha_1 = 7.2033 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_2 = 15.321 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_1 = 17.50751142$, $\lambda_2 = 12.14291852$. Розподіл характеристик матеріалу у шарі товщиною 0.1 опишемо моделлю простої суміші

$$P(z) = P_2 + S(z)(P_1 - P_2), \tag{3.43}$$

де $S(z)$ ($S(z) \in [0,1]$) – концентрація другого матеріалу в першому, P_1, P_2 – термомеханічні характеристики відповідно 1-го та 2-го матеріалів відповідно. Концентрацію взято у вигляді: $S(z) = \left(\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^s$, $s > 1$, а $z_1 = 0$, $z_2 = 0.1$. На рис. 3.10 – 3.12 подано залежності концентрації, розподілу

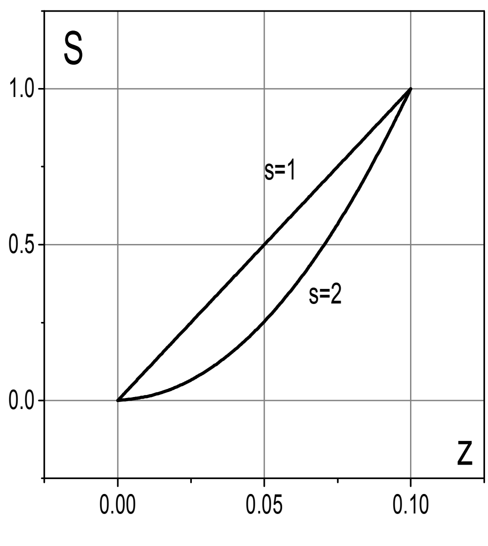


Рис. 3.10. Залежність концентрації матеріалу від поперечної координати

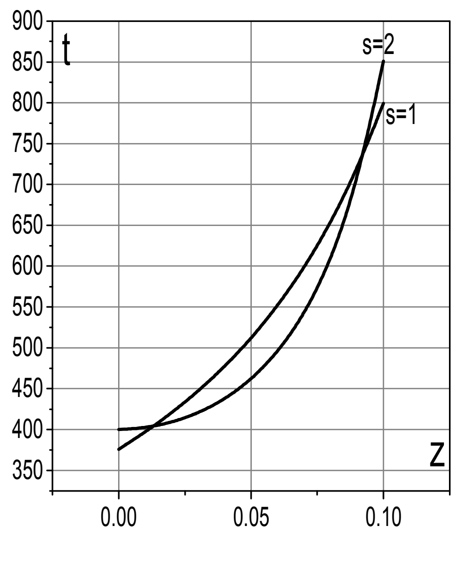


Рис. 3.11. Залежність температури в градусах Кельвіна від поперечної координати

температури, густини теплових джерел вздовж поперечної координати неоднорідного шару.

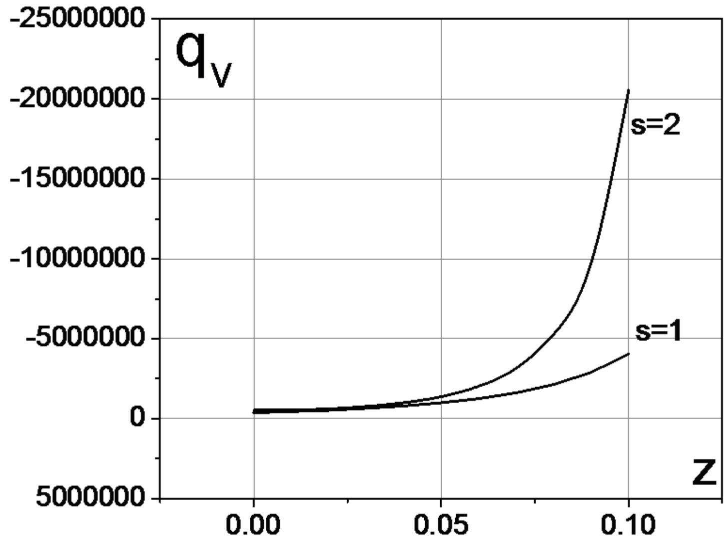


Рис.3.12. Залежність густини теплових джерел від радіальної координати

Як і в порожнистих кулі та циліндрі залежність максимальне значення та густини теплових джерел суттєво зростає зі зростом показника степеня s, який характеризує концентрацію складових матеріалу, з якого виготовлений шар. Умови третього роду призводять до зміни температури поверхні при одних і тих же коефіцієнтах теплообміну із зовнішнім середовищем.

3.3.2. Випадок заданих моментів і зусиль

Термонапружений стан шару товщиною h ($z \in [0, h]$) обчислюємо за формулою [125]

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)}\left[\frac{AN_t z - BM_t z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z)\right],$$

де

$$A = \int_0^h \eta E^*(\eta) d\eta, \qquad B = \int_0^h E^*(\eta) d\eta, \qquad C = \int_0^h \eta^2 E^*(\eta) d\eta,$$

$$N_t = \int_0^h E^*(\eta)\Phi(\eta) d\eta, \quad M_t = \int_0^h \eta E^*(\eta)\Phi(\eta) d\eta, \quad E^*(x) = \frac{E(x)}{1-\nu(x)},$$

$\Phi(z) = \alpha(z)(T(z) - T_0)$ – теплові деформації, $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$. Напруження σ задовольняє такі умови

$$\int_0^h \sigma(z)dz = 0, \qquad \int_0^h z\sigma(z)dz = 0.$$

Умовою відсутності термонапружень буде

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)}\left[\frac{AN_t z - BM_t z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z)\right] = 0.$$

Розв'язком цього інтегрального рівняння з власними значеннями відносно $\Phi(z)$ є

$$\Phi(z) = D_1 z + D_2,$$

де D_1, D_2 – довільні сталі, звідки визначаємо температурне поле, яке не створює термонапружень

$$t(z) = T(z) - T_0 = \frac{D_1 z + D_2}{\alpha(z)}. \qquad (3.44)$$

Це температурне поле повинно задовольняти задачу теплопровідності

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(z)\frac{d}{dx}t(z)\right] = -q_v(z), \qquad (3.45)$$

$$\lambda(0)\frac{dt(0)}{dx} - \beta_1(t(0) - t_1) = 0, \quad t_1 = T_1 - T_0,$$

$$\lambda(h)\frac{dt(h)}{dx} + \beta_2(t(h) - t_2) = 0, \quad t_2 = T_2 - T_0. \qquad (3.46)$$

де t_1, t_2 – відхилення температури середовищ від температури T_0, при якій відсутні напруження. У цьому випадку є дві сталі, які можна однозначно визначити як при наявності так і при відсутності теплових джерел. Якщо підставити (3.44) в умови (3.46), то отримаємо таку систему рівнянь для визначення сталих D_1, D_2:

$$\frac{\lambda(0)}{\alpha(0)}D_1+\left[\lambda(0)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(0)}-\beta_1\frac{1}{\alpha(0)}\right]D_2=-\beta_1 t_1\,,$$

$$\left[\frac{\lambda(h)}{\alpha(h)}+\lambda(h)h\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(h)}+\frac{\beta_2 h}{\alpha(h)}\right]D_1+\left[\lambda(h)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(h)}+\frac{\beta_2}{\alpha(h)}\right]D_2=\beta_2 t_2\,. \quad (3.47)$$

Розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (3.47), отриманий методом Крамера, є

$$D_1=-\frac{\beta_1 t_1 a_{22}+\beta_2 t_2 a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad D_2=\frac{\beta_2 t_2 a_{11}+\beta_1 t_1 a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

де

$$a_{11}=\frac{\lambda(0)}{\alpha(0)},\;\; a_{12}=\lambda(0)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(0)}+\beta_1\frac{1}{\alpha(0)},$$

$$a_{21}=\frac{\lambda(h)}{\alpha(h)}+\lambda(h)h\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(h)}+\frac{\beta_2 h}{\alpha(h)}, \qquad a_{22}=\lambda(h)\frac{d}{dz}\frac{1}{\alpha(h)}+\frac{\beta_2}{\alpha(h)}$$

Густину теплових джерел визначено на основі (3.44), (3.45):

$$Q(z)=-\frac{d}{dz}\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{D_1 z+D_2}{\alpha(z)}\right]. \quad (3.48)$$

Обчислимо густину теплових джерел для шару за формулою (3.48) з такими характеристиками складових: $\beta_1=1000$ Вт/(м^2·К), $\beta_2=1000$ Вт/(м^2·К), $t_1=400$ K, $t_2=900$ K, $\nu_1=0.26$, $\nu_2=0.318$, $E_1=320.235$ ГПа, $E_2=207.7877$ ГПа, $\alpha_1=7.2033\cdot10^{-6}$ 1/K, $\alpha_2=15.321\cdot10^{-6}$ 1/K, $\lambda_1=17.50751142$ Вт/(м·К), $\lambda_2=12.14291852$ Вт/(м·К). Розподіл характеристик матеріалу у шарі товщиною 0.1 опишемо моделлю простої суміші з концентрацією $S(z)=\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)^s$, $s>0$, $z_1=0$, $z_2=0.1$. На рис. 3.13 – 3.15 зображені залежності концентрації, температурного поля та густини теплових джерел, які створюють температурне поле в неоднорідному шарі, що не викликає термонапружень для різних значень показника степеня s.

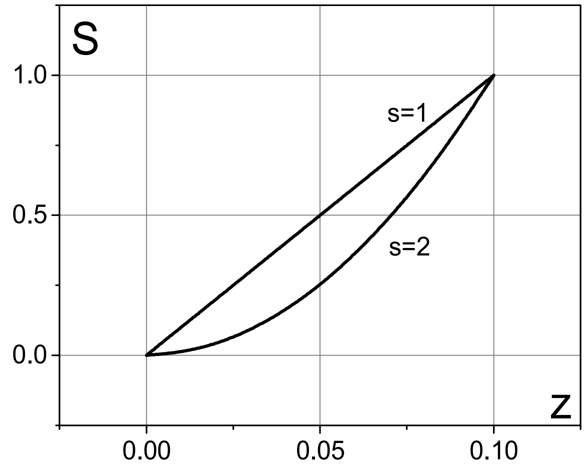


Рис.3.13 Залежність концентрації від координати

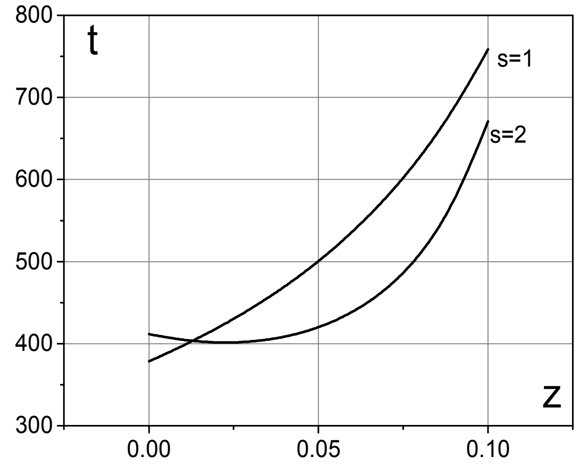


Рис.3.14. Розподіл температури по товщині, який не викликає напружень

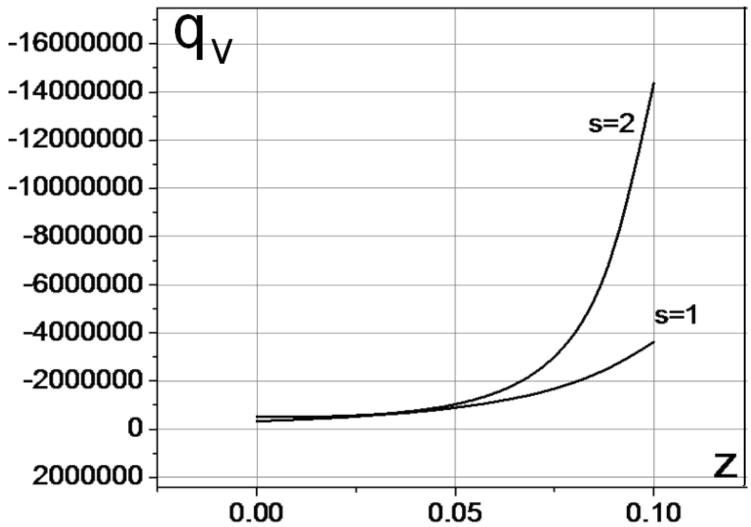


Рис. 3.15 Залежність густини теплових джерел від координати

Вираз для температурного поля (3.44) містить дві сталі, а не одну (як у випадку відсутності поперечних деформацій (3.39)). Це дає можливість задавати температуру середовища у випадку моментних умов на обох поверхнях шару порівняно з умовами плоского деформованого стану, де умови узгодження (3.42) роблять можливим при відомій температурі середовища на одній з поверхонь шару визначити температуру на іншій.

3.4. Висновки

Зведення задачі термопружності до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно одної з компонент тензора напружень зробило можливим

- використовувати одні і ті ж запропоновані інтегральні рівняння для розв'язання прямих задач визначення термонапруженого стану порожнистих неоднорідних циліндра та кулі і обернених задач керування напруженнями встановленням густини теплових джерел і характеристиками матеріалу;
- отримати аналітичні вирази, які пов'язують навантаження, температурне поле, характеристики матеріалу так, що забезпечують нульові радіальні напруження у тілах простої форми (циліндр, куля, шар);
- отримати аналітичні вирази для розподілу температури, концентрації, характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у тілах простої форми, виготовлених з реально існуючих матеріалів, характеристики яких описані моделлю простої суміші;
- як наслідок, одночасно забезпечити відсутність напружень при відсутності масових сил на основі виконання рівняння рівноваги та умов на межах.

З отриманих інтегральних рівнянь випливає, що напруженнями можна керувати також і з допомогою масових сил (наприклад, доцентрової), розподіл якої залежатиме від закону розподілу густини по товщині кулі, а також характеристиками матеріалу при заданому температурному полі.

У випадку наявності осьових навантажень при відсутності інших силових навантажень у неоднорідному циліндрі, виготовленому з ФГМ, температурне поле, яке не викликає напружень, залежить також від зміни коефіцієнта Пуассона вздовж радіуса.

У випадку наявності тільки осьових силових навантажень у неоднорідному циліндрі, виготовленому з неоднорідного матеріалу зі сталим коефіцієнтом Пуассона, можна забезпечити тільки відсутність радіальних і колових термонапружень, хоча температурне поле має такий вигляд, який забезпечує відсутність всіх компонент тензора напружень при відсутності силових навантажень.

РОЗДІЛ 4

ВІДСУТНІСТЬ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ ПРИ ЗАДАНИХ УМОВАХ НАГРІВАННЯ

У розділі отримаємо взаємозв’язки між розподілами температур та характеристик матеріалу у порожнистих циліндрі і кулі та неоднорідному шарі, які забезпечують відсутність компонент тензора напружень при заданих стаціонарних теплових навантаженнях і відсутності теплових джерел. Оскільки виготовлення матеріалів з потрібними властивостями є окремою технологічною і науковою проблемою, розглянуто матеріали, теплофізичні та механічні характеристики яких описуються через властивості їх двох складових моделлю простої суміші [347]. У цьому випадку отримані точні аналітичні вирази для концентрацій одної складової матеріалу у ФГМ, а отже і вирази для фізико-механічних характеристик матеріалу

Основні результати розділу викладено у працях [8, 85 – 87, 91, 99, 101, 105].

4.1. Забезпечення відсутності напружень у циліндричних тілах характеристиками матеріалу

Розглянемо довгий неоднорідний уздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім R_2. У циліндрі з нульовими силовими навантаженнями на його внутрішній та зовнішній поверхнях ($p_1 = p_2 = 0$) та сталою осьовою деформацією ($e_z = \mathrm{const}$) наявне залежне від радіальної координати температурне поле $T(\rho)$, яке визначене як розв’язок стаціонарної задачі теплопровідності [139, 188], поданої у змінних $\rho = r / R_2$ при відсутності об’ємних теплових джерел ($q_v(\rho) = 0$, див. рівняння (3.4))з умовами на поверхнях (3.5) або (3.6)).

Потрібно визначити характеристики матеріалу $\alpha(\rho)$, $\lambda(\rho)$, $\nu(\rho)$, $E(\rho)$ при заданому температурному полі $T(\rho)$, коли задовольняються рівняння (3.4), (3.5).

З диференціального рівняння (3.4), в якому $q_v(\rho) = 0$, отримаємо

$$\rho\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho} = \overline{B}, \tag{4.1}$$

де $\overline{B}$ – довільна стала. З рівняння (4.1) дістанемо вираз, який явно пов’язує коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\rho)$ з іншими термомеханічними характеристиками матеріалу у випадку наявності осьових навантажень, коли температурне поле описано формулою (3.2)

$$\lambda(\rho) = \frac{\overline{B}}{\rho} U(C, \rho), \tag{4.2}$$

де

$$U(C,\rho) = C\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right) - p\frac{W(1)}{V^2(1) - W^2(1)}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\} +$$
$$+ p\frac{V(1)}{V^2(1) - W^2(1)}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\}.$$

У випадку відсутності осьових навантажень (p=0) або сталого коефіцієнта Пуассона ($\nu(\rho) = \mathrm{const}$), коли температурне поле має вигляд (3.3), маємо

$$\lambda(\rho) = \frac{\overline{B}}{\rho}\frac{1}{C\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{\alpha(\rho)}\right)}. \tag{4.3}$$

З (4.3) можна отримати явний вираз для коефіцієнта лінійного теплового розширення

$$\alpha(\rho)=\frac{1}{\frac{\overline{B}}{\rho}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\eta}{\eta\lambda(\eta)}+C_2},$$

де C_2 – довільна стала. Зрозуміло, що диференціальні рівняння (4.2) можна розв'язати точно відносно коефіцієнта Пуассона. Однак такий підхід, хоча й дає зв'язок між характеристиками матеріалу, який забезпечує нульові радіальні та колові напруження, не можна вважати задовільним через технологічні складності виготовлення матеріалів з наперед заданими довільними теплофізичними та механічними характеристиками.

Тому розглянемо випадок двокомпонентних функціонально-градієнтних матеріалів, характеристики яких визначаються через характеристики складових моделлю простої суміші [347] (3.10). З формул (4.3) і (3.10) матимемо

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_2)S(\rho)}\right)=\frac{B}{\rho}\frac{1}{\lambda_2+(\lambda_1-\lambda_2)S(\rho)}\ , \tag{4.4}$$

де $B=\overline{B}/C$.

Розв'язком нелінійного відносно $S(\rho)$ диференціального рівняння (4.4) отриманого методом відокремлення змінних [75], є

$$S(\rho)=\frac{\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1-\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)W_L\left(z(\rho)\right)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha_1-\alpha_2)W_L\left(z(\rho)\right)}, \tag{4.5}$$

де $z(\rho)=\frac{\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\rho^{Ba_l}\exp\left(a_l BB_1\right)$, $a_l=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, B_1 – довільна стала, $W_L(z)$ – W або Ω функція Лямберта [73, 248], яка є розв'язком рівняння $W(x)\cdot e^{W(x)}=x$. Вираз (4.5) виражає закон зміни концентрації складової першого матеріалу по товщині циліндра, який призводить до нульового радіального напруження. Температурні навантаження, коефіцієнти теплопровідності, теплового розширення, концентрації складових, пов'язані виразами (3.10), (4.3), (4.5) через сталі $\overline{B}$, B_1, C. Це накладає обмеження на температурні навантаження, характеристики матеріалів складових і їх концентрації, а тому є різні можливості формулювання технічно здійсненних умов отримання нульових радіальних та колових напружень по товщині циліндра.

Розглянемо одну з них, яка, на думку автора, може мати найширше практичне застосування. Потрібно підібрати такий двокомпонентний функціонально-градієнтний матеріал, який описується моделлю простої суміші (3.10), щоб за заданого перепаду температур і концентрацій складових на межах отримати нульовий розподіл радіальних напружень по товщині циліндра.

Задання максимального значення температури на одній із поверхонь призводить до визначення сталої C з виразу (3.3) за одним із значень лінійного коефіцієнта теплового розширення на поверхні $\alpha(\rho_1)$ (або $\alpha(1)$), якщо задано умови $t(\rho_1) = t_1$ (або $t(1) = t_2$). Сталу C можна визначити з виразу, отриманого на основі (3.3)

$$C\left(\frac{1}{\alpha(1)} - \frac{1}{\alpha(\rho_1)}\right) = \Delta t_{21}. \tag{4.6}$$

значень $\alpha(1)$ або $\alpha(\rho_1)$ з інтервалу $[\alpha_1;\alpha_2]$ характеристик вибраних складових ФГМ, якщо заданий перепад температур $t_2 - t_1 = \Delta t_{21}$. З формули (3.10) можна визначити значення концентрації $S_1 = S(\rho_1)$ та $S_2 = S(1)$, які відповідають значенням $\alpha(\rho_1)$ та $\alpha(1)$ відповідно при вибраних характеристиках матеріалів складових. Якщо невід’ємних розв’язків менших або рівних одиниці для S_1 та S_2 не існує, то це значить, що з використанням вибраних складових ФГМ досягнути поставленої мети не вдалося. У вираз для концентрації входять дві сталі B і B_1, для визначення яких використаємо рівняння, отримані з формули (4.5)

$$S_i = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 - \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)W_L\left(z_i\right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2)W_L\left(z_i\right)},$$

$$z_1 = z(\rho_1),\ z_2 = z(1)\ \ i = 1,2. \tag{4.7}$$

Ці рівняння мають точні розв’язки відносно z_1 і z_2

$$z_1 = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)\exp\left\{\dfrac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1\right]}\right\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1\right]},$$

$$z_2 = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)\exp\left\{\dfrac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2\right]}\right\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2\right]}. \tag{4.8}$$

З виразів (4.8) після використання виразів для $z(\rho)$ отримано такі формули для сталих B і B_1

$$B = \frac{\ln(\frac{z_1}{z_2})(\lambda_1 - \lambda_2)}{\ln(\rho_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \qquad B_1 = \frac{\ln\left[\dfrac{z_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}\right]\ln(\rho_1)}{\ln(\frac{z_1}{z_2})}. \tag{4.9}$$

Отже у випадку двокомпонентного матеріалу задача зводиться до визначення виразу для концентрації (4.5) і сталих (4.9).

Підберемо двокомпонентний металокерамічний матеріал для забезпечення у циліндрі нульових радіальних та колових напружень при таких значеннях температур на поверхнях $T_1 = 900$ K, $\Delta T_{21} = 300$ K та $T_0 = 300$ K (відповідає $t_1 = 600$ K, $\Delta t_{21} = t_2 - t_1 = 300$ K) і характеристиках складових $\lambda_1 = 13.72$ Вт/(м·K), $\lambda_2 = 15.78$ Вт/(м·K), $\alpha_1 = 5.83 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\alpha_2 = 12.872 \cdot 10^{-6}$ 1/K (силіцид кремнію і нержавіюча сталь [347]). Значення модуля пружності та коефіцієнта Пуассона не подаються, оскільки в даній моделі характеристик матеріалу їх значення входять у сталу C у вигляді означених інтегралів по товщині циліндра, а тому не впливають на остаточні результати. При цих значеннях характеристик і температур на поверхні з використанням формул (4.6) – (4.9) отримаємо: $C = 0.003480$, $S_1 = 1.0$, $S_2 = 0.1765$. Відповідні розподіли температури, концентрації складової 1 і характеристик матеріалу, зображені на рис. 4.1, 4.2, обчислено на основі виразів (4.5) і (3.3).

Вираз для поздовжніх деформацій [90] за відсутності силових навантажень та масових сил $e_z = \dfrac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)}$, де $d_1 = -f(1)$, $d_2 = \int\limits_{\rho_1}^{1} \dfrac{\eta E \Phi(\eta)}{1-\nu(\eta)} d\eta$, $f(1) = -\int\limits_{\rho_1}^{1} \dfrac{E\eta}{1-\nu} \Phi(T(\eta)) d\eta$, $\Phi(\rho) = \alpha(\rho) t(\rho) = C$ отримано зі зв'язків між деформаціями та напруженнями.

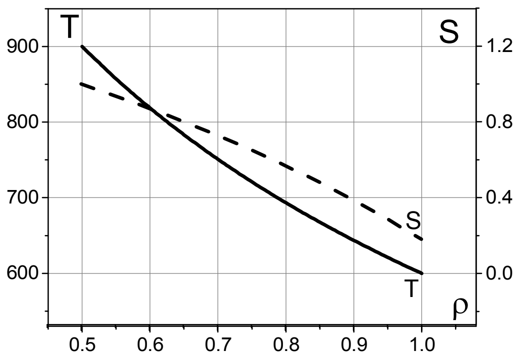


Рис. 4.1. Залежності розподілу температури $t(\rho)$ і концентрації матеріалу 1 $S(\rho)$, які приводять до нульових колових та радіальних напружень у циліндрі.

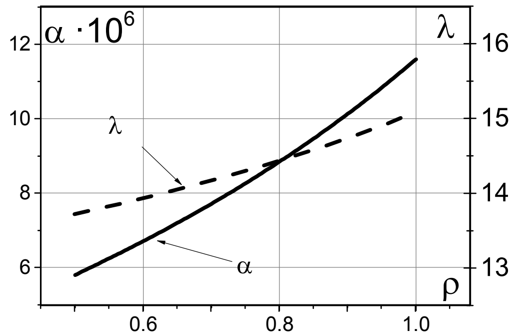


Рис. 4.2. Залежності коефіцієнтів теплового лінійного розширення $\alpha(\rho)$ і теплопровідності $\lambda(\rho)$, які приводять до нульових колових та радіальних напружень у циліндрі.

Отже $e_z = C = 0.003480$, а зі зв'язків між деформаціями та напруженнями в умовах рівності нулеві радіальних та колових напружень матимемо $e_r = e_\varphi = C$ та $\sigma_z = 0$. З рівності Коші $e_\varphi = u_r / \rho R_2$, отримаємо $u_r = \rho R_2 e_\varphi = \rho R_2 C$. Це означає, що стала C у формулах (3.3) та (4.3) в умовах відсутності силових навантажень та масових сил має зміст осьової деформації.

Максимально допустимий перепад температур, визначений на основі (3.3) і (4.6), залежить від значень коефіцієнту лінійного теплового розширення на поверхнях. Відношення температур на поверхнях не може перевищувати відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення на них у випадку умов на межі першого роду у задачі теплопровідності (3.4), (3.5). Як показано в розділі 3, при відсутності осьових навантажень з відсутності радіальних напружень випливає відсутність осьових та колових компонент тензора напружень.

Рівняння типу (4.4) відносно концентрації в рамках моделі гомогенізації простої суміші було отримано в роботі [182] з диференціальних рівнянь термопружності при розгляді задачі про аналітичне визначення складу покриття, щоб в ньому були мінімальні термонапруження. При розв’язуванні використовувались припущення про тонкість покриття, усереднені характеристики матеріалів. Рівняння відносно концентрації, отримане в роботі [182], розв’язано числовими методами з іншим умовами на межі.

4.2. Забезпечення відсутності напружень у сферичних тілах характеристиками матеріалу

Розглянемо задачу встановлення характеристик такого матеріалу для виготовлення кулі, який забезпечить у ній нульові радіальні напруження, коли задано стаціонарне теплове навантаження. Розподіл температури (3.32) забезпечує нульові радіальні напруження. Тому він повинен задовольняти задачу теплопровідності (3.30), (3.31), яка при відсутності об’ємних теплових джерел ($q_v(\rho)=0$) у змінних $t(\rho)=T(\rho)-T_0$, $t_{is}=T(\rho_i)-T_0$ ($i=1,2$) має вигляд:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right)=0 \ . \tag{4.10}$$

і класичні умови на межах, наприклад

$$t(\rho_1)=t_{1s}, \qquad t(\rho_2)=t_{2s}, \tag{4.11}$$

або

$$\left[\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}-\beta_1\left(t(\rho)-t_1\right)\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1}=0,$$

$$\left[\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}+\beta_2\left(t(\rho)-t_2\right)\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2}=0, \tag{4.12}$$

де β_1, β_2– коефіцієнти теплообміну з зовнішніми середовищами з температурами t_1 , t_2. Оскільки температурне поле (3.32), яке задовольняє диференціальне рівняння (4.10), залежить від однієї сталої, умови (4.11) або (4.12) слід узгодити, тобто в умовах (4.11) можна задати значення температури тільки на одній з поверхонь, а другу визначити зі зв'язку $t_1\alpha(\rho_1)=t_2\alpha(\rho_2)$. Згідно з умовами (4.12) отримаємо зв’язок між температурами на обмежувальних поверхнях та коефіцієнтами теплообміну:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho)}-\dfrac{\lambda(\rho)}{\beta_2\alpha^2(\rho)}\dfrac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right]\Bigg|_{\rho=1}}{\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho)}+\dfrac{\lambda(\rho)}{\beta_1\alpha^2(\rho)}\dfrac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1}}.$$

Остання з формул вказує також на можливість впливати на температуру обмежувальних поверхонь через коефіцієнти теплообміну. Якщо підставити вираз (3.32), виражений через $t(\rho)$ у рівняння (4.10), то отримаємо диференціальне рівняння, яке пов’язує коефіцієнти теплопровідності та лінійного розширення:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)\right)=0. \tag{4.13}$$

Диференціальне рівняння (4.13) має точні розв'язки відносно коефіцієнта теплопровідності

$$\lambda(\rho) = \frac{C_1 \alpha^2(\rho)}{\rho^2 \dfrac{d\alpha(\rho)}{d\rho}} \tag{4.14}$$

та коефіцієнта лінійного температурного розширення

$$\alpha(\rho) = \frac{1}{C_1 \displaystyle\int \frac{d\rho}{\rho^2 \lambda(\rho)} + C_2}, \tag{4.15}$$

де C_1, C_2 – невідомі сталі інтегрування.

Оскільки створити неоднорідні матеріали, характеристики яких задовольняли б зв'язки (4.14) чи (4.15) поки що проблематично, використовували модель характеристик матеріалу, яка виражає їх для деяких двокомпонентних матеріалів через концентрацію та характеристики їх складових [322,347]. Застосуємо модель простої суміші або модель Фойґта [347] (3.10):

З виразу (4.14) отримаємо диференціальне рівняння для концентрації матеріалу, якщо коефіцієнти теплопровідності та температурного лінійного розширення подані виразом (3.10)

$$\frac{dS(\rho)}{d\rho} = \frac{B_2 \left[(\alpha_1 - \alpha_2) S(\rho) + \alpha_2 \right]^2}{\rho^2 \left[(\lambda_1 - \lambda_2) S(\rho) + \lambda_2 \right]}. \tag{4.16}$$

Нелінійне диференціальне рівняння (4.16) – рівняння з відокремлюваними змінними [75]. Його розв'язок має вигляд

$$S(\rho) = \frac{\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot W\left(Y(\rho)\right) - \lambda_2 \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot W\left(Y(\rho)\right)}, \tag{4.17}$$

де $W(x)$ – W-функція Лямберта [73, 248],

$$Y(\rho) = \frac{(\lambda_2 \alpha_1 - \alpha_2 \lambda_1) \cdot e^{Z(\rho)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad Z(\rho) = \frac{B_2 (1 - B_1 \rho) \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\rho (\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$B_2 = -\dfrac{C_1}{C(\alpha_1 - \alpha_2)}$ – стала інтегрування.

Якщо концентрація першого складника в суміші неперервно змінюється від заданого значення S_1 на внутрішній поверхні кулі до деякого заданого S_2 на зовнішній, то сталі

$$B_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)\cdot\rho_1 - \left(1-\rho_1\right)\ln\left(\dfrac{y_2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}{\lambda_2\alpha_1-\alpha_2\lambda_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)\cdot\rho_1},$$

$$B_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)\cdot\rho_1\cdot\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(1-\rho_1\right)}, \qquad (4.18)$$

де

$$y_1 = z_1 e^{z_1}, \qquad y_2 = z_2 e^{z_2},$$

$$z_1 = \frac{\lambda_2\alpha_1-\alpha_2\lambda_1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\alpha_1 S_1 + \alpha_2(1-S_1)\right)}, \qquad z_2 = \frac{\lambda_2\alpha_1-\alpha_2\lambda_1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\alpha_1 S_2 + \alpha_2(1-S_2)\right)}.$$

Задання відомих концентрацій на поверхнях кулі еквівалентно умовам, які повинні задовольняти теплові навантаження на обмежувальних поверхнях кулі (4.11) або (4.12), тому що вираз (3.32) однозначно пов’язує температуру на межах і концентрацію через формулу (3.10).

Отже, визначено розподіл концентрації складників матеріалу неоднорідної порожнистої кулі для забезпечення в ній нульових радіальних напружень через вирази (4.15) – (4.16) з урахуванням значень сталих (4.18).

Відповідний розподіл температури можна знайти із виразу (3.32), записаного у вигляді

$$t\left(\rho\right) = \frac{C}{(\alpha_1-\alpha_2)S(\rho)+\alpha_2}, \qquad (4.19)$$

де сталу C обчислюють з умови на температуру на обмежувальній поверхні за відомою концентрацією на одній з меж.

Проаналізуємо розподіли концентрації та температури у порожнистій неоднорідній кулі, виготовленій з двокомпонентного матеріалу, наприклад, суміші оксиду алюмінію та нікелю, якщо концентрація оксиду алюмінію змінюється в межах від $S_1 = 0.2$ до $S_2 = 0.8$. У табл. 4.1 наведено значення фізичних характеристик складників [347].

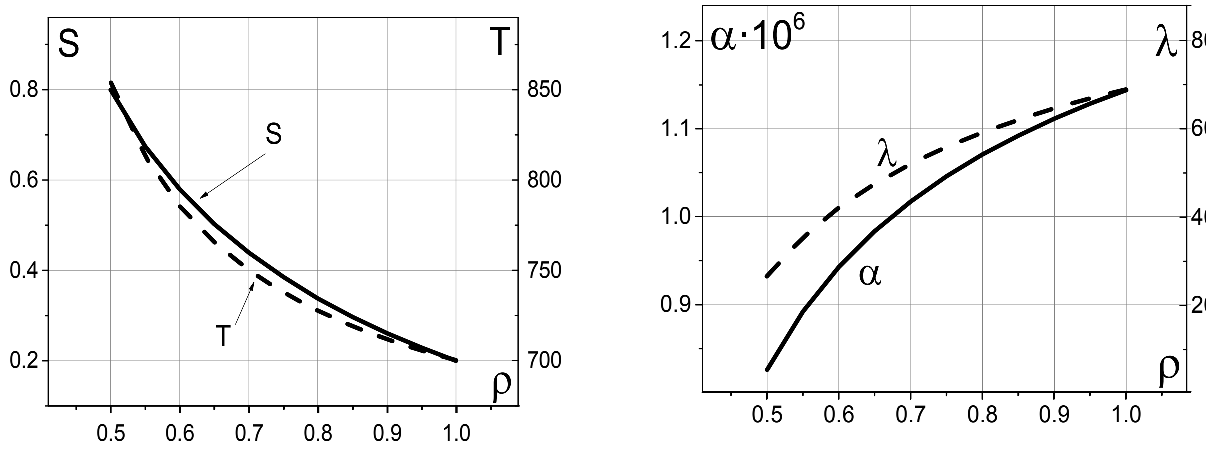
Таблиця 4.1.

Характеристики матеріалів

Характеристика	Матеріал	
	оксид алюмінію (1)	нікель (2)
α [1/K]	$7.2 \cdot 10^{-6}$	$12.5 \cdot 10^{-6}$
λ [Вт/(м $\cdot$ K)]	12.5	83.7356

Вважаємо, що радіус внутрішньої поверхні кулі дорівнює половині радіуса зовнішньої, тобто $\rho_1 = 0.5$, на обмежувальних поверхнях виконуються умови (4.11), відлікова температура $T_0 = 300$ K, а на зовнішній поверхні задано сталу температуру $T(1) = 700$ K. У цьому випадку відповідні значення сталих, отриманих з формул (4.11), (4.15), (4.18), (4.19) такі: $B_1 = -93.1715$, $B_2 = 2.2886 \cdot 10^{12}$, $C_1 = -7000.9222$, $C_2 = 853.9952$, $C = 4.576 \cdot 10^{-3}$. Зміна об'ємної концентрації оксиду алюмінію в суміші та температурне поле, обчислені за формулами (4.17), (4.19), подано на рис. 4.3 (графік (а)), а відповідні характеристики матеріалу, які визначені виразом (3.10) та забезпечують нульові радіальні напруження – на графіку (б).

Як видно з формул (3.32) та рис. 4.3 перепад температур, який не спричиняє термонапружень у шарі при відсутності об'ємних теплових джерел, можна забезпечити відповідним значенням зміни в межах [0,1] концентрації матеріалу. Відношення допустимих температур на різних поверхнях кулі не може перевищувати відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення складових ФГМ, характеристики якого описано моделлю простої суміші.



(а) (б)

Рис. 4.3. Розподіли об'ємної концентрації оксиду алюмінію, температури та характеристик матеріалу (б), які забезпечують відсутність термонапружень

Відповідні розподіли характеристик матеріалу, які не викликають термонапружень та забезпечують потрібне для цього температурне поле, визначаються тоді через W - функції Лямберта, аргументом яких є вираз, що містить характеристики складових матеріалу та радіальну координату.

4.3. Забезпечення відсутності напружень у шарі характеристиками матеріалу

4.3.1. Випадок сталих поздовжніх деформацій

Визначимо стаціонарне температурне поле, яке не викликає напружень у неоднорідному вздовж поперечного напряму шарі при відсутності теплових джерел ($q_v(z) = 0$ у рівнянні (3.40)) і сталій поздовжній деформації ($e_x = e_y = e = 0$). Характеристики двокомпонентних ФГМ описуються моделлю простої суміші [347] через характеристики їх складових виразом (3.43). Якщо вираз для температурного поля (3.39) з поданням коефіцієнтів лінійного теплового розширення та теплопровідності у вигляді $P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)S(z)$ ($P(z)$ –характеристика ФГМ, а P_1, P_2 – характеристики його складових) підставити у рівняння теплопровідності (3.40) при $Q(z) = 0$, то отримаємо таке диференціальне рівняння для визначення концентрації $S(z)$:

$$\frac{dS(z)}{dz} = \frac{B\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S(z)\right]^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)\left[\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)S(z)\right]}. \tag{4.20}$$

Нелінійне диференціальне рівняння (4.20) відносно концентрації $S(z)$ має точний розв'язок, який виражається через функції Лямберта [73, 248]

$$S(z) = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 - \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)W_L\left(Z(z)\right)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2)W_L\left(Z(z)\right)}, \tag{4.21}$$

де

$$Z(z) = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\exp\left[\frac{B(\alpha_1 - \alpha_2)(z + C_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right]. \tag{4.22}$$

З формул (4.21), (4.22) можна визначити сталі B та C_1, якщо відомі концентрації у двох точках, наприклад $S_1 = S(z_1)$, та $S_2 = S(z_2)$, які відповідають значенням $\alpha(z_1)$ та $\alpha(z_2)$ відповідно при вибраних характеристиках складових суміші. Отримаємо два трансцендентні рівняння:

$$S_i = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 - \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)W_L(Z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2)W_L(Z_i)},$$

$$Z_1 = Z(z_1),\ Z_2 = Z(z_2), \quad S(z_1) = S_1,\ S(z_2) = S_2. \tag{4.23}$$

Рівняння (4.23) мають точні розв'язки відносно Z_1 і Z_2

$$Z_i = D_i \exp(D_i),\ i = 1,2, \tag{4.24}$$

де

$$D_i = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}{S_i(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

З виразу (4.22) при значеннях $z = z_1$ і $z = z_2$ та (4.24) отримано систему двох алгебричних рівнянь для визначення сталих B та C_1, розв'язком якої є

$$C_1 = -\frac{z_2 D_1 - z_1 D_2 + z_1 \ln\dfrac{D_1}{D_2} - (z_1 - z_2)\ln\dfrac{D_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}}{D_1 - D_2 + \ln\dfrac{D_1}{D_2}},$$

$$B = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\left(D_1 - D_2 + \ln\dfrac{D_1}{D_2}\right)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(z_1 - z_2)}. \tag{4.25}$$

Якщо розв'язків рівняння (4.21) при значеннях S_1 та S_2 лівої частини не існує, то це значить, що вибрали не ті матеріали або при заданих умовах теплообміну не можна забезпечити відсутності напружень у шарі. Сталу D у виразі для температури (3.39) визначено з однієї з умов на межі

$$\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\frac{D}{\alpha(z)} - \beta_1\left(\frac{D}{\alpha(z)} - t_1\right)\right]\right|_{z=z_1} = 0,$$
$$\left.\left[\lambda(z)\frac{d}{dz}\left(\frac{D}{\alpha(z)}\right) + \beta_2\left(\frac{D}{\alpha(z)} - t_2\right)\right]\right|_{z=z_2} = 0, \tag{4.26}$$

якщо відомі β_1, t_1 (або β_2, t_2). Дві умови (4.26) містять 5 параметрів, якими можна керувати для створення температурного поля, що не викликає напружень. Зрозуміло, що стала D визначає відповідний перепад температур у неоднорідному шарі. Тому температури зовнішнього середовища у випадку конвективного теплоообміну повинні бути пов'язані на основі (4.26)

$$\frac{t_1}{t_2} = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\left.\left[\lambda(z)\dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{\alpha(z)} - \beta_1\dfrac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_1}}{\left.\left[\lambda(z)\dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{\alpha(z)} + \beta_2\dfrac{1}{\alpha(z)}\right]\right|_{z=z_2}},$$

а відповідні температури зовнішнього середовища та коефіцієнти тепловіддачі повинні задовольняти природну умову неможливості передачі тепла від точки з нижчою температурою до точки з вищою температурою. Отже згідно з першим законом термодинаміки температурне поле $D/\alpha(z)$ може бути монотонно зростаючою або монотонно спадною функцією (перший закон термодинаміки, $\alpha(z)\in[\alpha_1,\alpha_2]$, а D може приймати значення $D>\alpha(z)$ і $D<\alpha(z)$ для довільних значень $z\in[z_1,z_2]$). У випадку, коли $t(z)$ монотонно зростає, $t_2\ge t(z)$ і $t_1\le t(z)$, а у випадку, коли $t(z)$ монотонно спадає, $t_2\le t(z)$ і $t_1\ge t(z)$. Різниця між $t(z)$ та t_1 і t_2 компенсується коефіцієнтами теплообміну, один з яких відомий в межах допустимого інтервалу значень. Концентрація $S(z)$ однієї складової у ФГМ визначена підставлянням сталих (4.25) у вирази (4.21) та (4.22).

Розглянемо ФГМ з характеристиками складових (алюміній і циркон [370]) $\alpha_1 = 10.0\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$, $\alpha_2 = 23.0\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$, $\lambda_1 = 2.09$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 204$ Вт/(м·К) для забезпечення у шарі товщиною h = 0.1 м ($z_1=0$, $z_2=0.1$) нульових напружень. Вважаємо, що температура середовища $t_1 = 400$ K, відлікова температура $T_0 = 300$ K, коефіцієнти теплообміну $\beta_2 = 600$ Вт/(м^2·К), $\beta_1 = 13500$ Вт/(м^2·К) і (за даними [242] типові значення абсолютних величин коефіцієнтів конвективної тепловіддачі між різними середовищами лежать в межах (1, 100000) Вт/(м^2·К)), а за даними [269] – нижня межа коефіцієнта тепловіддачі є 0.2 Вт/(м^2·К)). Потрібно обчислити відповідно концентрацію складових, розподіл температури і теплофізичних характеристик матеріалу, температурне поле, значення температури середовища, яке контактує з другою поверхнею. При цих значеннях характеристик складових в результаті обчислень отримано такі значення сталих $D = 0.0094$, $B = 4.275\cdot10^7$, $C_1 = 3.723637742$, $D_1 = -0.279$, $D_1 = -0.368$, та температура другого оточуючого середовища $t_2 = 1615.3$ K. Результати розрахунків за формулами (4.21) – (4.26) подані на рис. 4.4. Вони повинні залежати від товщини шару, а не конкретних значень z_1 та z_2. Це є додатковим методом перевірки правильності числових результатів.

З рис. 4.4 видно, що існують розподіли концентрації матеріалу, які дозволяють встановити температурне поле, яке не спричиняє термонапружень, з перепадом температур між поверхнями шару біля 500 К. Перепад температур можна регулювати заданням концентрації матеріалу на поверхнях, як це випливає з виразу для температурного поля (3.39) і формул (4.23).

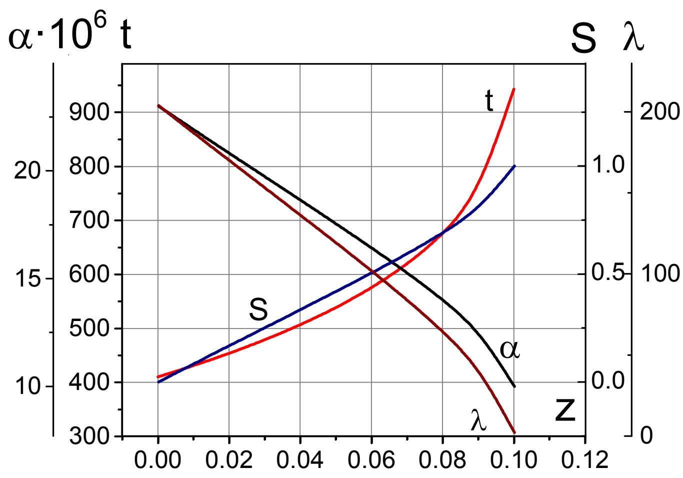


Рис. 4.4. Залежності температури, концентрації та характеристик ФГМ від поперечної координати, які забезпечують нульові радіальні напруження.

Розглянемо залежності температурного поля в шарі від коефіцієнта тепловіддачі β_1 при заданій температурі середовища $t_1 = 400$ К і коефіцієнті тепловіддачі $\beta_2 = 600$ Вт/(м^2·К). Матеріал вибрано, як і в поперед.-ньому прикладі. Алгоритм обчислення визначення розподілу концентрації складових, термомеханічних характеристик матеріалу, температури вздовж поперечної координати є таким же як і в попередньому прикладі. Температурне поле і концентрація складових зображені на рис. 4.5, 4.6.

Використовуючи формули (4.21) – (4.26), отримано: $B = 0.428 \cdot 10^8$, $C_1 = 3.724$, $D_1 = -0.279$, $D_2 = -0.368$. З умов (4.26) визначено відповідні значення температури середовища t_2 на поверхнях шару, яка змінюється в межах від 1615.3 K при $\beta_1 = 40000$ Вт/(м^2·К) до 1961.4 K при $\beta_1 = 5000$ Вт/(м^2·К).

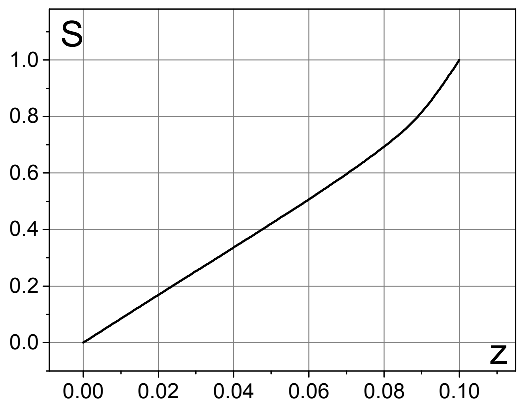


Рис. 4.5. Розподіл концентрації при різних значеннях коефіцієнта тепловіддачі.

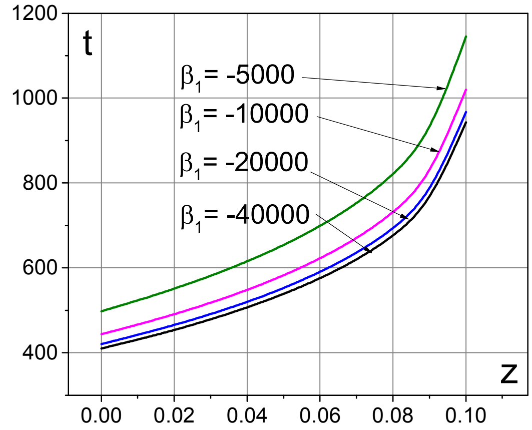


Рис. 4.6. Розподіл температури в шарі при різних значеннях коефіцієнта тепловіддачі.

З рис. 4.5, 4.6 бачимо, що зміна коефіцієнта тепловіддачі на поверхні слабо впливає на розподіл температури, який не спричиняє термонапружень у шарі, і не впливає на розподіл концентрації матеріалу. Залежності температур поверхонь і температури середовища на поверхні $z = z_2 = 0.1$ від коефіцієнту тепловіддачі β_1 на поверхні $z = z_1 = 0$, які забезпечують відповідні температурні поля, що не створюють напружень, подана на рис. 4.7.

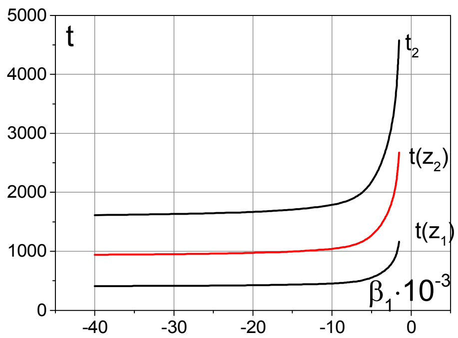


Рис. 4.7. Залежності температур середовища і поверхонь на поверхні шару від коефіцієнта конвективної тепловіддачі β_1 при фіксованих β_2 і t_1

Дослідимо вплив товщини шару на значення розподіл температури у шарі при фіксованих температурах середовищ $t_1 = 400$ К $t_2 = 1700$ К та конвективної тепловіддачі $\beta_1 = 40000$ Вт/(м^2·К), $\beta_2 = 600$ Вт/(м^2·К). Характеристики матеріалу взяті з попередніх прикладів. Обчислені температурні поля і концентрації подано на рис. 4.8, 4.9. Числові результати, відображені цих рисунках вказують, що збільшення товщини шару h при

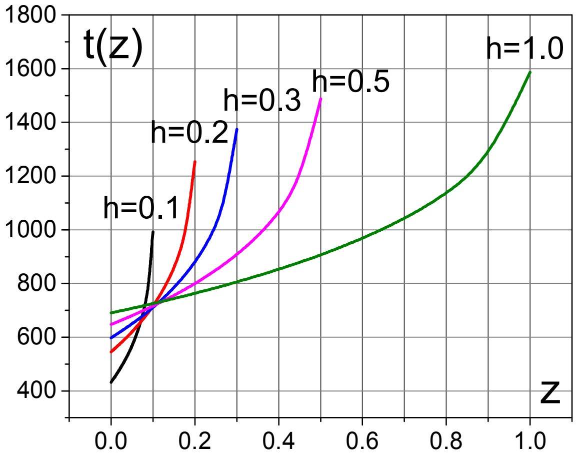


Рис. 4.8. Вплив товщини шару на розподіл температурного поля.

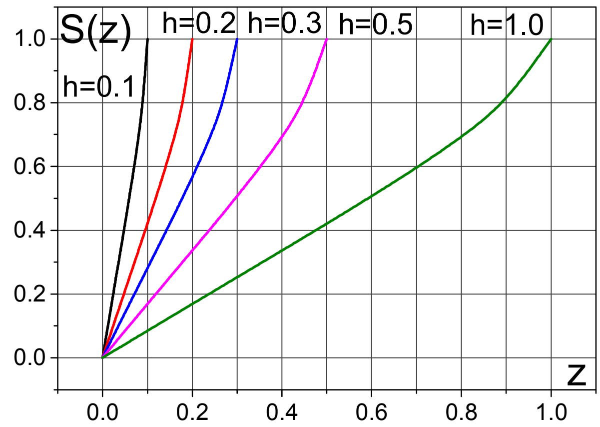


Рис. 4.9. Вплив товщини шару на розподіл концентрації складових ФГМ.

заданих температурах оточуючих середовищ t_1 , t_2 призводить до підвищення температур поверхонь, при яких можна встановити температурне поле, яке забезпечує відсутність термонапружень. Зміна товщини шару не впливає на відношення температур на поверхнях. При фіксованій температурі середовищ на поверхнях залежність поверхневих температур від товщини можна забезпечувати зміною коефіцієнта тепловіддачі і відповідним профілем зміни характеристик матеріалу (4.21).

4.3.2. Умови, коли задані зусилля і моменти

При відсутності теплових джерел зв'язки між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення, отримані з рівняння теплопровідності (3.40) з врахуванням розподілу температури (3.44), вираженого через термомеханічні характеристики, матимуть вигляд

$$, \qquad \alpha(z) = \frac{D_1 z + D_2}{C_1 \int\limits_0^h \dfrac{d\eta}{\lambda(\eta)} + C_2} \tag{4.27}$$

$$\lambda(z) = \frac{C_1 \alpha^2(z)}{D_1 \alpha(z) - (D_1 z + D_2) \dfrac{d\alpha(z)}{dz}}. \tag{4.28}$$

Тому що різні характеристики матеріалів не можна формувати довільно, обмежимось моделлю простої суміші для опису матеріалів, з яких виготовлений шар. Рівняння для концентрації отримаємо таким же способом як і в п. 4.3.1, з тою різницею, що вираз для температури згідно з формулами (3.44), (3.10) має вигляд

$$t(z) = \frac{D_1 z + D_2}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S(z)}. \tag{4.29}$$

Після інтегрування рівняння теплопровідності отримаємо

$$\lambda(z) \frac{d}{dz} t(z) = C_1 . \tag{4.30}$$

Якщо вираз (4.29) з врахуванням (4.27), (4.28) підставити у (4.30), проінтегрувати отримане рівняння по z, то отримаємо таке нелінійне рівняння відносно концентрації $S(z)$

$$\frac{D_1 \left[\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) S(z) \right]}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S(z)} -$$

$$- \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \left[\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) S(z) \right] \left(D_1 z + D_2 \right)}{\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S(z) \right]^2} \frac{dS(z)}{dz} = C_1 ,$$

де C_1 – довільна стала.

Методом відокремлення змінних це диференціальне рівняння можна звести до такого рівняння відносно концентрації $S(z)$

$$(\chi S(z)+A)^{\gamma}((\alpha_1-\alpha_2)S(z)+\alpha_2)=C(D_1 z+D_2)\,, \tag{4.31}$$

де $\chi = C_1(\alpha_1-\alpha_2)-D_1(\lambda_1-\lambda_2)$, $A = D_1\lambda_2 - C_1\alpha_2$, C – довільна стала. У рівняння (4.31) входять сталі D_1 і D_2, які визначають з межових умов конвективного теплообміну через сталу C_1. Це можна зробити, якщо задати концентрацію матеріалу на межах і визначити значення коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення. Вважатимемо, що $S(z_1)=S_1$, $S(z_2)=S_2$ ($S_1\in[0,1], S_2\in[0,1], S_2>S_1$). Відповідні вирази для D_1 і D_2 мають вигляд

$$D_1 = \frac{C_1}{(z_1-z_2)}\left(\frac{\alpha(z_2)}{\beta_2}+\frac{\alpha(z_1)}{\beta_1}\right)+\frac{\alpha(z_1)t_1-\alpha(z_2)t_2}{(z_1-z_2)},$$

$$D_2 = \frac{C_1}{(z_2-z_1)}\left(\frac{z_2\alpha(z_1)}{\beta_1}+\frac{z_1\alpha(z_2)}{\beta_2}\right)+\frac{z_1\alpha(z_2)t_2-z_2\alpha(z_1)t_1}{(z_1-z_2)}. \tag{4.32}$$

З рівняння (4.31) визначаємо сталі C, C_1, при заданих значеннях концентрації. Після цього розв’язуємо (4.31) відносно концентрації $S(z)$. Це рівняння не вдалося розв’язати аналітично. Розв’язки трансцендентного рівняння (4.31) отримано для різних допустимих значень z.

Визначимо залежність складу ФГМ від поперечної координати у неоднорідному шарі, який забезпечує існування температурного поля, яке не викликає напружень, при заданих температурах навколишнього середовища $t_1=400$ K, $t_2=800$ K, характеристиках складових ФГМ, коефіцієнтах тепловіддачі (індекс 1 та сталь, якій відповідає індекс 2) [308, 328].

Характеристики складових ФГМ (оксид алюмінію, якому відповідає індекс 1 та сталь, якій відповідає індекс 2) є такими [308, 328]: $\nu_1=0.26$, $E_1=320.225$ ГПа, $\alpha_1=7.2033\cdot10^{-6}$ 1/K, $\lambda_1=17.5075$ Вт/(м·K), $\nu_2=0.318$, $E_2=207.788$ ГПа, $\alpha_2=15.321\cdot10^{-6}$ 1/K, $\lambda_2=12.143$ Вт/(м·K). Розраховане на основі формул (4.29), (4.31), (4.32) температурне поле, яке не викликає термонапружень та відповідні значення концентрації, температури і характеристик матеріалу подані на рис. 4.10, 4.11. З рисунків видно, що перепад температур в шарі у межах визначених відношенням коефіцієнтів лінійного теплового розширення можна регулювати також коефіцієнтами теплообміну.

На рис. 4.12, 4.13 подано залежності концентрації матеріалу 1 і температурного поля від поперечної координати в шарі для різних значень коефіцієнту теплообміну β_2 і $\beta_1 = 10000$ Вт/(м^2·K). Характеристики складових ФГМ і температури середовищ є такими ж, як і в попередньому прикладі.

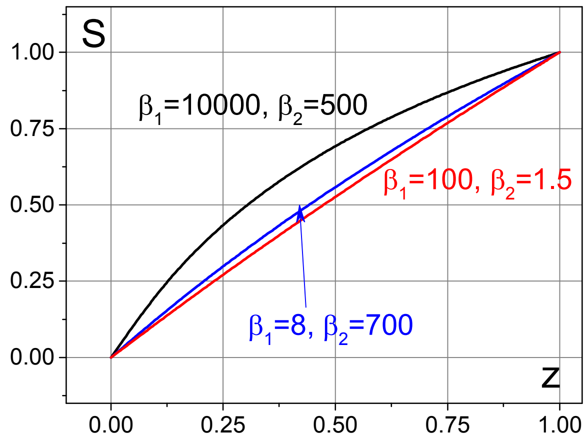


Рис. 4.10. Розподіли концентрацій при різних значеннях коефіцієнтів тепловіддачі

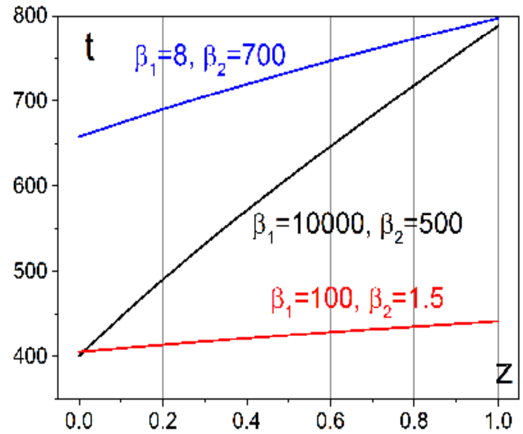


Рис. 4.11. Розподіли температур при різних значеннях коефіцієнтів тепловіддачі

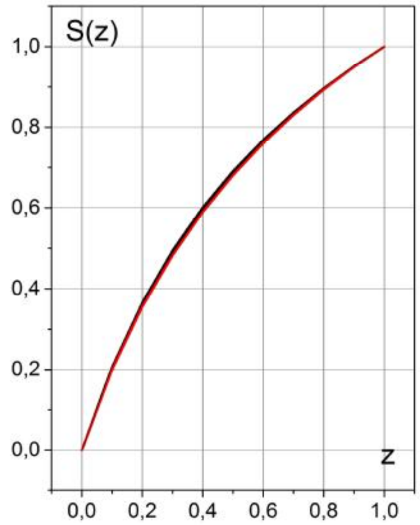


Рис 4.12. Залежність концентрації від коефіцієнта тепловіддачі β_2

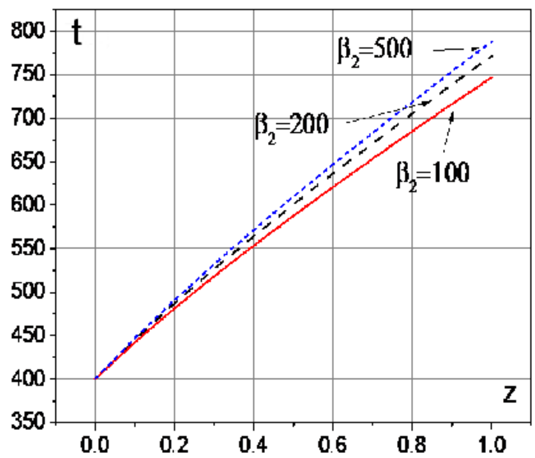


Рис 4.13. Залежність температурного поля від коефіцієнта тепловіддачі β_2

З рис. 4.12, 4.13 видно, що концентрація матеріалу слабо залежить від зміни коефіцієнта тепловіддачі β_2 при достатньо великому значенні β_1, який робить можливим підтримувати практично постійну з точністю до одного градуса температуру на нижній стороні шару. При фіксованих температурах середовищ на поверхнях температурне поле в неоднорідному шарі (моментні умови) можна забезпечувати зміною коефіцієнта тепловіддачі і відповідним профілем зміни характеристик матеріалу. Однак у цьому випадку концентрація матеріалу визначалася числовими методами з рівняння (4.31). Це, однак, неможливо здійснити у випадку сталої поздовжньої деформації (див. вираз (4.19)).

4.4. Висновки

Отримано аналітичні вирази для концентрації складових ФГМ у неоднорідних шарі та порожнистих циліндрі й кулі, а отже і для описаних моделлю простої суміші характеристик матеріалів та температурних полів, які виражені через ці характеристики і забезпечують відсутність термонапружень. Для цього використані відповідні вирази для температурних полів, отримані у попередньому розділі, які повинні задовольняти стаціонарні рівняння теплопровідності та умови на межах. Розглянуто різні типи класичних умов теплообміну із середовищем на межах.

Отримано умови узгодження параметрів різних типів теплообміну і характеристик матеріалів, необхідних для відсутності термонапружень, якщо об’ємні теплові джерела відсутні.

Числові результати отримані для тіл простої форми, виготовлених з реально існуючих матеріалів вказують на існування розв’язків поставлених задач і існування областей, в яких малі зміни параметрів викликають малі зміни у температурних полях.

У порожнистому циліндрі при відсутності осьових навантажень або при постійному по товщині коефіцієнті Пуассона величини модуля пружності і коефіцієнту Пуассона не впливають на розподіл температури та визначення інших характеристик матеріалу, які приводять до відсутності радіальних та колових напружень. Цей висновок стосується шару у випадку відсутності поперечних навантажень і порожнистої кулі.

У неоднорідному шарі зміна товщини шару не впливає на концентрацію складових двокомпонентного ФГМ при заданих умовах теплообміну з середовищем і відношення температур на поверхні, але впливає на значення та розподіл температури по товщині.

Одержані результати можна використати для ефективного підбору ФГМ, що забезпечують нульові напруження у конструкціях та деталях у вигляді неоднорідних шарів, порожнистих куль та циліндрів, під час експлуатації за сталих теплових навантажень.

РОЗДІЛ 5

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ, ЯКІ СТВОРЮЮТЬ ЗАДАНІ ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ

У розділі розглянуто визначення температурних полів, які спричиняють заданий розподіл радіальних напружень у неперервно неоднорідних тілах простої форми з використанням запропонованих раніше інтегральних рівнянь. Подано аналітичні вирази цих температурних полів через механічні характеристики матеріалів, силові навантаження і радіальні напруження.

Для оцінки величин радіальних напружень та перевірки отриманих результатів потрібно визначити термонапружений стан тіл, спричинений температурним полем, отриманим зі стаціонарного рівняння теплопровідності. Для цього запропоновано наближені аналітичні методи розв’язування інтегральних рівнянь, які виявились ефективними для дослідження термонапруженого стану порожнистих неоднорідних і термочутливих тіл. Основні результати розділу 5 опубліковані у працях [9, 35, 36, 39, 71, 72, 79 – 81, 84, 92, 94 – 96, 134, 183, 184, 288, 289, 363, 367, 349, 379]

5.1. Встановлення температурних полів, які створюють задані термонапруження у неоднорідних тілах

5.1.1. Встановлення температурних полів, які створюють задані радіальні термонапруження у довгому циліндрі

Температурне поле, яке створює задані радіальні напруження за відомими силовими навантаженнями у порожнистому циліндрі визначають з інтегрального рівняння Фредгольма (2.69) або (2.70):

$$y(\rho)-\frac{(1+\nu(\rho))}{V(\rho_2)+W(\rho_2)}\int\limits_{\rho_1}^{1}\frac{\eta E(\eta)}{1-\nu^2}y(\eta)d\eta=\Psi(\rho)\,, \tag{5.1}$$

де

$$y(\rho) = (1 + \nu(\rho))\Phi(\rho),$$

$$\Psi(\rho) = I_1(\rho) + I_2(\rho) + I_3(\rho)$$

$$I_1(\rho) = -\frac{p\left[W(1) - V(1)\nu(\rho)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{(\rho_1^2 p_1 - p_2)\left[V(1) - W(1)\nu(\rho)\right]}{V^2(1) - W^2(1)},$$

$$I_2(\rho) = -\frac{1 - \nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^2 \sigma_r(\rho)\right],$$

$$I_3(\rho) = -\frac{1 - \nu^2(\rho)}{\rho E(\rho)} \int_{\rho_1}^{1} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^2 K(\rho, \eta)\right]\sigma_r(\eta) d\eta. \qquad (5.2)$$

Інтегральне рівняння (5.1) – це інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, яке має власні значення. Як відомо, таке неоднорідне рівняння відповідно до альтернативи Фредгольма [28, 173, 247, 290] має ненульові розв'язки, якщо виконується умова

$$\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1 - \nu^2(\xi)} \Psi(\xi) d\xi = 0. \qquad (5.3)$$

Покажемо, що умова (5.3) виконується при будь-якому радіальному напруженні $\sigma_r(\rho)$, якщо $\sigma_r(\rho_1) = -p_1$, $\sigma_r(\rho_2) = -p_2$. Справді, використовуючи (5.2), з (5.3) отримаємо

$$\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1 - \nu^2(\xi)} I_1(\xi) d\xi = \int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1 - \nu^2(\xi)} \left[-\frac{p\left[W(\rho_2) - V(\rho_2)\nu(\xi)\right]}{V^2(\rho_2) - W^2(\rho_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho_1^2 p_1 - p_2)\left[V(1) - W(1)\nu(\xi)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} \right] d\xi = -\frac{p\left[V(1)W(1) - V(1)W(1)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} +$$

$$+ \frac{(\rho_1^2 p_1 - p_2)\left[V^2(1) - W^2(1)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} = \rho_1^2 p_1 - p_2. \qquad (5.4)$$

При цьому використано означення функцій $V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\xi E(\xi)}{1 - \nu^2(\xi)} d\xi$ та $W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\xi E(\xi)\nu(\xi)}{1 - \nu^2(\xi)} d\xi$.

Інтеграл (5.3) від наступного доданка запишемо:

$$\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} I_2(\xi) d\xi = -\int_{\rho_1}^{1} \frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 \sigma_r(\xi)\right] d\xi = -(\rho_1^2 p_1 - p_2). \qquad (5.5)$$

Інтеграл від останнього доданка подано у вигляді:

$$\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} I_3(\xi) d\xi = -\int_{\rho_1}^{1} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \int_{\rho_1}^{1} K(\xi,\eta)\sigma_r(\eta) d\eta d\xi =$$

$$= -\int_{\rho_1}^{1} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \left[\int_{\rho_1}^{\xi} K_1(\xi,\eta)\sigma_r(\eta) d\eta + \int_{\xi}^{1} K_2(\xi,\eta)\sigma_r(\eta) d\eta \right] d\xi. \qquad (5.6)$$

З урахуванням виразів (2.53), (2.54) для ядра $K_r(\xi,\eta)$ інтегрального рівняння (2.52) матимемо

$$\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} I_3(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{\rho_1}^{1} \left[Z_1(\xi) V(\eta) + Z_2(\xi) W(\eta) \right] \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_r(\eta) d\eta d\xi -$$

$$-\int_{\rho_1}^{1} \frac{\xi E(\xi)}{1-\nu^2(\xi)} \int_{\xi}^{1} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_r(\eta) d\eta d\xi = 0. \qquad (5.7)$$

Значення інтегралу (5.7) обчислено з використанням явного вигляду (2.54) функцій $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ та методу інтегрування частинами. З рівностей (5.4) – (5.7) видно, що формула (5.3) виконується. Це означає, що інтегральне рівняння (5.2) має ненульовий розв’язок вигляду

$$t(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} - \frac{p\left[W(1) - V(1)\nu(\rho)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{(\rho_1^2 p_1 - p_2)\left[V(1) - W(1)\nu(\rho)\right]}{V^2(1) - W^2(1)} -$$

$$- \frac{1-\nu(\rho)}{\rho\alpha(\rho)E(\rho)} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \sigma_r(\rho)\right) - \frac{1-\nu(\rho)}{\rho\alpha(\rho)E(\rho)} \frac{d}{d\rho}\left[\rho^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} K(\rho,\eta)\sigma_r(\eta) d\eta \right], \qquad (5.8)$$

де C – довільна стала.

Формула (5.8) виражає температурні поля, які забезпечують заданий розподіл радіальних напружень $\sigma_r(\rho)$ при певних силових навантаженнях і механічних характеристиках матеріалу.

5.1.2. Встановлення температурних полів, які створюють задані радіальні термонапруження у порожнистій кулі

У цьому випадку аналогічне до (5.1) інтегральне рівняння має вигляд (2.76), яке запишемо так:

$$\Phi(\rho)-\frac{1}{V(1)}\int_{\rho_1}^{1}\eta^2\frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)}\Phi(\eta)d\eta=\frac{1}{2V(1)}L(\rho), \tag{5.9}$$

де

$$L(\rho)=\rho_1^3p_1-p_2-V(1)\frac{1-\nu(\rho)}{\rho^2E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\sigma_r(\rho)\right)-$$

$$-V(1)\frac{1-\nu(\rho)}{\rho^2E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\int_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}_s(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta\right).$$

Рівняння (5.9) є інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром, має власні значення. Його розв'язком є [28, 173, 247, 290]

$$\Phi(\rho)=C+\frac{1}{2V(1)}L(\rho), \tag{5.10}$$

якщо

$$\int_{\rho_1}^{1}\frac{\eta^2E(\eta)}{1-\nu(\eta)}L(\eta)d\eta=0.$$

Справедливість останньої рівності перевірено так само, як це було зроблено для рівності (5.3).

Якщо врахувати, що $\Phi(\rho)=\alpha(\rho)t(\rho)$, то температурне поле, виражене через радіальні напруження, навантаження на поверхнях і характеристики матеріалу, на основі формули (5.10) має вигляд:

$$t(\rho)=\frac{C}{\alpha(\rho)}+\frac{1}{2\alpha(\rho)V(1)}L(\rho). \tag{5.11}$$

Якщо врахувати явний вираз для $L(\rho)$ на основі (5.9), то температурне поле (5.11) можна подати так:

$$t(\rho)=\frac{C}{\alpha(\rho)}+\frac{\rho_1^3 p_1-p_2}{2\alpha(\rho)V(1)}-\frac{1-\nu(\rho)}{2\rho^2\alpha(\rho)E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^3\sigma_r(\rho)\Big)-$$

$$-\frac{1-\nu(\rho)}{2\alpha(\rho)\rho^2 E(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\int\limits_{\rho_1}^{1}\mathrm{K}_s(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta\right),\quad(5.12)$$

де $\varphi'(\eta)=\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}\right)$

5.1.3. Встановлення температурних полів, які створюють задані поздовжні термонапруження у шарі

Для випадку відсутності масового сил ($F_z(z)=0$) відповідні вирази для поздовжніх напружень та деформацій на основі формул (2.82) мають вигляд:

$$\sigma(z)=-\frac{\nu(z)}{1-\nu(z)}p_1-\frac{E(z)}{1-\nu(z)}\Phi(z)+e\frac{E(z)}{1-\nu(z)},\qquad(5.13)$$

$$e=\frac{p+p_1\int\limits_0^h\frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi+\int\limits_0^h\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}\Phi(\xi)d\xi}{\int\limits_0^h\frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi},\qquad(5.14)$$

якщо виконуються умови

$$e_x=e_y=e=\mathrm{const},\ \sigma_x(0)=\sigma_x(h)=-p_1,\ \int\limits_0^h\sigma(\xi)d\xi=p.$$

Відповідне інтегральне рівняння для визначення теплових деформацій $\Phi(z)=\alpha(z)t(z)$ через напруження, силові навантаження на поверхнях шару та його механічні характеристики, отримане з виразів (5.13), (5.14), має вигляд:

$$\Phi(z)-\frac{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}\Phi(\xi)d\xi}{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}=$$

$$=-\frac{1-\nu(z)}{E(z)}\sigma(z)-\frac{1-\nu(z)}{E(z)}\frac{\nu(z)}{1-\nu(z)}p_1+\frac{p-p_1\int\limits_0^h \frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}. \quad (5.15)$$

Інтегральне рівняння (5.15) є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з виродженим ядром та власним значенням. Його розв'язок отримано у той же спосіб, як у п. 5.1.1 та 5.1.2, подамо у вигляді:

$$\Phi(z)=\frac{\overline{C}}{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}-\frac{1-\nu(z)}{E(z)}\sigma(z)-\frac{\nu(z)}{E(z)}p_1+\frac{p-p_1\int\limits_0^h \frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi},$$

де $\overline{C}$ – довільна стала. Звідси маємо такий вираз для температурного поля

$$t(z)=\frac{C}{\alpha(z)}-\frac{1-\nu(z)}{\alpha(z)E(z)}\sigma(z)-$$

$$-\frac{\nu(z)}{\alpha(z)E(z)}p_1+\frac{p-p_1\int\limits_0^h \frac{\nu(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}{\alpha(z)\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}. \quad (5.16)$$

Для випадку $e_x=e_y=e=\mathrm{const}$, $p_1=0$, $p=0$ формула (5.16) матиме вигляд:

$$t(z)=\frac{C}{\alpha(z)}-\frac{1-\nu(z)}{\alpha(z)E(z)}\sigma(z), \quad (5.17)$$

де $C=\frac{\overline{C}}{\int\limits_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)}d\xi}$.

Отже температурні поля, які створюють заданий термонапружений стан у тілах простої форми, є точними аналітичними розв’язками відповідних запропонованих інтегральних рівнянь.

Для визначення температурних полів, які створюють заданий термонапружений стан потрібно визначити фізично обґрунтовані досяжні розподіли термонапружень. З цією метою потрібно розв’язати відповідні прямі задачі термопружності у тілах простої форми, які полягають у визначенні температурного поля з однорідного рівняння теплопровідності, а також термонапружень викликаного цим температурним полем при заданих силових та теплових навантаженнях на поверхнях. Отримані напруження слід підставити у вирази для температурного поля через механічні характеристики матеріалів як задані і порівняти отримані вирази для температурних полів, визначених з рівняння теплопровідності. Ці результати повинні бути однаковими.

Для цього у наступних параграфах запропоновано наближені аналітичні методи розв’язування відповідних інтегральних рівнянь термопружності, отриманих у другому розділі. Як виявилося, ці методи можуть бути застосовані до визначення термонапруженого стану одношарових і багатошарових неперервно неоднорідних у кожному шарі тіл із залежними від температури термомеханічними характеристиками.

5.2. Визначення термонапруженого стану у циліндричних тілах, виготовлених з композитних, зокрема, функціонально градієнтних матеріалів

Вихідним положенням є інтегральні рівняння, отримані в другому розділі, які описують, зокрема, термонапружений стан неоднорідних тіл. У незв’язаній задачі термопружності врахування термочутливості можливе через врахування залежності механічних характеристик матеріалу тільки від координати. Температурне поле обчислено на основі праці [37, 185].

5.2.1. Використання рівняння Фредгольма 2-го роду

Використаємо рівняння Фредгольма 2-го роду (2.52) – (2.54) відносно радіальної компоненти тензора напружень. Інтегральне рівняння (2.52) запишемо у вигляді

$$\sigma_r(\rho)+\int\limits_{\tilde{\rho}_1}^{\rho} K_1(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta+\int\limits_{\rho}^{\tilde{\rho}_2} K_2(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)d\eta=Q(\rho). \qquad (5.18)$$

Розіб'ємо інтервал $[\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2]$ на n відрізків позначимо $\tilde{\rho}_1=\rho_1$ $\rho_{n+1}=\tilde{\rho}_2$ ($\tilde{\rho}_i=r_i\ /R_2$, $i=1{,}2$). Ядро інтегрального рівняння запишемо у вигляді

$$K_1(\rho,\eta)=\frac{2V(\rho)}{\rho^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)-\frac{1+Z_1(\rho)}{\rho^2}V(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)+\frac{Z_2(\rho)}{\rho^2}W(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$K_2(\rho,\eta)=\frac{V(\rho)}{\rho^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)-\frac{Z_1(\rho)}{\rho^2}V(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)+\frac{Z_2(\rho)}{\rho^2}W(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right).$$

Для обчислення інтегралів використано метод трапецій [70, 334]. На кожному з інтервалів $[\rho_i,\rho_{i+1}],i=\overline{1,n}$ інтеграли замінюються на вирази

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} f(\eta)d\eta=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} f(\eta)d\eta\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_{i+1}f(\rho_{i+1})+\rho_i f(\rho_i)}{2}, \qquad (5.19)$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} f(\eta)d\eta\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\rho_{i+1}f(\rho_{i+1})-\rho_i f(\rho_i)\right]\Delta\eta_i\ ,$$

$$\Delta\eta_i=\rho_i-\rho_{i+1},\quad i=\overline{1,n}. \qquad (5.20)$$

Після згрупування членів біля $\sigma_r(\rho_i)$ $i=\overline{1,n+1}$, отримаємо систему $n+1$ лінійних алгебричних рівнянь для визначення $\sigma_r(\rho_i)$. Після застосування формул (5.19), (5.20) до інтегрального рівняння (5.18) для всіх значень $\rho=\rho_i$, $(i=\overline{1,n+1})$ у випадку рівномірної сітки

$\omega_h = \left\{ \rho_i = (i-1)h, i = \overline{1, N+1}, h = \dfrac{\rho_{n+1} - \rho_1}{N} \right\}$, отримана така система лінійних алгебричних рівнянь відносно *n+1* невідомих $\sigma_r(\rho_i)$ $(i = \overline{1, n+1})$:

$$\begin{cases} (1 + \frac{h}{2} K_{11})\sigma_r(\rho_1) + hK_{12}\sigma_r(\rho_2) + \ldots + \frac{h}{2} K_{1,n+1}\sigma_r(\rho_{n+1}) = Q(\rho_1), \\ \frac{h}{2} K_{21}\sigma_r(\rho_1) + \left(1 + hK_{22}\right) \cdot \sigma_r(\rho_2) + \ldots + \frac{h}{2} K_{2,n+1}\sigma_r(\rho_{n+1}) = Q(\rho_2), \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots. \\ \frac{h}{2} K_{n+1,1}\sigma_r(\rho_1) + hK_{12} \cdot \sigma_r(\rho_2) + \ldots + \left(1 + \frac{h}{2} K_{n+1,n+1}\right)\sigma_r(\rho_{n+1}) = Q(\rho_{n+1}), \end{cases} \tag{5.21}$$

де $K_{ij} = K(\rho_i, \rho_j)$.

Отримана система лінійних рівнянь розв’язана методом Ґауса. Інтегральне рівняння можна, в залежності від потреб, розв’язувати й іншими методами. Певний інтерес у практичному використанні займають методи сплайнів, резольвенти [28].

У якості прикладу реалізації алгоритму розглянемо циліндр, виготовлений з матеріалу, який має степеневу залежність модуля пружності від координати $E = E_0 \rho^s$ (s – дійсне число) при сталому коефіцієнті Пуассона $\nu = 0.25$. У цьому випадку задача термопружності має точний розв'язок [83].

Рівняння суцільності (2.42) при відсутності теплових деформацій і масових сил має вигляд

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1 - \nu^2(\rho)}{E(\rho)} \sigma \right) = \sigma_r \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1 + \nu(\rho)}{E(\rho)} \right),$$

звідки видно, що остаточний вираз для σ не залежить від E_0. Якщо $\sigma(\rho) = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{d[\rho^2 \sigma_r(\rho)]}{d\rho}$, визначене з рівняння рівноваги, підставити у це рівняння суцільності, вибрати розв’язок для $\sigma_r(\rho)$ у вигляді ρ^λ, підставити його в отримане рівняння, то загальний розв’язок для $\sigma_r(\rho)$ буде

$$\sigma_r^{(\mathrm{ex})}(\rho) = D_1 \rho^{\lambda_1 - 2} + D_2 \rho^{\lambda_2 - 2}, \tag{5.22}$$

де корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння і сталі D_1, D_2, визначені з умов на межах ($\sigma_r^{(ex)}(\tilde{\rho}_1) = -p_1$, $\sigma_r^{(ex)}(\tilde{\rho}_2) = -p_2$), запишуться як

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s + 2 + \sqrt{(s+2)^2 - 4s\frac{1}{1-\nu}} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(s + 2 - \sqrt{(s+2)^2 - 4s\frac{1}{1-\nu}} \right),$$

$$D_1 = \frac{-p_1 + p_2\rho_1^{\lambda_2-2}}{\rho_1^{\lambda_1-2} - \rho_1^{\lambda_2-2}}, \qquad D_2 = \frac{p_1 - p_2\rho_1^{\lambda_1-2}}{\rho_1^{\lambda_1-2} - \rho_1^{\lambda_2-2}}.$$

На основі рівняння рівноваги (2.40) отримано точний аналітичний вираз $\sigma^{(ex)}(\rho)$ для сумарних напружень $\sigma(\rho)$:

$$\sigma^{(ex)}(\rho) = D_1\lambda_1\rho^{\lambda_1-2} + D_2\lambda_2\rho^{\lambda_2-2}. \tag{5.23}$$

Результати обчислень подані у табл. 5.1 для різних значень радіусів та показника неоднорідності при заданих навантаженнях $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p = 0$. Для однорідних тіл у цьому випадку сумарні напруження сталі вздовж радіуса.

При сталих характеристиках матеріалу інтегральне рівняння (2.52) перетворюється у розв’язок задачі Ляме з температурними навантаженнями.

Значення радіальних та колових напружень становлять при згаданих навантаженнях –1.0 по всій товщині циліндра. Неоднорідність матеріалу із степеневою залежністю модуля пружності приводить до зміни значень радіальних напружень на 25% при зміні характеристик по товщині на 75%.

Таблиця. 5.1

Порівняльна характеристика точних і наближених розв’язків

	s=10, n=10			s=5, n =10		
ρ	$\frac{\sigma_r^{(ex)}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{(IE)}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{(ex)} - \sigma_r^{(IE)}}{\sigma_r^{(ex)}}\%$	$\frac{\sigma_r^{(ex)}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{(IE)}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{(ex)} - \sigma_r^{(IE)}}{\sigma_r^{(ex)}}\%$
0.5	-1.0000	-1.00000	0	-.999999	-1.00000	0.0001
0.55	-.931341	-.930663	-0.0728	-.9378978	-.9375801	-0.03387

0.6	-.874306	-.873200	-0.1265	-.8919810	-.8914993	-0.054
0.65	-.827668	-.826308	-0.16432	-.8603542	-.8598060	-0.06372
0.7	-.791416	-.789928	-0.18802	-.8419106	-.8413600	-0.0654
0.75	-.766836	-.765326	-0.19691	-.8360927	-.8355829	-0.06097
0.8	-.756764	-.755328	-0.18976	-.8427413	-.8423019	-0.05214
0.85	-.765990	-.764728	-0.16475	-.8619955	-.8616475	-0.04037
0.9	-.801834	-.800856	-0.12197	-.8942266	-.8939849	-0.02703
0.95	-.874892	-.874326	-0.06469	-.9399915	-.9398668	-0.01327
1	-.999999	-.999999	0	-1.000000	-1.000000	0

Розглянемо порожнистий циліндр з розглянутими вище геометричними параметрами, виготовлений з двокомпонентного функціонально-градієнтного металокерамічного матеріалу, характеристики якого виражаються при нульовій пористості через характеристики компонент формулами [322, 279, 280] (модель Гашіна-Штрікмана):

$$E(\rho)=\frac{E_c\left[E_c+(E_m-E_c)S_m^{2/3}(\rho)\right]}{E_c+(E_m-E_c)(S_m^{2/3}(\rho)-S_m(\rho))},\quad \alpha(\rho)=\frac{\alpha_m K_m S_m(\rho)+\alpha_c K_c S_c(\rho)}{K_m S_m(\rho)+K_c S_c(\rho)}$$

$$\nu=\nu_m S_m+\nu_c S_c\,,\quad K_m=\frac{E_m}{2(1-\nu_m)},\qquad K_c=\frac{E_c}{2(1-\nu_c)}\qquad S_c(\rho)=1-S_m(\rho)\,,$$

де індекс m стосується металу, а індекс c – кераміки, $S_m(\rho)$, $S_c(\rho)$ – об’ємна концентрація металу в кераміці і кераміки в металі, значення яких лежать в інтервалі [0,1]. Фізико-механічні властивості матеріалів наступні:

Таблиця 5.2

Характеристики матеріалів

	Е ҐПа	α 1/К	ν
Кераміка	151.0	$10.0\cdot10^{-6}$	1/3
Метал	100.7	$3.95\cdot10^{-6}$	1/3

Циліндр знаходиться під дією нульових навантажень на зовнішній і внутрішній поверхнях $(p_1 = p_2 = 0)$, та осьового навантаження $p =$ $=7.222488122 \cdot 10^7$ Па, температурного поля $t(\rho) = t_2 - \dfrac{(t_2 - t_1)\ln\rho}{\ln\rho_1}$ (сталий коефіцієнт теплопровідності), $T_2 = 600$ К, $T_1 = 400$ К, $T_0 = 273$ К,

$$S_m(\rho) = \frac{-1.74805878 \cdot 10^{-3} K_c + (1+\nu_m)\alpha_c K_c(\rho)(T - T_0)}{1.74805878 \cdot 10^{-3}(K_m - K_c) - (1+\nu_m)(T(\rho) - T_0)(\alpha_m K_m - \alpha_c K_c)}.$$

У цьому випадку отримуємо $Q(\rho) = 0$, а, отже, $\sigma_r(\rho) = 0$. З рівняння рівноваги отримаємо $\sigma(\rho) = 0$, тому $\sigma_\varphi(\rho) = 0$, $\sigma_z(\rho) = 0$.

Отже існують такі поля температури, які призводять до відсутності напружень у довгому неоднорідному циліндрі при осьових силових навантаженнях.

Визначимо напруження, спричинені у двокомпонентному неоднорідному порожнистому циліндрі температурним полем $t(\rho) = T(\rho) - T_0$, яке задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right) = 0, \tag{5.24}$$

та умови на межах

$$t(\rho_1) = t_1, \quad t(\rho_2) = t_2, \; t_1 = T_1 - T_0, \; t_2 = T_2 - T_0. \tag{5.25}$$

Тут $T(\rho)$ – реальне температурне поле, T_0 – відлікова температура, при якій напруженння відсутні, T_1, T_2 – значення температур на поверхнях порожнистого циліндра. Радіальні напруження визначаються тоді як розв’язок системи алгебричних рівнянь (5.21), а колові та осьові напруження і деформації – з рівнянь рівноваги та зв’язків між деформаціями та напруженнями.

Розв’язок задачі теплопровідності (5.24), (5.25) має вигляд [321]:

$$t(\rho) = C_1 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\eta\lambda(\eta)} d\eta + C_2, \tag{5.26}$$

де

$$C_2 = t_1\,, \qquad\qquad C_1 = \frac{t_2 - t_1}{\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\eta\lambda(\eta)} d\eta}.$$

Вважаємо, що характеристики двокомпонентного ФГМ описані моделлю простої суміші (3.10). Характеристики складових подані у табл. 5.3, а $t_1 = 200$ K, $t_2 = 500$ K, $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$, $p_1 = p_2 = p = 0$.

Таблиця 5.3.

Характеристики матеріалів.

	E ҐПа	α 1/K	ν	λ Вт/(м·К)
Кераміка (SiC)	415.0	$0.71{\cdot}10^{-6}$	0.16	65.62
Метал Al	71	$22.8{\cdot}10^{-6}$	0.342	237

Розподіл коефіцієнта теплопровідності, температури і напружень вздовж радіальної змінної циліндра зображено на рис. 5.1 – 5.3

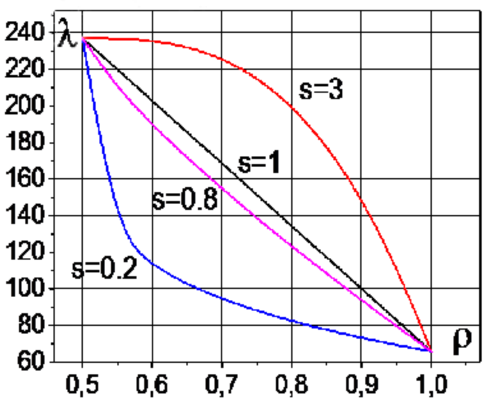


Рис. 5.1. Залежність коефіцієнта теплопровідності від концентрації складових

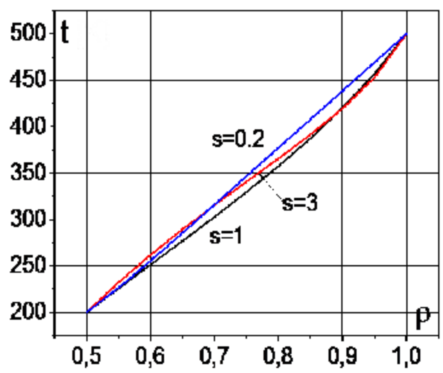


Рис. 5.2. Залежність температури від концентрації складових

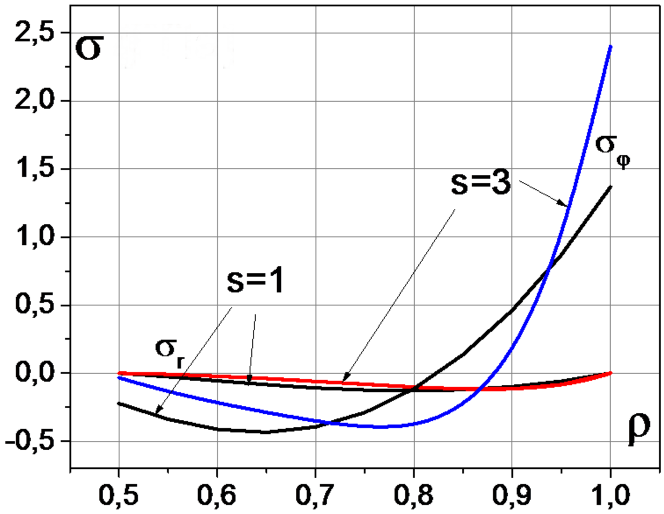


Рис.5.3. Залежність радіальних і колових напружень від концентрації складових

На рис. 5.2 температурне поле для $s = 0.8$ не наведено, тому що воно майже повністю збігається з кривими, які відображають температурне поле при $s = 1$. З рис. 5.1 – 5.3 видно, що неоднорідність матеріалу слабо впливає на розподіл температури у циліндрі, але суттєво впливає на розподіл колових, а отже і поздовжніх напружень при відсутності зовнішніх силових навантажень.

5.2.2. Наближені аналітичні розв'язки інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

Оскільки у цьому пункті використовуються квадратурні формули, то є можливість розглянути багатошаровий циліндр, кожний шар якого є настільки тонким, що відповідні інтеграли можна замінити наближеною квадратурною формулою з урахуванням умов ідеального контакту між шарами. Це дає змогу розглянути порожнистий багатошаровий циліндр, виготовлений з матеріалів, характеристики яких у кожному j-му шарі залежать від температури та координат. Між шарами наявний ідеальний термомеханічний контакт, який поданий виразами

$$t^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = t^{(j)}(\rho_{j+1}),$$

$$\lambda^{(j+1)}(\rho_{j+1})\frac{\partial t^{(j+1)}(\rho_{j+1})}{\partial \rho} = \lambda^{(j)}(\rho_{j+1})\frac{\partial t^{(j)}(\rho_{j+1})}{\partial \rho} \quad ,$$

$$u_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = u_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad \sigma_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad j = 1,\ldots,n-1. \qquad (5.27)$$

Вважатимемо, що на поверхнях циліндра задані сталі силові навантаження

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p_2, \quad 2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} \eta\sigma_z(\eta)\,d\eta = p. \qquad (5.28)$$

Тоді, застосовуючи безпосереднє інтегруванням рівняння рівноваги (2.32) в межах кожного шару з використанням умов контакту (5.27) та умов на межі (5.28), отримаємо аналогічне до (2.47) інтегральне рівняння і подібну до (2.48) інтегральну умову для сумарних напружень $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\varphi^{(j)}$ [184]

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2 p_1 + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta(\sigma^{(k)}(\eta) - \eta F_r^{(k)}(\eta))\,d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta(\sigma^{(j)}(\eta) - \eta F_r^{(j)}(\eta))\,d\eta\right], \quad j = 1,\ldots,n, \qquad (5.29)$$

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^{n}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta(\sigma^{(k)}(\eta) - \eta F_r^{(k)}(\eta))\,d\eta. \qquad (5.30)$$

Зауважимо, що умови неперервності радіальних переміщень зводяться до умов неперервності колових деформацій $e_\varphi^{(j)}(\rho_{j+1}) = e_\varphi^{(j+1)}(\rho_{j+1})$, $j = 1,\ldots,n-1$, якщо врахувати, що $e_\varphi^{(j)} = u_r^{(j)}/\rho$. Це дозволяє подати результат безпосереднього інтегрування рівнянь сумісності (2.39) для j-го шару у вигляді

$$\frac{1-(\nu^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)}\sigma^{(j)}(\rho) = \int_{\rho_j}^{\rho} \sigma_r^{(j)}(\eta)(\varphi^{(j)}(\eta))'\,d\eta + \frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1) +$$

$$+[\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)]e_z+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\sigma_r^{(k)}(\eta)(\varphi^{(k)}(\eta))'d\eta+$$

$$+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1})-F^{(j)}(\rho),\quad j=1,\ldots,n, \tag{5.31}$$

де

$$\varphi^{(k)}(\rho)=\frac{1+\nu^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)},\qquad (\varphi^{(k)}(\rho))'=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)}\right),$$

$$\beta^{(k)}=\varphi^{(k+1)}(\rho_{k+1})-\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}),$$

$$F^{(j)}(\rho)=(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta F_r^{(k)}(\eta)\varphi^{(k)}(\eta)\,d\eta+\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta F_r^{(j)}(\eta)\varphi^{(j)}(\eta)\,d\eta+$$

$$+[(1+\nu^{(j)}(\rho))\Phi^{(j)}(\rho)-(1+\nu^{(1)}(\rho_1))\Phi^{(1)}(\rho_1)].$$

Основну трудність при визначенні компонент термопружного стану розглядуваного циліндра становить побудова розв’язків систем інтегральних рівнянь (5.29) та (5.31) за інтегральних умов (5.28) і (5.30), для вирішення якої застосований підхід, запропонований в роботах [83, 223]. Для початку розглянемо *порожнистий циліндр, який складається з n тонких шарів із різних матеріалів*. Під поняттям *тонкі* будемо розуміти шари такої товщини, для яких при обчисленні наявних у рівняннях (5.29) і (5.31) інтегралів, що містять в підінтегральних виразах $Y(\eta)$ невідомі напруження, з задовільною для нас точністю справедлива формула трапецій (5.19), (5.20) .

З рівнянь (5.29) і (5.31) при $j=1$ після використання формули (5.19) для обчислення інтегралів, які містять в підінтегральних виразах невідомі напруження отримуємо рівності

$$\sigma_r^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left\{\rho_1^2\sigma_r^{(1)}(\rho_1)+\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[\rho\sigma^{(1)}(\rho)+\rho_1\sigma^{(1)}(\rho_1)\right]-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2 f^{(1)}(\eta)d\eta\right\}. \tag{5.32}$$

$$\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho)\right)^2}{E^{(1)}(\rho)}\sigma^{(1)}(\rho)=\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[\sigma_r^{(1)}(\rho)\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'+\sigma_r^{(1)}(\rho_1)\left(\varphi^{(1)}(\rho_1)\right)'\right]+$$

$$+\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho_1)\right)^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1)+\left[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)\right]e_z-F^{(1)}(\rho). \qquad (5.33)$$

Підставивши вираз радіального напруження (5.32) у рівність (5.33), отримаємо алгебричне рівняння відносно сумарного напруження $\sigma^{(1)}(\rho)$

$$\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho)\right)^2}{E^{(1)}(\rho)}\sigma^{(1)}(\rho)=$$

$$=\frac{\rho-\rho_1}{2\rho^2}\left\{\rho_1^2\sigma_r^{(1)}(\rho_1)+\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[\rho\sigma^{(1)}(\rho)+\rho_1\sigma^{(1)}(\rho_1)\right]-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2F_r^{(1)}(\eta)d\eta\right\}\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'+$$

$$+\frac{\rho-\rho_1}{2}\sigma_r^{(1)}(\rho_1)\left(\varphi^{(1)}(\rho_1)\right)'+\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho_1)\right)^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1)+$$

$$+\left[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)\right]e_z-F^{(1)}(\rho). \qquad (5.34)$$

Розв’язавши рівняння (5.34) відносно сумарного напруження, знайдемо його вираз у першому шарі

$$\sigma^{(1)}(\rho)=\sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{10}^{(1)}(\rho)+e_z\gamma_{20}^{(1)}(\rho)+\gamma_{00}^{(1)}(\rho), \qquad (5.35)$$

де

$$\gamma_{10}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}\left[\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho_1)\right)^2}{E^{(1)}(\rho_1)}+\left(\frac{\rho-\rho_1}{2}\right)^2\frac{\rho_1}{\rho^2}\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'\right],$$

$$\gamma_{20}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}\left[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)\right],$$

$$\gamma_{00}^{(1)}(\rho)=-\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}\left\{\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[p_1\left(\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'\frac{\rho_1^2}{\rho^2}+\left(\varphi^{(1)}(\rho_1)\right)'\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2f^{(1)}(\eta)d\eta\right]+F^{(1)}(\rho)\right\},$$

$$\psi^{(1)}(\rho)=\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho)\right)^2}{E^{(1)}(\rho)}-\left(\frac{\rho-\rho_1}{2}\right)^2\frac{1}{\rho}\left(\varphi^{(1)}(\rho)\right)'.$$

Радіальні напруження, отримані з формули (5.29) після заміни в ній сумарних напружень виразом (5.35), мають вигляд

$$\sigma_r^{(1)}(\rho)=\sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{1r}^{(1)}(\rho)+e_z\gamma_{2r}^{(1)}(\rho)+\gamma_{0r}^{(1)}(\rho)\,, \tag{5.36}$$

де

$$\gamma_{1r}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\gamma_{10}^{(1)}(\eta)d\eta,\qquad \gamma_{2r}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\gamma_{20}^{(1)}(\eta)d\eta,$$

$$\gamma_{0r}^{(1)}(\rho)=-\frac{\rho_1^2p_1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\left(\gamma_{00}^{(1)}(\eta)-\eta f^{(1)}(\eta)\right)d\eta.$$

У виразах (5.35) – (5.36) враховано, що $\sigma_r^{(1)}(\rho_1)=-p_1$.

Подібні перетворення виконано з кожною наступною парою рівнянь, отриманою з систем (5.29), (5.31) при $j=2,...,n$. В результаті знайдено вирази сумарних та радіальних напружень у довільному шарі циліндра, а саме

$$\sigma^{(j)}(\rho)=\gamma_{10}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1)+\gamma_{20}^{(j)}(\rho)e_z+\gamma_{00}^{(j)}, \tag{5.37}$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho)=\gamma_{1r}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1)+\gamma_{2r}^{(j)}(\rho)e_z+\gamma_{0r}^{(j)}, \tag{5.38}$$

де

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{\ (1-\delta_{1j})\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho)+$$

$$+\Bigg[\ \frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho_1)\right)^2}{E^{(1)}(\rho_1)}+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{1r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\gamma_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1})\Bigg]\chi_1^{(j)}(\rho)\ \Bigg\},$$

$$\gamma_{20}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{\ \left[\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(j)}(\rho_j)\right]+(1-\delta_{1j})\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho)+$$

$$+\Bigg[\ \nu^{(j)}(\rho_j)-\nu^{(1)}(\rho_1)+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{2r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta+\beta^{(k)}\gamma_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1})\right)\ \Bigg]\ \Bigg\},$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{\left[-\delta_{1j}p_1+(1-\delta_{1j})\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)\right]\chi_2^{(j)}(\rho)-$$

$$-\frac{\rho-\rho_j}{2}\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_j}^{\rho}\eta^2 f^{(j)}(\eta)d\eta+\left[(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{0r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta+\right.$$

$$\left.+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1})-F^{(j)}(\rho)\right]\chi_1^{(j)}(\rho)-F^{(j)}(\rho)+F^{(j)}(\rho_j)\Bigg\},$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{10}^{(j)}(\eta)d\eta\right],$$

$$\gamma_{2r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{20}^{(j)}(\eta)d\eta\right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2p_1\delta_{1j}+(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\left(\gamma_{00}^{(j)}(\eta)-\eta f^{(j)}(\eta)\right)d\eta\right],$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho)=1+\left(\frac{\rho-\rho_j}{2}\right)^2\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\frac{\rho_j}{\rho^2}\frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1-\left(\nu^{(j)}(\rho_j)\right)^2},$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho)=\frac{\rho-\rho_j}{2}\left[\frac{\rho_j^2}{\rho^2}\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'+\left(\varphi^{(j)}(\rho_j)\right)'\right],$$

$$\psi^{(j)}(\rho)=\frac{1-\left(\nu^{(j)}(\rho)\right)^2}{E^{(j)}(\rho)}-\left(\frac{\rho-\rho_j}{2}\right)^2\frac{1}{\rho}\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'. \tag{5.39}$$

Сталі $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ та e_z визначаємо з інтегральних умов (5.28) і (5.30). У результаті отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases}\sigma^{(1)}(\rho_1)d_{11}+e_zd_{12}=c_1\\ \sigma^{(1)}(\rho_1)d_{21}+e_zd_{22}=c_2\end{cases}, \tag{5.40}$$

де

$$d_{11}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\gamma_{10}^{(k)}(\eta)d\eta, \qquad d_{12}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\gamma_{20}^{(k)}(\eta)d\eta,$$

$$d_{21}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\nu^{(k)}(\eta)\gamma_{10}^{(k)}(\eta)d\eta, \quad d_{22}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\left[\nu^{(k)}(\eta)\gamma_{20}^{(k)}(\eta)+E^{(k)}(\eta)\right]d\eta,$$

$$c_1=\rho_1^2 p_1-\rho_{n+1}^2 p_2+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\left[\eta f(\eta)-\gamma_{00}^{(k)}(\eta)\right]d\eta,$$

$$c_2=\frac{p}{2\pi}+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta\left[E^{(k)}(\eta)\Phi^{(k)}(T^{(k)}(\eta))-\nu^{(k)}(\eta)\gamma_{00}^{(k)}(\eta)\right]d\eta, \qquad (5.41)$$

з якої

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)=\frac{c_1 d_{22}-c_2 d_{12}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}, \quad e_z=\frac{c_2 d_{11}-c_1 d_{21}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}. \qquad (5.42)$$

У випадку жорстко закріплених кінців циліндра ($e_z=0$), замість системи алгебричних рівнянь (5.40) будемо мати одне рівняння:

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)d_{11}=c_1 . \qquad (5.43)$$

Нехай *циліндр виготовлений з одного неоднорідного термочутливого матеріалу*. Неоднорідність матеріалу по товщині такого циліндра спричинюється нерівномірним розподілом температури і вона буде тим істотнішою, чим істотнішою є зміна температури. Такий циліндр можна розглядати як складений з n шарів малої товщини (тонких) з матеріалів, які мають одні і ті ж характеристики на границі шарів. Сумарні і радіальні напруження у кожному з таких тонких шарів обчислимо за формулами (5.37), (5.38), у яких вирази $\gamma_{\alpha p}^{(j)}$ ($\alpha=0,1,2$; $p=0$) значно спрощуються і набувають вигляду

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{\;(1-\delta_{1j})\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho)+$$

$$+\left[\frac{1-\left(\nu^{(1)}(\rho_1)\right)^2}{E^{(1)}(\rho_1)}+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{1r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta\right]\chi_1^{(j)}(\rho)\Bigg\},$$

$$\gamma_{20}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Big\{\left[\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(j)}(\rho_j)\right]+(1-\delta_{1j})\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho)+$$

$$+\left[\nu^{(j)}(\rho_j)-\nu^{(1)}(\rho_1)+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{2r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta\right]\chi_1^{(j)}(\rho)\Big\},$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Big\{\left[-\delta_{1j}p_1+(1-\delta_{1j})\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)\right]\chi_2^{(j)}(\rho)-$$

$$-\frac{\rho-\rho_j}{2}\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_j}^{\rho}\eta^2F_r^{(j)}(\eta)d\eta+$$

$$+\left[(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{0r}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta-F^{(j)}(\rho)\right]\chi_1^{(j)}(\rho)-F^{(j)}(\rho)+F^{(j)}(\rho_j)\Big\},$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{10}^{(j)}(\eta)d\eta\right],$$

$$\gamma_{2r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{20}^{(j)}(\eta)d\eta\right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2p_1\delta_{1j}+(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)+\int_{\rho_j}^{\rho}\eta\left(\gamma_{00}^{(j)}(\eta)-\eta f^{(j)}(\eta)\right)d\eta\right],$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho)=1+\frac{\left(\rho-\rho_j\right)^2\rho_j}{4\rho^2}\left(\varphi(\rho)\right)'\frac{E(\rho_j)}{1-\left(\nu(\rho_j)\right)^2},$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho)=\frac{\rho-\rho_j}{2}\left[\frac{\rho_j^2}{\rho^2}\left(\varphi(\rho)\right)'+\left(\varphi(\rho_j)\right)'\right],\ \psi^{(j)}(\rho)=\frac{1-\left(\nu(\rho)\right)^2}{E(\rho)}-\frac{(\rho-\rho_j)^2}{4\rho}\left(\varphi(\rho)\right)',$$

де

$$\varphi(\rho)=\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)},\ \left(\varphi(\eta)\right)'=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\right)\Bigg|_{\rho=\eta},$$

$$F(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta F_r(\eta)\varphi(\eta)d\eta+\left(1+\nu(\rho)\right)\Phi(T(\rho))-\left(1+\nu(\rho_1)\right)\Phi(T(\rho_1)).$$

Якщо ж *циліндр складений із тонких і товстих шарів* з різних матеріалів, то сумарні і радіальні напруження в ньому обчислюються також за формулами (5.37), (5.38), ставлячи при цьому кожному із товстих шарів у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу.

Термонапружений стан двошарового термочутливого у кожному шарі циліндра. Числові дослідження. Обчислення напружень проведено з використанням формул (5.37) – (5.43). Розглянемо безмежний порожнистий двошаровий циліндр з внутрішнім радіусом $r_0=10$ см і зовнішнім – $R=11$ см. Через поверхню $r=r_0$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем сталої температури $t_{c_0}=1100$ К, яку вибрано за опорну, а через зовнішню поверхню $r=R$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем сталої температури $t_{c_2}=300$ К, яку вибрано за початкову. Обчислення розподілу температури [36] проведено для заданих значень коефіцієнтів теплообміну $\alpha_1=12000$, $\alpha_2=100$. За матеріали шарів вибрано кераміку ZrO_2 (шар $r_0\le r<r^*$) і титановий сплав Ti-6Al-4V (шар $r^*<r\le R$) з такими температурними залежностями теплофізичних і механічних характеристик з діапазону температур $300\div1100$ К [356]

– *для кераміки*:

$$\lambda_t(t)=(1.71+0.21\cdot10^{-3}t+0.116\cdot10^{-6}t^2)\ [\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}],\quad c(t)=c_{\text{p}}(t)\rho(t),$$

$$c_{\text{p}}(t)=(2.74\cdot10^2+7.95\cdot10^{-1}t-6.19\cdot10^{-4}t^2+1.71\cdot10^{-7}t^3)\ [\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}],$$

$$\rho=3657.0/(1.0+\alpha_t(t)(t-300.0))^3\ [\text{кг/м}^3],$$

$$\alpha_t(t)=(13.31\cdot10^{-6}-18.9\cdot10^{-9}t+12.7\cdot10^{-12}t^2)\ [\text{К}^{-1}],$$

$$E(t) = (132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3} t - 8.1 \cdot 10^{-6} t^2)\,[\text{ГПа}],\ \ \nu = 0.333\,;$$

– для титанового сплаву:

$$\lambda_t(t) = (1.1 + 0.017t)\,[\text{Вт/(м} \cdot \text{К)}], \qquad c_v(t) = c_\text{р}(t)\rho(t)\,,$$

$$c_\text{р}(t) = (3.5 \cdot 10^2 + 8.78 \cdot 10^{-1} t - 9.74 \cdot 10^{-4} t^2 + 4.43 \cdot 10^{-7} t^3)\,[\text{кДж/кг} \cdot \text{К}],$$

$$\rho = 4420.0 \,/\, (1.0 + \alpha_t(t)(t - 300.0))^3\,[\text{кг/м}^3],$$

$$\alpha_t(t) = (7.43 \cdot 10^{-6} + 5.56 \cdot 10^{-9} t - 2.69 \cdot 10^{-12} t^2)\,[\text{К}^{-1}],$$

$$E(t) = (122.7 - 0.0565t)\,[\text{ГПа}], \nu(t) = 0.2888 + 32.0 \cdot 10^{-6} t\,.$$

Результати числових досліджень розподілу температурного поля наведено у вигляді графіків на рис. 5.4, рис. 5.5, а колових напружень – на рис. 5.6. Суцільні криві на рисунках відповідають значенням, обчисленим з урахуванням температурних залежностей теплофізичних характеристик матеріалів шарів циліндра, а штрихові – за сталих значень усіх теплофізичних характеристик, вибраних при початковій температурі $t_\text{р} = 300\,\text{К}$.

На рис. 5.4 зображено графіки залежностей температури двошарового циліндра від радіуса r у сантиметрах для різних значень часу τ. При $\tau > 200\,\text{с}$ температура в циліндрі виходить на стаціонарний режим. На границі контакту шарів $r^* = 10.5\,\text{см}$ температура неперервна.

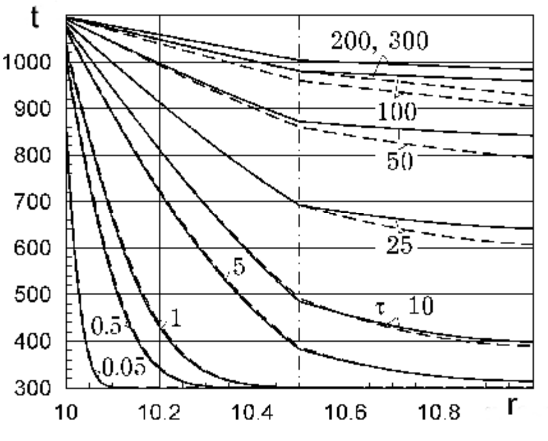


Рис. 5.4. Радіальні розподіли температури у двошаровому циліндрі в різні моменти часу

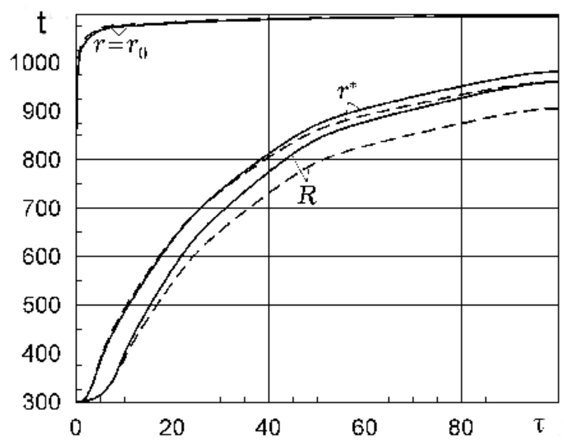


Рис. 5.5. Часові розподіли температури у двошаровому циліндрі для різних радіальних координат

Залежність температури від часу τ на обмежувальних поверхнях циліндра $r = r_0$ і $r = R$ у сантиметрах, а також на границі контакту шарів $r = r^*$ наведено на рис. 5.5.

Зміну колових напружень σ_φ у ГПа на відрізку $\tilde{r} \in [1.0, 1.1]$, де $\tilde{r} = r/r_0$, для моментів часу $\tau = 0.05, 25, 200$ с з урахуванням і без урахування температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалів при відсутності силових навантажень подано на рис. 5.6.

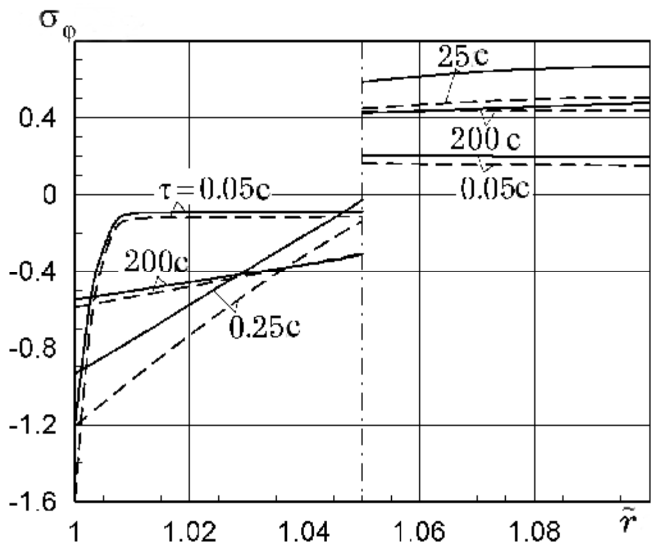


Рис. 5.6. Розподіл колових напружень для різних моментів часу з урахуванням і без урахування температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалів

Для вибраних матеріалів шарів циліндра розбіжність між значеннями температур, обчисленими з урахуванням залежностей від температури коефіцієнтів теплопровідності, об'ємних теплоємностей і коефіцієнтів температуропровідності, і їхніми значеннями, обчисленими за сталих характеристик при початковій температурі, не перевищує 2% на внутрішній поверхні, 9% – на зовнішній і 14% на межі контакту шарів. Це свідчить про необхідність врахування температурних залежностей теплофізичних характеристик матеріалів при визначенні розподілу температурного поля в двошаровому безмежному циліндрі.

Оскільки товщина матеріалу порожнистого циліндра є малою, то радіальні напруження не подано тому, що вони не перевищують 0.03 ҐПа у заданому діапазоні зміни температурного поля. Осьові напруження σ_z мають приблизно таку ж величину і закон розподілу, як і колові напруження. Для моментів часу $\tau > 200$ с напруження не відрізняються, що свідчить про досягнення стаціонарного режиму. Величина напружень і величина їх стрибка для вибраних матеріалів також залежать від часу. Показовими є малі моменти часу, де практично незначна зміна температурного поля за рахунок врахування температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу призводить до порівняно великих змін напружень. Це свідчить про необхідність урахування впливу температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу на напруження при малих моментах часу внаслідок великих перепадів температур, які враховує запропонована методика розрахунку напружень.

Тришаровий термочутливий у кожному шарі циліндр із залежними від часу температурами середовища. Розглянемо довгий термочутливий тришаровий порожнистий циліндр, виготовлений з оксиду алюмінію з тонким вольфрамовим прошарком. Радіальні координати шарів в напрямі від осі циліндра назовні в одиницях зовнішнього радіуса R_2 є $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.748$, $\rho_3 = 0.752$, $\rho_4 = 1.0$. Обчислення розподілу температурного поля у порожнистому довгому циліндрі, з поверхонь якого здійснюється конвективний теплообмін з середовищами проведено числовими методами [36] при $\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = 10$, $T_{c0}(\mathrm{Fo}) = \frac{900-300}{300}\left(1 - e^{-k_{1v}\mathrm{Fo}}\right)$, $T_{cR}(\mathrm{Fo}) = \frac{900-300}{300}\left(1 - e^{-k_{2v}\mathrm{Fo}}\right)$, $k_{1v} = k_{2v} = 1000$. Характеристики матеріалів [74, 265, 347] задані для кераміки на основі оксиду алюмінію (позначено індексом 1) і вольфраму (позначено індексом 2) у вигляді:

$$\lambda^{(1)}(T) = \lambda^{(3)}(T) = 15.494 + 4.504 \cdot 10^{-3} T - 8.682 \cdot 10^{-7} T^2 \ \text{[Вт/(м·К)]}$$

$\lambda^{(2)}(T) = 4.205 + 8.532 \cdot 10^{-4} T + 1.288 \cdot 10^{-5} T^2$ [Вт/(м·К)]

$C^{(1)}(T) = C^{(3)}(T) = 5.494 + 4.504 \cdot 10^{-3} T - 8.682 \cdot 10^{-7} T^2$ [Дж/К]

$C^{(2)}(T) = 4.205 + 8.532 \cdot 10^{-4} T + 1.288 \cdot 10^{-5} T^2$ [Дж/К]

$\alpha^{(1)}(t) = \alpha^{(3)}(t) = (5.494 + 4.504 \cdot 10^{-3} - 8.682 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^{-6}$ [1/К]

$\alpha^{(2)}(T) = 4.205 + 8.532 \cdot 10^{-4} T + 1.288 \cdot 10^{-5} T^2$ [1/К]

$E^{(1)}(T) = E^{(3)}(T) = 383.55 - 0.0444 \cdot 10^{-3} T$ [ГПа]

$E^{(2)}(t) = 4.205 + 8.532 \cdot 10^{-4} T + 1.288 \cdot 10^{-5} T^2$ [ГПа]

$\nu^{(1)}(T) = \nu^{(3)}(T) = 0.21 + 32.0 \cdot 10^{-6} T$, $\quad \nu^{(2)}(T) = 0.34$.

На рис. 5.7 – 5.10 суцільними лініями позначено залежності температури та напружень від координат при врахуванні температурної залежності характеристик матеріалів, а штриховими – при сталих характеристиках матеріалу, які відповідають температурі $T = 300$ К.

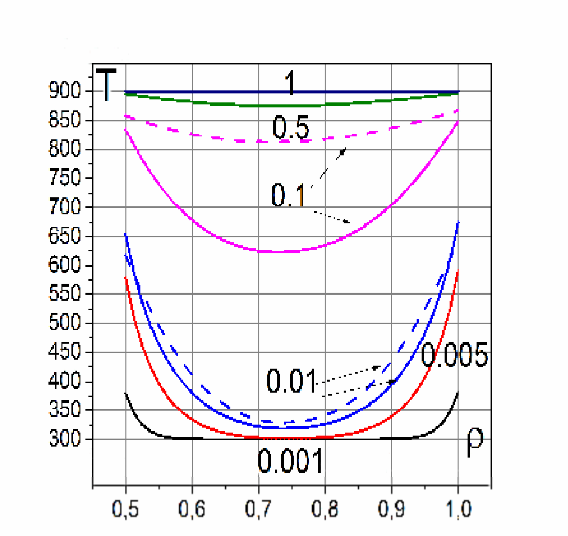


Рис.5.7. Залежності температури від координати ρ за різних значень Fo

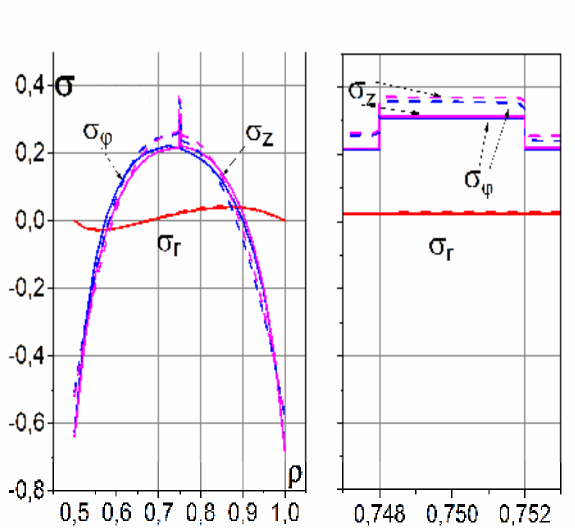


Рис.5.8 Залежності напружень від координати ρ при значенні Fo =0.01 ($\tau = 0.0008$ с)

З рис. 5.7 видно, що вплив термочутливості матеріалів на температурне поле для вибраних матеріалів багатошарового циліндра є мізерним при малих і великих близьких до виходу на стаціонарний режим числах Fo. Найбільший вклад від урахування термочутливості матеріалу на розподіл температури досягнено при $Fo = 0.1$. В околі $Fo = 0.01$ спостерігається нижча температура поверхні циліндра без урахування термочутливості матеріалу порівняно температурою поверхні циліндра, обчисленою при її врахуванні.

При інших значеннях *Fo*, навпаки, – врахування температурної залежності

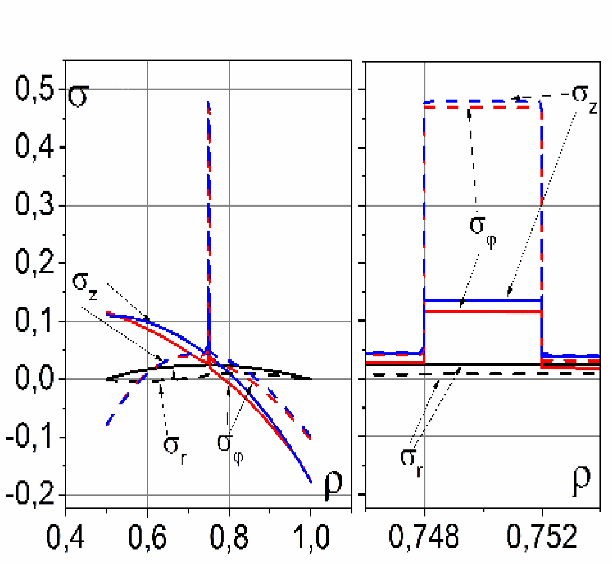


Рис. 5.9. Залежності напружень від координати ρ при значенні $Fo = 0.1$ ($\tau = 0.008$ с)

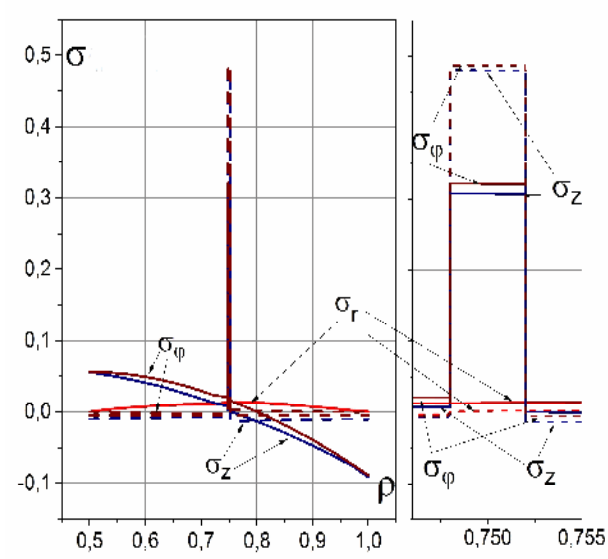


Рис. 5.10. Залежності напружень від координати ρ при значенні $Fo = 1$ ($\tau = 0.08$ с)

характеристик призводить до пониження температури поверхні порівняно з випадком без такого врахування. Вклад від урахування термочутливості характеристик матеріалу до розподілу напружень є значно вищим порівняно з таким вкладом у розподіл температури.

Характеристики поля напружень суттєво змінюються якісно з часом. При різних Fo стискувальні напруження змінюються на розтягуючі, зі зміною різниці числових значень з урахуванням і без урахування термочутливості матеріалу.

Визначення напруженого стану у багатошарових тонких покриттях. Застосуємо вирази (5.37) – (5.43) визначення напружень у багатошаровому суцільному циліндрі з багатошаровим неоднорідним покриттям, закріпленому на торцях від осьових переміщень, під дією рівномірно розподіленого тиску *p* по поверхні. Порівняємо отримані результати з обчисленими на основі підходу з використанням узагальнених граничних умов [223]. Вважаємо, що модулі пружності у кожному шарі покриття мають степеневу залежність від радіальної змінної $E^{(j)}(\rho) = E_0^{(j)}\rho^{m_j}$ ($E_0^{(j)}$ – задані постійні, а $m_j \neq 1,2$), а коефіцієнти Пуассона $\nu^{(j)}$ – постійні у кожному шарі.

Розв'язок задачі з використанням методу узагальнених граничних умов має вигляд [223] :

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{p+\sigma_r^{(0)}}{2} - \frac{1}{2}\left(1-2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)\left(3-\left(1-2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)^2\right)\frac{p-\sigma_r^{(0)}}{2},$$

$$\sigma_\varphi^{(j)}(\rho) = \frac{E_1^{(j)}(\rho)\left(1-\nu^{(0)}-\left(\nu^{(0)}\right)^2\right)}{E^{(0)}}\sigma_r^{(0)} + \frac{\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}}\sigma_r^{(j)}(\rho),\ j=\overline{1,n}, \qquad (5.44)$$

де

$$\sigma_r^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = p\delta^{-1}, \qquad \delta = 1 + \frac{G_{11}\left(1-\nu^{(0)}-2\left(\nu^{(0)}\right)^2\right)}{RE^{(0)}}; \qquad G_{11} = \int_R^{R+h}\frac{E(r)}{1-\nu^2(r)}dr.$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд (5.22), (5.23) з $s = m_j$. Результати обчислень колових напружень (зі значком «~») у розмірностях p у циліндрі з 10-шаровим покриттям на межі шарів покриття подані у табл. 5.4 для різних значень δ_i m_j при однакових товщинах шарів і таких значеннях $E_0^{(j)}$ та $\nu^{(j)}$ за точними $\tilde{\sigma}_\varphi^{ex}(\rho)$ (5.23) та наближеними $\tilde{\sigma}_\varphi^{IE}(\rho) = \tilde{\sigma}^{IE}(\rho) - \tilde{\sigma}_r^{IE}(\rho)$, (5.37) , (5.38) і $\tilde{\sigma}_\varphi^{sh}(\rho)$ (5.44) формулами.

Таблиця 5.4

Характеристики матеріалів у шарах

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_0^{(j)}$	0.4	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.0	1.6	1.2	0.8
$\nu^{(j)}$	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Таблиця 5.5

Порівняння точних і наближених розв’язків при різних значеннях параметрів

		h=0,002			h=0,02			h=0,5		
m_j	ρ	$\tilde{\sigma}_\theta^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{sh}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{sh}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_\theta^{sh}(\rho)$
0	1.00	0.3045	0.3045	0.304	0.3075	0.3075	0.3075	0.3451	0.3451	0.3740
	1.+0.1h	0.359	0.359	0.3587	0.3654	0.3654	0.3622	0.4891	0.4891	0.4390
	1.+0.2h	0.4137	0.4137	0.4129	0.4240	0.4240	0.4168	0.6406	0.6406	0.5013
	1.+0.3h	0.4683	0.4683	0.4671	0.4829	0.4829	0.4713	0.7905	0.7905	0.5615
	1.+0.4h	0.5230	0.5230	0.5213	0.5421	0.5421	0.5256	0.9364	0.9364	0.6203
	1.+0.5h	0.5777	0.5777	0.5755	0.6014	0.6014	0.5800	1.0768	1.0768	0.6784
	1.+0.6h	0.5231	0.5231	0.5212	0.5436	0.5436	0.5248	0.9394	0.9394	0.6033
	1.+0.7h	0.4686	0.4686	0.4670	0.4858	0.4858	0.4697	0.8062	0.8062	0.5288
	1.+0.8h	0.4140	0.4140	0.4127	0.4278	0.4278	0.4146	0.6749	0.6749	0.4558
	1.+0.9h	0.3595	0.3595	0.3585	0.3694	0.3694	0.3596	0.5425	0.5425	0.3848
3	1.00	0.3045	0.3045	0.3045	0.3074	0.3074	0.3050	0.3057	0.3065	0.3449
	1.+0.1h	0.3591	0.3591	0.3588	0.3660	0.3660	0.3595	0.4562	0.4553	0.4247
	1.+0.2h	0.4139	0.4139	0.4130	0.4260	0.4260	0.4138	0.6497	0.6467	0.4933
	1.+0.3h	0.4687	0.4687	0.4673	0.4870	0.4870	0.4681	0.8833	0.8778	0.5606
	1.+0.4h	0.5236	0.5236	0.5215	0.5489	0.5489	0.5224	1.1565	1.1482	0.6271
	1.+0.5h	0.5786	0.5786	0.5757	0.6116	0.6116	0.5767	1.4705	1.4590	0.6933
	1.+0.6h	0.5241	0.5241	0.5214	0.5540	0.5540	0.5222	1.3741	1.3635	0.6172
	1.+0.7h	0.4695	0.4695	0.4671	0.4955	0.4955	0.4677	1.2426	1.2332	0.5416
	1.+0.8h	0.4148	0.4148	0.4128	0.4361	0.4361	0.4133	1.0717	1.0640	0.4668
	1.+0.9h	0.3600	0.3600	0.3585	0.3756	0.3757	0.3588	0.8562	0.8569	0.3931
5	1.00	0.3045	0.3045	0.304	0.3074	0.3074	0.3075	0.2678	0.2711	0.3122
	1.+0.1h	0.3592	0.3592	0.358	0.3664	0.3664	0.3633	0.4146	0.4134	0.3983
	1.+0.2h	0.4140	0.4140	0.413	0.4273	0.4273	0.4184	0.6286	0.6213	0.4688
	1.+0.3h	0.4690	0.4690	0.467	0.4897	0.4897	0.4734	0.9188	0.9034	0.5390
	1.+0.4h	0.5241	0.5241	0.571	0.5535	0.5535	0.5283	1.2974	1.2718	0.6091
	1.+0.5h	0.5793	0.5793	0.575	0.6187	0.6187	0.5832	1.7790	1.7405	0.6791
	1.+0.6h	0.5797	0.5797	0.521	0.5611	0.5611	0.5275	1.7640	1.7256	0.6071

	1.+0.7h	0.4701	0.4701	0.462	0.5022	0.5022	0.4718	1.6804	1.6439	0.5353
	1.+0.8h	0.4154	0.4154	0.412	0.4419	0.4419	0.4162	1.5111	1.4787	0.4636
	1.+0.9h	0.3604	0.3604	0.358	0.3800	0.3800	0.3607	1.2355	1.2263	0.3921

Можна зазначити, що для випадку кусково-однорідного покриття, тобто коли m_j=0, за підходом інтегральних рівнянь не маємо похибки обчислень, оскільки немає впливу неперервної неоднорідності.

При малих значеннях товщини метод, побудований на використанні інтегральних рівнянь, дає результати з точністю мінімум 4 значущих цифри, в той же час похибка обчислень для підходу на основі теорії оболонок є задовільною – не перевищує 6%.

Однак при наявності товстого покриття, яке складається з 10 тонких (товщиною 0.1h) метод на основі інтегральних рівнянь дає задовільну точність з різницею, не більше 2.2%, в той час, як метод, що базується на теорії оболонок, як і слід було очікувати, не може дати правильних результатів. Однак формули, отримані на основі підходу, що базується на теорії оболонок, дуже прості для сумарно тонких покрить.

5.2.3. Визначення температурного поля, яке призводить до заданого термонапруженого стану

Вважатимемо, що радіальні напруження задані і мають вигляд як на рис. 5.3, характеристики матеріалів задані табл. 5.3, поверхні циліндра мають температури $t_1 = 200\,\mathrm{K}$, $t_2 = 500\ \mathrm{K}$, силові навантаження відсутні ($p_1 = p_2 = p = 0$), внутрішній та зовнішній радіуси в одиницях R_2 є $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$. Для спрощення обчислень апроксимуємо їх методом найменших квадратів поліномами 9-го степеня відносно координати. Відповідні вирази для радіальних складових тензора напружень мають вигляд

$$\sigma_r(\rho) = \sum_{i=0}^{9} b_i \rho^i, \tag{5.45}$$

де значення коефіцієнтів для $s = 1$ та $s = 3$ подані у табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Значення коефіцієнтів апроксимації радіальних напружень при різних значеннях s

	$s = 1$	$s = 3$
b_0	0	0
b_1	–2.89208042168533	–16.567199606284
b_2	15.53434786453543	144.74799493002311
b_3	–0.36346835584932	–534.78263335712711
b_4	–155.68111907182748	1094.0648468389461
b_5	440.05962770419768	–1357.86020947154
b_6	–590.50428745074294	1048.0382625492543
b_7	441.37811372730971	–494.02886155038965
b_8	–177.86722575680449	130.6581149437713
b_9	30.33609176822275	–14.27031531194663

При цьому залишкова сума квадратів [293] є не більшою від 1.31888645612351e-13, коефіцієнт детермінації [293] – не меншим від 0.9999999999981, скоригований коефіцієнт детермінації [293] – не меншим від 0.99999999998957.

Використаємо формулу (5.8) для визначення температурного поля, яке викликає задані напруження (5.45). Характеристики матеріалів задані в табл. 5.3. У цьому випадку температурне поле можна створити без теплових джерел, бо поле термонапружень взято з множини полів напружень викликаних температурним полем без об'ємних теплових джерел. Стала C визначена зі значень температури на одній з поверхонь. Зрозуміло що значення температури (5.26), визначені з рівняння теплопровідності і значення, отримані з формули (5.8) як розв’язку отриманого з рівнянь рівноваги і сумісності з врахуванням навантажень повинні збігатися.

Результати обчислень температурного поля подані у табл. 5.7 для $s = 1$.

Таблиця 5.7

Порівняння значень температури з рівняння теплопровідності і з виразу через темомеханічні характеристики та силові навантаження

ρ	$t(\rho)$ визначена через задані радіальні напруження і механічні характеристики (5.8)	$t(\rho)$ визначена з рівняння теплопровідності (5.26)
0.50	200.0510062	200.
0.55	225.5554246	225.8485716
0.60	250.9559795	251.2627162
0.65	276.4344423	276.6077757
0.70	302.3365140	302.8517819
0.75	329.0549914	329.1983859
0.80	357.0589725	357.2281494
0.85	386.9697116	387.1598770
0.90	419.6548095	420.8545121
0.95	456.3651394	456.4126515
1.00	500.000001	500.0000000

Як видно з табл. 5.7, похибка обчислень значення температурного поля на основі формул (5.8) відносно його точного значення не перевищує 0.2%. Це твердження стосується також випадку $s = 3$.

Зрозуміло, що у задачах визначення температурних полів, які призводять до заданого розподілу радіальних термонапружень, важливими є технологічні та фізичні обмеження: напруження і температурні поля повинні бути у технологічно досяжних межах і такими, які задовольняють припущення моделі теплопровідності та незв’язаної теорії термопружності. Тому результати попереднього прикладу дають можливість оцінити порядок величини заданих термонапружень та значень температури на одній з поверхонь.

Нехай задані радіальні термонапруження описані виразом

$$\sigma_r(\rho) = \sum_{i=0}^{5} b_i \rho^i \qquad (5.46)$$

з коефіцієнтами b_i

$b_0 = -18.99226107231421, b_1 = 133.56158799571068,$

$b_2 = -364.38417832270994,$

$b_3 = 482.85839160980123, b_4 = -312.52913753008869, b_5 = 79.48717948743303.$

Заданий розподіл радіальних (5.46) та колових, визначених з рівняння рів-

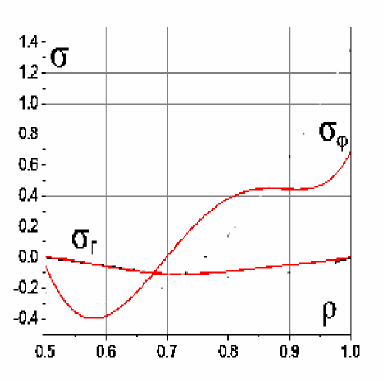


Рис. 5.11. Заданий розподіл радіальних напружень у порожнистому циліндрі.

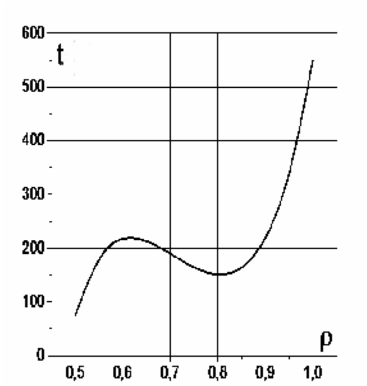


Рис. 5.12. Розрахунковий розподіл температури у порожнистому циліндрі.

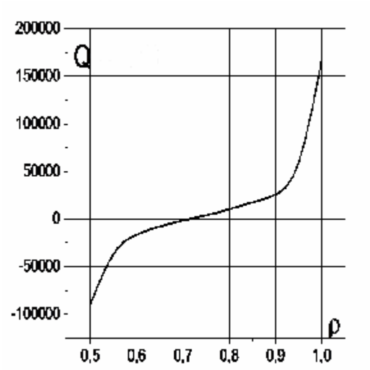


Рис.5.13. Розрахунковий розподіл інтенсивності теплових джерел у порожнистому циліндрі.

новаги (2.32), термонапружень подано на рис. 5.11. Відповідне температурне поле, обчислене на основі формули (5.8) при $t_2 = 550\,\mathrm{K}$, та інтенсивності теплових джерел, обчислені з неоднорідного рівняння теплопровідності

$$q_v(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right)$$

подані на рис. 5.12, 5.13.

Визначимо температурні поля і умови нагрівання, якщо відома колова компонента тензора напружень $\sigma_\varphi(\rho)$. Тоді розв’язок диференціального рівняння рівноваги (2.36) відносно радіальних напружень при відсутності масових сил матиме вигляд

$$\sigma_r(\rho) = \frac{C}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int\limits_{\rho_1}^{\rho} \sigma_\varphi(\eta) d\eta . \qquad (5.47)$$

Сталу $C = -p_1 \rho_1$ визначено з умови $\sigma_r(\rho_1) = -p_1$. Тоді на основі виразу (5.47) і умови на межі $\sigma_r(1) = -p_2$ матимемо

$$p_2 = -\sigma_r(1) = p_1 \rho_1 - \int\limits_{\rho_1}^{1} \sigma_\varphi(\eta) d\eta . \qquad (5.48)$$

Отже навантаження на поверхнях повинні бути зв’язаними. У випадку сталої компоненти тензора напружень $\sigma_\varphi(\rho) = \sigma_\varphi$ з попередніх виразів отримаємо

$$\sigma_r(\rho) = -\frac{p_1 \rho_1}{\rho} + \frac{(\rho - \rho_1)\sigma_\varphi}{\rho} . \qquad (5.49)$$

Отже, задачу визначення температурного поля, яке забезпечує цільову компоненту тензора напружень $\sigma_\varphi(\rho)$, зведено до визначення температурного поля на основі виразу (5.8).

Визначимо температурне поле, яке забезпечує сталі колові компоненти тензора напружень з використанням виразу (5.49) у порожнистому циліндрі з $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$, виготовленому з двокомпонентного ФГМ, характеристики складових якого подані у табл. 5.3., а $p_1 = 0.0001 \cdot E_2 = 0.0071$ ГПа.

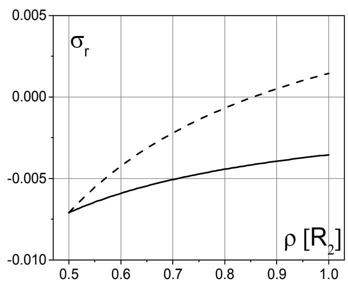


Рис. 5.14. Заданий розподіл радіальних напружень у порожнистому циліндрі.

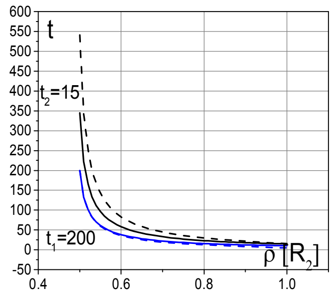


Рис. 5.15. Розрахунковий розподіл температури у порожнистому циліндрі.

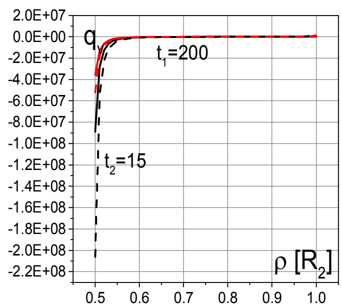


Рис.5.16. Розрахунковий розподіл густини потужності теплових джерел у порожнистому циліндрі.

Відповідні розподіли радіальних напружень, які відповідають заданим значенням колових, температурного поля, яке не викликає термонапружень, та густини потужності теплових джерел подані на рис. 5.14–5.16. Використовуючи вираз (5.48), отримаємо $p_2 = -0.00145$ ГПа при $\sigma_\varphi = 0.0$ ГПа і $p_2 = 0.0036$ ГПа при $\sigma_\varphi = 0.01$ ГПа. Суцільна лінія на рис. 5.14 – 5.16 відповідає $\sigma_\varphi = 0.0$ ГПа, штрихова лінія – $\sigma_\varphi = 0.01$ ГПа.

Визначимо температурні поля і умови нагрівання, якщо відомі сумарні напруження $\sigma(\rho) = \sigma_r(\rho) + \sigma_\varphi(\rho)$. Тоді розв'язок диференціального рівняння рівноваги (2.36) відносно радіальних напружень $\sigma_r(\rho)$ при відсутності масових сил матиме вигляд

$$\sigma_r(\rho) = -\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho} \eta\sigma(\eta)d\eta. \tag{5.50}$$

Навантаження p_2 і p_1 пов'язані на основі (5.50) з використанням умов на межі виразом

$$p_2 = \rho_1^2 p_1 - \int_{\rho_1}^{1} \eta\sigma(\eta)d\eta. \tag{5.51}$$

Якщо $\sigma(\eta) = \sigma$ стала, то вираз (5.50) для $\sigma_r(\rho)$ має вигляд

$$\sigma_r(\rho) = -\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2} + \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)\sigma}{2\rho^2}. \tag{5.52}$$

Визначимо температурне поле, яке забезпечує сталі колові компоненти тензора напружень з використанням виразу (5.52) у порожнистому циліндрі з $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$, виготовленому з двокомпонентного ФГМ, характеристики складових якого подані у табл. 5.3., а $p_1 = 0.0001 \cdot E_2 = 0.0071$ ГПа. Розрахункове значення $p_2 = 0.00178$ ГПа при $\sigma = 0.0$ ГПа і $p_2 = -0.001975$ ГПа при $\sigma = 0.01$ ГПа. Відповідні розподіли радіальних напружень, які відповідають заданим коловиv, температурного поля, яке не викликає термонапружень, та густини потужності теплових джерел подані на рис. 5.17–5.19.

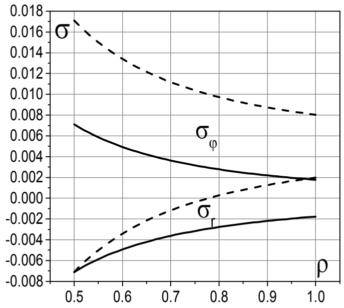


Рис. 5.17. Заданий розподіл радіальних напружень у порожнистому циліндрі.

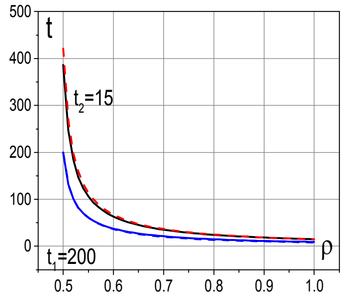


Рис. 5.18. Розрахунковий розподіл температури у порожнистому циліндрі.

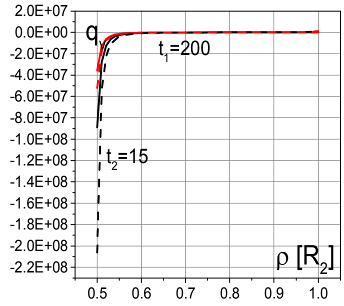


Рис.5.19. Розрахунковий розподіл густини потужності теплових джерел у порожнистому циліндрі.

Розрахунковий розподіл температурного поля на рис. 5.12 через термомеханічні характеристики матеріалу, що спричиняє заданий розподіл радіальних напружень (5.11), можна забезпечити об’ємними тепловими джерелами на рис. 5.13, коли на поверхнях неоднорідного циліндра виконуються умови на межі першого роду. У деяких часткових випадках задання розподілу радіальних напружень об’ємні теплові джерела можуть бути відсутні. Ці твердження справедливі також у випадку заданих радіальних напружень, спричинених при дії силових та теплових навантажень на поверхнях циліндра.

5.3. Дослідження термонапруженого стану у сферичних тілах, виготовлених з термочутливих функціонально-градієнтних матеріалів

5.3.1. Використання рівняння Фредгольма 2-го роду

Для визначення розв’язку інтегрального рівняння (2.55) поділимо кулю на n тонких концентричних шарів з умовами ідеального механічного контакту між ними. Вважатимемо, що товщина k-го шару є такою, що для підінтегральної функції виконується формула трапецій (5.19), (5.20). Тоді інтегральне рівняння (2.55) подамо у вигляді:

$$\sigma_r(\rho)+\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\rho_{k+1}-\rho_k}{2}\left(\mathrm{K}(\rho,\rho_k)\sigma_r(\rho_k)+\mathrm{K}(\rho,\rho_{k+1})\sigma_r(\rho_{k+1})\right)\right]=\Psi(\rho).$$

З цієї рівності, записаної для всіх значень $\rho=\rho_i$, $(i=\overline{1,n+1})$ у випадку рівномірної сітки $\omega_h=\left\{\rho_i=(i-1)h, i=\overline{1,n+1}, h=\dfrac{\rho_{n+1}-\rho_1}{n}\right\}$, отримана така система лінійних алгебричних рівнянь відносно *n+1* невідомих $\sigma_r(\rho_i), i=\overline{1,n+1}$:

$$\begin{cases} (1+\dfrac{h}{2}K_{11})\sigma_r(\rho_1)+hK_{12}\cdot\sigma_r(\rho_2)+\ldots+\dfrac{h}{2}K_{1,n+1}\sigma_r(\rho_{N+1})=\Psi(\rho_1), \\ \dfrac{h}{2}K_{21}\sigma_r(\rho_1)+\left(1+hK_{22}\right)\cdot\sigma_r(\rho_2)+\ldots+\dfrac{h}{2}K_{2,n+1}\sigma_r(\rho_{n+1})=\Psi(\rho_2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .... \\ \dfrac{h}{2}K_{n+1,1}\sigma_r(\rho_1)+hK_{12}\cdot\sigma_r(\rho_2)+\ldots+\left(1+\dfrac{h}{2}K_{n+1,n+1}\right)\sigma_r(\rho_{n+1})=\Psi(\rho_{n+1}), \end{cases} \tag{5.53}$$

де $K_{ij}=K\left(\rho_i,\rho_j\right)$, ρ_{n+1} – радіус зовнішьої поверхні кулі. Система лінійних алгебричних рівнянь (5.53) розв'язана відомими методами.

У випадку тонкої порожнистої кулі (сферична оболонка) замість системи рівнянь (5.53) отримано одне рівняння, з якого радіальне напруження визначено наближеною формулою

$$\sigma_r(\rho)=\frac{\Psi(\rho)+\left[\dfrac{\rho-\rho_1}{2}K\left(\rho,\rho_1\right)p_1+\dfrac{\rho_2-\rho}{2}K\left(\rho,\rho_2\right)p_2\right]}{1+\dfrac{\rho_2-\rho_1}{2}K\left(\rho,\rho\right)}. \tag{5.54}$$

Обчислимо радіальні напруження у випадку відсутності температурного поля, коли коефіцієнт Пуассона є сталим $\nu\left(\rho\right)=\nu_0=\mathrm{const}$, а модуль пружності має степеневу залежність від радіальної координати, $E\left(\rho\right)=E_0\rho^{s_0}$, $E_0=\mathrm{const}$, $s_0=\mathrm{const}$. Вважатимемо, що коефіцієнт лінійного розширення $\alpha(\rho)=0$ та масові сили відсутні $F_r(\rho)=0$. Така задача має точний аналітичний розв'язок. Рівняння рівноваги (2.40) та суцільності (2.42) у цьому випадку мають такий вигляд:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3\sigma_r(\rho)\right)=2\rho^2\sigma(\rho), \tag{5.55}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\nu_0}{E_0\rho^{s_0}}\sigma\right)=\frac{\sigma_{rr}(\rho)}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu_0}{E_0\rho^{s_0}}\right). \tag{5.56}$$

Остаточний вираз як для σ_r, так і для σ, не залежить від E_0, що слідує з рівнянь (5.55), (5.56). Якщо підставити $\sigma(\rho)$, визначене з рівняння рівноваги (5.55), у рівняння суцільності (5.56). і взяти розв'язок для $\sigma_r(\rho)$ у вигляді ρ^λ, то отримаємо точний вираз для $\sigma_r(\rho)$ (точний розв'язок задачі позначатимемо індексом *ex* зверху)

$$\sigma_r^{ex}(\rho)=C_1\rho^{\lambda_1}+C_2\rho^{\lambda_2}, \tag{5.57}$$

де

$$\lambda_1=\frac{-3+s_0+\sqrt{(3-s_0)^2+4s_0\left(3-\dfrac{1+\nu_0}{1-\nu_0}\right)}}{2},$$

$$\lambda_2=\frac{-3+s_0-\sqrt{(3-s_0)^2+4s_0\left(3-\dfrac{1+\nu_0}{1-\nu_0}\right)}}{2}.$$

Сталі C_1 та C_2, визначені для крайових умов $\sigma_r(\rho_1)=-p_1$, $\sigma_r(\rho_2)=-p_2$, мають вигляд:

$$C_1=\frac{\rho_1^{\lambda_2}p_2-\rho_2^{\lambda_2}p_1}{\rho_2^{\lambda_2}\rho_1^{\lambda_1}-\rho_1^{\lambda_2}\rho_2^{\lambda_1}},\qquad C_2=\frac{\rho_2^{\lambda_2}p_1-p_2\rho_1^{\lambda_1}}{\rho_2^{\lambda_2}\rho_1^{\lambda_1}-\rho_1^{\lambda_2}\rho_2^{\lambda_1}}.$$

У табл. 5.8 – 5.9 подано результати обчислень радіальних напружень, отримані на основі розв'язування системи алгебричних рівнянь, а також отриманих з точної формули (5.57).

Таблиця 5.8.

Порівняння точних і наближених значень радіальних напружень для внутрішнього радіусу 0.3

ρ	$N=10,\ E_0=110,\ \nu_0=0,25,\ s_0=4,\ p_1=10, p_2=0$		
	$\sigma_r(\rho)$	$\sigma_r^{ex}(\rho)$	$\left\lvert\dfrac{\sigma_r(\rho)-\sigma_r^{ex}(\rho)}{\sigma_r^{ex}(\rho)}\right\rvert,\%$
0.3	-10	-10	0
0.37	-6.696022	-6.727018	0.46077
0.44	-4.779699	-4.814445	0.7216994
0.51	-3.558076	-3.578973	0.5838705
0.58	-2.692136	-2.714447	0.821955
0.65	-2.047075	-2.066106	0.9211044
0.72	-1.5328	-1.548274	0.9994086
0.79	-1.098174	-1.109979	1.063501
0.86	-0.7109899	-0.7190241	1.117364
0.93	-0.3498798	-0.3539986	1.163503
1	0	0	0

Таблиця 5.9

Порівняння точних і наближених значень радіальних напружень для внутрішнього радіусу 0.9

ρ	$N=1,\ E_0=110,\ \nu_0=0,25,\ s_0=4,\ p_1=10, p_2=0$		
	$\sigma_r(\rho)$	$\sigma_r^{ex}(\rho)$	$\left\lvert\dfrac{\sigma_r(\rho)-\sigma_r^{ex}(\rho)}{\sigma_r^{ex}(\rho)}\right\rvert,\%$
0,9	-10	-10	0
0,925	-7.47212	-7.4667	0.07258875
0,95	-4.953366	-4.962597	0.1860068
0,975	-2.455408	-2.476916	0.8683385
1	0	0	0

У табл. 5.9 наведено результати обчислень у випадку тонкого шару на основі формули (5.54).

Розглянемо порожнисту кулю, виготовлену з двокомпонентного металокерамічного ФГМ з радіусом внутрішньої поверхні $\rho_1 = 0{,}5$ та зовнішньої поверхні $\rho_2 = 1$.

Температурну залежність фізичних характеристик двокомпонентного матеріалу опишемо з використанням моделі простої суміші: [347, 374]

$$P(\rho,T) = P_1(T)S_1(\rho) + P_2(T)S_2(\rho), \tag{5.58}$$

$P(\rho,T)$ - характеристика матеріалу, де $S_1(\rho), S_2(\rho)$ – об'ємні концентрації складових матеріалу, причому $S_2(\rho) = 1 - S_1(\rho)$. Вважаємо, що характеристика $P_i\ (T)$ i -го матеріалу має степеневу залежність від температури:

$$P_i(T) = P_{i,0}\left(\frac{P_{i,-1}}{T} + 1 + P_{i,1}T + P_{i,2}T^2 + P_{i,3}T^3\right)$$

або [322, 279, 280]

$$E(\rho,T) = \frac{E_2(T)\left[E_2(T) + (E_1\,(T) - E_2(T))S_1^{2/3}(\rho)\right]}{E_2(T) + (E_1\,(T) - E_2(T))(S_1^{2/3}(\rho) - S_1\,(\rho))},$$

$$\alpha(\rho,T) = \frac{\alpha_1(T)K_1\,(T)S_1\,(\rho) + \alpha_2(T)K_2(T)(1 - S_1\,(\rho))}{K_1\,(T)S_1\,(\rho) + K_2(T)(1 - S_1\,(\rho))},$$

$$\nu(\rho,T) = \nu_1\,(T)S_1\,(\rho) + \nu_2(T)(1 - S_1\,(\rho)),$$

$$\text{де } K_j(T) = \frac{E_j(T)}{2(1 - \nu_j(T))}\ ,\ j = 1,2. \tag{5.59}$$

Фізико-механічні властивості матеріалів подано в табл. 5.10.

Вважаємо, що у кулі закон зміни концентрації складової 1 вздовж радіуса має вигляд $S_1(\rho) = \left(\dfrac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^{s_0}$, $s_0 = 2$, відоме температурне поле $T(\rho) = \dfrac{T_2 - T_1\rho_1}{1 - \rho_1} - \dfrac{(T_2 - T_1)\rho_1}{(1 - \rho_1)\rho}$ (розв'язок стаціонарного рівняння теплопровідності з температурами на внутрішній та зовнішній поверхнях $T_1 = 600K, T_2 = 300K$ відповідно), $T_0 = 300K$, а на зовнішній і внутрішній поверхнях кулі діють навантаження $p_1 = 10^8$, $p_2 = 0$ відповідно.

Таблиця 5.10

Фізико-механічні властивості матеріалів з врахуванням температурної залежності

Матеріал	Характеристика	Коефіцієнти многочлена				
		P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
Оксид алюмінію 1	Е Па	0	$3,4955 \cdot 10^{11}$	-0,0003853	$4,027 \cdot 10^{-7}$	$-1,673 \cdot 10^{-10}$
	ν	0	0,26	0	0	0
	α 1/К	0	$6,8269 \cdot 10^{-6}$	0,0001838	0	0
Нержавіюча сталь 2	Е Па	0	$2,0104 \cdot 10^{11}$	0,0003079	$-6,534 \cdot 10^{-7}$	0
	ν	0	0,3262	-0,0002002	$3,797 \cdot 10^{-7}$	0
	α 1/К	0	$12,33 \cdot 10^{-6}$	0,0008086	0	0

На рис. 5.20 – 5.22 подано графіки для значень радіального, колового та сумарного напружень, а також переміщень для випадків нехтування та врахування температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалу. На рис.5.20 зображено розподіл напружень у випадку залежних від температури (криві 1) та незалежних від температури (криві 2) характеристик матеріалу для їх радіальної залежності (5.58).

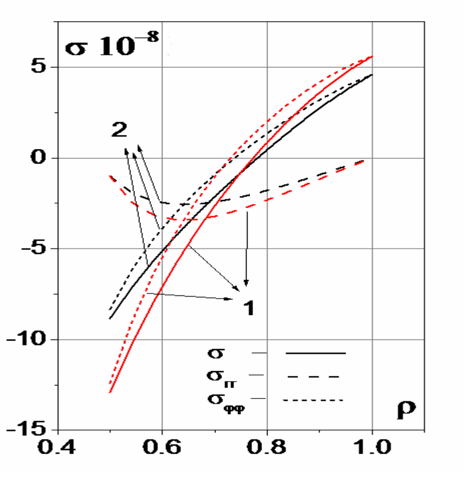


Рис. 5.20. Розподіл напружень у випадку моделі Фойгта

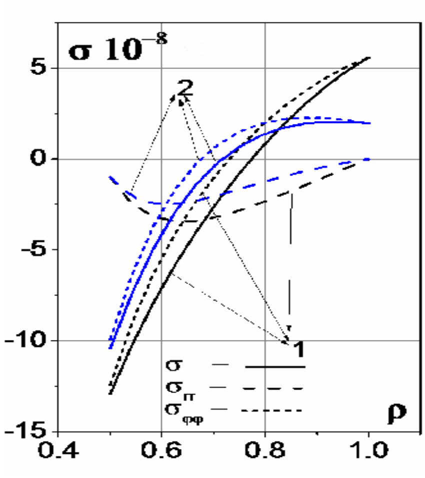


Рис. 5.21. Розподіл напружень у випадку моделі Гашіна-Штрінкмана

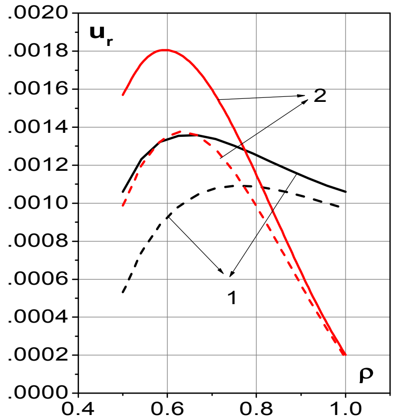


Рис.5.22. Розподіл переміщень.

На рис. 5.21 поданий розподіл напружень у порожнистій кулі для моделі температурної залежності характеристик матеріалу (5.58) (криві 1) та (5.59) (криві 2). На рис 5.22 подані розподіли переміщень визначених у випадку незалежних (штрихова лінія) та залежних (суцільна лінія) від температури характеристик відповідно до моделі температурної залежності (5.58) (криві 1) або (5.59) (криві 2).

З рисунків видно, що у неоднорідних матеріалах врахування впливу температурної залежності характеристик матеріалів суттєво впливає на розподіл компонент тензора напружень і залежить від моделі характеристики матеріалів.

Розглянемо порожнисту кулю, виготовлену з ФГМ, характеристики якого описані моделлю простої суміші (5.58) з характеристиками складових, поданих у табл. 5.3. Внутрішній радіус кулі є $\rho_1 = 0.5$, а зовнішній $\rho_2 = 1.0$. Температури зовнішньої та внутрішньої поверхонь є $t_1 = 200\,\mathrm{K}$ і $t_2 = 500\,\mathrm{K}$ відповідно.

Температурне поле $t(\rho) = T(\rho) - T_0$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda(\rho)\frac{dt(\rho)}{d\rho}\right) = 0, \tag{5.60}$$

та умови на межах

$$t(\rho_1) = t_1, \quad t(\rho_2) = t_2,\ t_1 = T_1 - T_0,\ t_2 = T_2 - T_0. \tag{5.61}$$

Тут $T(\rho)$ – реальне температурне поле, T_0 – відлікова температура, при якій напруженння відсутні, T_1, T_2 – значення температур на поверхнях порожнистої кулі. Радіальні напруження визначаються тоді як розв'язок системи алгебричних рівнянь (5.21), а колові та осьові напруження і деформації – з рівнянь рівноваги та зв'язків між деформаціями та напруженнями.

Розв'язок задачі теплопровідності (5.60), (5.61) має вигляд

$$t(\rho) = C_2 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\eta^2 \lambda(\eta)} d\eta + C_1 , \tag{5.62}$$

де

$$C_1 = t_1 , \qquad C_2 = \frac{t_2 - t_1}{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\eta^2 \lambda(\eta)} d\eta} .$$

Радіальні напруження обчислені з системи лінійних алгебричних рівнянь (5.89) з використанням виразів для температурного поля (5.62). Результати обчислень подані для різних значень показника степеня s у формулі (5.58) на рис. 5.23, 5.24.

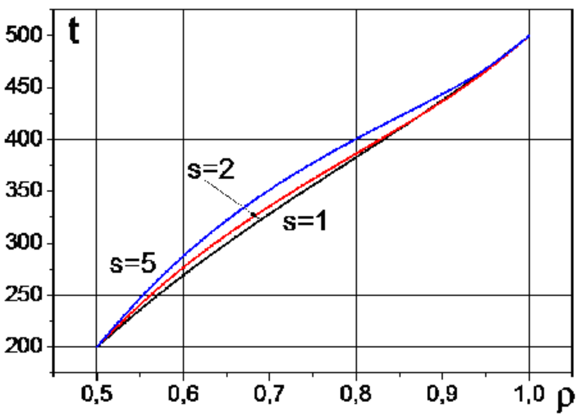


Рис. 5.23. Температурне поле у неоднорідній порожнистій кулі з ФГМ

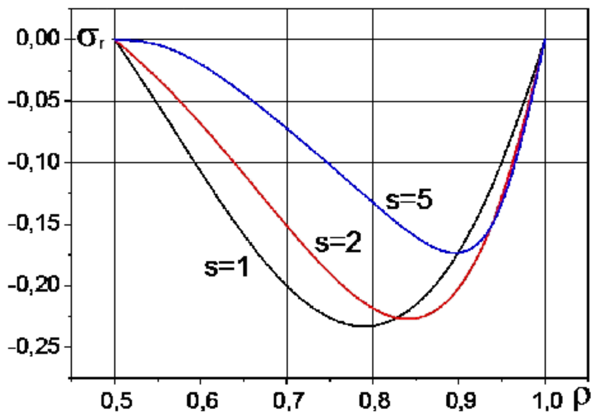


Рис. 5.24. Розподіл радіальних на– пружень у ГПа, викликаних темпе– ратурним полем на рис. 5.17 у неод– норідній порожнистій кулі з ФГМ

Як видно з рис. 5.23, числові значення температурного поля несуттєво змінюються в залежності від показника степеня s, але змінюється характер розподілу (з’являються точки перегину, розміщення яких залежить від s). Характер залежності радіальних напружень від координати також змінюється. При $s = 5$ біля внутрішньої межі порожнистої кулі виникає незначна область зі слабкими розтягуючими радіальними напруженнями. Є суттєві зміни у числових значеннях в залежності від показника s. З його зростанням зміщується координата, при значенні якої радіальна складова тензора напружень приймає найменше значення, а також збільшується величина радіального напруження.

5.3.2. Наближені аналітичні розв’язки інтегрального рівняння Вольтерри 2-го роду

Основні рівняння мають вигляд [184]:

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3}\left[-\rho_1^3 p_1 + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \left(2\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta) \right) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 \left(2\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta) \right) d\eta \right], \quad (5.63)$$

що справедливо для номера шару $j = \overline{1,n}$. Якщо у рівнянні (5.63) покласти $j = n$ та $\rho = \rho_{n+1}$ і врахувати умову $\sigma_r(\rho_{n+1}) = -p_2$, то отримаємо таку інтегральну умову для сумарних напружень

$$\rho_1^3 p_1 - \rho_{n+1}^3 p_2 = \sum_{k=1}^{3} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \left(2\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta) \right) d\eta . \quad (5.64)$$

Після безпосереднього інтегрування рівняння сумісності отримаємо з використанням рівнянь рівноваги та умов ідеального термомеханічного контакту таке інтегральне рівнняя відносно сумарних напружень $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\varphi^{(j)}$ j-го шару [134]

$$\frac{1-\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)}\sigma^{(j)}(\rho) = \int\limits_{\rho_j}^{\rho} \left[\varphi^{(j)}(\rho) - \varphi^{(j)}(\eta)\right]\eta^2\sigma^{(j)}(\eta)d\eta + \frac{1-\nu^{(1)}(\rho_1)}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1} \rho_k^3\sigma_r^{(k)}(\rho_k)\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) + \frac{1}{2}\rho_j^3\sigma_r^{(j)}(\rho_j)\varphi^{(j)}(\rho) - F^{(j)}(\rho) +$$

$$+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1} \int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \left[\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\eta)\right]\eta^2\sigma^{(k)}(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)}\sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) - (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1} F^{(k)}(\rho_{k+1}) - \Phi^{(j)}(\rho) + \Phi^{(1)}(\rho_1). \quad (5.65)$$

Методика побудови розв'язків інтегральних рівнянь. Отже, визначення компонент термонапруженого стану розглядуваної кулі зведено до розв'язання системи інтегральних рівнянь (5.62) і (5.65) відносно радіальних $\sigma_r^{(j)}(\rho)$ та сумарних $\sigma^{(j)}(\rho)$ напружень та задоволення інтегральної умови (5.63). Тут застосуємо підхід, використаний у працях [83, 183]. Розглянемо такі практично цікаві випадки.

Порожниста куля складається з n тонких шарів, виготовлених з різних термочутливих матеріалів. Тонкими вважатимемо шари такої товщини, для яких під час обчислення в інтегральних рівняннях (5.62) і (5.65) інтегралів, що містять в підінтегральних виразах із задовільною для нас точністю можна використати формулу трапецій (5.20):

Тоді з рівнянь (5.65) отримали такі вирази для сумарних та радіальних напружень у довільному шарі кулі

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{10}^{(j)}(\rho) + \gamma_{00}^{(j)}(\rho), \qquad \sigma_r^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \quad (5.66)$$

де

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \left[\frac{1-\nu^{(1)}(\rho_1)}{E^{(1)}(\rho_1)} + B_1^{(j)}\right]\chi_1^{(j)}(\rho) + \frac{1}{2}\rho_j^3\gamma_{1r}^{(j)}(\rho_j)\varphi^{(j)}(\rho),$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho)=B_2^{(j)}\chi_1^{(j)}(\rho)+\chi_2^{(j)}(\rho),$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^3}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^3\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)+2\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta^2\gamma_{10}^{(j)}(\eta)d\eta\right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho)=\frac{1}{\rho^3}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^3\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)-\delta_{1j}\rho_1^3p_1+\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta^2\left(2\gamma_{00}^{(j)}(\eta)-\eta f^{(j)}(\eta)\right)d\eta\right],$$

$$B_1^{(j)}=\frac{1}{2}(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\rho_k^3\gamma_{0r}^{(k)}(\rho_k)\varphi^{(k)}(\rho_{k+1})+\frac{1}{2}(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1})+$$

$$+(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\left[\varphi^{(k)}(\rho_{k+1})-\varphi^{(k)}(\eta)\right]\eta^2\gamma_{00}^{(k)}(\eta)d\eta,$$

$$B_2^{(j)}=B_1^{(j)}-(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}F^{(k)}(\rho_{k+1})-\Phi^{(j)}(\rho_j)+\Phi^{(1)}(\rho_1),$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho)=\frac{E^{(j)}(\rho)}{1-\nu^{(j)}(\rho)}\left[1+\frac{\rho-\rho_j}{2}\varphi^{(j)}(\rho)\rho^2\frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1-\nu^{(j)}(\rho_j)}\right],$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho)=\frac{E^{(j)}(\rho)}{1-\nu^{(j)}(\rho)}\left[\frac{1}{2}\rho_j^3\sigma_r^{(j)}(\rho_j)\varphi^{(j)}(\rho)-\left(\Phi^{(j)}(\rho)-\Phi^{(j)}(\rho_j)\right)-F^{(j)}(\rho)\right].$$

Якщо вираз для сумарних напружень (5.66) підставити в інтегральну умову (5.64), то її розв’язок відносно невідомої величини $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ є такий:

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)=\frac{\rho_1^3p_1-\rho_{n+1}^3p_2+\sum\limits_{k=1}^{3}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta f^{(j)}(\eta)d\eta-2\sum\limits_{k=1}^{3}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta^2\gamma_{00}^{(k)}(\eta)d\eta}{2\sum\limits_{k=1}^{3}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta^2\gamma_{10}^{(k)}(\eta)d\eta}.$$

Порожниста куля виготовлена з товстих і тонких шарів з різних термочутливих матеріалів. Неоднорідність матеріалу по товщині такої кулі створює нерівномірний розподіл температури і вона буде тим істотніша, чим суттєвіша зміна температури. Таку кулю можна розглядати як складену з n шарів малої товщини (тонких шарів) з матеріалів, характеристики яких описані гладкими функціями в околі меж цих тонких шарів всередині кожного товстого шару. Сумарні і радіальні напруження у кожному з таких тонких шарів обчислимо за формулами (5.66), у яких вирази $\gamma_{\alpha 0}^{(j)}$, $\alpha = 0{,}1$, спрощуються, бо $\beta^{(j)} = 0$, а у виразі (5.66) для $\sigma^{(1)}(\rho_1)$.

Залежності від температури термомеханічних характеристик матеріалів шарів у діапазоні температур $[T_p, T_k]$ подамо у такому ж вигляді, як і теплових $\chi^{(j)}(T^{(j)}) = \chi_0^{(j)} \chi_j^*(T^{(j)})$, де $\chi_0^{(j)}$– сталі величини розмірності відповідної характеристики, а $\chi_j^*(T^{(j)})$– безрозмірні функції, які описують її температурну залежність і, вважатимемо їх поліномами вигляду $\chi_j^*(T^{(j)}) = 1 + k_{1\chi}(T^{(j)} - T_p) + k_{2\chi}(T^{(j)} - T_p)^2 + \ldots$. Надалі для скорочення запису використовуватимемо позначення $\chi^{(j)}(\rho) = \chi^{(j)}(T^{(j)}(\rho))$.

Матеріали зовнішніх шарів (шари 1 і 3) – кераміка (ZrO_2)), а внутрішнього (шар 2) – титановий сплав (Ti-6A1-4V). Температури $t_p = 300 \div t_k = 1100$ K. $\rho_1 = 0.1, \rho_2 = 0.3, \rho_3 = 0.7, \rho_4 = 1$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_i = 1/2$, $T_o = 3/11$. Температура обчислена при Po = 1, Bi = –1. Штрихова лінія відповідає сталим характеристикам матеріалу, а суцільна врахуванню температурної залежності характеристики матеріалу.

$\lambda_t^{(1,3)} = 1.915\left[1 + 0.24664)(T_{1,3} - T_p)\right][\text{Вт}/(\text{м}\cdot K)]$, $\nu_t^{(1,3)} = 0.333$,

$\alpha^{(1,3)} = 8.783 \cdot 10^{-6}\left[1 - 1.4128(T_{1,3} - T_p) + 1.7496(T_{1,3} - T_p)^2\right][1/K]$,

$E^{(1,3)} = 116.381 \cdot \left[1 - 0.521357(T_{1,3} - T_p) - 0.084231(T_{1,3} - T_p)^2\right][\text{ГПа}]$,

$\lambda_t^{(2)} = 6.2\left[1 + 3.016(T_2 - T_p)\right][\text{Вт}/(\text{м}\cdot K)]$, $\nu^{(2)} = 0.298\left[1 + 0.118(T_2 - T_p)\right]$,

$\alpha^{(2)} = 8.8559 \cdot 10^{-6}\left[1 + 0.449014(T_2 - T_p) - 0.36754(T_2 - T_p)^2\right][1/K]$,

$E^{(1,3)} = 105.05 \cdot \left[1 - 0.5916(T_2 - T_p)\right][\text{ГПа}]$.

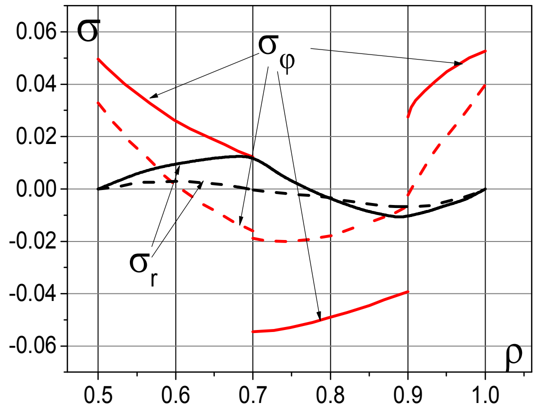


Рис.5.25. Розподіл радіальних та колових напружень в ГПа у порожнистій кулі.

Вклади від врахування температурної залежності характеристик матеріалу, як це видно з рис. 5.25 суттєво змінює величну компонент тензора напружень.

5.3.3. Визначення температурного поля, яке призводить до заданого термонапруженого стану

Вважатимемо, що радіальні напруження задані і мають вигляд як на рис. 5.18, характеристики матеріалів взято табл. 5.3, поверхні кулі мають температури $t_1 = 200$ K, $t_2 = 500$ K, внутрішній та зовнішній радіуси є $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1.0$, силові навантаження відсутні ($p_1 = p_2 = p = 0$). Для спрощення обчислень апроксимуємо їх методом найменших квадратів поліномами 9-го степеня відносно координати. Відповідні вирази для радіальних складових тензора напружень мають вигляд

$$\sigma_r(\rho) = \sum_{i=0}^{9} b_i \rho^i , \tag{5.67}$$

де значення коефіцієнтів для $s = 1$, $s = 3$ подані у табл. 5.11.

При цьому залишкова сума квадратів [293] не більша від $1.00243627312829 \cdot 10^{-12}$, коефіцієнт детермінації [293] не менший від

0.99999999997981, скоригований коефіцієнт детермінації [293] не менший від 0.99999999979814.

Таблиця 5.11

Значення коефіцієнтів апроксимації радіальних напружень

	$s=1$	$s=3$
b_0	7.92147724610271	-18.55490677927865
b_1	–103.48343319813044	218.06722117944386
b_2	573.68404346410341	-1164.7030818211322
b_3	–1764.5371814607022	3698.5451182906659
b_4	3360.4390469736695	-7643.7626097250395
b_5	–4178.6030356758984	10584.471829019141
b_6	3428.0361934835851	-9760.9245456093067
b_7	–1796.1219976037098	5753.9944680553572
b_8	545.91722204768109	-1962.5832169114474
b_9	–73.25233527705488	295.44972430037615

Використаємо формулу (5.12) для визначення температурного поля, яке викликає задані напруження (5.67). Характеристики матеріалів задані в табл. 5.3. У цьому випадку температурне поле можна створити без теплових джерел, бо поле термонапружень взято з множини полів напружень викликаних температурним полем без об'ємних теплових джерел. Стала C визначена зі значень температури на одній з поверхонь. Зрозуміло що значення температури (5.26), визначені з рівняння теплопровідності і знавення, отримані з формули (5.8) як розв’язку отриманого з рівнянь рівноваги і сумісності з врахуванням навантажень повинні збігатися.

Результати обчислень температурного поля подані у табл. 5.12 для s=1, s=3. Як видно з табл. 5.12, похибка обчислень значення температурного поля на основі формул (5.8) відносно його точного значення не перевищує 0.15%.

Розглянемо випадок, коли цільова компонентою тензора напружень є відоме $\sigma_\varphi(\rho)$. Тоді з рівняння рівноваги (2.50) отримаємо

$$\sigma_r(\rho) = \frac{C}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \eta\sigma_\varphi(\eta)d\eta \,. \qquad (5.68)$$

Таблиця 5.12

Порівняння значень температури у порожнистій кулі, обчислених з рівняння теплопровідності і через термомеханічні характеристики для різних значень s

ρ	$s=1$		$s=3$	
	$t(\rho)$ визначена через задані радіальні напруження і механічні характеристики (5.8)	$t(\rho)$ визначена з рівняння теплопровід-ності (5.26)	$t(\rho)$ визначена через задані радіальні напруження і механічні характеристики (5.8)	$t(\rho)$ визначена з рівняння теплопровідно сті (5.26)
0.50	199.8521098	200.	199.8421098	200.
0.55	236.3960762	236.6384852	241.7300214	241.9824304
0.60	269.2727545	269.6501411	277.089064	277.4764506
0.65	299.6233581	300.0517453	307.978575	308.4169622
0.70	328.1711145	328.6363816	335.7242534	336.1995205
0.75	355.5776706	356.0691123	361.4102807	361.9117224
0.80	382.4673905	382.9596968	385.9955962	386.4979025
0.85	409.4526671	409.9312439	410.4255879	410.9141647
0.90	437.2587430	437.7052973	435.8911609	436.3477152
0.95	467.0036452	467.2389441	464.4413619	464.6866608
1.00	499.999999	500.0000000	499.999998	500.0000000

Якщо $\sigma_\varphi(\rho)=D=\mathrm{const}$, то з виразу (5.68) отримаємо

$$\sigma_r(\rho)=\frac{C}{\rho^2}+\frac{D(\rho^2-\rho_1^2)}{\rho^2}. \tag{5.69}$$

Врахування умов на межах $\sigma_r(\rho_1)=-p_1$ та $\sigma_r(1)=-p_2$ призводить на основі (5.68) та (5.69) до таких виразів для сталої C та взаємозв'язку між навантаженнями p_1 і p_2:

$$C=-p_1\rho_1^2,\ p_2=p_1\rho_1^2-2\int_{\rho_1}^{1}\eta\sigma_\varphi(\eta)d\eta,\ p_2=p_1\rho_1^2-D(1-\rho_1^2). \tag{5.70}$$

Визначимо температурне поле, яке призводить до термонапруженого стану у порожнисті й кулі з радіусами $\rho_1=0.5$, $\rho\ =1.0$ при $\sigma_\varphi(\rho)=0\,\text{ГПа}$ і $\sigma_\varphi(\rho)=0.01\,\text{ГПа}$ якщо $p_1\ =0.22$. Це відповідає розподілу радіальних напружень (5.69) з $C = -p_1\rho_1^2 = -0.055\,\text{ГПа}$ та $p_2 = 0.055\,\text{ГПа}$, якщо $\sigma_\varphi(\rho) = 0\,\text{ГПа}$ і $C = -p_1\rho_1^2 = -0.055\,\text{ГПа}$ та $p_2 = 0.0475\,\text{ГПа}$, якщо $\sigma_\varphi(\rho) = 0.01\,\text{ГПа}$. Відповідні розподіли радіальних термонапружень, температур, які спричиняють ці напруження та потужності теплових джерел і значення температур на поверхні подано на рис. 5.26–5.28. Штрихові лінії відповідають $\sigma_\varphi(\rho) = 0.01\,\text{ГПа}$, а суцільні $\sigma_\varphi(\rho) = 0\,\text{ГПа}$.

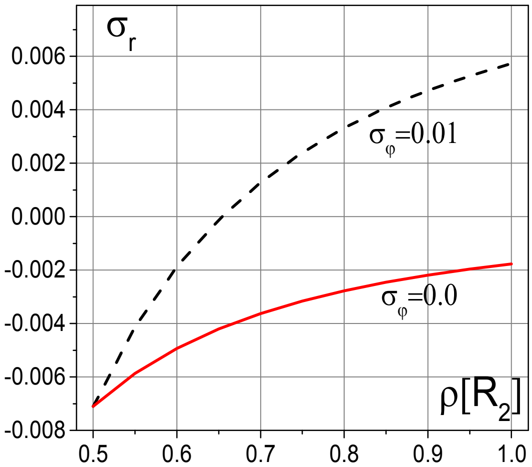


Рис.5.26. Розподіли радіальних напружень, які відповідають значенням $\sigma_\varphi(\rho) = 0$ та $\sigma_\varphi(\rho) = 0.01$

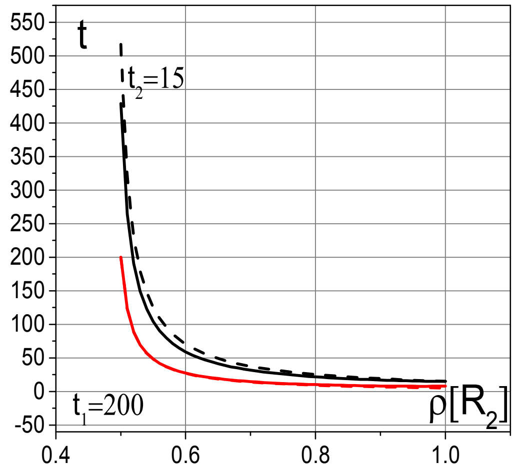


Рис.5.27. Розподіли температур, які забезпечують колові напруження $\sigma_\varphi(\rho) = 0$ та $\sigma_\varphi(\rho) = 0.01$

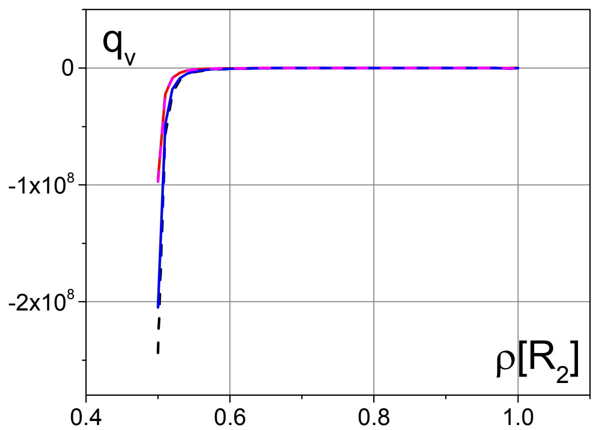


Рис. 5.28. Розподіли потужності теплових джерел, які забезпечують температурне поле на рис. 5.21

З рис. 5.26–5.28 бачимо, що температурні поля, які забезпечують колові напруження $\sigma_\varphi(\rho) = 0$ та $\sigma_\varphi(\rho) = 0.01$ при заданих температурах поверхонь $t_1 = 200\,\mathrm{K}$ та $t_2 = 15\,\mathrm{K}$ порівняо мало відрізняються. Це твердження стосується також потіжності теплових джерел, які створюють ці темпеартурні поля.

5.4. Розподіл температури і напружень у неоднорідному та термочутливому шарі.

5.4.1. Одношарова плита

Термонапружений стан шару у декартовій прямокутній системі координат з поверхнями, паралельними площині *xOy* і координатами z_1 та z_2 визначений виразом [125]:

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left[\frac{AN_t z - BM_t z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z) \right], \tag{5.71}$$

де

$$A = \int_{z_1}^{z_2} \eta E^*(\eta) d\eta, \quad B = \int_{z_1}^{z_2} E^*(\eta) d\eta, \quad C = \int_{z_1}^{z_2} \eta^2 E^*(\eta) d\eta,$$

$$N_t = \int_{z_1}^{z_2} E^*(\eta)\Phi(\eta) d\eta, \; M_t = \int_{z_1}^{z_2} \eta E^*(\eta)\Phi(\eta) d\eta,$$

$$E^*(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)}, \;\; \Phi(z) = \int_{T(z_1)}^{T(z)} \alpha(\tau) d\tau$$

при відсутності масових сил і поперечних навантажень з заданими силовими та моментними умовами

$$\int_{z_1}^{z_2} \sigma(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} \eta\sigma(\eta) d\eta = 0. \tag{5.72}$$

У випадку поперечних навантажень з масовими силами і $e = \text{const}$

$$\sigma(z) = \frac{\nu(z)}{1-\nu(z)} \int_{z_1}^{z_2} F_z(\xi) d\xi - \frac{\nu(z)}{1-\nu(z)} p_1 - \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \Phi(z) + e \frac{E(z)}{1-\nu(z)}. \quad (5.73)$$

Якщо термопружні характеристики матеріалу не залежать від температури, то $\Phi(z) = \alpha(z) t(z)$, де $t(z) = T(z) - T_0$ (T_0 – відлікова температура, при якій термонапруження відсутні). У формулах ((5.71) – (5.73) вважатимемо, що характеристики матеріалу є функціями координати і температури, тобто $E(z) = \overline{E}(z, T(z))$, для всіх характеристик.

Температурне поле вважатимемо стаціонарним з коефіцієнтом теплопровідності, залежним від координати і температури. Відповідна задача теплопровідності матиме вигляд

$$\frac{d}{dz}(\lambda(z, t(z)) \frac{dt(z)}{dz}) = 0 \quad (5.74)$$

з умовами на межах:

$$t(z_1) = t_1, \; t(z_2) = t_2. \quad (5.75)$$

Характеристики двокомпонентного ФГМ моделюватимемо таким виразом з поліноміальними залежностями коефіцієнтів теплопровідності складових ФГМ від температури [338, 347, 374]:

$$P(z, T(z)) = \sum_{i=0}^{4} P_{1i} t^i(z) + [1 - S(z)] \sum_{i=0}^{4} (P_{2i} - P_{1i}) t^i(z). \quad (5.76)$$

Рівняння теплопровідності (5.74) є нелінійним. Відповідну крайову нелінійну задачу теплопровідності (5.74), (5.75) розв’язано різницевими методами з екстраполяцією Річардсона [234].

Як приклад візьмемо ФГМ, розглянутий в роботі [373], компонентами якого є алюміній і карбід кремнію, характеристики $P(t)$ яких з врахуванням температурної залежності характеристик [12, 74, 77, 159, 267, 302, 308, 313] у вигляді поліноміальної залежності $P_k(t) = \sum_{i=0}^{4} P_{ki} t^i$ ($k = 1, 2$) подані у табл. 5.13, 5.14. Вважаємо, що зміна концентрації у шарі описано як

$$S_1(z) = \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^s, \ s \in [0, s_m], \qquad (5.77)$$

де s_m – фізично обґрунтоване у (5.77) максимальне значення показника степеня s.

Таблиця 5.13

Залежні від температури характеристики першого матеріалу

Al [0°C – 600°C]				
Коефіці–єнти по–ліному	Коефіцієнт теплопровідності [Вт/(м·К)]	Коефіцієнт теплового розширення [$10^{-6}K^{-1}$]	Модуль пружності [ГПа]	Коефіцієнт Пуассона
P_{10}	237	22.8	71	0.342
P_{11}	-0.045707806043	0.0085000	-0.00305054	$3.9198589\ 10^{-5}$
P_{12}	$3.3209418111\ 10^{-6}$	0	$-1.2333905\ 10^{-4}$	1.0524435910^{-7}
P_{13}	$-6.48063133\ 10^{-7}$	0	$8.95415731\ 10^{-8}$	0
P_{14}	$3.367115997\ 10^{-10}$	0	0	0

Таблиця 5.14

Залежні від температури характеристики другого матеріалу

SiC [0°C – 900°C]				
Коефіці–єнти по–ліному	Коефіцієнт теплопровідності [Вт/(м·К)]	Коефіцієнт тепло–вого розширення [$10^{-6}K^{-1}$]	Модуль пружності [ГПа]	Коефіцієнт Пуассона
P_{20}	65.6136363636	0,71	415	0.16
P_{21}	-0.03068181818	0.018336346427	-0.023	$0.25\ 10^{-5}$
P_{22}	0	$-3.70999157\ 10^{-5}$	0	0
P_{23}	0	$3.7414966139\ 10^{-8}$	0	0
P_{24}	0	$-1,4503167\ 10^{-11}$	0	0

Залежність концентрації $S(z)$ від координати при різних значеннях s подана на рис. 5.29.

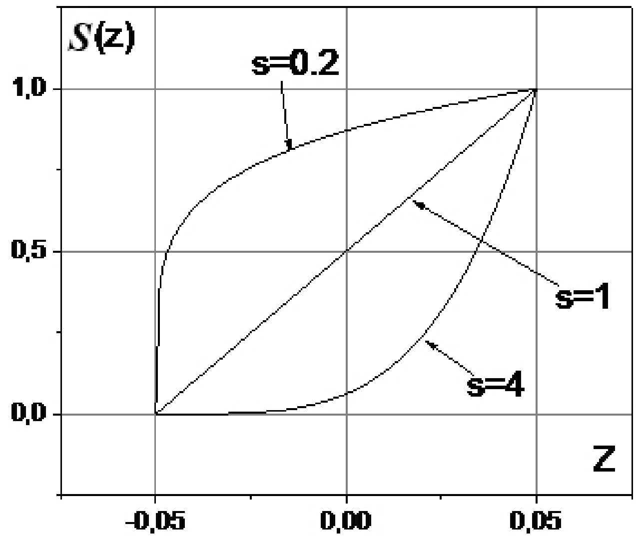


Рис. 5.29. Залежність концентрації від координати для різних значень параметра *s*.

Концентрація матеріалу описана формулою (5.77). Результати обчислень температурного поля при різних значеннях показника степеня *s* подано на рис. 5.30.

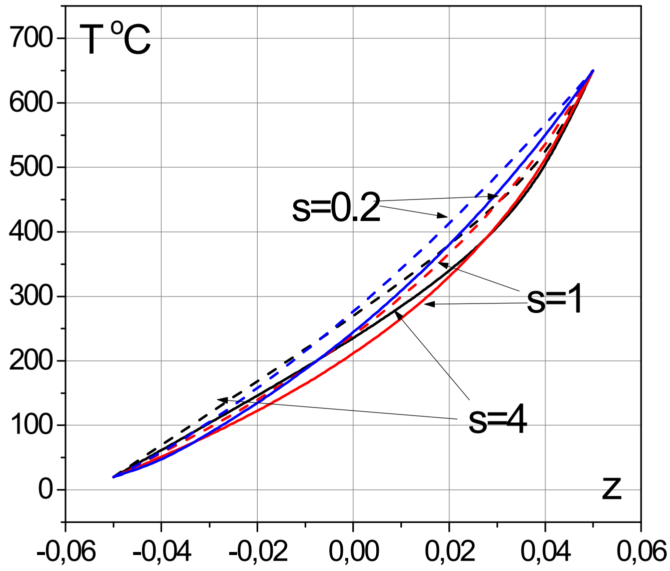


Рис. 5.30. Розподіл температури у ФГМ (Al-SiC) з врахуванням (суцільна лінія) і без врахування (штрихова лінія) термочутливості матеріалу при різних значеннях параметра s у виразі (5.77).

У табл. 5.15, 5.16 подані значення сталих для обчислення напружень за формулою (5.71). Відповідний розподіл складових тензора напружень $\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ поданий на рис. 5.31 для різних значень параметра неоднорідності s. Напруження $\sigma_{zz} = 0$, тому що відсутні силові навантаження. Це є наслідком рівнянь рівноваги для шару та умов $\sigma_z(z_1) = \sigma_z(z_2) = 0$.

Таблиця 5.15

Значення сталих для обчислення напружень за формулою (5.71) з врахуванням температурної залежності характеристик

	A_T	B_T	C_T	N_T	M_T
s=4	-0,2965199	29,18926458	0,02426257644	0,46663474	0,001320884
s=1	-0,31791	31.4521	0.025741	-0.004081	$-0.621\ 10^{-5}$
s=0.2	-0.1831687	15.847880	0.014432481	0.07260520	0.00104799

Таблиця 5.16

Значення сталих для обчислення напружень за формулою (5.71) без врахуванням температурної залежності характеристик

	A	B	C	N	M
s=4	-0,2364439	42,49575367	0,03177399469	0,.6372601	0,1955643
s=1	-0.319875	31.6651	0.025868	-0.0040	$-0.7567\ 10^{-5}$
s=0.2	-0.166981	18.41690776	0.0165736	0.084476	0.0013501

З рис. 5.31 бачимо, що вклади від урахування температурної залежності характеристик неоднорідних матеріалів зростають зі зростанням показника степеня s у формулі (5.103). Вплив температурної залежності характеристик матеріалу на температурне поле є суттєвішим (порядку 30%) порівняно з однорідним матеріалом (порядку 10%).

Тому слід очікувати більшого вкладу від врахування термочутливості матеріалів у ФГМ порівняно з однорідними матеріалами.

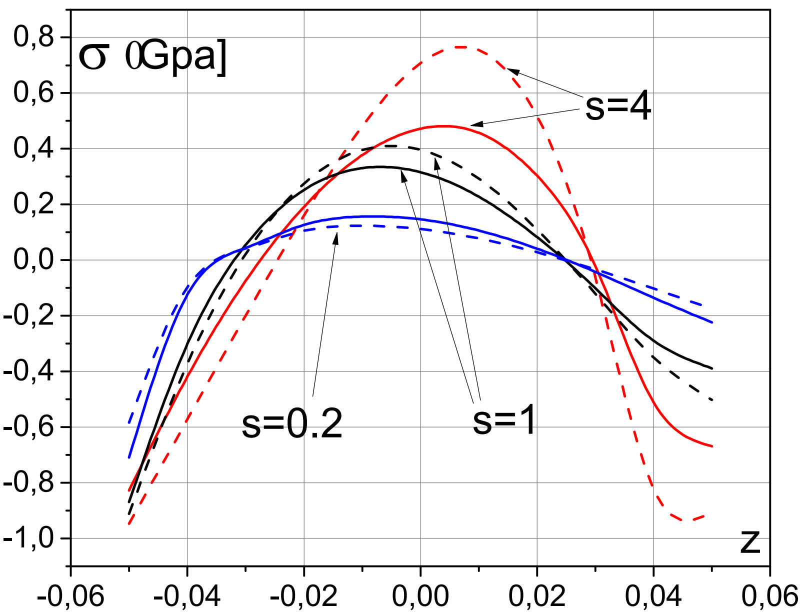


Рис. 5.31. Розподіл напружень у пластині з ФГМ (Al–SiC) з розподілом концентрації (5.77) для різних значень параметра *s* (штрихові лінії відповідають залежності від координат, а суцільні – залежності характеристик від координат і температури).

Деформації в умовах відсутності силових навантажень обчислимо за формулами [125]

$$e(z)=\frac{(1-\nu(z))}{E(z)}\sigma(z)+\Phi(z,t(z)),$$

$$e_z(z)=-\frac{2\nu(z)\sigma(z)}{E(z)}+\Phi(z,t(z)),$$

Їх розподіл зображено на рис. 5.32.

У випадку, коли $e=\text{const}$ і $\int\limits_{z_1}^{z_2}\sigma(\eta)d\eta=0$ та плоского деформованого стану ($e=0$) напруження обчислюватимемо за формулами (5.73).

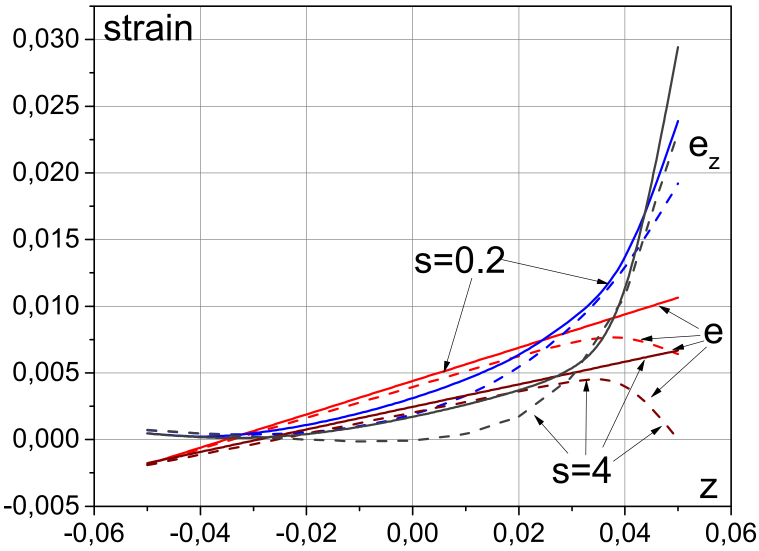


Рис. 5.32. Розподіл деформацій у шарі з ФГМ (Al-SiC) в залежності від параметра s, який характеризує концентрацію складових (штрихові лінії відповідають залежності характеристик ФГМ від координат, а суцільні – залежності від координат і температури).

Перевірку достовірності результатів здійснено підставлянням виразу для температури у рівняння теплопровідності. Достовірність результатів для напружень перевірено виконанням першої інтегральної умови (5.72).

5.4.2. Двошарова плита

Розглянемо задачу про термонапружений стан у двошаровій плиті. Задачі визначення напруженого стану, викликаних полями різної природи для термочутливої плити і тонких пластинок розглянута у [41, 44, 37, 126, 186, 191, 304, 356]. З аналізу цих робіт видно, що дві інтегральні умови на поздовжні напруження та моменти [17] для одношарової плити стають неоднозначними у випадку кусково-однорідного тіла. Температурні поля у термочутливих пластинах (аналітично-чисельними методами, в основному на основі перетворення Кірхгофа з подальшою лінеаризацією умов на межі), досліджувались, зокрема, в працях [38, 40, 356].

Розглянемо незв'язану квазістатичну задачу термопружності про визначення, зумовленого відомим температурним полем і силовими навантаженнями, термопружного стану ізотропної двошарової плити (рис.5.33).

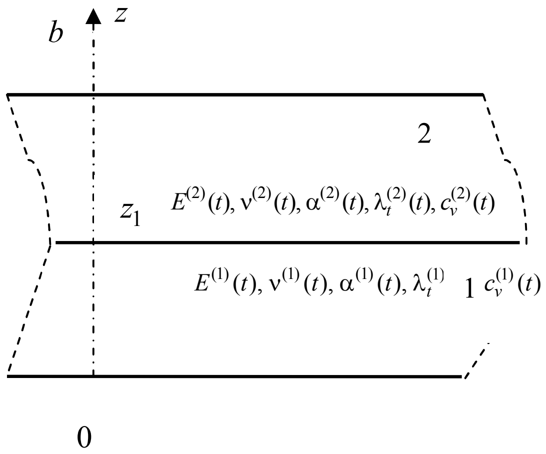


Рис.5.33. Двошарова плита

Вважаємо, що термомеханічні характеристики матеріалів шарів (модуль пружності $\overline{E}^{(j)}$, коефіцієнт Пуассона $\overline{\nu}^{(j)}$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha_t^{(j)}$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda_t^{(j)}$, об'ємна теплоємність $c_v^{(j)}$ та коефіцієнт температуропровідності $a^{(j)}$, $j=1,2$) залежать від температури *t,* яка є функцією координати z і часу τ. Нижня поверхня плити збігається з площиною xy. Вісь z напрямлена по товщині плити. На межі дотику шарів $z=z_1$ задані умови ідеального теплового контакту. Досліджувана плита має початкову сталу температуру t_p, через поверхні $z=0$ і $z=b$, обмінюється теплом шляхом конвективного тепло-обміну з середовищами сталої температури t_{cj} $(j=1,2)$. На цих поверхнях задано тиски p_j. Результуюча сила та результуючий момент на одиницю довжини по товщині плити подані у вигляді інтегральних умов відносно поздовжніх напружень, як це зроблено і обґрунтовано в [17]. Потрібно визначити термопружний стан плити.

Математична модель для визначення компонент тензора напружень включає:

- рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_z^{(j)}(z)}{\partial z} = F^{(j)}(z), \tag{5.78}$$

- рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\partial^2 e^{(j)}(z)}{\partial z^2} = 0; \tag{5.79}$$

- зв’язки між деформаціями та напруженнями

$$e_x^{(j)} = e_y^{(j)}(z) = e^{(j)}(z) = \frac{\sigma^{(j)}(z) - \nu^{(j)}(z))(\sigma^{(j)}(z) + \sigma_z^{(j)}(z))}{E^{(j)}(z)} + \Phi^{(j)}(t^{(j)}(z,\tau)), \tag{5.80}$$

$$e_z^{(j)}(z) = \frac{1}{E^{(j)}(z)}\left[\sigma_z^{(j)}(z) - 2\nu^{(j)}(z)\sigma^{(j)}(z)\right] + \Phi^{(j)}(t^{(j)}(z,\tau)); \tag{5.81}$$

- умови на межах та умови на контакті шарів:

$$\sigma_z^{(1)}(0) = -p_1, \sigma_z^{(2)}(b) = -p_2,$$

$$\sigma_z^{(1)}(z_1) = \sigma_z^{(2)}(z_1), \qquad u_z^{(1)}(z_1) = u_z^{(2)}(z_1), \tag{5.82}$$

- результуючі зусилля та моменти на одиницю довжини у перерізі плити

$$\int_0^b \sigma(\xi)d\xi = P \ \text{(а)}, \qquad \int_0^b \xi\sigma(\xi)d\xi = 0 \ \text{(б)}, \tag{5.83}$$

- неперервність поздовжніх деформацій

$$e^{(1)}(z_1) = e^{(2)}(z_1). \tag{5.84}$$

Замість умов (5.83), (5.84) можна розглядати умови

$$\int_{z_{j-1}}^{z_j} \sigma^{(j)}(\zeta)d\zeta = P_j, \qquad \int_{z_{j-1}}^{z_j} \zeta\sigma^{(j)}(\zeta)d\zeta = 0, \ j = 1,2. \tag{5.85}$$

У виразах (5.78) – (5.85) $F^{(j)}(z)$ – масові сили j -го шару, $\sigma_k^{(j)}$, $e_k^{(j)}$ ($k = x, y, z$) – діагональні компоненти тензорів напружень та деформацій відповідно, $u_z^{(j)}$ – переміщення у j-му шарі, P, P_j – результуючі силові навантаження на одиницю довжини по товщині плити та j -го шару відповідно, $\sigma_x^{(j)}(z)=\sigma_y^{(j)}(z)=\sigma^{(j)}(z)$, $\Phi^{(j)}(t^{(j)}(z,\tau))=\int\limits_{t_0}^{t^{(j)}(z,\tau)}\alpha_t^{(j)}(t)dt$, $\nu^{(j)}(z)=\overline{\nu}^{(j)}(t^{(j)}(z,\tau))$, $E^{(j)}(z)=\overline{E}^{(j)}(t^{(j)}(z,\tau))$. Оскільки навантаження, термомеханічні характеристики матеріалу, напруження, деформації, переміщення залежать від часу як від параметра, а рівняння (5.78) – (5.85) містять операції стосовно тільки координат, надалі функціональну залежність від часу τ не відзначатимемо.

Умови (5.85) відображають разом з умовами задачі теплопровідності механічний контакт між стисненими плитами, які без тертя можуть ковзати одна по одній. Умови (5.83а), (5.83б) з точністю до зусиль такі ж як і в праці [17].

Температурне поле визначено з нелінійної нестаціонарної крайової задачі теплопровідності [9], яка у відносних координатах $\{\overline{z},\overline{z}_1\}=\{z,z_1\}/b$ $\{t,t_p,t_{c1},t_{c2}\}=\{T,T_p,T_{c1},T_{c2}\}/T_0$ (t_0 – вибрана опорна температура), $\mathrm{Fo}=a_0^{(1)}\tau/b^2$ ($a_0^{(1)}=\lambda_{t0}^{(1)}/c_{v0}^{(1)}$), $\mathrm{Bi}_1=\alpha_1 b/\lambda_{t0}^{(1)}$, $\mathrm{Bi}_2=\alpha_2 b/\lambda_{t0}^{(2)}$ має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\lambda_{t0}\lambda_t^*(t)\frac{\partial t}{\partial\overline{z}}\right)=c_{v0}c_v^*(t)a_0^{(1)}\frac{\partial t}{\partial Fo},\qquad 0<\overline{z}<1, \tag{5.86}$$

$$t\big|_{\overline{z}=\overline{z}_1-0}=t_{\overline{z}=\overline{z}_1+0}, \tag{5.87}$$

$$\lambda_{t0}\lambda_t^*(t)\frac{\partial t}{\partial\overline{z}}\bigg|_{\overline{z}=\overline{z}_1-0}=\lambda_{t0}\lambda_t^*(t)\frac{\partial t}{\partial\overline{z}}\bigg|_{\overline{z}=\overline{z}_1+0}, \tag{5.88}$$

$$\lambda_t^*(t\big|_{\overline{z}=0})\frac{\partial t}{\partial\overline{z}}\bigg|_{\overline{z}=0}-Bi_1\left(t\big|_{\overline{z}=0}-t_{c1}\right)=0,$$

$$\lambda_t^*(t\big|_{\overline{z}=1})\frac{\partial t}{\partial\overline{z}}\bigg|_{\overline{z}=1}+Bi_2\left(t\big|_{\overline{z}=1}-t_{c2}\right)=0, \tag{5.89}$$

$$t\big|_{Fo=0} = 0, \tag{5.90}$$

Де $\left\{\lambda_{t0}, \lambda_t^*(\overline{T}), c_{v0}, c_v^*(\overline{T})\right\} = \begin{cases} \lambda_{t0}^{(1)}, \lambda_t^{*(1)}(t), c_{v0}^{(1)}, c_v^{*(1)}(t), 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_1, \\ \lambda_{t0}^{(2)}, \lambda_t^{*(2)}(t), c_{v0}^{(2)}, c_v^{*(2)}(t), \overline{z}_1 \le \overline{z} \le 1, \end{cases}$

$t_{c1} = T_{c1} - T_p, \qquad t_{c2} = t_{c2} - t_p$.

Тут $\lambda_t(t)$, $c_v(t)$ і $a(t) = \lambda_t(t)/c_v(t)$ подано у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(t)$, де $t = T - T_p$ ($\chi^*(0) = 1$).

Визначення температурного поля. Аналітико-чисельний метод застосований для розв’язання задачі теплопровідності взятий з праці [9, 38].

З метою знаходження числового розв’язку крайової задачі (5.86)–(5.90) здійснено перехід до інтегральної змінної типу Гудмена [271]

$$v = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t(\overline{z}, Fo)} a_0^{(1)} c_{v0}^{(1)} c_v^{*(1)}(u)\,du, & 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_1, \\ \displaystyle\int_0^{t(\overline{z}_1 - 0, Fo)} a_0^{(1)} c_{v0}^{(1)} c_v^{*(1)}(u)\,du + \int_{t(\overline{z}_1 + 0, Fo)}^{t(\overline{z}, Fo)} a_0^{(1)} c_{v0}^{(2)} c_v^{*(2)}(u)\,du, & \overline{z}_1 \le \overline{z} \le 1. \end{cases} \tag{5.91}$$

Отриману крайову задачу на змінну типу Гудмена за допомогою інтегро-інтерполяційного методу [199] зведено до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).

$$\mathrm{C}\frac{dv_0}{d\mathrm{Fo}} = \frac{2}{h}\left(d_1(v)\frac{v_1 - v_0}{h} - \lambda_{t0}^{(1)} \mathrm{Bi}_1\left(t(v_0) - t_{c1}\right)\right), \tag{5.92}$$

$$\frac{dv_i}{d\mathrm{Fo}} = \frac{1}{h^2}\left[d_{i+1}(v)\left(v_{i+1} - v_i\right) - d_i(v)\left(v_i - v_{i-1}\right)\right], \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5.93}$$

$$\frac{dv_n}{d\mathrm{Fo}} = \frac{2}{h}\left(-\lambda_{t0}^{(2)} Bi_2\left(\overline{T}(v_n) - \overline{T}_{c2}\right) - d_n(v)\frac{v_n - v_{n-1}}{h}\right), \tag{5.94}$$

$$v_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \tag{5.95}$$

де $$d_i(\mathrm{v}) \approx K_a(\overline{z}_i) a^*(v_{i-\frac{1}{2}}),$$

$$K_a(\overline{z}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \overline{z} \le \overline{z}_1 \\ a_0^{(2)} \big/ a_0^{(1)}, & \overline{z}_1 \le \overline{z} \le 1 \end{cases}, \quad a^*(v_{i-\frac{1}{2}}) = a^*(v(\overline{z}_{i-\frac{1}{2}}, Fo)).$$

СЗДР (5.92) – (5.95) розв’язана числово за допомогою багатокрокових різницевих методів [199], задавши теплофізичні характеристики матеріалів шарів плити. Для заданих характеристик матеріалів, використовуючи обернену інтерполяцію, з (5.91) знайдено розподіл температурного поля.

Розв’язування задачі термопружності. Безпосереднє інтегрування рівняння (5.78) з врахуванням умов (5.82) призводить до такого виразу для напружень $\sigma_z^{(j)}(z)$ ($j=1,2$):

$$\sigma_z^{(1)}(z)=\int\limits_{z_0}^{z} F^{(1)}(\zeta)d\zeta + C^{(1)}, \sigma_z^{(2)}(z)=\int\limits_{z_1}^{z} F^{(2)}(\zeta)d\zeta + C^{(2)},$$

$$C^{(1)}=-p_1\,, z_0=0\,, z_2=b$$

$$\sigma_z^{(2)}(z_1)=\sigma_z^{(1)}(z_1)=C^{(2)}=\int\limits_{z_0}^{z_1} F^{(1)}(\xi)d\xi - p_1 \qquad (5.96)$$

і відповідно

$$\sigma_z(z)=\int\limits_{0}^{z} F(\zeta)d\zeta - p_1\,,\ \sigma_z(z)=\begin{cases}\sigma_z^{(1)}(z), z\in[0,z_1]\\ \sigma_z^{(2)}(z), z\in[z_1,\mathrm{b}]\end{cases} \qquad (5.97)$$

де $F(z)=\begin{cases}F^{(1)}(z), z\in[0,z_1]; F(z)=0, z\in[z_1,b]\\ F^{(2)}(z), z\in[z_1,b];\ F(z)=0, z\in[0,z_1]\end{cases}$, звідки отримуємо інтегральну умову

$$\int\limits_{0}^{b} F(\zeta)d\zeta = p_2 - p_1\,. \qquad (5.98)$$

Коли масові сили відсутні ($F(z)=0$), то з виразу (5.98) випливає, що $-p_2=-p_1=-p$.

Поздовжні напруження $\sigma^{(j)}(z)$ визначаються зі зв’язків між деформаціями та напруженнями (5.80). Невідому поздовжню деформацію визначено з рівняння сумісності (5.79)

$$e^{(j)}(z)=B_1^{(j)}z+B_2^{(j)},\ j=1,2. \qquad (5.99)$$

де $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$ – довільні сталі. Після подання виразу (5.99) у напруженнях з використанням формули (5.97) і зв’язку між деформаціями та напруженнями (5.80), отримаємо вираз для напружень у напрямах Ox та Oy,

$$\sigma^{(j)} = \frac{\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}} \int_0^z F(\xi)d\xi - \frac{\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}} p - \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)}} \Phi^{(j)}(T^{(j)}) +$$

$$+B_1^{(j)} \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)}} z + B_2^{(j)} \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)}}, \qquad (5.100)$$

в якому $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$ визначають з умов (5.83) або (5.85). Отже, маємо чотири невідомі сталі $B_i^{(j)}$ $(i, j = 1,2)$ та три умови (5.83). Для отримання однозначного розв’язку задачі термопружності запропоновані такі можливі варіанти задання умов:

- інтегральна умова (5.83а) (відомі результуючі зусилля по товщині) задана у всій плиті, інтегральна умова (5.83б) (відомий результуючий момент по товщині) заданий у кожному шарі, деформації на межі шарів рівні;
- інтегральна умова (5.83б) задана у всій плиті, задана інтегральна умова (5.83а) виконується у кожному шарі, деформації на межі шарів рівні;
- сталі $B_i^{(1)} = B_i^{(2)}$ $(i = 1,2)$, інтегральні умови (5.83а), (5.83б) задані у всій плиті (у цьому випадку умова (5.84) рівності деформацій на межі шарів виконується автоматично);
- задані інтегральні умови (5.85), які відображають задані результуючі зусилля та моменти по товщині кожного шару.

У цих чотирьох випадках отримаємо такі відповідні системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення сталих $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$ $(j = 1,2)$:

1. $B_1^{(1)}E_{11} + B_2^{(1)}E_{21} = D_{11}$, $\quad B_1^{(2)}E_{12} + B_2^{(2)}E_{22} = D_{12}$, $\quad B_1^{(2)}z_1 + B_2^{(2)} = B_1^{(1)}z_1 + B_2^{(1)}$,

$$B_1^{(1)}E_{21} + B_2^{(1)}E_{31} + B_1^{(2)}E_{22} + B_2^{(2)}E_{32} = D_{21} + D_{22} + P \;; \qquad (5.101)$$

2. $B_1^{(1)}E_{11} + B_2^{(1)}E_{21} + B_1^{(2)}E_{12} + B_2^{(2)}E_{22} = D_{11} + D_{12}$, $\quad B_1^{(2)}z_1 + B_2^{(2)} = B_1^{(1)}z_1 + B_2^{(1)}$,

$$B_1^{(1)}E_{21} + B_2^{(1)}E_{31} = D_{21} + P_1\ , \qquad B_1^{(2)}E_{22} + B_2^{(2)}E_{32} = D_{22} + P_2\ , \qquad (5.102)$$

3. $B_1^{(1)}E_{11} + B_2^{(1)}E_{21} + B_1^{(1)}E_{12} + B_2^{(1)}E_{22} = D_{11} + D_{12}$,

$$B_1^{(1)}E_{21} + B_2^{(1)}E_{31} + B_1^{(1)}E_{22} + B_2^{(1)}E_{32} = D_{21} + D_{22} + P\ ; \qquad (5.103)$$

4. $B_1^{(1)}E_{11} + B_2^{(1)}E_{21} = D_{11}$, $\qquad B_1^{(2)}E_{12} + B_2^{(2)}E_{22} = D_{12}$,

$$B_1^{(1)}E_{21} + B_2^{(1)}E_{31} = D_{21} + P_1\ , \qquad B_1^{(2)}E_{22} + B_2^{(2)}E_{32} = D_{22} + P_2\ . \qquad (5.104)$$

У формулах (5.101) – (5.104)

$$f_{1j} = \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\zeta\nu^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)} \int\limits_0^{\zeta} F_z^{(j)}(\xi)d\xi d\zeta\,, \ \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \zeta\frac{\nu^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}d\zeta = N_{1j}\,,$$

$$\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\zeta E^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\zeta))d\zeta = H_{1j}\,, \ \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{E^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}\zeta^2 dx = E_{1j}\,,$$

$$\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{E^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}\zeta d\zeta = E_{2j}\,, \ \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\nu^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}d\zeta = N_{2j}\,,$$

$$\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{E^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\zeta))dx = H_{2j}\,, \ \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{E^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)}d\zeta = E_{3j}\,,$$

$$f_{2j} = \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\nu^{(j)}(\zeta)}{1-\nu^{(j)}(\zeta)} \int\limits_0^{\zeta} F_z\,(\xi)d\xi d\zeta\,, \quad D_{ij} = -f_{ij} + N_{ij}p + H_{ij}\,, (i, j = 1{,}2\,).$$

Отже, напруження у двошаровій нескінченній термочутливій плиті мають вигляд (5.97), (5.100), деформації – (5.80), (5.81) або (5.99), де сталі $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$ $(\,j = 1{,}2\,)$ визначені одним з чотирьох способів задання інтегральних умов як розв'язки систем лінійних алгебричних рівнянь (5.101) – (5.104).

Числові результати та їх аналіз. Обчислено напруження та деформації у двошаровій нескінченій термочутливій плиті при відсутності силових навантажень та моментів. За матеріали шарів вибрано кераміку ZrO_2 і титановий сплав Ti-6Al-4V з такими залежними від температури термомеханічними характеристиками [356] (від 300К до 1100К):

$c_p^{(1)}(t) = 2,74 \cdot 10^2 + 7,95 \cdot 10^{-1} t - 6,19 \cdot 10^{-4} t^2 + 1,71 \cdot 10^{-7} t^3$ [кДж/кг·К],

$\lambda_t^{(1)}(t) = 1,71 + 0,21 \cdot 10^{-3} t + 0,116 \cdot 10^{-6} t^2$ [Вт/(м·К)], $c_v^{(1)}(t) = c_p^{(1)}(t) \rho^{(1)}(t)$,

$\nu^{(1)}(t) = 0,33$, $\rho^{(1)} = 3657 / [1 + \alpha_t^{(1)}(t)(t - 300)]^3$ [кг/м^3],

$E^{(1)}(t) = 1.322 \cdot 10^{11} - 5,03 \cdot 10^9 t - 8,1 \cdot 10^{-8} t^2$ [Па],

$\alpha_t^{(1)}(t) = 13,31 \cdot 10^{-6} - 18,9 \cdot 10^{-9} t + 12,7 \cdot 10^{-12} t^2$ [1/К];

$c_p^{(2)}(t) = 3,5 \cdot 10^2 + 8,78 \cdot 10^{-1} t - 9,74 \cdot 10^{-4} t^2 + 4,43 \cdot 10^{-7} t^3$ [кДж/кг·К],

$\lambda_t^{(2)}(t) = 1,1 + 0,017 t$ [Вт/(м·К)], $c_v^{(2)}(t) = c_p^{(2)}(t) \rho^{(2)}(t)$, $\nu^{(2)}(t) = 0.288 + 0,00032 t$,

$\rho^{(2)} = 4420 / [1 + \alpha_t^{(2)}(t)(t - 300)]^3$ [кг/м^3], $E^{(2)}(t) = 1,22 \cdot 10^{11} - 5,65 \cdot 10^{-9} t$ [Па],

$\alpha_t^{(2)}(t) = 7,43 \cdot 10^{-6} + 5,56 \cdot 10^{-9} t - 2,69 \cdot 10^{-12} t^2$ [1/К].

Температуру поверхні $z = b$ плити вибрано за опорну $t_{c2} = t_0 = 1100$ К, а температура поверхні $z = 0$ дорівнює початковій температурі плити $t_{c1} = t_p = 300$ К. Всі обчислення проведено у відносних величинах. Результати числових досліджень наведено у вигляді графіків на рис. 5.34 – 5.36,

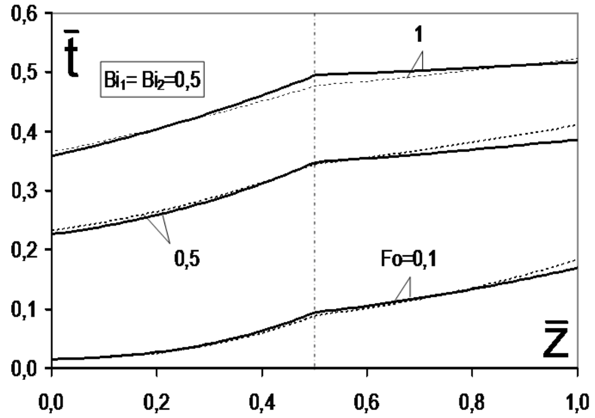


Рис. 5.34. Залежності приросту температури від координати $\bar{z}$ для різних значень часу $Fo = 0.1,\ 0.5, 1$ при $Bi_1 = Bi_2 = 0.5$.

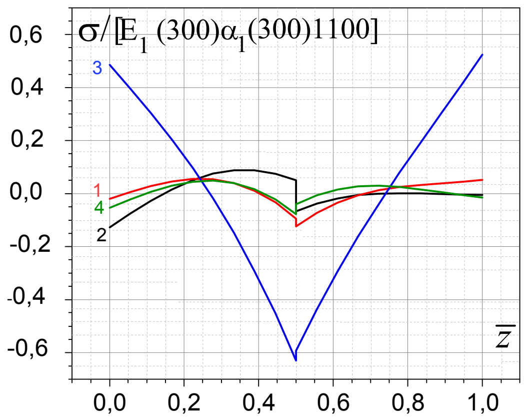


Рис.5.35.Розподіл компоненти напружень вздовж довжини плити для 4-х умов на напруження та моменти

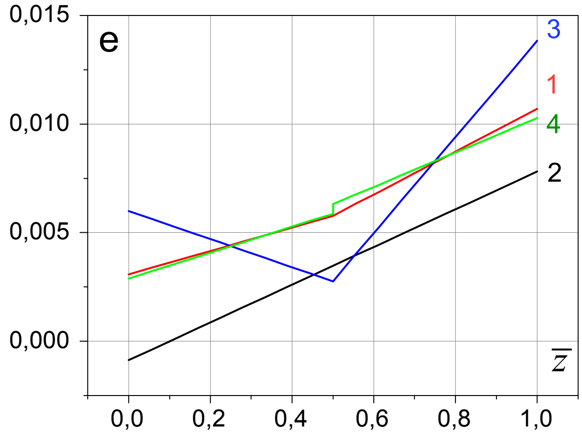


Рис.5.36. Розподіл компоненти деформацій вздовж довжини плити для для 4-х умов на напруження та моменти

де суцільні лінії на цих рисунках відповідають значенням температури, отриманим за врахування температурних залежностей характеристик матеріалів, а штрихові – з постійними характеристиками матеріалу при початковій температурі.Деформації обчислювались як за формулами (5.99) так і з використанням виразів для напружень (5.100) у виразах (5.80).

5.4.3. Визначення температурного поля, яке призводить до заданого термонапруженого стану

Визначимо напруження у неоднорідному шарі за формулою (5.73), яке спричиняє температурне поле, отримане з задачі теплопровідності (5.74), (5.75), в якій $\lambda = \lambda(z)$. Розв'язок задачі (5.74), (5.75) має вигляд

$$t(z) = C_1 \int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\lambda(\zeta)} + C_2 ,$$

де

$$C_2 = t_1 , \qquad C_1 = \frac{t_2 - t_1}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{\lambda(\zeta)}} .$$

Для обчислень взято $z_1 = -0.05$, $z_2 = 0.05$, $t_1 = 20\,^{\circ}$K, $t_2 = 650\,^{\circ}$K, $T_0 = 273\,^{\circ}$K, характеристики складових матеріалу з табл. 5.13, 5.14 зі значеннями P_{0i} (i=1,2). Розподіли температури та напружень подані на рис. 5.37 і 5.38. Ва-

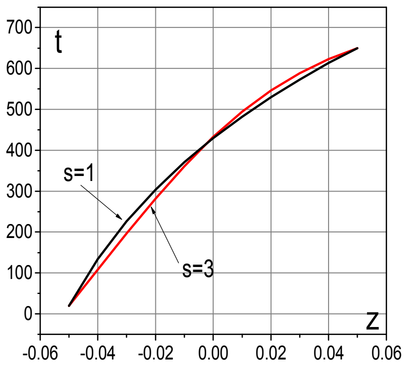


Рис. 5.37. Розподіл температур у неоднорідному по товщині шарі

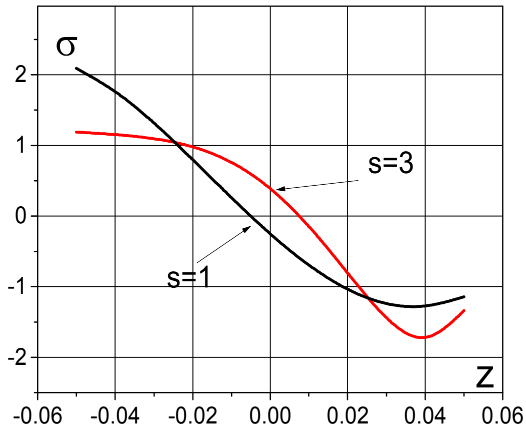


Рис. 5.38. Розподіл напружень у неоднорідному по товщині шарі

жаємо, що розподіл поздовжніх напружень у шарі відомий та заданий на рис. 5.38. Апроксимуємо його поліномом 9-го степеня методом найменших квадратів з коефіцієнтами, заданими у табл. 5.17:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{9} b_k z^k .$$

Таблиця 5.17

Значення коефіцієнтів апроксимації напружень

	$s = 1$	$s = 3$
b_0	-0.26204473132514	0.41899811741421
b_1	-48.92509514261906	-45.40211564380957
b_2	339.03456400129983	-899.3056349210932
b_3	6110.8676763325975	-283.17317916978402
b_4	-13705.752915473733	232707.57347980616
b_5	175521.93107654506	$2.87706252170105 \cdot 10^{6}$
b_6	$-1.11377082623808 \cdot 10^{6}$	$1.23288419519657 \cdot 10^{7}$
b_7	$1.01555322419523 \cdot 10^{7}$	$1.36993382440684 \cdot 10^{8}$
b_8	$-2.00040546679299 \cdot 10^{8}$	$2.77189305294564 \cdot 10^{9}$
b_9	$2.00142774473327 \cdot 10^{9}$	$1.82312706679486 \cdot 10^{10}$

При цьому залишкова сума квадратів [293] не більша від $4.02482092096632 \cdot 10^{-11}$, коефіцієнт детермінації [293] не менший від 0.99999999999711, скоригований коефіцієнт детермінації [293] не менший від 0.99999999997108. Підставляючи цей розподіл напружень у формулу (5.17), отримаємо відповідні значення температурного поля через механічні характеристики матеріалу та коефіцієнт лінійного теплового розширення. Порівняння з точним результатами подані у табл. 5.18.

Таблиця 5.18

Порівняння значень температури, обчисленої з рівнянь теплопровідності та через термомеханічні характеристики матеріалу

z	s=1		s=3	
	Точне значення температури [K]	За формулою (5.86) [K]	Точне значення температури [K]	За формулою (5.86) [K]
-0.05	20.	20.000047	20.	19.999849
-0.04	133.8355557	133.835597	108.6217484	108.621148
-0.03	226.1681567	226.1680843	196.4436092	196.444970
-0.02	303.8449490	303.8451168	281.5288268	281.525928
-0.01	370.8874265	370.8871910	361.1644321	361.1674412
0.	429.8598132	429.8600771	432.7244700	432.7220749
0.01	482.4978721	482.4976674	494.5283692	494.5296725
0.02	530.0313416	530.0314636	546.2011413	546.2005645
0.03	573.3633243	573.3632785	588.4491442	588.4493050
0.04	613.1766149	613.1766290	622.5668354	622.5667893
0.05	650.0000000	650.0000000	650.0000000	650.0000000

Значення температури, обчислені через механічні характеристики ФГМ відрізняються від попередньо обчислених з рівняння теплопровідності як видно з табл. 5.18 не більше як на 0.006 % .

5.5. Висновки

Запропоновано метод визначення температурного поля, яке призводить до заданого розподілу компоненти тензора напружень у порожнистих циліндрі, кулі та шарі, виготовлених з ФГМ при заданих силових навантаженнях. Отримано точні аналітичні вирази для такого температурного поля через термомеханічні характеристики матеріалу і силові навантаження.

З метою оцінки величин можливих значень компоненти напружень запропоновано метод визначення термонапруженого стану порожнистих циліндра та кулі і шару, виготовлених з неоднорідного матеріалу з врахуванням температурної залежності характеристик матеріалу.

Зведення задачі термопружності до рівнянь Фредгольма другого роду дає можливість розв’язати задачу про отримання заданого розподілу напружень або окремих компонент тензора напружень.

Дослідження показали порівняно малий вплив від врахування температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу на температурне поле в тілі. Однак ці невеликі зміни температурного поля (відхилення до 5%) можуть спричинити порівняно великі зміни напружень (до 50%).

Отримані розподіли напружень для різних ФГМ свідчать про необхідність врахування комплексного впливу на розподіл напружень в тілі концентрації, форми, механічних характеристики матеріалу та їх залежностей від температури.

Поле концентрації складових ФГМ суттєво впливає на зміну величини термонапружень внаслідок урахування температурної залежності характеристик (майже від 0 до 50%).

Існують умови на межах і характеристики матеріалу, які призводять до відсутності напружень в тілі.

У випадку сталої теплоємності двокомпонентного ФГМ відповідні рівняння відносно невідомої концентрації суттєво спрощуються (стають алгебричними). Це дозволяє отримати точні аналітичні вирази характеристик матеріалу для забезпечення температурних полів, які не викликають напружень, для інших моделей подання характеристик ФГМ через характеристики складових.

Малі зміни температури (декілька відсотків), спричинені зміною характеристик матеріалів по товщині можуть суттєво впливати на зміну напружень у неоднорідному шарі.

Невеликі зміни термонапружень внаслідок урахування температурної залежності характеристик в окремих випадках спричиняють значно більші зміни переміщень, які мають інший характер порівняно зі змінами напружень. Це означає, що у задачах термопружності стосовно ФГМ необхідно розглядати всі можливі для обчислення характеристики термонапруженого стану (напруження, деформації, переміщення).

Можливість відсутності термонапружень або встановленнння заданого розподілу компоненти термонапружень в тілах простої форми при великих перепадах температур між поверхнями є наслідком неоднорідності матеріалу.

Можливі межі перепаду температур визначаються найбільшим значенням відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення матеріалу.

Наведено аналітичні вирази для теплових джерел, що створюють температурні поля, які призводять до заданого розподілу компоненти тензора напружень.

РОЗДІЛ 6

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ НАПРУЖЕНЬ І СПОСОБИ ЇХ ДОСЯГНЕННЯ У ДОВГОМУ ПРЯМОКУТНОМУ БРУСІ З ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ДВОХ КООРДИНАТ

У розділі розглянуто обернену задачу термопружності, яка полягає у визначенні аналітичного вигляду стаціонарного температурного поля, яке не викликає напружень у неоднорідному довгому прямокутному брусі в умовах сталої осьової деформації, з різними умовами тепловіддачі. Пружні і теплофізичні характеристики матеріалу бруса у поперечному перерізі є довільними функціями двох координат. Визначено умови узгодження параметрів тепловіддачі і характеристик матеріалу для встановлення температурного поля, яке не викликає термонапружень, вираженого через термомеханічні характеристики матеріалу та силові навантаження. Розглянуто різні способи забезпечення такого температурного поля.

Основні результати опубліковані в працях [102, 104].

6.1. Температурні поля, які не створюють напружень у прямокутному брусі

Задачу визначення температурного поля, яке не викликає напружень у довгому прямокутному неоднорідному брусі зведено до знаходження температурних деформацій з рівнянь (2.90) – (2.93), визначення з них температурного поля, яке повинно задовольняти відповідну задачу теплопровідності. З використанням фізичних співвідношень (2.92), де $e_{zz} = \mathrm{const}$, рівнянь рівноваги (2.90) та умов (2.93) рівняння сумісності деформацій (2.91) запишемо у термінах сумарних напружень $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ і σ_{xx}:

$$\Delta\left((1+\nu)\Phi-\frac{\nu^2\sigma}{E}-\nu e_{zz}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{(1+\nu)\sigma_{xx}}{E}-\frac{\nu\sigma}{E}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\sigma}{E}-\frac{(1+\nu)\sigma_{xx}}{E}\right)=2\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}+$$

$$+2\left(F_y-\frac{\partial(\sigma-\sigma_{xx})}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)-2\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial F_x}{\partial x}+$$

$$+2\left(F_x-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)+2\left(\int_{-a}^{x}F_y dx-\right.$$

$$\left.-\int_{-a}^{x}\frac{\partial(\sigma-\sigma_{xx})}{\partial y}dx-p_2^-(y)\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right). \qquad (6.1)$$

Якщо у рівнянні (6.1) всі зовнішні силові навантаження $p_x^{\pm}(y)$, $p_y^{\pm}(x)$, $q_x^{\pm}(y)$, $q_y^{\pm}(x)$ і напруження σ, σ_{xx} прийняти рівними нулеві, то отримаємо необхідну умову відсутності напружень у вигляді

$$\Delta\Phi(x,y)=-2\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial F_x}{\partial x}+2F_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)+2F_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)+$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\int_{-a}^{x}F_y dx. \qquad (6.2)$$

Оскільки в рамках розглядуваної незв'язаної задачі термопружності масові сили F_x, F_y і температурне поле $T(x,y)$ є незалежними чинниками, то умова (6.2) зводиться до двох умов:

$$\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial F_x}{\partial x}-F_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)-F_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\int_{-a}^{x}F_y dx$$

і

$$\Delta\Phi(x,y)=0\,. \qquad (6.3)$$

Для випадку неоднорідного нетермочутливого матеріалу адитивний член $\Phi(x,y)=\alpha(x,y)t(x,y)$, де $t(x,y)=T(x,y)-T_0$ у фізичних співвідношеннях (2.92) повинен бути розв’язком рівняння Лапласа (6.3). Розв’язком рівняння (6.3) з врахуванням, що результуючі моменти в перерізі задовольняють умови рівноваги, є вираз

$$\Phi(x,y)=C\,, \tag{6.4}$$

де C – довільна стала. Як випливає з третьої із формул (2.92), вираз (6.4) є необхідною умовою сталої осьової деформації $e_{zz}=\mathrm{const}$ при відсутності напружень у поперечному перерізі бруса.

Як наслідок, температурне поле, яке зумовлює у брусі нульові напруження і одночасно забезпечує сталість поздовжніх деформацій уздовж осі Oz, має вигляд

$$t(x,y)=\frac{C}{\alpha(x,y)}. \tag{6.5}$$

Покажемо, що вираз (6.4) для додаткового (у частковому випадку температурного) поля, яке не створює напружень, є також достатньою умовою відсутності напружень. Нехай u_x, u_y – переміщення вздовж координат x, y. Після нагрівання точка з координатами (x, y) матиме нові координати $\bar{x}=x+u_x$, $\bar{y}=y+u_y$. При зміні температури, яка не викликає напружень подібний трикутник переходить у подібний. Зі зв’язків Коші між деформаціями і переміщеннями матимемо $\dfrac{\partial u_y}{\partial x}=-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ ($e_{rz}=0$), $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}$. Розглянемо поворот відносно осі перпендикулярної до xy, пов’язаний з деформацією

$$\omega_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Для двох точок A і B повинна виконуватись рівність

$$\omega_{xy}(B)-\omega_{xy}(A)=\int_A^B\left[\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y}dy\right]. \tag{6.6}$$

Врахуємо, що

$$\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \qquad (6.7)$$

Тоді вираз (6.6) з врахуванням (6.7) матиме вигляд

$$\omega_{rz}(B)-\omega_{rz}(A)=\int_A^B\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial z}d\rho\right]=\int_A^B\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds, \qquad (6.8)$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна по нормалі до дуги, яка з'єднує точки A і B. Якщо точки A і B збігаються, то вираз (6.8) запишемо

$$\oint\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds=0. \qquad (6.9)$$

$\Phi(\rho,z)=C$ – задовольняє (6.9), а тому є і достатньою умовою відсутності напружень у прямокутному стержні в умовах його сталої осьової деформації. Доведення можна подати через функції комплексної змінної. Міркування аналогічні до [148].

6.2. Встановлення температурного поля, яке не спричиняє термонапружень при заданих характеристиках матеріалу

Температурне поле $t(x,y)$ (6.5) повинно бути розв'язком задачі теплопровідності.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial x}t(x,y)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial y}t(x,y)\right]=-q_v(x,y) \qquad (6.10)$$

та умовами конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через сторони прямокутного перерізу:

$$\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial x}t(x,y)-\beta_{-a}(t(x,y)-t_{-a}(y))\right]\Bigg|_{x=-a}=0,$$

$$\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial x}t(x,y)+\beta_{a}(t(x,y)-t_{a}(y))\right]\Bigg|_{x=a}=0,$$

$$\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial y}t(x,y)-\beta_{-b}(t(x,y)-t_{-b}(x))\right]\Bigg|_{y=-b}=0,$$

$$\left[\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial y}T(x,y)+\beta_{b}(T(x,y)-T_{b}\ (x))\right]\Bigg|_{y=b}=0, \qquad (6.11)$$

де $\lambda(x,y)$ – коефіцієнт теплопровідності, β_k, t_k, $(k=\pm a,\pm b)$ – коефіцієнти теплообміну та значення температури навколишнього середовища призводить до певних умов узгодження на межі та коефіцієнтів теплообміну.

Якщо підставити (6.5) у рівняння теплопровідності (6.10), то отримаємо вираз для густини теплових джерел

$$q_v(x,y)=C\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)}\right)\right)\right).$$

Умови (6.11) конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через сторони прямокутного перерізу потрібно доповнити фізичними умовами погодження зі значеннями температури навколишнього середовища на ребрах бруса:

$$t_b(-a)=t_{-a}(b), \qquad t_b(a)=t_a(b),$$

$$t_{-b}(-a)=t_{-a}(-b), \qquad t_{-b}(a)=t_a(-b). \qquad (6.12)$$

Тут $t_{\pm a}(y)$, $t_{\pm b}(x)$ – відповідно температури на сторонах $x=\pm a$, $y=\pm b$.

Підставивши (6.5) (11) в (6.11) отримаємо співвідношення між значеннями температури зовнішнього середовища на гранях, характеристиками матеріалу та коефіцієнтами теплообміну бруса із середовищем:

$$t_{-a}(y)=C\left(-\frac{\lambda(-a,y)}{\beta_{-a}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)}\right)\Bigg|_{x=-a}+\frac{1}{\alpha(-a,y)}\right),$$

$$t_{a}(y)=C\left(\frac{\lambda(a,y)}{\beta_{a}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)}\right)\Bigg|_{x=a}+\frac{1}{\alpha(a,y)}\right),$$

$$t_{-b}(x) = C\left(-\frac{\lambda(x,-b)}{\beta_{-b}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)} \right)\Bigg|_{y=-b} + \frac{1}{\alpha(x,-b)} \right),$$

$$t_{b}(x) = C\left(\frac{\lambda(x,b)}{\beta_{b}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha(x,y)} \right)\Bigg|_{y=b} + \frac{1}{\alpha(x,b)} \right). \qquad (6.13)$$

У формулах (6.13) маємо п'ять сталих: C, $\beta_{\pm a}$, $\beta_{\pm b}$. Тому з використанням чотирьох умов погодження (6.12) температури навколишнього середовища на ребрах бруса сталу C можна визначити з будь-якої рівності (6.13), якщо задати температуру навколишнього середовища на одному з ребер, наприклад, на ребрі $(-a,-b)$, і один з коефіцієнтів теплообміну, наприклад, β_{-a}. Тоді з першої із формул (6.13) отримаємо

$$C = \frac{t_{-a}(-b)}{\dfrac{1}{\alpha(-a,-b)} - \dfrac{\lambda(-a,-b)}{\beta_{-a}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha(x,-b)} \right)\Bigg|_{x=-a}}. \qquad (6.14)$$

Відповідні вирази для коефіцієнтів теплообміну матимуть такий вигляд:

$$\beta_{-b} = \frac{\beta_{-a} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\alpha(-a,y)} \right)\Bigg|_{y=-b}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha(x,-b)} \right)\Bigg|_{x=-a}}, \qquad \beta_{b} = -\frac{\beta_{-a} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\alpha(-a,y)} \right)\Bigg|_{y=b}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha(x,b)} \right)\Bigg|_{x=-a}},$$

$$\beta_{a} = -\beta_{-a} \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\alpha(-a,y)} \right)\Bigg|_{y=-b} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha(x,-b)} \right)\Bigg|_{x=a}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\alpha(x,-b)} \right)\Bigg|_{x=-a} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\alpha(a,y)} \right)\Bigg|_{y=-b}}. \qquad (6.15)$$

З урахуванням (6.14) вираз (6.5) є розв'язком стаціонарної задачі теплопровідності (6.10), (6.11), якщо задано, наприклад, значення температури навколишнього середовища у точці $(-a,-b)$ та значення коефіцієнта теплообміну β_{-a}.

Розглянемо довгий прямокутний брус, виготовлений з двокомпонентного матеріалу, характеристики якого описуються моделлю простої суміші [347]:

$$P(x,y) = P_1(1 - S(x,y)) + P_2 S(x,y) = (P_2 - P_1)S(x,y) + P_1,$$

де P_1, P_2 – коефіцієнти лінійного теплового розширення або теплопровідності першого та другого матеріалів, $S(x,y) \in [0,1]$ – концентрація одного матеріалу в іншому. Нехай першим матеріалом є алюміній ($\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, $\lambda_1 = 204$ Вт/(м · К)), а другим – оксид цирконію ($\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, $\lambda_2 = 2.09$ Вт/(м · К)) [370]. Концентрацію матеріалу виберемо у вигляді:

$$S(x,y) = \left(\frac{0.5x + a}{2a}\right)\left(\frac{0.6y + b}{2b}\right)^3.$$

При $a = 0.1$, $b = 0.7$, $t_{-a} = 300\,\text{К}$, $\beta_{-a} = 300$ на основі (6.14), (6.15) обчислено значення: $C = 0.0085$, $\beta_a = 52.9412$, $\beta_{-b} = 82.6531$, $\beta_b = 20.6633$.

Графіки залежностей від координат концентрації одного матеріалу в іншому $S(x,y)$, розподілів температури $T(x,y)$ і густини теплових джерел $Q(x,y)$ подано на рис. 6.1 – 6.3.

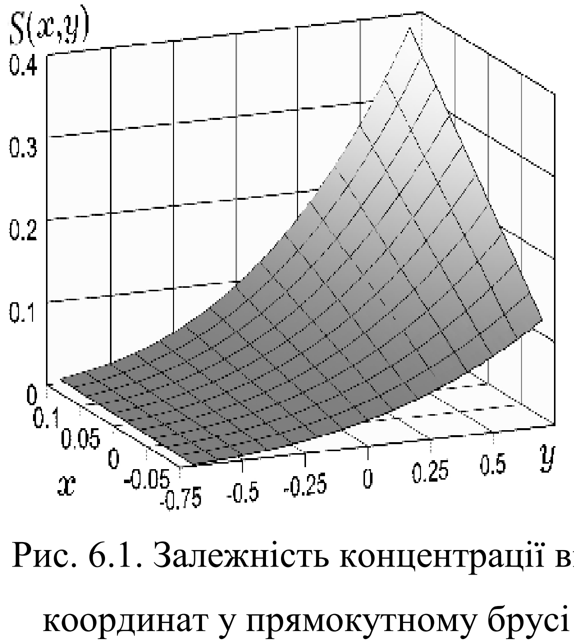


Рис. 6.1. Залежність концентрації від координат у прямокутному брусі

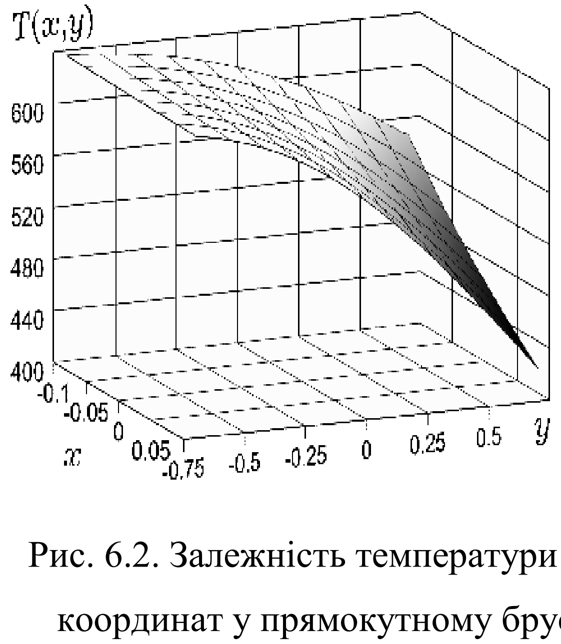


Рис. 6.2. Залежність температури від координат у прямокутному брусі

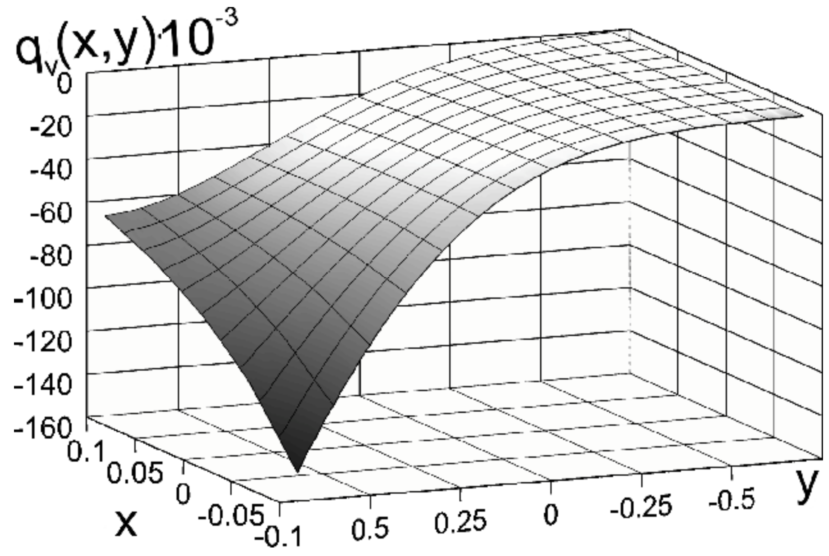


Рис. 6.3 Залежність густини теплових джерел від координат у прямокутному брусі

Як видно з рис. 6.1 – 6.3 і формули (6.5) перепад між максимальною $t_{\max}$ та мінімальною $t_{\min}$ температурами не є максимально можливим $t_{\max} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2} t_{\min}$ за рахунок вибору закону зміни концентрації одного матеріалу в іншому $S(x, y) \in [0, 0.39]$.

6.3. Забезпечення умов відсутності термонапружень характеристиками матеріалу і температурним полем

Тому що розподіл густини теплових джерел в об'ємі тіла важко здійснити технологічно, варто розглянути можливість отримання відповідного температурного поля без теплових джерел, тобто вираз для температури (6.12) повинен задовольняти однорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha(x, y)}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha(x, y)}\right)\right] = 0. \qquad (6.16)$$

з температурним полем $t = C / \alpha(x,y)$.

Це можливо, зокрема, при певному зв'язку між коефіцієнтами теплопровідності та теплового розширення, яке виражається рівнянням (6.16). Диференціальне рівняння (6.16) є рівнянням з частинними похідними першого порядку стосовно коефіцієнта теплопровідності $\lambda(x,y)$. У випадку, якщо $\alpha(x,y) = \alpha_x(x)\alpha_y(y)$ або $\dfrac{1}{\alpha(x,y)} = \dfrac{1}{\alpha_x(x)} + \dfrac{1}{\alpha_y(y)}$ методом відокремлення змінних отримано відповідно точні аналітичні вирази, які виражають зв'язки між коефіцієнтами теплопровідності та коефіцієнтом теплового лінійного розширення у вигляді:

$$\lambda(x,y) = \frac{D\exp\left(c\int\limits_{-a}^{x} \frac{1}{\alpha_x(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right)}dx\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right)\exp\left(c\int\limits_{-b_y}^{y} \frac{1}{\alpha_y(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right)}dy\right)} =$$

$$= \frac{D\exp\left(c\int\limits_{-a}^{x} \frac{1}{\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right)}dx\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right)\exp\left(c\int\limits_{-b_y}^{y} \frac{1}{\frac{d}{dy}\ln\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right)}dy\right)} \qquad (6.17))$$

або

$$\lambda(x,y) = D\exp\left(-\int\limits_{-a_x}^{x} \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right) - c}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha_x(x)}\right)} dx - \int\limits_{-b_y}^{y} \frac{\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right) + c}{\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\alpha_y(y)}\right)} dy \right), \quad (6.18)$$

де D, c – довільні сталі. Це вказує на можливість забезпечення відсутності напружень у брусі за рахунок вибору неоднорідності матеріалу з характеристиками, зв'язаними формулами (6.17), (6.18). Технологічно, однак, поки що неможливо виготовляти матеріали з довільним способом заданими різними характеристиками. Тому обмежимось при подальшому розгляді двокомпонентними матеріалами, характеристики яких описуються моделлю простої суміші [347].

$$\lambda(x,y) = \lambda_1(1 - S(x,y)) + \lambda_2 S(x,y) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)S(x,y),$$

$$\alpha(x,y) = \alpha_1(1 - S(x,y)) + \alpha_2 S(x,y) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)S(x,y). \quad (6.19)$$

Щоб визначити розподіл концентрації $S(x,y)$ однієї зі складових ФГМ у прямокутному брусі, слід характеристики функціонально-градієнтного матеріалу (6.19) підставити у рівняння теплопровідності (6.16). Тоді отримаємо таке нелінійне рівняння відносно невідомої концентрації $S(x,y)$

$$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial y^2} -$$

$$-\left\{ \frac{2\alpha_2}{\left[\alpha_1 + \alpha_{21} S(x,y)\right]} - \frac{\lambda_2}{\left[\lambda_1 + \lambda_{21} S(x,y)\right]} \right\} \left[\left(\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \quad (6.20)$$

де $\alpha_{21} = \alpha_2 - \alpha_1$, $\lambda_{21} = \lambda_2 - \lambda_1$.

До рівняння (6.20) слід додати умови теплообміну на поверхні, виражені через концентрацію з використанням виразів $t = C / \alpha(x,y)$ та (6.19). Отримаємо нелінійну крайову задачу з нелінійним рівнянням і умовами на межі для визначення невідомої концентрації $S(x,y)$. Точних аналітичних розв'язків визначити не вдалося, зокрема, вважаючи, що

$S(x,y)=S_x(x)+S_y(y)$ або $S(x,y)=S_x(x)S_y(y)$. Тому таку задачу можна розв’язувати чисельними методами.

Спробуємо все таки отримати точні аналітичні розв’язки рівняння (6.16) з виконанням подання характеристик у вигляді (6.19). Підставою для припущення існування таких розв’язків є вирази (6.17), (6.18). Тобто треба дослідити умови, які накладаються на $S(x,y)$, λ_1, λ_2, α_1, α_2, щоб коефіцієнти теплопровідності і лінійного теплового розширення можна було подати у вигляді

$$\lambda(x,y)=\lambda_1(1-S(x,y))+\lambda_2 S(x,y)=\lambda_x(x)\lambda_y(y)$$

і

$$\alpha(x,y)=\alpha_1(1-S(x,y))+\alpha_2 S(x,y)=\alpha_x(x)\alpha_y(y) \tag{6.21}$$

одночасно. Крім цього потрібно перевірити можливість створення двокомпонентних матеріалів, характеристики складових яких задовольнятимуть отриманим умовам. З рівностей (6.21) отримаємо

$$S(x,y)=\frac{\lambda_x(x)\lambda_y(y)-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \quad \text{і} \quad S(x,y)=\frac{\alpha_x(x)\alpha_y(y)-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}. \tag{6.22}$$

Якщо прирівняти праві сторони обох рівностей, то визначимо такий зв’язок між $\lambda_x(x)$, $\lambda_y(y)$, $\alpha_x(x)$, $\alpha_y(y)$

$$\lambda_x(x)\lambda_y(y)=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_x(x)\alpha_y(y)-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2+\lambda_2. \tag{6.23}$$

Ця умова може виконується, коли

$$\lambda_2-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2=0$$

або

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{6.24}$$

Концентрація $S(x,y)$ повинна задовольняти умову $S(x,y)\in[0,1]$. Тому

$$\lambda_x(x)\lambda_y(y)\in[\lambda_1,\lambda_2],\text{ якщо } \lambda_1>\lambda_2,$$

$$\lambda_x(x)\lambda_y(y)\in[\lambda_2,\lambda_1],\text{ якщо } \lambda_1<\lambda_2. \quad (6.25)$$

Аналогічні умови для $\alpha_x(x)$, $\alpha_y(y)$ на основі (6.22), (6.23) мають вигляд

$$\alpha_x(x)\alpha_y(y)\in\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2\right],\text{ якщо } \lambda_1>\lambda_2,$$

$$\alpha_x(x)\alpha_y(y)\in\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1\right],\text{ якщо } \lambda_1<\lambda_2. \quad (6.26)$$

У нашій задачі заданий коефіцієнт лінійного теплового розширення, отже повинні виконуватись умови

$$\alpha_x(x)\alpha_y(y)\in[\alpha_1,\alpha_2],\text{ якщо } \alpha_1>\alpha_2,$$

$$\alpha_x(x)\alpha_y(y)\in[\alpha_2,\alpha_1],\text{ якщо } \alpha_1<\alpha_2. \quad (6.27)$$

і

$$\lambda_x(x)\lambda_y(y)\in\left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2\right],\text{ якщо } \alpha_1>\alpha_2,$$

$$\lambda_x(x)\lambda_y(y)\in\left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1\right],\text{ якщо } \alpha_1<\alpha_2.$$

Умови щодо коефіцієнтів лінійного розширення компонент ФГМ α_1, α_2 визначають відповідно до величин λ_1, λ_2 з формули (6.26).

Аналоги формули (6.23), якщо задані коефіцієнти теплопровідності матимуть вигляд

$$\alpha_x(x)\alpha_y(y)=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_x(x)\lambda_y(y)-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2+\alpha_2. \quad (6.28)$$

Отже вираз для температури у ФГМ, характеристики якого описуються моделлю простої суміші, подамо як

$$t(x,y)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_x(x)\lambda_y(y)}=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda(x,y)}. \qquad (6.29)$$

Вираз (6.29) – це точний аналітичний розв'язок задачі теплопровідності відносно коефіцієнта теплопровідності, який дозволяє визначити відповідний коефіцієнт теплового лінійного розширення.

Подальші дії для отримання розподілу концентрації, на основі якого визначають температурне поле і характеристики матеріалу, мають таку послідовність:

- вираз (6.29) потрібно підставити у рівняння теплопровідності, яке стане нелінійним рівнянням відносно коефіцієнта теплопровідності і отримати його точний розв'язок;
- отриманий розв'язок підставити в умови на межах і узгодження температури на ребрах;
- з умов на межах і узгодження значень температури на ребрах узгодити функції, які описують зовнішні впливи та характеристики реально існуючих матеріалів (через визначення сталих і функцій в отриманому розв'язку відносно коефіцієнта теплопровідності, зокрема перевірити наявність матеріалів для компонент яких виконується умова (6.24);
- підставити отримані вирази для коефіцієнта теплопровідності і визначених сталих у формули (6.22) для визначення розподілу концентрації, умов на межах, характеристики матеріалу.

Для визначення характеристик матеріалів потрібно розв'язати однорідне рівняння теплопровідності (6.10), яке задовольняє умови на межах. Розв'язок рівняння теплопровідності відносно коефіцієнта теплопровідності у випадку $t(x,y)=t_x(x)t_y(y)$ є

$$\lambda(x,y)=\lambda_x(x)\lambda_y(y)=C_3\exp(\frac{1}{2}cx^2+C_1x)\exp(-\frac{1}{2}cy^2+C_2y)$$

Цей розв'язок можна подати після виділення повного квадрату, не порушуючи загальності, у вигляді, зручнішому для практичного використання

$$\lambda(x,y)=\lambda_x(x)\lambda_y(y)=C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right]. \quad (6.30)$$

Розглянемо задачу теплопровідності при заданих розподілах температури на поверхнях.

$$t(-a,y)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_x(-a)\lambda_y(y)}=t_{-a}(y),$$

$$t(a,y)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_x(a)\lambda_y(y)}=t_a(y),$$

$$t(x,-b)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_x(x)\lambda_y(-b)}=t_{-b}(x),$$

$$t(x,b)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_x(x)\lambda_y(b)}=t_b(x), \quad (6.31)$$

Завдання – визначити коефіцієнт теплопровідності і такі чотири функції $t_{\pm a}(y)$, $t_{\pm b}(x)$, щоб задача (6.16), (6.30), (6.31) мала непорожню множину фізично обґрунтованих розв'язків. Під фізично обґрунтованими розв'язками розумітимемо такі, як узгоджуються з відомими законами термодинаміки. Якщо підставити (6.30) у (6.31), то отримаємо

$$t(-a,y)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(-a+C_1)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right]}=t_{-a}(y),$$

$$t(a,y)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(a+C_1)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right]}=t_a(y),$$

$$t(x,-b)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}c(-b+C_2)^2\right]}=t_{-b}(x),$$

$$t(x,b)=\frac{C(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}c(b+C_2)^2\right]}=t_b(x). \quad (6.32)$$

Є 4 умови (6.32) і рівності температур середовища на ребрах бруса (умови узгодження):

$$t_{-a}(-b)=t_{-b}(-a),\ \ t_{-a}(b)=t_b(-a),\ t_a(b)=t_b(a),\ \ t_{-b}(a)=t_a(-b). \quad (6.33)$$

У випадку залежностей характеристик матеріалу та температурного поля від двох координат – умови узгодження на ребрах бруса описуються рівністю температур середовища у вершинах прямокутника. З умов на межах прямокутного бруса (6.32), виражених через коефіцієнт теплопровідності видно, що умови (6.33) (G.7.35) задовольняються. Це легко перевірити записом цих умов при значеннях $x=\pm a$, $y=\pm b$. Отже, це означає, що потрібні розподіли температури на межах мусять бути пропорційним до експонент

$$t_{-a}(y)\sim\exp\left[\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right] \text{ і } \ t_a(y)\sim\exp\left[\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right],$$

$$t_{-b}(x)\sim\exp\left[\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right] \text{ і } \ t_b(x)\sim\exp\left[\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right]. \quad (6.34)$$

Отже, слід визначити такі чотири функції $t_{\pm a}(y)$, $t_{\pm b}(x)$ на межових поверхнях, щоб задача (6.30), (6.31) мала непорожню множину фізично обґрунтованих розв’язків і визначити відповідні сталі C, C_3, c, C_1, C_2, які б забезпечували виконання природної умови $\lambda_1\le\lambda(x,y)\le\lambda_2$, яка відображає факт, що коефіцієнт теплопровідності будь якого матеріалу є у наперед заданих фіксованих межах.

З формул (6.32) можна визначити сталі C_1, C_2 якщо попарно поділити рівності (6.32) одна на одну. Тоді отримаємо

$$\frac{t_{-a}(y)}{t_a(y)}=\exp(2aC_1),\quad \frac{t_{-b}(x)}{t_b(x)}=\exp(2bC_2), \quad (6.35))$$

звідки

$$C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{-a}(y)}{t_a(y)}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{t_{-b}(x)}{t_b(x)}\right). \tag{6.36}$$

З виразів (6.36) для постійних C_1 і C_2 випливає, що ці постійні не залежать від змінних x, y, якщо $x \in [-a,a]$ і $y \in [-b,b]$. Отже для визначення C_1 і C_2 можна взяти довільну точку $M(x_0, y_0)$ з координатами $x_0 \in [-a,a]$ і $y_0 \in [-b,b]$. Залишається питання вибору точки $M(x_0, y_0)$. Вибір цієї точки пов'язаний з природними або технологічними обмеженнями на можливі допустимі значеннями температури, а отже відповідно до (6.31) значень коефіцієнта теплопровідності у прямокутному перерізі бруса, на що відповідно до (6.30) впливає значення сталої c. Можливі два випадки: 1) найбільші і найменші значення коефіцієнта теплопровідності (температури) на поверхнях досягаються у кутових точках прямокутного перерізу неоднорідного бруса; 2) найбільші і найменші значення коефіцієнта теплопровідності (температури) знаходяться на гранях прямокутної області перерізу бруса.

Розглянемо випадок 1). З формули (6.29) і обмежень $\lambda_1 \le \lambda(x,y) \le \lambda_2$ отримаємо

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = C_\lambda. \quad t_{\max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_{\min} = C_\lambda t_{\min}. \tag{6.37}$$

За відомим алгоритмом визначення найбільших і найменших значень [70] коефіцієнт теплопровідності (6.30) та розподіл температури (6.32) не досягають екстремуму. Тому що критична точка є поза областю бруса, максимальні значення функцій двох змінних, екстремум може досягатися або в критичній точці або на границі. Отже найбільші та найменші значення повинні знаходитись на ребрах бруса. Це означає що можна вибрати, наприклад, точки $(-a,-b)$ і (a,b), в яких теплоємність приймає найменше (температура відповідно до (6.29) найбільше) і найбільше (температура відповідно до (6.29) найменше значення. Тоді з використанням (6.33) маємо:

$$C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{-a}(-b)}{t_a(-b)}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{-a}(b)}{t_a(b)}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{t_{-a}(-b)}{t_{-a}(b)}\right) \tag{6.38a}$$

або

$$C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{-b}(-a)}{t_{-b}(a)}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{t_{-b}(-a)}{t_b(-a)}\right) = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{t_{-b}(a)}{t_b(a)}\right), \tag{6.38b}$$

звідки

$$\frac{t_{-b}(-a)}{t_b(-a)} = \frac{t_{-b}(a)}{t_b(a)}, \qquad \frac{t_{-a}(-b)}{t_a(-b)} = \frac{t_{-a}(b)}{t_a(b)}. \tag{6.39}$$

Для визначення можливих значень сталої c слід дослідити $t(x,y)$ або відповідно до (6.30) $\lambda(x,y)$ на найбільше або найменше значення. Критичною точкою є $M(x_e, y_e)$, $x_e = -\frac{C_1}{c}$, $y_e = \frac{C_2}{c}$. Отже для побудови множини допустимих розв'язків задачі:

1. задаємо значення температур у вершинах прямокутника, для яких виконуються умови (6.31) та умови рівності температур у вершинах (6.12).
2. Визначаємо сталі C_1 і C_2 з виразів (6.38).
3. Вибираємо довільну сталу c, яка задовольняє умову $c \notin \left\{(x,y) \middle| x \in [-a,a], y \in [-b,b]\right\}$
4. Визначаємо сталу C_3, яка дозволяє отримані результати для коефіцієнта теплопровідності помістити в інтервал $[\lambda_1, \lambda_2]$. Можна змінювати коефіцієнт C для дослідження різних інтервалів температур.

Розглянемо випадок, коли найбільше значення темпеартури досяшаться на ребрах. Візьмемо матеріали, характеристик яких поданих у табл. 6.1, виконуються умови існування аналітичного розв'язку $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = C_\lambda$

Таблиця 6.1

Характеристики складових ФГМ (кераміка на основі Al_2O_3

та нержавіюча сталь, [308, 328])

Матеріал	Коефіцієнт теплопровідності [Вт/(м·K)]	Коефіцієнт лінійного температурного розширення [1/K]
Кераміка на основі оксиду алюмінію A482R	8	$7.5 \cdot 10^{-6}$
Нержавіюча сталь S30215	19.4	$18 \cdot 10^{-6}$

Задамо мінімальну температуру $t_{\min}$. Тоді для заданих характеристик матеріалу $t_{\max} = C_\lambda\, t_{\min} = 2.42\, t_{\min}$. Нехай $t_{\min} = t(-a,-b)$, $t_{\max} = t(a,b)$, або $\lambda_2 = \lambda(-a,-b)$, $\lambda_1 = \lambda(a,b)$.

Для сталих C_1 і C_2 отримаємо вирази

$$C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{\min}}{t_a(-b)}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t_{-a}(b)}{t_{\max}}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{t_{\min}}{t_{-a}(b)}\right),$$

звідки $t_a(-b)t_{-a}(b) = C_\lambda t_{\min}^2$. Нехай $t_a(-b) = kt_{\min}$ $(1 \le k \le C_\lambda)$, тоді

$$kt_{\min}t_{-a}(b) = C_\lambda t_{\min}^2, \quad t_b(-a) = t_{-a}(b) = \frac{C_\lambda}{k}t_{\min} = \frac{t_{\max}}{k}.$$

Використовуючи вирази (6.38) матимемо.

$$C_2 = \frac{1}{2b}\ln\left(\frac{1}{k}\right), \qquad C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left(k\frac{t_{\min}}{t_{\max}}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{k}{C_\lambda}\right). \tag{6.40}$$

Покладемо $a = 0.01$, $b = 0.04$, $k = 1.5$, $t_{\min} = 300$.

Встановимо такі можливі значення c, при яких заданий розподіл температур на ребрах бруса не має локальних екстремумів, тобто ті значення c, для яких виконується одночасно $-C_1/c \notin [-a,a]$ і $C_2/c \notin [-b,b]$. Прості обчислення показують, що $|c| < 126.707$ є такою умовою. Покладемо $c = -126.70$. Результати обчислень для коефіцієнта теплопровідності, концентрації, температури в брусі і умов нагрівання на гранях є такі: $t_{-a}(b) = t_b(-a) = k \cdot t_{\min}$=450.0, $C_\lambda = 2.425$, $t_{\max} = 727.5$, $C_1 = -24.01832082$, $C_2 = -5.068313850$, $t_a(-b) = t_{-b}(a) = 485.0$, $\lambda_{\min} = \lambda_1 = 8$, $\lambda_{\max} = \lambda_2 = 19.4$, $\lambda_a(-b) = \lambda_{-b}(a) = 12.0$, $\lambda_{-a}(b) = \lambda_b(-a) = 12.933$. Відповідні розподіли температури і концентрації подані на рис. 6.4, 6.5.

Розглянемо наступний приклад, який відрізняється від попереднього значенням $k = C_\lambda$. Тоді отримаємо $t_{-a}(b) = t_b(-a) = k \cdot t_{\min}$=727.5, $C_\lambda = 2.425$, $t_{\max} = 727.5$, $C_1 = 0$, $C_2 = -11.07289406$, $t_a(-b) = t_{-b}(a) = 300.0$, $\lambda_{\min} = \lambda_1 = 8$, $\lambda_{\max} = \lambda_2 = 19.4$, $\lambda_a(-b) = \lambda_{-b}(a) = 19.4$, $\lambda_{-a}(b) = \lambda_b(-a) = 8.0$, $c = 0$. Відповідні розподіли температури і концентрації подані на рис. 6.6, 6.7.

На рис. 6.8, 6.9 суцільні лінії відповідають $k = 1.5$, а штрихові – $k = C_\lambda$.

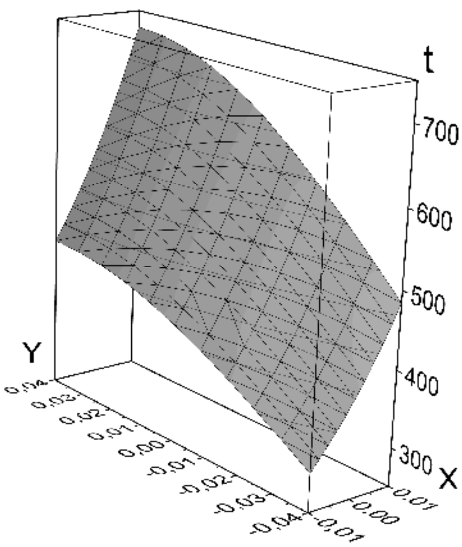


Рис. 6.4. Температурне поле, яке не призводить до напружень (k=1.5)

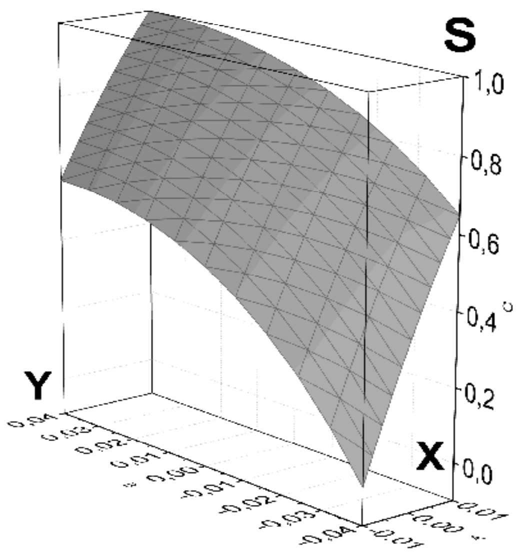


Рис. 6.5. Розподіл концентрації другого матеріалу в першому, який призводить до температурного поля на рис. 6.4 ($k = 1.5$)

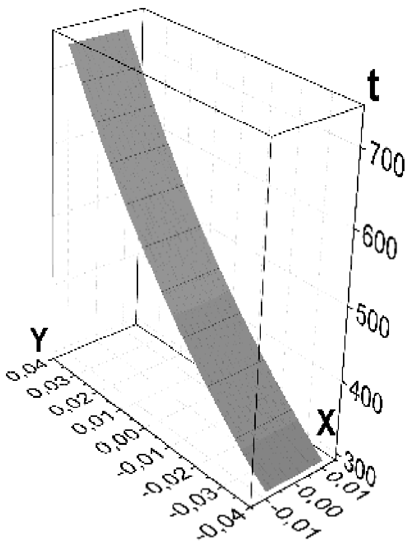


Рис. 6.6. Температурне поле, яке не призводить до напружень ($k = C_\lambda = 2.425$)

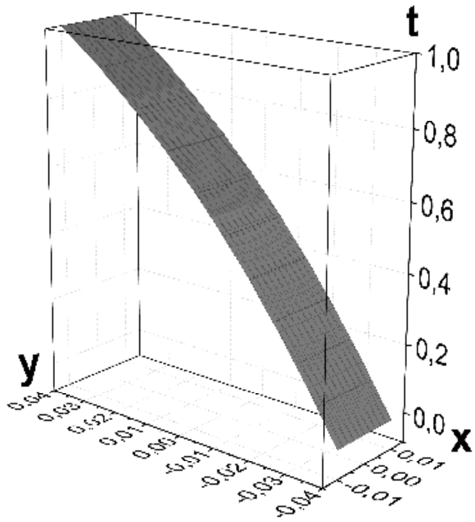


Рис. 6.7. Розподіл концентрації другого матеріалу в першому, який призводить до температурного поля на рис. 6.6 ($k = C_\lambda = 2.425$)

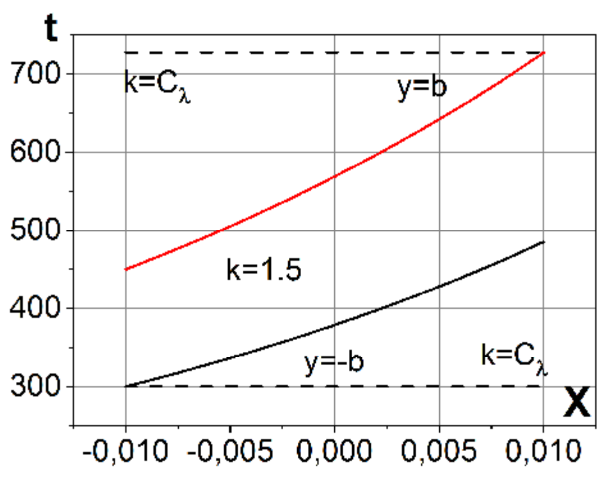


Рис. 6.8. Розподіл температури на межах $y = \pm b$.

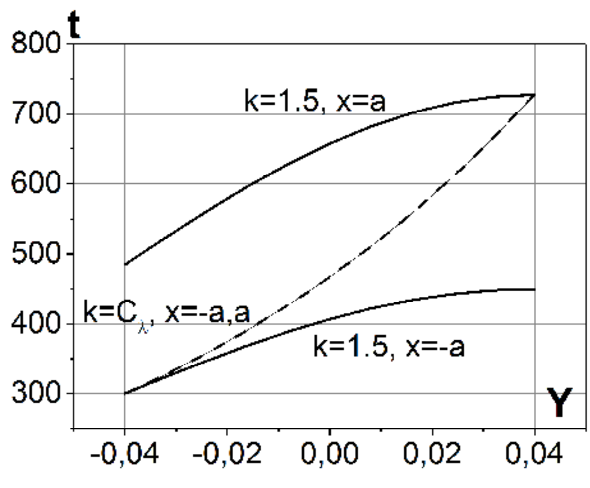


Рис. 6.9. Розподіл температури на межах $x = \pm a$.

Розглянемо випадок, коли найбільші і найменші значення коефіцієнта теплопровідності (температури) знаходиться на гранях прямокутної області бруса. Позначимо через ($x_{\min}, y_{\min}$) та ($x_{\max}, y_{\max}$) координати точок, в яких коефіцієнт теплопровідності приймає найменші та найбільші значення, інакше

$$\lambda(x_{\min}, y_{\min}) = \lambda_1, \quad \lambda(x_{\max}, y_{\max}) = \lambda_2. \tag{6.41}$$

Задамо значення температури на одній з граней. Нехай задана функція $t_{-a}(y)$.

$$t_{-a}(y) = B\exp\left[\frac{1}{2}c(y + C_2)^2\right], \tag{6.42}$$

де

$$B = \frac{C}{C_3 \exp\left[\frac{1}{2}c(-a + C_1)^2\right]}. \tag{6.43}$$

Отже сталі c та C_2 – відомі, і $C_2 \in [-b, b]$. Якщо $c > 0$ відоме, то $(t_{-a}(-C_2) = t_{-a\max})$, якщо $c < 0$, то $(t_{-a}(-C_2) = t_{-a\min}$ якщо $C_2 > 0$, і $t_{-a}(C_2) = t_{-a\min}$, якщо $C_2 < 0$. Перевіримо, чи $\dfrac{t_{-a\max}}{t_{-a\min}} \le C_\lambda$. Якщо ця нерівність виконується, то потрібно змінити значення c і C_2.

Отже, якщо $c > 0$ температура приймає на $\pm a$ мінімальне значення, а на $\pm b$ максимальне. Якщо $c < 0$, то температура приймає на $\pm a$ максимальне значення, а на $\pm b$ мінімальне. З (6.34), умов рівності температур на ребрах (6.8) та виразу (6.35) отримуємо

$$\frac{t_{-a}(-b)}{t_{-a}(b)} = \exp(2aC_1) \text{ звідки } \exp(2bC_2) = \exp(2aC_1), \tag{6.44}$$

звідки

$$C_1 = C_2\frac{b}{a}. \tag{6.45}$$

Отже сталі C_1, C_2 мають однакові знаки, бо $a > 0$, $b > 0$. Можна встановити обмеження на сталі c, C_2, які випливають з обмеження на $\lambda(x, y) \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Вважатимемо, що $c > 0$ і $C_1 \in [-a, a]$, $C_2 \in [-b, b]$. Тоді на основі виразу (6.30) для коефіцієнтів теплопровідності маємо

$$\lambda_{\min} = \lambda(-C_1, b) = C_3 \exp\left[-\frac{1}{2}c(b + C_2)^2\right] < \lambda_1,$$
$$\lambda_{\max} = \lambda(a, -C_2) = C_3 \exp\left[\frac{1}{2}c(a + C_1)^2\right] < \lambda_2. \quad (6.46)$$

З умови $\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ отримаємо

$$0 < c \le \frac{2}{\left[(a + C_1)^2 + (b + C_2)^2\right]} \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (6.47)$$

Розглянемо приклад, коли характеристики складових задано у табл. 6.1, $a = 2$, $b = 6$, $C_2 = 0.5$. В результаті обчислень на основі (6.44), (6.45), (6.47) отримаємо $C_1 = 1.5$, $c \le 0.03250757888$. $C_3 = 15.89753627$ при $c = 0.03250757888$ (відповідає $\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$). На рис. 6.10 –6.12 зображені залежності концентрації, коефіцієнта теплопровідності температури при $C = 5000$ від координат бруса

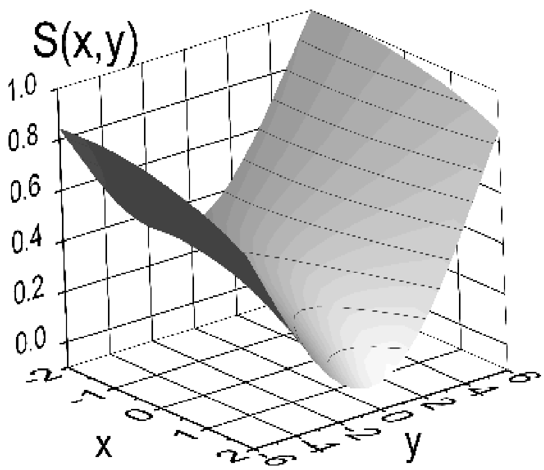


Рис. 6.10. Залежність концентрації оксиду алюмінію від координат, яка призводить до температурного поля, яке не створює термонапружень у брусі

. Характеристики взяті для реально існуючих матеріалів (оксид алюмінію, сталь, для яких виконується рівність $\lambda_1 / \lambda_2 = \alpha_1 / \alpha_2$).

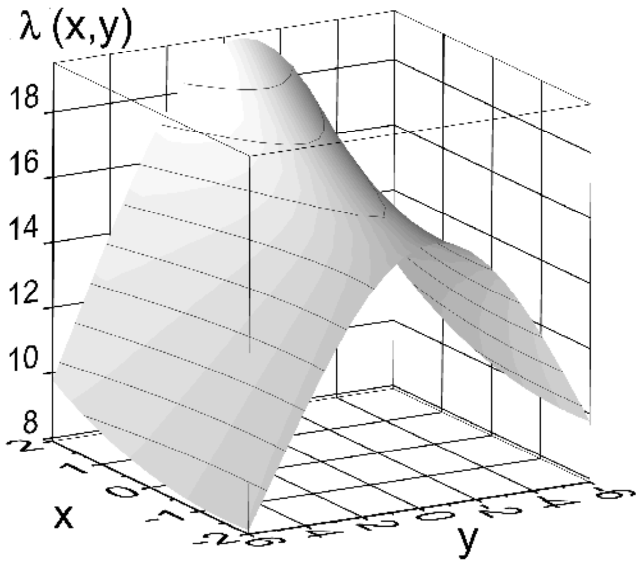


Рис. 6.11. Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат, яка призводить до температурного поля, яке не створює термонапружень у брусі

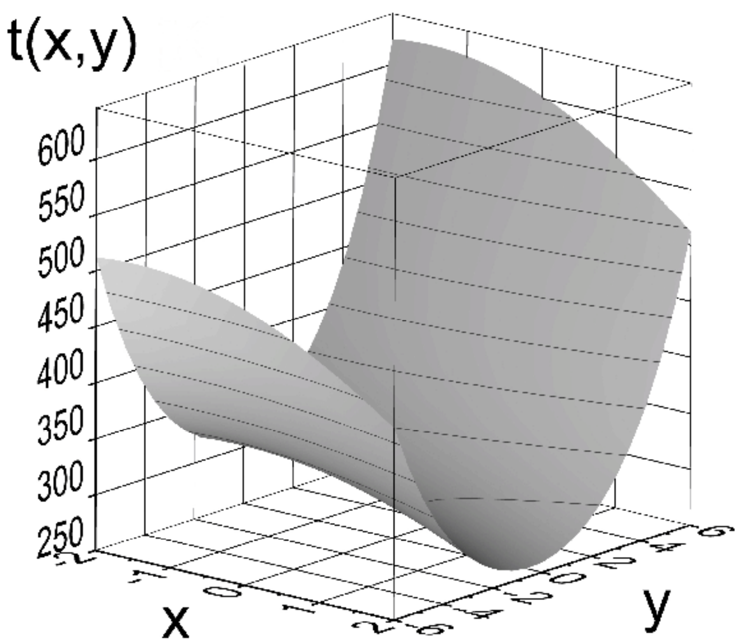


Рис. 6.12. Температурне поле, яке не викликає термонапружень у брусі

Розглянемо випадок конвективного теплообміну. У цьому випадку умови теплообміну мають вигляд (2.95). Якщо підставити у них вираз для температури $t(x,y)=\dfrac{C}{\lambda(x,y)}$, то отримаємо такі умови на межах відносно коефіцієнта теплопровідності $\lambda(x,y)$:

$$\frac{Cc(-a+C_1)}{\beta_{-a}}+\frac{C}{\lambda(-a,y)}=t_{-a}(y),$$

$$-\frac{Cc(a+C_1)}{\beta_a}+\frac{C}{\lambda(a,y)}=t_a(y),$$

$$-\frac{Cc(-b+C_2)}{\beta_{-b}}+\frac{C}{\lambda(x,-b)}=t_{-b}(x),$$

$$\frac{Cc(b+C_2)}{\beta_b}+\frac{C}{\lambda(x,b)}=t_b(x). \qquad (6.48)$$

З умов рівності температур (6.33) навколишнього середовища на ребрах бруса отримаємо такі зв'язки між коефіцієнтами теплообміну

$$\frac{\beta_{-b}}{\beta_{-a}}=-\frac{(-b+C_2)}{(-a+C_1)}, \qquad \frac{\beta_b}{\beta_{-a}}=-\frac{(b+C_2)}{(-a+C_1)},$$

$$\frac{\beta_b}{\beta_a}=-\frac{(b+C_2)}{(a+C_1)}, \qquad \frac{\beta_{-b}}{\beta_a}=-\frac{(-b+C_2)}{(a+C_1)}. \qquad (6.49)$$

З умов (6.48) видно, що температура оточуючого середовища на поверхнях $x=\pm a$ повинна мати вигляд

$$t_{\pm a}=t_{-a}(y)=A_{\pm a}\exp\left[\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right]+B_{\pm a}\ , \qquad (6.50)$$

де

$$A_{\pm a}=\frac{C}{C_3}\exp\left[-\frac{1}{2}c(\pm a+C_1)^2\right], \qquad B_{\pm a}=-\frac{Cc(\pm a+C_1)}{\beta_{\pm a}}, \qquad (6.51)$$

а на поверхнях $y=\pm b$ –

$$t_{\pm b}(x)=A_{\pm b}\exp\left[-\frac{1}{2}c(x+C_1)^2\right]+B_{\pm b}, \qquad (6.52)$$

де

$$A_{\pm b}=\frac{C}{C_3}\exp\left[\frac{1}{2}c(\pm b+C_2)^2\right],\;\; B_{\pm b}=\frac{Cc(\pm b+C_2)}{\beta_{\pm b}}. \qquad (6.53)$$

Задамо температуру зовнішнього середовища, не порушуючи загальності, на поверхні $x=-a$ коефіцієнт теплообміну β_{-a}. і $c>0$. Завданням буде визначення температурного поля та характеристик двокомпонентного функційно-градуйованого матеріалу, які забезпечують відсутність термонапружень. Найбільше і найменше значення температури досягатиметься на гранях бруса, що слідує з аналізу функцій двох змінних на екстремум [70]. Розглянемо складніший випадок, коли $C_2\in[-b,b]$, тобто, коли коефіцієнт теплопровідності приймає найбільше (температура – найменше) значення на поверхнях $x=\pm a$ у точці $y=-C_2$.

Задаємо $t_{-a}(y)=A_{-a}\exp\left[\frac{1}{2}c(y+C_2)^2\right]+B_{-a}$, тобто c, C_2, A_{-a}, B_{-a}, β_{-a}. Потрібно визначити C_1, C_3, C, β_a, β_{-b}, β_b. На основі цих сталих з умов на межах, рівності температур на перетині граней, виразу для концентрації одного матеріалу в іншому (6.21), визначаємо на основі формул (6.30), $t(x,y)=C/\lambda(x,y)$, (6.21) температури середовища на гранях, розподіли температури, коефіцієнтів теплопровідності, теплового лінійного розширення, концентрації одного з матеріалів у неоднорідному брусі. Врахуємо, що A_{-a}, B_{-a} є додатними.

Послідовність обчислень є такою. Запишемо першу з умов на межі (F48) у точці $(-a,-C_2)$ з врахуванням, що

$$\lambda(-a,-C_2)=C_3\exp\left[\frac{1}{2}c(-a+C_1)^2\right]=\lambda_2. \qquad (6.54)$$

Дістанемо

$$t_{-a}(-C_2)=A_{-a}+B_{-a}=\frac{C}{\lambda_2}+B_{-a},\text{ звідки } C=\lambda_2 A_{-a}. \qquad (6.55)$$

З виразу (6.51) отримаємо вираз для C_1

$$C_1 = -\frac{\beta_{-a} B_{-a}}{cC} + a\,. \tag{6.56}$$

З формули (6.54) маємо

$$C_3 = \lambda_2 \exp\left[-\frac{1}{2}c(-a + C_1)^2\right]. \tag{6.57}$$

Обчислюємо $\lambda(a,-C_2)$. Якщо $\lambda(a,-C_2) < \lambda_2$, то переходимо до наступного пункту. Якщо ні, то обчислюємо сталі C_1, C_3 за таким алгоритмом. Зауважимо, що у випадку $\lambda(a,-C_2) > \lambda_2$ значення λ_2 досягається у точці $(a,-C_2)$. З (6.51) (6.11а) почленним діленням з використанням (6.49) (ВС.4) отримаємо

$$\frac{B_a}{B_{-a}} = -\frac{(a + C_1)\beta_{-a}}{(-a + C_1)\beta_a} = 1, \quad \frac{A_a}{A_{-a}} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}c(a + C_1)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}c(-a + C_1)^2\right]} = \exp(-2caC_1)\,. \tag{6.58}$$

Це робить можливим виразити температуру середовища на поверхні $x = a$ через коефіцієнти A_{-a}, B_{-a}

$$t_a(y) = A_{-a} \exp(-2caC_1) \exp\left[\frac{1}{2}c(y + C_2)^2\right] + B_{-a}\,. \tag{6.59}$$

З (6.59) отримаємо

$$t_a(-C_2) = A_{-a} \exp(-2caC_1) + B_{-a}\,,$$

Звідки з використанням другої умови (6.10) та (6.12) отримаємо таку систему рівнянь для визначення C, C_1 :

$$\begin{cases} C = \lambda_2 A_{-a} \exp(-2caC_1) \\ \dfrac{Cc(-a + C_1)}{\beta_{-a}} = B_{-a} \end{cases} \tag{6.60}$$

Розв’язками її є

$$C = -2a^2 c + W_L\left(-\frac{2\beta_{-a}\exp(2a^2 c)}{\lambda_2 A_{-a}}\right), \quad C_1 = a + \frac{\beta_{-a} B_{-a}}{Cc}\,, \tag{6.61}$$

де $W_L(z)$ – W або Ω функції Лямберта [248].

Обчислюємо $\lambda(x,y)$, β_a, β_{-b}, β_b, $t(x,y)$, $S(x,y)$, $t_{-a}(y)$, $t_a(y)$, $t_{-b}(x)$, $t_b(x)$.

Розглянемо числові приклади. Характеристики складових візьмемо з табл. 6..1. Покладемо $a=2$, $b=6$, $C_2=0.5$, $c=-0.03$, $A_{-a}=200$, $B_{-a}=3$, $\beta_{-a}=30$. Обчислені дані за формулами (6.54) – (6.61): $C=2058.721489$, $C_1=2.100679372$, $C_3=10.29517266$, $\beta_{-b}=113.2296819$, $\beta_b=133.8168968$, $\beta_a=112.3488596$. На рис. 6.13 – 6.16 подані розподіли концентрації складових матеріалу, коефіцієнта теплопровідності, температури, які не викликають напружень у брусі, обчислені за формулами (6.54) – (6.61).

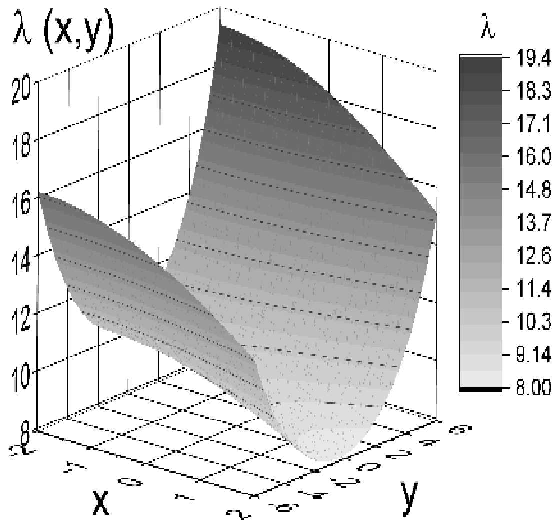


Рис. 6.13. Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат

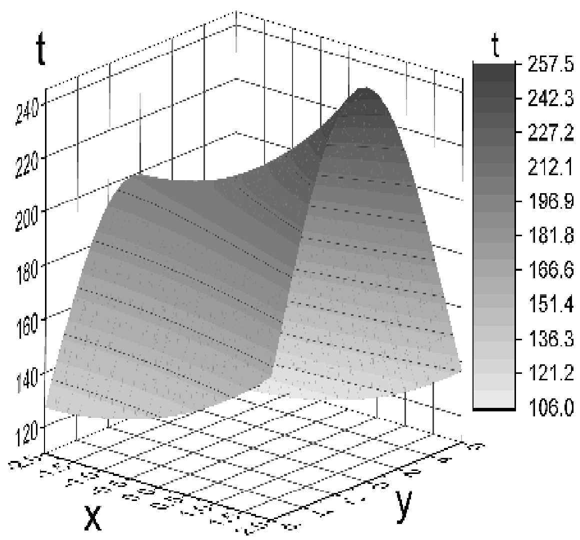


Рис. 6.14. Залежність температури від координат

На рис. 6.16 суцільними лініями позначено значення температури у брусі на поверхнях $x=\pm a$ та $y=\pm b$. Штриховані лінії відповідають значенням температури середовища на відповідних гранях. З рисунків видно, що розрахункові температури на перетині граней бруса однакові.

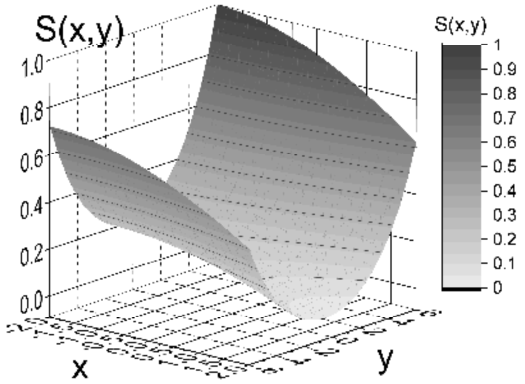


Рис. 6.15. Залежність концентрації від координат

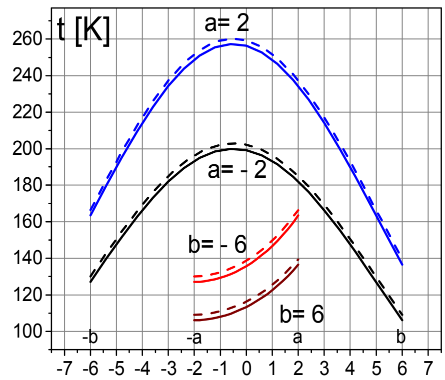


Рис. 6.16. Розподіли температури середовища і температури в брусі на поверхнях

Розглянемо числовий приклад для такого самого бруса з такими параметрами: $c = 0.017$, $A_{-a} = 200$, $B_{-a} = 3$, $\beta_{-a} = 30$ [Вт/(м^2·К)], $C_2 = 3.5$. Обчислені дані:, $\beta_{-b} = 48.8141591$ [Вт/(м^2·К)], $\beta_b = 185.4938046$ [Вт/(м^2·К)], $\beta_a = 48.10265457$ [Вт/(м^2·К)], $C = 3445.705349$, $C_1 = 1.745684184$, $C_3 = 17.21905795$. Це означає, що існують області стійкості поставлених задач. Відповідні результати зображені на рис. 6.17 –6.20. На рис. 6.20 суцільними лініями позначено значення температури у брусі на поверхнях $x = \pm a$ та $y = \pm b$.

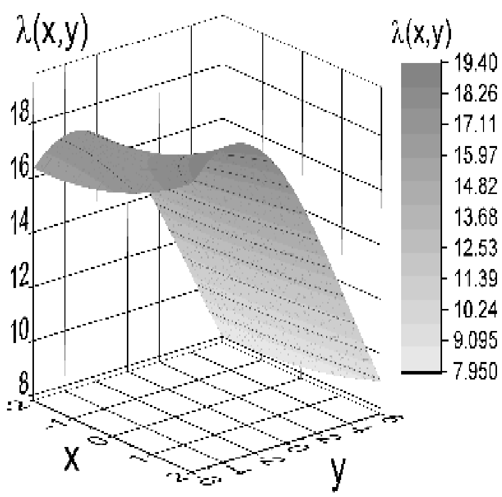


Рис. 6.17. Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат

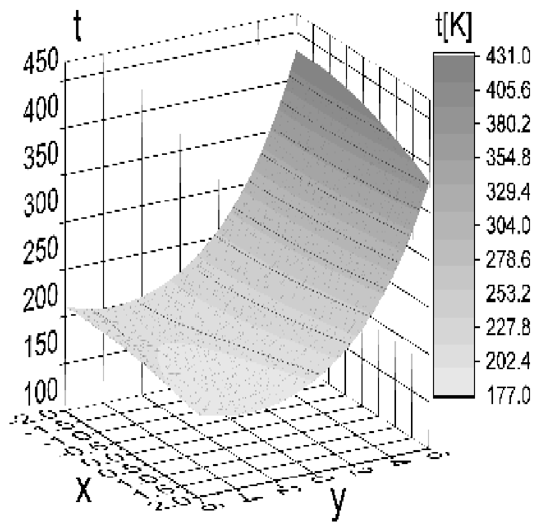


Рис. 6.18. Залежність температури від координат

Штриховані лінії відповідають значенням температури середовища на відповідних гранях.

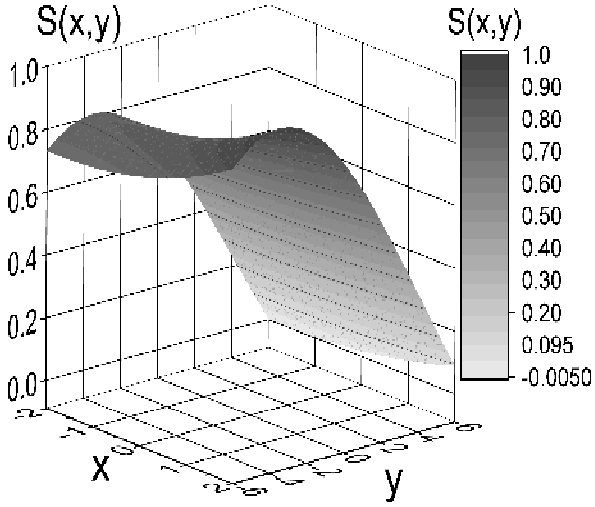


Рис. 6.19. Залежність концентрації від координат

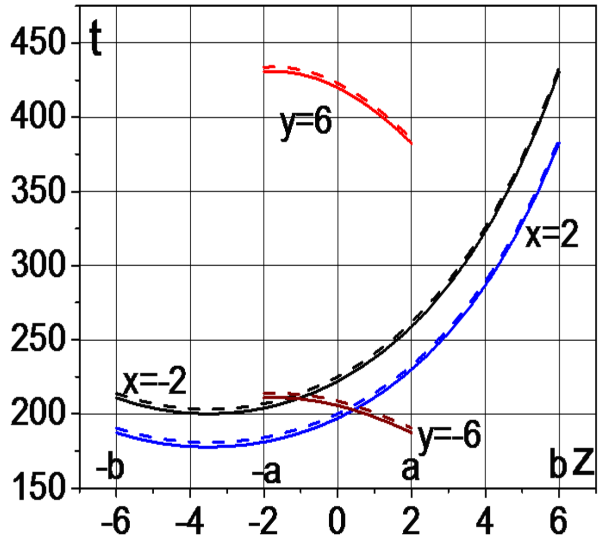


Рис. 6.20. Розподіли температури середовища і температури в брусі на поверхнях

З графіків видно, що розрахункові невеликі зміни вхідних параметрів призводять до невеликих змін у розрахункових даних.

6.4. Висновки

Отримано необхідну і достатню умову, яку повинно задовольняти зовнішнє поле, щоб не спричинювати напружень у довгому прямокутному брусі та забезпечити сталу поздовжню деформацію, коли характеристики матеріалу залежать від двох координат у поперечному перерізі, а деформації, викликані зовнішнім полем, описуються доданком у зв’язках між компонентами тензорів деформації і напружень.

Ці результати застосовано для визначення температурного поля, яке не викликає напружень у брусі при конвективному теплообміні з навколишнім середовищем. Вираз для температурного поля, отриманий з умови відсутності напружень, містить одну довільну сталу і повинен бути розв’язком рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами та задовольняти умови на межі. Тому ці умови та густини теплових джерел повинні бути узгоджені.

Показано, що при додаткових зв’язках між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення можна досягнути відсутності напружень у прямокутному неоднорідному брусі без теплових джерел. Вираз, який пов’язує ці коефіцієнти, можна записати точно у випадку, коли коефіцієнт лінійного теплового розширення подано добутком функцій окремих змінних або обернену до цього коефіцієнта величину – сумою обернених величин від функцій кожної зі змінних.

Показано, що функції розподілу температури всередині бруса та температури зовнішнього середовища на поверхні бруса, виготовленого з ФГМ, характеристики якого відповідають моделі простої двокомпонентної суміші, у випадку відсутності об’ємних теплових джерел виражаються через функції нормального розподілу Ґауса. Характеристики ФГМ виражаються тоді також через функції нормального розподілу Ґауса.

Встановлено, що умовою існування аналітичних розв’язків запропонованих у праці рівнянь, які пов’язують характеристики складових ФГМ, є постійність відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення та коефіцієнтів теплопровідності.

Отримано аналітичні вирази для характеристик матеріалів, які дозволяють встановити температурні поля, які не викликають напружень, для випадку відсутності теплових джерел всередині бруса, якщо задане температурне поле на одній з поверхонь при різних класичних умовах на межі.

Обчислені коефіцієнти теплопровідності, температури навколишнього середовища як функції координат, розподіли температури та густини теплових джерел вказують на можливість забезпечення нульових напружень у реальних матеріалах з перепадом температур у декілька сотень градусів.

РОЗДІЛ 7

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ НАПРУЖЕНЬ І СПОСОБИ ЇХ ДОСЯГНЕННЯ У ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ З ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ДВОХ КООРДИНАТ

У цьому розділі розглянуто задачу про визначення температурного поля, яке не викликає термонапружень у скінченному порожнистому осесиметричному циліндрі з характеристиками матеріалу, залежними від двох координат. Між циліндром і середовищем відбувається теплообмін за різними законами, а усталена теплопередача в циліндрі відбувається за законом Фур'є. Дослідження стосуються отримання точного аналітичного розв'язку задачі і умов, в яких він існує. Розрахунки проведені для циліндра, виготовленого з матеріалів, які роблять можливим виконання отриманих умов.

Основні результати опубліковані у працях [103, 106]

7. 1. Температурні поля, які не викликають напружень

Розглянемо скінчений неоднорідний порожнистий круговий циліндр, віднесений до циліндричної системи координат з віссю Oz, яка збігається з його віссю симетрії, початком координат на цій осі, радіусами внутрішньої та зовнішньої поверхонь R_1, R_2, записаними через відносні щодо деякої характеристичної довжини R_0 радіусами внутрішньої та зовнішніх поверхонь ρ_1, ρ_2 ($\rho = r / R_0$ – відносна радіальна змінна, r – радіальна змінна $\rho_1 = R_1 / R_0$, $\rho_2 = R_2 / R_0$) висотою $z_2 - z_1$. Характеристики матеріалів циліндра – модуль пружності $E = E(\rho, z)$, коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(\rho, z)$, коефіцієнти лінійного розширення $\alpha = \alpha(\rho, z)$ та теплопровідності λ, а також температурне поле є функціями координат ρ, z. Термонапружений стан циліндра описано рівняннями (2.96) – (2.99). Потрібно визначити вигляд температурного поля, яке не викликає напружень, та способи його створення в рамках класичної незв'язаної моделі термопружності, в якій температурне поле змодельоване законом теплопровідності Фур'є та різними класичними умовами теплообміну через поверхні циліндра.

Запишемо рівняння сумісності деформацій у напруженнях. Для цього вирази (2.98) підставимо у рівняння сумісності (2.97) з використанням рівнянь рівноваги (2.96). Отримаємо:

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\sigma_{\varphi}(\rho,z)-\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\sigma(\rho,z)+\Phi(\rho,z)\right]=$$

$$=\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\left[\sigma(\rho,z)-2\sigma_{\varphi}(\rho,z)\right],$$

$$2\rho\frac{\partial\sigma_{\varphi}(\rho,z)}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\right]+\rho\sigma_{\varphi}(\rho,z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\right]+\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\rho\frac{\partial^2\sigma_{\varphi}(\rho,z)}{\partial z^2}-$$

$$-2\frac{\partial\sigma(\rho,z)}{\partial z}\rho\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\right]-\sigma(\rho,z)\rho\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\right]-\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\rho\frac{\partial^2\sigma(\rho,z)}{\partial z^2}+\rho\frac{\partial^2\Phi(\rho,z)}{\partial z^2}-$$

$$-\sigma_{rz}(\rho,z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}-\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\frac{\partial\sigma_{rz}(\rho,z)}{\partial z}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{(1+\nu(\rho,z))}{E(\rho,z)}\sigma_z(\rho,z)\right]-\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\nu(\rho,z)}{E(\rho,z)}\sigma(\rho,z)\right]+\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi(\rho,z)=0. \qquad (7.1)$$

Умовою відсутності напружень є рівність нулеві всіх компонент тензора напружень у двох рівняннях сумісності (7.1). Тоді з (7.1) отримаємо:

$$\rho\frac{\partial\Phi(\rho,z)}{\partial\rho}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi(\rho,z)+\rho\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(\rho,z)=0. \qquad (7.2)$$

Розв'язком рівнянь (7.2) з врахуванням, що результуючі моменти у перерізі задовольняють умови рівноваги, є вираз $\Phi(\rho,z)=C$, звідки

$$T(\rho,z)-T_0=t(\rho,z)=\frac{C}{\alpha(\rho,z)}. \qquad (7.3)$$

Вираз (7.3) є необхідною умовою відсутності напружень у скінченому порожнистому круговому циліндрі. Покажемо, що умова (7.3) є також достатньою умовою. Використаємо працю [148], де відповідне твердження доведено для однорідних тіл. Для доведення достатності розглянемо деформований стан. Позначимо через u_ρ, u_z – переміщення вздовж координат ρ, z. Після нагрівання ця точка матиме нові координати $\overline{\rho}=\rho+u_\rho$, $\overline{z}=z+u_z$. При зміні температури, яка не викликає напружень подібний трикутник переходить у подібний. Зі зв'язків Коші між деформаціями і переміщеннями матимемо $\dfrac{\partial u_z}{\partial\rho}=-\dfrac{\partial u_\rho}{\partial z}$, ($e_{rz}=0$), $\dfrac{\partial u_r}{\partial\rho}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}$. Розглянемо поворот відносно осі перпендикулярної до ρ, z, пов'язаний з деформацією

$$\omega_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right).$$

Для двох точок A і B повинна виконуватись рівність

$$\omega_{rz}(B)-\omega_{rz}(A)=\int_A^B\left[\frac{\partial\omega_{rz}}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial\omega_{rz}}{\partial z}dz\right]. \qquad (7.4)$$

З врахуванням, що

$$\frac{\partial\omega_{rz}}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial z}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial\rho^2}\right)=\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\omega_{rz}}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\rho}\right)=-\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\rho}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}. \qquad (7.5)$$

вираз (7.4) матиме вигляд

$$\omega_{rz}(B)-\omega_{rz}(A)=\int_A^B\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial z}d\rho\right]=\int_A^B\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds\,, \tag{7.6}$$

де $\partial/\partial n$ – похідна по нормалі до поверхні.

Якщо точки A і B збігаються, то вираз (7.6) запишемо як

$$\oint\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds=0\,. \tag{7.8}$$

Отже вираз (7.8) є також достатньою умовою для температурного поля, яке не викликає напружень, бо $\Phi(\rho,z)=C$.

7. 2. Створення температурних полів, які не викликають напружень з допомогою умов нагрівання

Вважатимемо, що через поверхню осесиметричного порожнистого циліндра відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем.

Темпеартурне поле повинно задовольняти задачу теплопровідності, яка відповідає закону Фур'є, яка описана диференціальним рівнянням:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial z}\right)=-q_v(\rho,z) \tag{7.9}$$

з такими умовами на межах

$$\lambda(\rho_1,z)\frac{\partial}{\partial\rho}t(\rho_1,z)-\beta_{\rho_1}(t(\rho_1,z)-t_{\rho_1}(z))=0\,,$$

$$\lambda(\rho_2,z)\frac{\partial}{\partial\rho}t(\rho_2,z)+\beta_{\rho_1}(t(\rho_2,z)-t_{\rho_2}(z))=0\,,$$

$$\lambda(\rho,z_1)\frac{\partial}{\partial z}t(\rho,z_1)-\beta_{z_1}(t(\rho,z_1)-t_{z_1}(\rho))=0\,,$$

$$\lambda(\rho,z_2)\frac{\partial}{\partial z}t(\rho,z_2)+\beta_{z_2}(t(\rho_2,h)-t_{z_2}(\rho))=0\,. \tag{7.10}$$

Тут $\lambda(\rho, z)$ – коефіцієнт теплопровідності, β_k, t_k $(k = \rho_1, \rho_2, z_1, z_2)$ – коефіцієнт теплообміну та температура навколишнього середовища, з індексами внизу, які є координатами поверхонь циліндра. Коефіцієнти теплообміну прийматимуть додатні і від'ємні значення в залежності від напряму потоку щодо нормалі до поверхонь. Потрібно визначити умови, при яких напруження відсутні, а також показати, що ці умови можна забезпечити відповідним вибором температурного поля, яке розв'язком задачі теплопровідності (7.9), (7.10). Подальші викладки застосовні і до інших умов на межах.

Температурне поле, яке призводить до нульових напружень та забезпечує одночасно сталість поздовжніх деформацій вздовж осі z має вигляд:

$$t(\rho, z) = \frac{C}{\alpha(\rho, z)}, \tag{7.11}$$

де C довільна стала. Воно повинно задовольняти задачу теплопровідності (7.9), (7.10). Також повинні виконуватись природні умови рівності температури навколишнього середовища на перетині площин і циліндричної поверхні. Вони мають вигляд

$$t_{\rho_1}(z_1) = t_{z_1}(\rho_1), \quad t_{\rho_1}(z_2) = t_{z_2}(\rho_1),$$

$$t_{\rho_2}(z_1) = t_{z_1}(\rho_2), \quad t_{\rho_2}(z_2) = t_{z_2}(\rho_2). \tag{7.12}$$

Умови конвективного теплообміну містять температуру оточуючого середовища та коефіцієнти теплообміну. Розв'язок (7.11) задачі теплопровідності (7.9), (7.10) містить одну сталу. Тому умови на межах (7.11) та густину теплових джерел слід узгодити. Отже розв'язок (7.11) повинен задовольняти задачу теплопровідності (7.9), (7.10) та умови узгодження (7.12) на перетині циліндричних поверхонь і площин. Рівняння теплопровідності можна задовольнити, якщо вираз (7.11) підставити у рівняння (7.9), звідки отримаємо вираз для густини теплових джерел

$$q_v(\rho,z)=C\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\lambda(\rho,z)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho,z)}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(\rho,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\alpha(\rho,z)}\right)\right]\right\}. \quad (7.13)$$

Сталу C й узгодження умов на межах визначимо після підставляння виразу (7.11) в умови конвективного теплообміну (7.10), з використанням умов узгодження (7.12), з яких отримаємо вирази для температури довкілля, коли задано характеристики матеріалів. Якщо (7.11) підставити у (7.10), то дістанемо

$$\lambda(\rho_1,z)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{C}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1}-\beta_{\rho_1}\frac{C}{\alpha(\rho_1,z)}=-\beta_{\rho_1}t_{\rho_1}(z),$$

$$\lambda(\rho_2,z)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{C}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2}+\beta_{\rho_2}\frac{C}{\alpha(\rho_2,z)}=\beta_{\rho_2}t_{\rho_2}(z),$$

$$\lambda(\rho,z_1)\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{C}{\alpha(\rho,z)}\right]_{z=z_1}-\beta_{z_1}\frac{C}{\alpha(\rho,z_1)}=-\beta_{z_1}t_{z_1}(\rho),$$

$$\lambda(\rho,z_2)\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{C}{\alpha(\rho,z)}\right]_{z=z_2}+\beta_{z_2}\frac{C}{\alpha(\rho,z_2)}=\beta_{z_2}t_{z_2}(\rho). \quad (7.14)$$

Застосування умов (7.12) рівності температур зовнішнього середовища на ребрах призводить до таких зв’язків між коефіцієнтами теплообміну та характеристиками матеріалів:

$$\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1,z=z_1}}{\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1,z=z_1}},\qquad \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}}=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1,z=z_2}}{\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_1,z=z_2}},$$

$$\frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}}=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2,z=z_1}}{\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2,z=z_1}},\qquad \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_2}}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2,z=z_2}}{\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\alpha(\rho,z)}\right]\Bigg|_{\rho=\rho_2,z=z_2}}. \quad (7.15)$$

Сталу C можна визначити з будь-якої умови теплообміну (7.14) у будь-якій точці (ρ^*, z^*) $(z^* \in [z_1, z_2],\ \rho^* \in [\rho_1, \rho_2])$, якщо відоме значення температури середовища. З першої умови (7.14) отримаємо:

$$C = \frac{\beta_{\rho_1} t_{\rho_1}(z^*)}{\beta_{\rho_1} \dfrac{1}{\alpha(\rho_1, z^*)} - \lambda(\rho_1, z^*) \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho} \dfrac{1}{\alpha(\rho, z^*)} \right] \Bigg|_{\rho=\rho_1, z=z^*}}. \tag{7.16}$$

Якщо задана температура точки тіла, то значення сталої визначається з формули (7.11), записаній для будь-якої точки циліндра.

Визначимо з (7.14) умови, яким повинні задовольняти температури середовища $t_{\rho_1}(z)$, $t_{\rho_2}(z), t_{z_1}(\rho)$, $t_{z_2}(\rho)$ на поверхнях. Стала C входить у всі умови (7.14). Тому повинні виконуватись умови

$$\frac{t_{\rho_1}(z)}{t_{\rho_2}(z)} = \frac{\dfrac{1}{\alpha(\rho_1, z)} - \dfrac{1}{\beta_{\rho_1}} \lambda(\rho_1, z) \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho} \dfrac{1}{\alpha(\rho, z)} \right] \Bigg|_{\rho=\rho_1}}{\dfrac{1}{\alpha(\rho_2, z)} + \dfrac{1}{\beta_{\rho_2}} \lambda(\rho_2, z) \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho} \dfrac{1}{\alpha(\rho, z)} \right] \Bigg|_{\rho=\rho_2}},$$

$$\frac{t_{z_1}(\rho)}{t_{z_2}(\rho)} = \frac{\dfrac{1}{\alpha(\rho, z_1)} - \dfrac{1}{\beta_{z_1}} \lambda(\rho, z_1) \left[\dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{1}{\alpha(\rho, z)} \right] \Bigg|_{z=z_1}}{\dfrac{1}{\alpha(\rho, z_2)} + \dfrac{1}{\beta_{z_2}} \lambda(\rho, z_2) \left[\dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{1}{\alpha(\rho, z)} \right] \Bigg|_{z=z_2}}. \tag{7.17}$$

Допустиме температурне поле на поверхні $z = z_1$ є функцією вигляду

$$t_{z_1}(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho, z_1)} - \frac{1}{\beta_{z_1}} \lambda(\rho, z_1) \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{C}{\alpha(\rho, z)} \right]_{z=z_1}. \tag{7.18}$$

Отже, при відомих характеристиках матеріалу для задання цього поля слід задати значення температури в одній точці та коефіцієнт теплообміну β_{z_1} і з

(7.16) визначити сталу C. Далі з (7.14) – (7.18), визначено решту температур зовнішнього середовища на поверхнях.

Вважаємо, що задано температури на поверхнях. Тоді умови на межі мають вигляд

$$t(\rho, z_1) = t_{z_1}(\rho), \qquad t(\rho_2, z) = t_{\rho_2}(z),$$

$$t(\rho, z_1) = t_{z_1}(\rho), \qquad t(\rho_2, z_2) = t_{z_2}(\rho). \tag{7.19}$$

Умови рівності температур (7.12) на перетині поверхонь також виконуються. З цих умов отримаємо значення сталої C

$$C = \alpha(\rho^*, z_1) t_{z_1}(\rho^*), \tag{7.20}$$

де $\rho^* \in [\rho_1, \rho_2]$. Визначимо зв'язки між температурами на поверхнях, які забезпечують температурне поле, яке не викликає напружень у неоднорідному осесиметричному циліндрі. Умови узгодження (7.12) виконуються на основі (7.11). Зв'язки між температурами середовища на поверхнях з використанням (7.19) наступні:

$$\frac{t_{z_1}(\rho)}{t_{z_2}(\rho)} = \frac{\alpha(\rho, z_2)}{\alpha(\rho, z_1)}, \qquad \frac{t_{\rho_1}(z)}{t_{\rho_2}(z)} = \frac{\alpha(\rho_2, z)}{\alpha(\rho_1, z)}. \tag{7.21}$$

З виразів (7.21) для випадку $\alpha(\rho, z) = \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z)$ випливає, що

$$t_{z_1}(\rho) = B_1 t_{z_2}(\rho), \qquad t_{\rho_1}(z) = B_2 t_{\rho_2}(z), \tag{7.22}$$

де

$$B_1 = \frac{\alpha_z(z_2)}{\alpha_z(z_1)}, \quad B_2 = \frac{\alpha_\rho(\rho_2)}{\alpha_\rho(\rho_1)}.$$

Відповідні залежності температур від координати на межах визначаються функціональними залежностями коефіцієнтів лінійного теплового розширення від координат.

Розглянемо приклад обчислень у випадку заданих температур. Нехай $\rho_1 = 0.4$, $\rho_2 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2$. Вибрано двокомпонентний матеріал, характеристики якого описано моделлю простої суміші [347]:

$$\lambda(\rho, z) = (\lambda_1 - \lambda_2) S(\rho, z) + \lambda_2,$$

$$\alpha(\rho, z) = (\alpha_1 - \alpha_2) S(\rho, z) + \alpha_2, \qquad (7.23)$$

де $S(\rho, z) \in [0,1]$. Концентрацію подано у вигляді

$$S(\rho, z) = \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right)^{s_1} \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^{s_2}. \qquad (7.24)$$

Нехай $s_1 = 1$, $s_2 = 1$. першим матеріалом є алюміній ($\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, $\lambda_1 = 204$ Вт/(м · К)), а другим – оксид цирконію ($\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, $\lambda_2 =$ $= 2.09$ Вт/(м · К)) [370]. Стала $C = 0.008$. Результати обчислень на основі формул (7.13) – (7.24) подані на рис. 7.1 – 7.4.

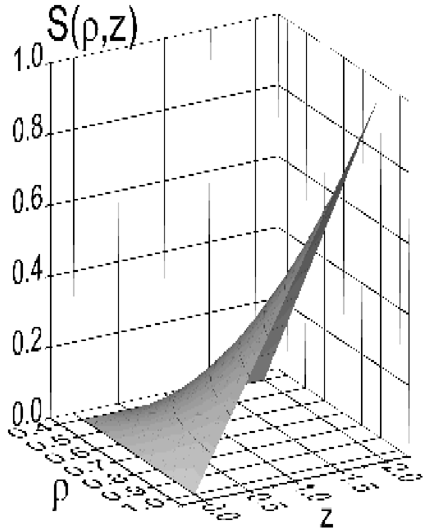


Рис. 7.1. Залежність концентрації алюмінію від координат

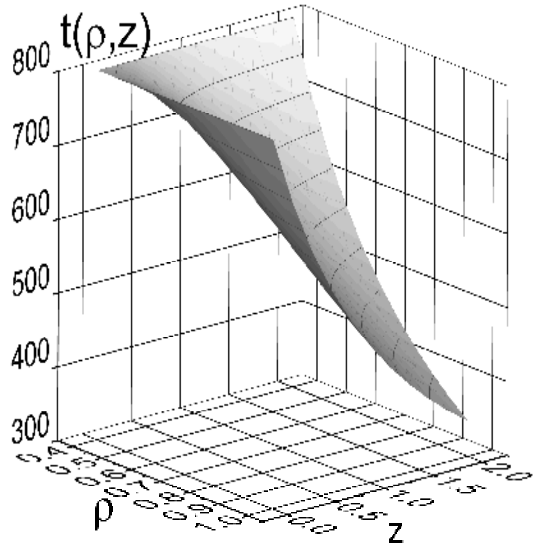


Рис. 7.2. Залежність температури циліндра від координат

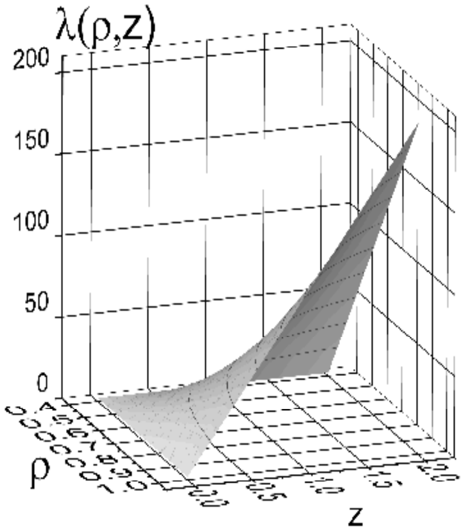


Рис.7.3. Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат

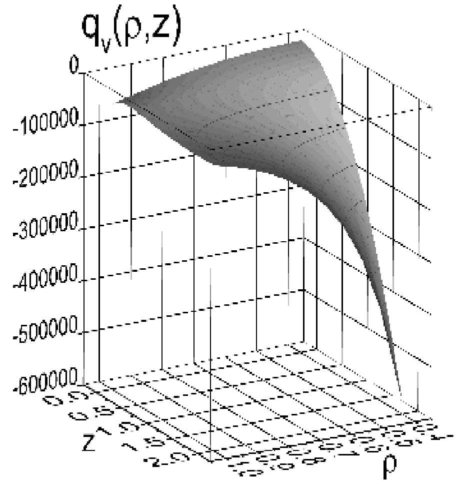


Рис. 7.4. Залежність густини джерел тепла від координат

Розлянемо такий же циліндр, як і в попередньому прикладі. Між неоднорідним порожнистим циліндром і середовищем відбувається конвективний теплообмін. Характеристики матеріалу описані виразом (7.23). Концентрацію візьмемо у вигляді

$$\mathrm{S}(\rho, z) = A \exp\left[-c(\rho + C_1)^2\right] \exp\left[-c(z + C_2)^2\right] + B. \tag{7.25}$$

Нехай $c = -0.04$, $C_1 = -5$, $C_2 = -3$. Сталі $A = 4.822896768$, $B = -1.443361455$ визначені так, щоб $S(\rho_1, z_1) = 0$, $S(\rho_2, z_2) = 1$. Вважаємо, що $\beta_{\rho_1} = 2000$ і $t_1 = t(\rho_1, z_1) = 800$ К. Обчислено відповідні значення сталих і коефіцієнтів теплооообміну за формулами (7.11), (7.15): $\beta_{\rho_2} = 1739.130$, $\beta_{z_1} = 1304.348$, $\beta_{z_2} = 434.7826$, $C = 0.008$. Розподіли концентрації одного матеріалу в іншому, температури, температури середовища на поверхнях, густини теплових джерел подані на рис. 7.5 – 7.8.

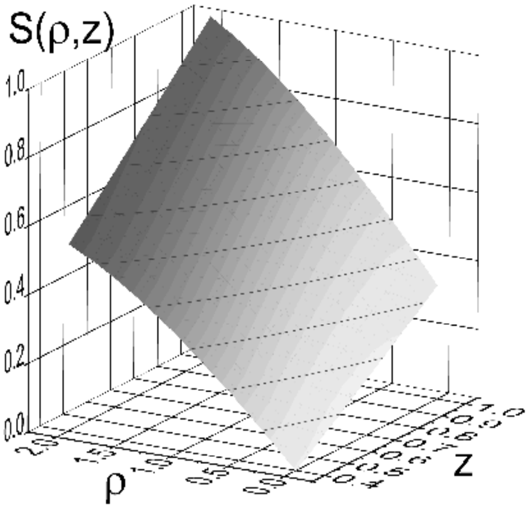


Рис. 7.5. Залежність концентрації матеріалу від координат

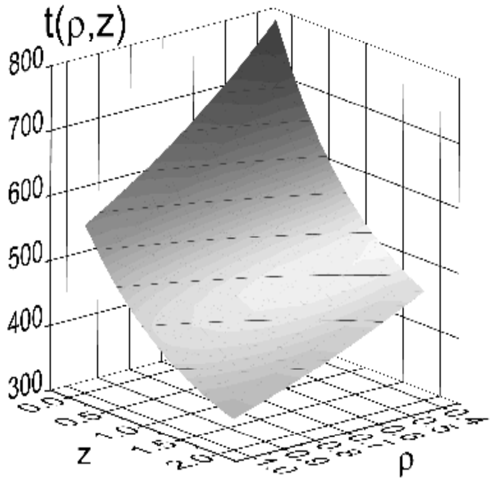


Рис. 7.6. Залежність температури від координат

На рис. 7.8 суцільними лініями зображено температуру поверхонь циліндра, а штриховими – значення температури середовища на його поверхнях.

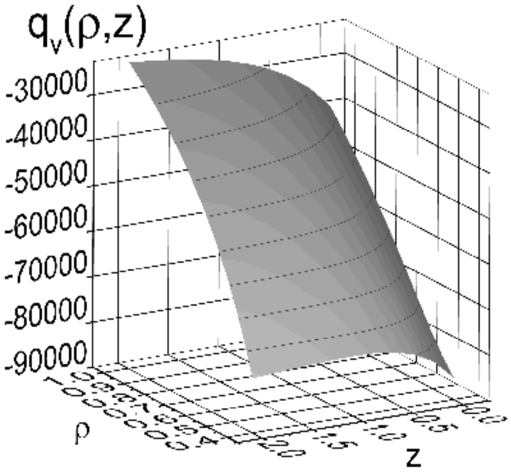


Рис. 7.7. Залежність густини теплових джерел від координат

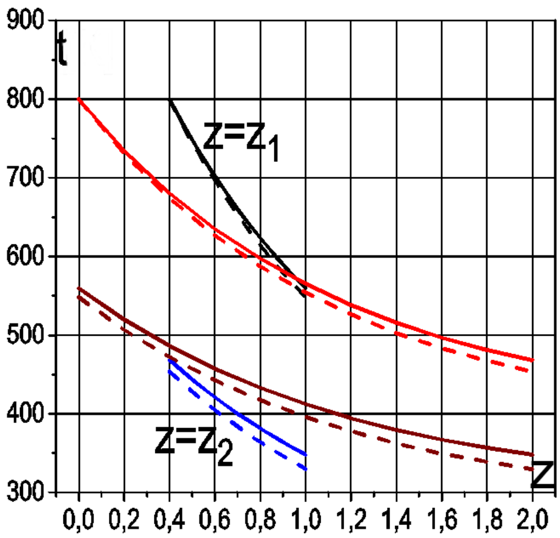


Рис. 7.8 Залежності температури на поверхнях від координат

З рис. 7.5 – 7.8 видно, що температури на ребрах однакові. Різниця між температурою середовища і реальною температурою поверхні тіла не перевищує декількох десятків градусів та регулюється коефіцієнтами теплообміну. На відміну від умов першого роду на межах, умови конвективного теплообміну накладають додаткові умови на вигляд функції концентрації та похідних від неї (не дорівнюють нулю) по обох змінних у всіх точках тіла. Виявилося, що модельний вираз для концентрації (7.24) непридатний для опису концентрації.

7.3. Забезпечення умов відсутності термонапружень за рахунок характеристик матеріалу і температурного поля

7.3.1. Конвективний теплооообмін

Розглянемо можливість отримання відповідного температурного поля без теплових джерел подібно як це зроблено для прямокутного бруса у розділі 6. Це означає, що вираз для температури повинен задовольняти однорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\rho,z)\frac{\partial t}{\partial z}\right)=0 \qquad (7.26)$$

з температурним полем $t = C/\alpha(\rho,z)$.

Це можливо, зокрема, при певному зв’язку між коефіцієнтами теплопровідності та теплового розширення, яке виражається рівнянням (7.26). Диференціальне рівняння (7.26) є рівнянням з частинними похідними першого порядку стосовно коефіцієнта теплопровідності $\lambda(\rho,z)$. Якщо $\alpha(\rho,z)=\alpha_\rho(x)\alpha_z(z)$, то методом відокремлення змінних отримано точний зв’язок між коефіцієнтами теплопровідності та теплового лінійного розширення:

$$\lambda(\rho,z)=\frac{D\alpha_\rho^2(\rho)\alpha_z^2(z)\exp\left[c\left(\int\limits_{z_1}^{z}\frac{d\zeta}{\frac{d}{d\zeta}\ln\alpha_z(\zeta)}-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\eta}{\frac{d}{d\eta}\ln\alpha_\rho(\eta)}\right)\right]}{\rho\frac{d\alpha_\rho(\rho)}{d\rho}\frac{d\alpha_z(z)}{dz}}, \qquad (7.27)$$

де D, c – довільні сталі. Це вказує на можливість забезпечення відсутності напружень у циліндрі за рахунок вибору неоднорідності матеріалу з характеристиками, зв'язаними формулами (7.27).

Тому що на сьогоднішній день технологічно неможливо виготовляти матеріали з довільним способом заданими характеристиками, обмежимось при подальшому розгляді двокомпонентними матеріалами, характеристики яких описуються у циліндричній системі координат моделлю простої суміші (7.23).

Якщо характеристики функціонально-градієнтного матеріалу (7.23) підставимо у рівняння теплопровідності (7.26), то отримаємо нелінійне диференціальне рівняння для визначення розподілу концентрації $S(\rho, z)$ у осесиметричному циліндрі

$$\left[\frac{\partial^2 S(\rho,z)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S(\rho,z)}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial S(\rho,z)}{\partial \rho} -$$

$$+\left[\left(\frac{\partial S(\rho,z)}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\rho,z)}{\partial z}\right)^2\right]\left[\frac{2\alpha_{21}}{(\alpha_1 + \alpha_{21}S(\rho,z)} - \frac{\lambda_{21}}{(\lambda_1 + \lambda_{21}S(\rho,z))}\right] = 0. \quad (7.28)$$

До рівняння (7.28) слід додати умови теплообміну на поверхні, виражені через концентрацію з використанням виразів $t = C / \alpha(\rho, z)$ та (7.23). Отримаємо нелінійну крайову задачу з нелінійним рівнянням і умовами на межі для визначення невідомої концентрації $S(\rho, z)$. Відповідні обернені задачі щодо визначення концентрації на основі диференціального рівняння (7.28) та узгодження умов теплообміну можна розв'язувати чисельними методами.

Спробуємо отримати аналітичні розв'язки рівняння (7.26) з виконанням одночасно подання характеристик у вигляді (7.31). Підставою для припущення існування таких розв'язків є вирази (7.27), в якому змінні ρ, z відокремлюються. Тобто треба дослідити умови, які накладаються на $S(\rho, z)$, λ_1, λ_2, α_1, α_2, щоб коефіцієнти теплопровідності і лінійного теплового розширення можна було подати у вигляді

$$\lambda(\rho,z)=\lambda_1(1-S(\rho,z))+\lambda_2 S(\rho,z)=\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z),$$

$$\alpha(\rho,z)=\alpha_1(1-S(\rho,z))+\alpha_2 S(\rho,z)=\alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z).$$

Крім цього потрібно перевірити існування двокомпонентних неоднорідних матеріалів, характеристики яких задовольнятимуть отримані умови. Таку процедуру було проведено у попередньому розділі для прямокутного неоднорідного бруса. Тому використаємо відповідне подання температури через коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення на основі результатів попереднього пункту. Відповідні вирази для подальшого використання подано у вигляді

$$\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)}\alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z),\quad \alpha_\rho(\rho)\alpha_z(z)=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z),$$

$$t(\rho,z)=\frac{C}{\lambda_\rho(\rho)\lambda_z(z)}=\frac{C}{\lambda(\rho,z)}=\frac{\overline{C}}{\alpha(\rho,z)},$$

$$S(\rho,z)=\frac{\lambda(\rho,z)-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{\alpha(\rho,z)-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2},\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{7.29}$$

Температурне поле у формулах (7.29) забезпечує відсутність напружень у скінченному циліндрі і повинно бути точним аналітичним розв'язком задачі теплопровідності відносно коефіцієнтів теплопровідності. Підставляння температурного поля з (7.29) у рівняння теплопровідності (7.26) призводить до такого нелінійного диференціального рівняння відносно коефіцієнта теплопровідності:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\lambda(\rho,z)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\lambda(\rho,z)}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\rho,z)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\lambda(\rho,z)}\right)\right)=0. \tag{7.30}$$

Задачу розв'язуватимемо відносно коефіцієнта теплопровідності, коли задані умови конвективного теплообміну на поверхнях (7.10), які відносно коефіцієнта теплопровідності мають вигляд

$$C\lambda(\rho_1,z)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\lambda(\rho_1,z)}-\beta_{\rho_1}\left(\frac{C}{\lambda(\rho_1,z)}-t_{\rho_1}(z)\right)=0,$$

$$C\lambda(\rho_2,z)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\lambda(\rho_2,z)}+\beta_{\rho_1}(\frac{C}{\lambda(\rho_2,z)}-t_{\rho_2}(z))=0,$$

$$C\lambda(\rho,z_1)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\lambda(\rho,z_1)}-\beta_{z_1}(\frac{C}{\lambda(\rho,z_1)}-t_{z_1}(\rho))=0,$$

$$C\lambda(\rho,z_2)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\lambda(\rho,z_2)}+\beta_{z_2}(\frac{C}{\lambda(\rho,z_2)}-t_{z_2}(\rho))=0. \qquad (7.31)$$

Крім умов (7.31) повинні виконуватися умови рівності температур (7.28) навколишнього середовища на перетинах циліндричних та торцевої поверхонь. Аналітичний розв’язок рівняння (7.30), отриманий методом відокремлення змінних має вигляд:

$$\lambda(\rho,z)=C_4\frac{1}{\rho^{C_2}}\exp\left[\frac{1}{4}C_1\rho^2-\frac{1}{2}C_1(z+C_3)^2\right], \qquad (7.32)$$

де C_i $(i=\overline{1,4}$ – довільні сталі).

Отже потрібно визначити сталі, C_i, C, які б задовольняли умови на межах (7.31), умови узгодження температур (7.12), а також умови, які накладаються на температури навколишніх середовищ, коефіцієнти теплообміну, теплопровідності, коефіцієнти лінійного теплового розширення, максимально можливий перепад температур в циліндрі.

Природніми умовами, які додатково накладаються на коефіцієнти теплопровідності, теплообміну, лінійного теплового розширення, є:

- задоволення умов зміни коефіцієнтів теплопровідності, лінійного теплового розширення в заданих моделлю межах: $\lambda_1\le\lambda(\rho,z)\le\lambda_2$, $\lambda_2>\lambda_1>0$, $\alpha_1\le\alpha(\rho,z)\le\alpha_2$, $\alpha_2>\alpha_1>0$ (індекси «1» і «2» означають характеристики складових першого і другого матеріалів);
- між максимальним і мінімальним значенням температури тіла у будь-якій його точці не повинні бути температури, при яких відбуваються фазові переходи;

- коефіцієнти теплообміну повинні набувати значень з технологічно допустимих меж;
- найбільшому значенню температури нагрівання відповідає найменше значення коефіцієнта теплопровідності і навпаки;
- в умовах на межі значення температури навколишнього середовища на перетині поверхонь і значення температури тіла повинні бути однаковими;
- інші припущення, які стосуються меж застосовності моделі стаціонарного теплообміну, яка описана диференціальним рівнянням (7.25) і умовами тепловіддачі.

Підставляння виразу (7.33) в умови на межах (7.31) робить можливим виразити їх через характеристики матеріалу

$$\frac{C}{\lambda(\rho_{1,} z)}-\frac{1}{\beta_{\rho_1}}C\left(C_2\rho_1^{-1}-\frac{1}{2}\rho_1 C_1\right)=t_{\rho_1}(z),$$

$$\frac{C}{\lambda(\rho_{2,} z)}+\frac{1}{\beta_{\rho_2}}C\left(C_2\rho_2^{-1}-\frac{1}{2}\rho_2 C_1\right)=t_{\rho_2}(z),$$

$$\frac{C}{\lambda(\rho, z_1)}-\frac{1}{\beta_{z_1}}C(C_1 z_1+C_3)=t_{z_1}(\rho),$$

$$\frac{1}{\beta_{z_2}}C(C_1 z_2+C_3)+\frac{C}{\lambda(\rho, z_2)}=t_{z_2}(\rho). \qquad (7.33)$$

З умов тепловіддачі (7.33) та умов узгодження температур на поверхнях маємо

$$\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}}=\frac{\left(C_2\rho_1^{-1}-\frac{1}{2}\rho_1 C_1\right)}{C_1\,(z_1+C_3)}, \qquad \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}}=-\frac{\left(C_2\rho_1^{-1}-\frac{1}{2}\rho_1 C_1\right)}{C_1\,(z_2+C_3)},$$

$$\frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}}=-\frac{\left(C_2\rho_2^{-1}-\frac{1}{2}\rho_2 C_1\right)}{C_1\,(z_1+C_3)}, \qquad \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_2}}=\frac{\left(C_2\rho_2^{-1}-\frac{1}{2}\rho_2 C_1\right)}{C_1\,(z_2+C_3)}. \qquad (7.34)$$

З (7.34) бачимо, що

• три коефіцієнти теплообміну з чотирьох можуть бути незалежними, тобто можемо вибирати довільно тільки три коефіцієнти теплообміну відповідно до технологічних потреб;

• є два незалежні рівняння відносно сталих C_1, C_2, C_3.

Задамо межі допустимих температур $t_{\min} = t(\rho_1, z_1)$, $t_{\max} = t(\rho_2, z_2)$ для тіла у заданих точках (ρ_1, z_1), (ρ_2, z_2), які повинні знаходитися на поверхнях циліндра, тому що (можна перевірити стандартною процедурою [70]) функції двох змінних $\lambda(\rho, z)$ і $t(\rho, z)$ не мають екстремуму. Відомими вхідними даними є характеритистики складових ФГМ λ_1^*, λ_2^* $(\lambda_1 \le \lambda_1^* < \lambda_2^*, \lambda_2^* \le \lambda_2)$ та три довільні коефіцієнти теплообміну з чотирьох β_k $(k = \rho_1, \rho_2, z_1, z_2)$.

З виразів (7.32), (7.34), (7.33) отримаємо таку систему рівнянь для визначення сталих C_i $(i = \overline{1,4})$, C, β_k

$$t_{\max} = \frac{C}{\lambda_1^*(\rho_1, z_1)} \text{ або } t_{\min} = \frac{C}{\lambda_2^*(\rho_2, z_2)},$$

$$\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}} = \frac{\left(C_2 \rho_1^{-1} - \frac{1}{2}\rho_1 C_1\right)}{(C_1 z_1 + C_3)}, \qquad \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}} = -\frac{\left(C_2 \rho_1^{-1} - \frac{1}{2}\rho_1 C_1\right)}{(C_1 z_2 + C_3)},$$

$$\frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}} = -\frac{\left(C_2 \rho_2^{-1} - \frac{1}{2}\rho_2 C_1\right)}{(C_1 z_1 + C_3)},$$

$$\lambda(\rho, z) = C_4 \frac{1}{\rho^{C_2}} \exp\left[\frac{1}{4} C_1 \rho^2 - \frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2\right],$$

$$\lambda(\rho, z) = C_4 \frac{1}{\rho^{C_2}} \exp\left[\frac{1}{4} C_1 \rho^2 - \frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2\right],$$

$$\lambda(\rho_1, z_1) = \lambda_1^* = \frac{1}{\rho_1^{C_2}} C_4 \exp\left[\frac{1}{4} C_1 \rho_1^2 - \frac{1}{2} C_1 z_1^2 - C_3 z_1\right],$$

$$\lambda(\rho_2, z_2) = \lambda_2^* = \frac{1}{\rho_2^{C_2}} C_4 \exp\left[\frac{1}{4} C_1 \rho_2^2 - \frac{1}{2} C_1 z_2^2 - C_3 z_2\right]. \qquad (7.35)$$

З системи (7.35) зрозуміло, що

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} \le \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = C_\lambda .$$

Систему рівнянь (7.35) можна подати як систему лінійних алгебричних рівнянь

$$C = t_{\max}\lambda_1^*(\rho_1, z_1),$$

$$C_1\left(\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}}\right)z_1 - C_2\rho_1^{-1} + C_3\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_1}} = 0,$$

$$C_1\left(\frac{1}{2}\rho_1 + -\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}}\right)z_2 - C_2\rho_1^{-1} - C_3\frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{z_2}} = 0,$$

$$C_1\left(\frac{1}{2}\rho_2 - \frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}}\right)z_1 - C_2\rho_2^{-1} - C_3\frac{\beta_{\rho_2}}{\beta_{z_1}} = 0,$$

$$\frac{1}{4}C_1\left[\rho_1^2 - \rho_2^2 - 2(z_1^2 - z_2^2)\right] - C_2\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) - C_3(z_1 - z_2) = \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

$$C_4 = \lambda_2^*\rho_2^{C_2}\exp\left[-\frac{1}{4}C_1\rho_2^2 + \frac{1}{2}C_1 z_2^2 + C_3 z_2\right]. \qquad (7.36)$$

За відомими розв'язками системи (7.36) визначаємо коефіцієнт теплопровідності з виразу (Н.36), концентрацію $S(\rho, z)$ – з формули (7.29), коефіцієнт лінійного теплового розширення – з виразів (Н.31), розподіл температурного поля зовнішнього середовища на поверхнях – з (7.33). Перерахунок концентрації матеріалу від значень $\lambda_1^* = \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2^* = \lambda_2 - \Delta\lambda_2$ ($\Delta\lambda_1 > 0, \Delta\lambda_2 > 0$),при яких концентрація дорівнює відповідно одиниці та нулеві до концентрацій матеріалу з характеристиками складових λ_1, λ_2, можна здійснити за формулою $S(\rho,z)=\dfrac{\lambda^*(\rho,z)-\lambda_2+\Delta\lambda_2}{\lambda_1-\Delta\lambda_1-\lambda_2+\Delta\lambda_2}$ ($\lambda^*(\rho,z)$ – значення коефіцієнта теплопровідності в межах $[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$).

Первинним критерієм перевірки правильності обчислень є рівність температур зовнішнього середовища на перетині поверхонь і значення характеристик у зазначених межах.

Розглянемо порожнистий неоднорідний циліндр з внутрішнім радіусом $\rho_1=0.5$, $\rho_1=1$, різними значеннями z_1, z_2, виготовлений з ФГМ з характеристиками $\lambda_1=8$ Вт/(м·К), $\lambda_2=19.4$ Вт/(м·К), $C_\lambda=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=2.425$, $\alpha_1=7.5\cdot10^{-6}$ 1/К, $\alpha_2=18.2\cdot10^{-6}$ 1/К. Визначимо характеристики матеріалу і умови нагрівання при яких відсутні напруження. Результати зображено на рис. 7.9 – 7.11.

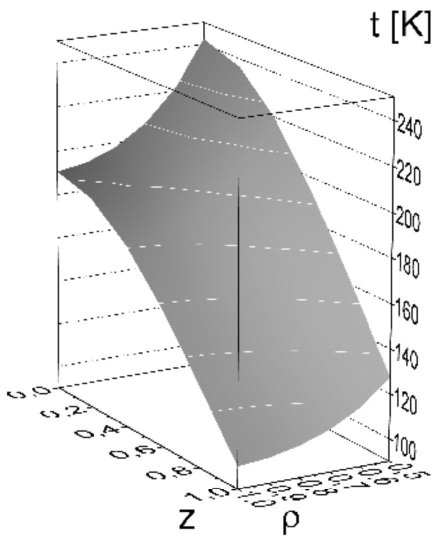


Рис. 7.9. Температурне поле, яке не створює напружень у циліндрі

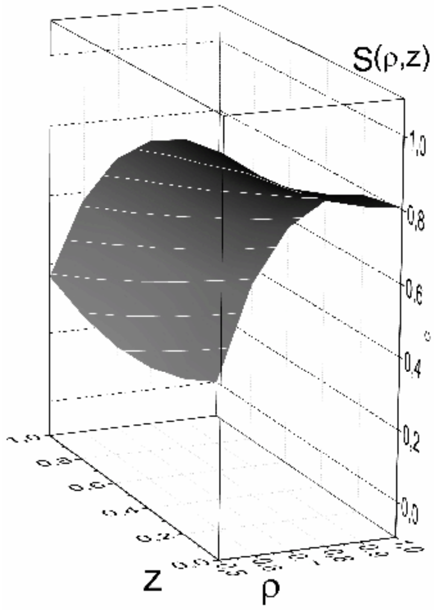


Рис. 7.10. Концентрація матеріалу, яка призводить до відсутності напружень

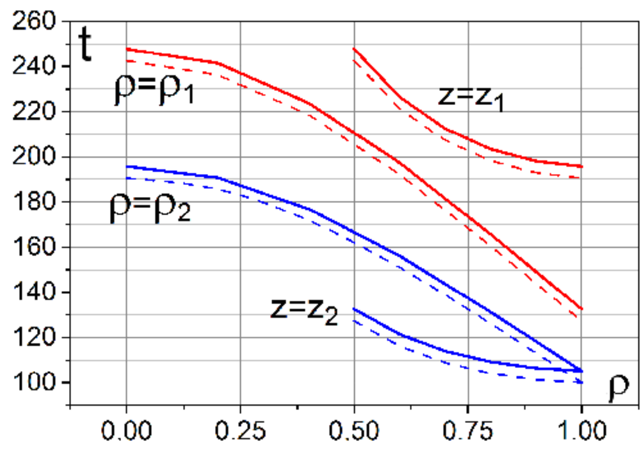


Рис. 7.11. Розподіл температур середовища і поверхонь

Розглянемо порожнистий неоднорідний циліндр з внутрішнім радіусом $\rho_1 = 0.5$, $\rho_1 = 1$, значеннями $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, виготовлений з ФГМ з характеристиками складових $\lambda_1 = 8$ Вт/(м·K), $\lambda_2 = 19.4$ Вт/(м·K), $C_\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2.425$, $\alpha_1 = 7.5 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\alpha_2 = 18.2 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Заданий закон розподілу температури на поверхні $\rho = \rho_2$ у вигляді

$$t_{\rho_2}(z) = A_{\rho_2} \exp(\frac{1}{2} C_1 z^2 + C_3 z) + B_{\rho_2} \quad , \tag{7.37}$$

коефіцієнт теплообміну $\beta_{\rho_2} = 200$ з поверхні $\rho = \rho_2$. Потрібно визначити розподіли температури середовища та коефіцієнти теплообміну на всіх інших поверхнях, розподіли температури, коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення всередині тіла, в також концентрації одного матеріалу в іншому. Зрозуміло, що додатково слід накласти фізичні умови: $\lambda_1 \le \lambda(\rho, z) \le \lambda_2$, $t_{\min} \le t(\rho, z) \le t_{\max}$, де $[t_{\min}, t_{\max}]$–інтервал температур, в якому застосовна лінійна теорія пружності, закон теплопровідності Фур'є, характеристики матеріалу не змінюють стрибкоподібно своїх значень (наприклад, внаслідок фазових переходів). Алгоритм розв'язування такої задачі буде наступним:

а. побудова функції вигляду (7.37) і задання коефіцієнта β_{ρ_2};

б. перевірка, чи значення теплоємності находиться в межах $\lambda_1 \le \lambda(\rho, z) \le \lambda_2$. Якщо ця умова не виконується то слід змінити значення сталих A_{ρ_2}, B_{ρ_2}, C_1, C_3;

в. вибір точки z^*, в якій $t_{\rho_2}(z)$ приймає найбільше значення. Ця точка буде одночасно точкою на поверхні, в якій коефіцієнт теплопровідності буде найменшим (бо $t(\rho, z) = C / \lambda(\rho, z)$) і рівним λ_1;

г. з умов (7.31) та умов рівності температур навколишнього середовища на перетинах циліндричних поверхонь і площин визначають сталі C_1, C_2, C_3, C_4, C;

д. з умов (7.34) визначають коефіцієнти теплоообміну, а з умов (7.31) і формул (7.32), (7.29)– решту невідомих функцій.

Для зручності вибору точки z^* функцію (7.37) – модифіковану функцію нормального розподілу Ґауса [205] – подамо, виділивши повний квадрат

$$t_{\rho_2}(z) = A_{\rho_2} \exp\left[\frac{1}{2} C_1 \, (z + \frac{C_3}{C_1})^2 - \frac{1}{2} C_1 \, \frac{C_3^2}{C_1^2} \right] + B_{\rho_2} \; . \qquad (7.38)$$

При такому поданні зрозуміло, що відношення $\frac{C_3}{C_1}$ характеризує зсув функції Ґауса відносно точки $z = 0$. Тому для вибору точки z^* =0.5, якщо $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, повинна виконуватись рівність $\frac{C_3}{C_1} = -0.5$. Сталі C_1, C_3, A_{ρ_2}, B_{ρ_2} визначені методом Лєвенберґа-Марквардта [334] (інша назва – метод загасання найменших квадратів), який використовується для розв’язування нелінійних задач найменших квадратів. Практично це здійснюється грубим табличним заданням функції, яка подібна до зображення кривої Ґауса, пізніше інтерполюється її методом Лєвенберґа-Марквардта, що дає можливість зразу задати сталі C_1, C_3, A_{ρ_2}, B_{ρ_2}. Порівняння (7.29) і (7.31) з використанням (7.30) робить можливим записати сталі A_{ρ_2}, B_{ρ_2} у вигляді

$$A_{\rho_2} = \frac{C\rho_2^{C_2} \exp(-\frac{1}{4}C_1 \rho_2^2)}{C_4}, \quad B_{\rho_2} = \frac{1}{\beta_{\rho_2}} C\left(C_2\rho_2^{-1} - \frac{1}{2}\rho_2 C_1 \right). \qquad (7.39)$$

Сталу C визначено з умови (7.31) на межі $\rho = \rho_2$ з використанням (7.39) у точці $z = z^*$, в якій досягається максимальна температура, а отже, мінімальне значення коефіцієнта теплопровідності λ_1 :

$$C = \lambda_1 (t_{\rho_2}(z^*) - B_{\rho_2}) . \qquad (7.40)$$

Отже виконані пункти алгоритму а) – в). Після застосування п. г) – д) з отримаємо такі числові значення сталих:

$A_{\rho_2} = 150$, $B_{\rho_2} = 10$, $C_1 = -4$, $C_3 = 2$, $C_2 = -0.9891155672$, $C_4 = 35.85351257$, $C = 1978.465525$, $\beta_{\rho_1} = 193.5396574$, $\beta_{z_2} = 408.9013180$, $\beta_{z_1} = 395.6931049$, $\beta_{\rho_2} = 200$. Розподіли температури, коефіцієнта теплопровідності, концентрації, температур на поверхнях, отримані на основі виразів (7.37) – (7.40) з використанням подано на рис. 7.12 – 7.15. Суцільними лініями позначені температури навколишнього середовища, а штриховими – поверхневі температури неоднорідного циліндра.

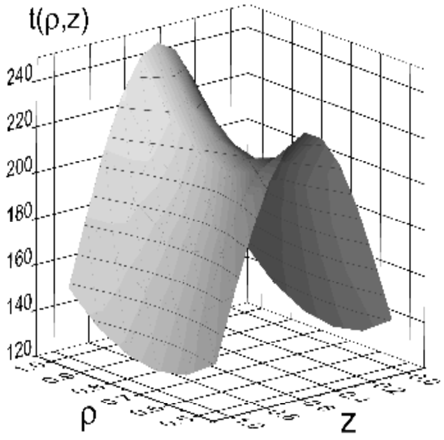


Рис. 7.12. Розподіл температури, який не викликає напружень у циліндрі

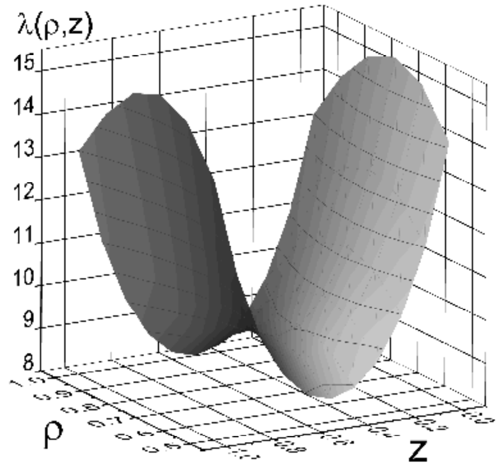


Рис.7.13.Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат, яка забезпечує температурне поле на рис. 7.12

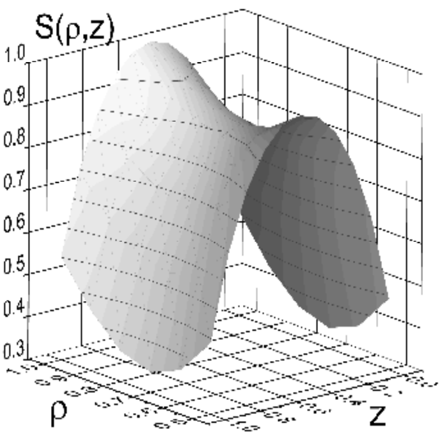


Рис. 7.14. Розподіл концентрації у неоднорідному циліндрі

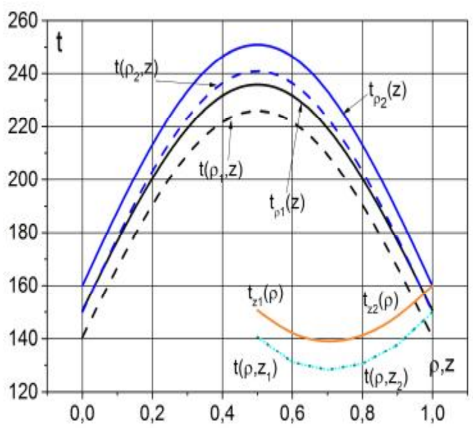


Рис. 7.15. Температури середовища і поверхні неоднорідного циліндра

7.3.2 Задання умов на торцях.

Осесиметричний циліндр відрізняється від бруса, зокрема, асиметрією властивостей в радіальному та поздовжньому напрямах. Тому розглянемо випадок, коли розподіл температури зовнішнього середовища задано на торцях. Такий розподіл температури зовнішнього середовища на основі умов на межах (7.33) та виразу (7.32) має вигляд:

$$t_{z_i}(\rho) = A_{z_i}\rho^{C_2}\exp(-\frac{1}{4}C_1\rho^2) + B_{z_i}, \ (i = 1,2) \tag{7.41}$$

де

$$A_{z_i} = \frac{C}{C_4}\exp\left[\frac{1}{2}C_1(z_i + C_3)^2\right], \qquad B_{z_i} = \frac{1}{\beta_{z_i}}C(C_1 z_i + C_3).$$

Вважаємо, що температура зовнішнього середовища задана на поверхні $z = z_i$ і відомий коефіцієнт тепловіддачі β_{z_i}. Тобто відомі значення A_{z_1} та B_{z_1}. Потрібно визначити концентрацію, температури в тілі, температури гріючих середовищ на інших поверхнях, які б задовольняли умови конвективного теплообміну (7.35) та умови рівності температур зовнішніх середовищ на ребрах.

У цьому випадку мінімум коефіцієнта теплопровідності досягається у точці $\rho_{z\min} = \sqrt{2\frac{C_2}{C_1}}$ (наслідок аналізу функції $\lambda_{z_1}(\rho) \sim \frac{\exp\left(\frac{1}{4}C_1\rho^2\right)}{\rho^{C_2}}$), якщо $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ та $\rho_{z\min} \in (\rho_1, \rho_2)$. У цій точці досягається максимум температури на поверхні. Якщо і $C_2 < 0$ і $C_1 < 0$ та $\rho_{z\max} = \sqrt{2\frac{C_2}{C_1}} \in (\rho_1, \rho_2)$, то коефіцієнт теплопровідності приймає максимальне значення, а температура – мінімальне. Якщо $\sqrt{2\frac{C_2}{C_1}} < \rho_1$, то найменше значення коефіцієнта теплопровідності досягається у точці $\rho = \rho_2$, якщо $C_2 \geq 0$ і у точці $\rho = \rho_1$, якщо $C_2 < 0$ а найбільше – у точці $\rho = \rho_1$, якщо $C_2 \geq 0$ і у точці $\rho = \rho_2$, якщо $C_2 < 0$.

Задаємо $t_{z_1}(\rho)$ у вигляді $t_{z_1}(\rho) = A_{z_1}\rho^{C_2}\exp\left(-\frac{1}{4}C_1\rho^2\right) + B_{z_1}$ і β_{z_1}. Це можна зробити практично заданням приблизно у вигляді таблиці значення функції та використати узагальнений алгоритм методу найменших квадратів (Лєвенберґа-Марквардта)[334], або задати сталі A_{z_1}, B_{z_1}. Це означає, що маємо такі відомі величини A_{z_1}, B_{z_1}, C_1, C_2, β_{z_1}. Після порівняння з третьою умовою (7.33) та виразом $\lambda(\rho, z) = C_4\frac{1}{\rho^{C_2}}\exp\left[\frac{1}{4}C_1\rho^2 - \frac{1}{2}C_1(z + C_3)^2\right]$ маємо таку систему рівнянь для визначення сталих.

$$-\frac{1}{\beta_{z_1}}C(C_1 z_1 + C_3) = B_{z_1}, \tag{7.42a}$$

$$\frac{C}{\lambda_1} = A_{z_1}\frac{\exp\left[\frac{1}{2}C_1(z_2 + C_3)^2\right]}{\exp\left[\frac{1}{2}C_1(z_1 + C_3)^2\right]}\rho_2^{C_2}\exp\left(-\frac{1}{4}C_1\rho_2^2\right), \tag{7.42b}$$

$$C = \lambda_1 A_{z_1}\rho_{z\min}^{C_2}\exp\left(-\frac{1}{4}C_1\rho_{z\min}^2\right), \tag{7.42c}$$

$$\lambda_i = C_4\frac{1}{\rho_*^{C_2}}\exp\left[\frac{1}{4}C_1\rho_*^2 - \frac{1}{2}C_1(z_i + C_3)^2\right], \quad i = 1, 2, \tag{7.42d}$$

$\rho_* = \rho_{z\min}$ або $\rho_* = \rho_{z\max}$ та одну з умов на межі (7.33). Детальніше про використання рівняння(7.42d) сказано нижче у п.4. З формул (7.42a), (7.42c) визначаємо C, C_3. З формул (7.34) визначено β_{ρ_1}, β_{z_2}, β_{ρ_2}.

Дослідимо на найбільші та найменші значення $\lambda(\rho)/C_4$. З виразів (7.41), (7.34), (7.33) отримаємо

$$A_{z_2} = A_{z_1} \frac{\exp\left[\frac{1}{2} C_1 (z_2 + C_3)^2\right]}{\exp\left[\frac{1}{2} C_1 (z_1 + C_3)^2\right]},$$

$$-\frac{\beta_{z_1} (z_2 + C_3)}{\beta_{z_2} (z_1 + C_3)} = \frac{B_{z_2}}{B_{z_1}}. \tag{7.43}$$

З (7.34) слідує, що $-\frac{\beta_{z_1}}{\beta_{z_2}} = \frac{(z_1 + C_3)}{(z_2 + C_3)}$. Тому

$$B_{z_1} = B_{z_2}. \tag{7.44}$$

З однієї з умов на межі z_1 або z_2 у точці ρ_*, в якій відоме значення $\lambda(\rho_*, z_i) = \lambda_1$ або $\lambda(\rho_*, z_i) = \lambda_2$ визначено

$$C_4 = \frac{C(-1)^i \beta_{z_i}}{\lambda_{C_4}(\rho_*, z_j)\left[(-1)^i \beta_{z_i} t_{z_i}(\rho_*) - CC_1 (z_i + C_3)\right]}, \quad i, j = 1,2, \tag{7.45}$$

де

$$\lambda_{C_4}(\rho, z) = \frac{1}{\rho^{C_2}} \exp\left[\frac{1}{4} C_1 \rho^2 - \frac{1}{2} C_1 (z + C_3)^2\right]. \tag{7.46}$$

Значення i, j вибираються в залежності від точки, в якій $\lambda(\rho_*, z_j) = \mathrm{C}_4 \lambda_{C_4}(\rho_*, z_j)$ приймає значення λ_1 або λ_2.

Перевіримо, чи виконуються фізичні обмеження $\beta_j \in [\beta_{\min,} \beta_{\max}]$, $j = z_1, z_2, \rho_1, \rho_2$, $\lambda(\rho, z) \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Для перевірки останньої умови потрібно визначити точку, де коефіцієнт теплопровідності приймає мінімальне значення та підставити відповідні сталі у вираз для коефіцієнта теплопровідності у цій точці. Виконання $\lambda(\rho, z) \geq \lambda_1$ буде свідчити про правильно вибрану функцію нагрівання, яка задовольняє поставленим умовам задачі.

Отримані сталі підставляємо у (7.33) і визначаємо інші температури навколишнього середовища на межах циліндра.

Розподіл коефіцієнта теплопровідності, концентрації, температури, визначаємо з формул $S(\rho,z)=\dfrac{\lambda(\rho,z)-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, $t(\rho,z)=\dfrac{C}{\lambda(\rho,z)}$. Подаємо результати за потребою відповідно у вигляді таблиць або графічно.

Коли потрібно задати значення функції на поверхні $z=z_2$, то алгоритм аналогічний з тою різницею, що використовується друга умова (7.33) на межі $z=z_2$.

Розглянемо порожнистий неоднорідний круговий циліндр з $\rho_1=0.5$, $\rho_2=1.0$, $z_1=1$, $z_2=2$, виготовлений з ФГМ, характеристики якого описані моделлю простої суміші (7.23) з такими характеристиками складових: $\lambda_1=8$, $\lambda_2=19.4$, $\alpha_1=8$, $\alpha_2=19.4$. На поверхні $z_1=1$ температура зовнішнього середовища має вигляд (7.41), де $A_{z_1}=110$, $B_{z_1}=8$, $C_1=1$, $C_2=0.2$, $\beta_{z_1}=39.5$. Потрібно визначити розподіл концентрації складових в циліндрі, температурне поле, яке не викликає напружень, коефіцієнти

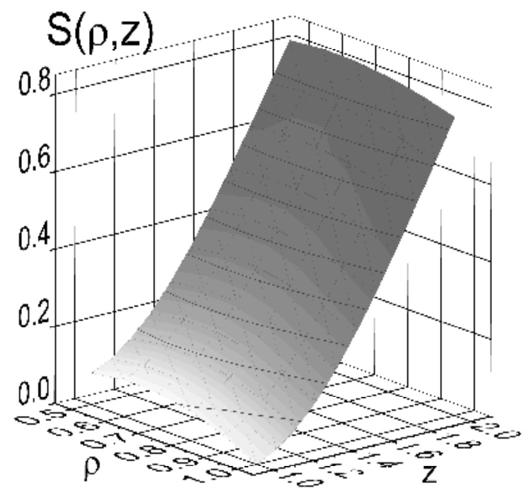


Рис. 7.16.Залежність концентрації сталі від координат

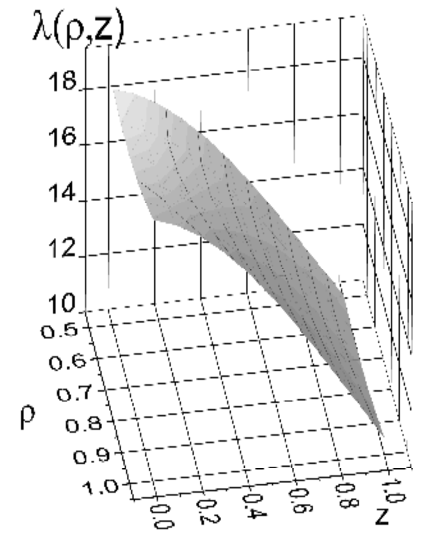


Рис. 7.17. Залежність коефіцієнта теплопровідності від координат

теплопровідності та тепловіддачі на інших поверхнях, температури навколишнього середовища на інших поверхнях. Відповідні характеристики, обчислені на основі формул (7.37) – (7.46) подані на рис. 7.16 – 7.19.

Отримано такі значення інших коефіцієнтів тепловіддачі і сталої A_{z_2}:

$\beta_{z_2} = 419.5302946452$, $\beta_{\rho_1} = 57.004544197$, $\beta_{\rho_2} = 114.00908839$, $A_{z_2} = 201.2241473962$.

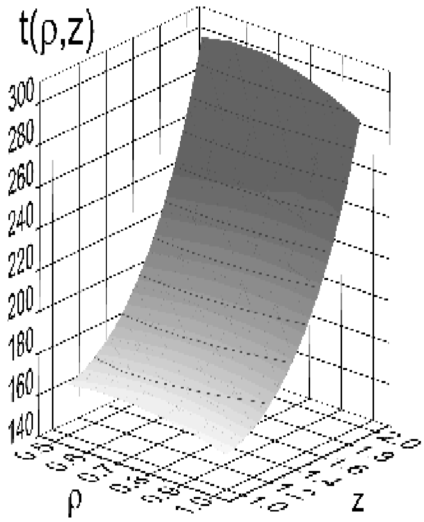


Рис. 7.18. Залежність температури від координат

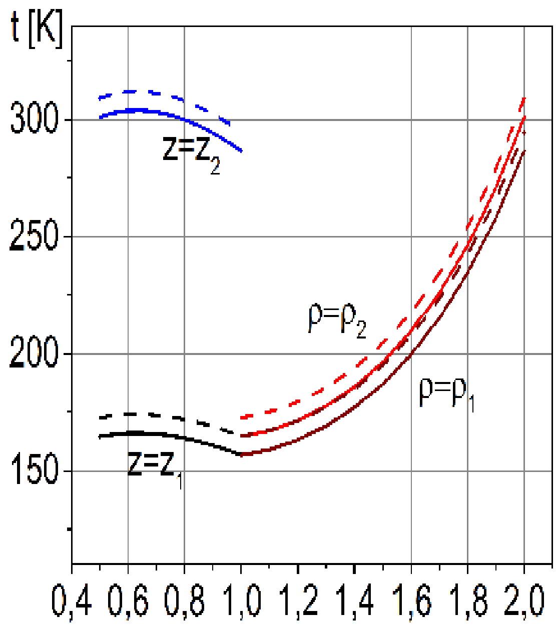


Рис. 7.19. Залежність температури циліндра і температури середовища на поверхні від координат

Той факт, що зміна координат z_1 і z_2 не повинен впливати на кінцевий результат при сталій різниці $z_2 - z_1$ служить додатковим засобом перевірки правильності обчислень та запропонованого алгоритму. Нижче подані графіки при $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ для порівняння .

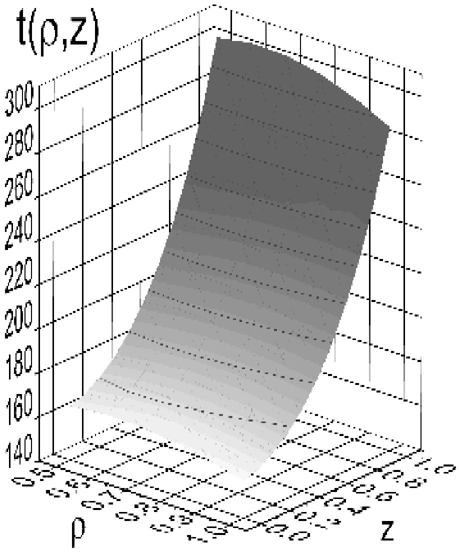


Рис. 7.20. Залежність температури від координат

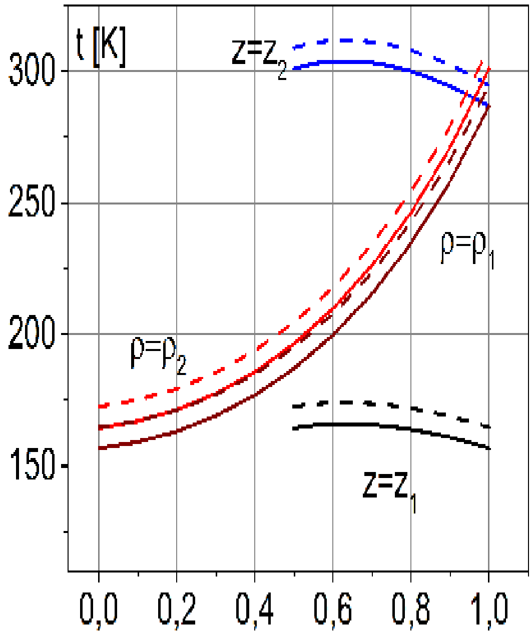


Рис. 7.21. Залежність температури циліндра і температури середовища на поверхні від координат

7.4. Висновки.

Отримано необхідну та достатню умову відсутності напружень в осесиметричному циліндрі у вигляді зв’язку між температурним полем та коефіцієнтом лінійного теплового розширення.

Встановлено, що постійна теплова деформація є необхідною і достатньою умовою відсутності термонапружень в неоднорідному осесиметричному циліндрі. Вказано можливі шляхи при наявності та відсутності об’ємних теплових джерел досягнення відповідних теплових полів, які не спричиняють напружень.

Для випадку ФГМ, характеристики яких описані моделлю простої суміші отримано аналітичні вирази для температурних полів, які не викликають напружень.

Встановлено умови узгодження температурних полів на межах, які забезпечують існування температурних полів, що не викликають напружень.

Встановлено допустимі розподіли температурних полів на поверхнях циліндра, які виражаються через добутки степеневих функцій від радіальної змінної на функції нормального розподілу Ґауса від радіальної та поздовжньої координат.

У випадку конвективного тепоообміну з середовищем та теплопередачі за законом теплопровідності Фур'є отримано аналітичні вирази для температур оточуючого середовища на поверхнях осесиметричного циліндра, виготовленого з двокомпонентного ФҐМ, які створюють температурне поле, що не спричиняє напружень в ньому. Відповідні можливі розподіли температур виражені через функції нормального розподілу Ґаусса.

Аналітичні вирази для характеристик двокомпонентного ФҐМ, які описуються моделлю простої суміші отримано при умові рівності відношень коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення складових.

Важливу роль при отриманні результатів відіграють умови узгодження – рівності температур на ребрах циліндра.

Числові дослідження проведені для випадків задання розподілів температури на межах зовнішнього середовища вздовж радіуса і вздовж осі неоднорідного порожнистого циліндра.

Числові дослідження вказують на те, що існують області, в яких невеликі зміни розподілу температури на одній з циліндричних поверхонь та коефіцієнта тепловіддачі приводять до невеликих змін концентрації складових і температурного поля, яке не викликає напружень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Робота стосується розв'язання важливої науково-технічної проблеми визначення термонапруженого стану неоднорідних та термочутливих елементів конструкцій та оптимізації умов їх нагрівання й складу матеріалів. Отримано такі основні результати:

- побудовано математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду для встановлення розподілу та умов відсутності напружень;
- отримані наближені аналітичні розв'язки інтегральних рівнянь для неоднорідних і термочутливих у кожному шарі тіл;
- сформульовано необхідні та достатні умови відсутності термонапружень, викликаних зовнішніми стаціонарними та нестаціонарними полями у неперервно неоднорідних тілах;
- аналітично визначено одно- та двовимірні температурні поля у неоднорідних тілах канонічної форми з заданими характеристиками матеріалів, які забезпечують заданий розподіл компоненти тензора напружень або відсутність напружень;
- розроблено методику аналітичного визначення розподілу неоднорідних характеристик матеріалів для забезпечення відсутності напружень у тілах із заданими стаціонарними або нестаціонарними температурними полями;
- в рамках моделі простої суміші характеристик матеріалів отримано точні розв'язки поставлених нелінійних обернених задач для двокомпонентних ФГМ;
- на основі запропонованих методик та алгоритмів побудовано та досліджено розв'язки низки обернених задач термопружності щодо забезпечення відсутності напружень або отримання заданого розподілу компонент тензора напружень у неоднорідних тілах.

В результаті аналізу сформульованих задач, їх розв'язків та чисельних результатів зроблені такі висновки:

- У неоднорідних тілах канонічної форми, виготовлених з деяких ФГМ, врахування термочутливості матеріалу призводить до малих відхилень розподілу температури у тілі (декілька відсотків), але набагато більшої зміни напружень (декілька десятків відсотків). Вплив на розподіл деформацій і переміщень ще суттєвіший. Особливо це зростання спостерігається у багатошарових структурах.
- Врахування впливу термочутливості у тілах канонічної форми при нестаціонарному нагріванні на розподіл напружень є відмінним у різні моменти часу; приріст напружень внаслідок врахування термочутливості матеріалу досягає найбільших значень у моменти часу перед виходом на стаціонарний режим.
- Застосування інтегральних рівнянь до визначення розподілу термонапружень у тілах з багатошаровими тонкими покриттями показало його кращу ефективність порівняно з методом узагальнених граничних умов при відносно товстих покриттях, які складаються з багатьох тонких.
- Відсутність напружень в умова нестаціонарній задачі термопружності забезпечується тільки при охолодженні.
- Максимальний перепад температур між різними поверхнями неоднорідних тіл, при яких можлива відсутність напружень задається відношенням коефіцієнтів лінійного теплового розширення складових ФГМ.
- Методика визначення умов забезпечення відсутності термонапружень, яка полягає у забезпеченні існування крайових умов і характеристик матеріалів при відомому розв'язку рівняння теплопровідності поширюється на інші поля.
- Рівність відношень коефіцієнтів теплопровідності та коефіцієнтів лінійного розширення складових є критерієм забезпечення точних розв'язків обернених задач термопружності, якщо характеристики матеріалів залежать від двох координат та описуються моделлю простої суміші.
- Температури нагрівання поверхонь, задані функціями нормального

розподілу Ґауса забезпечують нульові напруження у неоднорідних тілах у випадку відсутності об’ємних теплових джерел.

- Продовження терміну експлуатації елементів конструкцій канонічної форми з ФГМ в заданих умовах нагрівання можна закласти на етапі їх виготовлення завдяки врахуванню умов відсутності термонапружень.

ДОДАТОК А

МЕТРИЧНІ ТЕНЗОРИ І СИМВОЛИ КРІСТОФФЕЛЯ У РІЗНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Нижче подано метричні тензори і символи Крістоффеля у різних системах координат [4, 15, 168, 202, 258]. Через ξ^1, ξ^2, ξ^3 позначені криволінійні координати. Ненаведені нижче символи Крістоффеля дорівнюють нулеві.

Циліндрична система координат.

Зв'язок між декартовими і циліндричними координатами:

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \varphi, \quad \xi^3 = z,$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Компоненти метричного тензора:

$$g_{11} = g_{33} = 1\,,\ g_{22} = r^2,\ g_{ij} = 0,\ i \neq j\,,\ g^{11} = g^{33} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2}. \qquad (\text{A.1})$$

Символи Крістоффеля:

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -r. \qquad (\text{A.2})$$

Сферична система координат.

Зв'язок між декартовими і сферичними координатами:

$$\xi^1 = r, \qquad \xi^2 = \varphi, \qquad \xi^3 = \theta,$$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Компоненти метричного тензора:

$$g_{11} = 1\,,\ g_{22} = r^2\sin^2\theta,\ g_{33} = r^2,\ g_{ij} = 0,\ i \neq j\,,$$

$$g^{11} = 1, \qquad g^{22} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}, \qquad g^{33} = \frac{1}{r^2}. \qquad (\text{A.3})$$

Символи Крістоффеля:

$$\Gamma^1_{33} = -r\cos^2\theta, \quad \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta, \; \Gamma^1_{22} = -r, \; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \; \Gamma^3_{32} = -tg\theta. \quad (A.4)$$

Декартова система координат.

$$\xi^1 = x = x_1, \qquad \xi^2 = y = x_2, \qquad \xi^3 = z = x_3,$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1, \; g_{ij} = 0, \; i \neq j, \; \Gamma^i_{jk} = 0. \qquad (A.5)$$

ДОДАТОК Б

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Публікації у фахових виданнях

1. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2004. Т. 82. № 4. С. 3–9.
2. Попович В.С., Калиняк Б. М. Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2005. Т. 48. № 2. С. 126–136.
3. Калиняк Б. М., Попович В. С. Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2005. Т. 83. № 2. С. 22–30.
4. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 2. С. 79–87.
5. Калиняк Б. М., Яцків І. І. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2009. Вип. 7. С. 142–150.
6. Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння змінною верхньою межею динамічної задачі пружності у напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 8. С. 60–69.
7. Шевчук В. А., Калиняк Б. М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покривами. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41. Те саме: Shevchuk V. A., Kalynyak B. M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials*

Science. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746–755. https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y.

8. Калиняк Б. М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 141–147. Те саме: Kalynyak B.M. Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205. No. 5. P. 659–666. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0.
9. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 2. С. 169–186. Те саме: Popovych V. S., Kalynyak B. M. Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders. *Journal of Mathematical Sciences.* 2016. Vol. 215. No. 2. P. 218 – 242. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y.
10. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Визначення температурного поля, що забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідній порожнистій кулі. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2014. Вип. 12. С. 104–111.
11. Калиняк Б. М. Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2015. № 6. С. 46–56.
12. Артемюк В. Ю., Калиняк Б.М. Інтегральне рівняння для визначення радіальних напружень у радіально-неоднорідній термочутливій порожнистій кулі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 109–117. Те саме: Artemyuk V. Yu., Kalynyak B. M. Integral equation for the radial stresses in a radially inhomogeneous hollow sphere. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223. No. 2. P. 132–144. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3343-2.

13. Калиняк Б. М. Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні термонапруження у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2015. Спецвипуск. С. 97–100.
14. Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М. Характеристики матеріалу неоднорідної вздовж радіуса порожнистої кулі, які забезпечують відсутність у ній радіальних напружень, коли задані теплові навантаження. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2015. Вип. 13. С. 141–148.
15. Горошко В. О., Калиняк Б. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Математичне моделювання і визначення термопружного стану тришарової порожнистої кулі за складного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С.123–132.
16. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2016. Т. 52. № 1. С. 91–97. Те саме: Kalynyak B. M. Attainment of zero radial stresses in inhomogeneous long hollow cylinders by stationary temperature fields. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 1. P. 99–107. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9931-3.
17. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі за рахунок неоднорідності матеріалу. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2016. Т. 52. № 2. С. 104–110. Те саме: Kalynyak, B.M. Guaranteeing the absence of radial stresses in a long hollow cylinder by the inhomogeneity of material. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 2. P. 261–268. https://doi.org/10.1007/s11003-016-9953-x.
18. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59. № 3. С. 28–42. Те саме: Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V., Yasinskyy A.V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of

deformed solids. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 236. No. 1. P. 21–34. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3.

19. Калиняк Б. М. Нестаціонарне температурне поле у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі, яке забезпечує відсутність напружень. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2017. Вип. 3. С. 67–70.
20. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарової термочутливої нескінченної плити. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2018. Вип. 27. С. 19–27.
21. Гарматій Г. Ю, Калиняк Б. М., Кутнів М. В. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2018. Т. 61. № 4. С. 66–77.

   Те саме: Harmatiy G. Y., Kalynyak B. M., Kutniv M. V. Uncoupled quasistatic problem of thermoelasticity for a two-layer hollow thermally sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. V. 256. P. 439–454. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05437-9.
22. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2019. Вип. 1. С. 66–69.
23. Калиняк Б. М. Стаціонарне температурне поле, яке забезпечує відсутність термонапружень у неоднорідному прямокутному брусі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. Т. 62. №4. С. 172–179. Те саме: Kalynyak B. M. Stationary temperature field ensuring the absence of stresses in an inhomogeneous rectangular beam. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265. No.3. P.551–560. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06070-w.

24. Калиняк Б. М. Температурні поля, які не викликають напружень у неоднорідному осесиметричному порожнистому циліндрі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2021. Т. 64. № 1. С. 149–160. Те саме: Kalynyak B.M. Temperature Fields that do not Cause Stresses in an Inhomogeneous Axisymmetric Hollow Cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274. No. 5. P. 761–775. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06634-4.
25. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Вплив термочутливості матеріалів на термонапружений стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну. Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2022. Т. 58. № 3. С. 97–104. Те саме: Harmatiy G.Y., Kalynyak B.M. Influence of thermal sensitivity of materials on the thermal stressed state of a three-layer hollow cylinder under the conditions of convective heat exchange. *Materials Science*. 2022. Vol. 58. P. 385–394. https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

26. Ma C. C., Tokovyy Yu. V., Kalynyak B.M. Nonhomogeneous solids: Integral equation approach. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Editor: Prof. Richard B. Hetnarski. Springer edition. 2014. Vol. 7. P. 3350–3356.
27. Kalynyak B. M., Popovych V. S. Thermal stresses in multi-layer thermal sensitive cylinder at asymptotic thermal conditions. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (Thermal Stresses 2005. Mai 26 – 29, Vienna, Austria). 2005. P.119–122.
28. Shevchuk V., Kalynyak B., Tokovyy Yu. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007. 4–7 June. National Taiwan University of Science and Technology, Taipei, Taiwan). 2007. P. 549–552.
29. Yasinskiy A., Kalynyak B., TokovyyYu., Yuzvyak M. Identification of thermal

and thermostressed states at frictional heating via the surface displacements for a two-layer cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses*. (TS2007, 4-7 June, National Taiwan University of Science and Technology. Taipei. Taiwan). 2007. P. 567–570.

30. Калиняк Б. М. Вклади температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу у розподіл температури і напружень у довгому шаруватому порожнистому циліндрі при асимптотичному тепловому режимі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф.* (Львів, 26–29 травня 2003 р.). Національна академія наук України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, Львів. 2003. С. 118–121.

31. Kalynyak B., Teslyuk A., Tokovyy Yu. The analysis of elastic and thermoelastic equilibrium of inhomogeneous in radial direction circular cylinders. *Proceedings of the 35-th Solid Mechanics Conference* (Kraków, September 4–8, 2006). 2006. P. 318.

32. Калиняк Б. М. Прості аналітичні вирази для визначення напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2006. С. 198–199.

33. Kushnir R., Yasinskyy A., Kalynyak B. Identification of thernal stressed state in nonhomogeneous thermal sensitive cylindrical bodies using the surface displacements. *Proceedings of the 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)* (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), June 30 – July 5, 2008, Venice, Italy). 2008. 2 pp.

34. Калиняк Б. М., Шевчук В. А. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів. 2008. Т. 1. С. 244–245.

35.Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння квазістатичної теорії пружності у напруженнях у неоднорідних тілах простої форми при змішаних граничних умовах *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* /Під заг.ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2009. С. 118–119.

36.Калиняк Б. М. Інтегральні рівняння динамічної теорії пружності в напруженнях у довгому неоднорідному циліндрі. *Сучасні проблеми механіки*. (Львів, грудень 7–9. 2009). 2009. С. 71.

37.Tokovyy Yu., Yasinskyy A., Kalynyak B. An efficient method for analysis of steady-state stresses and optimal heating control in inhomogeneous composites. *The Sixteenth International Conference on Mechanics of Composite Materials*: Book of Abstracts. (Riga, Latvia, May 24–28, 2010). Riga: Institute of Polymer Mechanics, 2010. P. 97.

38.Калиняк Б. М. Керування температурними напруженнями і переміщеннями у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Інститут прикладних. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2013. Т. 2. С. 213–214.

39.Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* /під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів. 2014. С. 181 – 183.

40.Кушнір Р. М., Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термонапруженого стану багатошарових термочутливих куль. *Матеріали* III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім.

Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 27–29 серпня 2015 р.) Київ. 2015. С. 45.

41. Калиняк Б. М. Температурні поля і характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки, 27–29 серпня 2015 р.). Київ. 2015. С. 33.

42. Kushnir R. M., Popovych V. S., Kalynyak B. M. Modelling and methods for determination of the thermo-stressed state in the hollow multi-layer thermal sensitive spheres. *International V. Skorobahatko Mathematical Conference*. Abstracts (August 25–28. 2015. Drohobych, Ukraine), Lviv, 2015. P. 91.

43. Калиняк Б. М, Токовий Ю. В,, Ясінський А. В. Розвиток ідей професора Василя Вігака стосовно розв'язування прямих та обернених задач термомеханіки. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня, 2016 р., Львів.). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.39–46. Режим доступу: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

44. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Харченко В. М. Про дослідження термопружного стану довгих термочутливих шаруватих циліндричних тіл. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.263. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.pdf.

45. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі за умов нестаціонарного

теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць / за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24 вересня 2016 р., Львів) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016, С.268. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf.

46. Калиняк Б. М, Шевчук В. А. Методика розрахунку термо¬напруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць /за заг. ред. Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] (Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" 22–24вересня 2016 р., Львів). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2016. С.269. Режим доступу: https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016/MPT-2016.pdf.

47. Дробенко Б. Д., Калиняк Б. М., Кушнір Р. М., Попович В. С., Ракоча І. І. Аналітико-числові методи визначення термопружного стану довгих термочутливих шаруватих порожнистих тіл. Тези конференції «*Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасо-переносу*». (28–30 вересня 2016 р. Дніпро). Дніпропетровський національний університет. Дніпро. 2016. С. 94.

48. Калиняк Б. М. Забезпечення відсутності напружень, викликаних нестаціонарним температурним полем у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі умовами теплообміну. Матеріали конференції (5-а Міжнародна науково-технічна конференція «*Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*». 27–28 жовтня 2016 р., Львів). КІНПАТРІ ЛТД. Львів. 2016. С. 29–31. https://znc.com.ua/ukr/news/2016/201610_konferenz10.pdf.

49. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідних тілах простої форми та деякі способи їх реалізації. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред.

А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т. 1. С. 235. https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

50. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М. Неусталений термопружний стан термочутливої двошарової плити із залежними від поперечної координати характеристиками. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2018, Т. 1. С. 157–158. https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

51. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. Теорія та практика раціонального проектування, виготов¬лення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Матеріали 6-ї Міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2018. С. 41–42. http://znc.com.ua/ukr/news/2016/201810_konf1.pdf.

52. Калиняк Б. М., Стащук М. Г. Напруження, викликані концентрацією водню у суцільному металевому тілі. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Тези* доповідей (Друга міжнародна науково-технічна конференція пам’яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження). Дніпро 10–12 жовтня 2019 р.). Дніпро. 2019. С. 163–164.

53. Калиняк Б. М. Необхідні умови відсутності термонапружень у неоднорідному довгому стержні з прямокутним перерізом і можливість їх реалізації. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції /за заг. ред. Р. М. Кушніра і Г. С. Кіта. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України Львів. 2019. Вип. 5. С. 259.

54. Калиняк Б. М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному

тепловому навантаженні. *Матеріали* V Міжнародної наукової конференція «Сучасні проблеми механіки». (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки. 28–30 серпня 2019 р.). Київ. 2019. С. 91.

55. Калиняк Б. М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному порожнистому циліндрі скінченної довжини та способи їх реалізації. *Сучасні проблеми термомеханіки* – 2021: збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів (за заг. ред. Р. М. Кушніра і Ю. В. Токового). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. С. 175–176.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на

- Міжнародних наукових конференціях з механіки неоднорідних структур (Львів, 2003, 2006, 2010, 2014, 2019, 2021);
- International Congress on Thermal Stresses (Відень, Австрія, 2005; Тайпей, Тайвань, 2007);
- 35-th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006),
- Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2008, 2013, 2018),
- WCCM 8 – ECCOMAS 2008 (Венеція, Італія, 2008),
- «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» (Львів, 2009),
- 16-th International Conference on Mechanics of Composite Materials (Рига, Латвія, 2010),
- Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2015, 2017, 2019),

- International V. Skorobahatko Mathematical Conference (Дрогобич, 2015),
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016),
- Міжнародних науково-технічних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2016, 2018),
- Міжнародній конференції «Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу» (Дніпро, 2016),
- Другій міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» пам’яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (Дніпро, 2019).

У повному обсязі роботу подано на

- семінарах відділу механіки деформівного твердого тіла, об’єднаному семінарі відділів 11 і 19, кваліфікаціному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України,
- спільному засіданні комісій механіки і матеріалознавства Наукового товариства імені Шевченка,
- кафедрі механіки Львівського національного університету ім. Івана Франка,
- кафедрі теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
- VII Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» (28–30 серпня 2023 р. Київський національний університет імені Тараса Шевченка),

- кафедрі методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова,
- кафедрі теоретичної і комп’ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акимов Д.В., Грищак В.З., Гоменюк С.И., Гребенюк С.М., Лисняк А.О., Чопоров С.В., Ларионов І.Ф., Клименко Д. В., Сиренко В.М. Математическое моделирование и иследование прочности силовых элементов конструкций космических летательных аппаратов. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 3. С. 7–13.
2. Акимов Д.В., Грищак В.З., Ларионов И.Ф., Гоменюк С.И., Клименко Д.В., Чопоров С.В., Гребенюк С.Н. Математическое обеспечение анализа прочности силових элементов ракетно-космической техники. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2017. Вип. 26. С. 5–21.
3. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа. 1976, 272 с.
5. Андрейків О.Є., Гембара О.В. Механіка руйнування та довговічність металевих матеріалів у водневмісних середовищах. Київ: Наук. думка, 2008. 344 с.
6. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. К.: Наук. думка, 1982. 348 с.
7. Артемюк В.Ю., Калиняк Б.М. Визначення температурного поля, що забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідній порожнистій кулі. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2014. Вип. 12. С. 104–111.
8. Артемюк В.Ю., Калиняк Б. М. Характеристики матеріалу неоднорідної вздовж радіуса порожнистої кулі, які забезпечують відсутність у ній радіальних напружень, коли задані теплові навантаження. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2015. Вип. 13. С. 141–148.

9. Артемюк В.Ю., Калиняк Б.М. Інтегральне рівняння для визначення радіальних напружень у радіально-неоднорідній термочутливій порожнистій кулі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. 58, № 2. С. 109–117. Те саме: Artemyuk V.Yu., Kalynyak B.M. Integral equation for the radial stresses in a radially inhomogeneous hollow sphere. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223. No. 2. P. 132–144. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3343-2 .
10. Аралова А.А. Численное решение обратных задач термоупругости для поставного цилиндра. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50. № 5. С. 164–172.
11. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
12. Бадамшин И.Х. От четырех к одному. Силы внутриатомного взаимодействия и прочность материалов. М.: Академия естествознания, 2014. 134 с.
13. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
14. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. и др. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.
15. Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского университета им. А.М. Горького, 1964. 486 с.
16. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. 945 с.
17. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва:Мир, 1964. 514 с.
18. Бурак Я.Й. Вибрані праці. Львів: Ахіл, 2001. 352 с.
19. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р. Оптимальные по напряжениям режимы индукционного нагрева тонкой пластины. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1975. Вып. 2. С. 93–98.
20. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д., Гера Б.В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. К.: Наук. думка, 1984. 160 с.

21. Бурак Я.И., Огирко И.В. Оптимальный нагрев цилиндрической оболочки с зависящими от температуры характеристиками материалов. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1976. Вып. 5. С. 26–30.

22. Бурак Я.И., Чекурин В.Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. К.: Наук. думка, 1987. 264 с.

23. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. Львів: Сполом, 2006. 300 с.

24. Бурєнніков Ю.А., Сивак І.О., Сухоруков С.І. Нові матеріали та композити: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2013. 161 с.

25. Василенко О.Г., Дзюба А.П. Алгоритм оптимального проектування кільцевих пластин за оцінкою кінцевого стану з урахуванням впливу агресивного середовища. *Проблеми обчислювальної механіки міцності конструкцій*. 2011. №16. с. 79–85.

26. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

27. Ващенко В.А., Антонюк В.С., Тимчик Г.С., Яценко І.В., Бондаренко М.О., Кириченко О.В., Рудь М.П. Основи теплоперенесення в елементах оптичного приладобудування: навч. посіб. К.: НТКК «КПІ»,. 2012. 412 с.

28. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К.: Наук. думка, 1986. 544 с.

29. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. К.: Наук. думка, 1979. 360 с.

30. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. К.: Наук. думка. 1988. 312 с.

31. Вігак В.М. Розв’язок задач пружності та термопружності у напруженнях. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*. Київ: Ін-т математики НАН України. 1995. Т. 9. С. 34–131.

32. Вігак В.М., Токовий Ю.В. Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2002. Т. 37. № 2. С.

61–66. Те саме: Vihak, V.M., Tokovyi, Y.V. Investigation of the Plane Stressed State in a Rectangular Domain. *Materials Science*. 2002.Vol. 38. P. Iss. 2. 230–237. https://doi.org/10.1023/A:1020994204806.

33. Вігак В.М. Розв'язки одновимірних задач пружності та термопружності в напруженнях для циліндра. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 1997. Т. 40, № 3. С. 103–107.

34. Вігак В.М. Розв'язки одновимірних задач пружності та термопружності для циліндричних кусково-однорідних тіл. *Мат. методи і фіз. мех. поля*. 1997. Т. 40, № 4. С. 139–148.

35. Гарматій Г.Ю., Калиняк Б.М. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарової термочутливої нескінченної плити. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* 2018. Вип. 27. С. 19–27. https://doi.org/10.15407/fmmit2018.27.

36. Гарматій Г.Ю, Калиняк Б.М., Кутнів М.В. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. Т.61. № 4. С. 66–77. Те саме: Harmatiy G.Y., Kalynyak B.M., Kutniv M.V. Uncoupled Quasistatic Problem of Thermoelasticity for a Two-Layer Hollow Thermally Sensitive Cylinder Under the Conditions of Convective Heat Exchange. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 256. P. 439–454. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05437-9.

37. Гарматій Г.Ю., Попович В.С. Моделювання та визначення неусталеного термопружного стану двошарової термочутливої пластини. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. Т. 57. №4. С. 125–132. Те саме: Harmatii G.Y., Popovych V.S. Modeling and Determination of the Nonsteady Thermoelastic State of a Two-Layer Thermosensitive Plate. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 220. P. 162–172. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3174-6.

38. Гарматій Г.Ю. Визначення неусталеного теплового стану термочутливої

двошарової плити за складного теплоообміну. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2017. Т. 15. С. 132–138.

39. Гарматій Г.Ю., Калиняк Б.М. Вплив термочутливості матеріалів на термонапружений стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2022. Т. 58. №3. С. 97–104. Те саме: Harmatiy G.Y., Kalynyak B.M. Influence of Thermal Sensitivity of Materials on the Thermal Stressed State of a Three-Layer Hollow Cylinder Under the Conditions of Convective Heat Exchange. *Materials Science*. 2022. Vol. 58. P. 385–394. https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5.
40. Гарматій Г.Ю., Попович В.С., Кріль М. Вплив термочутливості матеріалу на неусталений тепловий стан багатошарової пластини. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2019. Т. 55. № 1. С. 98–104. Те саме: Harmatii H.Yu., Popovych V.S., Kryl M. Influence of the thermal sensitivity of material on the nonstationary thermal state of a multilayer plate. *Mater. Sci*. 2019. Vol. 55, No. 1. P. 105-113. https://doi.org/10.1007/s11003-019-00257-4.
41. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.Б. Зв’язані задачі термомеханіки електропровідних тіл з плоскопаралельними межами за імпульсних електромагнітних дій. Львів: Растр-7, 2019. 280 с.
42. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл. Львів: СПОЛОМ, 2010. 256 с.
43. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Ірза Є.М. Оптимізація за швидкодією режимів нагрівання термопружних кусково-однорідних тіл обертання. *Машинознавство*. 2009. №1 (139). С. 9–12.
44. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. К.: Наук. думка, 1992. 192 с.

45. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Торський А.Р. Оптимізація за напруженим станом режимів відпалу термочутливих скляних елементів конструкцій при нагріві конвективним способом і джерелами тепла . *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2020. вип. 28, 29. С. 6–17. https://doi.org/10.15407/fmmit2020.28.006.
46. иголюк Э.И., Подстригач Я.С., Буряк Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К.: Наук. думка, 1979. 364 с.
47. Григоренко О.Я. Гармонічні коливання та хвильові процеси в анізотропних неоднорідних тілах з циліндричними та сферичними границями: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня док. фіз.-мат. наук: спец. 01.02.04 "Механіка деформівного твердого тіла". Львів. 1993. 26 с.
48. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. К.: Наук. думка, 1991. 216 с.
49. Григоренко Я.М. Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 332 с.
50. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов. М.: Наука, 2000. 214 с.
51. Гриліцький Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології. К.: ІЗМН, 1996. 204 с.
52. Гриліцький Д.В., Пир'єв Ю.О., Мандзик Ю.І. Квазістатична контактна задача термопружності для двошарового циліндра при фрикційному нагріві та неідеальному тепловому контакті. *Мат. методи і фіз. мех. поля*. 1997. Т. 40, № 1. С. 104–110.
53. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К. : Наук. думка, 1981. 283 с.
54. Гринченко В.Т., Улитко А Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. К. : Наук. думка, 1985. 280 с.
55. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К.: Наук. думка, 1978. 264 с.

56. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 290 с.
57. Грищак В.З., Гребенюк С.Н. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда. *Вестник ХНТУ*. 2013. Т. 47 № 2. С. 110–114.
58. Грищак В.З., Фатеева Ю.А. Влияние начальних несовершенств на нелинейное поведение оболочечных конструкций из функционально-градиентных материалов переменной во времени толщины. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 3. С. 58–66.
59. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. К.: Наук. думка, 1987. 216 с.
60. Гудрамович В.С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкцій. К.: Наук. думка, 2005. 224 с.
61. Гудрамович В.С., Дзюба А.П., Селиванов Ю.М. К методологии поиска рационального распределения материала тонкостенных элементов конструкций. *Техническая механика*. 2016. № 3. С. 7–16.
62. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. К.: Наук. думка, 1978. 308 с.
63. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. К.: Вища школа, 1989. 352 с.
64. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И.. Введение в акустоупругость. К. : Вища школа, 1977. 149 с
65. Гудрамович В.С., Деменков А.Ф. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. К.: Наук. думка. 1991, 176 с.
66. Гук. Н.А., Идентификвция параметров задачи термоупругости тонкостенных систем при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. *Пробл. машиностроения*. 2011, Т. 14, №2. С. 33–45.

67. Гук Н.А. Ідентифікація навантаження, що діє на тонкостінні системи поблизу критичних станів . *Машинознавство*. 2010. № 8. С. 3–9.

68. Гутман Э.М., Зайнулин Р.С., Шаталов А.Т. и др.. Прочность газопромысловых труб в условиях коррозионного износа. М.: Недра, 1984. 80с.

69. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии. *Химическое и нефтяное машиностроение*. 1967. №2. С. 9−10.

70. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2. К.: Либідь, 1994. 304с.

71. Дробенко Б., Калиняк Б.., Кушнір Р., Попович В., Харченко В. Про дослідження термопружного стану довгих термочутливих шаруватих циліндричних тіл. *Сучасні проблеми термомеханіки*. Збірник наукових праць. За загальною редакцією члена-кореспондента НАН України Р.М. Кушніра. 2016. с. 263.

72. Дробенко Б, Калиняк Б., Кушнір Р., Попович В., Ракоча І. Аналітико-числові методи визначення термопружного стану довгих термочутливих шаруватих порожнистих циліндричних тіл. Тези конференції «*Диференціальні рівняння та проблеми аерогідромеханіки й тепломасопереносу*» Дніпро, 28–30 вересня 2016 року. Дніпропетр. Нац.ун-т. 2016. С. 94.

73. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЕФ», 2006. 160 с.

74. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1989. 384 с.

75. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Изд-во Нижегор. госуниверситета, 2007. 421 с.

76. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

77. Казанцев Є.І. Промислові печі. Довідник для розрахунків і проектування. 2-е видання, доповнене і перероблене. М.: «Металургія», 1975. 368 с.
78. Калинников А.Е., Корляков С.В. Оптимизация напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы по модулю упругости материала. *Проблемы прочности*. 1988. № 2. С. 88–91.
79. Калиняк Б.М. Вклади температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалу у розподіл температури і напружень у довгому шаруватому порожнистому циліндрі при асимптотичному тепловому режимі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур 2003*. Львів: Національна академія наук України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, 2003. С. 118–121.
80. Калиняк Б.М. Прості аналітичні вирази для визначення напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. Т. 1. С. 198–199.
81. Калиняк Б.М. Інтегральні рівняння квазістатичної теорії пружності у напруженнях у неоднорідних тілах простої форми при змішаних граничних умовах. *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки*: збірн. доп. Міжн. наук. конф. в рамках â Українського математичного конгресу – 2009 до 100-річчя від дня народження академіка Миколи Боголюбова (1 – 4 вересня 2009 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 118–119.
82. Калиняк Б. Інтегральні рівняння динамічної теорії пружності в напруженнях у довгому неоднорідному циліндрі. *Сучасні проблеми механіки*: тези доповідей. Міжн. наук. конф. (Львів, грудень 7 – 9, 2009

р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 71.

83. Калиняк Б.М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2007. Т. 50. №2. С. 79–86.
84. Калиняк Б.М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56. №3. С. 141–147. Те саме: Kalynyak, B.M. Fredholm Equations of the Second Kind for Radial Stresses Aimed at the Determination of the Thermoelastic State of an Inhomogeneous Hollow Long Cylinder. *Journal of Mathemaical Sciences*. 2015. No.5. P.659–666. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0.
85. линяк Б.М. Керування температурними напруженнями і переміщеннями у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Сучасні проблеми механіки і математики*. Львів. 2013. Т. 2, С. 213–214.
86. Калиняк Б.М.Забезпечення нульових радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі шляхом вибору характеристик матеріалу. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2014. 412 с. С. 181–183.
87. Калиняк Б.М. Температурні поля і характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність радіальних термонапружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі. *III Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»*. Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка. Факультет теоретичної і прикладної механіки, 27-29 серпня 2015 р. Київ, 2015. С. 33.

88. Калиняк Б.М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі за умов нестаціонарного теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки:* збірник наукових праць. За заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" (Львів, 22–24вересня 2016 р.) Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 268. https://www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
89. Калиняк Б.М. Забезпечення відсутності напружень, викликаних неста¬ціонарним температурним полем у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі умовами теплообміну. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій*: матеріали 5-а Міжнародна науково-технічна конференція (Львів 27–28 жовтня 2016 р.). Львів:КІНПАТРІ ЛТД., 2016. С. 29–31. https://znc.com.ua/ukr/news/2016/201610_konferenz10.pdf.
90. Калиняк Б.М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2016. №1. С. 98–104. Те саме: Kalynyak B.M. Attainment Zero Radial Stresses in Inhomogeneous Long Hollow Cylinders by Stationary Temperature Field. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 1. P. 99–107.
91. Калиняк Б.М. Забезпечення нульових радіальних напружень у довгому порожнистому циліндрі неоднорідністю матеріалу. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2016. №2. С. 104 –110. Те саме: Kalynyak B. M. Guaranteeing the Absence of Radial Stresses in a Long Hollow Cylinder by the Inhomogeneity of Material. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. No. 2. P. 261–268.
92. Калиняк Б.М., Попович В. С. Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму.

Машинознавство. 2005. № 2. С. 22–30.

93. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
94. Калиняк Б.М., Яцків І.І. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2009. Вип. 7. С. 142–150.
95. Калиняк Б.М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 141–147. Те ж саме Kalynyak B.M. Fredholm Equations of the Second Kind for Radial Stresses Aimed at the Determination of the Thermoelastic State of an Inhomogeneous Hollow Cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. V. 205. No.5. P. 659–666. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0.
96. Калиняк Б.М., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. Т.59. №3. С. 28–42. Те ж саме: Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V., Yasinskyy A.V. Direct and Inverse Problems of Thermomechanics Concerning the Optimization and Identification of the Thermal Stressed State of Deformed Solids. *Journal of Mathematical Science.* 2019. Vol. 236. No. 1. P. 21–34. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3.
97. Калиняк Б.М. Інтегральні рівняння змінною верхньою межею динамічної задачі пружності у напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 8. С. 60–69.
98. Калиняк Б.М. Нестаціонарне температурне поле у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі, яке забезпечує відсутність

напружень. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки*. 2017. Вип. №3. С. 67–70.

99. Калиняк Б. Умови відсутності термонапружень у неоднорідних тілах простої форми та деякі способи їх реалізації. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. За заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 235. https://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

100. Калиняк Б. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій:* Матеріали 6-ї Міжнародної науково-технічної конференції. Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2018, С. 41–42. https://znc.com.ua/ukr/news/2016/201810_konf1.pdf.

101. Калиняк Б.М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2019. Вип. 1. С. 66–69 .

102. Калиняк Б.М. Стаціонарне температурне поле, яке забезпечує відсутність термонапружень у неоднорідному прямокутному брусі. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2019. Т. 62. №4. С. 172–179. Те саме: Kalynyak B.M. Stationary Temperature Field Ensuring the Absence of Thermal Stresses in an Inhomogeneous Rectangular Beam. *Journal of Mathematical Sciences. 2022.* Vol. 265. No.3. P. 551–560. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06070-w.

103. Калиняк Б.М. Температурні поля, які не викликають напружень у неоднорідному осесиметричному порожнистому циліндрі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2021. Т. 64. № 1. С. 149–160.

104. Калиняк Б. Необхідні умови відсутності термонапружень у неоднорідному довгому стержні з прямокутним перерізом і можливість їх реалізації. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур:* збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції. За заг. ред. Р. М. Кушніра і Г. С. Кіта. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2019. Вип. 5. С. 259.

105. алиняк Б.М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні. *Сучасні проблеми механіки.* тези V Міжнародна наукова конференція. (Київ, 28–30 серпня 2019) Київ: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 2019. с. 91.

106. Калиняк Б.М. Умови відсутності термонапружень у неоднорідному порожнистому циліндрі скінченної довжини та способи їх реалізації. *Сучасні проблеми термомеханіки*: збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів (за заг. ред. Р. М. Кушніра і Ю. В. Токового). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2021. С. 175–176.

107. Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Двумерная залача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела. *Прикл. механика.* 2003. Т. 39. №1. С. 84–91.

108. Калоеров С.А. Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. Донецк: ООО “Юго-Восток”, 2007. 268 с.

109. Карвацький А.Я., Мікульонок І.О., Борщик С.О., Караулова. В.О. Моделювання механічних властивостей армованих полімерних матеріалів пакувального призначення. *Вісник НТУУ “КПІ імені Ігоря Сікорського”. Серія: Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження.* 2018. №1. С. 24–32. https://doi.org/10.20535/2306-1626.1.2018.143371.

110. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В. Вимушені коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в’язкопружної пластини з п’єзосенсорами з урахуванням геометричної не лінійності та деформацій поперечного зсуву. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 65–72.

111. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. К.:Наук. думка, 1982. 258 с.

112. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. К.: Наук. думка. 1986. 224 с.

113. Кирилюк В.С., Левчук О.И., Ткаченко В.Ф. Обратная задача термоупругости для изотропной среды с полостью при трехосном растяжении и постоянной температуре на ее поверхности. *Проблемы прочности*. 2007. №1. С. 121–131.

114. Кир’ян В.І. Осадчук В.А., Николишин М.М. Механіка руйнування зварних з’єднань металоконструкцій. Львів: Сполом, 2007. 320 с.

115. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1989. 288 с.

116. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1983. 280 с.

117. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Богуславська А.М. Термопружна задача для порожнистого циліндра з композиційного матеріалу з транстропним волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 82–89.

118. Коваленко О.В., Кузьменко В.І. Обернена контактна задача проектування багатошарових тіл. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Т. 19. С. 153–159.

119. Коваленко А.Д. Избранные труды. К.: Наук. думка, 1976. 762 с.

120. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка. 1992. 280 с.

121. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных

материалов. Кишинев: Картя Молдовеняекэ, 1971. 172 с.

122. Колчин Г.Б., Фаверман ЭА. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель. Кишинев: Штииница, 1977. 146 с.

123. Колчин Г.Б., Фаверман Э.А. Теория упругости неоднородных тел. Бибоиографичесзай указатель отечественной и иностранной литературы за 1974-1979 гг. Кишинев: Штииница, 1987. 166 с.

124. Кушнір Р. М.,Попович В.С.Напружений стан термочутливої пластини в центрально-симетричному температурному полі. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2006. Т. 42, №2.С. 5–12.

125. Кушнір Р.М., Попович. В.С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. Під ред. Я. Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл. Кушнір Р. М., Попович. В. С. Львів: СПОЛОМ, 2009. 412 с.

126. Кушнір Р.М., Попович В.С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2013. №3. С. 42–47.

127. Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра в 5 т. Т. 5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. Львів: СПОЛОМ, 2011. 256 с.

128. Кушнір Р.М., Процюк Ю.Б. Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності. *Машинознавство*. 2009. №1. С. 13–18.

129. Кушнір Р.М., Процюк Ю.Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих за циліндрів та куль за конвективно-променевого теплоообіну. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2008. Вип. 8. С. 103–112.

130. Кушнір Р.М., Процюк Ю.Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів тепло-

провідності. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2010. Т. 46. №1. С. 7–18.

131. Кушнір Р.М., Ясінський А.В. Ідентифікація теплового і термонапруженого станів термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2007. Т. 43. № 6. С. 55–61.
132. Кушнір Р.М., Ясінський А.В. Обернена задача термопружності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2007. Т. 50. № 3. С. 140 – 145.
133. Кушнір Р.М. Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Сполом, 2003. 320 с.
134. Кушнір Р.М., Горошко В.О., Калиняк Б.М. Визначення термопружного стану тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки*. 2017. Вип. №3. С.111–114.
135. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів.: Навчальний посібник. К.: НМЦ ВО, 2003. 210 с.
136. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Глав. ред. физ.-мат. «Наука», 1977. 416 с.
137. Лобода В.В. Контактна модель тріщини в ортотропному матеріалі. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1999. Т. 35. № 5. С. 59–66.
138. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифферениальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. *УМЖ*. 1953. Т. 5. № 2. С. 123–151.
139. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
140. Максимук О.В., Стащук М.Г., Дорош М.І. Розрахунок параметрів стільникового полімерного трубопроводу, підкріпленого періодичною системою пружних шрангоутів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2009. Т. 52. № 2. С. 157–165.

141. Мартиняк Р.М., Дмитрів М.І. Скінченноелементне дослідження напружено-деформованого стану неоднорідної прямокутної пластини. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. –2009. Т. 52. № 1. С. 107–114.

142. арчук М.В., Харченко В.М., Хом’як М.М. Математична модель визначення ефективних фізико-механічних характеристик перехресно армованого шару. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2018. Вип. 16. С. 64–73. https://doi.org/10.15407/apmm2018.16.

143. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в 2-х т. К.: Наук. думка, 2002. Т. 1: Методология. 408 с.

144. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в 2-х т. К.: Наук. думка, 2002. Т. 2: Приложения. 392 с.

145. Мацевитый Ю.М., Лушпенко С.Ф. Идентификация теплофизических свойств твердых тел. К.: Наук. думка, 1990. 216 с.

146. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Идентификация в задачах теплопроводности. К.: Наук. думка, 1982. 240 с.

147. Мацевитый Ю.М., Прокофьев В.Е., Широков В.С. Решение обратных задач теплопроводности на электрических моделях. К.: Наук. думка, 1980. 132 с.

148. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурними полями. М.: Физматгиз, 1958. 167 с. Те ж саме: Melan H., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer-Verlag, 1953. 114 S.

149. Минько Д. В., Белявин К. Е., Шелег В.К. Теория и практика получения функциональноградиентных материалов импульсными электрофизическими методами. Минск: БНТУ, 2020. 450 с.

150. Михаськів В.В. Метод граничних інтегральних рівнянь у динамічних тривимірних задачах теорії пружності для тіл із тріщинами: дис. докт. фіз.мат. наук: 01.02.04. Львів, 1998. 300 с.

151. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. К.: Наук. думка,

1988. 288 с.

152. Мотовиловец И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К.: Наук. думка, 1969. 114 с.
153. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5 т. К.: Наук. думка, 1987. Т. 1: Термоупругость. 1987. 264 с.
154. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. Львів: Растр-7, 2010. 216 с.
155. Мусхелов Н.И. О теплових напряжених в плоской задаче теории упругости. Известия Петроградского электротехнического института. 1916. Т. 13. № 1. С. 23–37.
156. Назарчук З.Т., Куриляк Д.Б., Михаськів В.В., Синявський А.Т., Чекурін В.Ф. Математичне моделювання взаємодії фізичних полів із дефектами матеріалу. Львів: Простір-М, 2018. 512 с.
157. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872 с.
158. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
159. Новомлинець О.О., Олексієнко С.В., Ющенко С.М., Мартиненко В.О. Дослідження деформаційної кінетики алюмінію при високих температурах. *Технічні науки та технології*. 2015. Т. 2. № 2. С. 67–72.
160. Ободан Н.И., Гук Н.А. Обратные задачи в теории тонких оболочек . LAPLAMBERT Academic publishing, 2012. 242 с.
161. бодан Н.И. Гук Н.А. Идентификация обратных задач деформирования тонкостенных оболочек методом декомпозиции. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2010. Т. 53. №3. С. 105–116.
162. Ободан Н.І. Гук Н.А. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*. 2011. №1. С. 47–50.
163. Ободан Н.И. Гук Н.А. Оптимальное охлаждение нагретых тонкостенных

систем при пробое теплозащиты. *ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2005. Вып. 4. С. 80–84.

164. Панферов В.М. Леонова Э.А. К решению задач термоупругости с переменными модулями. *Проблемы прочности*. 1975. №6. С. 22–27.
165. Пасічник В.А. Стан і перспективи адитивного виробництва. *Резание и инструменты в технологических системах.* 2018. Вып. 89. С. 134–140.
166. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М. Вивчення напруженого стану тіл із функціонально-градієнтних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 95. С. 35–80.
167. Підстригач Я.С. Вибрані праці. К.: Наук. думка, 1995. 460 с.
168. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.
169. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1981. 343 с.
170. Повгородний В.О. Обратные задачи термоупругих напряжений при нестационарных режимах. *Авиационно-космическая техника и технология.* 2013. №. 4. Вып. 101. С. 45–48.
171. Повгородний В.О. Идентификация параметров термоупругости тонкостенных систем при неоднородном напряженно-деформированном состоянии на основе решения обратных задач термоупругости. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2013. № 8. Вып. 105. С. 31–34.
172. Повгородний В.О. Определение коэффициента температуропроводности на основе решения обратных задач несвязанной термоупругости. *Авиационно-космическая техника и технология.* 2011. Вып. 87. № 10. С. 207–210.
173. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: «Факториал», 1998. 432 с.
174. Подолинский С.А. Труд человека и его отношение к распределению энергии. Москва: Белые Альвы, 2005. 160 с.

175. Подолинський С.А. Людська праця і єдність сили. *Вибрані твори.* Монреаль:Українське історичне товариство, 1990. С. 151–189.
176. Подстригач Я.С., Буряк Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. К.: Наукова Думка, 1977. 248 с.
177. Подстригач Я.С., Буряк Я.И., Шелепец В.И., и др. Оптимизация и управление в электровакуумном производстве. Киев: Наук. думка, 1980. 216 с.
178. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
179. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. К.: Наук. думка, 1985. 200 с.
180. Подстригач Я.С. Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К. : Наук. думка, 1978. 320 с.
181. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Исследование напряженного состояния твердых тел с инородными включениями и тонкими покрытиями при изменении температур. *Проблемы прочности*. 1970. №11. С. 37–40.
182. Попович А.Г., Шевченко В.Г. Методика оптимизации состава покрытий для работы в условиях градиента температур. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2008. №1. С. 86–93.
183. Попович В.С., Калиняк Б.М. Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2005. Т. 48, №2. С. 126–136.
184. Попович В.С., Калиняк Б.М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. Т. 57, № 2. С. 169–185. Те ж саме Popovych V. S., Kalynyak B. M. Mathematical Modeling and Methods for the Determination of the Static Thermoelastic State of Multilayer Thermally Sensitive Cylinders. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 215. No. 2. P. 218–242. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y.

185. Попович В.С., Вовк О.М., Гарматій Г.Ю. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. № 4. С. 151–158. Те ж саме: Popovych V.S., Vovk O.M., Harmatii H.Y. Investigation of the static thermoelastic state of a thermosensitive hollow cylinder under convective-radiant heat exchange with environment. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. Vol. 187. No. 6. P. 726–736. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1097-4.

186. Попович В., Гарматій Г., Вовк О. Термопружний стан термочутливої тонкої пластини за умов нагрівання джерелом тепла та теплообміну з оточуючим середовищем. *Машинознавство*. 2007. № 7. С. 21–25.

187. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев-Донецк: Вища школа, 1984. 158 с.

188. Постольник Ю.С. Металургійна термомеханіка. Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. 633 с.

189. Процюк Б.В., Горун О. П. Термопружний стан кусково-однорідного тіла під час остигання за різних початкових температур складових. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2013. Вип. 11. С. 90–100.

190. Процюк Б.В. Моделювання та визначення з використанням побудованих фукцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: дис. докт. фіз.мат. наук: 01.02.04. Львів. 2006. 398 с.

191. Процюк Б.В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком *Теор. и прикл. механика.* 2003. №38. С. 63–69.

192. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд–во Белорус. ун-та, 1972. 200 с.

193. П'янило Я.Д., Лопух Н.Б. Дослідження перехідних часів та узгодженості крайових умов за нестаціонарного руху газу в трубопроводі. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2012. Вип. 10. С. 147–151.

194. Рвачев В.Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения. К.: Наук.

думка, 1982. 552 с.

195. Русинко К.Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища школа, 1981. 148 с.
196. Рущицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 1997. 377 с.
197. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К.: Наук. Думка, 1981. 325 с.
198. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод конечных элементов. Львов: Вища школа, 1976. 80 с.
199. Самарский А.А, Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
200. Седов Л.И. Введение в механику сплошных сред. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
201. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. *Успехи математических наук.* 1965. Т. 29. № 5. С. 121–180.
202. Сеньків М.Т. Векторний і тензорний аналіз: Текст лекцій. Львів: Ред. видавн. Відділ Львів ун-ту, 1990. 146 с.
203. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных середах. К.: Наук. думка, 1989. 204 с.
204. Сенченков И.К., Червинко О.П., Рябцев И.А. Численное моделирование НДС и микроструктурного состояния валка горячей прокатки в процессе многослойной наплавки и эксплуатации. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Технічні науки*. 2013. Вип. 2. С. 139–144. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpddtu_2013_2_33.
205. Слюсарчук П.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ужгород: Карпати, 2005. 178 с.

206. Стащук М.Г. Врахування впливу середовищ в оцінюванні експлуатаційної здатності металевих виробів. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2012. Т. 48. №6. С. 60–66.

207. Сулим Г.Т. Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл (огляд). *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2004. Т. 47. №3. С. 110–125.

208. Тацій Р.М., Трусевич О.М. Прямий метод розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику. *Вісник ЛДУ БЖД*. 2016. №13. С. 149–154.

209. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. М.: Госиздат тех.-теор. лит. 1957. 536 с.

210. Токова Л.П., Ясінський А.В. Напружений стан багатошарового неоднорідного циліндра за рівномірного стиску бічної поверхні. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2013. Вип. 11. С. 101–107.

211. Токовий Ю.В. Пружна рівновага однорідних і неоднорідних тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями : автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04. НАН України, Ін-т приклад. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. Львів. 2013. 318 с.

212. Улітко А.Ф. Вибрані праці. К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2004. 457 с.

213. Фильштинский Л.А.,. Сиренко Ю.В. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости. *Теоретическая и прикладная механика*. 2003. № 37. С. 157–161.

214. Фильштинский Л.А., Кобзарь В.Н. Плоская задача связанной термоупругости для пластин с отверстиями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2006. Т. 49. № 1. С. 164–173.

215. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.:Мир, 1961. 428 с.

216. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. К.: Наук. думка, 1984. 112 с.

217. Чекурін В.Ф., Процюк Б.В. До ідентифікації параметрів багатошарових покрить за відомими переміщеннями поверхні при локальному нагріві. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2004. Т. 40, № 1. С. 7-15.
218. Чекурін В., Сінькевич О. Обернена задача ідентифікації при поверхневих порожнин у твердих тілах із використанням ІЧ-термографії. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології: збірник наукових праць*. 2015. № 826. С. 142–149.
219. Шевченко В.Г., Попович О.Г. Методика розрахунку складу покриття для мінімізації в ньому температурних напружень. *Вестник двигателестроения*. 2010. №1. С. 96–98.
220. Шевченко В.П., Цванг В.А. Граничные интегральные уравнения в теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-во Дон. ГУ, 1986. 100 с.
221. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязко-упругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. К.: Наук. думка, 1992. 328 с.
222. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 2: Термовязкопластичность.К.: Наук. думка, 1987. 263 с.
223. Шевчук В.А., Калиняк Б.М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покривами . *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2010. 46, № 6. С. 35–41. Те саме: Shevchuk V.A., Kalynyak B. M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2011. Vol. 46, No.6. P. 747–756.
224. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. К.: Наук. думка, 1981. 200 с.
225. Ясинский А.В. Идентификация теплового и термонапряженного состояний двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям. *Прикл. механика*. 2008. Т. 44, № 1. С. 40–47.
226. Ясінський А.В., Єрохова О.В. Оптимізація нестаціонарних темпе-

ратурних переміщень у заданому перерізі півпростору, що перебуває у стані плоскої деформації. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. 58. № 2. С. 140–147. Те саме: Yasinskyy A.V., Ierokhova O.V. Optimization of Nonstationary Thermal Displacements in a Given Cross Section of a Half Space in the Plane Strain State. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. 223. P. 173–183. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3346-z.

227. ABAQUS/CAE User's Manual. Dassault Systèmes, 2010. 773 p.
228. ABAQUS Theory Manual. Dassault Systèmes, 2012. 842 p.
229. Abrinia K., Naee H., Sadeghi F., Djavanroodi F. New Analysis for The FGM Thick Cylinders Under Combined Pressure and Temperature Loading . *American Journal of Applied Sciences*. 2008. Vol. 5. No. 7. P. 852 –859.
230. Akbarzadeh A.H., Chen Z.T. Transient Heat Conduction in Functionally Graded Hollow Cylinders and Spheres. *Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels & Piping Conference, PVP2012, July 15-19*. 2012, Toronto, Ontario, Canada. 2012. P. 41–47. https://doi.org/10.1115/PVP2012-78617.
231. Andreev L.V., Mossakovskii V.I., Obodan N.I. On Optimal Thickness of a Cylindrical Shell Loaded by External Pressure. *J.of Appl. Math. and Mech*. 1972. Vol. 36. No.4. P. 633–642.
232. Ashby M.F. Materials and the Environment. Eco-Informed Material Choice Second Edition. Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San-Diego-San Francisco Singapore-Sydney-Tokyo:Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier, 2013. 446 p. https://doi.org/10.1016/C2010-0-66554-0.
233. Ataei H., Mamaghani H. Finite Element Analysis Applications and Solved Problems using ABAQUS. Createspace Independent Publishing Platform, 2017. 372 p.
234. Atkinson K.E., Han W., Stewart D. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. 261 p.

235. Auerbach S.M., Handbook of Layered Materials. NY, Basel: CRC Press, 2004. 660 p.

236. Azadi Mohammad, Azadi Mahboobeh. Thermoelastic Stresses in FG-Cylinders: Heat Transfer–Mathematical Modelling. *Numerical Methods and Information Technology*. Aziz Belmiloudi (ed.). InTech, 2011. P. 253–270.

237. Apalak M.K., Gunes R. Thermal Residual Stress Analysis of Ni–Al2O3, Ni–TiO2, and Ti–SiC Functionally Graded Composite Plates Subjected to Various Thermal Fields. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. 2005. Vol. 18. No.2. P.119–152. htpps://doi.org/10.1177/0892705705043534.hal-00570795.

238. Birman V, Byrd L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. *Applied Mechanics Reviews*. 2007, Vol. 60. P. 195–215.

239. Birman V. Functionally Graded Materials and Structures . In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. Dordrecht etc.: Springer, 2014. Vol. 3. P. 1858–1864. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_573.

240. Bohidar S.K., Sharma R., Mishra P.R. Functionally Graded Materials: A Critical Review. *International Journal of Research (IJR)*. 2014. Vol. 1. No. 7. P. 289–301.

241. Brass A., Chene J. Influence of deformation on the hydrogen behavior in iron and nickel base alloys: a review of experimental data. *Materials Science and Engineering: A*. 1998. Vol. 242. No. 1–2. P. 210–221. https://doi.org/10.1016/s0921-5093(97)00523-6.

242. Cengel Y.A. Heat Transfer. A Practical Approach. New York: Mc.Graw-Hill Higher Education, 2002. 936 p.

243. Chekurin V., Postolaki L. Residual stresses in a finite cylinder. Direct and inverse problems and their solving using the variational method of homogeneous solutions. *Mathematical Modeling and Computing*. Lviv: Lviv Politechnic Publishing House, 2018. Vol. 5. No. 2. P. 119–133.

244. Ching H.K., Chen J.K. Thermal Stress Analysis of Functionally Graded

Composites with Temperature-Dependent Material Properties. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2007. Vol. 2. No.4. P. 633–653.

245. Cho J.R., Ha D.Y. Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni–Al_2O_3 functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*. 2002. Vol. 334. P. 147–155. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(01)01791-9.
246. Clements D.I, Rogers C. On the Bergman operator method and anti-plane contact problems involving an inhomogeneous half-space. *SIAM J. Appi. Math.* 1978. Vol. 34. No. 4. P. 764–773.
247. Corduneanu C. Integral Equations and Applications. Arlington.Cambridge University Press, 2008. 376 p.
248. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. *Advances in Computational Mathematics.* 1996. Vol. 5. P. 329–359.
249. Correia F.V.; Moita J.S.; Moleiro F., Soares C.M.M. Optimization of Metal–Ceramic Functionally Graded Plates Using the Simulated Annealing Algorithm *.Appl. Sci.* 2021. Vol. 11. 729. https://doi.org/10.3390/app11020729.
250. Dhaliwal R.S, Singh A. Dynamic coupled thermoelasticity. New Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1980. 758 p.
251. Dhitala S., Rokayaa A., Kaizer M.R., Zhang Yu, Kima J. Accurate and efficient thermal stress analyses of functionally graded solids using incompatible graded finite elements. *Composite Structures*. 2019. Vol. 222. 110909. P. 1–13. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.110909.
252. Ding S., Wu C.P. Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties. *Int. J. Mech. Mater. Des*. 2018. Vol. 14. P. 527–549. https://doi.org/10.1007/s10999-017-9388-z.

253. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Comput. J.* 1974. Vol. 17. P. 371–376. https://doi.org/10.1093/comjnl/17.4.371.
254. El-Naggar A.M., Abd-Alla A.M., Fahmy M.A., Ahmed S.M. Thermal stresses in a rotating non-homogeneous orthotropic hollow cylinder. *Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 39. P. 41–46. https://doi.org/10.1007/s00231-001-0285-4.
255. Eringen A.C. Mechanics of continuum. New York: Wiley, 1967. 562 p.
256. Fichera G. Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity. In: *Partial Differential Equations and Continuum Mechanics*. Ed. Rudolf E. Langer . Madison: Univ. Wisconsin Press, 1961. P. 55–80.
257. Filatov G. Optimal Design of Structures by the Combined use of Mathematical Models of Corrosion Destruction. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*. 2016. Vol. 6. No. 6. P. 6–15.
258. Flügge W. Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1972. 216 p.
259. Fredholm E.I. Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet. *Kong. Vetenskaps Akademiens Forh. Stockholm*. 1900. S. 39–46.
260. Functionally graded materials in the 21 st century: a workshop on trends and forecasts. Edited by Kiyoshi Ichikawa. 2001. Vol. XVI. 242 p.
261. Furuhashi R. Kataoka M. On the integral equations of the basic boundary value problems of elasticity of inhomogeneous media. *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.* 1967. Vol. 33. No. 253. P. 1331–1343.
262. Furuhashi, R. Kataoka M. Theory of elastic potential of inhomogeneous materials. *Bull. JSME*. 1968. Vol. 11. No. 48. P. 972–982.

263. Furuhashi R. On the uniqueness and the existence of solution in elastostaric for inhomogeneous materials. *Bull. Japan Soc. Mech. Eng*. 1972. Vol. 15. No.83. P. 657–662.

264. Furuhashi R. On Green's function in elastostatics for inhomogeneous materials. *Res. Rep. Faculty Engng, Meiji Univ*. 1972. No. 26/27. P. 11–19.

265. Furukawa G.T., Douglas T.B., McCoskey R.E., Ginnings D.C. Thermal Properties of Aluminum Oxide From 0° to 1,200° K. *Journal of Research of the National Bureau of Standards.* 1956.Vol. 57. No.2. P. 67–82.

266. Ghadle K.P., Adhe A.B. Steady-State Temperature Analysis to 2D Elasticity amd Thermo- Elasticity Problems for Inhomogeneous Solids in Half-Plane. *J. KSIAM.* 2020. Vol. 24. No.1. P. 93–100. http://dx.doi.org/10.12941/jksiam.2020.24.093.

267. Ghoniem N.M. High-temperature mechanical and material design for SiC composites. *Journal of Nuclear Materials*. 1992. Vol. 191–194. Part A. Sec.4. P. 515–519. https://doi.org/10.1.1.1087.4333.

268. Gibson I. Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. 3D Printing, Rapid Prototyping, and Direct Digital Manufacturing. 2nd ed. Springer, 2015. 510 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2113-3.

269. Glouannec P., Michel B., Delamarre G., Grohens Y. Experimental and numerical study of heat transfer across insulation wall of a refrigerated integral panel van. *AppliedThermal Engineering*. 2014. Vol. 73. No.1. P. 196–204. https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2014.07.044.

270. Godard H.P., Harwood J.J. Some Remarks on Stress Corrosion Testing –An Educational Lecture. *Corrosion.* 1955. Vol. 11. No.2. P. 53–58. https://doi.org/10.5006/0010-9312-11.2.53 godard1955.

271. Goodman T.R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer. *Advances in Heat Transfer*. 1964. Vol. 1. P. 51–122. https://doi.org/10.1016/s0065-2717(08)70097-2.

272. Goupee A.J. Vel S.S. Two-dimensional optimization of material composition of functionally graded materials using meshless analyses and a genetic

algorithm. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 2006. Vol. 195. No.44–47. P. 5926 –5948.

273. Gristchak V.Z., Gristchak D.D., Fatieieva Yu.A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications: monograph. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.
274. Gürdal Z, Haftka R.T., Ha P. Design and Optimization of Laminated Composite Materials. NY: Wiley-Interscience, 1999. 352 p.
275. Gupta A., Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*. 2015. Vol. 79. P. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001.
276. Halpin J.C., Kardos J.L. The Halpin–Tsai equations: a review. *Polym. Eng. Sci*. 1976. Vol. 16. No.5. P. 344–352. https://doi.org/10.1002/pen.760160512.
277. Harris B. Engineering composite materials. London: The Institute of Materials, 1999. 194 p.
278. Harwood J.J. The Influence of Stress on Corrosion (Part 1 of Two Parts) *Corrosion*. 1950, Vol. 6. No. 8. P. 249–259. https://doi.org/10.5006/0010-9312-6.8.249, (Part 2 of Two Parts) *Corrosion*. 1950 Vol. 6. No. 9. p. 290–307. https://doi.org/10.5006/0010-9312-6.9.290.
279. Hashin Z, Shtrikman S.A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J Mech Phys Solids*. 1963. Vol. 11. No.2. P.127– 140. https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7.
280. Hashin Z. Analysis of composite materials: a survey. *.J. Appl. Mech.* 1983. Vol. 50. No.3. P. 481–505. https://doi.org/10.1115/1.3167081.
281. Hetnarski R., Eslami M.R. Thermal stresses–Advanced theory and applications. New York: Springer, 2008. 559 p. Ser. Solid Mechanics and Applications. Vol. 158 / Ser. Ed. G. M. L. Gladwell.

282. Holland J. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Michigan: MIT, 1992. 232 p.

283. Honma T., Sasaki I., Nobuhiro T. Fabrication of Functionally Graded SiO2-Mo Material by Centrifugation and Floc-Casting of Highly Concentrated Slurry. *Int. J. Appl. Ceram. Technol*. 2012. No.1. P. 1–6. https://doi.org/10.1111/j.1744-7402.2011.02746.x.

284. Hwu C. Anisotropic elastic plates. London: Springer, 2010. 673 p.

285. Jha D.K., Kant T., Singh R.K. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*. 2013. Vol. 96. P. 833–849.

286. Jones R.M. Mechanics of composite materials: 2nd ed. Philadelphia : Taylor & Francis, 1999. 519 p.

287. Kakiuchi A., Ootao Y., Kameo Y., Ishihara M. Optimization of Material Composition of Hollow Sphere of Functionally Graded Material with Piecewise Power Law Nonhomogeneity for Thermal Stress Relaxation. *The Proceedings of Conference of Kansai Branch.* 2013. Vol. 4–5. P. 405. https://doi.org/10.1299/jsmekansai.2013.88._4-5_.

288. Kalynyak B., Popovych V.S. Thermal Stresses in Multi-Layer Thermal sensitive Cylinder at Asymptotic Thermal Conditions. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (THERMAL STRESSES 2005, Mai 26–29, Vienna, Austria). 2005. P. 119–122.

289. Kalynyak B., Teslyuk A., Tokovyy Yu. The Analysis of Elastic and Thermo-elastic Equilibrium of Inhomogeneous in Radial Direction Circular Cylinders. *35-th Solid Mechanics Conference*, Kraków, September 4–8. 2006. P. 318.

290. Kanwal R.P. Linear Integral Equations: Theory & Technique, Modern Birkhäuser Classics. New York: Springer Science+Business Media, 2013. 306 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6012-1.

291. Kar K.K. Composite materials: processing, applications, characterizations. Springer, 2017. 694 p.

292. Khobragade K.W., Varghese V., Khobragade N.W. An Inverse Transient Thermoelastic Problem Of A Thin Annular Disc. *Applied Mathematics E-Notes*. 2006. Vol. 6. P. 17–25.
293. Kmenta J. Elements of econometrics. New York: Macmillan; London: Collier Macmillan, 1986. 792 p.
294. Kursun A., Kara E., Zetin E., Aksoy S., Kesimli A. Mechanical and Thermal Stresses in Functionally Graded Cylinders. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*. 2014. Vol. 8. No.2. P. 301–306.
295. Kushnir R.M., Popovych V.S. Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conduction. Basic Research. V.S.Vikhrenko (ed). in Tech., 2011. P. 131–154.
296. Kushnir R., Popovych V. Application of the Generalized Functions Method for Analysis of Thermal Stresses in Piecewise-Homogeneous Solids. Encyclopedia of Thermal Stresses. (Ed.)Hetnarski, Richard B. 2014. P. 224–230.
297. Kushnir R. Protsiuk B. Determination of the Thermal Fields and Stresses in Multilayer Solids by Means of the Constructed Green Functions/ Roman Kushnir. Encyclopedia of Thermal Stresses. Hetnarski**,** Richard B. (Ed.). 2014. P. 924–931.
298. Kaushik K., Davim J.P. (Eds.) Hierarchical Composite Materials. Advanced Composites. Berlin, De Gruer, 2018. 188 p.
299. Łatka L., Pawłowski L., Winnicki M., Sokołowski P., Małachowska A., Kozersk S. Review of Functionally Graded Thermal Sprayed Coatings. *Appl. Sci*. 2020. Vol. 10. 5153. https://doi.org/10.3390/app10155153.
300. Li X.-F., Peng X.-L., Lee K.-Y. Radially polarized functionally graded piezoelectric hollow cylinders sensors and actuator. *Europ. J. Mech. A*. 2010. Vol. 29. No. 4. P.413–437.
301. Ling Yun-Han, Li Jiang-Tao, Ge Chang-Chun, Bai Xin-De. Fabrication and evaluation of SiC/Cu functionally graded material used for plasma facing

components in a fusion reactor. *Journal of Nuclear Materials*. 2002. Vol. 303. No.2–3. P. 188–195.

302. List of thermal conductivities. In: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities.
303. Lord H.W., Shulman Y.A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967, Vol. 15. No.5. P. 299–309.
304. Malzbender J. Mechanical and thermal stresses in multilayered materials *Journal of Applied Physics*. 2004.Vol. 95. No.4. P. 1780–1782.
305. Manthena V.R., Kedar G.D. Mathematical Modeling of Thermoelastic State of a Functionally Graded Thermally Sensitive Thick Hollow Cylinder with Internal Heat Generation. *International Journal of Thermodynamics(IJoT)*. 2018. Vol. 21. No. 4. P. 202–212. https://doi.org/10.5541/ijot.434180.
306. Manthena V.R., Srinivas V.B., Kedar G.D. Analytical solution of heat conduction of a multilayered annular disk and associated thermal deflection and thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*. 2020. Vol. 43. No.5. P. 563–578. https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1735975.
307. Mazumdar S.K. Composites Manufacturing: Materials, Product, and Process Engineering. CRC Press, 2001. 396 p.
308. Mechanical&Industrial Ceramics. Japan, Kyocera Corporation. 2021. 15 p. https://global.kyocera.com/prdct/fc/product/pdf/mechanical.pdf.
309. Merzlyakov V.A., Galishin A.Z. Calculation of the Thermoelastoplastic Nonaxisymmetric Stress-Straine State of Layered Orthotropic Shells of Revolution. *Mech. Compos. Mater*. 2002. Vol. 38. No1. P. 25–40. https://doi.org/10.1023/A:1014004822740.
310. Mishra N., Das1 K.A. Mori–Tanaka Based Micromechanical Model for Predicting the Effective Electroelastic Properties of Orthotropic Piezoelectric Composites with Spherical Inclusions. *SN Applied Sciences*. 2020. Vol 2. P. 1206. https://doi.org/10.1007/s42452-020-2958-y.
311. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of

materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 1973. Vol 21. No.5. P. 371–374. https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3.

312. Moskowitz S.L. The advanced materials revolution: technology and economic growth in the age of globalization. Wiley, 2009. 280 p.
313. Munro R.G. Material Properties of Sintered α-SiC .*Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 1997. Vol. 26. No. 5. P. 1195–1203. https://doi.org/10.1063/1.556000.
314. Nabian M., Ahmadian M.T. Multi-Objective Optimization of Functionally Graded Hollow Cylinders. *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2011 November 11-17*. Denver, Colorado, USA. 2011. P. 1–8.
315. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*. 2016. Vol. 5. P. 223–245.
316. Nemat-Alla M. Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. P. 7339 –7356.
317. Nie G.J., Zhong Z., Batra R.C. Material tailoring for functionally graded hollow cylinders and spheres. *Composites Science and Technology*. 2011. Vol. 71. No. 5. P. 666–673
318. Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M. A Review on Optimization of Composite Structures. Part I: Laminated Composites. *Composite Structures*. 2018. Vol. 195. No.1. P. 158–185. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.063.
319. Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M. A Review on Optimization of Composite Structures. Part II: Functionally graded materials. *Composite Structures*. 2019. Vol. 214. No.1. P. 83–102. https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2019.01.105.
320. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties. Thermal Stresses I. R. B. Hetnarski (ed.), 1986. P. 391–483.

321. Noda N. Thermal Stresses in Functionally Graded Materials. *Journal of Thermal Stresses*. 1999. Vol. 22. No.4–5. P. 477–512. https://doi.org/10.1080/014957399280841.
322. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *Journal of Thermal Stresses*. 1994. Vol. 17. No. 3. P. 471–487.
323. Olszak W. Non-homogeneity in elasticity and plasticity. New York: Pergamon Press, 1959. 529 p.
324. Pawar S.P., Deshmukh K.C., Kedar G.D. Thermal stresses in functionally graded hollow sphere due to non-uniform internal heat generation. *Applications and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 10. No.1. P. 552–569.
325. Pekeris C.L. The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media. *Physics*. 1935. Vol. 6. P. 133–138.
326. Peng X.L., Li X.F. Thermoelastic analysis of a cylindrical vessel of functionally graded materials. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2010. Vol. 87. No.5. P. 203–210.
327. Peng X. L., Li X. F. Transient response of temperature and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder. *Journal of Thermal Stresses*. 2010. Vol. 33. No.5. P. 485 –500.
328. Physical Properties of Stainless Steel. https://tubingchina.com/Stainless-Steel-Physical-Properties.htm.
329. Podolinsky S. Le travail humain et la conservation de l'dnergie. *Revue internationale des sciences biologiques*.1880. Vol. 5. P. 57–80.
330. Podolinski S. Il socialismo e l'unitä delle force fisiche. *La Plebe Anno XIV*. 1881. Nuova Serie. No. 3. P. 13–16; No. 4. P. 5–15.
331. Podolinsky S. Menschliche Arbeit und die Einheit der Kraft. *Die Neue Zeit*. 1883. No. 9. S. 413–424. No. 10. S. 440–457.
332. Popovych V. Methods for Determination of the Thermo-Stressed State of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange Conditions. Encyclopedia of Thermal Stresses. R.B. Hetnarski(ed.).Springer, 2014. Vol.

6. P. 2297–3008.
333. Popovych V.S., Sulym H.T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body. *Materials Science.* 2004. Vol. 40. P. 365 –375. https://doi.org/10.1007/PL00022000.
334. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes, 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
335. Rahman M. Integral Equations and their Applications. WIT Press Ashurst Lodge, Ashurst, Southampton, UK, 2007. 386 p.
336. Rahman M., Haider J., Akter T., Hashmi M.S.J. Techniques for Assessing the Properties of Advanced Ceramic Materials. *Comprehensive Materials Processing*. 2014. Vol. 1. P. 3–34. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-096532-1.00124-2.
337. Rajan T.P.D., Pai B.C. Development in manufacturing processes of functionally graded materials. A review. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*. 2014. Vol. 27. No. 5. P. 825–838. https://doi.org/10.1007/s40195-014-0142-3.
338. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates. *Journal of Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21. No. 6. P. 593–626. https://doi.org/10.1080/01495739808956165.
339. Reddy J.N. Thermomechanical Behavior of Functionally Graded Materials. Final Report for AFOSR Grant F49620-95-1-0342. CML Report 98-01. 1998. 87 p.
340. Reddy J.N. Mechanics of Composite Materials: Selected Works of Nicholas J. Pagano. Springer, 1994. 460 p.
341. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung fur Einkristalle. *ZAMM.* 1929. Vol. 9. No. 1. S. 49–58. https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104.
342. akaue T., Iida K., Kawamura R., Tanigawa Y. Multi-objective Optimization of Material Composition in Functionally Graded Hollow Sphere by Making

Use of Genetic Algorithm: Effect of Porosity Distribution in Material Composition. *The Proceedings of Conference of Kansai Branch 2002*. 2002. P. 7-45–7-46. https://doi.org/10.1299/jsmekansai.2002.77._7-45_ .
343. Szabó I. Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. Birkhäuser Basel, 1979. 530 p.
344. Senchenkov I. K., Zhuk Ya.A, Karnaukhov V.G. Modelling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonical loading. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40. No. 9. P. 943–969. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0001-z .
345. Shao Z.S., Wang T.J., Ang K.K. Transient Thermo-Mechanical Analysis of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders. *Journal of Thermal Stresses*. 2007. Vol. 30. No.1. P. 81–104. http://dx.doi.org/10.1080/01495730600897211.
346. Sharma J.N., Sharma P.K., Mishra K.C. Dynamic response of functionally graded cylinders due to time-dependent heat flux. *Meccanica*. 2016. Vol. 51. No.1. P. 139–154. https://doi.org/10.1007/s11012-015-0191-3.
347. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlineal analysis of plates and shells. CRC Press, 2009. 280 p.
348. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G. Integral Equations: A compendium. Karlstad, 2002. 82 p.
349. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses* (TS 2007, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007). Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. Vol. 2. P. 549–552
350. Sobczak J.J., Drenchev L.B. Metal Based Functionally Graded Materials. Bentham Science Publishers, 2009. 80 p.
351. Sun L., Sneller A., Kwon P. Fabrication of alumina/zirconia functionally graded material: From optimization of processing parameters to phenomenological constitutive models. *Materials Science and Engineering A*.

2008, Vol. 488. No.1–2. P. 31–38. https://doi.org/10.1016/j.msea.2007.10.044.

352. Swaminathan K., Naveenkumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates.–A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 2015. Vol. 120. No.1. P. 10–31. http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070.
353. Tanigawa Y., Oka N., Akai T., Kawamura R. One-Dimensional Transient Thermal Stress Problem for Nonhomogeneous Hollow Circular Cylinder and Its Optimization of Material Composition for Thermal Stress Relaxation. *JSME International Journal. Series A*. 1997. Vol. 40. No.2. P. 117–127.
354. Tanigawa Y., Matsumoto M., Akai T. Optimization of Material Composition to Minimize Thermal Stresses in Nonhomogeneous Plate Subjected to Unsteady Heat Supply. *JSME International Journal.Series A*. 1997. Vol. 40. No.1. P. 84–93.
355. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Appl Mech. Rev*. 1995. Vol. 48. No 6. P. 287–300. https://doi.org/10.1115/1.3005103.
356. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and material thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent properties. *J. of Thermal Stresses*. 1996. Vol. 19. No.1. P. 77–102. https://doi.org/10.1080/01495739608946161.
357. Thai H-T., Kim S-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2015. Vol. 128. P. 70 –86. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010.
358. Todhunter I., Pearson K.A history of the theory of elasticity and of the strength of materials: from Galilei to Lord Kelvin. V 1. Galilei to Saint-Venant. Cambridge University Press, 2014. 945 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107280052.
359. Tokovyy Yu., Chyzh A., Ma C-C. An analytical solution to the axisymmetric thermoelasticity problem for a cylinder with arbitrarily varying

thermomechanical properties. *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. No.4. P. 1469–1485. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2012-3.

360. Tokovyy Yu. V. Ma C.-C. Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders. *J. Eng. Math.* 2008. Vol. 61. No.2–4. P. 171–184. https://doi.org/10.1007/s10665-007-9154-6.
361. Tokovyy Yu., Ma C.-C. Axisymmetric Stresses in an Elastic Radially Inhomogeneous Cylinder Under Length-Varying Loadings. *J. of App. Mech*. 2016. Vol. 83. No. 11. P. 111007-1–111007-7. https://doi.org/10.1115/1.4034459.
362. Tokovyy Yu. Direct Integration Method. Encyclopedia of Thermal Stresses / Editor: Prof. Richard B. Hetnarski. Springer, 2014 edition. P. 951–960. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7 .
363. Tokovyy Yu.V., Kalynyak B.M., Ma C.-C. Nonhomogeneous Solids: Integral Equation Approach. Encyclopedia of Thermal Stresses. Editor: Prof. Richard B. Hetnarski. Springer. 2014 edition (15 Sep 2013). P. 3350–3356. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_615.
364. Tokovyy Yu.V. Rychahivskyy A.V. Reduction of Plane Thermoelasticity Problem in inhomogeneous Strip to Integral Volterra Type Equation. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2005. Vol. 10. No.1. P. 91–100. https://doi.org/10.1080/13926292.2005.9637274.
365. Tokovyy Yu., Ma C.-C. Elastic Analysis of Inhomogeneous Solids: History and Development in Brief. *Journal of Mechanics*. 2019. Vol. 35. No.5. P. 613–626. https://doi.org/10.1017/jmech.2018.57.
366. Tokovyy Yu., Ma C.-C. The Direct Integration Method for Elastic Analysis of Nonhomogeneous Solids. Cambridge Scholars Publishing, 2021. 347 p.
367. Tokovyy Yu., Yasinskyy A., Kalynyak B. An efficient method for analysis of steady-state stresses and optimal heating control in inhomogeneous composites. *Book of Abstracts Sixteenth International Conference on Mechanics of Composite Materials* (Riga, Latvia, May 24–28, 2010).Riga:

Institute of Polymer Mechanics, 2010. P. 97.

368. Tsai S.W. Environmental Factors in the Design of Composite Materials /Mechanics of Composite Materials. *Proceedings of the Fifth Symposium on Naval Structural Mechanics*. 1970. P. 749–767. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-006421-5.50041-1.

369. Tutuncu N.A., Temel B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. *Composite Structures*. 2009. Vol. 91. No.3. P. 385–390. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.06.009.

370. Uysal M.U. Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates .World Academy of Science, Engineering and Technology, *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 7. No.11. P. 2283–2289. https://doi.org/10.5281/zenodo.1089162.

371. Vatanabe S.L., Rubio W.M., Silva E.C.N. Modeling of Functionally Graded Materials. In *Comprehensive Materials Processing*. 2014. P. 261–282. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-096532-1.00222-3.

372. Vatulyan A.,·Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of “coating-substrate” system deformation. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2020. Vol. 32. No.4. P. 1173–1186. https://doi.org/10.1007/s00161-019-00824-9.

373. Vel S.S., Batra R.C. Exact thermoelasticity solution for cylindrical bending deformations of functionally graded plates. In K. Watanabe, F. Ziegler (Eds.), *Proceedings of IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures*. 2003. P. 429–438. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0371-0_42.

374. Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik*. 1889. Vol. 274. No. 12. S. 573–587. https://doi.org/10.1002/andp.18892741206.

375. Wang M., Pan N. Predictions of effective physical properties of complex multiphase materials. *Materials Science and Engineering*. 2008. Vol. 63. P.

1–30. https://doi.org/10.1016/j.mser.2008.07.001.

376. Wazwaz A.-M. Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications. Springer, 2011. 658 p.
377. Woo H.-G., Hong Li. Advanced Functional Materials. Springer, 2011. 240 p.
378. Yasinskyy A. Determination and Optimization of Stress State of Bodies on the Basis of Inverse Thermoelasticity Problems. In *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Hetnarski Richard B. (Ed.). 2014. P. 916–924. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607.
379. Yasinskiy A., Kalynyak B., Tokovyy Yu., Yuzvyak M. Identification of Thermal and Thermostressed States at Frictional Heating via the Surface Displacements for a Two-Layer Cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses* (TS2007, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007) Taipei: National Taiwan University of Science and Technology. 2007. Vol. 2. P. 567–570.
380. Yuzvyak M., Tokovyy Yu., Yasinskyy A. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *Journal of Thermal Stresses*. 2021. Vol. 44. No.3. P. 359–376. https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1826376.
381. Zhang C., Chen F., Huang Z., Jia M., Chen G., Ye Y., Lin Y., Liu W., Chen B., Shen Q., Zhang L., Lavernia E.J. Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science & Engineering A*. 2019, Vol. 764. 138209. https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209.
382. Zhuk Ya.A. Senchenkov I.K. On linearization of the stiffness characteristics of flexible beams made of physically nonlinear materials. *Int. Appl. Mech*. 2006. Vol. 42. No.2. P. 196–202. https://doi.org/10.1007/s10778-006-0076-1.