Міністерство освіти і науки України
Українська академія друкарства
Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача
Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**ПІСКОЗУБ ЙОСИФ ЗБІГНЕВИЧ**

УДК 539.3

# ДИСЕРТАЦІЯ
# СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ БІМАТЕРІАЛІВ З ТРІЩИНАМИ І ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

01.02.04 — механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

__________________Й.З. Піскозуб

Науковий консультант — Сулим Георгій Теодорович**,** доктор фіз.-мат. наук, професор.

Ідентичність всіх примірників дисертації ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради ___________/Ясінський А.В./

Львів — 2021

## АНОТАЦІЯ

**Піскозуб Й.З. Структурно-модульний метод функцій стрибка дослідження деформування біматеріалів з тріщинами і фізично нелінійними тонкими включеннями. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, 2021.

У дисертаційній роботі розроблені загальні математичні моделі і методи дослідження механічних полів у тілах з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями з урахуванням можливої неідеальності контактної взаємодії і впливу поверхневої енергії на інтерфейсах матеріалів та довільного типу і режиму квазістатичного навантаження-розвантаження (зокрема й циклічного).

На основі загальних співвідношень лінійної та нелінійної теорії пружності побудована цілісна система математичних моделей тонкого фізично нелінійного прошарку-включення, в т.ч. синтетична для багатошарового. З використанням принципу спряження континуумів різної вимірності, співвідношень задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та концепції методу функцій стрибка запропоновано структурно-модульний метод функцій стрибка, який дає змогу розв’язувати задачі теорії тонких включень з урахуванням нелінійностей конститутивних рівнянь і неідеального контакту.

Досліджено комбіновані плоско-антиплоскі задачі для кусково-однорідного масиву з фрикційним чи безфрикційним проковзуванням на межі контакту в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування. Для визначення апріорі невідомих зон проковзування застосовано інкрементальний підхід до урахування залишкових напружень під час багатокрокового навантажування–розвантажування силовими і дислокаційними чинниками. Розраховано розсіяння енергії, критичне

навантаження за умов як відсутності, так і наявності обмежень на розмір зон проковзування.

В рамках концепції механіки деформівного твердого тіла досліджено вплив дії дислокацій на масив з тонким ортотропним мікровключенням за існування додаткових поверхневих напружень на межі контакту. Для моделі тонкої багатошарової міжфазної неоднорідності досліджено зони «безпеки» розташування точок прикладання зосереджених силових чинників.

Розроблено методику розв'язування задач нелінійного деформування біматеріалів із тонкими міжфазними деформівними включеннями за умов довільного квазістатичного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування. Це дало змогу за допомогою запроопонованого структурно-модульного методу функцій стрибка отримати результуючі системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) (різні для окремих класів задач) та застосувати ефективні методи їхнього аналітично-числового розв'язування. Для розв'язування таких ССІР із змінюваними коефіцієнтами-функціями, які виникають при урахуванні фізичної нелінійності матеріалу включення (довільна діаграма деформування), опрацьовано та апробовано інкрементально-ітераційний метод. Для прикладу виконано конкретні розрахунки основних параметрів напружено-деформованого стану (НДС) для різних параметрів діаграми деформування Рамберга-Осгуда, ідеально пружно-пластичної з лінійним зміцненням та ін.

Результати роботи можуть бути застосовані для проектування нових матеріалів із бажаними експлуатаційними властивостями, прогнозування НДС та оптимізації навантажування тіл з тонкими стрічковими неоднорідностями як у механіці композитів, так і в мікро- та наномеханіці.

**Ключові слова:** біматеріал, тонке включення, багатошарове включення, фізична нелінійність, плоска задача, поздовжній зсув, фрикційний контакт, поверхневі напруження на межі поділу матеріалів.

## ABSTRACT

**Piskozub Y.Z. Structural-modular method of jump functions to study the deformation of bimaterials with cracks and physically nonlinear thin inclusions. - Manuscript.**

D. thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04 - mechanics of deformable solids. - Ya.S.Pidstrigach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, L’viv, 2021.

This dissertation work develops general mathematical models and methods for investigating mechanical fields in bodies with thin physically linear or nonlinear inhomogeneities taking into account possible non-ideality of contact interaction and surface effects as well as arbitrary type and regime of quasi-static loading-unloading (in particular, cyclic loading).

Based on the general relations of linear and nonlinear elasticity theory, a system of thin physically nonlinear inclusion-layer models, including synthetic multilayer ones, is constructed. Using the principle of conjugation of continua of different dimensions, the relations of the problem of conjugation of limit values of analytical functions, and the concept of the jump function method, a structural-modular method of jump functions is proposed which allows one to solve the problems by taking into account the nonlinear constitutional equations and contact conditions.

Combined plane-antiplane problems for a piecewise homogeneous array with frictional slip at the contact boundary under multistep loading-unloading conditions are investigated. An incremental approach is applied to determine the a priori unknown slip zones to account for residual stresses during multistep loading-unloading by force and dislocation factors. Energy dissipation, critical load in both absence and presence of limitations on the size of slip zones are calculated.

The effect of dislocation loading on a bulk with thin orthotropic microinclusion in the presence of additional surface stresses at the contact

boundary is investigated within the concept of mechanics of a deformable solid. For a multilayer model of a thin interphase inhomogeneity, the "safety zones" of points of application of concentrated force factors have been studied.

A method for solving the problems of nonlinear deformation of thin interfacial deformable inclusions in an arbitrary quasistatic multistep loading-unloading process was developed. This allowed us by the developed structural-module method of jump functions to obtain the resulting systems of singular integral equations (different for certain classes of problems) and to apply the effective for their analytical and numerical solution. An incremental iteration scheme is developed and tested in detail for solving such systems of integral equations with variable coefficients-functions that arise when physical nonlinearity of the inclusion material (an arbitrary strain diagram). As an example, we made specific calculations of the main parameters of the stress strain state for different Ramberg-Osgood, elastic-plastic and other types of strain diagrams.

The results of the work can be used for designing new materials with desired performance properties, predicting the deflected mode of action and optimizing the loading of bodies with thin ribbonlike inhomogeneities both in composite mechanics and in micro- and nanomechanics.

**Keywords:** bimaterial, thin inclusion, multilayer inclusion, physical nonlinearity, plane problem, longitudinal shear, frictional contact, surface stresses at the material interface.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА:

Web of Science ResearcherID V-6509-2019

https://orcid.org/0000-0001-7978-4052

Scopus Author ID: 5673709 6500

### Публікації в іноземних виданнях (Web of Science, Scopus)

1. Sulim G.T., Piskozub J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions. *Journal of Engineering Mathematics. Special Issue Thermomechanics*. 2008. 61. P. 315–337. URL: https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3
2. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. I. Single loading. *Acta Mechanica et Automatica.* 2015. **9**, № 2. P. 115–121. URL: https://doi.org/10.1515/ama-2015-0020
3. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and Cyclic loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 2015. **9**, № 3. P. 178–185. URL: https://doi.org/10.1515/ama-2015-0030
4. Sulym H., Pasternak Ia., Piskozub L., Piskozub Y. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack. *J. Theoretic. and Appl. Mech.* 2015. **54**, № 2. P. 529–539. URL: https://doi: 10.15632/jtam-pl.54.2.529
5. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018. 12, № 3. P. 190–195. URL: https://doi.10.2478/ama-2018-0029

**Публікації у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Web of Science, Scopus та є науковими фаховими виданнями України**

6. Piskozub I.Z., Sulym H.T. Asymptotics of stresses in the vicinity of a thin elastic interphase inclusion. *Materials Science*. 1996. **32,** No. 4. P. 421–432. URL: https://doi.org/10.1007/BF02538967
   Те саме: Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1996. 32, № 4. С. 39–48.
7. Sulym H.T., Piskozub I.Z. Nonlinear Deformation of a Thin Interface Inclusion. *Materials Science*. 2018. 53, № 5. С. 600–608. URL: https://doi.org/10.1007/s11003-018-0114-2
   Те саме: Сулим Г. Т., Піскозуб Й.З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017. 53, № 5. С. 24–30.
8. Sulym H.T., Piskozub J.Z. Conditions of contact interaction (a survey). *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya*. 2004. **47**, No. 3. P. 110–125.
   Те саме: Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл : огляд. *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* 2004. 47, № 3. С. 110–125.
9. Kolesov V.S., Piskozub I.Z. The influence of a spherical defect on the temperature field in a half-space under local heating. *Journal of Mathematical Sciences*. Volume 86, Issue 2. 1997. P. 2561–2564. URL: https://doi.org/10.1007/BF02356097
   Те саме: Колесов В.С., Пискозуб И.З. Влияние сферического дефекта на температурное поле в полупространстве при локальном нагреве. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 1996. 39, № 1. С. 47–50.
10. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив поверхневих напружень на антиплоский напружено-деформований стан тонкого стрічкового

міжфазного включення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. 63, № 2. С. 98–108.

11. Piskozub J.Z. Effect of surface stresses on the tensely deformed state of thin interface microinclusion. *Mathematical modeling and computing*. 2021. 8, № 1. P. 69–77.

**Публікації у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Copernicus та є науковими фаховими виданнями України**

12. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Антиплоска деформація біматеріалу з фізично нелінійним міжфазним тонким включенням. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 319–327.

**Публікації у наукових фахових виданнях України**

13. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г. Термонапружений стан кусково-однорідного середовища з тонкими міжфазними включеннями. *Крайові задачі термомеханіки :* збірник. Київ: Ін-т мат. НАН України. 1996. Ч. 2. С.64–68.
14. Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. 24. С. 73–85.
15. Піскозуб Й.З. Врахування часткового відшарування пружного міжфазного тонкого включення в умовах поздовжнього зсуву біматеріалу. *Прикладні проблеми механіки та математики.* 2020. 17. С. 162–167.
16. Piskozub Y.Z., Sulym H.T. Modeling of deformation of the bimaterial with thin Non-linear interface inclusion. *Researches in mathematics and mechanics*. 2020. 25, №2 (36). P. 40–54.

**Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації**

***Публікації у фахових виданнях для спеціальності «Математика»***

17. Божидарник В.В., Піскозуб Й.З., Попіна С.Ю., Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах із стохастичними теплопровідними тріщинами. *Вісник Львівського політехнічного ін-ту. 251. Диференціальні рівняння та їх застосування.* Львів. 1991. С. 9–15.

***Публікації у фахових виданнях для технічних наук***

18. Піскозуб Л.Г., Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Вісник Тернопільського національного технічного університету.* 2015. № 1 (77). С. 97–108.
19. Бернацек В.В., Піскозуб Й.З. Моделювання деформаційних явищ процесу каширування. *Кваліологія книги.* 2011. №1 (19). С.100–109.

***Публікації у інших наукових періодичних виданнях***

20. Сулим Г.Т., Оліярник Н.Р., Піскозуб Й.З., Пастернак Я.М. Поздовжній зсув біматеріального бруса з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки : спецвипуск.* 2015. С. 251–254.
21. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Фізично нелінійне деформування тонкого міжфазного включення за умов антиплоскої задачі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2019. Вип. 28, 29. С. 42–54.
22. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. *Ред. журн. "Инженерно-физический журнал".* Минск, 1986. 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 12 мая 1987 г. № 3396-В87 Деп.

    *Переклад:* Sulim G. T., Piskozub I. Z. Temperature gradient distribution in the vicinity of a thin thermal active insert. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1987. 53, № 4. P. 670.

**Праці апробаційного характеру**

23. Піскозуб Й. Моделювання тонкої багатошарової міжфазної неоднорідності у біматеріалі за умов поздовжнього зсуву. 15-*й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : матеріали симпозіуму. (Львів, 20–21 травня 2021 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2021. С. 44–45.
24. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. 9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Materials. (June 4–8, 2017, Augustow, Poland) : Proceedings. 2017. P. 115–121.
25. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з пружно-пластичним міжфазним тонким включенням. Тринадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові : матеріали симпозіуму. (Львів, 18–19 травня 2017 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2017. С. 50–52.
26. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Інкрементальний підхід до розв’язування задач деформування тонких фізично нелінійних включень. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки та математики :* збірник наукових праць (матер. міжн. наук. конф. Львів, 22–25 травня 2018 року). Львів, 2018. Т. 2. С. 98–99.
27. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Моделювання нелінійної контактної взаємодії тіл. *Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент :* матеріали Міжнародної наукової конференції. (м. Львів, 17–18 вересня 2018 року). Львів: Растр–7, 2018. С. 18–20.
28. Піскозуб Й.З. Неідеальна взаємодія пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. VI Polish-Ukrainian Science Conference *Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media*. (Warsaw, 6–10 September 2005). P. 102.

29. Піскозуб Й.З. Моделювання ускладненої взаємодії пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). (Львів, 5–8 грудня 2005 року). Львів. С. 74–75.
30. Гембара В.М., Огірко І.В., Піскозуб Й.З. Дослідження напружень і деформацій в друкарських формах ротаційних поліграфічних машин. *1-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : тез. доп. (Львів, 18–20 травня, 1993 р.). С. 195.
31. Піскозуб Й.З. Вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : матеріали 2-го Між народного симпозіуму (Львів–Дубляни, 7–10 жовтня, 1996 р.). С. 107–108.
32. Піскозуб Й.З. Моделювання впливу реологічних факторів на якість фарбовідбитків. Міжнародна науково-практична конференція *Кваліологія книги* : доповіді й повідомлення. (Львів, 23–25 жовтня, 1996 р.). С. 32.
33. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Математичне моделювання впливу гідродинамічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту друкарських циліндрів. *ДРУКОТЕХН-96. Комп'ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи :* наукові праці конференції. (Львів, 16–18 жовтня, 1996 р.). С. 96–97.
34. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Вплив реологічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту в друкарських процесах. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки і математики.* (Львів, 25–28 травня 1998 р.). С. 112–113.
35. Піскозуб Й.З. Вплив реологічних факторів на якість друкування. П'ятий українсько-польський науковий симпозіум *Актуальні задачі механіки неоднорідних структур :* тези доповідей. (Львів-Луцьк, вересень 18–23, 2003). С. 65–66.

36. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Компенсаційний вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, листопад 2–5, 2004). С. 82.
37. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація термосилового навантаження в кусково-однорідному середовищі з теплоактивними прошарками. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, 7–9 грудня 2009). Львів. С. 31.
38. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Антиплоска деформація масиву з тонкими міжфазними прошарками при урахуванні тертя. *Сучасні проблеми механіки та математики* : в 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. (Львів, 21–25 травня 2013 року). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 2. С. 111.
39. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Дисипація енергії при циклічному зсувному навантаженні біматеріалу з міжфазними дефектами контакту з урахуванням тертя. 4-а Міжнародна науково-технічна конференція *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL_12* : тези доповідей. (Львів, 30–31 жовтня 2014 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2014. С. 51.
40. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням за їхнього фрикційного контакту. *Сучасні проблеми термомеханіки* : тези доповідей Міжнародної наукової конференції (Львів, 22–24 вересня 2016). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2016. С. 235–236.
41. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням при циклічному

зсувному навантаженні. *Теорія та практика раціонального виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій.* 5-а Міжнародна науково-технічна конференція : Тези доповідей (Львів, 27–28 жовтня 2016 р.). Львів, С. 53–54.

42. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Двухчленное асимптотическое представление напряжений в окрестности торцов тонкого межфазного упругого включения. *Механика разрушения материалов* : тез. докл. I Всесоюз. конф. (Львов, 20–22 октября 1987 года). С. 150.
43. Пискозуб И.З. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах квазистационарной термоупругости для кусочнооднородных тел с тонкими дефектами. *Механика неоднородных структур:* тезисы докладов 2 Всесоюзной конференции. (Львов, 2–4 сентября 1987 года). Львов, 1987. С. 209–210.
44. Божидарник В.В., Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Термоупругое равновесие кусочно-однородной среды при наличии зон тепловыделения на границе раздела компонент. *Современные проблемы теории контактных взаимодействий*: материалы выездного заседания Научного Совета АН СССР по трению и смазкам. Луцк, 1987. С. 58–59.
45. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. О термоупругом деформировании кусочно-однородных тел с тонкими дефектами. *Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.* Республиканская научная конференция: тезисы докладов. (Одесса, 22–24 сентября 1987 г.). Одесса, 1987. С. 105–106.
46. Пискозуб И.З., Гембара В.М. Двумерная задача термоупругости для тела с линейной неоднородностью и зависящими от температуры физико-механическими характеристиками. *Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур*. Всесоюзная конференция: тезисы докладов. (Саратов, 7–9 июня, 1988 г.). Ч. 3. С. 78.

47. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Асимптотическое распределение поля напряжений в окрестности концов тонкого дефекта на границе раздела материалов. *Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций.* 1-й Всесоюзный симпозиум : тезисы докладов. (Ужгород, 21–23 сентября, 1988 г.). С. 70.
48. Пискозуб И.З. Решение системы СИУ второго рода с разрывными коэффициентами для задачи термоупругого равновесия кусочно-однородной среды с тонкими прослойками. IV Всесоюзная конференция *Смешанные задачи механики деформируемого тела* : тезисы докладов. (Одесса, 26–29 сентября 1989 г.). Ч. 2. С. 54.
49. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. До питання про асимптотику полів температури та напружень в околі кінців пружного лінійного теплоактивного дефекту на межі розділу середовищ. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УПІ* : тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 1993 року). Львів, 1993. Вип. 1. С. 115.
50. Піскозуб Й. З. Моделювання впливу реологічних факторів на напружено-деформований стан в зоні контакту при друкуванні. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 28–31 січня 1997 року). Львів, 1997. Вип. 3. С. 99.
51. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. Вплив дефектності границь розділу фаз на термо-, електрофізичний стан неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2007 року). Львів, 2007. С. 104.
52. Піскозуб Й.З. Особливості термоелектропружного стану неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 3–6 лютого 2009 року). Львів, 2009. С. 74.

53. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація навантаження неоднорідного тіла з тонкими дефектами термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 2010 року). Львів, 2010. С. 104.
54. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в шаруватому тілі з дефектами границь під навантаженням термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 1–4 лютого 2011 року). Львів, 2011. С. 122.
55. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в тілі з включеннями при проковзуванні з тертям на границях контакту. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2013 року). Львів, 2013. С. 115.
56. Піскозуб Л.Г., Піскозуб Й.З. Гістерезисні явища при антиплоскому циклічному навантаженні масиву з тріщиною. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 4–7 лютого 2014 року). Львів, 2014. С. 133.
57. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Дисипація енергії в контактуючій тріщині при поздовжньому зсуві. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 16–20 лютого 2015 року). Львів, 2015. С. 133.
58. Піскозуб Й., Піскозуб Л. Гранично-елементне моделювання тонких дефектів довільної фізичної природи. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 16–19 лютого 2016 року). Львів, 2016. С. 153.

59. Piskozub Y.Z., Piskozub L.G. Deformation of a bimaterial with thin nonlinear elastic inclusion. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 14–17 лютого 2017 року). Львів, 2017. С. 153.
60. Піскозуб Й.З. Ітераційний метод розв’язування нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 27 лютого–2 березня 2018 року). Львів, 2018. С. 144.
61. Піскозуб Й.З. Розсіяння енергії при циклічному деформуванні тонкого міжфазного включення з фізично нелінійного матеріалу. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 26 лютого–1 березня 2019 року). Львів,  2019. С. 133.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

| | |
|---|---|
| НДС | напружено-деформований стан; |
| СІР | сингулярне інтегральне рівняння |
| ССІР | система СІР; |
| СЛАР | система лінійних алгебричних рівнянь; |
| КІН | коефіцієнт інтенсивності напружень; |
| $x, y, z$ | декартові координати; |
| $z$ | комплексна змінна; |
| $f_{r(p)}$ | функції стрибка; |
| $E_k, \nu_k, \kappa_k, G_k$ | пружні сталі матеріалів матриці; |
| $G_x^{in}(\bullet), G_y^{in}(\bullet)$ | модулі зсуву матеріалів включення; |
| $S_k$ | півплощини (перерізи матриці); |
| $h, a, b$ | розміри включення (зони контакту); |
| $w_k, \sigma_{yzk}, \sigma_{xzk}, \sigma_{yyk}$ | компоненти НДС; |
| $\tau_{yield}, \tau_{yz}^{\max}, G_{av}, G_{0s}$ | величини розмірності напруження; |
| $w^{in}, \sigma_{yz}^{in}$ | компоненти НДС включення; |
| $L'_{(p)}, L''$ | лінії, що моделюють наявність неоднорідності; |
| $\varpi_s(\bullet), \Upsilon_s(\bullet), \Theta(\bullet), \Psi_s(\bullet), \Phi(\bullet)$ | функції; |
| $t$ | час; |
| $Q_{k(p)}(t), b_{k(p)}(t)$ | інтенсивності зосереджених сил та гвинтових дислокацій; |
| $\tau(t), \tau_k(t)$ | рівномірно розподілені на безмежності зсувні навантаження; |

| | |
|---|---|
| $M_s,\, m_s,\, A_s,\, B_s,\, K_s,\, \alpha_s$ | параметри матеріалу для різних моделей кривих деформування; |
| $g_{r(p)}(z,t),\, D_{k(p)}(z,t)$ | функції; |
| $p, p_k, C, B^r_{j(p)}, \alpha, \beta, \gamma_m,$ $\chi^r_{jm}, \mu_{jm}, \rho_{jm}, \omega_{jm}$ | коефіцієнти; |
| $W^d(t)$ | величина розсіяння енергії; |
| $T_j(x), U_j(x)$ | поліноми Чебишова першого та другого роду; |
| $P_j^{\alpha,\beta}(x)$ | поліноми Якобі; |
| $K_{31}^{\pm}(t),\, K_{32}^{\pm}(t),\, K_3^{\pm}(t)$ | узагальнені КІН, |

**Спеціальні позначення**

$[\varphi] = \varphi_1^-(x) - \varphi_2^+(x)$, $\quad \langle\varphi\rangle = \varphi_1^-(x) + \varphi_2^+(x)$

$[\varphi]_h = \varphi(x,-h) - \varphi(x,h)$, $\quad \langle\varphi\rangle_h = \varphi(x,-h) + \varphi(x,h)$

$[\varphi]_{h,y} = \varphi(x, y-h) - \varphi(x, y+h)$, $\quad \langle\varphi\rangle_{h,y} = \varphi(x, y-h) + \varphi(x, y+h)$

верхні індекси "+" та "-" позначають граничні значення функцій на верхньому та нижньому краю поверхні включення відповідно;

верхній індекс “*in*” позначає величини, що стосуються матеріалу включення;

верхній індекс “$^\circ$” позначає величини, що відповідають задачі без включення;

верхній надчерк “~” позначає знерозмірені величини;

нижній індекс ***к*** позначає величини, що відносяться до нижньої (***к***=1) та верхньої (***к***=2) півплощин відповідно.

# ВСТУП

## Актуальність теми

Тонкі неоднорідності різного походження, зокрема, армуючі стрічки чи волокна композитів, тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включення в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією порожнини, є одним із найпоширеніших типів неоднорідної будови матеріалів, що або зумовлюють небажану високу концентрацію напружень і, відповідно, знижують надійність та експлуатаційні характеристики виробів, або слугують підкріплювальними елементами, що оптимізують напружено-деформований стан тіл для певного виду навантажень. Особливої уваги в сучасній техніці та технологіях набувають також мікро та нано елементні структури у таких галузях, як мікроелектроніка, біотехнології, енергетика, озброєння тощо. Серед найбільш перспективних наукових проектів експерти називають значне підвищення продуктивності комп’ютерів, відновлення людських органів з використанням відтворених тканин, отримання нових матеріалів, створених безпосередньо із заданих молекул та атомів тощо. Існує певна складність математичного моделювання механіки таких структур, яка все ще залишається гостро актуальною проблемою теорії матеріалознавства. На даному етапі розвитку теорії можна зосередитися на конструюванні ускладнених конститутивних рівнянь придатних для вивчення різномасштабних структур та опрацювання методів їхнього розв'язування.

Особливе значення в даний час мають контактні задачі для неоднорідних середовищ, таких як, наприклад, композити, коли зміна механічних властивостей по одній з координат може бути нелінійною. Поведінка і вплив включень всередині структурованих матеріалів є основним предметом у їх інженерному проектуванні.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами**

Дисертаційна робота виконувалася в межах наукових бюджетних тем МХ-69Ф «Розвиток методів математичного моделювання процесів деформування структурно-неоднорідних тіл», науковий керівник доктор фіз.-мат. наук, професор Сулим Г.Т., № держреєстрації: 0118U003605 (термін виконання 2018 - 2020); МХ-82Ф «Вплив деградації матеріалів на залишковий ресурс елементів конструкцій довготривалої експлуатації за дії силових і фізико-хімічних факторів», науковий керівник чл.-кор. НАН України доктор техн. наук, професор Андрейків О.Є., № держреєстрації: 0119U002202 (термін виконання: 2019 - 2021) Львівського національного університету імені Івана Франка; «Моделювання та оптимізація термомеханічних процесів у шаруватих тілах, зокрема оболонках та пластинах, при термомеханічних навантаженнях за врахування теплопереносу випромінюванням, термочутливості та дефектності елементів структури», науковий керівник академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Кушнір Р.М., № держреєстрації 0120U100497 (термін виконання: 2020 - 2024) ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України; «Математичне моделювання та аналітико-числове дослідження процесів деформування середовищ з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями», науковий керівник канд.фіз.-мат. наук, доцент Піскозуб Й.З., № дердреєстрації 0121U109745 (термін виконання 2021 - 2025) Української академії друкарства.

**Метою дисертаційного дослідження** є розроблення математичних моделей і методів дослідження механічних полів у біматеріалах з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями з урахуванням неідеальності контактної взаємодії елементів структури і впливу поверхневої енергії за довільного типу і режиму квазістатичного навантажування-розвантажування.

Досягнення мети роботи передбачає вирішення таких завдань:

- побудову на основі загальних співвідношень лінійної та фізично нелінійної теорії пружності і концепції методу функцій стрибка (МФС) структурно-модульного методу функцій стрибка (СММФС) для розв'язування задач таких класів;
- побудову цілісної системи універсальних математичних моделей структурно неоднорідного тонкого включення з урахуванням істотної фізичної нелінійності його механічного деформування (модель тонкого ортотропного лінійно пружного включення; модель тонкого фізично нелінійного включення (нелінійно пружного чи пружно-пластичного); синтетичну модель тонкого багатошарового включення з можливим поверхневим натягом чи неідеальним контактом між шарами) за різних типів умов ідеального та неідеального контакту між структурними елементами: фрикційний контакт, наявність поверхневих напружень тощо;
- отримання крайових інтегральних подань полів напружень та деформацій у матриці за умов комплексного довільного силового та дислокаційного квазістатичного багатокрокового навантажування-розвантажування, що враховують наявність тонких включень;
- отримання результуючих систем рівнянь (різних для окремих класів задач), в т.ч. сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), та застосування ефективних методів їхнього розв'язування;
- опрацювання методів та методик для врахування фізичної нелінійності матеріалу тонкої неоднорідності та неідеальності її контактної взаємодії з матрицею, що включає:
  - імплементацію концепції інкрементального підходу для вирішення нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування–розвантажування;
  - опрацювання ітераційного алгоритму розв'язування цих результуючих систем рівнянь в умовах апріорі невідомих зон контакту матриці з включенням та багатокрокового процесу навантажування-розвантажування;

- з метою реалізації СММФС для дослідження напруженого стану тіл з тонкими включеннями за дії зосереджених сил та дислокацій розроблення математичного апарату та програмного комплексу;
- забезпечення тестування отриманих співвідношень і розрахункових методів, алгоритмів та схем; розв'язування нових задач; виявлення і дослідження нових залежностей та ефектів.

**Об'єктом дослідження** є механічні структури, сформовані з однорідних чи кусково-однорідних середовищ, що на межі поділу матеріалів містять тверді деформівні тонкі однорідні чи структурно-неоднорідні включення з лінійними чи нелінійними механічними властивостями.

**Предметом дослідження** є напружено-деформований стан (НДС) та особливості його концентрації і розсіювання енергії у біматеріалах із тонкими лінійно, нелінійно пружними чи пружно-пластичними неоднорідностями складної структури у разі різних типів контакту фаз та режимів процесу навантажування–розвантажування.

**Методи дослідження**. У дисертаційній роботі використано засадничі співвідношення лінійної та нелінійної теорії пружності, теорію аналітичних функцій для побудови крайових сингулярних інтегральних рівнянь, концепцію методу функцій стрибка, аналітично-числові методи (метод колокацій тощо), а також середовище системи матричної математики Scilab (ліцензія Open Source) для побудови алгоритмів і програмного комплексу розв'язування отриманих систем результуючих рівнянь.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

- розроблено структурно-модульний метод функцій стрибка, як цілісний комплекс засобів аналітико-числового розв'язування двовимірних задач пружності для ізотропних біматеріалів із тонкими твердими структурно неоднорідними лінійно чи нелінійно деформівними міжфазними включеннями;

- побудовано універсальні математичні моделі тонких структурно-неоднорідних лінійно та нелінійно пружних, пружнопластичних неоднорідностей з урахуванням істотних фізичних механізмів їхнього деформування;
- розроблено синтезовані математичні моделі тонких неоднорідностей, в т.ч. багатошарових, що враховують можливості їхнього неідеального контакту із середовищем (фрикційне проковзування) та наявності спричинених поверхневою енергією на межі поділу матеріалів додаткових поверхневих напружень;
- отримано крайові інтегральні подання полів напружень та деформацій у матриці за умов комплексного довільного силового та дислокаційного квазістатичного багатокрокового навантажування-розвантажування, що враховують наявність тонких включень;
- записано системи інтегральних рівнянь крайових задач для біматеріалів із міжфазними чутливими до впливу механічних полів тонкими неоднорідностями (тріщинами, включеннями);
- для розв'язування нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування застосовано інкрементальний підхід;
- отримано асимптотичні співвідношення, що описують розподіл полів напружень і переміщень поблизу вершин тонкого міжфазного включення в кусково-однорідній матриці;
- розроблено ітераційний алгоритм розв'язування задач за умов апріорі невідомих зон контакту матриці з лінійно, нелінійно пружним чи пружно-пластичним включенням та довільного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування, зокрема й циклічного;
- розроблено математичний апарат та програмний комплекс засобів визначення напружено-деформованого стану у біматеріалах з тонкими

неоднорідностями за дії зосереджених сил та дислокацій та визначення «зон безпеки» для параметрів навантаження.

**Достовірність отриманих результатів** забезпечується коректним застосуванням математичного апарату й апробованих рівнянь лінійної та фізично нелінійної теорій пружності; контрольним розв'язуванням вивчених іншими дослідниками задач; зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із вже відомими розв'язками інших авторів; відповідністю результатів розв'язування нових задач фізичній суті досліджуваних явищ.

**Практичне та теоретичне значення отриманих результатів** полягає у можливості застосування із єдиних позицій отриманих результатів як у теорії композитів в рамках мезо- чи мікромеханіки, так і в наномеханіці чи геомеханіці, мікроелектроніці, механіці руйнування, матеріалознавстві тощо. СММФС у поєднанні з інкрементально-ітераційним алгоритмом розв'язування нелінійних задач забезпечує можливість раціонального опису та вивчення впливу нелінійних властивостей тонких неоднорідностей на поля напружень та деформацій складених тіл у разі найширшого спектру зміни механічних властивостей міжфазних тонких прошарків, що можуть мати також і шарувату будову, а самим шарам перебувати між собою та матрицею у ідеальному чи неідеальному контакті, а на інтерфейсах бути наділеними поверхневою енергією. Суть цього методу полягає у тому, що так звані «зовнішня задача» (моделювання та визначення НДС у біматеріалі поза включеннями), «внутрішня задача» (моделювання та визначення НДС всередині включення), розглядаються під час формулювання та побудови рівнянь як цілком незалежні модулі, які поєднує між собою теж незалежна від них «проміжна задача», завданням якої є моделювання умов контакту між шарами включення та зовнішніх поверхонь включення з матрицею та поєднання зовнішньої та внутрішньої задач у цілісний комплекс. Відтак зміни у формулюванні одного із базових елементів задачі (типу матриці або типу включення чи умов взаємодії) вимагають змін у лише відповідному модулі, залишаючи два інші у попередньому стані.

Побудовано математичні моделі тонких неоднорідностей та тріщин з урахуванням комплексного впливу різних фізичних нелінійностей, що істотно поглиблює змістовні складові теорії тонких включень. Розроблено підходи, що дають можливість із єдиних позицій застосовувати отримані результати як у теорії композитів в рамках макро-, мезо- чи мікромеханіки, так і в нано- чи геомеханіці, мікроелектроніці, механіці руйнування, матеріалознавстві тощо. Універсальність запропонованих математичних моделей тонких включень забезпечено можливістю урахування повного спектру механічних властивостей матеріалу включення від тріщини до абсолютно жорсткого, від лінійно до фізично нелінійно пружного, від ідеально пружно-пластичного до довільного пружно-пластичного. Розглянуто можливість існування неідеального контакту у вигляді відшарування у невідомих апріорі зонах контакту з гладким чи фрикційним проковзуванням, а також спричинених міжмолекулярною взаємодією на межі фаз поверхневих напружень.

Запропоновано ефективний інкрементально-ітераційний алгоритм розв’язування задач з фізичними нелінійностями чи задач з невідомими границями контакту, що дають можливість високоточного аналізу напруженого стану тіл із тонкими неоднорідностями в умовах довільного силового чи дислокаційного багатокрокового навантаження .

**Особистий внесок здобувача.** Усі подані в роботі основні результати, моделі та методи отримані автором самостійно. Результати, опубліковані у роботах [11, 14, 15, 23, 28, 29, 31, 35, 43, 48, 50, 52, 60, 61] (див. Список публікацій здобувача, Додаток А), отримані самостійно.

У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать: [1, 5, 8, 10, 12, 13, 17, 20−22, 24, 25, 30, 32, 33, 36-39, 41, 44−47, 51, 53, 54, 57−59] − участь у математичній постановці задач, розвиток і реалізація підходів до їх розв’язання, аналіз отриманих результатів; [2–4, 9, 16, 18, 19, 34, 55, 56]

− постановка задач, вибір інтегральних подань розв’язків, числова реалізація досліджень, опрацювання та інтерпретація отриманих числових результатів, формулювання висновків; [6, 26, 42, 49] − побудова аналітичних розв’язків та встановлення їх властивостей; [7, 27, 40] − участь у математичному моделюванні об’єкту досліджень, розроблення методів, числова реалізація досліджень, опрацювання та інтерпретація отриманих числових результатів, формулювання висновків.

**Апробація результатів дисертації.** Основні матеріали роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних наукових та науково-технічних конференціях і симпозіумах:

1. 15-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові, 2021. – ISUMEL_15. (Львів, 2021).
2. 9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Matherials. (June 4–8, 2017, Augustow, Poland).
3. Тринадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. (Львів, 2017).
4. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики». (Львів, 2018).
5. 4-а Міжнародна науково-технічна конференція «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL_12». (Львів, 2014).
6. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки». (Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 22–24 вересня 2016).
7. 5-а Міжнародна науково-технічна конференція «Теорія та практика раціонального виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій». (Львів, 27–28 жовтня 2016).
8. VI Polish-Ukrainian Science Conference «Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media». ( Warsaw, 6–10 September 2005).

9. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми механіки» (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). (Львів, 5–8 грудня 2005).
10. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». (Львів, 7–9 грудня 2009).
11. Сучасні проблеми механіки та математики. (Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013).
12. Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент. (Львів: ЦММ ІППММ, 2018).
13. Механика неоднородных структур. 2 Всесоюзная конференция. (Львов, 2–4 сентября 1987).
14. Современные проблемы теории контактных взаимодействий. Выездное заседание Научного Совета АН СССР по трению и смазкам. (Луцк, 1987).
15. Республиканская научная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения». (Одесса, 22–24 сентября 1987).
16. 1-я Всесоюзная конференция «Механика разрушения материалов». (Львов, 20–22 октября 1987).
17. Всесоюзная конференция «Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур». (Саратов, 7–9 июня, 1988).
18. 1-й Всесоюзный симпозиум «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций». (Ужгород, 21–23 сентября, 1988).
19. IV Всесоюзная конференция «Смешанные задачи механики деформируемого тела». (Одесса, 26–29 сентября 1989).
20. 1-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. (Львів, 18–20 травня, 1993).
21. 2-й Міжнародний симпозіум «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій». (Львів, 7–10 жовтня, 1996).

22. Міжнародна науково-практична конференція «Кваліологія книги». (Львів, 23–25 жовтня, 1996).
23. ДРУКОТЕХН–96. Комп'ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи. (Львів, 16–18 жовтня, 1996).
24. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки і математики». (Львів, 25–28 травня 1998).
25. П'ятий українсько-польський науковий симпозіум «Актуальні задачі механіки неоднорідних структур». (Львів – Луцьк, вересень 18–23, 2003).
26. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». (Львів, 2–5 листопада, 2004).
27. Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні та спорті. Науково-технічна конференція. (Львів, ЦММ ІППММ – ЛНУФК, 2018).
28. – 39. Науково-технічні конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів Української Академії Друкарства (Львів, 1993, 1997, 2007, 2009, 2011, 2013 – 2016, 2018 – 2020 р.р.).

У повному обсязі робота доповідалася на розширеному семінарі кафедри прикладної математики і фізики Української академії друкарства МОН України під керівництвом д.т.н., проф. Гавенко С.Ф.; на науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Вайсфельд Н.Д.; на науковому семінарі кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету МОН України під керівництвом д.т.н., проф. Шваб'юка В.І.; на розширеному науковому семінарі відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф., академіка НАН України Кушніра Р.М. та на загальноінститутському семінарі за напрямком “Математичні методи механіки руйнування та поверхневих явищ” в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Михаськіва В.В.

**Публікації.** Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані у 61 науковій праці, у тому числі: 5 наукових статей [1–5] у закордонних виданнях (Web of science, Scopus); 6 – у наукових фахових виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Scopus) [6–11]; 1 стаття [12] – у науковому фаховому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази Copernicus, 4 статті [13–16] – у наукових фахових виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових видань України; 1 стаття [17] – у фаховому виданні для спеціальності “Математика”; 2 статті [18, 19] – у фахових виданнях для галузі технічних наук, 3 статті [20–22] – у інших періодичних наукових виданнях; 39 [23–61] – у збірниках матеріалів міжнародних та національних наукових та науково-технічних конференцій і симпозіумів.

З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([1] входить до квартилю Q2, [2–5, 7] входять до квартилю Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 22.

**Структура дисертації.** Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та двох додатків. Загальний обсяг дисертації складає 390 сторінок (основний текст – 312 сторінок), у тому числі 144 рисунки та список використаних джерел з 479 найменувань.

Автор щиро вдячний науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору Георгію Теодоровичу Сулиму за постійну увагу та всебічну підтримку при виконанні роботи.

# РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ

**Актуальність аналізу структурно неоднорідних матеріалів**. Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи дуже часто збурюють однорідну будову матеріалів і тіл у вигляді дефектів (тріщини, включення), конструкційних (підкріплення, накладки) чи функціональних (різного типу давачі) елементів, арматури композитів, наповнювачів при застосуванні ін’єкційних технологій для «заліковування» порожнин чи тріщин тощо [25, 101, 122, 133, 222, 267, 295, 466]. Одним із характерних прикладів композиційного матеріалу є також стрічкові композити, шаруваті структури, властиві, зокрема, й ґрунтам [171].

Теорія та практика конструювання й використання прогресивних композиційних матеріалів з плоскою арматурою дають безперечні докази того, що їх міцність на розтяг у трансверсальному напрямку у випадку однонапрямленого армування стрічками складає 50...75% від величини міцності у поздовжньому напрямку, тоді як використання волокон дає зазвичай лише 2...15% [231]. Огляди та монографії [25, 39, 47, 101, 124, 133, 281, 282, 304, 359, 360, 371, 459, 461, 466] відзначають переваги плоского армування, що покращує технологічність, механічні властивості композиту, збільшує коефіцієнт армування, опір до порушення герметичності, зменшує статистичний розкид запроектованих властивостей. Це свідчить про велику перспективність застосування композитів зі стрічковою арматурою. Використання зовнішнього стрічкового армування у сталезалізобетоні дає можливість економити 15...45% металу у порівнянні із залізобетонними та суто металевими конструкціями.

Особливої уваги в сучасній техніці та технологіях набувають також мікро та нано елементні структури у таких галузях, як мікроелектроніка, біотехнології, енергетика, озброєння тощо. Серед найбільш перспективних наукових проектів експерти називають значне підвищення продуктивності комп’ютерів, відновлення людських органів з використанням відтворених тканин, отримання нових матеріалів, створених безпосередньо із заданих молекул та атомів тощо.

**Композити**. Деформаційні властивості композиту важливі для оцінки його руйнування та міцності [40, 298, 315, 348, 349, 391, 466], еволюції ушкоджень [99, 390, 406] і аналізу динамічного демпфування [304]. Досить добре розвинена в пружному діапазоні механіка композитів [101, 102, 124, 309] дає можливість створювати математичні моделі для композиту, засновані на пружнопластичній гомогенізації та лінеаризації. Проте, все ще необхідно докласти чимало зусиль для вдосконалення точності і ефективності прогнозування в пластичному діапазоні [277, 299, 461]. В цілому, деформаційні теорії для композитів можна розділити на три категорії за шкалою довжини, тобто за шкалою макро, мезо, і мікро масштабу, так звані моделі мікромеханіки [40, 410, 431]. Ці питання достатньо ґрунтовно висвітлені в оглядових статтях та монографіях [39, 40, 101, 124, 294, 466, 467]. Зазначено, що якщо вивчати деформаційні властивості композиту на макрорівні, то це краще робити числовими методами (МСЕ підхід) [347, 407, 410, 458] або експериментально [306, 310], оскільки побудова адекватних деформаційних теорій, особливо у діапазоні пластичності, є надто складною [350, 453, 466, 470, 471].

Мезомасштабні моделі описують механічні властивості окремих елементів структури композиту як однорідного середовища [423]. Ці властивості можуть бути безпосередньо отримані емпірично (з експерименту) або визначені з допомогою моделі мікромеханіки. Основною проблемою пружно-пластичних моделей в мезомасштабі є вирішення питання, як описати нелінійність [417, 454, 455, 469].

В той же час концепція мікромеханіки дає змогу [276] значно підвищити ефективність проектування структур композитів, щойно стають відомими конститутивні рівняння складових елементів структури [285]. Для пружного діапазону розроблені числові [312, 301, 410, 412, 413] та деякі аналітичні моделі мікромеханіки [40, 320, 358, 362, 400, 407, 473, 475]. З використанням лінеаризації мікромеханічна пружна модель може бути розширена до пружно-пластичного діапазону [277, 302, 303, 311, 416, 418, 450]. У порівнянні з мезо- або макромоделлю на мікрорівні простіше побудувати критерій пластичності чи руйнування [366, 385, 408, 410, 427].

У інженерній практиці зручним способом аналізу композитної структури є підхід, заснований на використанні мультимасштабної структури (multi-scale framework (MSF)) [326, 327, 380, 397]. У MSF математичні моделі на різних рівнях будують незалежно, але пізніше комбінують органічно так, що навантаження і дані про матеріали можуть переноситися між моделями. Модель мікромеханіки грає фундаментальну роль в MSF, так як вона надає основну інформацію. Окреслення критерію пластичності чи руйнування є надійнішим у мікромасштабі [354]. Іншим видом мультимасштабної моделі є так званий мультимасштабний метод асимптотичної гомогенізації (MAHM) [321, 476], в якому мікромеханічна модель також грає роль наріжного каменю. Зазвичай він застосовується для композиту з періодичними мікроструктурами. У MAHM, поля переміщень, напружень і деформацій виражені в термінах малих параметрів, які сполучають координати в різних масштабах. Зазначимо, що функція гомогенізації, ключ до MAHM, визначається мікромеханічними моделями [372, 380, 477].

Однак на даний час питання побудови достатньо адекватної деформаційної моделі нелінійного деформування тонких структурних елементів композитів, особливо в умовах появи залишкових напружень за різного типу і режимів навантажування-розвантажування, залишається практично недослідженим.

**Нанорівень. Поверхневі напруження.** В наш час у механіці матеріалів інтерес до вивчення об’єктів істотно перемістився з макро- ($10^0$ м) та мікрорівнів ($10^{-3}$ – $10^{-6}$ м) на нанорівень ($10^{-9}$ м) завдяки появі можливості використання у новітніх технологіях та продуктах виробництва специфічних властивостей наночастинок [76, 467, 468]. Вивчення змін властивостей матеріалів залежно від їх геометричних розмірів має довгу історію в силу своєї значущості в багатьох областях [79, 134, 200, 206, 279, 340, 344, 381, 389, 435, 452]. У механіці ще з часів Ґ. Ґалілея добре відомий так званий «масштабний ефект». Механічні властивості наноструктурних неоднорідних матеріалів істотно залежать від зростання відношення «площа поверхні наноелементу»/«маса цього елементу» за рахунок появи поверхневих напружень [308, 332, 370, 403]. Фізико-хімічна природа поверхневих напружень у твердих деформівних структурах (цілком аналогічних до поверхневого натягу на поверхні води) – це внутрішня властивість поверхонь поділу різних матеріалів у гетерогенних структурах, яку легко собі уявити у вигляді деякого наділеного внутрішньою (поверхневою) енергією тонкого шару на межі розділу [201, 290, 316, 342, 343]. Поверхневі напруження іноді означують як тангенціальні зусилля (Н) у приповерхневому шарі, віднесені до одиниці довжини (м) [206]. Фізично відмінність між поверхневою енергією та напруженнями пояснюють тим, що умови взаємодії атомів у приповерхневих областях відрізняються від таких в об’ємі [52, 70].

На основі численних та різноманітних досліджень впливу ефекту поверхневих напружень [317, 343, 370, 384, 387, 409, 422, 437], якими в цілком адекватному першому наближенні можна в межах навіть лінійної теорії пружності вивчати механіку наноструктурованих тіл, було запропоновано емпіричний масштабуючий закон [341, 433, 463, 464] із власною шкалою, що дає можливість, хоч і наближено, врахувати зміни основних нерозмірних механічних властивостей залежно від характерного розміру в наномасштабі. Для наноструктурних матеріалів пружність ізотропної поверхні характеризується двома поверхневими пружними константами [292, 343, 433], в результаті чого виникають дві власні шкали довжини [313, 314]. Показано, що розмірна залежність механічних властивостей, пов'язана з питаннями деформації неоднорідних нанорозмірних тіл, може підпорядковуватися закону масштабування з власною шкалою довжини, що є лінійною комбінацією цих двох шкал [464].

На врахування поверхневих напружень та енергії у твердих тілах в останні роки спрямовує зусилля щораз більша кількість науковців [76, 142, 297, 343, 342, 351, 384, 422, 433, 434, 437]. Низка праць стосується аналізу впливу поверхневих напружень на середовище з короткими тріщинами [465], для яких необхідно враховувати взаємодію між їхніми берегами.

Проте існує певна складність математичного моделювання механіки наноструктур, яка все ще залишається гостро актуальною проблемою матеріалознавства, оскільки у цій сфері без врахування законів та досягнень квантової механіки не обійтися. В основу такого моделювання переважно покладають концепцію наділення придатних для мікроструктурних об'єктів класичних моделей континууму певними додатковими властивостями, які, в межах гіпотези суцільності, могли би врахувати наявність та визначальні для механіки властивості структурних неоднорідностей.

Істотно полегшує початкові кроки у її вирішенні в цілому позитивний досвід застосування до вивчення таких структур концепції механіки суцільного середовища [104, 464].

Відтак на даному етапі розвитку теорії варто зосередитися на створенні придатних для вивчення різномасштабних структур ускладнених конститутивних рівнянь та опрацювання методів їхнього вивчення.

**Механіка контактної взаємодії.** Неоднорідності, які часто мають вигляд тонких включень, можуть перебувати як в ідеальному, так і неідеальному контакті з основним матеріалом, зокрема, й на межі поділу середовищ. Механіка контактної взаємодії складових елементів будь-якої структури часто є основною для вивчення її поведінки під навантаженням, адже контакт тіл - це основний спосіб прикладання навантажень до деформованого тіла, причому, концентрація напружень в зоні контакту часто ініціює руйнування матеріалу саме там.

Конкретизація умов контакту у контактних задачах має визначальну роль для отримання коректного розв’язку задачі [1, 9, 48, 80, 136, 215, 216, 230, 272, 329, 361, 373, 445, 446, 460]. Види контакту можна умовно поділити на безпосередній, з механічною взаємодією та через прошарки.

Умови безпосереднього ідеального контакту зустрічалися практично у численній бібліографії стосовно контактних задач, починаючи від класичних робіт Hertz H. [352, 353], Boussinesq J. [293], Huber M.T. [364, 365], Reynolds O. [424], Беляєва Н.М., Штаєрмана И.Я. [274], продовжуючи роботами Bentall R. і Johnson K. [367, 368], Hills D.A. [355–357], Kalker J. [373–379], Панасюка В.В., Теплого М.Й. [159–161], Кіта Г.С., Кривцуна М.Г. [94], Cattaneo C. [300], Poritsky H. [421] та іншими [7, 9, 21, 62–69, 88, 89, 126, 128, 133, 136, 139, 140, 145, 146, 172, 194, 215, 216, 218, 231, 278, 282, 286, 287, 328, 331, 339, 374, 394, 395, 405, 420, 424, 426, 430, 436, 449], аж до сучасних досліджень [121, 127, 162, 411, 440, 443]. Цим переліком далеко не вичерпується застосування класичних крайових умов для контактних задач пружності за безпосереднього контакту тіл. Однак клас таких задач є дуже обмежений і тому природньо, що й до цього часу дослідники розвивають методики розв’язування контактних задач з ускладненими умовами контактування.

**Фрикційний контакт** також класифікується як умовно безпосередній з тертьовим проковзуванням поверхонь контакту. Перші згадки про опис явища тертя, як прямо пропорційного силі тиску і не залежного від поточної площі контакту належать ще Леонардо да Вінчі. У 1699 р. французький фізик Ґійом Амонтон знову відкрив ці закони [280]. У 1748 р. Леонард Ейлер першим виявив різницю між статичним та динамічним коефіцієнтами тертя. Перший практично повний математичний опис явища був представлений Чарльзом Кулоном у 1785 році [307].

При формулюванні задач механіки контактної взаємодії з урахуванням тертя (опір відносному переміщенню контактуючих точок) враховується феноменологічно упроваджене деяке співвідношення між нормальними і тангенціальними напруженнями, що діють у зоні контакту [1, 2, 4, 9, 14, 43, 48, 58, 59, 80, 215, 230, 272, 329, 334, 414, 445, 446], пов'язане із поняттям клефіцієнта тертя ковзання.

Незважаючи на численні та довготривалі спроби описати явище тертя, все ж жодна з існуючих теорій не є достатньо загальною, щоб описати всі випадки. Відтак ті чи інші теорії досі використовують для конкретних умов тертя – малі або великі навантаження та швидкості проковзування, певні типи матеріалів та міра деформування в умовах тертя, що мають на увазі тип контакту: пластичний чи пружний та з певною шорсткістю поверхні.

**Моделювання шорсткості контакту.** Контакт двох твердих тіл, у тому числі й за наявності тертя (фрикційний контакт) найчастіше не буває безпосереднім [13, 14, 15, 46, 49, 77, 82, 87, 91, 103, 151, 221, 260, 272, 274, 363]. Як правило між поверхнями, що взаємодіють, існує проміжний шар (мастило, плівки окислів, дрібнодисперсних часток матеріалів – продуктів зношування тощо). Контактування тіл з шорсткими (негладкими) поверхнями теж можна моделювати контактуванням через специфічний проміжний шар [11, 396, 398, 399]. З погляду математичного моделювання цю особливість контакту можна імітувати за допомогою введення в умови безпосереднього контакту корегувальних нормальних переміщень, викликаних зминанням мікронерівностей поверхонь. В континуальних моделях Greenwood J.A., Tabor D., Williamson J.B.R. [338, 339] та Lo C.C. [393, 394] запропоновано стохастичний підхід до врахування шорсткості.

До крайових умов **контакту з механічною взаємодією** можна віднести цілу низку крайових умов змішаного типу, що зустрічаються в теорії тріщин, механіці руйнування тощо. Зокрема варто відзначити модель рівноважної тріщини Баренблатта, нелінійні моделі Гудьєра-

Кеннінена та Савіна-Камінського, Дагдейла, $\delta_к$ ($\delta_c$) – модель Леонова-Панасюка – Дагдейла (D. S. Dugdale) [31]. Спільним для всіх цих моделей є припущення про існування у певному околі вістря тріщини зони дії напружень розтягу (зчеплення).

**Контакт через тонкий прошарок-включення. Основні методи дослідження тіл із тонкими неоднорідностями**. Значний особистий внесок у створення фундаментальних загальнотеоретичних принципів та методів розв’язування конкретних задач із урахуванням взаємовпливу полів різної фізичної природи зробили Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, В.Б. Говоруха, О.М. Гузь, Б.Д. Дробенко, А.П. Жук, Я.О. Жук, Ю.М. Коляно, В.Ф. Кондрат, В.Д. Кубенко, Р.М. Кушнір, В.В. Лобода, В.З. Партон, Я.С. Підстригач, Г.Т. Сулим, А.Ф. Улітко, В.Ф. Чекурін та ін. [34, 35, 51, 54–57, 100, 116, 117, 271, 305, 337, 382, 432, 478, 479]. І все ж при цьому здатність тонких неоднорідностей будови матеріалу чинити істотний вплив на розраховані експлуатаційні характеристики виробу вивчена далеко неповно. Зокрема, на цей час достатньо повно опрацьована математична теорія тріщин в ізотропних та анізотропних середовищах [14, 28, 36, 37, 38, 112, 125, 154, 155, 217, 219], механіка контактної взаємодії пружних і пружно-пластичних тіл [7, 72, 80, 136, 137, 209, 220, 273], а докладний виклад методики розв’язування відповідних задач за допомогою інтегральних рівнянь на основі комплексних потенціалів М.І. Мусхелішвілі, С.Г. Лехніцького [114] та огляд відповідних літературних джерел можна знайти у монографіях [25, 428]. В оглядових працях [68, 230, 235, 246, 373] відзначено, що для розв’язування контактних задач з тонкими чужорідними об’єктами-включеннями можна виділити п'ять магістральних підходів аналізу:

*а) загальнотеоретичний* – розглянути тонке включення довільної форми, а потім мінімізувати один із його розмірів [154, 203, 222, 318, 408, 463] та ін.;

*б) числовий* – застосувати прямі числові методи, зокрема МСЕ, МГЕ [19, 33, 71, 106, 162, 166, 258, 259, 301, 345, 388, 392, 401, 442, 457] та ін.;

*в) експериментальний* – використати експериментальні методи [64, 224, 322, 456];

*г) асимптотичний* – за допомогою асимптотичних методів детально розглянути напружено-деформований стан безпосередньо біля вістря неоднорідності та межі поділу матеріалів [3, 6, 111, 132, 143, 152, 168, 202, 266, 268];

*г) нові теорії неідеального контакту* – розробити специфічну теорію, що дала би можливість досить просто розв'язати відповідні задачі з урахуванням ефекту малої товщини дефекту (Я.С. Підстригач, О.Є. Андрейків, В.М. Александров, І.І. Бернар, Д.В. Гриліцький, О.О. Євтушенко, Г.С. Кіт, Ю.М. Коляно, Р.М. Мартиняк, В.В. Михаськів, С.М. Мхітарян, В.К. Опанасович, В.В. Панасюк, Г.Я. Попов, Г.Т. Сулим, Y. Benveniste, F. Erdogan, M.E. Gurtin, T. Koizumi, T. Miloh, A.I. Murdoch, H. Sekine, P. Shiavone, C.Q. Ru, X. Wang та інші).

На базі цієї теорії виникли, зокрема, методи фіктивних напружень, розривних зміщень, граничних інтегральних рівнянь [106, 115]. Основи теорії тонких неоднорідностей закладені в працях Я.С. Підстригача, Д.В. Гриліцького, В.К. Опанасовича, Г.Т. Сулима, Г.П. Черепанова, К.С. Чобаняна, А.С. Хачикяна [23, 67, 68, 146, 174, 175, 204, 228, 237, 266, 270, 438], де вперше було застосовано принцип спряження континуумів різної вимірності [29, 63, 66, 69, 194, 227, 228, 237, 244].

Цей підхід до вивчення механіки тіл із включеннями та щілинами отримав значний розвиток у роботах В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Н.Х. Арутюняна, Л.Т. Бережницького, В.В. Божидарніка, Н.Д. Вайсфельд, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, Д.В. Гриліцького, В.Т. Грінченка, В.С. Гудрамовича, О.М. Гузя, І.Т. Денисюка, А.П. Зіньковського, О.О. Євтушенка, С.О. Калоєрова, Г.С. Кіта, В.І. Кир’яна, Я.І. Кунця, Р.М. Кушніра, В.В. Лободи, В.М. Максимовича, Р.М. Мартиняка, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, О.Б. Мовчана, В.В. Можаровського, М.Ф. Морозова, М.М. Николишина, В.К. Опанасовича, В.А. Осадчука, В.І. Острика, В.В. Панасюка, Я.М. Пастернака, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, М.П. Саврука, Я.Г. Савули, В.С. Саркисяня, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, А.О. Сяського, Л.А. Фільштинського, П.О. Фомічова, М.В. Хая, Г.П. Черепанова, М.Г. Чаусова, П.В. Яснія, E.E. Gdoutos, G.C. Sih та ін. [7, 8, 10, 12, 22, 25, 37, 38, 42, 61, 72, 73–75, 78, 81, 89, 93, 94, 111, 113, 118, 123, 127, 131, 132, 147, 150, 156, 173, 209, 210, 231, 270, 324, 325, 436].

У зв'язку з активним розвитком механіки руйнування, значна кількість робіт стосується вивчення задач для тіл зі щілинами та тріщинами, які є частковим випадком загального класу дефектів типу тонких неоднорідностей і моделюються (так само як тонкі абсолютно жорсткі включення, т.зв. антитріщини) математичним розрізом із заданими крайовими умовами на ньому. Зокрема, слід відзначити праці О.Є. Андрейківа, О.П. Дацишин, Р.М. Кушніра, З.Т. Назарчука, М.М. Николишина, В.А. Осадчука, В.В. Панасюка, М.П. Саврука, Г.П. Черепанова та інших вчених [13, 113, 125, 144, 149, 157, 218, 267, 268].

Як узагальнення і вдосконалення згаданих теорій та методів виник метод функцій стрибка (МФС) [231, 234] як певний відступ убік від теорії потенціалу, у якому стрибок напружень надалі пов'язувався із розподіленими уздовж поверхні чи лінії зосередженими силами, а стрибок переміщень – розподіленими крайовими та гвинтовими дислокаціями, а не силовими диполями. Оскільки силові диполі причиняють також і стрибок напружень, то стрибки напружень і переміщень отримали незалежні носії причому конкретної фізичної природи. Надалі МФС став слугувати засобом для розв'язування багатьох дво- та тривимірних задач дослідження фізико-механічних полів для тіл з тонкими неоднорідностями [166, 211, 230, 232, 236, 252, 420, 445–447] а також основою для появи модифікацій у вигляді гранично-елементного методу функцій стрибка та його структурно-модульного варіанту. Поряд з цим основні результати, що стосуються, загалом, двовимірних задач теорій тонких включень в ізотропних тілах, були отримані також на основі застосування методів лінійного розвинення комплексних потенціалів [147, 148] та розривних розв'язків [209, 210].

До згаданих вище теорій контакту можна віднести також вже згадані праці M.E. Gurtin [342, 343], Y. Benveniste [288–290], T. Miloh [291, 404], де наявність тонкого нерозривного міжфазного прошарку у тілі імітується крайовими умовами «поверхневої енергії». Варто також згадати низку праць [319, 384, 387, 425, 462, 464], у яких переважно використовується класична теорія Ешелбі для еліпсоїдального однорідного включення у однорідному ж необмеженому середовищі у тривимірній та двовимірній постановках із застосуванням крайових умов Гуртіна-Мердока [318, 387, 462, 464]. Однак явище "поліноміальної консервативності", за якою якщо на нескінченності поле напружень є поліномом якогось порядку, то всередині включення поле напружень характеризується поліномами того ж порядку, істотно обмежує аналіз напружено-деформованого стану (НДС) всередині неоднорідності.

Спорідненим також є клас задач теплопровідності та термопружності для кусково-однорідних тіл із заповненими міжфазними регулярними виїмками Р.М. Мартиняка та його учнів [96, 97, 119, 120, 121, 369, 429].

Близькими до розглянутих є умови М.М. Кундрата [107–110], що передбачають існування специфічних лінійчатих зон передруйнування на продовженні вістря високомодульного тонкого включення.

У працях Г.С. Кіта [94] вивчено задачі плоскої та просторової термопружності ізотропних тіл із тріщинами та включеннями. Тонкі міжфазні прямолінійні включення в кусково-однорідних ізотропних термопружних тілах розглянуто у роботах Г.Т. Сулима та Й.З. Піскозуба [231, 244, 440].

Узагальнення умов взаємодії [180, 235, 420] на випадок анізотропного включення містять праці [153, 233, 240, 241]. У деяких випадках, зокрема, коли тонкий прошарок–включення ортотропний, істотно гнучкий чи викривлений, зручно користуватися умовами [235]. Схожі умови у спрощеному вигляді було застосовано також у працях [270, 296].

Я.М. Пастернак [162–167, 239] поєднав методи функцій стрибка та граничних елементів, істотно модифікуючи останній, у граничноелементний метод стрибків. Це дало можливість спочатку ефективно і з великою точністю спочатку розв’язувати двовимірні задачі (антиплоску, плоску та осесиметричну) для тонких включень чи тріщин довільної форми (зокрема й гіллястої) у разі довільної форми однорідних, а потім і кусково-однорідних тіл, потім у природний спосіб перейти до урахуванням комплексного впливу термомагнітоелектропружних полів, а після цього перейти до тривимірного варіанту у повному 3D вимірі.

Також слід зазначити, що за аналогією Г.С. Кіта [92] поздовжній зсув еквівалентний з погляду математичного моделювання до двовимірної задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з бічних поверхонь (зміщенню відповідає температура, модулю зсуву – коефіцієнт теплопровідності тощо). Умови взаємодії, що відповідають антиплоскій деформації [225, 233] можна отримати відповідною інтерпретацією умов [98, 180, 227, 239, 420] і навпаки. Звісно, що з огляду на ідентичність диференціальних рівнянь врахування згаданих вище явищ із тими, що описують дифузію (скажімо вологи), фільтрацію, електричне зміщення, магнітну індукцію тощо, дає можливість легко переносити отримані у розв’язуванні антиплоских задач чи задач теплопровідності і у опис інших процесів.

Відтак задачі такого типу у разі лінійності фізико-механічних властивостей неоднорідностей та ідеального контакту між складовими вже достатньо добре вивчені, зокрема і для скінченних тіл та з урахуванням термічних і електромагнітних ефектів із використанням гранично-елементного методу функцій стрибка [167, 231, 241, 253, 428, 441, 445].

Доволі незначною є кількість робіт, де розглядається неповний або змішаний контакт тіл (відшарування, поява проковзування з тертям тощо). У більшості випадків це зумовлено наявністю невідомих апріорі зон контакту, що істотно ускладнює розв’язування таких задач. Стосовно тонких включень, то в основному, досліджувалися тільки тонкі абсолютно жорсткі включення, однобічно відшаровані уздовж всієї довжини повністю чи за гладкого контакту з оточуючим матеріалом [10, 85, 209], а також з урахуванням тертя [86, 209]. Взаємодію міжфазної тріщини та жорсткого однобічно відшарованого включення вивчено у роботі [275]. У працях В.Г. Попова та О.П. Мойсеєнка [135, 210] досліджено нестаціонарну задачу для тонкого жорсткого відшарованого включення за умов плоскої та антиплоскої деформацій. Сильвестров В.В., Ярдухин А.К. [223] розв’язали задачу про взаємодію тонкого жорсткого відшарованого включення з тріщиною.

Врахування фізичної чи геометричної (в сенсі умов контакту, а не структури тензора деформацій) нелінійності істотно ускладнює процес розв’язування задач [81, 261, 386, 478, 479] і вимагає, як правило, обов’язкового використання різноманітних наближених методів навіть для тіл дуже простої геометрії [167, 231, 265, 472], де переважно застосовують лише прямі числові методи [33, 106, 162, 166, 259, 388, 390, 401, 442, 457]. Це ускладнює їхнє використання та вимагає потужних обчислювальних ресурсів. Причому у цих випадках не завжди вдається коректно врахувати тонкостінність неоднорідності та гарантувати бажану точність отриманого розв’язку.

Поміж праць на цю тематику варто згадати дослідження напружено-деформованого стану пружної пластини з тонким в'язкопружним включенням [451], врахування можливості розщеплення включення-балки [383] чи фрикційного контакту [119, 198, 199, 335, 445–447, 449], створення та застосування конститутивних співвідношень моделі деформування аркуша паперу [346], картону [24] чи ґумової мембрани [346, 383, 427].

Внаслідок математичної громіздкості даного типу задач та складності розв'язування породжених ними інтегральних рівнянь, узагальненого підходу дослідження тонких фізично нелінійних включень з можливістю неідеального контакту із матрицею поки що не систематизовано.

Окремо слід зазначити, що переважна більшість робіт з дослідження НДС тіл з тонкими неоднорідностями не охоплює всього можливого спектру силового чи дислокаційного навантаження структур, а це не дає повноцінної можливості визначати значення критичного навантаження і окреслення так званої «зони безпеки» для його прикладання з метою оптимізувати властивості структур під певні види навантаження.

**Висновки до розділу 1**

У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що практично відсутні достатньо прості моделі тонких неоднорідностей з фізично нелінійними властивостями; досі не побудовано належною мірою універсальних уніфікованих методів розв'язування задач з тонкими міжфазними включеннями за ускладнених умов контакту з матрицею. Практично не вивчені моделі багатошарових тонких неоднорідностей. Дуже невелика кількість публікацій стосується випадків контактування складових структури при невідомій апріорі зоні контакту. Вивчення впливу поверхневого напруження на разі стосується виключно тіл із тріщинами: випадок заміни тріщини тонким деформівним середовищем з проявами аналогічних поверхневих явищ не розглядався. Недостатньо уваги приділено аналітико-числовим методам для аналізу НДС за умов багатокрокового навантажування з урахуванням залишкових напружень. Актуальною залишається проблема побудови загального підходу, що дав би можливість досліджувати тонкі включення та відшаровані прошарки з єдиних позицій теорії тонких неоднорідностей.

На основі проведеного огляду літературних джерел можна зробити загальний висновок, що врахування нелінійного характеру задач для тіл з тонкими неоднорідностями (фізично лінійна чи нелінійна пружність або непружність, врахування вільної енергії на поверхнях розділу твердих тіл, а також різноманітні порушення ідеальності контакту між ними) досліджені дуже мало і це дало можливість сформулювати мету дисертаційного дослідження.

# РОЗДІЛ 2. СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА

Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи є неодмінною складовою сучасних матеріалів, композитних структур, конструктивних елементів як на мікро- так і на мезо- чи нанорівнях. Вивчення їх впливу на фізико-механічні поля тіл, що їх містять, породило відповідну теорію, як у свій час виникли теорія тріщин [14, 28, 112, 125, 154, 155, 217], механіка контактної взаємодії пружних і пружно-пластичних тіл [7, 72, 80, 133, 138, 209, 220, 273].

В оглядових працях [68, 230, 373, 444] відзначено, що для розв’язування контактних задач з тонкими чужорідними об’єктами-включеннями можна виділити п'ять магістральних підходів аналізу:

**а) загальнотеоретичний** – розглянути тонке включення довільної форми, а потім мінімізувати один із його розмірів (В.В. Панасюк, Ю.М. Коляно, О.С. Космодаміанський, В.Д. Купрадзе, Ю.М. Подільчук, Е.Г. Сосніна, F. Erdogan, J.D. Eshelby, T. Mura та ін. [129, 154, 203];

**б) числовий** – застосувати прямі числові методи, зокрема МСЕ, МГЕ ([33, 71, 106, 162, 166, 258, 388, 390, 401, 442];

**в) експериментальний** – використати експериментальні методи (Ю.І. Сорокатий, I.M. Allison, W.R. Tyson та ін. [64, 224, 322, 456]);

**г) асимптотичний** – за допомогою асимптотичних методів детально розглянути напружено-деформований стан безпосередньо біля вістря неоднорідності та межі поділу матеріалів (Я.Л. Кунець, О.Б. Мовчан, С.О. Назаров, О.П. Піддубняк, Г.П. Черепанов [111, 132, 143, 152, 168, 202, 266, 268]);

**г) нові теорії неідеального контакту** – розробити специфічну теорію, що дала би можливість досить просто розв'язати відповідні задачі з урахуванням ефекту малої товщини дефекту (Я.С. Підстригач, О.Є. Андрейків, В.М. Александров, Д.В. Грилицький, О.О. Євтушенко, Г.С. Кіт, Ю.М. Коляно, С.М. Мхітарян, В.К. Опанасович, В.В. Панасюк, Г.Я. Попов, Г.Т. Сулим, Y. Benveniste, F. Erdogan, M.E. Gurtin, T. Koizumi, T. Miloh, A.I. Murdoch, H. Sekine, P. Shiavone, C.Q. Ru, X. Wang та інші).

Одним з найпродуктивніших для задач теорії тонких неоднорідностей справедливо вважається останній, найсучасніший, до фундаторів якого можна віднести Я.С. Підстригача [174, 204, 205], Г.Т. Сулима [231], M.E. Gurtin [342, 343]. В основі цього підходу лежить принцип спряження континуумів різної розмірності [31, 63–65, 180, 211, 225–228, 229, 232, 237, 251, 441], який сприяв появі методу функцій стрибка (МФС).

## 2.1. Метод функцій стрибка

Метод функцій стрибка (МФС) є одним із ефективних способів розв'язування задачі тонкостінних неоднорідностей [28, 239, 441]. Ідея МФС ґрунтується на використанні двох основних положень:

1) принципу спряження континуумів різної вимірності;

2) можливості побудови математичної моделі тонкого включення і його взаємодії із зовнішнім середовищем.

### *2.1.1. Принцип спряження континуумів різної вимірності*

Суть принципу спряження (цю назву запропонував у 1975 р. Г.П. Черепанов [266], хоча сам принцип застосовували ще у 1963–1967 рр. Я.С. Підстригач зі співробітниками [95, 175, 204–208], у 1967–1971 рр. К.С. Чобанян і А.С. Хачикян [262–264, 270], у 1972–1975 рр. Д.В. Гриліцький із Г.Т. Сулимом [66, 239], полягає у заміні тонкого включення товщини $2h$, істотно меншої від будь-якого розміру задачі, з певним об'ємом $V$ (площею у двовимірному випадку), обмеженого поверхнями $S^+, S^-$ з нормалями $\mathbf{n}^+, \mathbf{n}^- \sim \mathbf{n}$, деякою поверхнею $S$ (лінією $L$ у двовимірних задачах) розриву теплофізичного та напружено-деформованого стану тіла.

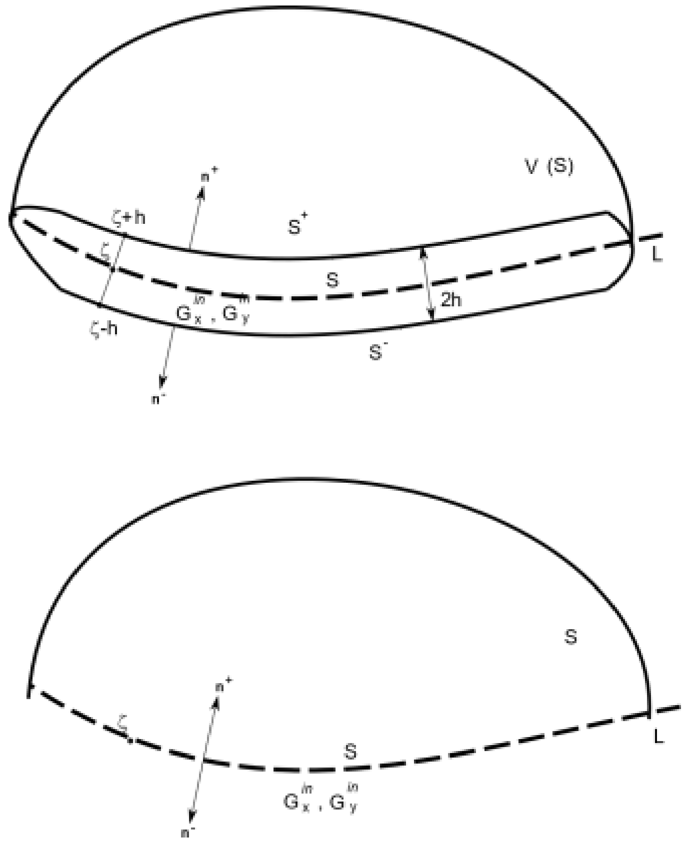



Рис.2.1. Схема принцип спряження континуумів різної вимірності

Найчастіше у ролі цієї поверхні вибирають серединну поверхню $S$ (лінію $L$) тонкої неоднорідності (еквідистантну щодо поверхонь $S^+, S^-$). Ця неоднорідність (включення) як геометричний об'єкт певної товщини вилучається із розгляду, а її вплив зводиться до формування у середовищі при переході через $S\left(L\right)$ певних функцій стрибка $f_r$:

$$f_r\left(\zeta\right)=\left[\mathbf{u}\right]_h,\ \left[\mathbf{t}_n\right]_h, ...\ \zeta\in S^{\pm}\left(L^{\pm}\right),\ \text{де}\quad \left[\bullet\right]_h=\bullet(\zeta,-h)-\bullet(\zeta,h) \qquad (2.1)$$

деяких фізико-механічних полів (компонент вектора переміщень $\mathbf{u}=\left(u_1, u_2, u_3\right)$, вектора напружень $\mathbf{t}_n=\left(t_{n_1}, t_{n_2}, t_{n_3}\right)$, температури, електричного зміщення, магнітної індукції тощо) на серединній поверхні $S$ (лінії $L$) тонкостінної неоднорідності. Функції стрибка є функціями координат поверхні $S$ (лінії $L$).

Вибір кількості та фізико-механічного змісту прийнятих до розгляду функцій стрибка повинен:

1). відповідати тим фізико-механічним явищам, які спричиняє присутність у розглянутому класі середовища розглядуваного типу тонких неоднорідностей;

2). забезпечити достатньо просте й однозначне визначення характеристик усіх прийнятих до розгляду фізико-механічних полів у довільній точці $\xi$ середовища поза областю, зайнятою включенням:

$$\bullet(\xi)=\bullet(\xi,\ f_r), \qquad \{\bullet\}=\{\sigma_{ij};\ u_i\}. \tag{2.2}$$

Функції (2.2) залежать також і від:

а) властивостей матеріалу середовища (ізотропний, анізотропний, лінійно чи нелінійно пружний тощо) і значень його фізико-механічних характеристик;

б) геометрії задачі (конфігурації тіла, поверхні $S$);

в) зовнішнього навантаження.

Причому, у разі лінійності впливу навантажувальних чинників вплив від кожного типу зовнішнього навантаження у вигляді функцій $\sigma_{ij}^0(\xi)$, $u_i^0(\xi)$ та інших полів $\bullet_{ij}^0(\xi)$ можна розрахувати заздалегідь для кожного типу матеріалу і геометрії тіла без огляду на існуючі у ньому дефекти та спричинені ними стрибки. Тобто розв'язок (2.2) можна подати у вигляді

$$\bullet(\boldsymbol{\xi})=\widehat{\bullet}(\boldsymbol{\xi},\ f_r)+\bullet^0(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.3}$$

де символом “^” угорі (сіркомфлекс, дашок) позначені відповідні (збурені) складові полів, отримані лише внаслідок впливу функцій стрибка, тобто за відсутності зовнішнього навантаження.

Зазначу, що якщо відомі граничні значення фізико-механічних полів $\bullet(\zeta\ ,\pm h)$ у матриці на межі поверхонь стрибків $S^{\pm}\left(L^{\pm}\right)$,

$$\bullet^{\pm} \cong \bullet(\zeta,\ \pm h) = \lim_{\xi \to \zeta \in S^{\pm}} \bullet(\xi,\ f_r), \tag{2.4}$$

тобто відомі всі функції стрибка $f_r$ , то згідно з (2.2) задача розв’язана. Дуже важливо, що принцип спряження (як свого роду **зовнішня** щодо включення задача (2.2)) застосовується без огляду на конкретні фізико-механічні властивості включення і визначається виключно геометричними та фізико-механічними властивостями матриці, геометрією включень та зовнішнім навантаженням.

### *2.1.2. Математична модель тонкого дефекту та умови взаємодії включення з середовищем*

Як вже було згадано, якби усі функції стрибка, чи частина з них були відомими, то згідно з (2.2), (2.3) відповідну задачу про вплив неоднорідностей на поле напружень можна було би вважати розв'язаною повністю чи частково. У низці задач (розклинювання матеріалу, розподілені з відомими густинами $\rho_i$ уздовж певних поверхонь $S$ всередині тіла дислокації, зосереджені сили, поверхневий натяг, сили тертя, теплові джерела тощо) усі або частина функцій стрибка відомі, оскільки певні стрибки дорівнюють цим густинам.

Однак у більшості випадків функції стрибка невідомі і для їх визначення у МФС [231] передбачається сумісне виконання ще двох додаткових кроків.

В основу першого кроку покладено можливість побудови (так звана **внутрішня** задача) для включень малої товщини математичної моделі, яка достатньо адекватно описує фізико-механічну природу неоднорідності у вигляді залежностей

$$\Upsilon_j\left(\mathbf{t}_n^{in},\mathbf{u}^{in},\bullet^{in}\right)\left(\zeta,\pm h\right)=0 \qquad (2.5)$$

між векторами зміщень $\mathbf{u}^{in}\left(\zeta^{in},\pm h\right)$, напружень $\mathbf{t}_n^{in}\left(\zeta,\pm h\right)$ та параметрів інших фізичних полів $\left\{\bullet^{in}\right\}$ на верхньому (+) та нижньому (–) його берегах (рис. 2.2).

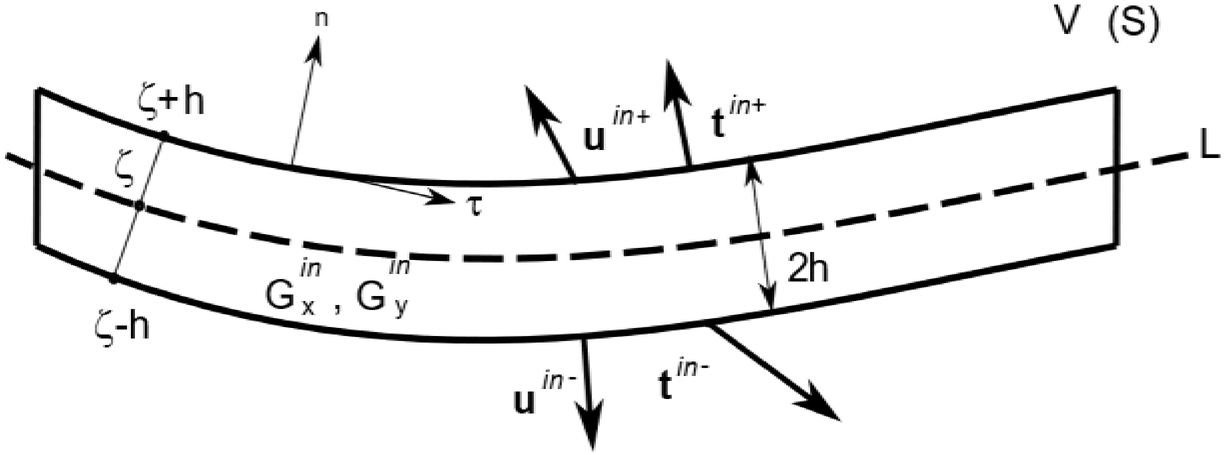



Рис. 2.2. Виокремлене тонке тіло (включення) з навантаженими берегами

Рівняння цих зв'язків, що можуть бути більш чи менш складними і відображати різний ступінь адекватності механічній та теплофізичній природі неоднорідності, формують **математичну модель включення**. Кількість цих рівнянь повинна відповідати кількості введених у розгляд принципом спряження невідомих функцій стрибка. У найбільш загальному тривимірному випадку пружної задачі їх має бути не більше шести – три для трьох стрибків компонент вектора напружень та три для стрибків складових вектора переміщень.

Наприклад, для суто пружної просторової задачі для тонкого включення у вигляді порожнини (тріщини) математична модель така: $\mathbf{t}_n^{in}\left(\zeta,\pm h\right)=0$; для тонкого абсолютно жорсткого закріпленого у просторі включення – $\mathbf{u}^{in}\left(\zeta,\pm h\right)=0$.

Важливо підкреслити, що під час побудови математичної моделі включення (**внутрішня** задача) тип матриці і її навантаження не відіграє жодного значення – це просто деяке абстрактне зовнішнє суцільне середовище. До умов взаємодії необхідно ставити лише три основні вимоги:

1. їхня кількість повинна дорівнювати кількості функцій стрибка;

2. вони повинні мати достатній рівень адекватності, відображаючи істотні для дослідника особливості реакції включення на вплив досліджуваних фізико-механічних полів;

3. вони повинні бути достатньо простими, щоб отримані на їхній основі системи рівнянь вдалося розв'язати.

На другому кроці у рівняння математичної моделі (2.5) підставляють умови контакту включення з матрицею – неідеального чи ідеального

$$\Psi\left\{\mathbf{t}_n^{in}\left(\zeta,\pm h\right), \mathbf{t}_n\left(\zeta,\pm h\right),\ \mathbf{u}^{in}\left(\zeta,\pm h\right), \mathbf{u}\left(\zeta,\pm h\right),\ \bullet^{in}\left(\zeta,\pm h\right), \bullet\left(\zeta,\pm h\right)\right\}=0\,. \quad (2.6)$$

Переважно при цьому здійснюється так зване «знесення» відповідних величин фізико-механічних полів у матриці з реальної межі контакту з включенням $\left(\zeta\,,\pm h\right)$ ($\zeta\in S$) на моделюючу поверхню стрибка $S$ (серединну поверхню включення) $\bullet\left(\zeta,\pm h\right)\approx\bullet\left(\zeta,\pm 0\right)$.

Результатом такої підстановки (2.6) у (2.5) є отримання так званих *умов взаємодії* – математичної моделі включення, записаної у термінах межових значень фізико-механічних полів $\mathbf{t}_n\left(\zeta,\pm h\right)$, $\mathbf{u}\left(\zeta,\pm h\right)$, $\bullet\left(\zeta,\pm h\right)$ (2.4) у матриці на межі поверхонь стрибків

$$F_j\left(\mathbf{t}_n,\mathbf{u},\ldots\right)\left(\zeta\,,\pm h\right)=0\,. \quad (2.7)$$

Отримані у такий спосіб умови взаємодії (2.7) є, за своєю сутністю, умовами неідеального контакту між собою поверхонь матриці, що безпосередньо прилягають до чужорідного прошарку. Включення усунуте з розгляду, а ефект його дії зводиться до неідеального (механічного, температурного тощо) контакту вздовж поверхні $S$ матеріального континууму матриці.

Якщо визначити з формул (2.2), (2.3) граничні значення фізико-механічних полів у матриці на межі поверхонь стрибків (2.4) та підставити їх в умови взаємодії (2.7), то буде отримана система сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) для визначення функцій стрибка

$$\Im_j\left(f_r\right)=0, \tag{2.8}$$

кількість рівнянь якої відповідає кількості функцій стрибка. Розв'язок цієї системи на основі принципу спряження (2.2) визначає фізико-механічні поля у довільній точці $\xi$ матриці (дає розв’язок зовнішньої задачі). Використання умов контакту (2.6) та математичної моделі включення (2.7) дає можливість на основі вже відомих функцій (2.4) обчислити фізико-механічні поля всередині неоднорідності (розв’язок внутрішньої задачі).

Складність побудови, а потім і розв’язування ССІР (2.8) окреслює дуже багато чинників, у тому числі й геометричних. Однак ці проблеми на порядок підвищують ускладнення умов взаємодії (2.7) та умов контакту (2.6). Тому у випадках фізичної нелінійності матеріалу включення чи геометричної нелінійності умов контакту доводиться застосовувати складні числово-аналітичні алгоритми розв’язування СІР, які (через довготривалі ітераційні процеси, зав’язані на розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)) не завжди гарантують необхідну точність розв’язку. Як уже згадувалося вище, такі задачі намагаються розв’язувати числовими методами (МСЕ чи МГЕ) [33, 106, 162, 166, 259, 388, 392, 401, 442], які, однак, вимагають потужних обчислювальних ресурсів і не завжди дають змогу коректно врахувати тонкостінність неоднорідності. Відтак застосування МФС у розв’язуванні таких задач важко назвати ефективним.

### *2.1.3. Структурно-модульний МФС*

Поява щораз структурно складніших фізично нелінійних матеріалів та новітніх технологій їх використання спричиняє дилему: врахування цих особливостей для підвищення адекватності математичної моделі неоднорідності породжує занадто складні для розв’язку результуючі системи СІР, а спрощення моделей не гарантує достатньої адекватності.

З метою вирішення цієї дилеми запропоновано *структурно-модульний МФС*, ідея якого ґрунтується на незалежному розгляді трьох основних груп рівнянь без спроби зменшення кількості невідомих завдяки виключення із них невідомих чинників на поверхнях включень (компоненти векторів напружень і переміщень, температури і і.п) та поєднанню на берегах $S^+, S^-$ граничних значень $\sigma_{ij}(\xi, \pm h)$, $u_i(\xi, \pm h)$, $\bullet_{ij}(\xi, \pm h)$ зовнішньої задачі (2.2), (2.3) та граничних значень $\sigma_{ij}^{in}(\xi, \pm h)$, $u_i^{in}(\xi, \pm h)$, $\bullet_{ij}^{in}(\xi, \pm h)$ внутрішньої задачі (2.5) у рівняннях (2.6) умов контактної взаємодії (так звана проміжна задача, яка є фактично інтерфейсом між між зовнішньою та внутрішньою задачами).

На відміну від класичного МФС, який передбачає отримання результуючих СІР шляхом підстановки умов взаємодії у рівняння зовнішньої задачі через умови контакту у структурно-модульному МФС (СМ МФС) пропонується розв’язувати всі рівняння незалежно без підстановок. Тобто утворена з (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) система рівнянь

$$\begin{cases} \textit{Модуль}\, 1: \quad \textit{Зовнішня} \quad \textit{задача} \\ \sigma_{ij}(\xi) = \sigma_{ij}(\xi,\, f_r), \;\; u_i(\xi) = u_i(\xi,\, f_r), \bullet(\xi) = \bullet(\xi,\, f_r), \\ \textit{Модуль}\, 2: \quad \textit{Внутрішня} \quad \textit{задача} \\ F_j\left( \mathbf{t}_n^{in}, \mathbf{u}^{in}, \bullet^{in} \right)(\zeta, \pm h) = 0, \\ \textit{Модуль}\, 3: \quad \textit{Умови} \;\; \textit{контакту} \\ \Psi\left\{ \mathbf{t}_n^{in}(\zeta, \pm h),\, \mathbf{u}^{in}(\zeta, \pm h), \bullet^{in}(\zeta, \pm h) \right\} = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

звичайно, є дещо більшою за кількістю рівнянь (невідомих), але:

1. складається з простіших рівнянь;
2. не треба здійснювати кожного разу при розв’язуванні нової задачі громіздкі перетворення для отримання ССІР (2.8), збільшуючи при цьому ймовірність появи помилок;
3. істотно спрощується методика побудови результуючих систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), даючи можливість розглядати значно складніші задачі за тих самих трудових затрат і знову ж таки зменшення імовірності отримання помилок;
4. зміни у формулюваннях зовнішньої, внутрішньої чи проміжної задач відбуваються незалежно і не вимагають кожного разу, як це робилося у МФС, докорінної перебудови ССІР (2.8). Сучасні обчислювальні ресурси дають змогу програмувати і розв’язувати таку збільшену систему рівнянь числово-аналітичними методами (наприклад, методом колокацій) з достатньою точністю, незважаючи на істотно збільшену складність математичної моделі включення чи умов контакту.

Цей підхід завдяки універсальності може бути використаний для розв’язування багатьох задач від макро- до наномеханіки, які досі з огляду на складність розв’язувалися виключно числовими методами.

## 2.2. Загальна постановка задачі. Зовнішня задача

В рамках концепції механіки суцільного середовища розглянемо безмежний ізотропний масив за умов поздовжнього зсуву уздовж осі $z$, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $E_k$, $\nu_k$ (модулі зсуву $G_k$ $\left(k=1,2\right)$), якщо на межі поділу розташовані $N$ тонких стрічкових включень малої товщини $2h_K\left(x\right)$ $(K=\overline{1,N})$ та скінченної довжини (фактично ширини) $2a_K$, $(a_K \gg h_K)$ з іншого матеріалу з довільними фізико-механічними властивостями (рис. 2.3).

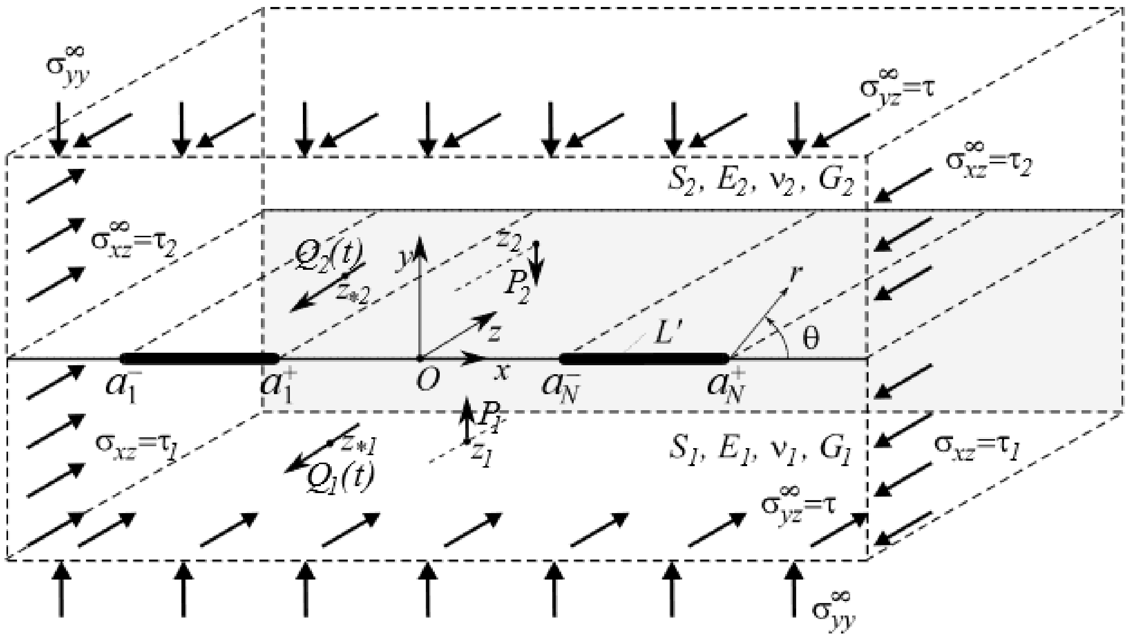



Рис. 2.3. Деформування кусково-однорідного простору з тунельними розрізами (зовнішня задача)

Вивчатимемо НДС перерізу тіла площиною $xOy$, перпендикулярною до напряму $Oz$ зсуву. Перерізи півпросторів утворюють дві півплощини $S_k$, наділені відповідними пружними характеристиками, а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$. На ній лежать серединні лінії перерізів включень $L_n' = [a_n^-; a_n^+]$, формуючи лінію $L' = \bigcup\limits_{n=1}^{N} L_n' = \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a_n^-; a_n^+]$. Складена з двох півплощин $S_1, S_2$ площина $S$ займає всю комплексну площину $z = x + iy$. Одночасне використання однакового традиційного позначення для осі $z$ та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Вважатимемо, що зовнішнє навантаження тіла здійснюється як у площині $xOy$, що спричиняє плоский деформований стан, так і в напрямі осі $z$, реалізуючи як поздовжній зсув масиву, так і його нормальне стискання (Рис. 2.3). Як відомо [125, 217], поля напружень та переміщень в околі краю довільної тріщини в рамках лінійної теорії пружності для ізотропних тіл можна розділити на плоску деформацію та поздовжній зсув. У випадку анізотропії це, взагалі кажучи, не завжди можливо через взаємозалежність рівнянь [114].

Отже, навантаження здійснюється квазістатично однорідним полем напружень на нескінченності $(\sigma_{yy}^{\infty} = p,\ \sigma_{xy}^{\infty} = \tau,\ \sigma_{xx1}^{\infty} = p_1,\ \sigma_{xx2}^{\infty} = p_2)$, зосередженими силами $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$ та моментами $M_k$ у точках $z_k = x_k + iy_k$, прикладеними іншими силовими чи дислокаційними чинниками. Крім того, масив навантажено зсувними чинниками у напрямі осі $0z$: рівномірно розподіленими на нескінченності напруженнями $\sigma_{yzk}^{\infty}(x, y, t) = \tau(t)$, $\sigma_{xzk}^{\infty}(x, y, t) = \tau_k(t)$, зосередженими силами інтенсивності $Q_k(t)$, гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_k(t)$ в точках $z_{*k} \in S_k$ $(k = 1, 2)$. Тут $t$ − час, як формальний параметр, що характеризує змінюваність навантаження. Вважатимемо, що величина і напрям дії силових чинників, які здійснюють поздовжній зсув, змінюються квазістатично (настільки повільно, щоб не було потреби враховувати інерційні члени). Умова незмінності навантаження не є вкрай необхідною. Можливе припущення, що довантаження теж змінюється у часі квазістатично, не вносить принципових ускладнень у розв’язування задачі.

Зазначимо, що додатний напрям векторів сили та Бюргерса [104, 231] обраний уздовж осі $z$ (так, щоб з осями $x$, $y$ утворювалася права система) на відміну від неявно прийнятого у [157] та деяких інших протилежного напряму. Тут і надалі індекс $k$ вказує на область, до якої належить дана величина чи компонента. Осі $Oz$ та $Ox$ декартової системи $Oxyz$ лежать у площині поділу матеріалів (Рис. 2.3).

Вплив розв'язку плоскої задачі на розв'язок задачі поздовжнього зсуву відбувається тільки у випадку, коли на ділянках контакту $L_n^{\pm}$ меж матеріалів матриці (матриці та включення) порушується ідеальний механічний контакт. Причому існує непуста підобласть цих ділянок, де знак нормального напруження $\sigma_{yyk}$ є від'ємним і береги областей контакту, залишаючись притиснутими, зсовуються уздовж осі $Oz$ і можуть там спричиняти сили тертя, а відтак тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо.

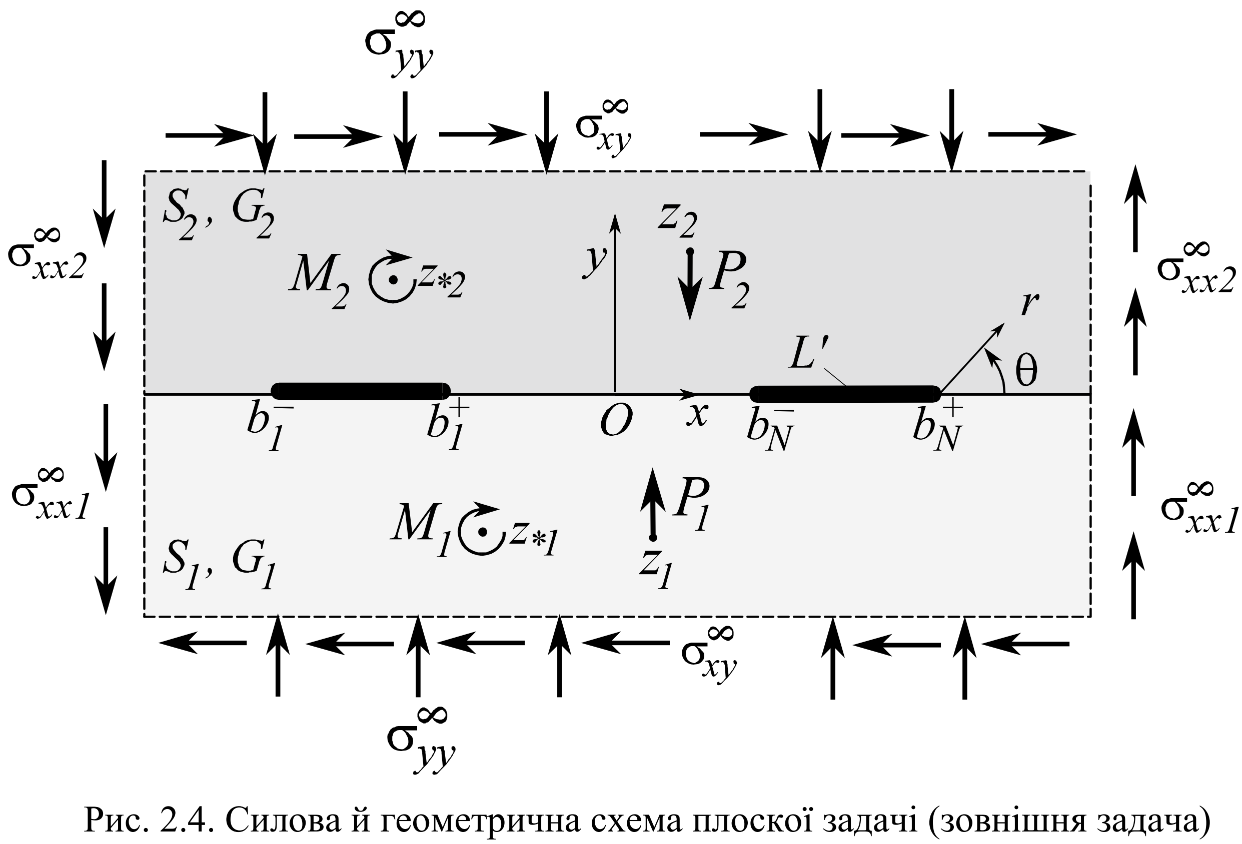



Рис. 2.4. Силова й геометрична схема плоскої задачі (зовнішня задача)

Із застосуванням методики [28–30, 140, 420] напруження і переміщення в кожній з розглянутих $S_k$ для плоскої задачі можна записати за допомогою двох комплексних потенціалів

$$\begin{aligned}&\sigma_{yyk} - i\sigma_{xyk} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi_k'(z)} + \overline{\Psi_k(z)},\\ &2G_k\left(u_{xk}' + iu_{yk}'\right) = \kappa_k \Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi_k'(z)} - \overline{\Psi_k(z)} \;\; \left(z \in S_k;\; k = 1,2\right),\end{aligned} \tag{2.10}$$

голоморфних у цих півплощинах та прямуючих до нуля на нескінченності.

Довизначимо функцію $\Phi_1(z)$ у верхній півплощині, $\Phi_2(z)$ – у нижній у такий спосіб (аналітичне продовження через ненавантажені ділянки) [28–30, 140, 420]:

$$\Phi_k(z) = -\bar{\Phi}_k(z) - z\bar{\Phi}_k'(z) - \bar{\Psi}_k(z) \;\; \left(z \in S_l;\; k, l = 1,2;\; l = 3 - k\right).$$

Звідси, заміняючи $z$ на $\bar{z}$, отримуємо

$$\overline{\Psi_k(z)} = -\overline{\Phi_k(z)} - \Phi_k(\bar{z}) - \overline{z\Phi_k'(z)} \;\; \left(z \in S_k;\; k = 1,2\right).$$

Підставляючи цей вираз у співвідношення (2.10), та вважаючи, що $S_k$ навантажено полем однорідних напружень на нескінченності $\sigma_{yy}^{\infty},\ \sigma_{xy}^{\infty},\ \sigma_{xxk}^{\infty}$, зосередженими силами $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$ та моментами $M_k$ у точках $z_{*k} = x_{*k} + iy_{*k}$, отримуємо

$$\begin{aligned}&\sigma_{yyk}(z) - i\sigma_{xyk}(z) = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)},\\ &2G_k\left[u_{xk}'(z) + u_{yk}'(z)\right] = \kappa_k \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} \;\; \left(z \in S_k\right);\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi_k(z)=\Gamma_k+R_{k1}(z)+m_k^k R_{l1}(z)+\left(m_k^l-1\right)\left\{\sum_{j=1}^{3}\overline{R_{kj}}(z)+z\overline{R'_{k1}}(z)\right\},\\ &\Phi_l(z)=-\overline{\Gamma_l}-\overline{\Gamma'_l}-\sum_{j=1}^{3}\overline{R_{lj}}(z)-z\overline{R'_{l1}}(z)+\left(1-m_k^k\right)R_{l1}(z)-\\ &\qquad -m_k^l\left\{\sum_{j=1}^{3}\overline{R_{kj}}(z)+z\overline{R'_{k1}}(z)\right\},\quad z\in S_k\quad (k=1,2;l=3-k),\end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

де

$$\Gamma_k=\frac{\sigma_{yy}^{\infty}+\sigma_{xxk}^{\infty}}{4},\ \Gamma'_k=\frac{\sigma_{yy}^{\infty}-\sigma_{xxk}^{\infty}}{2}+i\sigma_{xyk}^{\infty},\ R_{k1}(z)=-\frac{\eta_k P_k}{z-z_{*k}},$$

$$R_{k2}(z)=\eta_k\left(\frac{\kappa_k\overline{P_k}}{z-z_{*k}}-\frac{\overline{z_{*k}}P_k}{\left(z-z_{*k}\right)^2}\right),\quad R_{k3}(z)=\frac{-iM_k}{2\pi\left(z-z_{*k}\right)^2},$$

$$\eta_k=\frac{1}{8\pi\left(1-\nu_k\right)},\quad m_k^n=\frac{8G_n}{(1-\nu_n)e_k},\quad e_k=\frac{2\left(G_k+\kappa_k G_l\right)}{(1-\nu_1)(1-\nu_2)}.$$

Для плоскої деформації сталі Мусхелішвілі дорівнюють $\kappa_k=3-4\nu_k$. Тут $G_k$ – модулі зсуву, $\nu_k$ – коефіцієнти Пуасона, $\kappa_k$ – сталі Мусхелішвілі матеріалів півпросторів $S_k$. Переходячи в (2.11) до границі при $z\to x$ з урахуванням того, що $\lim\limits_{z\to x}\left[\left(z-\overline{z}\right)\overline{\Phi'(z)}\right]=0$, а також того, що якщо $z$ прямує до осі $Ox$ з нижньої (відповідно верхньої) півплощини $S_k$, то $\overline{z}$ прямує до тієї ж точки на осі $Ox$, тільки рухаючись з верхньої (нижньої) півплощини, отримуємо

$$\sigma_{yyk}(x)-i\sigma_{xyk}(x)=\Phi_k^{\pm}(x)-\Phi_k^{\mp}(x),\quad k=\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}; \tag{2.13}$$

$$2G_k\left(u'_{xk}(x)+iu'_{yk}(x)\right)=\kappa_k\Phi_k^{\pm}(x)+\Phi_k^{\mp}(x),\quad k=\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}. \tag{2.14}$$

Вирази у фігурних дужках означають, що у формулах (2.13), (2.14) та подібних до них верхній знак відповідає значенню $k=2$; нижній – $k=1$.

У розв'язку плоскої задачі нас цікавить передусім нормальне напруження $\sigma_{yyk}$, яке в загальному випадку нормального навантаження отримує вигляд

$$\sigma_{yy}\left(x\right)=\sigma_{yy}^{\infty}-4\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{E_j\eta_k}{e_j}\operatorname{Re}\frac{P_k}{x-z_k}-\frac{E_j\eta_k}{e_k}\operatorname{Re}\frac{\kappa_k P_k-\overline{P}_k}{x-\overline{z}_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{2G_k\eta_k}{e_j}\operatorname{Im}\frac{M_k}{\left(x-\overline{z}_k\right)^2}\right\}=\sigma_{yy}^{\infty}-4\sum_{k=1}^{2}\left\{E_j\eta_k\operatorname{Re}\frac{N_k}{x-z_k}-\frac{2G_k\eta_k}{e_j}\operatorname{Im}\frac{M_k}{\left(x-\overline{z}_k\right)^2}\right\}; \quad (2.15)$$

$$N_k=\frac{P_k}{e_j}-\frac{\kappa_k\overline{P}_k-P_k}{e_k} \qquad \left(k=1,2;\;\; j=3-k\right).$$

У подальшому будуть корисними вирази для нормальних напружень $\sigma_{yyk}\left(x\right)$ та їх часткові випадки для конкретних варіантів притискного навантаження:

а) діє лише однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості

$$\sigma_{yyk}\left(x\right)=\sigma_{yy}^{\infty}<0; \quad (2.16)$$

б) діє пара зрівноважених притискних нормальних зосереджених сил $P_k=(-1)^{k+1}iP$ $\left(P>0\right)$ у деяких точках $z_k\in S_k$ $\left(k=1,2\right)$

$$N_k=\left(-1\right)^{k+1}iP\gamma_k; \qquad \sigma_{yy}(x)=4P\sum_{k=1}^{2}(-1)^k E_{3-k}\eta_k\gamma_k\operatorname{Re}\frac{i}{x-z_k}; \quad (2.17)$$

в) діє пара зрівноважених нормальних зосереджених сил $P_k = (-1)^{k+1} iP$ притискних $(P > 0)$ чи розтягуючих $(P < 0)$ у симетричних точках $z_k = (-1)^k ih \in S_k \ (k = 1, 2)$

$$\sigma_{yy}(x) = -\frac{4Ph\gamma^+}{x^2 + h^2}, \tag{2.18}$$

де позначено $\gamma^+ = E_2\eta_1\gamma_1 + E_1\eta_2\gamma_2$.

Для формулювання задач, які будуть розглядатися у розділах 3−4, 6 важливою є передумова, щоб

$$\sigma_{yyk}(x) \le 0 \tag{2.19}$$

по всій лінії контакту, щоб забезпечувати відсутність відриву поверхонь контакту півпросторів. Цій передумові задовольняють часткові випадки навантаження (2.16) та (2.17) − (2.18) при $(P > 0)$. Зрозуміло, що випадки навантаження (2.17), (2.18) можна комбінувати з випадком навантаження (2.16). Задовольняючи передумові (2.19) можна визначити допустимі значення для комбінацій притискного навантаження у випадку розтягуючих сил $P_k = (-1)^{k+1} iP \ (P < 0)$ прикладених у точках $z_k \in S_k \ (k = 1, 2)$

$$\sigma_{yy}^{\infty} - 4P \sum_{k=1}^{2} (-1)^k E_{3-k}\eta_k\gamma_k \operatorname{Re}\frac{i}{x - z_k} \le 0 \quad (x \in L) \tag{2.20}$$

Якщо ж ця пара сил розташована у симетричних точках $z_k = \pm ih \in S_k \ (k = 1, 2)$, то умова (2.20) спрощується

$$\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{Ph\gamma^{+}}{\pi\left(x^2 + h^2\right)} \le 0 \quad \left(x \in L\right). \tag{2.21}$$

Враховуючи, що найбільший вплив нормальних зосереджених сил на значення напружень $\sigma_{yy}(x)$ виникає у точці $x = 0$, отримуємо допустимі значення для згаданого випадку розтягуючих сил $P$:

$$|P| \le \frac{\pi h \sigma_{yy}^{\infty}}{\gamma^{+}}. \tag{2.22}$$

Зусилля на нескінченості та пружні сталі матеріалів півпросторів не можуть бути цілком довільними і зв'язані умовою

$$\left(\kappa_1 \Gamma_1 - \overline{\Gamma_1} - \overline{\Gamma_1'}\right) G_2 = \left(\kappa_2 \Gamma_2 - \overline{\Gamma_2} - \overline{\Gamma_2'}\right) G_1. \tag{2.23}$$

Умова (2.23) згідно з (2.14) означає, що на нескінченності $u_{x1}'^{\infty} + i u_{y2}'^{\infty} = u_{x2}'^{\infty} + i u_{y2}'^{\infty}$, тобто, деформації поздовжнього видовження поряд з лінією поділу обох півплощин на нескінченності однакові і ця лінія поділу матеріалів після прикладання зусиль залишається на нескінченності прямою. Це традиційне для плоскої задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл обмеження – наслідок розгляду безмежного середовища та недопустимості викривлення лінії $L$ поділу матеріалів на нескінченності. На практиці частіше мають справу лише з обмеженими тілами, тому навантажують довільним чином без огляду на форму області та пружні властивості матеріалів.

Розглянемо антиплоску задачу. Осі $Oz$ та $Ox$ декартової системи $Oxyz$ лежать у площині поділу матеріалів (Рис. 2.5).

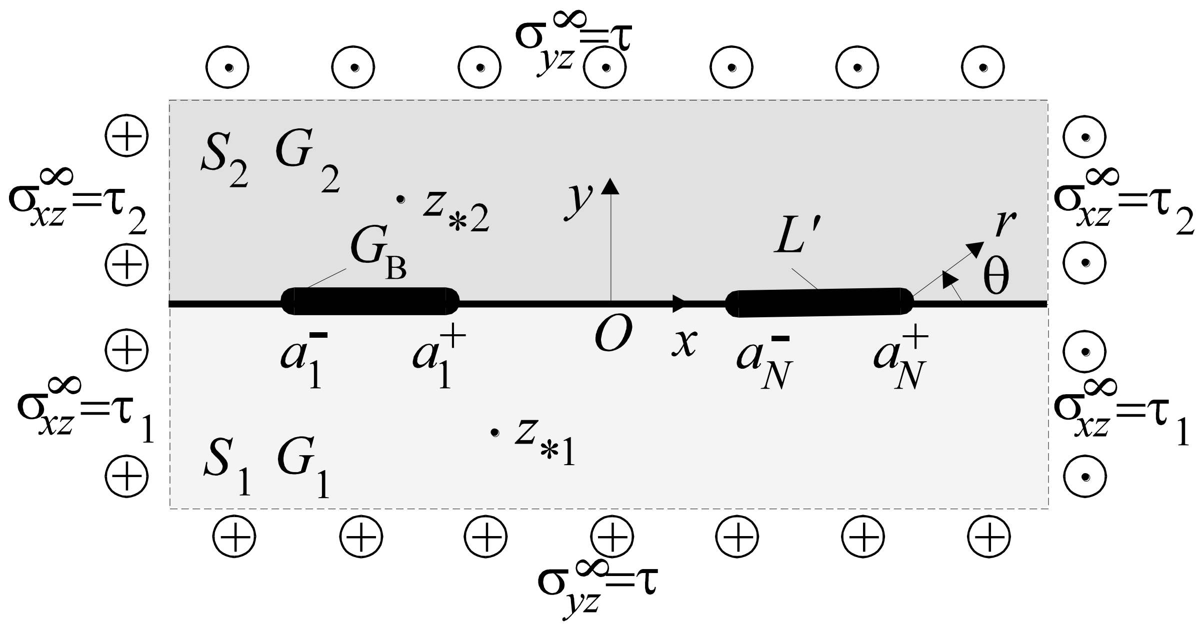



Рис. 2.5. Силова й геометрична схема задачі поздовжнього зсуву

Напруження і переміщення в кожній з розглянутих $S_k$ для антиплоскої задачі теж можна записати за допомогою комплексного потенціалу. Оскільки компонента зміщення $w$ є гармонійною функцією, то розглянемо деяку аналітичну функцію $F(z)$, таку, щоб

$$\begin{aligned}&\sigma_{yzk}(z,t)+i\sigma_{xzk}(z,t)=F(z,t)=\\&=\tau(t)+i\tau_k(t)+iD_1(z,t)+iD_2(z,t)+F_*(z,t)\ \left(z\in S_k\right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Тут $D_k(z,t)=-\dfrac{Q_k(t)+iG_k b_k(t)}{2\pi\left(z-z_{*k}\right)}$, $F_*(z)$ − голоморфна та прямує до нуля на нескінченності. На лінії контакту $L$ повинні виконуватися граничні умови

$$\sigma^{+}_{yz2}(x,+0)=\sigma^{-}_{yz1}(x,-0) \tag{2.25}$$

та, з урахуванням закону Гука

$$\sigma_{yzk}(x)=G_k\frac{\partial w}{\partial x}(x)\ \ (k=1,2), \tag{2.26}$$

отримуємо

$$w^{+}(x,+0)=w^{-}(x,-0)\to\frac{\partial w^{+}}{\partial x}(x)=\frac{\partial w^{-}}{\partial x}(x)\to\frac{\sigma_{yz2}^{+}}{G_2}(x)=\frac{\sigma_{yz1}^{-}}{G_1}(x). \quad (2.27)$$

Підставляючи (2.24) у (2.25) отримуємо першу задачу спряження для визначення $F_{*}(z,t)$:

$$\left(F_{*}^{+}(x,t)-\overline{F}_{*}^{+}(x,t)\right)-\left(F_{*}^{-}(x,t)-\overline{F}_{*}^{-}(x,t)\right)=0\to F_{*}^{\pm}(x,t)=\overline{F}_{*}^{\mp}(x,t), \quad (2.28)$$

а при підставлянні у (2.27) – другу задачу спряження:

$$\begin{gathered}F_{*}^{+}(x,t)-F_{*}^{-}(x,t)=-\frac{2i}{G_1+G_2}\left(G_1\tau_2(t)-G_2\tau_1(t)\right)+\\+i\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\sum_{j=1}^{2}\left\{D_j(x,t)+\overline{D}_j(x,t)\right\}.\end{gathered} \quad (2.29)$$

З умови прямування до нуля на нескінченності відразу виникає вимога до співвідношення навантаження та пружних сталих

$$G_1\tau_2(t)=G_2\tau_1(t). \quad (2.30)$$

З урахуванням (2.30) розв'язок (2.29) має вигляд

$$\begin{gathered}F_{*}(z,t)=i\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\sum_{j=1}^{4}I_j(z,t),\\I_j(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\dot{D}_j(x,t)\frac{dx}{x-z},\ \dot{D}_j(x,t)\sim\left\{D_1,D_2,\overline{D_1},\overline{D_2}\right\}(x,t).\end{gathered} \quad (2.31)$$

Обчислюючи інтеграли $I_j(z,t)$

$$I_1(z,t)=\begin{cases} D_1(z,t)\ (z\in S_2), \\ 0\quad (z\in S_1); \end{cases}\qquad I_2(z,t)=\begin{cases} 0\quad (z\in S_2), \\ -D_2(z,t)\ (z\in S_1); \end{cases}$$
$$I_3(z,t)=\begin{cases} 0\quad (z\in S_2), \\ -\overline{D_1}(z,t)\ (z\in S_1); \end{cases}\qquad I_4(z,t)=\begin{cases} -\overline{D_2}(z,t)\ (z\in S_2), \\ 0\quad (z\in S_1); \end{cases} \tag{2.32}$$

отримуємо вираз

$$\begin{aligned} F_*(z,t)&=i\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\left\{D_1(z,t)+\overline{D_2}(z,t)\right\}\ (z\in S_2), \\ F_*(z,t)&=i\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\left\{-\overline{D_1}(z,t)-D_2(z,t)\right\}\ (z\in S_1) \end{aligned} \tag{2.33}$$

і, остаточно, напруження (2.24) у момент часу $t$ дорівнюють

$$\begin{aligned} &\sigma^0_{yzk}(z,t)+i\sigma^0_{xzk}(z,t)=\tau(t)+i\tau_k(t)+iD_k(z,t)+i\left(p_k-p_l\right)\overline{D_k}(z,t)+ \\ &+2ip_kD_l(z,t),\qquad z\in S_k\ (k=1,2;\ l=3-k). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Наявність на межі поділу півпросторів $L$ $\left(y=0,\ |z|<\infty\right)$ на деякій частині $L'=\bigcup\limits_{n=1}^{N}L'_n=\bigcup\limits_{n=1}^{N}[a_n^-;a_n^+]$ порушення ідеального зчеплення (наявність прошарків, матеріали не контактують, контактують гладко або за певним іншим законом) внаслідок існування тунельних розрізів (рис. 2.5) застосовуючи МФС [231] імітуємо у вигляді стрибків компонент тензора напружень та вектора переміщень

$$\begin{aligned} &\sigma_{yz1}(x,-0)-\sigma_{yz2}(x,+0)=\left[\sigma_{yz}\right]=f_3(x), \\ &\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,-0)-\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,+0)=\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]=f_6(x)\qquad (x\in L'). \end{aligned} \tag{2.35}$$

З урахуванням закону Гука (2.26) співвідношення (2.35) записуємо так:

$$\begin{aligned}&\left[\sigma_{yz}\right]=f_3(x),\\&\left[\sigma_{xz}/G\right]\equiv\sigma_{xz}^{-}/G_1-\sigma_{xz}^{+}/G_2=f_6(x)\qquad(x\in L).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Враховуючи міркування (2.3) вважаємо, що наявність розрізу вносить збурений вклад у загальний НДС тіла, який тепер можна виразити як суперпозицію [28, 231]

$$\sigma_{yzk}(z)+i\sigma_{xzk}(z)=\sigma^0_{yzk}(z)+i\sigma^0_{xzk}(z)+\widehat{\sigma}_{yzk}(z)+i\widehat{\sigma}_{xzk}(z)\quad(z\in S_k),\tag{2.37}$$

де величини, відзначені індексом “0” зверху, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без тріщин (2.34) за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв’язок). Збурений розв’язок можна отримати аналогічно до однорідного шляхом введення голоморфної зокрема у кожній із півплощин $S_k$ функції $\omega(z)$, такої що прямує до нуля на нескінченості та задовольняє вимогу

$$w(z)=\operatorname{Im}\omega(z)/G_k\quad(z\in S_k;\ k=1,\ 2).\tag{2.38}$$

Тоді, згідно із законом Гука (2.26):

$$\widehat{\sigma}_{yzk}(z)+i\widehat{\sigma}_{xzk}(z)=\omega'(z),\ (z\in S_k;\ k=1,\ 2).\tag{2.39}$$

Підставляючи (2.39) в умову (2.35), отримаємо

$$\left(\omega'^{+}(x)-\overline{\omega'^{+}(x)}\right)-\left(\omega'^{-}(x)-\overline{\omega'^{-}(x)}\right)=-2f_3(x),\tag{2.40}$$

а також

$$\frac{\omega'^{-}(x)-\overline{\omega'^{+}(x)}}{G_1}-\frac{\omega'^{+}(x)-\overline{\omega'^{-}(x)}}{G_2}=2if_6(x). \tag{2.41}$$

Розв'язки задач лінійного спряження (2.40) і (2.41), які прямують до нуля на нескінченності, мають вигляд:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{-2f_3(t)dt}{t-z}\equiv ig_3(z)=\begin{cases}\omega'(z)-\overline{\omega'(z)} & (z\in S_2),\\ \omega'(z)-\overline{\omega'(z)} & (z\in S_1),\end{cases}$$

або більш стисло

$$ig_3(z)=\omega'(z)-\overline{\omega'(z)} \qquad (z\in S_1,\ S_2), \tag{2.42}$$

а також

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{-2if_6(t)dt}{t-z}\equiv -g_6(z)=\begin{cases}\omega'(z)/G_2+\overline{\omega'(z)}/G_1 & (z\in S_2),\\ \omega'(z)/G_1+\overline{\omega'(z)}/G_2 & (z\in S_1),\end{cases}$$

або, що те саме,

$$-g_6(z)=\omega'(z)/G_k+\overline{\omega'(z)}/G_l \quad (z\in S_k;\ k,l=1,2;\ k\neq l). \tag{2.43}$$

На основі залежностей (2.42) і (2.43) можна стверджувати, що

$$\omega'(z)=-Cg_6(z)+ip_k g_3(z),\ C=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2},\ p_k=\frac{G_k}{G_1+G_2}, \tag{2.44}$$

а отже,

$$\sigma_{yzk}(z)+i\sigma_{xzk}(z)=\sigma^0_{yzk}(z)+i\sigma^0_{xzk}(z)-Cg_6(z)+ip_k g_3(z) \quad (z\in S_k). \tag{2.45}$$

Застосовуючи формули Сохоцького–Племелі можемо визначити із співвідношень (2.44), (2.45) значення компонент тензора напружень на межі поділу матеріалів

$$\sigma_{yzk}\left(x\right)=\mp p_k f_3\left(x\right)-Cg_6\left(x\right)+\sigma^0_{yzk}\left(x\right), \qquad (2.46)$$

$$\sigma_{xzk}\left(x\right)=\mp Cf_6\left(x\right)+p_k g_3\left(x\right)+\sigma^0_{xzk}\left(x\right). \qquad (2.47)$$

Значення $k=2$ відповідає верхньому знаку, $k=1$ – нижньому.

Для аналізу задач, які будуть розглянуті в наступних розділах, зручно сформулювати на основі (2.15) та (2.34) основні розрахункові схеми зовнішнього зсувного та нормального навантаження. Ці схеми наведено в **Додатку Б.**

Отже, зроблено загальну постановку основної та додаткової зовнішніх задач для визначення напружено деформованого стану у кусково-однорідній матриці з системою міжфазних тонких тунельних розрізів, навантажених зовнішніми силовими та дислокаційними чинниками і невідомими стрибками компонент тензора напружень і вектора переміщень на берегах розрізів.

Подальший хід розв’язування вимагає уточнення умов щодо способу контактування матеріалів та отримання розв’язку внутрішньої задачі для включень (за їх наявності). Якщо береги розрізів контактують безпосередньо, то розв’язувати внутрішню задачу для включень не потрібно.

## 2.3. Модель тонкого включення-прошарку з нелінійними фізико-механічними властивостями. Внутрішня задача

У розвиток вищезгаданих умов неідеального контакту побудуємо низку математичних моделей виду (2.5), що моделюють наявність між контактуючими тілами тонкої неоднорідності довільної нелінійної фізичної природи. Вважатимемо, що крім фізичної нелінійності ця тонка неоднорідність може бути як багатошаровою, так і впровадженою у матрицю з додатковими внутрішніми напруженнями вздовж поверхні чи з можливістю неідеального контакту.

У формулюванні задачі поздовжнього зсуву розглядається структура, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $G_1$, $G_2$, на межі якої (площина $xOz$) в напрямку осі зсуву $z$ розташоване тонке включення завтовшки $2h$ $(h \ll a)$ (рис. 2.5).

Основними співвідношеннями для довільного матеріалу включення є умови рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{in}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{in}}{\partial y} + \rho^{in} F^{in} = 0, \qquad (2.48)$$

де $\rho^{in}$ – густина матеріалу включення, $F^{in}$ – інтенсивність масових сил; конститутивна залежність деформацій від напружень доволі загального нелінійного вигляду

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}\right),\ s = \{x, y\}, \qquad (2.49)$$

та співвідношення тонкостінності

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial y}(x,h) + \frac{\partial w^{in}}{\partial y}(x,-h) \simeq \frac{w^{in}(x,h) - w^{in}(x,-h)}{h} = -\frac{\left[w^{in}\right]_h}{h}. \qquad (2.50)$$

Тут і далі позначено $[\bullet]_h = \bullet(x,-h) - \bullet(x,+h)$, $\langle\bullet\rangle_h = \bullet(x,-h) + \bullet(x,+h)$.

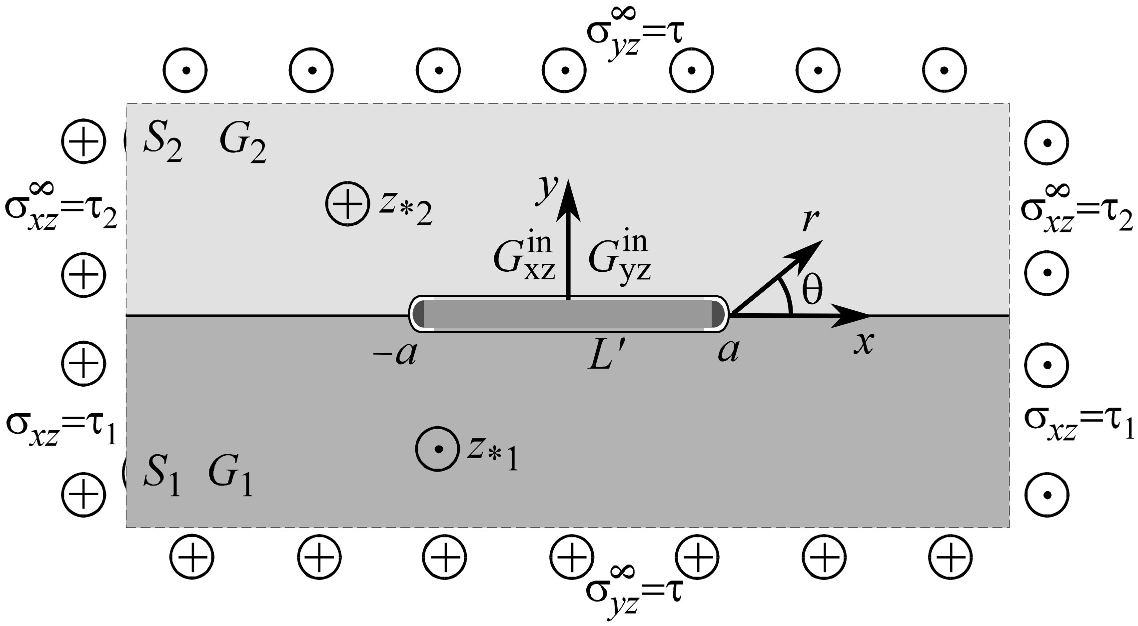



Рис. 2.6. Геометрія та навантаження структури

Монотонну функцію $\varpi_s(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in})$ обирають із загальнотеоретичних міркувань, або вона є якоюсь апроксимаційною залежністю експериментальних результатів. Співвідношення (2.49) можна представити в більш зручному вигляді

$$\sigma_{sz}^{in}=G_s^{in}(\bullet)\frac{\partial w^{in}}{\partial s},\quad G_s^{in}(\bullet)=G_s^{in}\left(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in}\right),\ s=\{x,y\}. \tag{2.51}$$

Інтегруючи рівняння рівноваги (2.48) для внутрішніх точок включення за $x$ в межах $[-a,x]$ та усереднюючи за товщиною $y\in[-h,h]$, отримаємо з використанням (2.49) такі рівняння математичної моделі тонкого фізично нелінійного включення:

$$\begin{cases}\left\langle \varpi_x^{-1}\left(\dfrac{\sigma_{xz}^{in}}{G_k},\dfrac{\sigma_{yz}^{in}}{G_k}\right)\right\rangle_h-2\sigma_{xz}^{in}(-a)-\dfrac{1}{h}\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}^{in}\right]_h(\xi)d\xi=0,\\ -\dfrac{[w^{in}]_h}{h}=\left\langle\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in}\right)\right\rangle_h.\end{cases} \tag{2.52}$$

Спрощення функції $\varpi_s(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in})$ можливе у різних варіантах. Наприклад, за нехтування у ній взаємним впливом напружень: $\varpi_s(\sigma_{xz}^{in},\sigma_{yz}^{in}) \sim \varpi_s(\sigma_{sz}^{in})$ (модель нелінійних пружин типу Вінклера). Тоді співвідношення (2.49) можна записати у простішому вигляді

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s(\sigma_{sz}^{in}) \ \{s = x, y\},$$

або в лінеаризованій формі виду (2.51)

$$\sigma_{sz}^{in} = G_s^{in}(\sigma_{sz}^{in})\frac{\partial w^{in}}{\partial s}, \ \{s = x, y\} \tag{2.53}$$

із заданими певним чином змінюваними модулями зсуву $G_s^{in}(\sigma_{sz}^{in})$. Більш конкретні приклади урахування нелінійності конститутивних співвідношень (2.51) будуть розглянуті в розділі **7**.

Для кожної із згаданих моделей деформування виду (2.53) можна отримати такий вигляд математичної моделі фізично ортотропно нелінійного тонкого включення

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in},t)\left\langle \dfrac{\partial w}{\partial x}\right\rangle_h (x,t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}\right]_h(\xi,t)d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in},t)\left[w\right]_h(x,t) + h\left\langle \sigma_{yz}\right\rangle_h (x,t) = 0\,. \end{cases} \tag{2.54}$$

Адекватність моделі (2.54) верифікують граничні випадки:

А) відсутність включення

$$h \to 0: \left[\sigma_{yzk}\right]_h \to 0, \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_h \to 0, \ \left[w\right]_h \to 0;$$

B) відсутність опору вздовж осі $0x$ (варіант моделі Вінклера)

$$G_x^{in} \to 0: \int_{-a}^{x} \left[\sigma_{yz}\right]_h (\xi) d\xi + N_{xz}(-a) + 2hF_{aver}^{in}(x,h) = 0;$$

C) відсутність опору вздовж осі $Oy$ (плівка)

$$G_y^{in} \to \infty: \left[w\right]_h \to 0;$$

D) абсолютно жорстке включення

$$G_x^{in} \to \infty: \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \to 0, \ \left[w\right]_h \to 0;$$

E) ідеально пружне ортотропне включення $G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t) = G_x^{in} = const$, $G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t) = G_y^{in} = const$

$$\begin{cases} G_x^{in} \left\langle \dfrac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h (x,t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{-a}^{x} \left[\sigma_{yz}\right]_h (\xi,t) d\xi + 2F_{aver}^{in}(x,h) = 0, \\ G_y^{in} \left[w\right]_h (x,t) + h \left\langle \sigma_{yz} \right\rangle_h (x,t) = 0, \end{cases} \tag{2.55}$$

де $F_{aver}^{in}(x,h) = \dfrac{\rho}{2h} \displaystyle\int_{-h}^{h} \int_{-a}^{x} F^{in}(\xi, y) d\xi dy$.

Окрім того, побудована з використанням лінійного закону Гука математична модель (2.55) узагальнює відомі моделі «поверхневого шару» [291, 342, 343, 384] на випадок розімкнутого прямолінійного контуру, а також, як частковий випадок, - модель міжфазної тріщини з поверхневим натягом [465].

Математичну модель (2.54) можна узагальнити врахуванням складнішої залежності (2.49), додаткового силового, теплового чи електромагнітного навантаження тощо. Однак такі ускладнення моделі не потребуватимуть при застосуванні структурно-модульного МФС внесення змін у інші модулі загальної схеми розв'язування задачі. Застосування моделі на випадки багатошаровості, різних варіантів навантаження та умов контакту буде розглянуто та проаналізовано у розділах **5-7**.

## 2.4. Умови контакту

Вибір умов контакту у контактних задачах має визначальну роль для отримання коректного розв'язку задачі [1, 9, 48, 80, 215, 230, 272, 329, 444]. Як вже згадувалося в розділі **1**, існує ціла низка умов контакту, що моделюють наявність чужорідного прошарку між контактуючими тілами. До таких належать і згадані в ***2.1.2.*** умови взаємодії (2.7). Для задач, постановка яких зроблена у підрозділі **2.2.** потрібні умови **безпосереднього** контакту тіл, яких, взагалі кажучи, є невелика кількість типів. Якщо ввести в розгляд умовно два тіла з необов'язково однозв'язною поверхнею (лінією у двовимірному випадку) контакту $\left( L = \bigcup_{j=1}^{N} L_j \right)$, то в області контакту можливе застосування таких крайових умов на різні фізико-механічні стани.

**а)** Відсутність контакту (відлипання, неконтактуюча тріщина) на $L$ або на окремих ділянках $L_j$:

$$\sigma_{nn}^{i} = 0, \qquad \sigma_{ns}^{i} = 0 \qquad (i = 1,2). \tag{2.56}$$

**б)** Гладкий контакт (відсутність дотичних напружень) на $L$ або на окремих ділянках $L_j$:

$$\sigma_{nn}^1 = \sigma_{nn}^2,\ \sigma_{ns}^1 = \sigma_{ns}^2 = 0 \qquad \text{– умови 1-го роду;} \qquad (2.57)$$

$$u_n^1 = u_n^2,\ \sigma_{ns}^1 = \sigma_{ns}^2 = 0 \qquad \text{– умови 2-го роду;} \qquad (2.58)$$

або комбінація умов (2.57) і (2.58) на різних частинах $L$ – мішані умови.

**в)** Ідеальний механічний контакт (повне зчеплення) на $L$ або на окремих ділянках $L_j$:

$$\sigma_{nn}^1 = \sigma_{nn}^2,\ \sigma_{ns}^1 = \sigma_{ns}^2 \qquad \text{умови 1-го роду;} \qquad (2.59)$$

$$u_n^1 = u_n^2,\ u_s^1 = u_s^2 \qquad \text{умови 2-го роду.} \qquad (2.60)$$

**г)** Контакт з додатковим зусиллям (наявність поверхневих зусиль на $L$)

$$u_n^1 = u_n^2,\ \sigma_{ns}^1 = \sigma_{ns}^2 - T\ . \qquad (2.61)$$

При $T = 0$ отримуємо звичайний ідеальний контакт.

**д)** Контакт з проковзуванням, тертям на $L$ або на окремих ділянках $L_j$.

Перші згадки про опис явища тертя, як прямо пропорційного силі тиску і не залежного від поточної площі контакту належать Леонардо да Вінчі. У 1699 р. французький фізик Амонтон знову відкрив ці закони [280]. У 1748 р. Леонард Ейлер першим виявив різницю між статичним та динамічним коефіцієнтами тертя. Перший повний математичний опис явища був представлений Чарльзом Кулоном у 1785 році [307].

Незважаючи на різні спроби описати явище тертя, жодна з існуючих теорій не є достатньо загальною, щоб описати всі випадки. Ці теорії можна використовувати для конкретних умов тертя – малі або великі навантаження та швидкості, певні типи матеріалів, що мають на увазі тип контакту: пластичний чи пружний та з певною шорсткістю поверхні.

При формулюванні задач механіки контактної взаємодії з урахуванням тертя (опір відносному переміщенню контактуючих точок) враховується феноменологічно упроваджене деяке співвідношення між нормальними і тангенціальними напруженнями, що діють у зоні контакту [1, 9, 14, 48, 80, 215, 230, 272, 329, 334, 414, 444]:

$$\sigma_{yzk}(x) = \mathbf{F}(\sigma_{yyk}, x) \quad \left(\sigma_{yyk} \le 0\right), \tag{2.62}$$

де $\mathbf{F}(\sigma_{yyk}, x)$ – певний закон, який достатньо адекватно описує явище проковзування з тертям у кожному конкретному випадку параметрів матеріалів, характеру навантажування тощо. Зокрема, найпростішим є закон Амонтона [80, 82, 257]

$$\sigma_{nn}^{1} = \sigma_{nn}^{2}, \; \sigma_{ns}^{i} = \alpha \sigma_{nn}^{i}. \tag{2.63}$$

Тут індекси $n, s$ характеризують відповідно нормаль і дотичну до поверхні контакту; $\alpha$ – коефіцієнт тертя ковзання. З погляду молекулярно-механічної теорії тертя, розвиненої в роботах Ф. Боудена і Д. Табора [32], Б.В.Дерягіна, І.В.Крагельского [105], більш загальним є двочленний закон тертя, встановлений експериментально [307]:

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = \beta - \alpha \sigma_{yyk}(x), \tag{2.64}$$

де $\alpha$ та $\beta$ - параметри закону тертя, що залежать від властивостей поверхні і плівки на поверхні, сил молекулярної взаємодії між тілами тощо.

Часто застосовують складніші умови контакту з тертям [58, 415]. У роботах [137, 221] також були запропоновані двочленні розрахункові формули для визначення сили тертя, проте на відміну від закону Кулона вони не враховували двоїстої природи тертя.

Оскільки розглядаються задачі про порушення контакту притиснутих тіл без можливості відлипання, то обмежимося лише квазістаціонарними умовами безпосереднього контакту за наявності тертя між контактуючими поверхнями. При проковзуванні ключовим явищем є зсув, який може бути як поперечним (плоска деформація), так і поздовжнім (антиплоска деформація) – закон в ізотропному випадку повинен бути той самий. Явищам поперечного зсуву, у тому числі з можливістю проковзування з урахуванням тертя, приділена увага досить великої кількості досліджень. Тому основна увага надалі буде зосереджена на значно менш досліджених математичних питаннях вивчення поздовжнього зсуву у тілах з фрикційним проковзуванням між їх елементами.

Найпростішим варіантом умов контакту з проковзуванням є умови гладкого контакту, коли в області проковзування повинна виконуватися умова

$$\sigma_{yzk}(x,\pm 0)=0, \tag{2.65}$$

з якої згідно з (2.43) безпосередньою підстановкою отримується рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_6(t)dt}{t-x}=\frac{1}{C}\sigma^0_{yz}(x)\equiv iF_6(x)\ \ (x\in L'). \tag{2.66}$$

Розв'язок (2.66) відомий і має вигляд [157]

$$f_6(x)=\frac{X_0^{*+}(x)}{\pi i}\int_{L'}\frac{F_6(\xi)d\xi}{X_0^{*+}(\xi)(\xi-x)}+X_0^{*+}(x)Q_{n-1}(x)\ \ (x\in L'), \tag{2.67}$$

де коефіцієнти полінома $Q_{n-1}(x)$ - степеня $n-1$ знаходять із додаткових умов однозначності переміщень при обході навколо кожного із розрізів:

$$\int_{a_n^-}^{a_n^+} f_6(x)\,dx = 0 \quad (n = 1, \dots, N). \tag{2.68}$$

У випадку, коли дотична сила, прикладена до тіла, менша від граничної сили тертя, тіло знаходиться в стані попереднього зміщення (тертя спокою), при цьому в області контакту виникають зони зчеплення поверхонь і відносного проковзування. У результаті опір зсувові і розміри зон зчеплення і проковзування залежать від коефіцієнта тертя між взаємодіючими поверхнями. Задачі з частковим проковзуванням поверхонь при їх навантаженні нормальними і дотичного силами розглянуті, наприклад, у роботах [5, 14, 20]. На підставі побудованих рішень показано, що в міру зростання дотичної сили зона зчеплення зменшується і стягується в точку при досягненні певного критичного значення.

В більшості інженерних розрахунків, як правило, використовується закон тертя Амонтона (Амонтона-Кулона). Завдяки припущенню про постійність коефіцієнта тертя між поверхнями в контакті він є достатньо простим для використання та у більшості випадків єдиним можливим засобом вирішення проблеми без введення додаткових невизначеностей та ускладнень проблеми.

Для практики квазістатичного навантажування лінійно пружних тіл закон Амонтона [80, 82, 257, 444] формулюється наступним чином:
в *областях контакту, де проковзування відсутнє*, напруження не перевищує граничного (стан попереднього зміщення (тертя спокою))

$$\left|\sigma_{yzk}(x)\right| \le \tau_{yz}^{\max}(x) \equiv -\alpha\sigma_{yyk}(x) \quad \left(\sigma_{yyk} < 0,\ [w] = 0\right), \tag{2.69}$$

а *там, де проковзування відбувається*, воно зберігається на рівні свого граничного значення:

$$\sigma_{yzk}(x) = \operatorname{sign}\left(w^{+} - w^{-}\right)\tau_{yz}^{\max}(x), \ \left|\sigma_{yzk}(x)\right| = \tau_{yz}^{\max}(x) \quad \left(\sigma_{yyk} < 0, \ [w] \neq 0\right). \quad (2.70)$$

Напрям (знак) дії цих дотичних напружень визначається стрибком переміщень $[w]$. Тут з урахуванням (2.15) маємо

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha\sigma_{yyk}(x) = -\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + $$
$$+ 4\alpha\sum_{k=1}^{2}\left\{E_j\eta_k \operatorname{Re}\frac{N_k}{x - z_k} - \frac{2G_k\eta_k}{e_j}\operatorname{Im}\frac{M_k}{\left(x - \overline{z_k}\right)^2}\right\} \quad (2.71)$$
$$\left(k = 1, 2; \quad j = 3 - k\right).$$

Використання двочленного закону тертя Кулона (2.64) ускладнить розв’язування задачі через необхідність врахування стрибкоподібного процесу переміщення та деформування в момент часу $t = t^*$, коли починається проковзування. Тому для коректності розв’язування у такій постановці необхідно враховувати динамічні члени, що суперечить квазістатичному формулюванню задачі. Взагалі кажучи, пропонована методика може бути застосована без особливих ускладнень для розв’язування у всіх випадках умов взаємодії, що не вимагають врахування динамічних ефектів.

Надалі досліджуваний контакт поверхонь притиснутих тіл на кшталт (2.69), (2.70) чи (2.71), коли їх взаємне проковзування починається і відбувається при досягненні дотичними напруженнями певних окреслених граничних значень, будемо називати ***дотиковим тертьовим***.

## 2.5. Методи розв’язування системи сингулярних інтегральних рівнянь

Розв’язування багатьох змішаних задач матфізики [169, 170, 231], зводиться до систем сингулярних інтегральних рівнянь. Загальна теорія ССІР за відсутності логарифмічних ядер подана у відомих монографіях

[41, 50, 130, 141], де викладені методи зведення СІР за допомогою їхньої регуляризації до фредгольмових рівнянь. Однак такий підхід має радше теоретичне значення, оскільки практичне застосування регуляризації є досить громіздким. Тому набули поширення прямі наближені методи розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, загальна теорія яких викладена у [18, 84, 90, 212]. Варто згадати тут методи типу Рітца–Гальоркіна, а також на ітеративні методи, ґрунтовну бібліографію щодо опрацювання яких можна знайти в оглядах [44, 45, 83, 158, 333, 456]. Однією з причин привабливості прямих методів є те, що сингулярність типу Коші породжує числово стійкі алгоритми на відміну від нестійкості відповідних СІР 1-го роду з неінтегровними особливостями [323].

Розглянуті в роботі задачі зводяться до ССІР 2-го роду

$$Af(x)+\frac{B}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{\xi-x}d\xi+E(x)\int_{-a}^{x}f(\xi)d\xi=F(x)\quad\left(x\in L=[-a,a]\right)\qquad(2.72)$$

з додатковими умовами [231], які мають певний фізичний сенс

$$\int_{-a}^{a}f(\xi)d\xi=\Theta.\qquad(2.73)$$

Тут і надалі вживаються позначення

$$A=\|a_{nm}\|,\ B=\|b_{nm}\|,\ E(x)=\|E_n(x)\|,\ f(x)=\|f_n(x)\|,$$
$$F(x)=\|F_n(x)\|,\ \Theta=\|\theta_n\|\subset C\ \ (n,m=1,...,M),$$

де $f(x)$ - шукана вектор-функція, а сингулярні інтеграли в (2.72) розуміють у сенсі головного значення за Коші-Лебегом [141].

Основні труднощі розв’язування ССІР (2.72), (2.73) пов’язані із тим, що для коректного застосування відомих аналітичних чи чисельноаналітичних методів [157, 231, 333, 456] необхідно визначити вигляд особливостей розв`язків ССІР на кінцях проміжку інтегрування. Це легше зробити, якщо якимось чином вдається розділити ССІР на окремі СІР 2-го роду, шлях розв'язування яких відомий.

### *2.5.1. Визначення особливості розв'язку ССІР*

Досліджується це питання на основі аналізу характеристичної для (2.72) частини ССІР

$$Af(x)+\frac{B}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{\xi-x}d\xi=F(x),\quad x\in[-a,a], \tag{2.74}$$

після деяких її перетворень, покликаних одночасно діагоналізувати матриці коефіцієнтів ***A*** і ***B***. Цього можна досягти або шляхом лінійного комбінування стрічок (2.72)

$$HAf(x)+\frac{HB}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{\xi-x}d\xi=HF(x),\quad x\in[-a,a], \tag{2.75}$$

або за допомогою введення нової невідомої вектор-функції

$$f(x)=D\varphi(x), \tag{2.76}$$

що приводить до ССІР

$$AD\varphi(x)+\frac{BD}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-x}d\xi=F(x),\quad x\in[-a,a]. \tag{2.77}$$

Тут $H=\|h_{nm}\|$ та $D=\|d_{nm}\|$, $h_{nn}=1$; $d_{nn}=1$; $n,m=\overline{1,M}$ - матриці переходу. Діагоналізація (2.74) шляхом лінійного комбінування стрічок можлива за умови $\det(A+iB)\neq 0$. Тоді маємо

$$\begin{cases} HA = diag\left(\sum_{n=1}^{M} h_{1n}a_{n1},\ \sum_{n=1}^{M} h_{2n}a_{n2}\right), \\ HB = diag\left(\sum_{n=1}^{M} h_{1n}b_{n1},\ \sum_{n=1}^{M} h_{2n}b_{n2}\right), \end{cases} \tag{2.78}$$

або для більш загального способу (2.76)

$$\begin{cases} DA = diag\left(\sum_{n=1}^{M} a_{1n}d_{n1},\ \sum_{n=1}^{M} a_{2n}d_{n2}\right), \\ DB = diag\left(\sum_{n=1}^{M} b_{1n}d_{n1},\ \sum_{n=1}^{M} b_{2n}d_{n2}\right). \end{cases} \tag{2.79}$$

За повторюваними індексами тут не підсумовують. Після діагоналізації вид особливості розв'язку ССІР встановити неважко. Наприклад, якщо вдалося задовольнити умову (2.78), то компоненти шуканої вектор-функції мають вигляд

$$f_n(x) = w_n(x)\varphi_n(x) \quad (n = \overline{1,M}), \tag{2.80}$$

де $w_n(x) = w_n(x;\alpha_n,\beta_n) = a\left(1 - x/a\right)^{\alpha_n}\left(1 + x/a\right)^{\beta_n}$ - канонічні функції, вітки яких слід зафіксувати якоюсь певною умовою, наприклад $w_n(0) = a$, $\varphi_n(x)$ - регулярні (обмежені та вимірювані) на $[-a,a]$ функції; сталі $\alpha_n,\beta_n$ визначаються співвідношенням

$$\begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \mp i\mu_n + \frac{\arg(\eta_n)}{2\pi} + \begin{Bmatrix} L_n \\ M_n \end{Bmatrix},\ \mu_n = \frac{\ln|\eta_n|}{2\pi}, \tag{2.81}$$

$$\eta_n = \frac{\sum_{m=1}^{M} h_{nm}\left(a_{mn} + ib_{mn}\right)}{\sum_{m=1}^{M} h_{nm}\left(a_{mn} - ib_{mn}\right)}, \tag{2.82}$$

$L_n$, $M_n$ – цілі числа, які задовольняють умову

$$-1 < \mathrm{Re}(\alpha_n, \beta_n) < 1. \tag{2.83}$$

Ціле число $\kappa_n = -(\alpha_n + \beta_n)$, яке набуває одного із трьох значень {-1, 0, 1}, є індексом відповідного СІР [50, 141]. Вибір параметрів $\alpha_n, \beta_n$ визначає клас $\Pi^{(\alpha,\beta)}(f)$, у якому слід шукати розв'язок рівняння враховуючи при цьому фізичний зміст $f$.

Якщо умови (2.78) не виконуються, то за вищезазначених обмежень на $\boldsymbol{A}$ і на $\boldsymbol{B}$ завжди можна задовольнити умови (2.79) і компоненти шуканої вектор-функції $f(x)$ згідно з (2.76) матимуть вигляд

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{M} d_{nm}\psi_m(x) \quad \left(n = \overline{1, M}\right), \tag{2.84}$$

де аналогічно до (2.80) - (2.83)

$$\psi_n(x) = w_n(x)\varphi_n(x) \quad (n = \overline{1, M}), \tag{2.85}$$

тільки

$$\eta_n = \frac{\sum_{m=1}^{M} d_{mn}\left(a_{nm} + ib_{nm}\right)}{\sum_{m=1}^{M} d_{mn}\left(a_{nm} - ib_{nm}\right)}. \tag{2.86}$$

Зрозуміло, що подання (2.80) є частинним випадком залежності (2.84), тому можна вживати подання (2.84) – (2.86) компонент шуканої вектор-функції як найбільш загальне. У першому випадку особливість розв’язку $f_n(x)$ згідно з (2.80) визначається однією з канонічних функцій; у другому за (2.84), (2.85) – повним їхнім спектром.

Розв`язки (2.80), (2.84) характеризують параметри $\eta_n$, що визначаються або з (2.82) або з (2.86) відповідно. З огляду на клас функцій $\Pi^{(\alpha,\beta)}(f)$, у якому слід шукати розв’язок рівняння, регулярні функції $\varphi_n(x)$ у формулах (2.80), (2.85) доцільно подати розвиненнями

$$\varphi_n(x)=\varphi_n^{(N)}(x)=\sum_{m=0}^{N} A_m^n P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right),\quad N\to\infty \tag{2.87}$$

де $P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)$ - стандартизовані поліноми Якобі.

Враховуючи формули [16, 17, 60, 213, 214]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(a-x)^{\alpha}(a+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{d\xi}{\xi-z}=$$

$$=\frac{-1}{2\cosh(\pi\mu_n)}\left\{2(z-a)^{\alpha}(z+a)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{z}{a}\right)-\frac{(\pm1)^{n+1}\Gamma(m+0.5\pm i\mu_n)}{am!}\right\}\times \tag{2.88}$$

$$\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1.5\pm i\mu_n)}\left(\frac{\pm z-a}{2a}\right)^{k},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(a-x)^{\alpha}(a+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{d\xi}{\xi-x}=$$
$$=i\tanh(\pi\mu_n)(a-x)^{\alpha}(a+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)+ \tag{2.89}$$
$$+\frac{(\pm1)^{m+1}}{2a\cosh(\pi\mu_n)}\frac{\Gamma(m+0.5\pm i\mu_n)}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1.5\pm i\mu_n)}\left(\frac{\pm x-a}{2a}\right)^k,$$

можемо записати

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(a-\xi)^{\alpha}(a+\xi)^{\beta}\varphi_n(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}=$$
$$=\frac{-a}{\cosh(\pi\mu_n)}(z-a)^{\alpha}(z+a)^{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^nP_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{z}{a}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\cosh(\pi\mu_n)}\sum_{m=0}^{\infty}(\pm1)^{m+1}A_m^n\frac{\Gamma(m+0.5\pm i\mu_n)}{m!}\times \tag{2.90}$$
$$\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1.5\pm i\mu_n)}\left(\frac{\pm z-a}{2a}\right)^k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}(a-\xi)^{\alpha}(a+\xi)^{\beta}\varphi_n(\xi)\frac{d\xi}{\xi-x}=$$
$$=i\tanh(\pi\mu_n)(a-x)^{\alpha}(a+x)^{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^nP_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\cosh(\pi\mu_n)}\sum_{m=0}^{\infty}(\pm1)^{m+1}A_m^n\frac{\Gamma(m+0.5\pm i\mu_n)}{m!}\times \tag{2.91}$$
$$\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1.5\pm i\mu_n)}\left(\frac{\pm x-a}{2a}\right)^k.$$

Якщо $\alpha_n=\beta_n=-0.5$, то, як частковий випадок, маємо замість поліномів Якобі поліноми Чебишова

$$P_m^{(0.5,\ 0.5)}\left(\frac{x}{a}\right)=T_m\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2.92}$$

і формули (2.87) – (2.91) істотно спрощуються, що дає змогу отримати вирази

$$f_r(x)=\left(a^2-x^2\right)^{-1/2}\varphi_r(x/a),\ \varphi_r(x/a)=\sum_{n=0}^{N}A_n^r T_n(x/a)\quad (r=3,6), \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_r(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x/a)}\equiv\\
&\equiv g_r(x/a)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N}A_j^r\int_{-1}^{1}\frac{T_j(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x/a)}=\sum_{j=1}^{N}A_j^r U_{j-1}(x/a),\\
&\int_{-1}^{x/a}f_r(\xi)d\xi\equiv\\
&\equiv s_r(x/a)=A_0^r\left(\pi-\arccos(x/a)\right)-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}A_j^r\sqrt{1-(x/a)^2}\,U_{j-1}(x/a),\\
&\int_{-1}^{1}f_r(\xi)d\xi=\pi A_0^r\quad (r=3,6),
\end{aligned} \tag{2.94}$$

де $T_m(x)$, $U_m(x)$ – поліноми Чебишова 1-го та 2-го роду відповідно.

Крім цього, для розрахунків будуть потрібні інтеграли

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(x/a)dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x-z/a)}=-\frac{\omega^j}{\sqrt{(z/a)^2-1}},\ \omega=(z/a)-\sqrt{(z/a)^2-1}\quad (\operatorname{Re}z>a),$$

$$g_r(z/a)=-\frac{1}{\sqrt{(z/a)^2-1}}\sum_{j=0}^{n}A_j^r\omega^j,$$

$$\int g_k(z/a)d(z/a)=-A_0^k\ln\frac{1}{2\omega}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}A_j^k\omega^j\,. \tag{2.95}$$

### *2.5.2. Методика числово-аналітичного розв'язування ССІР*

До розв'язування ССІР (2.72) – (2.73) можна застосувати методику [231, 420], яка на кожному кроці приросту величини навантаження зводить ССІР (2.72) до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих коефіцієнтів розвинення функцій стрибка $f_r(\tilde{x})$ у ряди по поліномах Якобі (2.80) – (2.87) чи Чебишова (2.93). Тобто, підстановка цих розвинень у (2.72) – (2.73) та обчислення отриманих залежностей на певній множині точок колокації $x_m$ $\left(m=\overline{1,N}\right)$ з урахуванням інтегралів (2.91) чи (2.94) породжує СЛАР порядку $2N+2$ щодо невідомих $A_j^r$ $\left(r=3,6;\ j=\overline{0,N}\right)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} A_j^3 R_j^{33}(x_m) + A_j^6 R_j^{63}(x_m) = F_3\left(x_m,...\right), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} A_j^3 R_j^{36}(x_m) + A_j^6 R_j^{66}(x_m) = F_6\left(x_m,...\right),\ m=\overline{1,N}, \end{cases} \tag{2.96}$$

де $R_j^{33}(x_m), R_j^{33}(x_m), R_j^{36}(x_m), R_j^{66}(x_m)$ – ядра СЛАР, отримані внаслідок згаданої підстановки. Вигляд цих ядер істотно залежить від коефіцієнтів ***A*, *B*, *E*** , які у свою чергу залежать від рівнянь зовнішньої (2.2), (2.3) та внутрішньої (2.5) задач і умов контактування (2.6).

Після розв'язування отриманої СЛАР для обчислення НДС в кожній з точок колокації отримані значення $A_j^r$ $(r=3,6;\ j=\overline{0,N})$ підставляємо у співвідношення (2.80) - (2.87) чи (2.93), а потім у (2.46), (2.47), отримуючи таким чином вирази для компонент тензора напружень та вектора переміщень на берегах неоднорідності зі сторони матриці. Щоб отримати вирази для НДС у довільній точці матриці достатньо скористатися формулами (2.90), (2.95).

## 2.6. Інкрементально-ітераційний метод розв'язування задач із багатокроковим навантажуванням-розвантажуванням та змінними коефіцієнтами

### *2.6.1. Інкрементальний підхід до розв'язування задач із багатокроковим навантажуванням-розвантажуванням*

Ускладнимо загальну постановку основної задачі на випадок багатокрокового (циклічного) зсувного навантаження-розвантажування. Нехай згадані в підрозділі **2.2.** зовнішні силові чинники (*рівномірно розподілені на нескінченності напруження* $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xzk}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$, *зосереджені сили інтенсивності* $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$, *гвинтові дислокації із складовою вектора Бюргерса* $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$ *в точках* $z_{*k} \in S_k$ $(k = 1,2)$), що здійснюють поздовжній зсув масиву уздовж осі *Oz*, змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних у часових проміжках $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$ покрокових послідовностей. Тут додатково введено позначення в нижньому індексі всіх змінних величин: $(p)$ − номер кроку навантаження. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умову $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$, що забезпечує прямолінійність межі поділу матеріалів на нескінченності.

Тонке включення в масиві на межі поділу матеріалів на кожному кроці навантажування моделюють стрибки компонент векторів напружень і переміщень на $L'$ [245, 246].

$$\left[\sigma_{yz}\right]_{h(p)} \cong \sigma_{yz}^{-} - \sigma_{yz}^{+} = f_{3(p)}\left(x,t\right),$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{h(p)} \cong \frac{\partial w^{-}}{\partial x} - \frac{\partial w^{+}}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_{h(p)} \equiv \tag{2.97}$$
$$\equiv \frac{\sigma_{xz}^{-}}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^{+}}{G_2} = f_{6(p)}\left(x,t\right) \qquad \left(x \in L'\right),$$

$$f_{3(p)}(x,t) = f_{6(p)}(x,t) = 0, \text{ якщо } x \notin L',$$

де $t$ – деякий момент часу як формальний монотонно зростаючий параметр, пов’язаний зі змінюваністю навантаження.

Вважатиму значення НДС масиву, отримані на початковому кроці навантажування в момент часу $t_{(1)}$ завершеним першим кроком деякої покрокової послідовності змінюваного зсувного навантаження. Припускаю, що ці отримані параметри НДС масиву будуть на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тоді формулювання задачі на другому кроці відрізняється від формулювання задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком. Подання поля НДС аналогічно до (2.45) має вигляд

$$\begin{gathered}\sigma_{yz}\left(z,t\right) + i\sigma_{xz}\left(z,t\right) = \sigma_{yz(1)}\left(z,t_{(1)}\right) + i\sigma_{xz(1)}\left(z,t_{(1)}\right) + \sigma_{yz(2)}^{0}\left(z,t\right) + \\ + i\sigma_{xz(2)}^{0}\left(z,t\right) + ip_k g_{3(2)}\left(z,t\right) - Cg_{6(2)}\left(z,t\right) \qquad \left(z \in S_k;\ k = 1,2\right),\end{gathered} \tag{2.98}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial y}\left(z,t\right) + i\frac{\partial w}{\partial x}\left(z,t\right) = \frac{\partial w_{(1)}}{\partial y}\left(z,t_{(1)}\right) + i\frac{\partial w_{(1)}}{\partial x}\left(z,t_{(1)}\right) + \frac{\partial w_{(2)}^{0}}{\partial y}\left(z,t\right) + \\ + i\frac{\partial w_{(2)}^{0}}{\partial x}\left(z,t\right) + ipg_{3(2)}\left(z,t\right) - p_{3-k}g_{6(2)}\left(z,t\right) \qquad \left(z \in S_k;\ k = 1,2\right).\end{gathered} \tag{2.99}$$

Напруження та переміщення повинні задовольняти крайові умови (2.6) на $L'_{(2)}$ з урахуванням напряму навантаження. Тоді з урахуванням (2.98), (2.99) можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned}&\sigma_{yz(2)}(z,t)+i\sigma_{xz(2)}(z,t)=\left\{\sigma_{yz}(z,t)+i\sigma_{xz}(z,t)\right\}-\\&-\left\{\sigma_{yz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)+i\sigma_{xz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)\right\}\ \left(z\in S_k;\ k=1,2;\ j=3-k\right),\end{aligned}\tag{2.100}$$

$$w_{(2)}(z,t)=w(z,t)-w_{(1)}\left(z,t_{(1)}\right)\ \left(z\in S_k;\ k=1,2\right),\tag{2.101}$$

з крайовими умовами виду (2.6)

$$\Psi\left\{\bullet^{in}_{(2)}(\zeta,\pm h)-\bullet^{in}_{(1)}(\zeta,\pm h),\ \bullet_{(2)}(\zeta,\pm h)-\bullet_{(1)}(\zeta,\pm h)\right\}=0\,,\tag{2.102}$$

яка, аналогічно до попереднього кроку, породжує задачу для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень та напружень від локального (для цього кроку) навантаження

$$\begin{aligned}&\tau_{(2)}(t)=\tau_{(2)}(t)-\tau_{(2)}(t_{(1)}),\ \tau_{k(2)}(t)=\tau_{k(2)}(t)-\tau_{k(2)}(t_{(1)}),\\&Q_{k(2)}(t)=Q_k(t)-Q_{k(1)}(t_{(1)}),\\&b_{k(2)}(t)=b_k(t)-b_{k(1)}(t_{(1)})\qquad\quad (t>t_{(1)}).\end{aligned}\tag{2.103}$$

Знайдений аналогічно до першого кроку розв’язок другого кроку може бути використаний як попередній для наступного – третього і т.д.

У розділах **3,4** цей підхід обґрунтовується на конкретних задачах багатокрокового і, в тому числі, циклічного навантаження масиву з неоднорідністю контакту.

### *2.6.2. Ітераційний метод розв’язування ССІР із змінними коефіцієнтами*

У процесі побудови розв’язку задачі з допомогою МФС виникає потреба розв’язати ССІР із залежним від деяких зовнішніх чинників вектор-коефіцієнтом $\mathrm{E}\left(f(x)\right)$

$$Af(x)+\frac{B}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{\xi-x}d\xi+\mathrm{E}\left(f(x)\right)\int\limits_{-a}^{x}f(\xi)d\xi=F(x), \qquad (2.104)$$

який істотно залежить від додаткового функціоналу

$$\Phi(E(x),\ f(x))=0,\ \ \forall x: x\in\left[-a,a\right]. \qquad (2.105)$$

Як такий функціонал можна розглядати певну конститутивну взаємну залежність між напруженнями і деформаціями у процесі деформування (діаграма деформування), яка на практиці нечасто має вигляд лінійної функції закону Гука. Причому залежність $\mathrm{E}\left(f(x)\right)$ від $\Phi(E(x),\ f(x))$ породжує істотні труднощі при розрахунку внаслідок його змінності вздовж $L$. Як приклад такої залежності можна навести діаграми деформування реальних матеріалів (рис. 2.7 а,б) [283, 284, 402], де чітко видно нелінійність конститутивних співвідношень матеріалу.

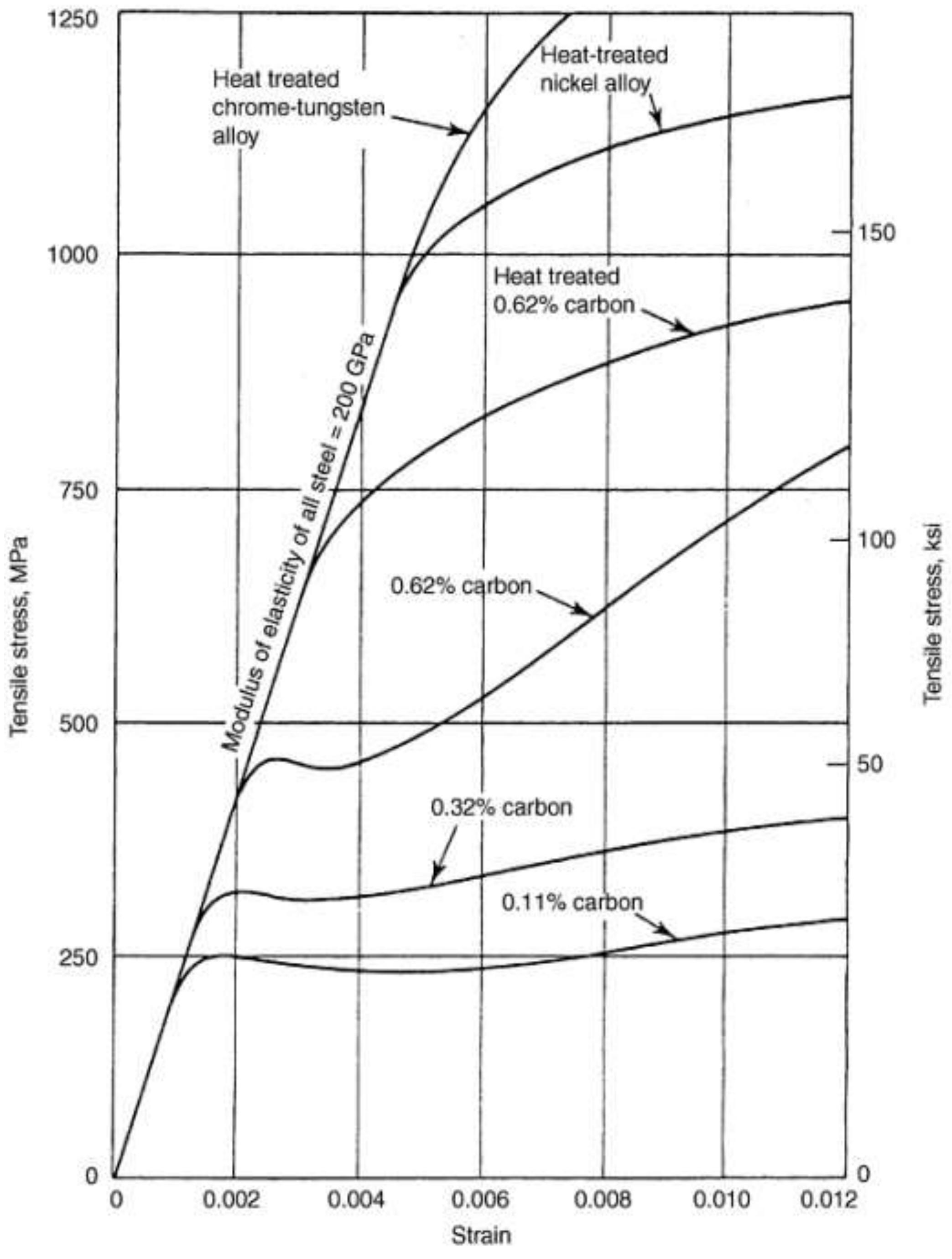



**Fig. 3 Stress-strain diagram for various steels. Source: Ref 8**

Рис. 2.7а. Приклади нелінійності діаграми деформування реальних матеріалів

MIL-HDBK-5H
1 December 1998

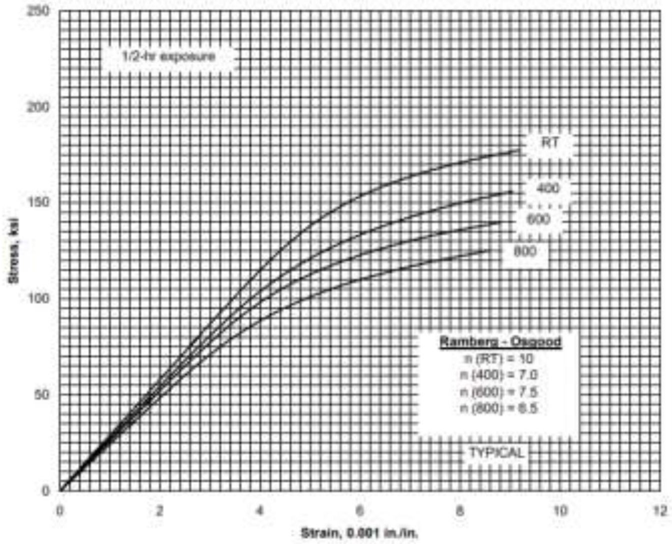



**Figure 2.6.1.1.6(a). Typical tensile stress-strain curves at various temperature for AM-350 (SCT 850) stainless steel sheet.**

MIL-HDBK-5H
1 December 1998

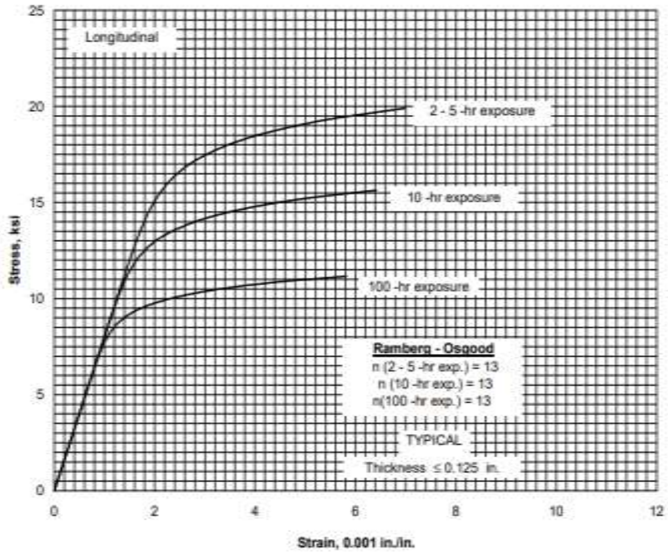



**Figure 3.6.2.2.6(e). Typical tensile stress-strain curves for 6061-T6 aluminum alloy sheet at 500°F.**

Рис. 2.7б. Приклади нелінійності діаграми деформування реальних матеріалів

Для розв’язування ССІР (2.104) з додатковим функціональним обмеженням (2.105) пропонується наступний ітераційний алгоритм:

1) Функціонал (2.105) дискретизується множиною проміжкових значень

$$\Phi\left(f(x)_j\right)=\left\{e_j\right\},\ j=\overline{0,J}\ . \qquad (2.106)$$

2) Початковий крок (номер ітерації $ik=0$). Застосовуючи метод колокацій отримуємо СЛАР виду (2.96) для визначення невідомих коефіцієнтів $A_j^{r(0)}$ $(r=3,6;\ j=\overline{0,N})$. При цьому коефіцієнти $\mathrm{E}^{(0)}\left(f^{(0)}(x_m)\right)$ визначаються з умови $\Phi\left(f^{(0)}(x_m)\right)=e_0$ і спочатку однакові для кожної точки колокації $x_m$ $\left(m=\overline{1,N}\right)$.

3) Починається зовнішнє навантажування першого кроку з деякого значення $\tau_{(1)}$, $\tau_{k(1)}$, $Q_{k(1)}$ чи $b_{k(1)}$ згідно заданих послідовностей при вибраній схемі навантажування (Додаток Б).

4) Знову розв'язуємо СЛАР (2.96). Отримані $A_j^{r(ik)}$ $(r=3,6;\ j=\overline{0,N})$ для цього навантаження підставляю у (2.80) чи (2.84) і обчислюю нові значення коефіцієнтів $\mathrm{E}^{(ik)}\left(f^{(ik)}(x_m)\right)$ з умови $\Phi\left(f^{(ik)}(x_m)\right)=e_j$ для кожної точки колокації. Ці значення $\mathrm{E}^{(ik)}\left(f^{(ik)}(x_m)\right)$ тепер можуть бути різними для різних точок $x_m$ $\left(m=\overline{1,N}\right)$.

5) Обчислюємо множину нев'язок $\left|\Phi\left(f^{(ik)}(x_m)\right)-e_j\right|$ для всіх точок колокації $x_m$ $\left(m=\overline{1,N}\right)$ і обираю критерій мінімального відхилення від найближчого значення $e_j$

$$\min_m\left|\Phi\left(f^{(ik)}(x_m)\right)-e_j\right|\le\varepsilon\ . \qquad (2.107)$$

6) Якщо множина нев'язок $\left|\Phi\left(f^{(ik)}\left(x_m\right)\right)-e_j\right|,\ m=\overline{1,M}$ не задовольняє обраному критерієві точності, то повторюємо алгоритм з пункту 4) з новими значеннями коефіцієнтів $\mathrm{E}^{(ik)}\left(f^{(ik)}(x_m)\right)$ для кроку ітерації $ik+1$ поки не буде виконано критерій точності (2.107).

7) Якщо множина нев'язок $\left|\Phi\left(f\left(x_m\right)_1\right)-e_j\right|,\ m=\overline{1,M}$ вже задовольняє обраному критерієві точності, то переходимо до наступного (другого) кроку навантажування згідно заданих послідовностей $\tau_{(2)}, \tau_{k(2)}, Q_{k(2)}$ чи $b_{k(2)}$ повторюючи алгоритм з пункту 3).

8) Цикл навантажування черговими значеннями $\tau_{(p)}, \tau_{k(p)}, Q_{k(p)}$ чи $b_{k(p)}$ повторюємо поки не вичерпано всі значення послідовностей навантажування.

Досліджено, що ітераційний процес збіжний за умови, що $\Phi(f(x))$ є монотонною функцією.

**Висновки до розділу 2**

1. У даному розділі запропоновано загальну схему нового структурно-модульного МФС розв'язування задач деформування ізотропних притискуваних тіл із можливим існуванням як дефектів безпосереднього контактування, так і тонких прошарків-неоднорідностей скінченної ширини за довільних реологічних властивостей та з умовами ідеального чи практично довільного неідеального контакту.
2. В межах запропонованого підходу створено низку нових універсальних математичних моделей тонких включень-прошарків, механічні властивості яких можуть бути анізотропними, фізично нелінійними, та

неоднорідними (ортотропія, багатошаровість, сталі матеріалу нелінійно залежні від НДС, тощо).

3. Отримано загальний розв’язок плоско-антиплоскої задачі деформування кусково-однорідного простору з тунельними розрізами (зовнішня задача) за умов багатокрокового (в т.ч. циклічного) квазістатичного навантажування-розвантажування силовими та дислокаційними чинниками.
4. Досліджено особливості розв’язків результуючих ССІР, які використано для їх подальшого числового розв’язування у процесі побудови СЛАР.
5. Для супроводу дослідження у разі багатокрокового монотонного чи циклічного процесу навантажування-розвантажування запропоновано ідею відповідного інкрементального підходу, в основу якого покладено моделююче припущення про можливість врахування на кожному кроці довантажування чи розвантажування НДС від попереднього кроку як залишкового.
6. Для випадків наявності фізично нелінійних включень-прошарків та у разі неідеального нелінійного контакту матеріалів розроблено та успішно реалізовано ітераційно-інкрементальний метод розв’язування результуючих ССІР із змінюваними коефіцієнтами.

# РОЗДІЛ 3. АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ПРОКОВЗУВАННЯ ПРИТИСКУВАНИХ РІЗНОМОДУЛЬНИХ ПІВПРОСТОРІВ З ДЕФЕКТАМИ КОНТАКТУ ПРИ ЗМІНЮВАНОМУ БАГАТОКРОКОВОМУ НАВАНТАЖУВАННІ-РОЗВАНТАЖУВАННІ

На основі аналізу складності окремих модулів загальної схеми структурно-модульного МФС (2.9) можна зробити висновок, що для задачі такого класу, коли відсутні включення-прошарки, доцільною буде традиційна схема розв’язування – підстановка крайових умов неідеального безпосереднього контактування півпросторів (2.62) у вирази НДС зовнішньої задачі (2.46) – (2.47). Відразу ж можна зробити і загальний висновок на підставі числового аналізу, що застосування обох вищезгаданих методів за однакової кількості точок колокації давало практично ідентичні результати і не супроводжувалося помітною зміною кількості спожитого часу обчислень.

## 3.1. Квазістатичне однокрокове навантажування стиснутих півпросторів в умовах дотикового контакту

У даному підрозділі розглядається узагальнена задача про поздовжній зсув безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $E_k, \nu_k, G_k$ $(k=1,2)$. На межі поділу півпросторів $L$ $\left(y=0,\ |z|<\infty\right)$ на деякій апріорі невідомій частині $L' = \bigcup_{n=1}^{N} L'_n = \bigcup_{n=1}^{N} [a_n^-; a_n^+]$ є порушення ідеального зчеплення (рис. 3.1). Півпростори взаємно притиснуті до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^{\infty} < 0$. Крім того, півпростори можуть додатково стискатися чи розтягуватися зрівноваженими зосередженими силами $P_k = (-1)^{k+1} iP$ у точках $z_k \in S_k$ $(k=1,2)$. У разі розтягування значення $|P_k|$ не може перевищувати певного рівня, щоб запобігти взаємному відриву поверхонь контакту (див. (2.19) – (2.22)). Розподіл нормальних напружень $\sigma_{yy}(x)$ на межі поділу $L$ визначають формула (2.15) чи її часткові випадки (2.16) − (2.18).

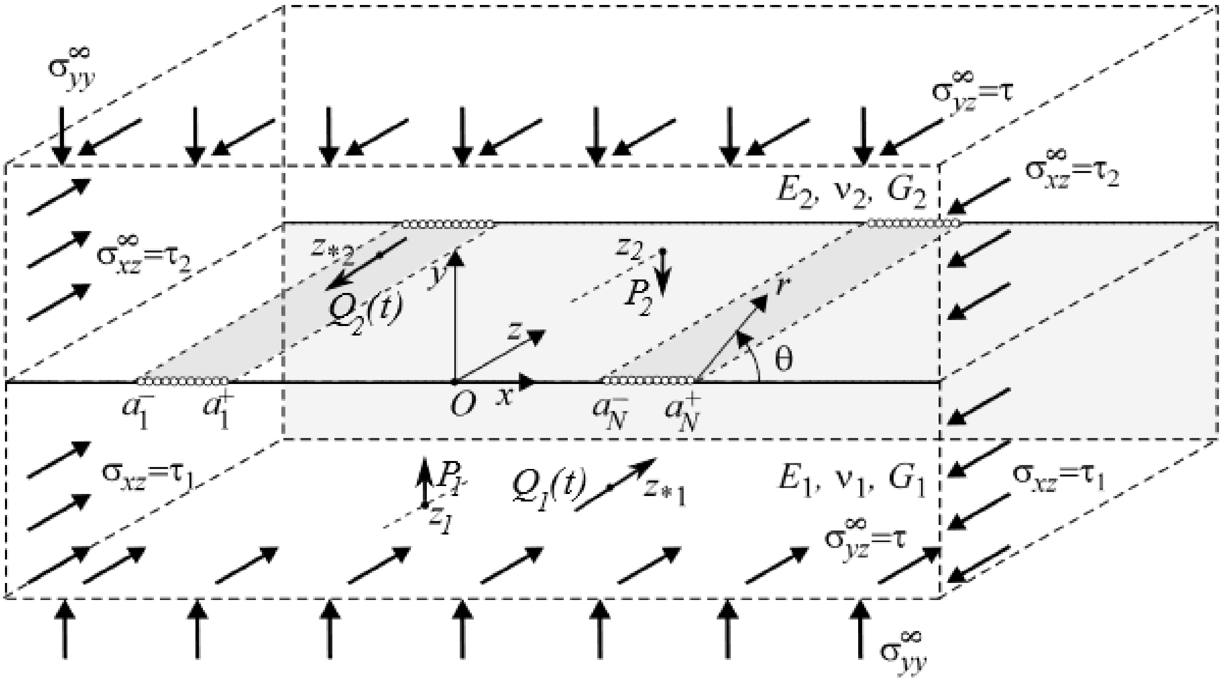



Рис. 3.1. Нормальне навантаження та поздовжній зсув кусково-однорідного простору з дефектами контакту (зонами проковзування)

В загальному випадку півпростори квазістатично навантажені покроковими монотонно змінними в часових проміжках $\left[t_{(p-1)};t_{(p)}\right]$ послідовностями рівномірно розподілених на нескінченності зсувних напружень $\sigma_{yzk(p)}^{\infty}(x,y,t)=\tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xzk(p)}^{\infty}(x,y,t)=\tau_{k(p)}(t)$; зсувних зосереджених сил інтенсивності $Q_{mk(p)}(t)$ та гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_{mk(p)}(t)$ в точках $z_{*mk}\in S_k$ $\left(m=\overline{1,M};\ k=1,2\right)$. Тут $t$ − час, як формальний параметр, що характеризує змінність навантаження; $(p)$ − номер кроку навантажування.

Використовуючи метод стрибка (див. (2.35) – (2.47), підрозділ **2.2**) крайові умови на першому кроці навантажування можна записати у вигляді (2.97):

$$\sigma_{yz1(1)}(x,-0)-\sigma_{yz2(1)}(x,+0)=\left[\sigma_{yz}\right]_{(1)}=f_{3(1)}(x,t),$$
$$\frac{\partial w_{1(1)}}{\partial x}(x,-0)-\frac{\partial w_{2(1)}}{\partial x}(x,+0)=\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{(1)}=f_{6(1)}(x,t) \qquad \left(x\in L'_{(1)}\right). \tag{3.1}$$

Далі, вважаючи, що наявність дефектів контакту вносить збурений вклад у загальний напружено-деформований стан тіла, і застосовуючи методику підрозділу **2.2** з (2.46) – (2.47) отримуємо вирази для значень компонент тензора напружень на межі поділу матеріалів

$$\sigma_{yzk(1)}(x,t)=\mp p_k f_{3(1)}(x,t)-Cg_{6(1)}(x,t)+\sigma^0_{yzk(1)}(x,t), \tag{3.2}$$

$$\sigma_{xzk(1)}(x,t)=\mp Cf_{6(1)}(x,t)+p_k g_{3(1)}(x,t)+\sigma^0_{xzk(1)}(x,t), \tag{3.3}$$

підстановка яких в умови взаємодії (2.69), (2.70), що враховують наявність сили тертя на деяких ділянках $L'_{(1)}$ за взаємного зсуву поверхонь контакту у напрямі осі $z$, дає змогу отримати ССІР

$$\begin{cases} f_{3(1)}(x,t)=0, \\ g_{6(1)}(x,t)=iF_{6(1)}(x,t)=\dfrac{1}{2C}\left(\left\langle\sigma^0_{yz(1)}(x,t)\right\rangle+2\operatorname{sgn}[w]_{(1)}\tau^{\max}_{yz}(x)\right), \end{cases} \tag{3.4}$$

де $\left\langle\sigma^0_{yz(1)}(x,t)\right\rangle$ визначається з (2.34).

Розв’язок СІР (3.4) відомий [231] і має вигляд

$$f_{6(1)}(x,t)=\frac{X_0^{*+}(x)}{\pi i}\int\limits_{L'_{(1)}}\frac{F_{6(1)}(\xi,t)\,d\xi}{X_0^{*+}(\xi)(\xi-x)}+X_0^{*+}(x)Q_{n-1}(x) \quad \left(x\in L'_{(1)}\right), \tag{3.5}$$

$$X_0^*(z)=\prod_{n=1}^{N}\left[\left(z-a^-_{n(1)}\right)\left(z-a^+_{n(1)}\right)\right]^{-1/2}.$$

Тут коефіцієнти поліному $Q_{n-1}(x)$ степеня $n-1$ знаходять з додаткових умов однозначності переміщень при обході навколо кожного лінійного дефекту

$$\int_{a_{n(1)}^{-}}^{a_{n(1)}^{+}} f_{6(1)}^{n}(\xi)d\xi = 0 \quad \left(n=\overline{1,N}\right). \tag{3.6}$$

Якщо інтеграли в (3.5) вдається обчислити явно, то далі можна отримати аналітичні вирази для стрибка переміщень, розсіяння енергії, УКІН та визначити поточний розмір зон проковзування відповідно. Тобто, НДС на першому кроці навантажування можна визначити повністю аналітично.

Детальніше розглянемо та проаналізуємо можливі випадки навантажування масиву для цього кроку. Їх повний перелік наведено в Додатку Б.

**Випадок №1 (**Додаток Б.**)**. Нехай прикладені однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та однорідний зсув на безмежності (Б.2). Вважаємо, що зсувне навантаження змінюється від нуля до деякого максимального значення. Беручи до відома умову (2.69) та незалежність зсувного навантаження від координати $x$ з (2.70) неважко зробити висновок, що проковзування між півпросторами з'явиться одночасно по всій лінії контакту $L$, щойно буде перевищено критичне значення $\tau(t) \geq \tau_{yz}^{\max}$, тобто маємо граничний вироджений випадок $a \to \infty$.

**Коментар до Випадків №2, 3 (**Додаток Б.**)**. Нехай є лише однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та одна із зсувних сил $Q_k(t)\ (k=1,2)$. Внаслідок того, що максимальні значення зсувних напружень досягаються в точці $x = \operatorname{Re} z_{*k} \in L$, то з урахуванням (2.69), (2.70) можна очікувати, що при досягненні критичного значення зсувної сили утвориться одна симетрична щодо $x = \operatorname{Re} z_{*k} \in L$ зона проковзування. Можна так вибрати систему відліку координат $xOy$, що компоненти зосередженого навантаження будуть мати координати $\operatorname{Re} z_{*k} = 0,\ \operatorname{Im} z_{*k} = \mp d$. Тоді можна говорити, що утворена в процесі навантажування зона проковзування буде симетричною відносно осі $Oy$ і її можна описати як $[-a, a]$ з невідомим апріорі розміром $a$.

**Випадок №2** (Додаток Б)**.** Розглянемо тепер випадок, коли масив навантажено змінною зростаючою зосередженою силою $Q_2(t)$ у точці $z_2^* = id \in S_2$, орієнтованою уздовж осі $Oz$ таким чином, що її дія викликає у тілі квазістатичний антиплоский напружено-деформований стан. З (Б.3) отримуємо

$$\left\langle \sigma^0_{yz(1)}(x,t) \right\rangle = \frac{2p_1 Q_{2(1)}(t)}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_{*2}} = \frac{2p_1 d Q_{2(1)}(t)}{\pi\left(x^2 + d^2\right)}. \tag{3.7}$$

Розв'язок (3.5) за таких припущень отримує вигляд

$$\begin{aligned} f_{6(1)}(x,t) &= \frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left\{ -\pi \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \alpha \sigma_{yy}^{\infty} x + p_1 Q_{2(1)}(t) \operatorname{Im} \frac{\sqrt{{z_{*2}}^2 - a_{(1)}^2}}{x - z_{*2}} \right\} = \\ &= \frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left( \alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{p_1 Q_{2(1)}(t)\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}{\pi\left(x^2 + d^2\right)} \right) \qquad \left( x \in [-a_{(1)}; a_{(1)}] \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Тут і далі під функцією $\sqrt{z^2 - a^2}$ розуміємо таку її вітку, що у разі $z \to \infty$ задовольняється умова $\sqrt{z^2 - a^2} \big/ z \to 1$.

З (3.8) враховуючи, що при зростанні навантаження $\operatorname{sgn}[w]_{(1)} = -1$, інтегруванням можна отримати вираз для стрибка переміщень $[w]_{(1)}$:

$$\left[w\right]_{(1)}(x,t)=\int\limits_{-a_{(1)}}^{x} f_{6(1)}\left(x,t\right)dx=-\frac{1}{C}\operatorname{sgn}[w]_{(1)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}+$$

$$+\frac{p_1 Q_{2(1)}(t)}{\pi C}\operatorname{Im} I(x,a_{(1)},z_{*2})=\frac{p_1 Q_{2(1)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}+ \tag{3.9}$$

$$+\frac{1}{C}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(1)}^2-x^2} \qquad \left(\left|x\right|\le a_{(1)}\right),$$

де $I(x,a,z)\equiv\sqrt{z^2-a^2}\int\limits_{-a}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}(x-z)}=i\ln\frac{a(z-x)}{a^2-xz-i\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{z^2-a^2}}$,

$$I(x,a,\pm id)=\arctan\frac{d\sqrt{a^2-x^2}}{x\sqrt{a^2+d^2}}\pm\frac{i}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+d^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Звернемося до питання про розмір зони проковзування $a_{(1)}$. Для визначення крайніх точок областей контакту використовуються умови рівності нулю у цих точках стрибка переміщень зсуву при одночасному виконанні умови (2.70)

$$\left[w\right](\pm a_{(1)},t)=0. \tag{3.10}$$

Природно вважати зону проковзування новоутвореною щілиною (тунельною тріщиною), береги якої притиснуті. Це дає можливість використати при аналізі проблеми проковзування основні поняття і рівняння теорії тріщин (тонких включень).

Оскільки для отримання аналітичного вигляду умов початку проковзування, поточних розмірів зони проковзування при достатньо складних випадках навантажування умова (3.10) не є зручною, то розглянемо характер розподілу напружень в малому околі кінця зони проковзування і введемо в розгляд узагальнені УКІН [29, 231].

Аналіз ССІР (3.4) дає можливість стверджувати, що функція стрибка $f_6$ має кореневу особливість і її розв’язок має вигляд (3.5), (3.8). Маючи цей розв’язок, можна отримати вираз для $g_{6(1)}(z,t)$

$$g_{6(1)}(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_{6(1)}(\xi,t)dt}{\xi-z}= \qquad \left(x\in L'_{(1)}\right)$$
$$=-\frac{1}{2\pi C\sqrt{z^2-a_{(1)}^2}}\int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}}\frac{\sqrt{a_{(1)}^2-\xi^2}}{\xi-z}\left(\left\langle\sigma_{yz(1)}^0(x,t)\right\rangle+2\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\tau_{yz}^{\max}\right)d\xi. \tag{3.11}$$

Використавши полярну систему координат $(r,\theta)$, на основі (2.90) неважко знайти при $z_1=\pm a_{(1)}\pm re^{i\theta}$ вираз інтегралу (3.11) при вибраному навантаженні (3.7)

$$g_{6(1)}\left(a_{(1)}\pm z_1,t\right)=\frac{-\alpha\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\left(1-\frac{a_{(1)}\pm z_1}{\sqrt{\pm2a_{(1)}z_1}}\right)+$$
$$+\frac{p_1}{\pi C}\mathrm{Im}\left\{Q_{2(1)}(t)R(a_{(1)},a_{(1)}\pm z_1,z_{*k})\right\}, \tag{3.12}$$

де

$$R(a,z,z_*)=\int_{-a}^{a}\left(\frac{\sqrt{z_*^2-a^2}}{t-z_*}+1\right)\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-z)}=\frac{\pi\left(\sqrt{z_*^2-a^2}-z_*-\sqrt{z^2-a^2}+z\right)}{(z_*-z)\sqrt{z^2-a^2}}.$$

Використовуючи вираз для потенціалу $\omega'(z)$ (2.44), в якому згідно з принципом «мікроскопу» [268, 269] утримуємо лише члени $(r/2a)^{-0.5}$ та $(r/2a)^0$, з використанням (2.90) можна отримати для напружень в околі вістря зони проковзування двочленні асимптотичні залежності

$$\sigma_{yzk(1)}(a_{(1)}\pm z_1,t)+i\sigma_{xzk(1)}(a_{(1)}\pm z_1,t)=-\sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pm 2r}}e^{-i\theta/2}\alpha\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty}-$$
$$-\frac{p_1Q_{2(1)}(t)}{\pi\sqrt{\pm 2a_{(1)}r}}\mathrm{Im}\left(e^{-i\theta/2}\frac{\sqrt{z_*^2-a_{(1)}^2}-z_*+a_{(1)}}{z_*-a_{(1)}}\right)+ \qquad (3.13)$$
$$+\sigma_{yzk(1)}^{0}(a_{(1)}\pm z_1,t)+i\sigma_{xzk(1)}^{0}(a_{(1)}\pm z_1,t)+\alpha\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty} \qquad (k=1,2).$$

Якщо ввести в розгляд узагальнені УКІН для поздовжнього зсуву виразом

$$K_{3,1}+iK_{3,2}=\lim_{r\to 0\,(\theta=0)}\sqrt{\pi r}\left(\sigma_{yz}+i\sigma_{xz}\right), \qquad (3.14)$$

то з урахуванням (3.13) нескладно отримати аналітичний вираз для УКІН у випадку зони проковзування $L'_{(1)}=[-a_{(1)};a_{(1)}]$:

$$K_{3(1)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(1)}}}\int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}}\sqrt{\frac{a_{(1)}\pm x}{a_{(1)}\mp x}}\left(\left\langle\sigma_{yz(1)}^{0}(x,t)\right\rangle+2\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\tau_{yz}^{\max}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(1)}}}\left\{-\pi a_{(1)}\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}-p_1Q_{2(1)}(t)\,\mathrm{Im}\frac{a_{(1)}\pm z_*}{\sqrt{z_*^2-a_{(1)}^2}}\right\}= \qquad (3.15)$$
$$=\sqrt{\pi a_{(1)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{p_1Q_{2(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}}.$$

Знаки "+" та "–" стосуються правого та лівого кінців зони проковзування відповідно. У випадку щілини УКІН $K_{3,1}$ відповідає класичний УКІН $K_3$. $K_{3,2}$ не розглядається для даної задачі в силу рівності 0 стрибка $f_3$ (3.4). Загалом $K_{3,1}$ відповідає за гнучку, $K_{3,2}$ – за штивну частину розподілу (за термінологією [21]).

Для визначення розміру межі зони проковзування прирівнюємо його до нуля [268, 269] і отримуємо умову для визначення початку процесу проковзування та поточний розмір зони проковзування:

$$Q_{2(1)}(t) \geq Q^*_{2(1)} = \frac{\pi d \tau^{\max}_{yz}}{p_1} = \frac{\pi d \alpha \left|\sigma^{\infty}_{yy}\right|}{p_1}, \qquad (3.16)$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{\frac{p_1^2 Q^2_{2(1)}(t)}{\pi^2 \tau^{\max 2}_{yz}} - d^2} = d\sqrt{\frac{Q^2_{2(1)}(t)}{Q^{*2}_{2(1)}} - 1}. \qquad (3.17)$$

Тут і далі позначено $Q^*_{(1)}$ – критичне значення сили достатньої для початку проковзування, що досягається у певний момент часу $t^*$ $\left(t^* \leq t_{(1)}\right)$, де $t_{(1)}$ – момент часу завершення першого кроку циклу навантажування.

З цього виразу для $a_{(1)}(t)$ можна зробити висновок, що скінченого порогового значення для сили $Q_{2(1)}(t)$ немає. Для того, щоб зона проковзування поширилася на всю можливу $L$, потрібно або спрямувати інтенсивність $Q_{2(1)}(t) \to \infty$ або коефіцієнт тертя $\alpha \to 0$.

Таким чином, розв’язана задача поздовжнього зсуву від дії зосередженої сили $Q_{2(1)}(t)$ з додатковим впливом стискувальних нормальних напружень $\sigma^{\infty}_{yy}$, а також сил тертя на межі поділу матеріалів $\tau^{\max}_{yz}$, які на тих поверхнях контакту (лінії $L$ перерізу), де відбувається проковзування матеріалів, досягають свого максимально можливого значення і можуть там спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо.

Наявність аналітичного розв’язку для всіх параметрів напружено-деформованого стану дає можливість також аналітично обчислити роботу сил тертя на ділянці $L'_{(1)}$ порушення контакту для будь-якого з розглянутих видів навантаження. Ця робота і, отже, розсіяна на $L'_{(1)}$ внаслідок зміни зовнішнього навантаження енергія в деякий момент часу $t$ в загальному випадку обчислюється за допомогою інтеграла

$$W_{(1)}^{d}(t) = -\int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \left|\tau_{yz}^{\max}(x)\right| \left|[w]_{(1)}(x,t)\right| dx\,. \tag{3.18}$$

Зокрема, для розглянутого вище випадку навантаження маємо

$$W_{(1)}^{d}(t) = -\frac{1}{C}\left|\frac{\pi a_{(1)}^{2}\tau_{yz}^{\max 2}}{2} + \tau_{yz}^{\max} p_1 Q_{2(1)}(t)\left(\sqrt{a_{(1)}^{2}+d^{2}} - d\right)\right|, \tag{3.19}$$

або, підставляючи у (3.19) вираз для $a(t)$ з (3.17),

$$W_{(1)}^{d}(t) = -\frac{1}{2\pi C}\left(p_1 Q_{2(1)}(t) + \pi d\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\right)^{2} = -\frac{p_1^{2}}{2\pi C}\left(Q_{2(1)}(t) - Q_{(1)}^{*}\right). \tag{3.20}$$

**Випадок №3 (**Додаток Б.) відрізняється від попереднього незначно. Аналогічно до (3.7) – (3.9), (3.16) – (3.17), враховуючи, що $\operatorname{sgn}[w]=1$, отримуємо вирази для стрибка переміщень $[w]_{(1)}(t)$, УКІН $K_{3(1)}(t)$, розсіяння енергії $W_{(1)}^{d}(t)$, умови початку проковзування та поточного розміру зони проковзування:

$$f_{6(1)}(x,t) = \frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^{2}-x^{2}}}\left(\tau_{yz}^{\max} - \frac{p_2 Q_{1(1)}(t)\sqrt{a_{(1)}^{2}+d^{2}}}{\pi\left(x^{2}+d^{2}\right)}\right) \quad \left(|x| \le a_{(1)}\right); \tag{3.21}$$

$$\left[w\right]_{(1)}(x,t)=-\frac{p_2Q_{1(1)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}-\frac{1}{C}\tau_{yz}^{\max}\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}\,; \tag{3.22}$$

$$\begin{gathered}g_{6(1)}\left(z,t\right)=\frac{p_2Q_{1(1)}(t)}{\pi C\left(z^2+d^2\right)}\left(\frac{z\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}}{\sqrt{z^2-a_{(1)}^2}}-d\right)+\\+\frac{1}{C}\tau_{yz}^{\max}\left(1-\frac{1}{\sqrt{z^2-a_{(1)}^2}}\right)\qquad\left(z\notin[-a_{(1)};a_{(1)}]\right);\end{gathered} \tag{3.23}$$

$$K_{3(1)}(t)=\sqrt{\pi a_{(1)}}\tau_{yz}^{\max}-\sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{p_2Q_{1(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}}\,. \tag{3.24}$$

Прирівнюючи (3.24) до нуля, отримуємо умову початку проковзування:

$$Q_{1(1)}(t)\geq Q_{(1)}^{*}=\frac{\pi d\tau_{yz}^{\max}}{p_1}, \tag{3.25}$$

та розмір зони проковзування:

$$a_{(1)}(t)=\sqrt{\frac{p_2^2Q_{1(1)}^2(t)}{\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}}-d^2}\,. \tag{3.26}$$

З цього виразу для $a_{(1)}(t)$ можна зробити аналогічний до випадку №2 висновок, що скінченого порогового значення для сили $Q_{1(1)}(t)$ немає. Розсіяна на першому кроці енергія

$$W_{(1)}^{d}(t)=-\frac{\pi a_{(1)}^2\tau_{yz}^{\max 2}}{2C}+\frac{\tau_{yz}^{\max}}{C}p_2Q_{1(1)}(t)\left(\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}-d\right), \tag{3.27}$$

або, якщо підставити (3.26),

$$W_{(1)}^{d}(t) = -\frac{1}{2\pi C}\left( p_2 Q_{(1)}(t) - \pi d \tau_{yz}^{\max} \right)^2. \tag{3.28}$$

Як можна було очікувати, при такому зсувному навантаженні стрибок переміщення має протилежний до (3.8), (3.9) знак, у той час як розсіяна енергія та значення критичної сили співпадають з (3.16), (3.17), (3.20).

**Випадок №4 (**Додаток Б.**).** Може бути отриманий за синхронної суперпозиції Випадків №2, 3. Як і в попередньому випадку, враховуючи, що $\operatorname{sgn}[w]_{(1)} = -1$, отримуємо:

$$f_{6(1)}(x,t) = \frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}\left( -\tau_{yz}^{\max} + \frac{Q_{(1)}(t)\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}{\pi\left(x^2 + d^2\right)} \right) \quad \left(|x| \le a_{(1)}\right); \tag{3.29}$$

$$[w]_{(1)}(x,t) = \frac{Q_{(1)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} + \frac{1}{C}\tau_{yz}^{\max}\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}\ ; \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered} g_{6(1)}(z,t) = -\frac{Q_{(1)}(t)}{\pi C\left(z^2 + d^2\right)}\left( \frac{z\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}{\sqrt{z^2 - a_{(1)}^2}} - d \right) - \\ -\frac{1}{C}\tau_{yz}^{\max}\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a_{(1)}^2}} \right) \qquad \left( z \notin [-a_{(1)}; a_{(1)}] \right); \end{gathered} \tag{3.31}$$

$$K_{3(1)}(t) = -\sqrt{\pi a_{(1)}}\,\tau_{yz}^{\max} + \sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{Q_{(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}\ ; \tag{3.32}$$

$$W_{(1)}^{d}(t) = \frac{\pi a_{(1)}^2 \tau_{yz}^{\max 2}}{2C} - \frac{\tau_{yz}^{\max} Q_{(1)}(t)}{C}\left( \sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - d \right); \tag{3.33}$$

або

$$W_{(1)}^{d}(t)=-\frac{1}{2\pi C}\left(Q_{(1)}(t)-\pi d\tau_{yz}^{\max}\right)^{2}; \tag{3.34}$$

умова початку проковзування:

$$Q_{(1)}(t)\geq Q_{(1)}^{*}=\pi d\tau_{yz}^{\max}; \tag{3.35}$$

розмір зони проковзування:

$$a_{(1)}(t)=\sqrt{\frac{Q_{(1)}^{2}(t)}{\pi^{2}\tau_{yz}^{\max 2}}-d^{2}}. \tag{3.36}$$

Висновок щодо параметрів НДС співпадає з висновком для Випадків 2, 3.

**Випадок №5 (**Додаток Б.)**.** Особливий тим, що у цьому випадку напрям проковзування істотно залежатиме від співвідношення пружних сталих півпросторів – $\operatorname{sgn}[w]_{(1)}=\operatorname{sgn}(G_2-G_1)$. Тому шукані розв'язки та параметри НДС мають вигляд:

$$f_{6(1)}(x,t)=\frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^{2}-x^{2}}}\left(\operatorname{sgn}(G_2-G_1)\tau_{yz}^{\max}+\frac{(p_1-p_2)Q_{(1)}(t)\sqrt{a_{(1)}^{2}+d^{2}}}{\pi\left(x^{2}+d^{2}\right)}\right); \tag{3.37}$$

$$\begin{gathered}[w]_{(1)}(x,t)=\frac{(p_1-p_2)Q_{(1)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^{2}+d^{2}}-\sqrt{a_{(1)}^{2}-x^{2}}}{\sqrt{a_{(1)}^{2}+d^{2}}+\sqrt{a_{(1)}^{2}-x^{2}}}-\\ -\frac{\operatorname{sgn}(G_2-G_1)}{C}\tau_{yz}^{\max}\sqrt{a_{(1)}^{2}-x^{2}} \qquad \left(|x|\leq a_{(1)}\right);\end{gathered} \tag{3.38}$$

$$g_{6(1)}(z,t)=\frac{(p_2-p_1)Q_{(1)}(t)}{\pi C\left(z^2+d^2\right)}\left(\frac{z\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}}{\sqrt{z^2-a_{(1)}^2}}-d\right)+$$
$$+\frac{\operatorname{sgn}(G_2-G_1)\tau_{yz}^{\max}}{C}\left(1-\frac{1}{\sqrt{z^2-a_{(1)}^2}}\right)\qquad \left(z\notin[-a_{(1)};a_{(1)}]\right); \tag{3.39}$$

$$K_{3(1)}(t)=\sqrt{\pi a_{(1)}}\operatorname{sgn}(G_2-G_1)\tau_{yz}^{\max}-\sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{(p_2-p_1)Q_{(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}}; \tag{3.40}$$

$$W_{(1)}^d(t)=-\tau_{yz}^{\max}\left|\frac{\pi a_{(1)}^2\tau_{yz}^{\max}}{2C}\operatorname{sgn}(G_2-G_1)-\frac{(p_2-p_1)Q_{(1)}(t)}{C}\left(\sqrt{a_{(1)}^2+d^2}-d\right)\right|; \tag{3.41}$$

або

$$W_{(1)}^d(t)=-\frac{1}{2\pi C}\left(|p_2-p_1|Q_{(1)}(t)-\pi d\tau_{yz}^{\max}\right)^2; \tag{3.42}$$

умова початку проковзування:

$$Q_{(1)}(t)\geq Q_{(1)}^*=\frac{\pi d\tau_{yz}^{\max}}{|p_2-p_1|}; \tag{3.43}$$

розмір зони проковзування:

$$a_{(1)}(t)=\sqrt{\frac{(p_2-p_1)^2Q_{(1)}^2(t)}{\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}}-d^2}. \tag{3.44}$$

Слід зазначити, що в останньому із розглянутих випадків при $G_1=G_2=G$ потрібно вважати $[w]_{(1)}(x,t)=0$ $(x\in L)$, бо відбувається синхронний зсув країв тріщини в один бік і взаємне проковзування відсутнє.

**Випадок №6 (**Додаток Б.**).** Міркуючи аналогічно до аналізу попередніх випадків, можна очікувати, що при досягненні цими зсувними силами критичних значень утворяться дві скінчені зони проковзування кожна під відповідною силою $Q_k(t)$ $(k=1,2)$, які поступово зіллються в одну при подальшому зростанні інтенсивності прикладених сил.

**Випадок №7 (**Додаток Б.**).** Цей випадок відрізняється від тривіального (№1) тим, що притискувальне навантаження максимальне в т. $x=0$ лінії $L$, а тому в околі цієї точки є максимальними сили тертя відповідно до закону Амонтона (2.63), (2.71). Тому можна очікувати, що з появою і зростанням зсувного навантаження $\tau(t)>0$, починаючи з безмежно віддалених точок $L$ з'являться дві симетричні стосовно $x=0$ півбезмежні зони проковзування, а в околі $x=0$ буде зона зчеплення, яка зменшуватиметься із зростанням $\tau(t)$. При досягненні умови (див. (2.19))

$$\tau(t)=\tau_{yz}^{\max}(0)=\frac{4\alpha P\gamma^{+}}{\pi h}, \tag{3.45}$$

отримуємо граничний випадок поширення зони проковзування на всю $L$.

**Випадок №8 (**Додаток Б.**).** Відрізняється від попереднього суперпозицією притискних навантажень і, як наслідок, доданком в умові виду (3.45), який при $P>0$ не впливає на якісну картину явища проковзування

$$\tau(t)=\tau_{yz}^{\max}(0)=-\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\frac{4\alpha P\gamma^{+}}{\pi h}. \tag{3.46}$$

**Випадок №9 (**Додаток Б.**).** Для цього випадку важливо визначити, де на $L$ виконується умова відсутності проковзування (2.69), а де – умова появи проковзування (2.70). Порівнюючи розподіл $\tau_{yz}^{\max}(x)$ (2.71) з розподілом $\sigma_{yz}(x)$, отриманим з розв'язку відповідної задачі, можна зробити висновок щодо коректності постановки задачі для такого навантаження. Можливі два випадки: одна зона проковзування в околі $x=0$ або дві півбезмежні зони проковзування із зоною зчеплення посередині.

**Випадок №10 (**Додаток Б.**).** Якісно не відрізняється від попереднього випадку.

У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба покласти $C = G/2,\ p_1 = p_2 = 1/2$.

За гладкого контакту між півпросторами (нульовий коефіцієнт тертя) у згаданих формулах треба покласти $\tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}^{\infty} = 0$. При цьому, якщо розмір зони проковзування не є апріорі обмежений заданим розміром, то зона проковзування пошириться на всю область контакту.

Стосовно останнього міркування можливий другий варіант: штучно обмежити можливі (допустимі) розміри зони проковзування. Для такого апріорі заданого розміру тріщини у разі достатньо великих зусиль розмір тріщини буде обмежувати зону проковзування і тоді на краях тріщини виникатимуть сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові КІН.

## 3.2. Обґрунтування інкрементального методу. Загальний розв'язок для багатокрокового навантаження

Застосовуючи інкрементальний підхід, описаний у підрозділі **2.6**, припускаємо, що на наступному (другому) кроці навантажування отриманий НДС$_{(1)}$ в момент часу $t_{(1)}$ свого завершення матиме зміст залишкового. Тоді можна вважати, що формулювання задачі на цьому кроці відрізняється від попереднього кроку лише вже існуючими стрибками переміщень. Отже, сумарне поле НДС на другому кроці має вигляд (2.98), (2.99).

Оскільки сумарні напруження повинні задовольняти крайовим умовам (2.69), (2.70) на $L'_{(2)}$, то можна сформулювати наступну локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{gathered}\sigma_{yz(2)}(z,t)+i\sigma_{xz(2)}(z,t)=\left\{\sigma_{yz}(z,t)+i\sigma_{xz}(z,t)\right\}-\\ -\left\{\sigma_{yz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)+i\sigma_{xz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)\right\}\ \left(z\in S_k;\ k=1,2;\ j=3-k\right)\end{gathered} \tag{3.47}$$

з крайовими умовами

$$\sigma^{\pm}_{yz(2)}(x,t)=-\operatorname{sgn}([w]_{(2)})\tau^{\max}_{yz}(x)-\sigma^{\pm}_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right),\ \ x\in L'_{(2)}. \tag{3.48}$$

Умови (3.48) слід уточнювати в залежності від співвідношення між $L'_{n(2)}$ та $L'_{n(1)}$:

$$\sigma^{\pm}_{yz(2)}(x,t)=\begin{cases}-\operatorname{sgn}([w]_{(2)})\tau^{\max}_{yz}(x)+\operatorname{sgn}([w]_{(1)})\tau^{\max}_{yz}(x), & x\in L'_{n(2)}\subset L'_{n(1)};\\ -\operatorname{sgn}([w]_{(2)})\tau^{\max}_{yz}(x)-\sigma^{\pm}_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right), & x\in L'_{n(2)}\setminus L'_{n(1)}.\end{cases} \tag{3.49}$$

З (3.49) видно, що припущення (2.98) не потребує доведення у випадку зміни знаку прикладеного (локального на даному кроці) навантаження. Бо, як тільки в момент $t_{(1)}$ завершення першого кроку навантаження досягає екстремуму (максимуму при зростанні), то поверхні контакту злипаються, зона проковзування та досягнутий НДС фіксується. Після цього, коли починається новий крок навантаження з протилежним знаком, то абсолютні величини інтенсивності сумарного навантаження починають зменшуватися, і, цілком аналогічно до процесу розвантаження пластичних матеріалів, нове проковзування не виникне поки в деякий момент часу $t_{(2)}^{st}\left(t_{(1)} < t_{(2)}^{st} \le t_{(2)}\right)$ не почнуть виконуватися умови проковзування (2.70). При цьому стартовий розмір зони проковзування на другому кроці завжди менший від розміру зони проковзування на фініші першого кроку $L'_{(2)} \subset L'_{(1)}$. Тому, використовуючи першу частину крайових умов (3.49) та методику аналогічну до першого кроку отримуємо СІР:

$$\begin{cases} f_{3(2)}\left(x,t\right) = 0, \\ g_{6(2)}\left(x,t\right) = \dfrac{1}{2C}\left\{\left\langle \sigma_{yz(2)}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle + 2\tau_{yz}^{\max}(x)\left(\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)}\right)\right\} = \\ \qquad = iF_{6(2)}\left(x,t\right), \end{cases} \tag{3.50}$$

для визначення стрибків переміщень і, відповідно, всіх інших параметрів НДС на другому кроці навантажування під дією локального для другого кроку навантаження

$$\begin{aligned} &\tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t), \\ &\tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t), \\ &Q_{k(2)}(t) = Q_k(t) - Q_{k(1)}(t_{(1)}), \\ &b_{k(2)}(t) = b_k(t) - b_{k(1)}(t) \ \ (k = 1,2;\ t > t_{(1)}). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Структурно вигляд СІР (3.50) відрізняється від СІР (3.4) для першого кроку лише доданком $-2\tau_{yz}^{\max}(x)\operatorname{sgn}[w]_{(1)}$ у правій частині.

Оскільки в момент часу $t_{(1)}$ навантаження першого кроку досягає максимуму, а потім продовжує збільшуватися вже на другому кроці, то зона проковзування після першого кроку продовжує без затримки рости до максимуму другого кроку – $L'_{(2)} \supset L'_{(1)}\left(t_{(2)}^{start} = t_{(1)}\right)$. Отже покажемо, що якщо сумарний розв’язок після другого кроку, отриманий з (3.50), співпадатиме з розв’язком цієї задачі як однокрокової, але під впливом відразу сумарного навантаження двох кроків, тоді пропоновану методику можна використовувати для довільного багатокрокового навантаження. При розглянутому на першому кроці навантаженні маємо $a_{(2)}(t) \ge a_{(1)}(t_{(1)})$ при $t \ge t_{(1)}$. Це означає, що в крайових умовах (3.49) слід обирати другу частину, що містить доданки

$$\sigma^{\pm}_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right)=\sigma^{0\pm}_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right)-Cg_{6(1)}\left(x,t_{(1)}\right)=$$
$$=\sigma^{0\pm}_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right)-\frac{C}{\pi}\int\limits_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}}\frac{f_{6(1)}\left(\xi,t_{(1)}\right)d\xi}{\xi-x},\; x\subset\left[-a_{(2)};a_{(2)}\right]\setminus\left[-a_{(1)};a_{(1)}\right]. \tag{3.52}$$

Обчислюючи $K_{3(2)}(t)$ для другого кроку, з (3.15) отримуємо

$$K^{\pm}_{3(2)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{-a_{(2)}}^{a_{(2)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\sigma_{yz}\left(x,t\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{-a_{(2)}}^{a_{(2)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\left\{\sigma_{yz(1)}\left(x,t_{(1)}\right)+\sigma^{0}_{yz(2)}\left(x,t\right)+\mathrm{sgn}[w]_{(2)}\tau^{\max}_{yz}\left(x\right)\right\}dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{-a_{(2)}}^{a_{(2)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\left(\sigma^{0}_{yz(2)}\left(x,t\right)+\mathrm{sgn}[w]_{(2)}\tau^{\max}_{yz}\left(x\right)\right)dx-$$
$$-\frac{\mathrm{sgn}[w]_{(1)}}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\tau^{\max}_{yz}\left(x\right)dx+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{-a_{(2)}}^{-a_{(1)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\left(\sigma^{0}_{yz(1)}\left(x,t\right)-Cg_{6(1)}\left(x,t_{(1)}\right)\right)dx+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(2)}}}\int\limits_{a_{(1)}}^{a_{(2)}}\sqrt{\frac{a_{(2)}\pm x}{a_{(2)}\mp x}}\left(\sigma^{0}_{yz(1)}\left(x,t\right)-Cg_{6(1)}\left(x,t_{(1)}\right)\right)dx. \tag{3.53}$$

Враховуючи, що для даного випадку навантажування $\mathrm{sgn}[w]_{(2)}=\mathrm{sgn}[w]_{(1)}=-1$, а також використовуючи значення інтегралів

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\xi-x\right)}=1-\frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad x\notin[-a;a];$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\xi-x\right)\left(\xi-z\right)}=\frac{1}{z-x}\left(-\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) \quad x\notin[-a;a];$$

$$\int_{-b}^{-a}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}d\xi+\int_{a}^{b}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}d\xi=2b\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{b}\right);$$

$$\int_{-b}^{-a}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}\frac{|\xi|d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}+\int_{a}^{b}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}\frac{|\xi|d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}=b\pi; \tag{3.54}$$

$$\int_{-b}^{-a}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}\frac{\mathrm{sgn}(\xi)d\xi}{\left(\xi-id\right)\sqrt{\xi^2-a^2}}+\int_{a}^{b}\sqrt{\frac{b\pm\xi}{b\mp\xi}}\frac{\mathrm{sgn}(\xi)d\xi}{\left(\xi-id\right)\sqrt{\xi^2-a^2}}=$$

$$=\frac{\pi(b\pm id)}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{b^2+d^2}};$$

отримуємо з (3.53) такий вираз для КІН

$$K_{3(2)}(t)=-\pi a_{(2)}\tau_{yz}^{\max}+\sqrt{\frac{a_{(2)}}{\pi}}\frac{p_1\left(Q_{2(1)}(t_{(1)})+Q_{2(2)}(t)\right)}{\sqrt{a_{(2)}^2+d^2}}, \tag{3.55}$$

який збігається із виразом для випадку однокрокового навантажування силовими чинниками сумарної інтенсивності $Q_{2(1)}(t_{(1)})+Q_{2(2)}(t)$.

Таким чином, запропонований адитивний підхід до послідовності залишкових НДС придатний для врахування багатокрокового навантажування-розвантажування. Однак для спрощення процедури розв’язування доцільно послідовні кроки довантажування чи розвантажування об’єднувати в один крок. У цьому випадку розв’язок сформульованої задачі може бути легко знайдений з допомогою вищенаведеної методики для змінюваного навантажування.

Розмірковуючи аналогічно для всіх наступних кроків багатокрокового монотонно змінюваного навантаження можна отримати локальну задачу для $(p)$-го кроку:

$$\sigma_{yz(p)}(z,t)+i\sigma_{xz(p)}(z,t)=\left\{\sigma_{yz}(z,t)+i\sigma_{xz}(z,t)\right\}-$$
$$-\sum_{i=1}^{p-1}\left\{\sigma_{yz(i)}\left(z,t_{(i)}\right)+i\sigma_{xz(i)}\left(z,t_{(i)}\right)\right\}\ \left(z\in S_k;\ k=1,2;\ j=3-k;t>t_{(p-1)}\right) \tag{3.56}$$

з крайовими умовами

$$\sigma^{\pm}_{yz(p)}(x,t)=-\mathrm{sgn}([w]_{(p)})\tau^{\max}_{yz}(x)-\sigma^{\pm}_{yz(p-1)}\left(x,t_{(p-1)}\right)=$$
$$=-\tau^{\max}_{yz}(x)\left(\mathrm{sgn}[w]_{(p)}-\mathrm{sgn}[w]_{(p-1)}\right)\qquad x\in L'_{n(p)}\ \ (n=\overline{1,N}); \tag{3.57}$$

відповідну СІР

$$\begin{cases} f_{3(p)}(x,t)=0, \\ g_{6(p)}(x,t)=\dfrac{1}{2C}\left\{\left\langle\sigma^0_{yz(p)}(x,t)\right\rangle+2\tau^{\max}_{yz}(x)\left(\mathrm{sgn}[w]_{(p)}-\mathrm{sgn}[w]_{(p-1)}\right)\right\}= \\ \qquad\qquad =iF_{6(p)}(x,t), \end{cases} \tag{3.58}$$

та її розв’язок виду (3.5)

$$f_{6(p)}(x,t)=\frac{X_0^{*+}(x)}{\pi i}\int\limits_{L'_{(p)}}\frac{F_{6(p)}(\xi,t)\,d\xi}{X_0^{*+}(\xi)(\xi-x)}+X_0^{*+}(x)Q_{n-1}(x)\qquad\left(x\in L'_{(p)}\right), \tag{3.59}$$

$$X_0^{*}(z)=\prod_{n=1}^{N}\left[\left(z-a^{-}_{n(p)}\right)\left(z-a^{+}_{n(p)}\right)\right]^{-1/2},$$

з додатковими умовами $\int\limits_{a_{n(p)}^{-}}^{a_{n(p)}^{+}} f_{6(p)}(x)dx = 0 \quad (n = 1,\dots,N)$ для визначення коефіцієнтів полінома $Q_{n-1}(x)$.

У загальному випадку локальні стрибок переміщень та розсіяння енергії на $(p)$-му кроці визначаються виразами

$$[w]_{(p)}(x,t) = \int\limits_{a_{n(p)}^{-}}^{x} f_{6(p)}(\xi,t)d\xi \qquad x \in L'_{n(p)} \left(n = \overline{1,N}\right); \tag{3.60}$$

$$W_{(p)}^{d}(t) = -\int\limits_{L'_{(p)}} \left|\tau_{yz}^{\max}(x)\right|\left|[w]_{(p)}(x,t)\right|dx\,. \tag{3.61}$$

Як наслідок, підсумкові значення напружень, деформацій, переміщень та їх стрибків, розсіяної енергії та ін. після $(p)$-го кроку можуть бути представлені у вигляді суперпозиції, наприклад

$$[w](x,t) = \sum_{m=1}^{p-1}[w]_{(m)}(x,t_{(m)}) + [w]_{(p)}(x,t) \; \left(x \in L';\; t > t_{(p-1)}\right), \tag{3.62}$$

$$W^{d}(t) = \sum_{m=1}^{p-1} W_{(m)}^{d}(t_{(m)}) + W_{(p)}^{d}(t) \;\; \left(t > t_{(p-1)}\right). \tag{3.63}$$

Слід однак зазначити, що довільна суперпозиція породжених в *різні моменти часу* різними випадками навантаження НДС є неможливою через нелінійність сформульованої задачі.

### *3.2.1. Змінне (циклічне) навантажування-розвантажування*

Для більш детальної ілюстрації запропонованої методики розв’язування задачі фрикційного проковзування притиснутих півпросторів під впливом змінюваного зсувного навантаження виберемо спочатку випадки, коли нормальні і зсувні навантаження прикладено у точках, симетричних стосовно осі ординат, тобто випадки №2 − №5, №7 – №12. Для таких випадків справедливим є висновок, що на кожному кроці навантаження буде утворюватися одна симетрична зона проковзування $\left[-a_{(p)};\, a_{(p)}\right]$. Тоді з (2.34) отримуємо

$$\left\langle \sigma^0_{yzk(p)}\left(x,t\right)\right\rangle = 2\tau_{(p)}(t) - 4p_1 \operatorname{Im} D_{2(p)}(x,t) - 4p_2 \operatorname{Im} D_{1(p)}(x,t), \qquad (3.64)$$

і інтеграли у виразах (3.59) − (3.61) з урахуванням (2.70) вдається обчислити явно, що дає змогу робити детальний аналіз.

$$\begin{aligned} f_{6(p)}\left(x,t\right) = {} & \frac{1}{\pi C\sqrt{a^2_{(p)} - x^2}}\left\{\pi\left(\tau_{(p)}(t) - \varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\right)x + \right. \\ & \left. +\sum_{k=1}^{2} p_{3-k} \operatorname{Im}\left(\left(Q_{k(p)}(t) + iG_k b_{k(p)}(t)\right)\left(\frac{\sqrt{{z_{*k}}^2 - a^2_{(p)}}}{x - z_{*k}} + 1\right)\right)\right\} + \\ & + \frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}}{C\sqrt{a^2_{(p)} - x^2}} \sum_{k=1}^{2} E_{3-k}\eta_k \operatorname{Re}\left(N_k\left(\frac{\sqrt{{z_k}^2 - a^2_{(p)}}}{x - z_k} + 1\right)\right) \quad \left(x \in [-a_{(p)};\, a_{(p)}]\right). \end{aligned} \qquad (3.65)$$

Тут $Q_0\left(x\right) \equiv c_0 = 0$, а під функцією $X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ розуміємо вітку, що задовольняє умові $\sqrt{z^2 - a^2}\big/z \to 1$ у випадку $z \to \infty$. Аналогічні міркування використані також для вибору віток функцій $\sqrt{z^2_{*k} - a^2}$ та $\sqrt{\bar{z}^2_{*k} - a^2}$, $k = 1, 2$. Також введено позначення

$$\varepsilon_{(p)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}[w]_{(1)}, & p = 1; \\ \operatorname{sgn}[w]_{(p)} - \operatorname{sgn}[w]_{(p-1)}, & p > 1. \end{cases} \qquad (3.66)$$

Звідси маємо явні вирази для всіх визначальних параметрів НДС на будь-якому кроці згаданого симетричного навантажування. Зокрема вираз для $g_{6(p)}(z,t)$:

$$\begin{aligned}
&g_{6(p)}(z,t) = \frac{1}{C}\left(\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\right)\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a_{(p)}^2}}\right) - \\
&+ \frac{1}{\pi C}\sum_{k=1}^{2} p_{3-k}\operatorname{Im}\left\{\left(Q_{k(p)}(t) + iG_k b_{k(p)}(t)\right)R(a_{(p)}, z, z_{*k})\right\} + \\
&+ \frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}}{C}\sum_{k=1}^{2} E_j \eta_k \operatorname{Re}\left\{N_k R(a_{(p)}, z, z_k)\right\}, \\
&\varepsilon_{(p)} = \operatorname{sgn}[w]_{(p)} - \operatorname{sgn}[w]_{(p-1)},\;\; j = 3-k;\;\left(z \notin [-a_{(p)}; a_{(p)}]\right),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

де

$$\begin{aligned}
&R(a, z, z_*) = \int_{-a}^{a}\left(\frac{\sqrt{z_*^2 - a^2}}{t - z_*} + 1\right)\frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}\,(t - z)} = \\
&= \frac{\pi\left(\sqrt{z_*^2 - a^2} - z_* - \sqrt{z^2 - a^2} + z\right)}{\left(z_* - z\right)\sqrt{z^2 - a^2}}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Вираз для стрибка переміщень $\left[w\right]_{(p)}$ отримуємо інтегруванням (3.65)

$$\begin{aligned}
&\left[w\right]_{(p)}(x,t) = -\frac{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^2 - x^2} + \\
&+ \left\{\sum_{k=1}^{2}\frac{p_{3-k}}{\pi C}\operatorname{Im}\left(\left(Q_{k(p)}(t) + iG_k b_{k(p)}(t)\right)I_2(x, a_{(p)}, z_{*k})\right)\right\} + \\
&+ \frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}}{C}\sum_{k=1}^{2} E_j \eta_k \operatorname{Re}\left\{N_k I_2(x, a_{(p)}, z_k)\right\}\quad\left(|x| \le a_{(p)}\right),
\end{aligned} \tag{3.69}$$

де

$$I_2(x,a,z)=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x}{a}+I(x,a,z)\ , \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} I(x,a,z) &\equiv \sqrt{z^2-a^2}\int\limits_{-a}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(x-z)}= \\ &= i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,z)\ln\frac{a(z-x)}{a^2-xz-i\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{z^2-a^2}}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Вираз для дисипації енергії

$$\begin{aligned} W^d_{(p)}(t) &= -\int\limits_{-a_{(p)}}^{a_{(p)}}\left|\tau^{\max}_{yz}(x)[w]_{(p)}(x,t)\right|dx = \\ &= -\frac{4\alpha}{C}\int\limits_{-a_{(p)}}^{a_{(p)}}\left|\left(-\frac{\sigma^\infty_{yy}}{4}+\sum_{k=1}^{2}E_j\eta_k\,\mathrm{Re}\frac{N_k}{x-z_k}\right)\left(-\left(\tau_{(p)}(t)-\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^\infty_{yy}\right)\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}+\right.\right. \\ &+\sum_{k=1}^{2}\frac{p_j}{\pi}\mathrm{Im}\left(\left(Q_{k(p)}(t)+iG_kb_{k(p)}(t)\right)I_2(x,a_{(p)},z_{*k})\right)+ \\ &\left.\left.+4\alpha\varepsilon_{(p)}\sum_{k=1}^{2}E_j\eta_k\,\mathrm{Re}\left(N_kI_2(x,a_{(p)},z_k)\right)\right)\right|dx \qquad \left(j=3-k\right). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Для визначення розміру зони проковзування $a_{(p)}$ на кожному кроці навантажування визначальним параметром є КІН:

$$K_{3(p)}^{\pm}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(p)}}}\int\limits_{-a_{(p)}}^{a_{(p)}}\sqrt{\frac{a_{(p)}\pm x}{a_{(p)}\mp x}}\sigma_{yz}\left(x,t\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(p)}}}\int\limits_{-a_{(p)}}^{a_{(p)}}\sqrt{\frac{a_{(p)}\pm x}{a_{(p)}\mp x}}\left\{\sum_{m=1}^{p-1}\sigma_{yz(m)}\left(x,t_{(m)}\right)+\sigma_{yz(p)}^{0}\left(x,t\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sgn}[w]_{(p)}\tau_{yz}^{\max}\left(x\right)\right\}dx=\sqrt{\pi a_{(p)}}\left(\tau_{(p)}(t)-\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_{(p)}}}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}p_{3-k}\left(\left(Q_{k(p)}(t)+iG_{k}b_{k(p)}(t)\right)\left(\frac{\sqrt{z_{*k}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{a_{(p)}\mp z_{*k}}\pm 1\right)\right)+$$

$$+4\alpha\varepsilon_{(p)}\sqrt{\frac{\pi}{a_{(p)}}}\;\sum_{k=1}^{2}E_{j}\eta_{k}\operatorname{Re}\left\{N_{k}\left(\frac{\sqrt{z_{k}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{a_{(p)}\mp z_{k}}\pm 1\right)\right\}\;\left(j=3-k\right). \tag{3.73}$$

Прирівнюючи (3.73) до нуля можемо отримати умову початку проковзування на $(p)$-му кроці, значення першого критичного навантаження $\tau_{(p)}^{*}(t)$, $Q_{k(p)}^{*}$ та розмір $a_{(p)}$.

### *3.2.2. Випадок рівномірного нормального стиску і різних варіантів зсувного навантаження*

Аналізуючи та узагальнюючи випадки навантаження №1 – №6 (Додаток Б, (Б.1) – (Б.6)), розглянуті у підрозділі **3.1,** за багатокроковості навантажування можна зазначити наступне.

Для найбільш показового Випадку №2 (див. Додаток Б, (Б.1), (Б.3)) основні параметри НДС та зони проковзування можна обчислити за допомогою виразів

$$f_{6(p)}\left(x,t\right)=\frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left\{-\pi\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}x+\right.$$

$$\left.+p_{1}Q_{2(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}\,\frac{x}{x^{2}+d^{2}}\right\}\quad\left(x\in[-a_{(p)};a_{(p)}]\right); \tag{3.74}$$

$$\left[w\right]_{(p)}(x,t)=\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}-$$
$$-\frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}\qquad\left(|x|\le a_{(p)}\right); \tag{3.75}$$

$$K_{3(p)}(t)=-\varepsilon_{(p)}\sqrt{\pi a_{(p)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}, \tag{3.76}$$

де

$$\varepsilon_{(p)}=\begin{cases}-1, & p=1,\\ (-1)^p 2, & p>1;\end{cases} \tag{3.77}$$

умова початку проковзування на $(p)$-му кроці, поточний розмір зони проковзування та дисипація енергії відповідно:

$$\left|Q_{2(p)}(t)\right|\ge\frac{2\pi d\tau_{yz}^{\max}}{p_1}=Q_{2(p)}^*=2Q_{2(1)}^*\qquad(p>1); \tag{3.78}$$

$$a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{p_1^2Q_{2(p)}(t)^2}{4\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}}-d^2}=d\sqrt{\frac{Q_{2(p)}(t)^2}{Q_{2(p)}^{*2}}-1}; \tag{3.79}$$

$$W_{(p)}^d(t)=-\frac{p_1^2}{2\pi C\left|\varepsilon_{(p)}\right|}\left(Q_{2(p)}(t)-Q_{2(p)}^*\right). \tag{3.80}$$

Критичне навантаження другого та всіх подальших кроків удвічі більше від критичного навантаження першого кроку: $Q_{2(p)}^*=2Q_{2(1)}^*$ $(p\ge 2)$.

Випадок №3: (див. Додаток Б, (Б.1), (Б.4))

$$f_{6(p)}\left(x,t\right)=\frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}\left\{-\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\pi x-\frac{p_2Q_{1(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}{\pi\left(x^2+d^2\right)}\right\} \tag{3.81}$$

$\left(x\in[-a_{(p)};\,a_{(p)}]\right),$

$$\left[w\right]_{(p)}(x,t)=-\frac{p_2Q_{1(p)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}+ \tag{3.82}$$

$$+\frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(p)}^2-x^2} \qquad \left(|x|\le a_{(p)}\right),$$

КІН:

$$K_{3(p)}(t)=-\varepsilon_{(p)}\sqrt{\pi a_{(p)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}-\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_2Q_{1(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}, \tag{3.83}$$

$$\varepsilon_{(p)}=\begin{cases}1, & p=1,\\ \left(-1\right)^{p+1}2, & p>1;\end{cases} \tag{3.84}$$

умова початку проковзування на *(p)*-му кроці та поточний розмір зони проковзування:

$$\left|Q_{1(p)}(t)\right|\ge\frac{2\pi d\tau_{yz}^{\max}}{p_2}=Q_{1(p)}^{*}=2Q_{1(1)}^{*}, \tag{3.85}$$

$$a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{p_2^2Q_{1(p)}(t)^2}{4\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}}-d^2}=d\sqrt{\frac{Q_{1(p)}(t)^2}{Q_{1(p)}^{*2}}-1}, \tag{3.86}$$

$$W_{(p)}^{d}(t)=-\frac{p_2^2}{2\pi C\left|\varepsilon_{(p)}\right|}\left(Q_{1(p)}(t)-Q_{1(p)}^{*}\right). \tag{3.87}$$

Критичне навантаження другого та всіх подальших кроків удвічі більше від критичного навантаження першого кроку: $Q^*_{1(p)} = 2Q^*_{1(1)}$ $(p \geq 2)$.

Випадок №4: (див. Додаток Б, (Б.1), (Б.5))

$$f_{6(p)}\left(x,t\right) = \frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}}\left\{-\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\pi x + \frac{Q_{(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^2 + d^2}}{\pi\left(x^2 + d^2\right)}\right\} \tag{3.88}$$

$\left(x \in [-a_{(p)}; a_{(p)}]\right)$;

стрибок переміщень:

$$\left[w\right]_{(p)}(x,t) = \frac{Q_{(p)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}} + \frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(p)}^2 - x^2} \qquad \left(|x| \leq a_{(p)}\right); \tag{3.89}$$

КІН:

$$K_{3(p)}(t) = -\varepsilon_{(p)}\sqrt{\pi a_{(p)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{Q_{(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2 + d^2}}; \tag{3.90}$$

умова початку проковзування на $\left(p\right)$-му кроці, поточний розмір зони проковзування та дисипація енергії відповідно:

$$\left|Q_{(p)}(t)\right| \geq 2\pi d\tau_{yz}^{\max} = Q^*_{(p)} = 2Q^*_{(1)}; \tag{3.91}$$

$$a_{(p)}(t) = \sqrt{\frac{Q_{(p)}(t)^2}{4\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}} - d^2} = d\sqrt{\frac{Q_{(p)}(t)^2}{Q^{*2}_{(p)}} - 1}; \tag{3.92}$$

$$W^{d}_{(p)}(t) = -\frac{1}{2\pi C\left|\varepsilon_{(p)}\right|}\left(Q_{(p)}(t) - Q^{*}_{(p)}\right). \tag{3.93}$$

Аналізуючи отримані формули (3.88) – (3.93) можна побачити, що вони є *синхронною* суперпозицією формул (3.74) – (3.80) та (3.81) – (3.87), що відповідають випадкам №2 та №3 навантажування. Як вже зазначалося раніше, довільна суперпозиція породжених в різні моменти часу різними випадками навантаження НДС є неможливою через нелінійність поставленої задачі.

Випадок №5: (див. Додаток Б, (Б.1), (Б.6))

Як і у попередніх випадках, критичне навантаження другого кроку (розвантаження) удвічі більше від критичного навантаження першого кроку (навантаження), а на всіх подальших кроках воно вже є таким самим: $Q^{*}_{(p)} = 2Q^{*}_{(1)}$ $(p \geq 2)$. Узагальнюючи на третій, четвертий і подальші кроки навантажування та враховуючи, що в даному випадку

$$\varepsilon_{(p)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(G_2 - G_1), & p = 1, \\ (-1)^{p+1} 2\operatorname{sgn}(G_2 - G_1), & p > 1; \end{cases} \tag{3.94}$$

отримуємо загальні формули для всіх параметрів НДС для наступних кроків у такому випадку навантаження:

$$f_{6(p)}(x,t) = \frac{1}{\pi C\sqrt{a^2_{(p)} - x^2}}\left\{-\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\pi x + \frac{(p_1 - p_2)Q_{(p)}(t)\sqrt{a^2_{(p)} + d^2}}{\pi\left(x^2 + d^2\right)}\right\} \tag{3.95}$$

$$\left(x \in [-a_{(p)};\, a_{(p)}]\right);$$

стрибок переміщень:

$$[w]_{(p)}(x,t)=\frac{(p_1-p_2)Q_{(p)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}+$$
$$+\frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(p)}^2-x^2} \qquad \left(|x|\le a_{(p)}\right); \tag{3.96}$$

КІН:

$$K_{3(p)}(t)=-\varepsilon_{(p)}\sqrt{\pi a_{(p)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{(p_1-p_2)Q_{(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}; \tag{3.97}$$

умова початку проковзування на $(p)$-му кроці,

$$\left|Q_{(p)}(t)\right|\ge\frac{2\pi d\tau_{yz}^{\max}}{|p_1-p_2|}=Q_{(p)}^{*}=2Q_{(1)}^{*}; \tag{3.98}$$

поточний розмір зони проковзування та дисипація енергії відповідно:

$$a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{(p_1-p_2)^2Q_{(p)}(t)^2}{4\pi^2\tau_{yz}^{\max 2}}-d^2}=d\sqrt{\frac{Q_{(p)}(t)^2}{Q_{(p)}^{*2}}-1}; \tag{3.99}$$

$$W_{(p)}^{d}(t)=-\frac{1}{2\pi C\left|\varepsilon_{(p)}\right|}\left(Q_{(p)}(t)-Q_{(p)}^{*}\right). \tag{3.100}$$

Частковий випадок гладкого контакту між півпросторами (нульовий коефіцієнт тертя) можна отримати, покладаючи у згаданих формулах $\tau_{yz}^{\max}=0$. Зрозуміло, що розмір зони проковзування при цьому зростає лавинно, щойно навантаження досягне критичного значення. У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1=G_2=G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C=G/2,\ p_1=p_2=1/2$.

Слід зазначити, що в останньому із розглянутих випадків при $G_1 = G_2 = G$ треба вважати $[w]_{(p)}(x,t) = 0 \quad (x \in L)$, бо відбувається синхронний зсув країв тріщини в один бік і взаємне проковзування відсутнє.

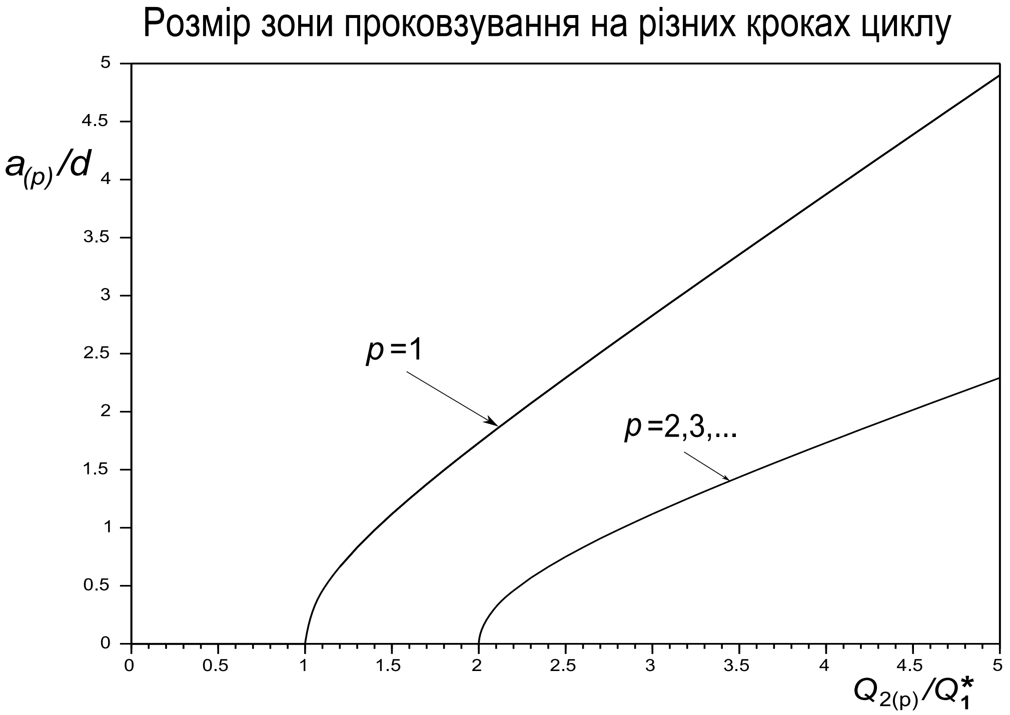



Рис. 3.2. Залежність розміру зони проковзування від параметрів навантаження упродовж циклу

Як і у Випадку №4 аналіз отриманих результатів у випадках №2 та №3 з останнім випадком навантаження засвідчив, що розв’язок останнього випадку (№5) є синхронною суперпозицією випадків №2 (3.74) − (3.80) та №3 (3.81) − (3.87) з поправкою на знак $\operatorname{sgn}(G_2 - G_1)$. Тому надалі основну увагу будемо приділяти цим варіантам зсувного навантаження — однорідне на нескінченості та одна зосереджена сила, як базовим та найбільш показовим. Зазначимо однак ще раз, що довільна суперпозиція несинхронних розв’язків для окремих способів зсувного навантаження не завжди може бути використана внаслідок нелінійності сформульованої задачі.

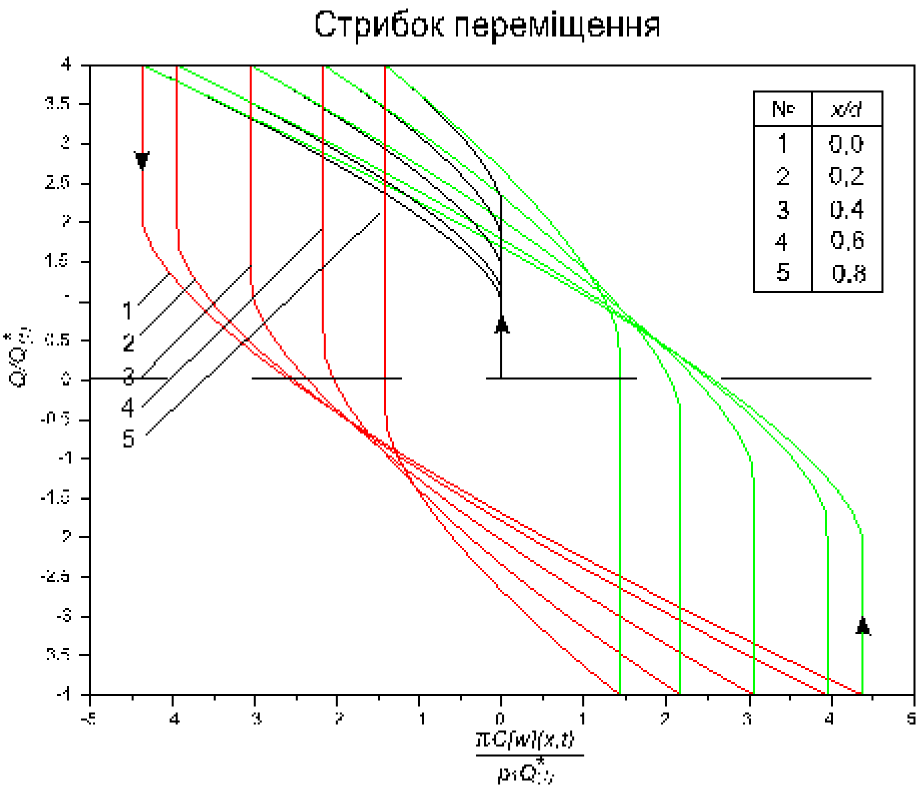



Рис. 3.3. Гістерезисні залежності стрибка переміщень у повному циклі навантаження для різних точок зони проковзування

Для ілюстрації розв'язків обрано найбільш показовий випадок №2 навантаження зосередженою силою у верхньому півпросторі (співвідношення (3.74) – (3.80)). На рис. 3.2 побудована залежність знерозміреної величини розміру зони проковзування $a_{(p)}/d$ на $(p)$-му кроці від знерозміреної інтенсивності прикладеної сили $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}$. Причому, при $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}\le 1$ проковзування відсутнє завжди, а при $1\le Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}\le 2$ відбудеться лише на першому (початковому) кроці. Зона проковзування монотонно зростає синхронно зі збільшенням навантаження. Рис. 3.3 ілюструє гістерезисну поведінку сумарного стрибка переміщень $\pi C[w](x,t)/p_1 Q_{(1)}^{*}$ у різних точках $x/d$ зони проковзування залежно від інтенсивності навантаження у симетричному циклі

$4Q_{(1)}^{*} \to -4Q_{(1)}^{*} \to 4Q_{(1)}^{*} \to -4Q_{(1)}^{*} \to \ldots$. Тут добре помітно, що така поведінка притаманна стрибку переміщень не лише в центрі зони проковзування, а й у всіх інших її точках.

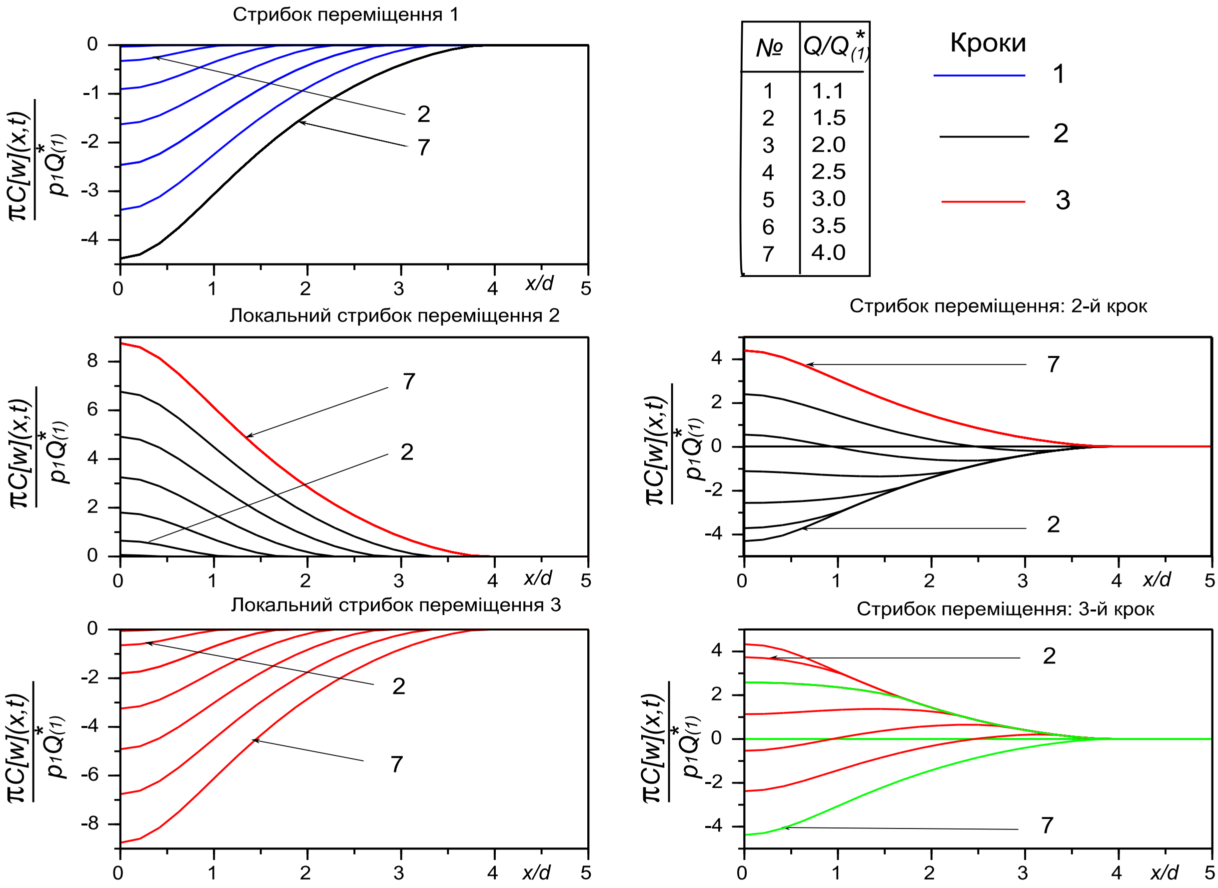



Рис. 3.4. Накопичувальний стрибок переміщень у повному циклі навантаження

На рис. 3.4 проілюстровано еволюцію знерозміреного стрибка переміщень $\pi C[w](x,t) / p_1 Q_{(1)}^{*}$ упродовж згаданого симетричного циклу навантаження. У правій частині рис. 3.4 зображено вигляд сумарного (накопичувального) стрибка переміщень на 2-ому (4, 6, …) та 3-ому (5, 7,…) кроках у процесі зміни навантаження. Добре помітно, що в момент повернення сумарного навантаження в стартову точку зберігається ненульовий сумарний стрибок переміщень.

Рис. 3.5 відображає процес накопичення розсіяння енергії на кожному кроці розглянутого циклу зсувних навантажень.

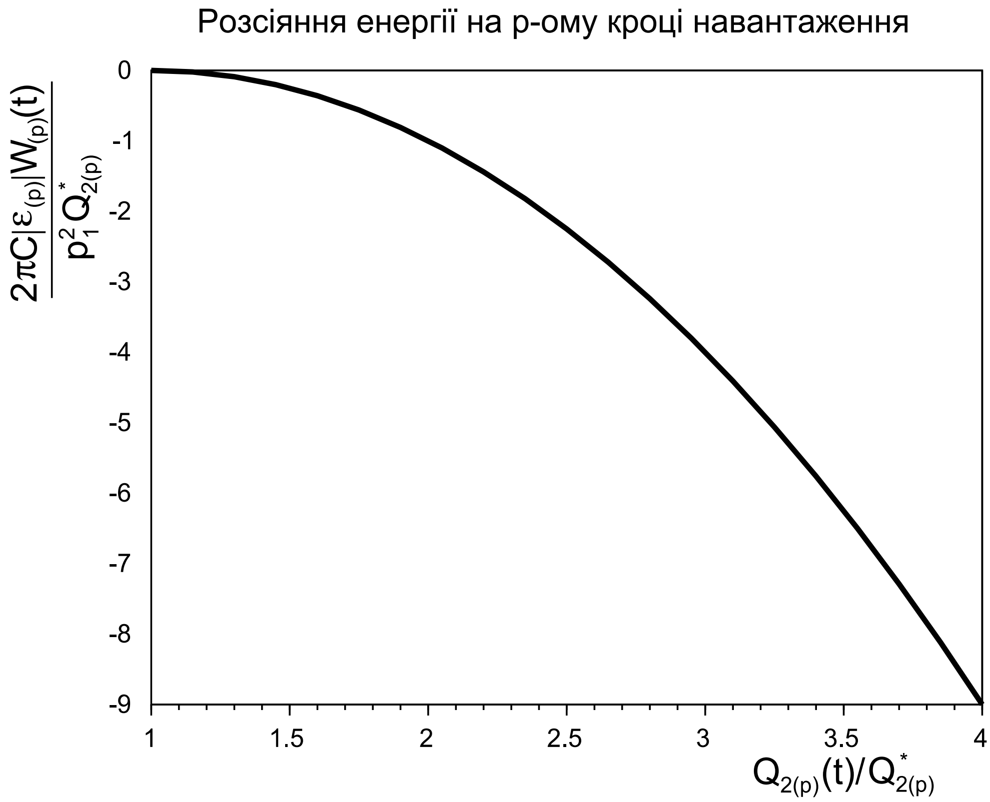



Рис. 3.5. Розсіяння енергії протягом циклу навантаження

### *3.2.3. Випадок пари притискних нормальних сил і різних варіантів зсувного навантаження*

Розглянемо випадки зсувного навантаження №7 – 10 (Додаток Б). Величина $\tau_{yz}^{\max}$ при цьому стає залежною від координати $x$, визначається формулами (2.71), (Б.7), (Б.8) і має вигляд:

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^{\max}(x) &= 4\alpha\left\{-\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{4} - P\sum_{k=1}^{2}(-1)^k E_{3-k}\eta_k\gamma_k \operatorname{Re}\frac{i}{x-z_k}\right\} = \\ &= \alpha\left\{-\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{4Ph\gamma^+}{x^2+h^2}\right\}.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Випадки №7, 8 навантаження лише дотичним зсувним навантаженням $\tau_{(1)}(t) > 0$ на нескінченості проаналізовано вище і досліджено, що для такого виду навантаження необхідне формулювання задачі з двома півбезмежними зонами проковзування.

Випадок навантаження №9, коли в точці $z_{*2} = id$ верхнього півпростору діє лише одна зростаюча від нуля до $Q_{\max(1)}(t)$ зосереджена сила $Q_{2(1)}(t)$ вимагає додаткового аналізу допустимості навантаження для забезпечення коректності формулювання задачі. Порівнюючи розподіли $\tau_{yz}^{\max}(x)$ (3.101) та $\sigma_{yz(1)}^{0}(x)$ (2.29) (рис. 3.6) та беручи до відома закон Амонтона (2.57), яким вони пов'язані, стає зрозумілим, що має значення інтенсивність розподілів в околі т. $x = 0$ - імовірного центру можливої зони проковзування. Очевидним є припущення, що проковзування почнеться в точках, де виконується умова $\sigma_{yz(1)}^{0}(x) \geq \tau_{yz}^{\max}(x)$. Якщо розподіл вздовж осі абсцис сил опору проковзуванню (тертя) $\tau_{yz}^{\max}(x)$ зростає в центрі швидше від розподілу напружень, викликаних прикладеними зсувними силами $Q_{2(1)}(t)$, то слід вважати, що в певний момент часу з'являться дві півбезмежні зони проковзування, а в околі т. $x = 0$ буде зона зчеплення.

З аналізу згаданих розподілів випливає очевидна вимога щодо співвідношення параметрів $h/d$. При умові $h/d > 1$ формулювання задачі з наявністю однієї ділянки проковзування $[-a_{(1)}; a_{(1)}]$ є коректним. При $h/d = 1$ матимемо вироджений випадок миттєвого поширення зони проковзування на всю область $L$ як тільки $Q_{2(1)}(t)$ досягне критичного значення $Q_{2(1)}^{*}$. Вибір значень параметрів $h$ та $d$ такий, що $h/d < 1$, вимагає зміни формулювання задачі на випадок появи зони проковзування у вигляді двох антисиметричних півбезмежних тунельних тріщин. Тому надалі, виходячи з формулювання задачі з наявністю однієї ділянки проковзування $[-a_{(1)}; a_{(1)}]$, вимагатимемо для параметрів $h$ та $d$ виконання вимоги

$$h/d > 1\,. \tag{3.102}$$

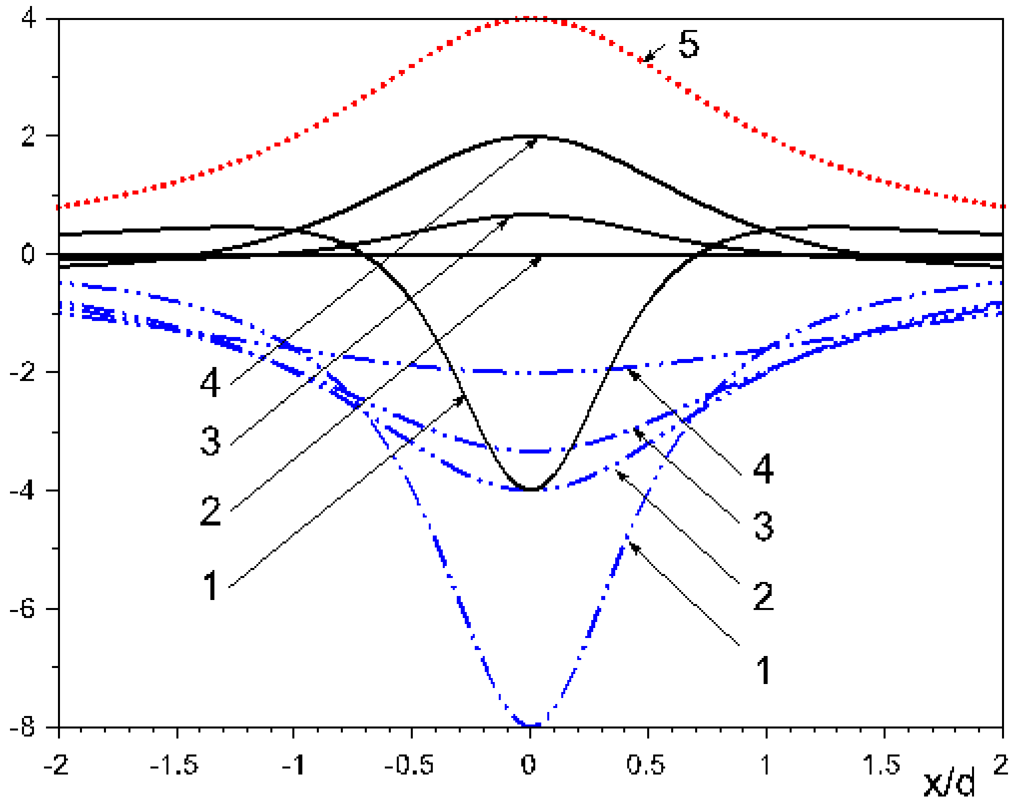



Рис. 3.6. Порівняння розподілів знерозмірених напружень зсуву $\sigma^0_{yz(1)}(x)d/\alpha\gamma^+P$ (червоний пунктир, лінія 5) та тертя $\tau^{\max}_{yz}(x)d/\alpha\gamma^+P$ (синій штрих-пунктир) і їх суперпозиція $\left(\sigma^0_{yz(1)}(x)-\tau^{\max}_{yz}(x)\right)d/\alpha\gamma^+P$ (чорна суцільна) при $h/d$ рівному: 1 – 0,5; 2 – 1,0; 3 – 1,2; 4 – 2,0

Враховуючи, що при зростанні навантаження $\operatorname{sgn}[w]_{(1)}=-1$, можемо записати вирази для $[w]_{(1)}(x,t)$ та $K_{3(1)}(t)$ на першому кроці навантажування у вигляді

$$[w]_{(1)}(x,t) = -\frac{\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(1)}^2 - x^2} + \frac{p_1 Q_{2(1)}(t)}{\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} -$$
$$-\frac{2\alpha P\gamma^{+}}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \qquad \left(|x| \le a_{(1)}\right), \tag{3.103}$$

$$K_{3(1)}(t) = \sqrt{\pi a_{(1)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{p_1 Q_{2(1)}(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}} - \sqrt{\pi a_{(1)}}\frac{4\alpha P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2}}. \tag{3.104}$$

Звідси, прирівнюючи до нуля УКІН (3.104) отримуємо умову початку проковзування та перше критичне значення зсувної сили

$$Q_{2(1)}(t) > Q_{2(1)}^{*} = \frac{\pi\alpha d}{p_1}\left(\frac{4\gamma^{+}P}{h} - \sigma_{yy}^{\infty}\right). \tag{3.105}$$

Поточний розмір зони проковзування $a_{(1)}$ визначається з рівняння

$$\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{p_1 Q_{2(1)}(t)}{\pi\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}} - \frac{4\alpha P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + h^2}} = 0, \tag{3.106}$$

і для випадку, коли відсутня складова $\sigma_{yy}^{\infty}$, має простий явний вигляд

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{\frac{h^2 d^2 (Q_{2(1)}(t)^2 - Q_{2(1)}^{*\,2})}{h^2 Q_{2(1)}^{*\,2} - d^2 Q_{2(1)}(t)^2}}\,. \tag{3.107}$$

Отже, приймаючи в загальному випадку значення $Q_{\max(1)} \ge Q_{2(1)}^{*}$, отримуємо наступну картину зміни НДС:

- при $Q_{2(1)}(t) \le Q_{2(1)}^{*}$ — проковзування відсутнє: $[w]_{(1)}(x,t) = g_{6(1)}(z,t) \equiv 0$;

- при $Q^{*}_{2(1)} \le Q_{2(1)}(t) \le Q^{**}_{2(1)}$ стрибок $[w]_{(1)}(x,t)$ та розмір $a_{(1)}(t)$ визначаються з (3.106), (3.107), а вираз (3.72)для обчислення розсіяної енергії має вигляд:

$$W^{d}_{(1)}(t) = -\frac{4\pi\alpha}{C}\left|\frac{a^{2}_{(1)}\alpha\sigma^{\infty 2}_{yy}}{8} - 2P\gamma^{+}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\left(\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(1)}} - h\right) + \right.$$
$$+\frac{\sigma^{\infty}_{yy}}{4\pi}\left(\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(1)}} - d\right)p_{1}Q_{2(1)}(t) - P^{2}\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(1)}}}{h} - \tag{3.108}$$
$$\left. -\frac{P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(1)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(1)}} + hd + a^{2}_{(1)}}{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(1)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(1)}} + hd - a^{2}_{(1)}}\,p_{1}Q_{2(1)}(t)\right|.$$

Для визначення порогового значення навантаження, коли зона проковзування намагається поширитися миттєво на всю можливу $L$, за відсутності $\sigma^{\infty}_{yy}$ достатньо спрямувати у (3.107) $a_{(1)} \to \infty$:

$$Q^{***}_{2(1)} = \frac{4\pi\alpha\gamma^{+}P}{p_{1}}. \tag{3.109}$$

Повертаючись до вимоги (3.102) коректності формулювання задачі при такому навантаженні відзначимо, що при умові зростання навантаження $Q_{2(1)}(t) \ge Q^{*}_{2(1)}$ зона проковзування $\gamma_{1(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ пошириться на всю область $L$, щойно $\frac{Q_{2(1)}(t)}{Q^{*}_{2(1)}}$ досягне значення $\frac{h}{d}$. Якщо обрати значення $h = d$, то матимемо вироджений випадок $Q^{*}_{2(1)} = Q^{***}_{2(1)}$ миттєвого поширення зони проковзування на всю область $L$ як тільки $Q_{2(1)}(t)$ досягне значення $Q^{*}_{2(1)}$.

Розглянемо другий крок (розвантаження), коли $Q_{2(2)}(t) < 0 \left( t > t_{(1)} \right)$. Враховуючи, що $\mathrm{sgn}[w]_{(2)} = 1$, з виразу (3.73) отримуємо

$$K_{3(2)}(t) = 2\sqrt{\pi a_{(2)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \sqrt{\frac{a_{(2)}}{\pi}}\frac{p_1 Q_{2(2)}(t)}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2}} - \sqrt{\pi a_{(2)}}\frac{8\alpha P\gamma^+}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2}}. \tag{3.110}$$

Звідси визначається умова при розвантаженні, коли проковзування почнеться знову

$$Q_{2(2)}(t) > Q_{2(2)}^* = \frac{2\pi\alpha d}{p_1}\left( \frac{4\gamma^+ P}{h} - \sigma_{yy}^{\infty} \right) = 2Q_{2(1)}^*, \tag{3.111}$$

а також поточний розмір нової зони проковзування за умови відсутності складової $\sigma_{yy}^{\infty}$,

$$a_{(2)}(t) = \sqrt{\frac{h^2 d^2 (Q_{2(2)}(t)^2 - Q_{2(2)}^{*\,2})}{h^2 Q_{2(2)}^{*\,2} - d^2 Q_{2(2)}(t)^2}}\,. \tag{3.112}$$

Локальний стрибок переміщень на другому кроці для такого навантаження (при виконанні умови (3.111)) має вигляд

$$\begin{aligned} [w]_{(2)}(x,t) &= \frac{\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(2)}^2 - x^2} + \frac{p_1 Q_{2(2)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \\ &+ \frac{4\alpha P\gamma^+}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \qquad \left( |x| \le a_{(2)} \right). \end{aligned} \tag{3.113}$$

Розсіяння енергії отримує значення

$$W_{(2)}^{d}(t) = -\frac{4\alpha}{C}\left| -\frac{\pi a_{(2)}^{2}\alpha\sigma_{yy}^{\infty 2}}{4} + 4\pi P\gamma^{+}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}} - h\right) + \right.$$

$$+\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{4}\left(\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}} - d\right)p_{1}Q_{2(2)}(t) - \pi P^{2}\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}}{h} - \tag{3.114}$$

$$\left. -\frac{\pi P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}} + hd + a_{(2)}^{2}}{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}} + hd - a_{(2)}^{2}}\,p_{1}Q_{2(2)}(t)\right|.$$

Зазначимо, що при цьому слушні всі попередні міркування щодо картини зміни НДС та фаз розвитку проковзування з першого кроку.

Продовжуючи аналіз наступних кроків такого змінюваного навантажування-розвантажування, виявляємо, що умови появи проковзування, обидва критичні значення навантаження співпадають із значеннями для другого кроку і є вдвічі більшими від значень початкового кроку.

Узагальнюючи формули на випадок 3-го, 4-го та наступних кроків отримуємо вирази для стрибка переміщень, потенціалу $g_{6(p)}(z,t)$, КІН, критичних значень навантаження та поточного розміру зони проковзування на $(p)$-му кроці навантажування:

$$f_{6(p)}(x,t) = \frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left\{ -\pi\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}x + p_{1}Q_{2(p)}(t)\,\mathrm{Im}\frac{\sqrt{{z_{*2}}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{x - z_{*2}} - \right.$$

$$\left. -4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}E_{3-k}\eta_{k}\gamma_{k}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{{z_{k}}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{x - z_{k}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{x}{C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left( -\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty} + 4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}}{x^{2}+h^{2}} + \right. \tag{3.115}$$

$$\left. + \frac{p_{1}Q_{2(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}}{\pi\left(x^{2}+d^{2}\right)}\right) \qquad \left(x\in[-a_{(p)};\,a_{(p)}]\right);$$

$$[w]_{(p)}(x,t)=\frac{\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}+\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}+$$
$$+\frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}\qquad\left(|x|\le a_{(p)}\right),\tag{3.116}$$

$$K_{3(p)}(t)=-\sqrt{\pi a_{(p)}}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}+\sqrt{\pi a_{(p)}}\frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}}.\tag{3.117}$$

Прирівнюючи (3.117) до нуля, отримуємо умову початку проковзування на $(p)$-му кроці навантажування:

$$\left|Q_{2(p)}(t)\right|>Q_{2(p)}^{*}=\frac{\pi\alpha\varepsilon_{(p)}d}{p_1}\left(\frac{4\gamma^{+}P}{h}-\sigma_{yy}^{\infty}\right),\tag{3.118}$$

та поточний розмір зони проковзування:

$$a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{h^2d^2(Q_{2(p)}(t)^2-Q_{2(p)}^{*}{}^2)}{h^2Q_{2(p)}^{*}{}^2-d^2Q_{2(p)}(t)^2}}.\tag{3.119}$$

Тут враховано, що $\varepsilon_{(p)}$ визначається співвідношенням (3.77) при $Q_{2(1)}(t)>0$ і знакозмінному навантаженні.

Вираз для розсіяної енергії отримуємо з (3.72)після обчислення відповідних інтегралів

$$W^{d}_{(p)}(t)=-\frac{4\alpha}{C}\left|-\frac{\pi a^{2}_{(p)}\alpha\sigma^{\infty 2}_{yy}\varepsilon_{(p)}}{8}+2\pi P\gamma^{+}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\left(\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}-h\right)+\right.$$

$$+\frac{\sigma^{\infty}_{yy}}{4}\left(\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}}-d\right)p_{1}Q_{2(p)}(t)-\pi P^{2}\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}}{h}- \tag{3.120}$$

$$\left.-\frac{\pi P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}}+hd+a^{2}_{(p)}}{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}}+hd-a^{2}_{(p)}}\,p_{1}Q_{2(p)}(t)\right|.$$

Нехай в точці $z_{*1}=-id$ нижнього півпростору діє лише одна зростаюча від нуля до $Q_{\max(1)}$ зосереджена сила $Q_{1(1)}(t)$ (випадок №9, Додаток Б). Як і у попередньому випадку допустиме навантаження вимагає додаткового аналізу, який практично співпадає з міркуваннями попереднього пункту.

З урахуванням того, що при зростанні навантаження у цьому випадку $\mathrm{sgn}[w]_{(1)}=1$, з (3.69), (3.73) отримуємо

$$[w]_{(1)}(x,t)=\frac{\alpha\sigma^{\infty}_{yy}}{C}\sqrt{a^{2}_{(1)}-x^{2}}-\frac{p_{2}Q_{1(1)}(t)}{\pi C}\ln\frac{\sqrt{a^{2}_{(1)}+d^{2}}-\sqrt{a^{2}_{(1)}-x^{2}}}{\sqrt{a^{2}_{(1)}+d^{2}}+\sqrt{a^{2}_{(1)}-x^{2}}}+$$

$$+\frac{4\alpha P\gamma^{+}}{C}\ln\frac{\sqrt{a^{2}_{(1)}+h^{2}}-\sqrt{a^{2}_{(1)}-x^{2}}}{\sqrt{a^{2}_{(1)}+h^{2}}+\sqrt{a^{2}_{(1)}-x^{2}}}\qquad\left(|x|\le a_{(1)}\right), \tag{3.121}$$

$$K_{3(1)}(t)=-\sqrt{\pi a_{(1)}}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}-\sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}}\frac{p_{2}Q_{1(1)}(t)}{\sqrt{a^{2}_{(1)}+d^{2}}}+\sqrt{\pi a_{(1)}}\frac{4\alpha\gamma^{+}P}{\sqrt{a^{2}_{(1)}+h^{2}}}. \tag{3.122}$$

Звідси аналогічно до попереднього випадку отримуємо вираз для розміру зони проковзування

$$\alpha\sigma^{\infty}_{yy}+\frac{p_{1}Q_{1(1)}(t)}{\pi\sqrt{a^{2}_{(1)}+d^{2}}}-\frac{4\alpha P\gamma^{+}}{\sqrt{a^{2}_{(1)}+h^{2}}}=0, \tag{3.123}$$

з якого за відсутності складової навантаження $\sigma_{yy}^{\infty}$ можна отримати явний розв'язок

$$a_{(1)}(t)=\sqrt{\frac{h^2d^2(Q_{1(1)}(t)^2-Q_{1(1)}^*(t)^2)}{h^2Q_{1(1)}^*(t)^2-d^2Q_{1(1)}(t)^2}} \tag{3.124}$$

та, з урахуванням аналізу попереднього випадку, діапазон можливої зміни інтенсивності $\dfrac{Q_{1(1)}(t)}{Q_{1(1)}^*}\in\left(1;\dfrac{h}{d}\right)$ для наявності проковзування. Тут $Q_{1(1)}^*=\dfrac{\pi\alpha d}{p_2}\left(\dfrac{4\gamma^+P}{h}-\sigma_{yy}^{\infty}\right)$ – перше критичне значення навантаження. Порогове значення зсувної сили за відсутності складової навантаження $\sigma_{yy}^{\infty}$ має аналогічний до (3.109) вигляд

$$Q_{1(1)}^{***}=\frac{4\pi\alpha\gamma^+P}{p_2}, \tag{3.125}$$

а розсіяна енергія –

$$\begin{aligned}W_{(1)}^d(t)=-\frac{4\alpha}{C}\Bigg|&\frac{\pi a_{(1)}^2\alpha\sigma_{yy}^{\infty 2}}{8}-2\pi P\gamma^+\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(\sqrt{h^2+a_{(1)}^2}-h\right)=\\ &-\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{4}\left(\sqrt{d^2+a_{(1)}^2}-d\right)p_2Q_{1(1)}(t)-\pi P^2\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^2+a_{(1)}^2}}{h}+\\ &+\frac{\pi P\gamma^+}{2}\ln\frac{\sqrt{h^2+a_{(1)}^2}\sqrt{d^2+a_{(1)}^2}+hd+a_{(1)}^2}{\sqrt{h^2+a_{(1)}^2}\sqrt{d^2+a_{(1)}^2}+hd-a_{(1)}^2}\,p_2Q_{1(1)}(t)\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.126}$$

Розглянемо другий крок (розвантаження), коли $Q_{1(2)}(t)<0\ \left(t>t_{(1)}\right)$. Враховуючи, що $\operatorname{sgn}[w]_{(2)}=-1$, з виразу (3.73) отримуємо

$$K_{3(2)}(t) = -2\sqrt{\pi a_{(2)}}\alpha\sigma_{yy}^{\infty} - \sqrt{\frac{a_{(2)}}{\pi}}\frac{p_2 Q_{1(2)}(t)}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2}} + \sqrt{\pi a_{(2)}}\frac{8\alpha P\gamma^+}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2}}. \quad (3.127)$$

Звідси отримуємо умову при розвантаженні, коли проковзування почнеться знову

$$\left|Q_{1(2)}(t)\right| > Q_{1(2)}^{*} = \frac{2\pi\alpha d}{p_2}\left(\frac{4\gamma^+ P}{h} - \sigma_{yy}^{\infty}\right), \quad (3.128)$$

та поточний розмір нової зони проковзування за відсутності складової навантаження $\sigma_{yy}^{\infty}$:

$$a_{(2)}(t) = \sqrt{\frac{h^2 d^2 (Q_{1(2)}(t)^2 - Q_{1(2)}^{*\,2})}{h^2 Q_{1(2)}^{*\,2} - d^2 Q_{1(2)}(t)^2}}. \quad (3.129)$$

Локальний стрибок переміщень та розсіяння енергії на другому кроці для такого навантаження (при виконанні умови (3.128) мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned}[w]_{(2)}(x,t) = &-\frac{\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(2)}^2 - x^2} - \frac{p_2 Q_{1(2)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \\ &-\frac{4\alpha P\gamma^+}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \qquad \left(|x| \le a_{(2)}\right);\end{aligned} \quad (3.130)$$

$$W_{(2)}^{d}(t) = -\frac{4\alpha}{C}\Bigg| -\frac{\pi a_{(2)}^{2}\alpha\sigma_{yy}^{\infty 2}}{4} + 4\pi P\gamma^{+}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}-h\right) -$$

$$-\frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{4}\left(\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}}-d\right)p_{2}Q_{1(2)}(t) - \pi P^{2}\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}}{h} + \tag{3.131}$$

$$+\frac{\pi P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}}+hd+a_{(2)}^{2}}{\sqrt{h^{2}+a_{(2)}^{2}}\sqrt{d^{2}+a_{(2)}^{2}}+hd-a_{(2)}^{2}}\,p_{2}Q_{1(2)}(t)\Bigg|.$$

Зауважимо, що при цьому слушні всі міркування щодо картини зміни НДС та фаз розвитку проковзування з першого кроку.

Продовжуючи аналіз наступних кроків такого змінюваного навантажування, виявляємо, що умови появи проковзування, обидва критичні значення навантаження збігаються із значеннями для другого кроку і є вдвічі більшими від значень початкового кроку.

Узагальнюючи формули на випадок 3-го, 4-го та наступних кроків отримуємо вирази для стрибка переміщень, КІН, критичних значень навантаження та поточного розміру зони проковзування на $(p)$-му кроці навантажування:

$$f_{6(p)}(x,t) = \frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left\{-\pi\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}x - p_{2}Q_{1(p)}(t)\,\mathrm{Im}\frac{\sqrt{z_{*1}^{\ 2}-a_{(p)}^{2}}}{x-z_{*1}} -\right.$$

$$\left.-4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}E_{3-k}\eta_{k}\gamma_{k}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{z_{k}^{\ 2}-a_{(p)}^{2}}}{x-z_{k}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{x}{C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left(-\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty} + 4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}}{x^{2}+h^{2}} -\right. \tag{3.132}$$

$$\left.-\frac{p_{2}Q_{1(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}}{\pi\left(x^{2}+d^{2}\right)}\right) \qquad \left(x\in[-a_{(p)};a_{(p)}]\right);$$

$$
\begin{gathered}
[w]_{(p)}(x,t)=\frac{\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}-\frac{p_2Q_{1(p)}(t)}{\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}+ \\
+\frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}-\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}+\sqrt{a_{(p)}^2-x^2}} \qquad \left(|x|\le a_{(p)}\right),
\end{gathered}
\tag{3.133}
$$

$$
K_{3(p)}(t)=-\sqrt{\pi a_{(p)}}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}-\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_2Q_{1(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}+\sqrt{\pi a_{(p)}}\frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(p)}^2+h^2}}. \tag{3.134}
$$

Прирівнюючи (3.134) до нуля, отримуємо умову початку проковзування на $(p)$-му кроці навантажування:

$$
\left|Q_{1(p)}(t)\right|>Q_{1(p)}^{*}=\frac{\pi\alpha\varepsilon_{(p)}d}{p_2}\left(\frac{4\gamma^{+}P}{h}-\sigma_{yy}^{\infty}\right), \tag{3.135}
$$

та поточний розмір зони проковзування за відсутності складової навантаження $\sigma_{yy}^{\infty}$:

$$
a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{h^2d^2\left(Q_{2(p)}(t)^2-Q_{2(p)}^{*\,2}\right)}{h^2Q_{2(p)}^{*\,2}-d^2Q_{2(p)}(t)^2}}. \tag{3.136}
$$

Тут враховано, що $\varepsilon_{(p)}$ визначається співвідношенням (3.84) при $Q_{1(1)}(t)>0$ і знакозмінному навантаженні.

Вираз для розсіяної енергії отримуємо з (3.72) після обчислення відповідних інтегралів

$$W^d_{(p)}(t) = -\frac{4\alpha}{C}\left| -\frac{\pi a^2_{(p)}\alpha\sigma^{\infty 2}_{yy}\varepsilon_{(p)}}{8} + 2\pi P\gamma^{+}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\left(\sqrt{h^2 + a^2_{(p)}} - h\right) - \right.$$

$$-\frac{\sigma^{\infty}_{yy}}{4}\left(\sqrt{d^2 + a^2_{(p)}} - d\right) p_2 Q_{1(p)}(t) - \pi P^2\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^2 + a^2_{(p)}}}{h} + \tag{3.137}$$

$$\left. + \frac{\pi P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^2 + a^2_{(p)}}\sqrt{d^2 + a^2_{(p)}} + hd + a^2_{(p)}}{\sqrt{h^2 + a^2_{(p)}}\sqrt{d^2 + a^2_{(p)}} + hd - a^2_{(p)}}\, p_2 Q_{1(p)}(t) \right|.$$

Решта випадків зсувного навантаження таких як дія пари взаємно протилежних чи однонаправлених за напрямом синхронно зростаючих від нуля до $Q_{\max(1)}$ зосереджених сил в різних півпросторах $Q_{2(1)}(t) = -Q_{1(1)}(t) = Q_{(1)}(t),\ z_{*2} = id = -z_{*1}$ можна отримати суперпозицією синхронних розв’язків випадків №1-3. Потрібно лише звернути увагу на те, що у випадку однонаправлених сил до множника $\varepsilon_{(p)}$ слід додавати множник $\mathrm{sgn}(G_1 - G_2)$.

У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C = G/2,\ p_1 = p_2 = 1/2$. При цьому в останньому з розглянутих часткових випадків $[w]_{(1)}(x,t) = 0 \quad (x \in L)$, бо відбувається синхронний зсув країв тріщини в один бік і взаємне проковзування відсутнє.

За гладкого контакту між півпросторами (нульовий коефіцієнт тертя) у згаданих формулах треба покласти $\alpha = 0$, що відразу дає миттєвий ріст розміру зони проковзування до розмірів $L$ для будь-якого несиметричного зсувного навантаження.

При $P = 0$ отримуємо результати підрозділу **3.1.** як часткові.

На рис. 3.7 зображено залежність розміру зони проковзування $a_{(p)}/h$ на ($p$)-ому кроці симетричного циклу від знерозміреної величини прикладеної сили $Q_{(p)}(t)p_1/\alpha\gamma^{+}P$ під час стискування лише силами

$P_k = \mp iP$ . Зазначимо, що добре прослідковується локальність впливу сил притиску – з наближенням точки прикладання сили до межі розділу стає більш яскраво вираженим мінімум величини критичної сили.

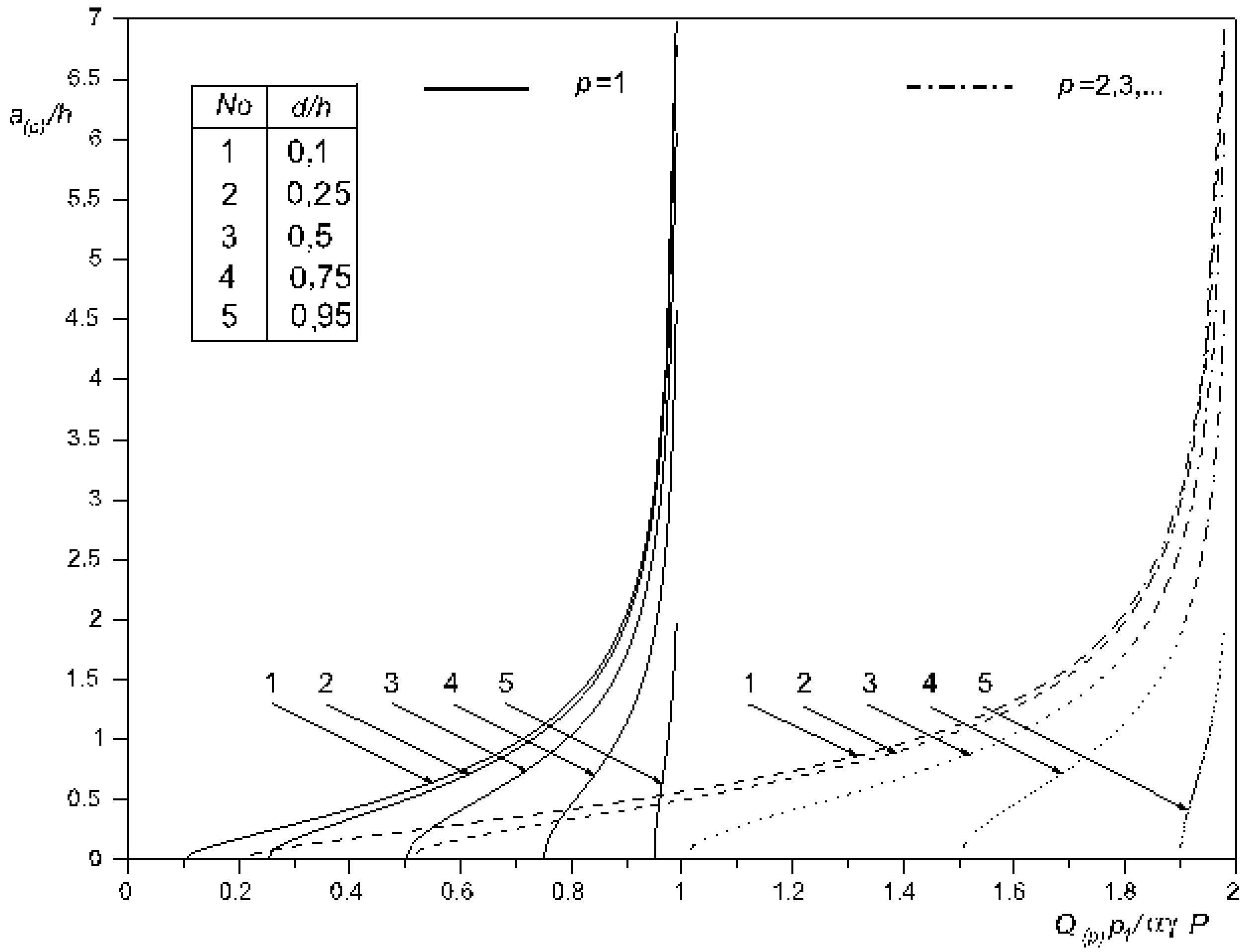



Рис. 3.7. Розмір зони проковзування на p-ому кроці в залежності від величини прикладеної зсувної сили

Зміна форми як локального, так і сумарного стрибка переміщень $2\pi C\left[w\right]_{(p)}(x,t)\Big/\alpha P\gamma^{+}$ в залежності від $x/h$ подано на рис. 3.8. Помітно, що після повного циклу зміни навантаження краї тріщини не повертаються в первісне положення, зберігаючи деякий залишковий стрибок переміщень.

На рис. 3.9 проілюстровано гістерезисний характер сумарного стрибка переміщень $2\pi C\left[w\right]_{(p)}(x,t)\Big/\alpha P\gamma^{+}$ у різних точках $x/h$ зони проковзування залежно від величини навантаження в знакозмінному симетричному циклі. Добре помітно, що такий характер еволюції властивий стрибкам переміщень не лише у центрі зони проковзування, але й у всіх інших її точках.

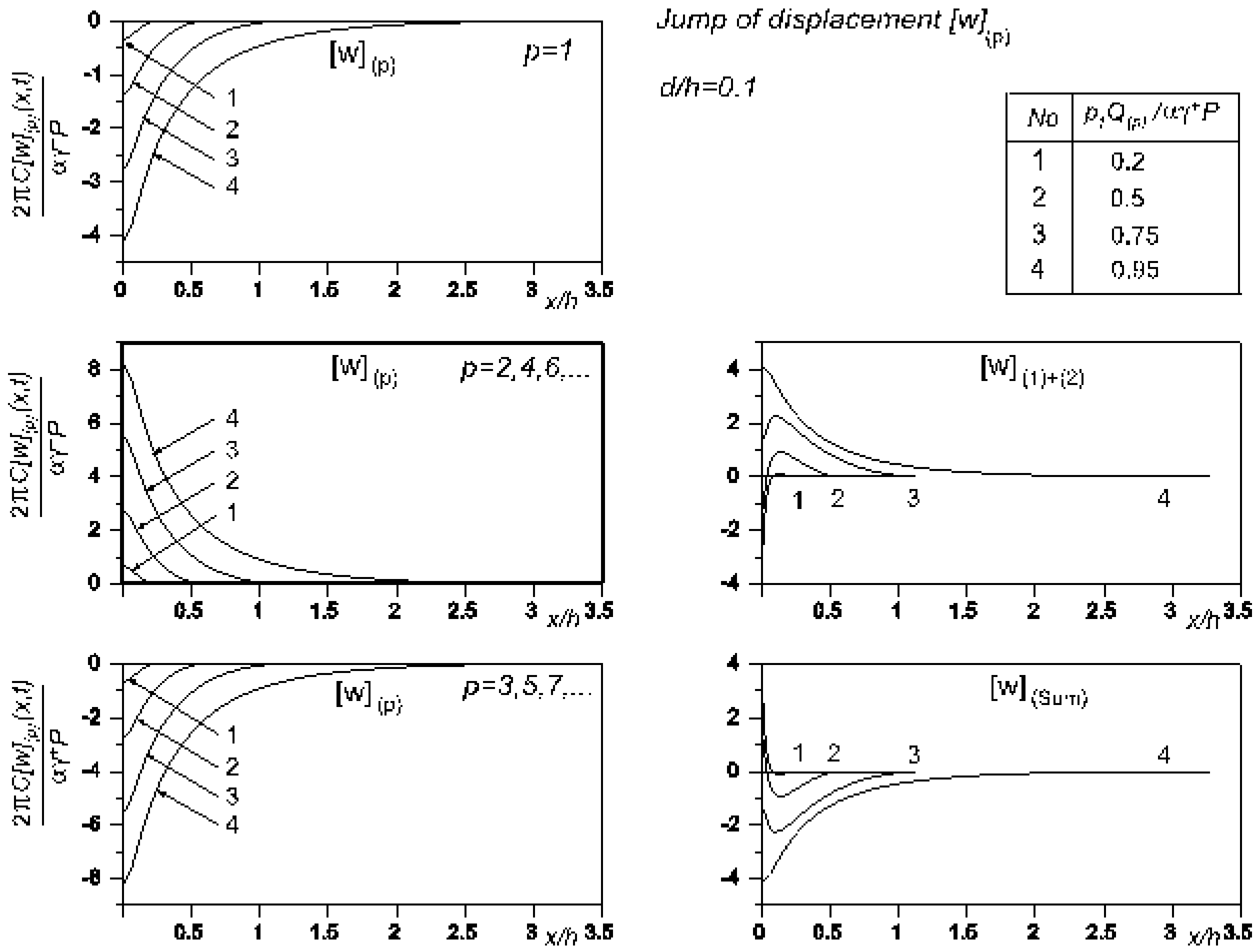



Рис.3.8. Еволюція стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні

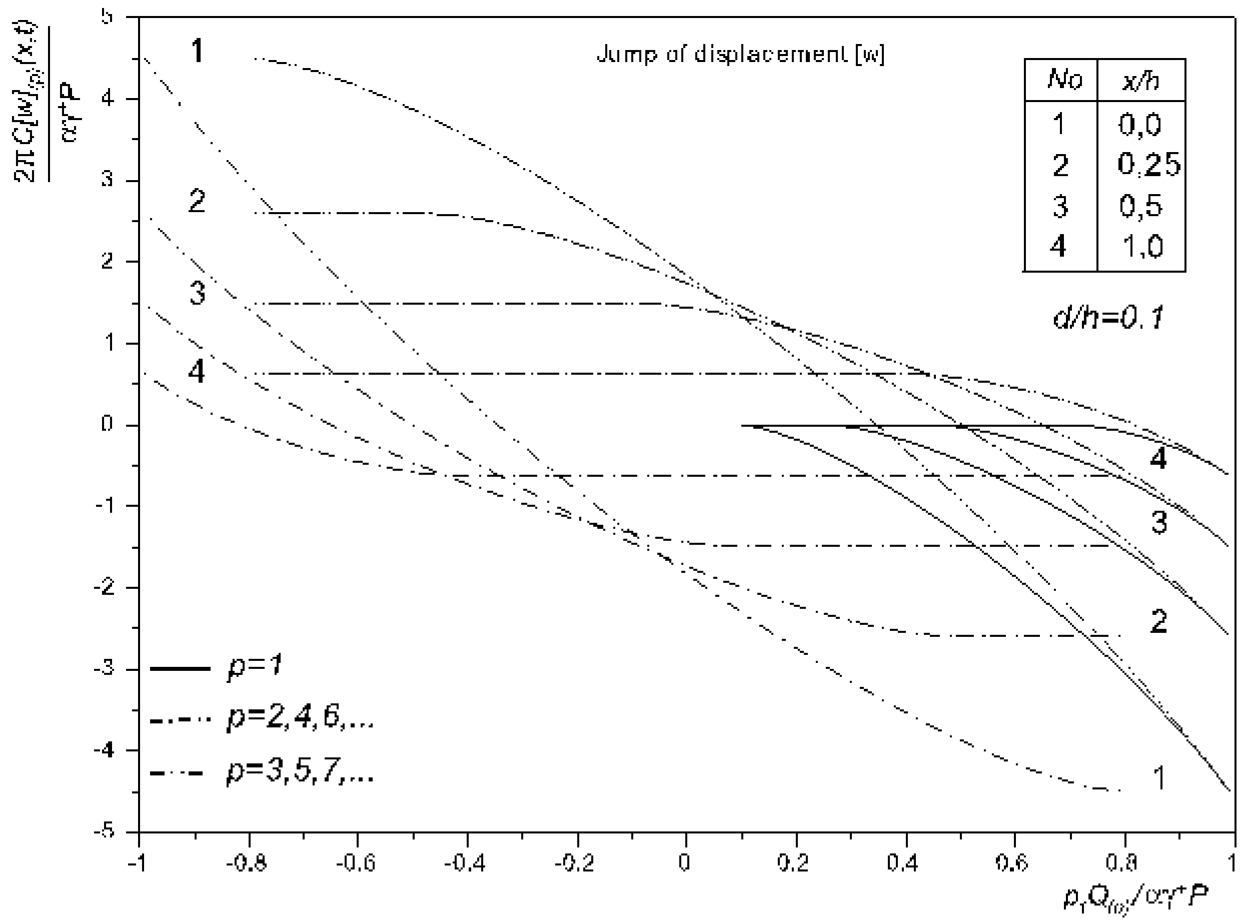



Рис. 3.9. Гістерезисний характер стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні

### *3.2.4. Випадок комбінованого нормального рівномірного стиску, пари відривних нормальних сил і зсувного навантаження*

Покладаючи у формулах (3.65), (3.67), (3.69), (3.72), (3.73) значення $P_k = (-1)^k iP \ (P > 0)$ (випадки №11, 12, Додаток Б) розглянемо ключові варіанти зсувного навантаження. $\tau_{yz}^{\max}$ при цьому є величиною залежною від $x$ і визначається формулою (2.58)

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha\left\{\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{4Ph\gamma^{+}}{x^2 + h^2}\right\}. \tag{3.138}$$

Хоча притискувальне навантаження відрізняється у даній постановці від формулювання задачі підрозділу **3.2** лише знаком сил $P$ (рис. 3.10), характер розподілу $\sigma^0_{yz(1)}(x)$ не є пріоритетним при розгляді коректності формулювання задачі з однією імовірною зоною проковзування. Ключовою є вимога відсутності взаємного відриву контактуючих поверхонь (2.19), (2.20). Для випадку, коли ця пара сил розташована у симетричних точках $z_k = \pm ih \in S_k \ \left(k = 1,2\right)$ умова (2.20) спрощується до виду (2.21) і допустимі значення для згаданого випадку розтягуючих сил $P$ повинні задовольняти умові (2.22). Цей зв'язок між $P$ та $\sigma^\infty_{yy}$ можна записати у вигляді

$$\frac{4P\gamma^+}{h} = -\delta\sigma^\infty_{yy} \ \left(0 \le \delta \le 1\right), \tag{3.139}$$

який забезпечує граничні випадки значень навантаження.

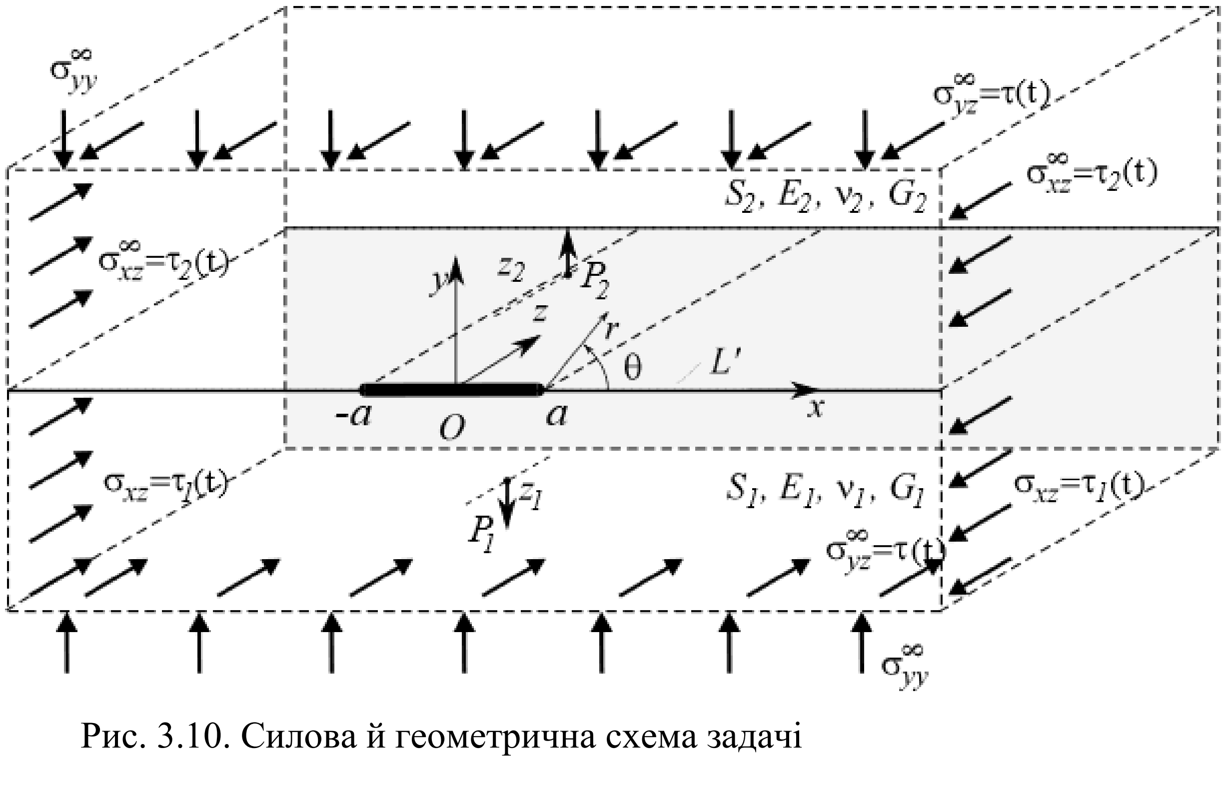



Рис. 3.10. Силова й геометрична схема задачі

Нехай тіло навантажене лише дотичним зсувним навантаженням $\tau_{(1)}(t) > 0$ на нескінченості. На першому кроці навантажування у припущенні, що існує єдина ділянка проковзування $L'_{(1)}=[-a_{(1)};a_{(1)}]$, розв’язок даної задачі (3.65), (3.69) має вигляд

$$f_{6(1)}\left(x,t\right)=\frac{x}{C\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}\left\{\left(\tau_{(1)}(t)-\alpha\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\delta h\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a_{(1)}^2+h^2}}{\left(x^2+h^2\right)}\right\}\quad\left(x\in[-a_{(1)};a_{(1)}]\right);\tag{3.140}$$

$$\left[w\right]_{(1)}(x,t)=\int\limits_{-a_{(1)}}^{x}f_{6(1)}\left(x,t\right)dx=-\frac{\tau_{(1)}(t)-\alpha\,\mathrm{sgn}\left[w\right]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}+$$
$$+\frac{\alpha\delta h\sigma_{yy}^{\infty}\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}}{2C}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^2+h^2}-\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2+h^2}+\sqrt{a_{(1)}^2-x^2}}.\tag{3.141}$$

Вираз для УКІН у випадку тріщини (зони проковзування) $L'_{(1)}=[-a_{(1)};a_{(1)}]$

$$K_{3(1)}(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a_{(1)}}}\int\limits_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}}\sqrt{\frac{a_{(1)}\pm x}{a_{(1)}\mp x}}\left(\left\langle\sigma_{yz(1)}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle+2\,\mathrm{sgn}[w]_{(1)}\tau_{yz}^{\max}(x)\right)dx=$$
$$=\sqrt{\pi a_{(1)}}\left(\tau_{(1)}(t)-\alpha\,\mathrm{sgn}\left[w\right]_{(1)}\sigma_{yy}^{\infty}\left(1+\frac{\delta h}{\sqrt{a_{(1)}^2+h^2}}\right)\right).\tag{3.142}$$

Звернемося до питання про розмір зони проковзування $a_{(1)}$. Прирівнюючи у (3.142) УКІН до нуля, отримуємо умову для $\tau_{(1)}(t)>\tau_{(1)}^{*}$

$$\tau_{(1)}^{*}=-\alpha\sigma_{yy}^{\infty}(1-\delta)=4\alpha\gamma^{+}P(1-\delta)\big/h\delta\,,\tag{3.143}$$

коли вперше з’являється проковзування. Тут і далі $\tau_{(p)}^{*}$ – перше критичне значення навантаження початку проковзування на кроці $(p)$, що досягається у певний момент часу $t^{*}_{(p)}$ $\left(t^{*}_{(p)} \le t_{(p)}\right)$, де $t_{(p)}$ – момент часу завершення кроку циклу. Розмір зони проковзування на першому кроці з урахуванням того, що $\operatorname{sgn}\left[w\right]_{(1)} = -1$, визначається за формулою

$$a_{(1)}(t) = h\sqrt{\left(\frac{\alpha\delta\sigma^{\infty}_{yy}}{\tau_{(1)}(t) + \alpha\delta\sigma^{\infty}_{yy}}\right)^2 - 1} = h\sqrt{\left(\frac{4\alpha\delta\gamma^{+}P}{h\tau_{(1)}(t) - 4\alpha\delta\gamma^{+}P}\right)^2 - 1}. \qquad (3.144)$$

Спрямовуючи $a_{(1)} \to \infty$, отримуємо порогове значення навантаження

$$\tau^{***}_{(1)} = -\alpha\delta\sigma^{\infty}_{yy} = 4\alpha\gamma^{+}\delta P / h. \qquad (3.145)$$

У разі однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у залежностях для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C = G/2,\ p_1 = p_2 = 1/2$. За гладкого контакту між півпросторами у згаданих формулах треба покласти коефіцієнт тертя $\alpha = 0$, що відразу дає максимально дозволений розмір зони проковзування для будь-якого незрівноваженого зсувного навантаження.

Наявність аналітичного розв’язку для всіх параметрів НДС і, зокрема, для УКІН дає можливість обчислити роботу сил тертя на ділянці $L'_{(1)}$ порушення контакту також аналітично для будь-якого розглянутого виду навантаження. Ця робота і, отже, розсіяна на $L'_{(1)}$ внаслідок зміни зовнішнього навантаження енергія в деякий момент часу $t$ обчислюється за допомогою виразу

$$W_{(1)}^{d}(t) = -\frac{\pi\alpha}{C}\left| \frac{a_{(1)}^{2}\sigma_{yy}^{\infty}}{2}\left(\tau_{(1)}(t) + \alpha\sigma_{yy}^{\infty}\right) - \right.$$
$$\left. -\delta h\sigma_{yy}^{\infty}\left(\tau_{(1)}(t) + 2\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\right)\left(\sqrt{a_{(1)}^{2} + h^{2}} - h\right) - \frac{\delta^{2}h^{2}\sigma_{yy}^{\infty\,2}}{4}\ln\frac{\sqrt{a_{(1)}^{2} + h^{2}}}{h} \right|. \quad (3.146)$$

Оскільки на другому кроці змінюється знак навантаження (тобто $\tau_{(2)}(t) < 0$), то маємо $\mathrm{sgn}[w]_{(2)} = 1$ і, аналізуючи вираз для КІН, отримаємо розмір нової зони проковзування. Прирівнюючи до нуля КІН, отримуємо умову для $\left|\tau_{(2)}(t)\right| > \tau_{(2)}^{*}$, коли вперше з'являється проковзування. Тут $\tau_{(2)}^{*} = 2\tau_{(1)}^{*}$ – перше критичне значення навантаження на другому кроці. Аналогічно вдвічі більшими виявилися також решта критичних значень навантаження: $\tau_{(2)}^{**} = 2\tau_{(1)}^{**}$, $\tau_{(2)}^{***} = 2\tau_{(1)}^{***}$. Відзначимо, що на всіх подальших кроках критичні навантаження вже не змінюються.

Розмір зони проковзування на другому кроці навантажування окерслює формула

$$a_{(2)}(t) = h\sqrt{\left(\frac{-2\delta\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{-2\delta\alpha\sigma_{yy}^{\infty} + \tau_{(2)}(t)}\right)^{2} - 1} = h\sqrt{\left(\frac{8\alpha\delta\gamma^{+}P}{8\alpha\gamma^{+}P + \delta h\tau_{(2)}(t)}\right)^{2} - 1}. \quad (3.147)$$

Міркуючи таким самим чином, можна отримати локальний розв'язок для кожного наступного кроку циклу навантаження на проміжку $x \in [-a_{(p)}; a_{(p)}]$:

$$f_{6(p)}(x,t) = \frac{x}{C\sqrt{a_{(p)}^{2} - x^{2}}}\left\{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty} - 4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2} + h^{2}}}{x^{2} + h^{2}}\right\} =$$
$$= \frac{x}{C\sqrt{a_{(p)}^{2} - x^{2}}}\left\{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\left(1 - \delta h\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2} + h^{2}}}{x^{2} + h^{2}}\right)\right\}; \quad (3.148)$$

$$[w]_{(p)}(x,t) = -\frac{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^2 - x^2} -$$

$$-\frac{2\alpha P\gamma^{+}\varepsilon_{(p)}}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}} = \tag{3.149}$$

$$= -\frac{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^2 - x^2} + \frac{\alpha h\delta\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{2C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2} - \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2} + \sqrt{a_{(p)}^2 - x^2}};$$

$$K_{3(p)}(t) = \sqrt{\pi a_{(p)}}\left(\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\left(\sigma_{yy}^{\infty} + \frac{4P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2}}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\pi a_{(p)}}\left(\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\left(1 - \frac{h\delta}{\sqrt{a_{(p)}^2 + h^2}}\right)\right). \tag{3.150}$$

Прирівнюючи у (3.150) УКІН до нуля, отримуємо умову для початку проковзування та перше критичне значення

$$\left|\tau_{(p)}(t)\right| > \left|\tau_{(p)}^{*}\right|, \quad \tau_{(p)}^{*} = \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}(1-\delta) = -4\alpha\varepsilon_{(p)}\gamma^{+}P(1-\delta)\big/h\delta\,. \tag{3.151}$$

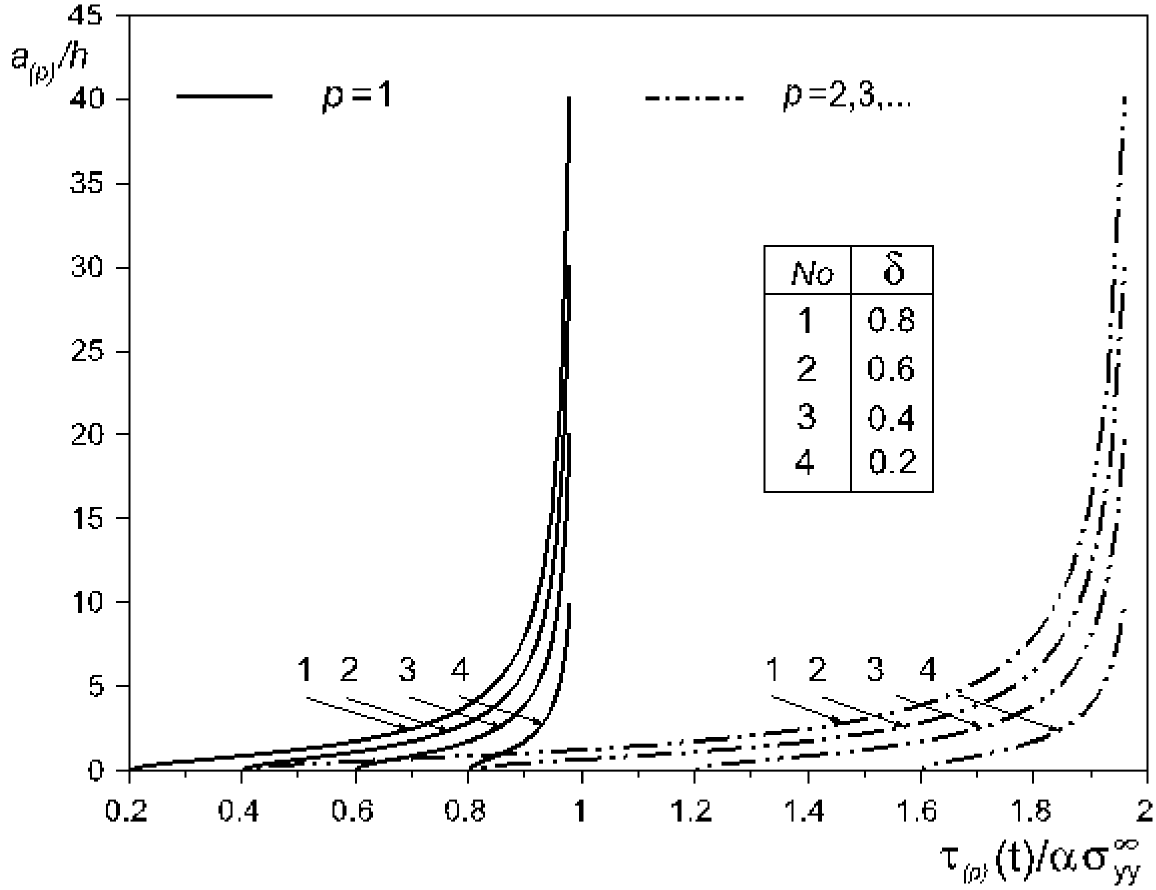



Рис. 3.11. Розмір зони проковзування на р-ому кроці в залежності від величини прикладеного зсувного навантаження

Поточний розмір зони проковзування та порогове значення навантаження

$$a_{(p)}(t)=h\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{(p)}\delta\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}{\tau_{(p)}(t)-\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}}\right)^{2}-1}=h\sqrt{\left(\frac{4\varepsilon_{(p)}\alpha\delta\gamma^{+}P}{\delta h\tau_{(p)}(t)+4\varepsilon_{(p)}\alpha\gamma^{+}P}\right)^{2}-1}. \quad (3.152)$$

$$\tau_{(p)}^{***}=\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\alpha=-4\varepsilon_{(p)}\alpha P\gamma^{+}/h. \quad (3.153)$$

Розсіяння енергії

$$W^d_{(p)}(t) = -\frac{4\pi\alpha}{C}\left| \frac{a^2_{(p)}\sigma^\infty_{yy}}{8}\left(\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^\infty_{yy}\right) + \right.$$

$$\left. +\gamma^+ P\left(\tau_{(p)}(t) - 2\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^\infty_{yy}\right)\left(\sqrt{a^2_{(p)} + h^2} - h\right) - \gamma^{+2}P^2 \ln\frac{\sqrt{a^2_{(p)} + h^2}}{h}\right|. \qquad (3.154)$$

Рис. 3.11 ілюструє залежність знерозміреної величини $a_{(p)}/h$ на $(p)$-ому кроці навантаження від величини $\tau_{(p)}(t)/\sigma^\infty_{yy}\alpha$ залежно від параметру $\delta$. Бачимо, що при наближенні до граничному випадку $\delta = 1$ відсутності нормальних напружень на границі у точці $x = 0$ розмір зони проковзування зростатиме відразу з моменту прикладання зсувного навантаження, а чим менший $\delta$, тим повільніше зростає $a_{(p)}/h$.

На рис. 3.12 проілюстровано еволюцію форми як локального, так і сумарного стрибка переміщень $2\pi C[w]_{(p)}(x,t)/\alpha P\gamma^+$ в залежності від $x/h$. Помітно, що після повного циклу зміни навантаження береги контактуючих півпросторів в межах зони проковзування не повертаються в первісне положення, зберігаючи деякий залишковий стрибок переміщень.

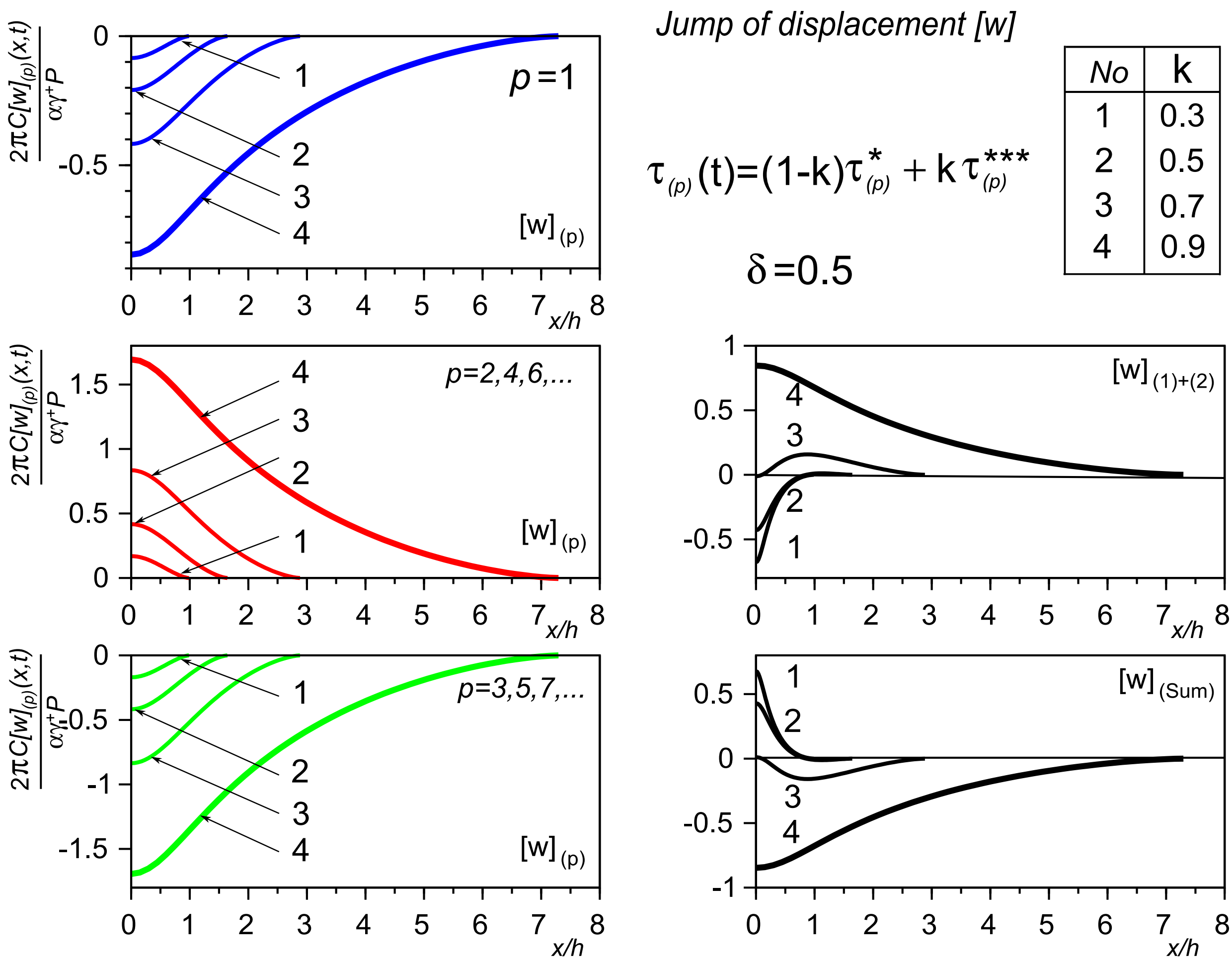



Рис. 3.12. Еволюція стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні зсувним розподіленим навантаженням

На рис. 3.13 проілюстровано гістерезисний характер сумарного стрибка переміщень $2\pi C[w]_{(p)}(x,t)/\alpha P\gamma^{+}$ у різних точках $x/h$ зони проковзування залежно від величини навантаження в знакозмінному симетричному циклі. Добре помітно, що такий характер еволюції властивий стрибкам переміщень не лише у центрі зони проковзування, але й у всіх інших її точках.

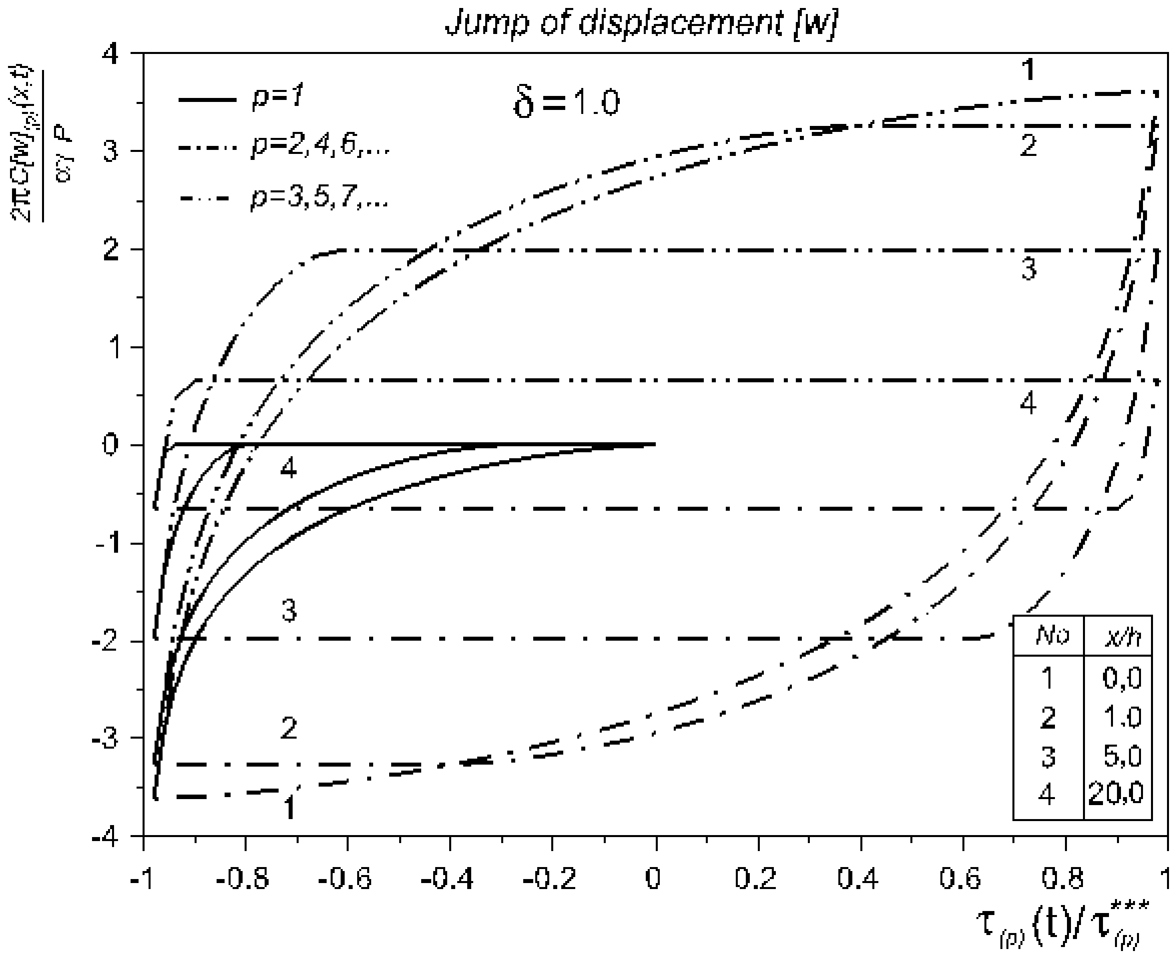



Рис. 3.13. Гістерезисний характер стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні

Рисунок 3.14 відображає характер зміни розсіяної у зоні проковзування енергії $CW_{(p)}(t)\big/2\pi\alpha^2h^2\sigma_{yy}^{\infty 2}$ залежно від $\tau_{(p)}(t)\big/\alpha\sigma_{yy}^{\infty}$ при різних значеннях параметра $\delta$ співвідношення нормальних складових навантаження. Зазначимо, що дисипація енергії стає інтенсивнішою із наближенням до граничному випадку $\delta=1$ відсутності нормальних напружень на границі у точці $x=0$. Це можна пояснити найбільшим розміром зони проковзування де відбувається дисипація енергії.

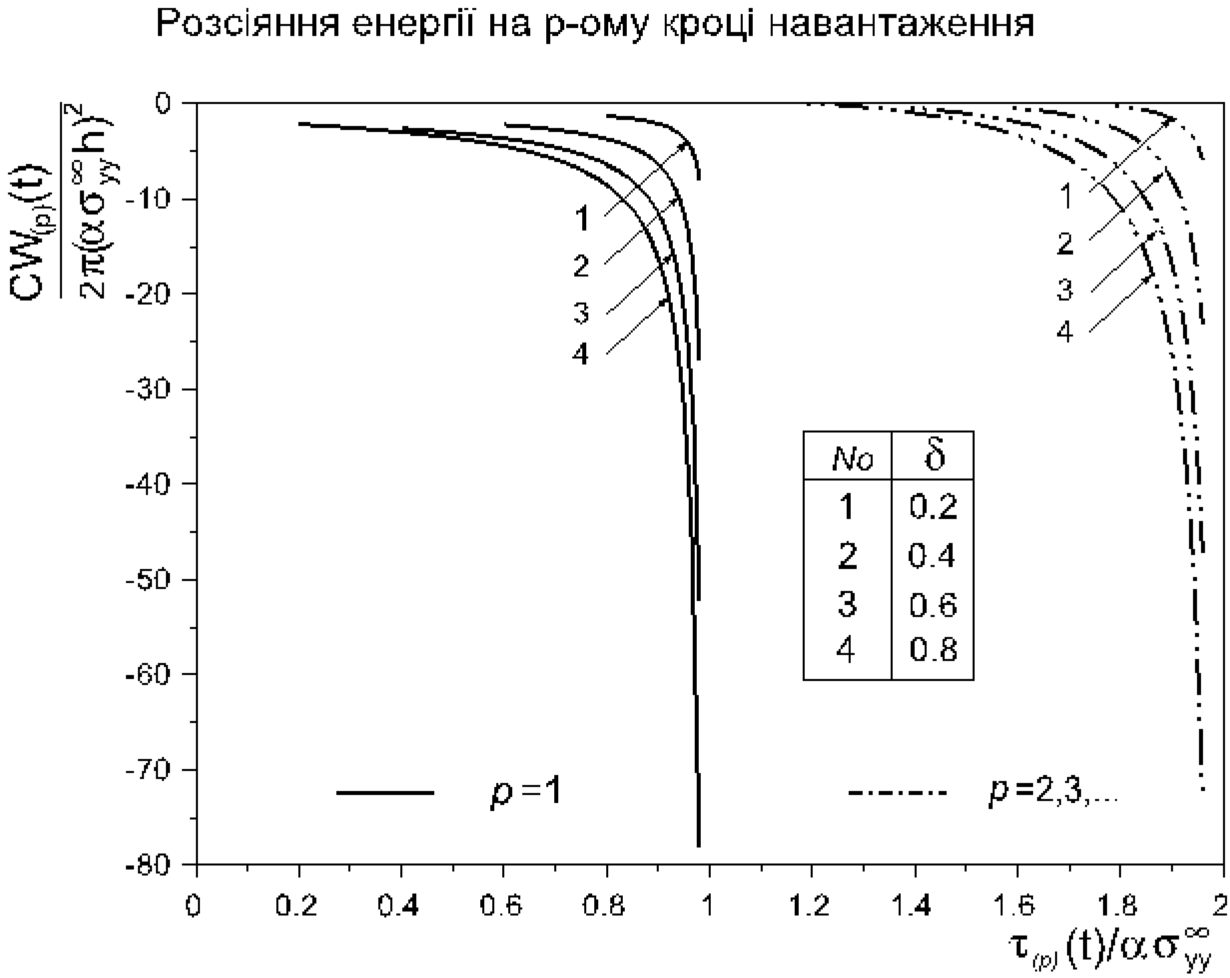



Рис. 3.14. Розсіяння енергії на р-ому кроці при симетричному циклічному навантаженні

**Висновки до розділу 3**

1). У даному розділі побудовано загальний підхід до розв’язування задач поздовжнього зсуву ізотропних контактуючих тіл із можливістю фрикційного проковзування між елементами.

2). Запропонована ефективна методика розрахунку НДС при циклічному чи довільному іншому багатокроковому зсувному навантажуванні притискуваних тіл, коли у контактній зоні може відбуватися проковзування з урахуванням тертя. Причому алгоритм розрахункової схеми працює також і у разі модифікацій закону тертя.

3). На основі визначальних співвідношень антиплоскої задачі методом функцій стрибка отримано точний аналітичний розв’язок задачі для випадку комбінованого стискаючого навантаження та квазістатично змінюваного зсувного навантаження, симетричного відносно центру координат. Передбачено можливість застосування практично довільних способів навантажування масиву неоднорідним нормальним стиском та циклічним навантаженням у поздовжньому напрямку. Цей розв'язок дає змогу отримати явні вирази для всіх компонент НДС, в т.ч. переміщень, УКІН та дисипації енергії з метою оптимізації процесу навантажування-розвантажування.

4). Для випадку багатокрокового (в т.ч. циклічного) навантаження запропонована відповідна методика розв'язування, в основі якої лежить моделююче припущення про можливість інтерпретації на кожному кроці навантажування НДС від попереднього кроку як залишкового. Обґрунтовано коректність отриманого розв'язку. Розглянуто залежність розміру зони контакту на різних стадіях навантаження від його параметрів. Досліджені критичні значення навантаження для визначення моменту появи проковзування та граничні значення, що спричиняють поширення проковзування на всю можливу лінію контакту. У даній постановці задачі з однією зоною проковзування визначено критичні значення зсувного навантаження, поточні розміри зони проковзування, дисипацію енергії на кроках циклу. Цей розв'язок дає змогу отримати явні вирази для переміщень, УКІН та дисипації енергії.

5). Числові експерименти дали можливість з'ясувати вплив тертя та застосування різних варіантів навантажування на зміну розміру зони проковзування, еволюцію стрибків переміщень та розсіяння енергії. Виявлено, що зона проковзування з'являється і зростає найшвидше у випадку, коли у ній притискаючі нормальні напруження мінімальні. Інтенсивності зростання зони проковзування також сприяє віддалення від неї точок прикладання зосереджених силових чинників. Досліджено, що еволюція стрибка переміщень має гістерезисний характер упродовж циклу, а дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів, а також при зростанні розмірів зон проковзування.

# РОЗДІЛ 4. АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ПРОКОВЗУВАННЯ ПРИТИСКУВАНИХ РІЗНОМОДУЛЬНИХ ПІВПРОСТОРІВ З МІЖФАЗНИМИ ОБМЕЖЕНИМИ У ЗРОСТАННІ ТРІЩИНАМИ ПРИ ЗМІНЮВАНОМУ БАГАТОКРОКОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Узагальнимо результати розділу **3** на випадок наявності обмежень при поширенні зони проковзування. Формулювання цієї задачі відрізняється від формулювання задачі розділу **3** наявністю на межі поділу двох півпросторів $L$ $\left(y=0,\ |z|<\infty\right)$ на частині $L' = \bigcup\limits_{n=1}^{N} L'_n = \bigcup\limits_{n=1}^{N}[b_n^-; b_n^+]$ системи стиснутих тунельних тріщин, на деяких ділянках $\gamma_{n(p)} = [a_{n(p)}^-; a_{n(p)}^+] \subset L'_n$ яких в процесі багатокрокового навантажування-розвантажування можуть виникати порушення ідеального зчеплення (рис. 4.1).

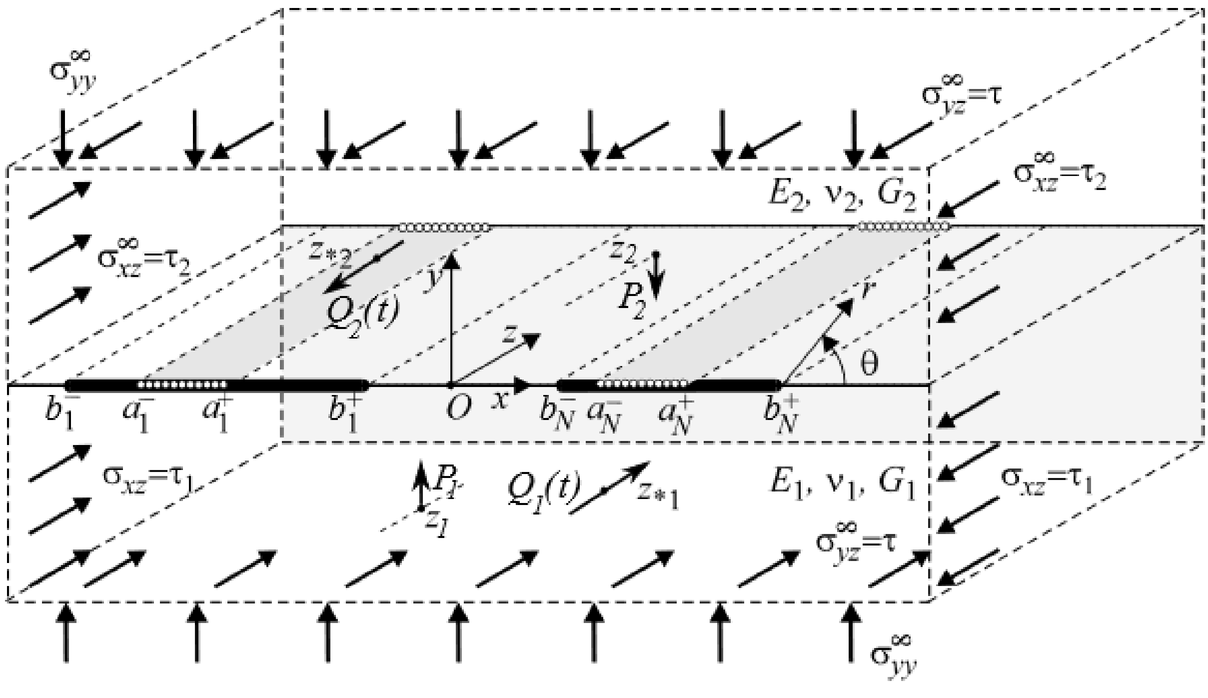



Рис. 4.1. Поздовжній зсув кусково-однорідного простору з дефектами контакту (зонами проковзування) у стиснених тріщинах

Розміри цих зон $\gamma_{n(p)}$, періодично з’являючись та зростаючи не можуть перевищувати розмірів відповідних заданих апріорі тріщин. Тоді під час вивчення явища зміни величини зсувного навантажування для кожної із зон проковзування $\gamma_{n(p)}$ можна виділити три фази розвитку процесу проковзування берегів тріщин поздовжнього зсуву, які дещо відрізняються від згаданих в розділі 3 фаз розвитку процесу проковзування, коли відсутні обмеження на розмір зон проковзування:

1) Комбінація зсувного та стискаючого навантаження є такою, що при зростанні інтенсивності зсувних зусиль до свого локального на кроці максимуму скрізь уздовж $L$ завжди виконується умова (2.69), тобто проковзування не виникає взагалі.

2) Інтенсивність зсувних зусиль в певний момент часу $t^{*}_{(p)}$ вже достатня для виникнення умов (2.70) хоча б на деякій обмеженій ділянці $\gamma_{n(p)} \subset L'_{n(p)}$. Навантаження, коли вперше з'являється проковзування, будемо називати першим критичним. Поки навантаження на етапі першої фази його зміни не досягло першої критичної величини, наявність тріщини не матиме жодного впливу на НДС тіла і все буде відбуватися так, якби об'єктом дослідження були два притиснуті до себе окремі півпростори. У разі переходу до другої фази навантаження для визначення розміру $a_{n(p)}$ зони проковзування можна використовувати умову рівності нулю УКІН (3.73) [268, 269].

3) Інтенсивність зсувних зусиль в певний момент часу $t^{**}_{(p)}$ зросла настільки, що (хоча б з одного боку) розміри зони проковзування досягли розмірів тріщини – $\gamma_{n(p)} \subseteq L'_{n(p)}$. Подальше зростання зусиль не призведе до зростання зони проковзування (в околі цього кінця тріщини), яка вимушено обмежена реальним розміром існуючої тріщини. У кінчиках такої математичної тріщини за таких обставин почнуть формуватися сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові КІН. Навантаження, коли вперше розмір зони проковзування досягне заданого наперед розміру тріщини назвемо другим критичним.

4) Внаслідок вимушеного обмеження на поширення зон проковзування лише до розмірів $L'$ випадок поширення зони проковзування на всю $L$ неможливий.

В цілому проведений на початку розділу 3 аналіз умов допустимого з погляду формулювання задачі зовнішнього навантаження задовольняє сформульовану зараз задачу. Однак, істотною відмінністю є саме задана апріорі обмеженість можливих розмірів зон проковзування розмірами тріщин. Тому, якщо умови (2.19) – (2.22) задовольняють вимогу невідривності контакту як і раніше, то можливі наслідки розвитку процесів проковзування у вищезгаданих випадках №1 – №12 дещо відрізняються. Скажімо випадок №1 вже не можна вважати тривіальним, бо за наявності обмежень на розмір зон проковзування щойно буде досягнуте критичне значення зсувного навантаження $\tau(t) \geq \tau_{yz}^{\max}$ буде миттєво отримана множина зон проковзування конгруентна до $L'$. Також у випадках №2 – 5, 9 та частково №10 збільшення зон проковзування завершиться, як тільки їх розміри збігатимуться з розмірами заданих тріщин. А для випадків №7, 8 зародження проковзування почнеться не на нескінченості, а біля кінців заданих тріщин і буде розвиватися всередину цих тріщин.

Аналогічно до попередньо сформульованих та розв'язаних у розділі **3** задач застосовуємо метод стрибка

$$\begin{gathered}
\left[\sigma_{yz}\right]_{(p)} = f_{3(p)}\left(x,t\right), \\
\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{(p)} = f_{6(p)}\left(x,t\right) \qquad \left(x \in \gamma_{n(p)} \subset L'_{n(p)}\right),
\end{gathered} \tag{4.1}$$

та, беручи на кожному кроці навантажування до відома крайові умови, можна з урахуванням умов взаємодії (2.69), (2.70), що враховують наявність сили тертя на деяких ділянках $L'_{(p)}$ за взаємного зсуву поверхонь контакту у напрямі осі $Oz$, отримати аналогічну до (3.58) ССІР

$$\begin{cases} f_{3(p)}(x,t)=0 & \left(x\in\gamma_{n(p)}\subset L'_{n(p)}\right), \\ g_{6(p)}(x,t)=\dfrac{1}{2C}\left\{\left\langle\sigma^{0}_{yz(p)}(x,t)\right\rangle+2\varepsilon_{(p)}\tau^{\max}_{yz}(x)\right\}, & \end{cases} \tag{4.2}$$

та її розв’язок виду (3.59).

Для докладнішої ілюстрації запропонованої методики розв’язування сформульованої задачі фрикційного проковзування притиснутих півпросторів з наявністю системи міжфазних тунельних стиснутих тріщин виберемо, як і у попередніх розділах, спочатку випадки, коли нормальні і зсувні навантаження прикладено у точках, симетричних стосовно осі ординат.

Для таких випадків справедливим є висновок, що на кожному кроці навантаження в межах заданої тріщини розміру $[-b;b]$ буде утворюватися одна симетрична зона проковзування $\left[-a_{(p)};a_{(p)}\right]$ $\left(a_{(p)}\le b\right)$. Тоді розв’язок СІР (4.2) отримує вигляд ідентичний до (3.65); вираз для стрибка переміщень $[w]_{(p)}$ має вигляд (3.69); вираз для дисипації енергії $W^{d}_{(p)}(t)$ – (3.72), а вираз для УКІН – (3.73).

Аналогічно до розглянутих вище задач внаслідок прирівнювання (3.73) до нуля можемо отримати умову початку проковзування на $p$-му кроці, значення першого критичного навантаження та розмір $a_{(p)}$. Істотною відмінністю для даної задачі є те, що при за зростання зсувного навантаження понад перше критичне значення настає момент, коли розмір зони проковзування стає рівним до розміру тріщини $a_{(p)}=b$ і далі вже не збільшується. Значення навантаження для цього моменту назвемо другим критичним і позначатимемо $\tau^{**}_{(p)}(t)$, $Q^{**}_{k(p)}$. Збільшення інтенсивності навантаження понад друге критичне спричинить появу сингулярностей у кінчиках тріщини та ненульових КІН.

Розглянемо окремі випадки навантаження. Як вже зазначалося раніше, для повноцінного аналізу впливу різного зсувного навантаження на зміну НДС тіла достатньо розглянути випадки зсуву на безмежності $\tau_{(p)}(t)$ та зосередженої сили $Q_{2(p)}(t)$ у точці $z_{*2} = id \in S_2$ верхнього півпростору. Решта комбінацій зсувних силових чинників можуть бути отримані шляхом суперпозиції синхронних розв'язків згаданих двох ключових випадків навантаження з урахуванням знаку стрибка переміщень.

### 4.1. Випадок рівномірного нормального стиску і різних варіантів зсувного навантаження

Нехай діє лише зсув на безмежності $\tau_{(p)}(t)$ (див. випадок №1, Додаток Б). Цей випадок, названий в підрозділі **3.1** тривіальним, розглянуто там достатньо повно, але лише для формулювання задачі з відсутністю обмежень на ріст зони проковзування.

З (3.65) — (3.73) при урахуванні $P_k = P = 0$ отримуємо:

$$f_{6(p)}(x,t) = \frac{\left(\tau_{(p)}(t) - \varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\right)x}{C\sqrt{a^2_{(p)} - x^2}} \quad \left(x \in [-a_{(p)}; a_{(p)}]\right); \tag{4.3}$$

$$g_{6(p)}(z,t) = \frac{1}{C}\left(\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^{\infty}_{yy}\right)\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2_{(p)}}}\right); \tag{4.4}$$

$$[w]_{(p)}(x,t) = -\frac{\tau_{(p)}(t) - \alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^{\infty}_{yy}}{C}\sqrt{a^2_{(p)} - x^2}; \tag{4.5}$$

$$K^{\pm}_{3(p)}(t)=\sqrt{\pi a_{(p)}}\left(\tau_{(p)}(t)-\varepsilon_{(p)}\sigma^{\infty}_{yy}\right). \tag{4.6}$$

Прирівнюючи УКІН (4.6) до нуля можна зробити висновок, що як тільки локальне на $p-$ кроці навантаження досягне значення

$$\tau_{(p)}(t)=\varepsilon_{(p)}\sigma^{\infty}_{yy}=\overset{*}{\tau}_{(p)}=\overset{**}{\tau}_{(p)}, \tag{4.7}$$

то відбудеться миттєвий ріст зони проковзування до розміру тріщини, тобто перше критичне навантаження буде разом з тим і другим критичним. Подальше зростання $\tau_{(p)}(t)$ понад $\overset{**}{\tau}_{(p)}$ призведе до появи ненульового УКІН (4.6).

У випадку №2 (Додаток Б) діє одна зосереджена сила $Q_{2(p)}(t)$ $\left(Q_{2(1)}(t)>0\right)$, прикладена у верхньому півпросторі $z_{*2}=id\in S_2$.

Тоді з (3.65) – (3.73) при урахуванні $P_k=P=0$ отримуємо вирази для стрибка переміщень, потенціалу $g_{6(p)}(z,t)$, КІН, критичних значень навантаження та поточного розміру зони проковзування на $p-$му кроці навантажування:

$$\begin{gathered}f_{6(p)}(x,t)=\frac{1}{\pi C\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}}\left\{-\pi\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}x+p_1Q_{2(p)}(t)\,\mathrm{Im}\frac{\sqrt{{z_{*2}}^2-a^2_{(p)}}}{x-z_{*2}}\right\}=\\=\frac{x}{C\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}}\left(-\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma^{\infty}_{yy}+\frac{p_1Q_{2(p)}(t)\sqrt{a^2_{(p)}+d^2}}{\pi\left(x^2+d^2\right)}\right)\quad\left(x\in[-a_{(p)};a_{(p)}]\right);\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}[w]_{(p)}(x,t)=\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{2\pi C}\ln\frac{\sqrt{a^2_{(p)}+d^2}-\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}}{\sqrt{a^2_{(p)}+d^2}+\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}}+\\+\frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\sqrt{a^2_{(p)}-x^2}\qquad\left(|x|\le a_{(p)}\right);\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$g_{6(p)}\left(z,t\right)=-\frac{p_1 Q_{2(p)}(t)}{\pi C\left(z^2+d^2\right)}\left(\frac{z\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}{\sqrt{z^2-a_{(p)}^2}}-d\right)-$$
$$-\frac{1}{C}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{z^2-a_{(p)}^2}}\right)\qquad\left(z\notin[-a_{(p)};\,a_{(p)}]\right); \tag{4.10}$$

$$K_{3(p)}(t)=-\sqrt{\pi a_{(p)}}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}+\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_1 Q_{2(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^2+d^2}}. \tag{4.11}$$

Прирівнюючи (4.11) до нуля, отримуємо умову початку проковзування на $(p)$-му кроці навантажування:

$$\left|Q_{2(p)}(t)\right|\ge Q_{2(p)}^{*}=\frac{\pi d\alpha\left|\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}\right|}{p_1}, \tag{4.12}$$

та поточний розмір зони проковзування:

$$a_{(p)}(t)=d\sqrt{\frac{Q_{2(p)}^2(t)}{Q_{2(p)}^{*2}}-1}. \tag{4.13}$$

Тут враховано, що $\varepsilon_{(p)}$ визначається співвідношенням (3.77) при $Q_{2(1)}(t)>0$ і знакозмінному навантаженні. Покладаючи в (4.13) $a_{(p)}(t)=b$ отримуємо вираз для другого критичного значення навантаження

$$Q_{2(p)}(t)\ge Q_{2(p)}^{**}=Q_{2(p)}^{*}\sqrt{\frac{b^2+d^2}{d^2}}. \tag{4.14}$$

Вираз для розсіяної енергії отримуємо з (3.72) після обчислення відповідних інтегралів:

$$W_{(p)}^{d}(t)=-\frac{\alpha}{C}\left|-\frac{\pi\alpha\varepsilon_{(p)}a_{(p)}^{2}\sigma_{yy}^{\infty\,2}}{2}+\sigma_{yy}^{\infty}p_{1}Q_{2(p)}(t)\left(\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}-d\right)\right|. \qquad (4.15)$$

На рис. 4.2 зображено залежність розміру зони проковзування $a_{(p)}/b$ на $(p)$-ому кроці симетричного циклу $4Q_{(1)}^{*}\rightarrow-4Q_{(1)}^{*}\rightarrow4Q_{(1)}^{*}\rightarrow-4Q_{(1)}^{*}\rightarrow\ldots$ від знерозміреної величини прикладеної сили $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}$. Зауважимо, що при $Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}\leq1$ проковзування відсутнє завжди, а при $1\leq Q_{(p)}(t)/Q_{(1)}^{*}\leq2$ воно відбудеться лише на першому (початковому) кроці. Зона проковзування монотонно зростає синхронно зі збільшенням навантаження, причому інтенсивність зростання обернено пропорційна відносній віддалі $d/b$ точки прикладання зсувної сили до тріщини.

Для виявлення якісних тенденцій розглянемо вплив різних механічних параметрів задачі, зокрема коефіцієнта тертя $\alpha$, співвідношення модулів зсуву матеріалів $G=G_1/G_2$, інтенсивності прикладеної зсувної сили $Q_{2(1)}(t)$, на характер зміни стрибка переміщень $[w]_{(1)}$, розсіяння енергії $W_{(1)}^{d}(t)$ та зміну УКІН у порівнянні з класичним УКІН у разі умови гладкого контакту $K_{3(p)}/K_{3(1)}^{0}$.

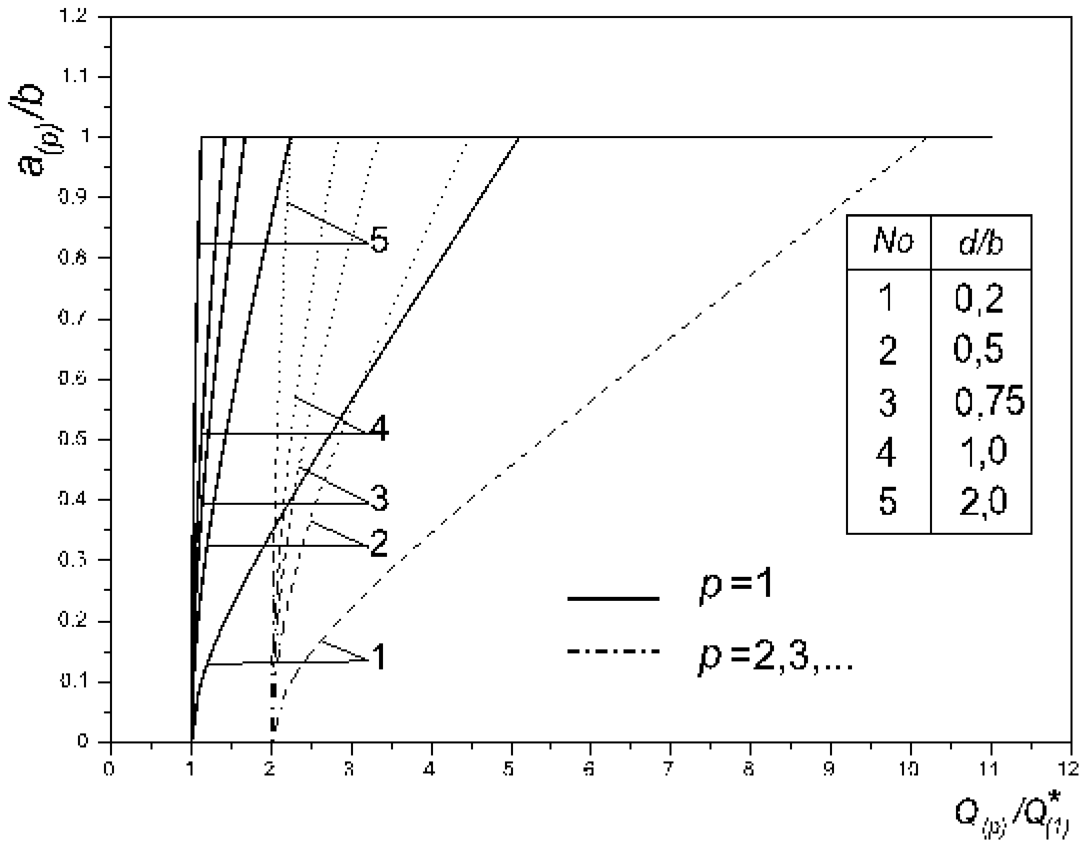



Рис. 4.2. Залежність розміру зони проковзування від параметрів навантаження упродовж циклу

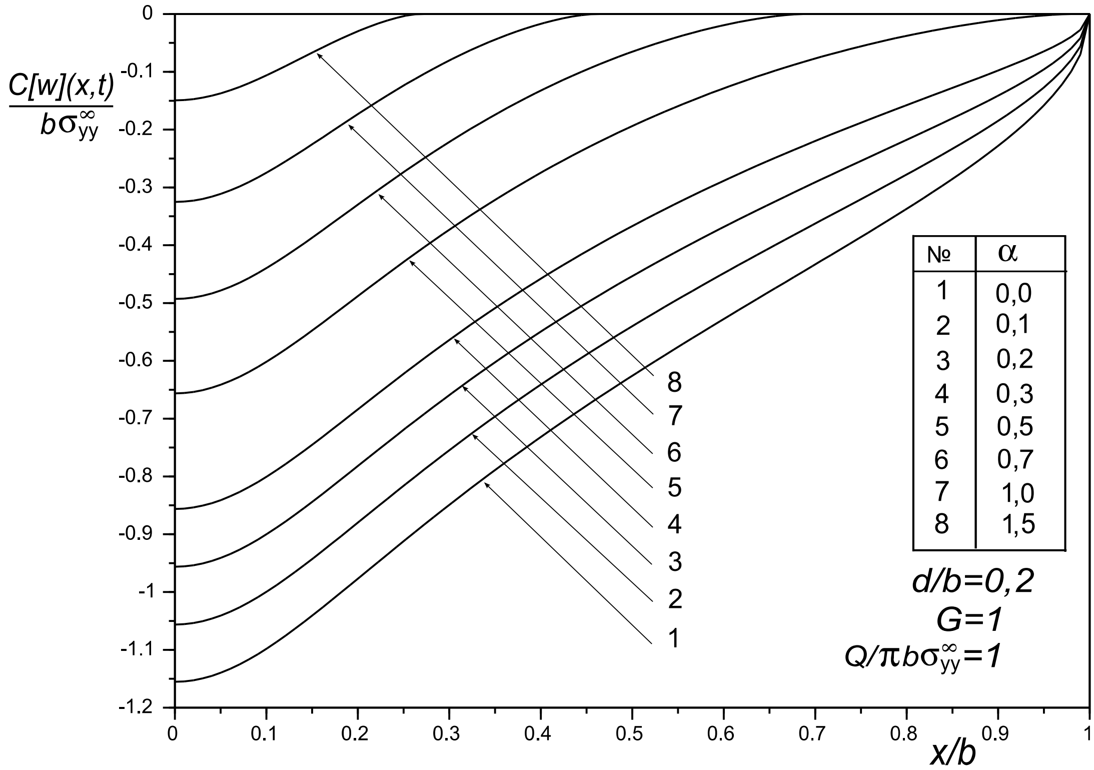



Рис. 4.3. Залежність стрибка переміщень від коефіцієнту тертя

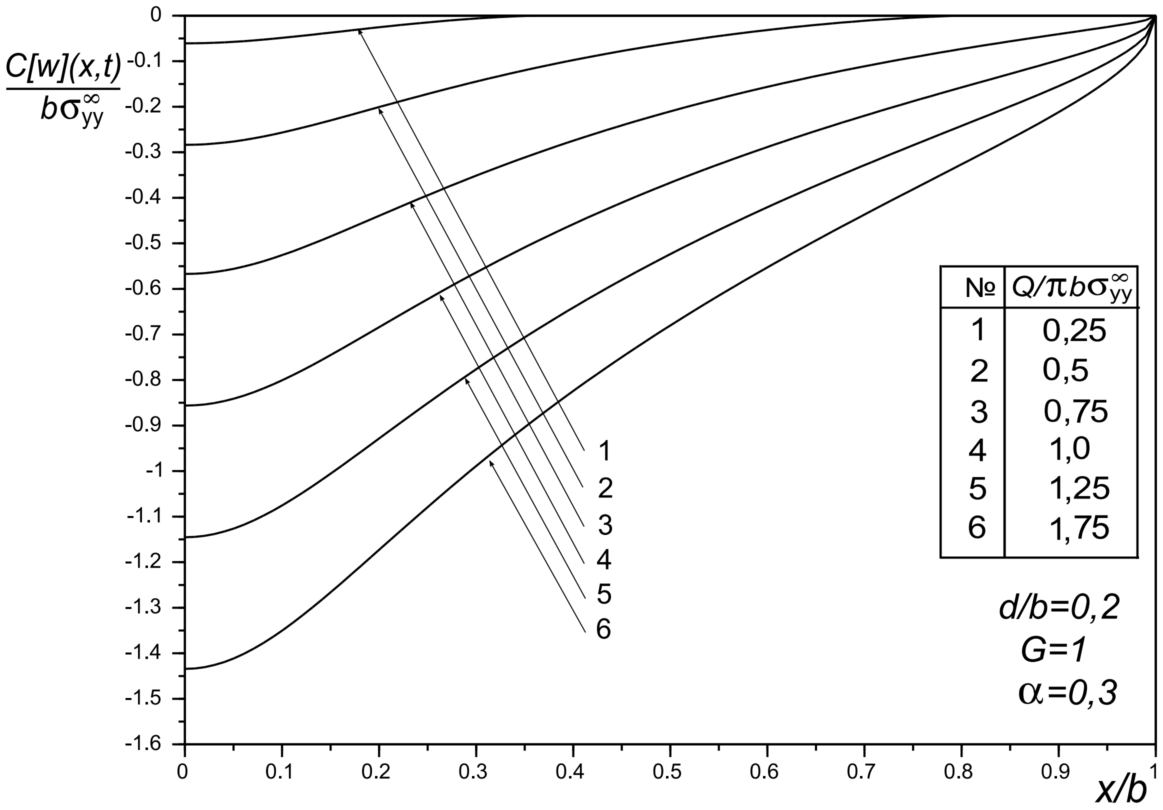



Рис. 4.4. Залежність стрибка переміщень від інтенсивності сили

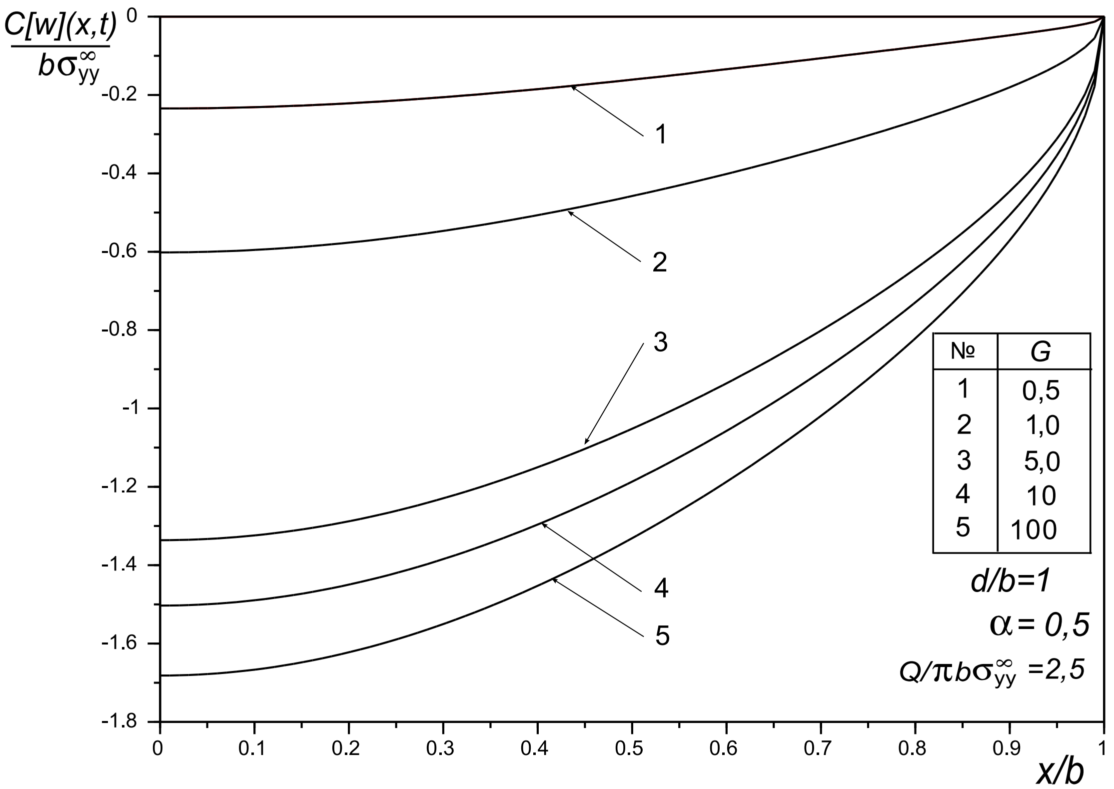



Рис. 4.5. Залежність стрибка переміщень від співвідношення зсувних властивостей матеріалів

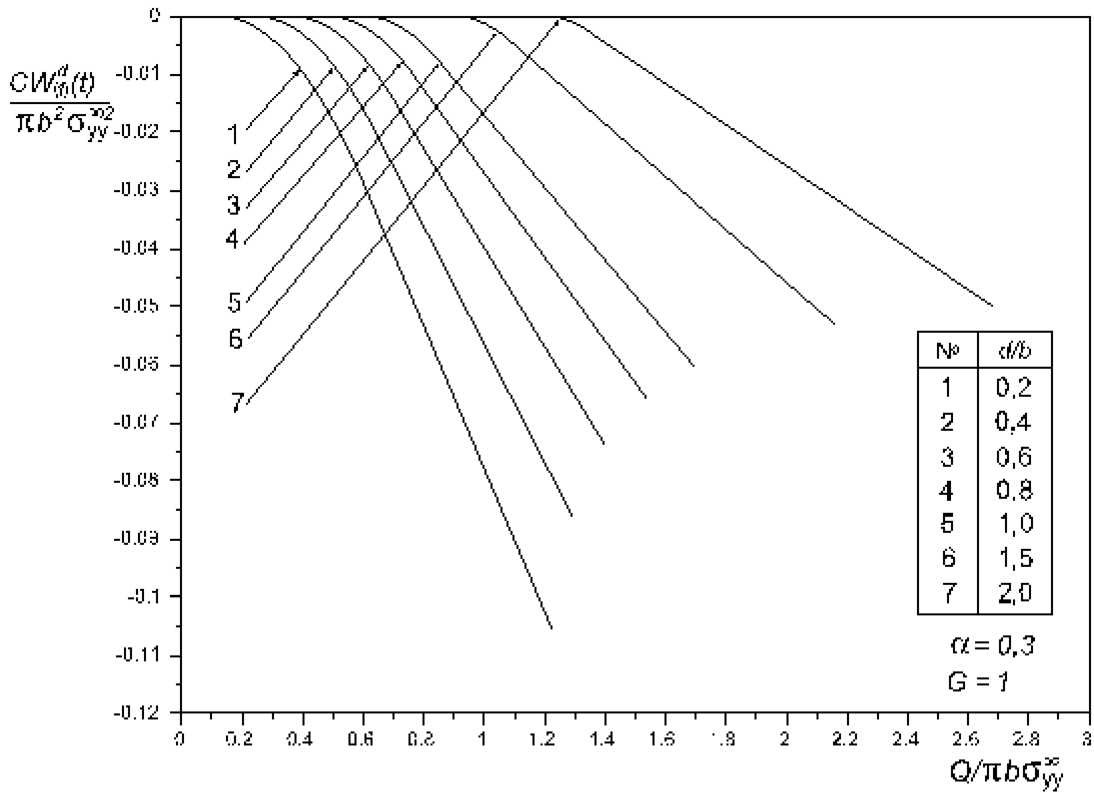



Рис. 4.6. Залежність поведінки дисипації енергії від віддалі точки прикладання зсувної сили до тріщини

На рис. 4.3 – 4.5 відображено зміну знерозміреного стрибка переміщень $C[w](x,t) / b\sigma^{\infty}_{yy}$ у залежностях від коефіцієнту тертя $\alpha$, знерозміреної інтенсивності прикладеної зсувної сили $Q_{2(1)}(t) / \pi b\sigma^{\infty}_{yy}$, її відносної віддалі від тріщини $d/b$ та відношення модулів зсуву матеріалів $G = G_1/G_2$ відповідно. Якщо зростання коефіцієнту тертя $\alpha$ зменшує стрибок переміщень (рис. 4.3), то збільшення інтенсивності прикладеної зсувної сили $Q_{2(1)}(t) / \pi b\sigma^{\infty}_{yy}$ його навпаки збільшує (рис. 4.4), причому тим сильніше, чим більш порівняно більш жорстким є півпростір $S_2$, де прикладається зсувна сила (рис. 4.5).

Збільшення відносної віддалі від тріщини $d/b$ зменшує локальність її впливу на НДС задачі, а також зменшує дисипацію енергії $CW^{d}_{(1)}(t) / \pi b^2\sigma^{\infty 2}_{yy}$ (рис. 4.6), швидкість зростання якої істотно залежить від коефіцієнту тертя: чим більше тертя, тим швидше (як і треба було сподіватися) розсіюється енергія (рис. 4.7).

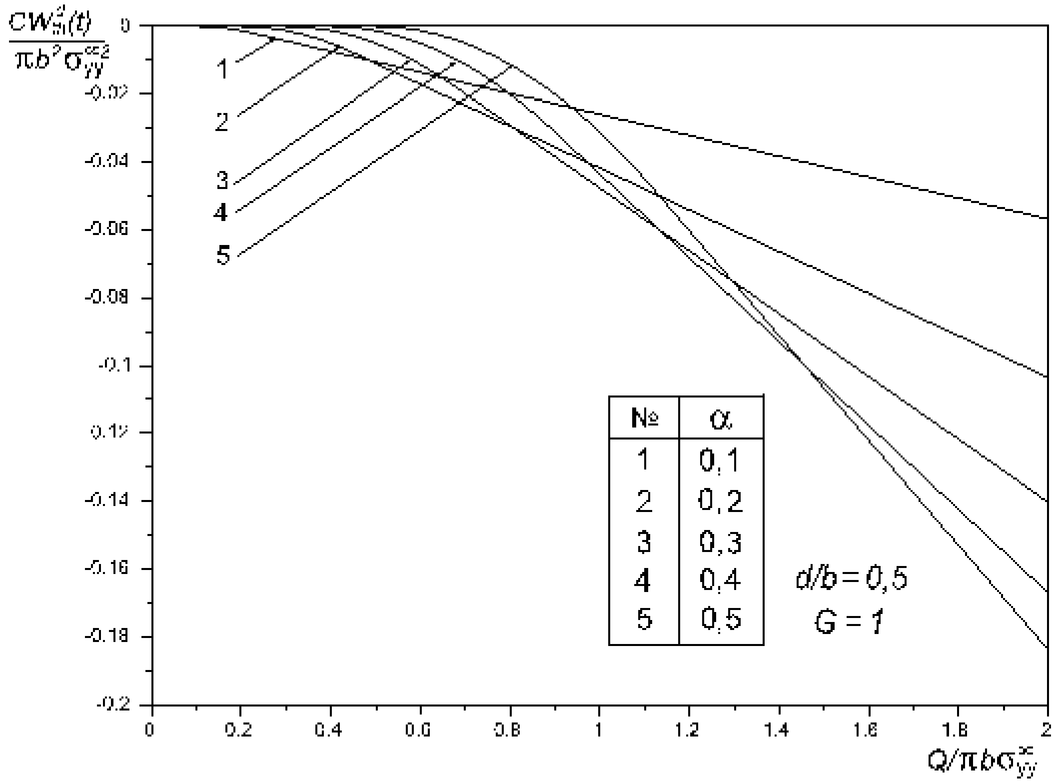



Рис. 4.7. Залежність поведінки дисипації енергії від коефіцієнту тертя

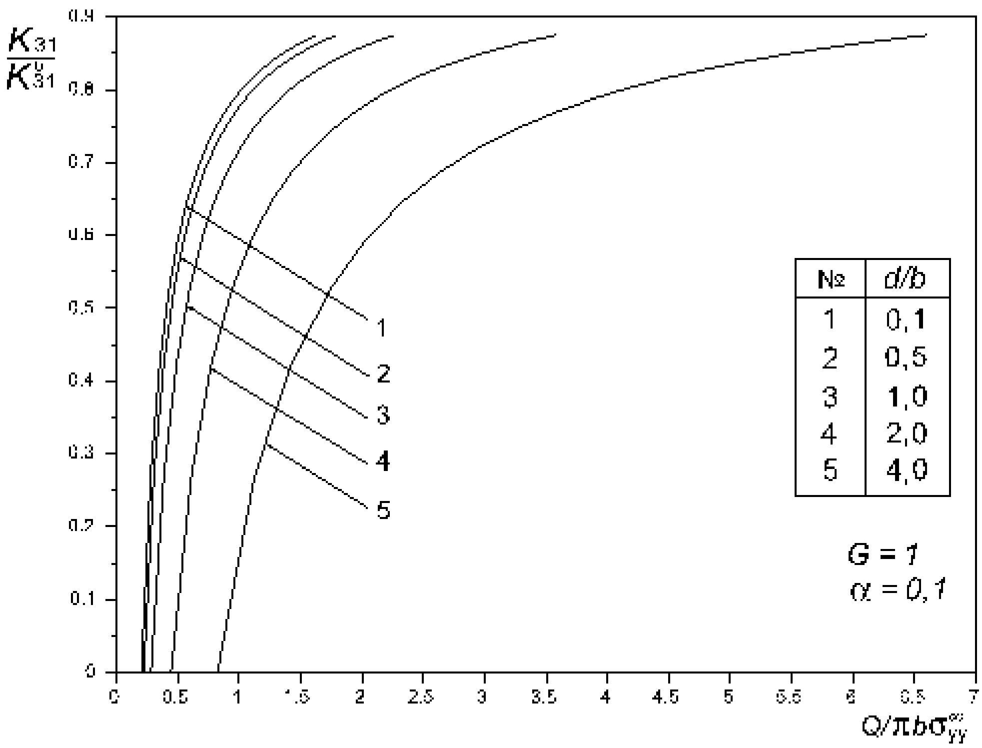



Рис. 4.8. Залежність співвідношення УКІН від віддалі точки прикладання зсувної сили до тріщини

На рис. 4.8 – 4.10 зображено вплив відносної віддалі від тріщини $d/b$, коефіцієнту тертя $\alpha$ та співвідношення модулів зсуву матеріалів $G = G_1/G_2$ відповідно на зміну УКІН у порівнянні з класичним УКІН для гладкого контакту $K_{3(p)}/K^0_{3(1)}$. **Загальний висновок:** збільшення віддалі $d/b$, коефіцієнту тертя $\alpha$ та відносної жорсткості півпростору $S_2$, де прикладається зсувна сила, істотно зменшують УКІН та є вигідними з погляду потреби забезпечення міцності конструкції.

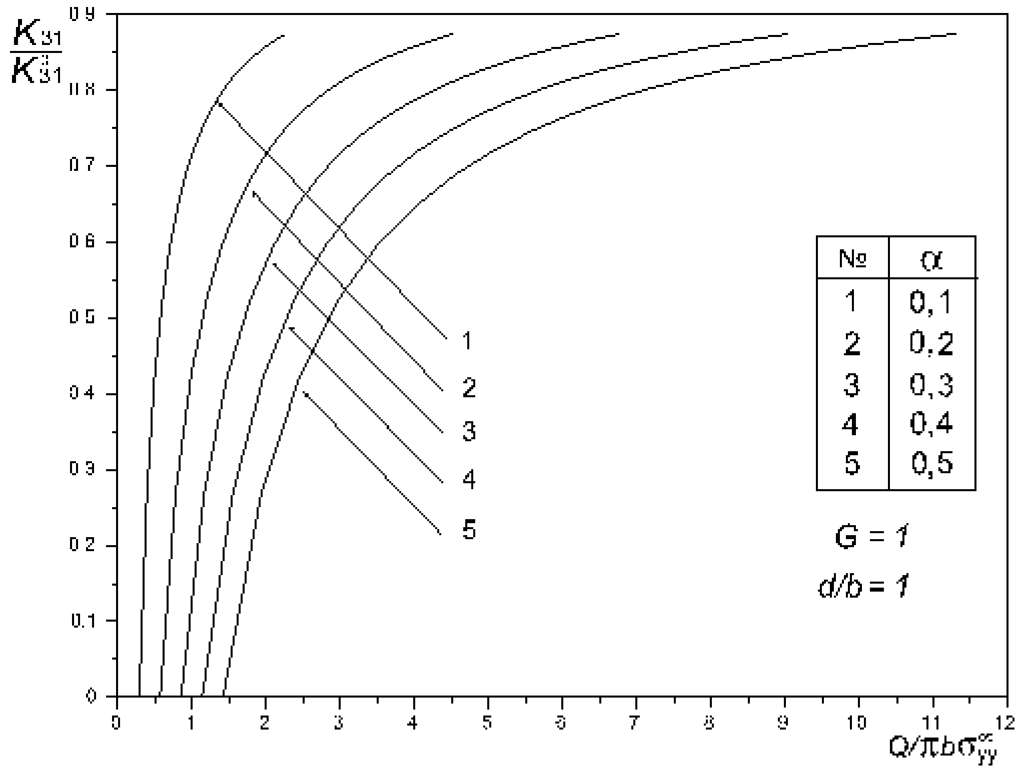



Рис. 4.9. Залежність співвідношення УКІН від коефіцієнту тертя

На рис. 4.11 – 4.12 відображено еволюцію знерозміреного стрибка переміщень упродовж згаданого симетричного циклу навантаження. У правій частині рис. 4.11 – 4.12 зображено вигляд сумарного (накопиченого) стрибка переміщень на 2-ому (4, 6, …) та 3-ому (5, 7,…) кроках у процесі зміни навантаження (рис. 4.11) чи відносної віддалі точки прикладання зсувної сили $d/b$ (рис. 4.12). Добре помітно, що в момент повернення сумарного навантаження в стартову точку зберігається ненульовий сумарний стрибок переміщень.

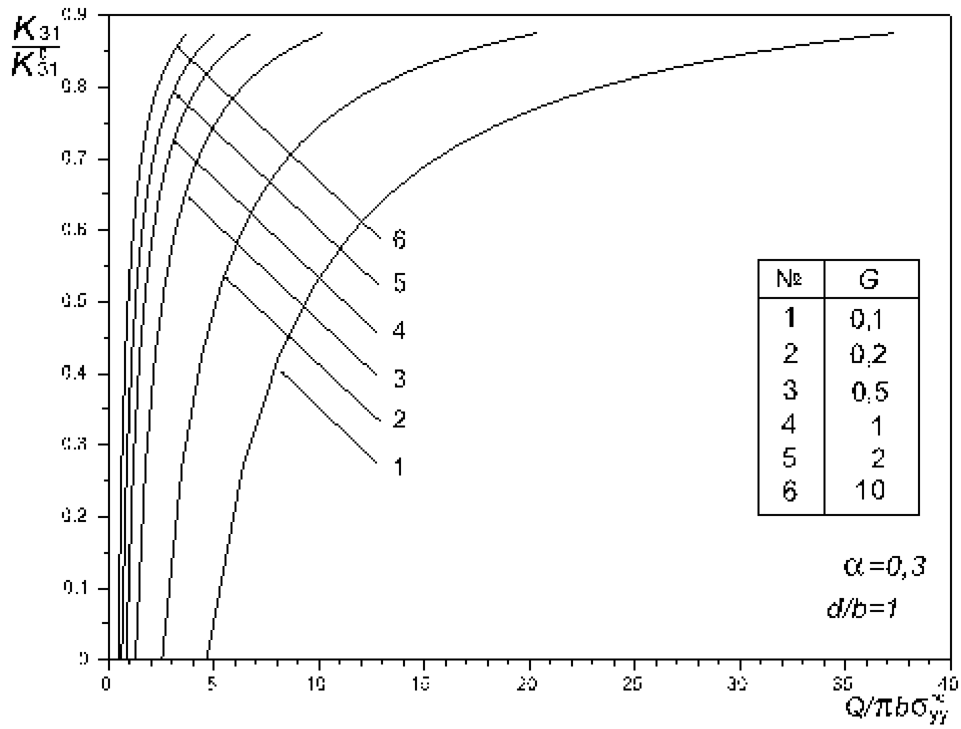



Рис. 4.10. Залежність УКІН від зсувних властивостей матеріалів

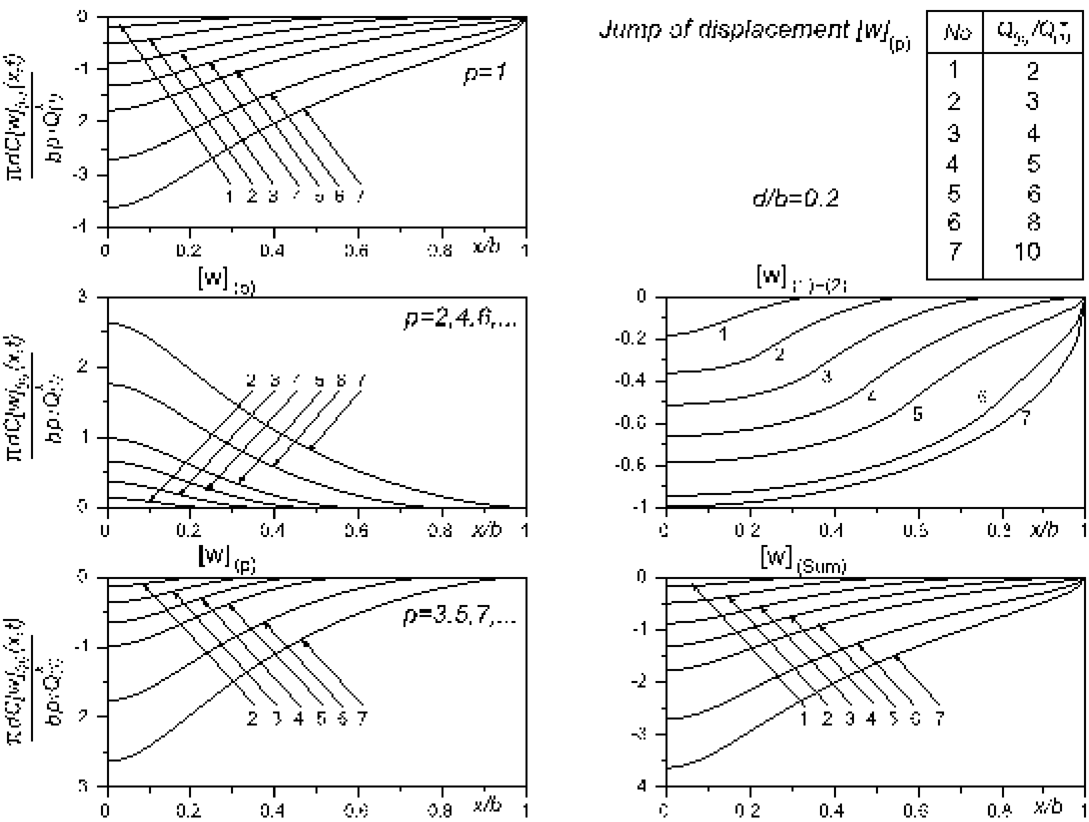



Рис. 4.11. Еволюція форми стрибка переміщень упродовж циклу при зміні інтенсивності зсувної сили

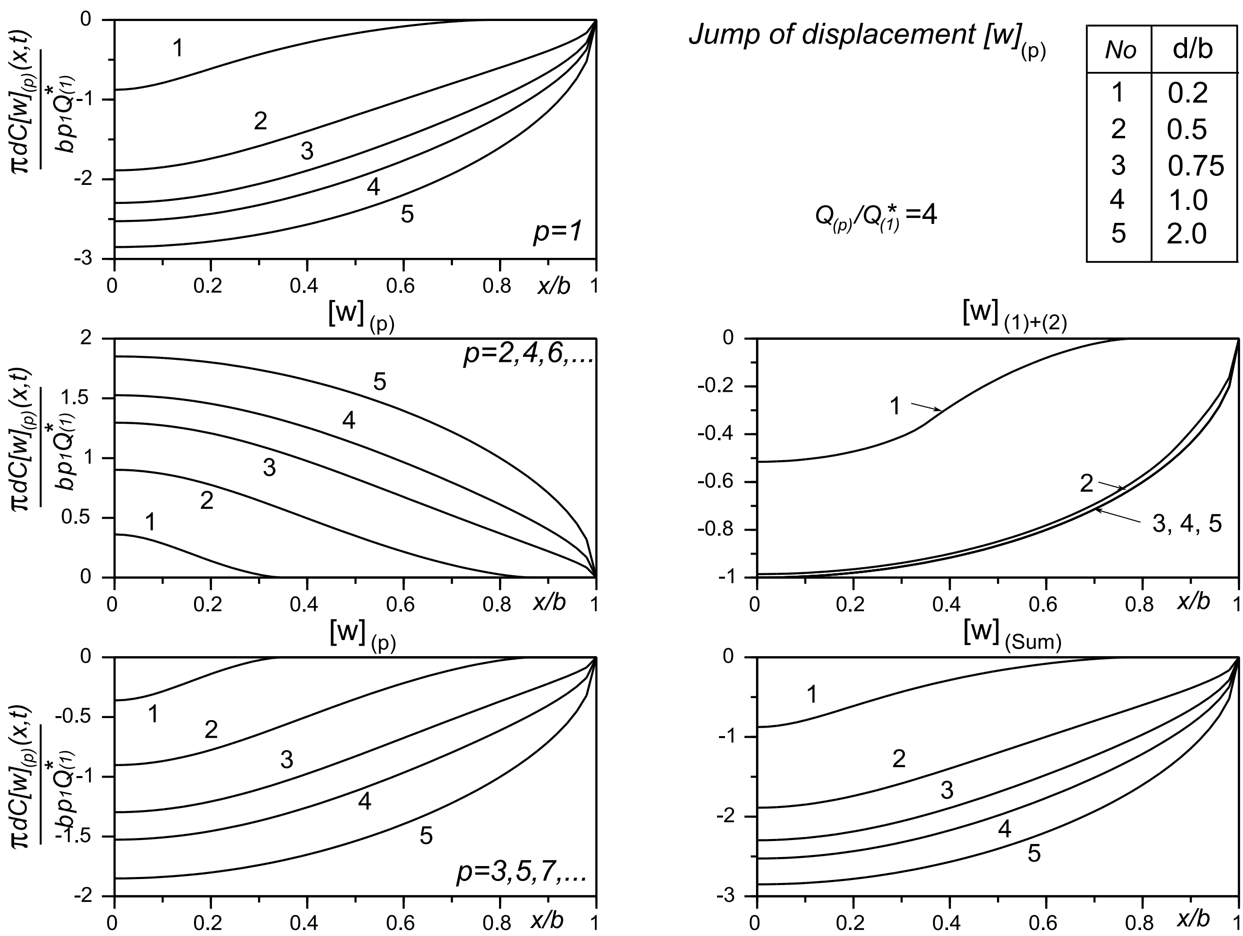



Рис. 4.12. Еволюція форми стрибка переміщень упродовж циклу при зміні віддалі точки прикладання зсувної сили

На рис. 4.13 відображено гістерезисний характер стрибка переміщень упродовж згаданого симетричного циклу навантаження зсувною силою. Рис. 4.14 відображає процес накопичення розсіяння енергії на кожному кроці розглянутого циклу зсувних навантажень. Помітно, що для появи проковзування на 2-ому та наступних кроках необхідно, щоб інтенсивність навантаження досягала вдвічі більшого критичного значення, аніж на першому кроці навантажування. На рис. 4.14 суцільна лінія – друга фаза навантажування $Q^{*}_{2(p)} \le \left|Q_{2(p)}(t)\right| \le Q^{**}_{2(p)}$; пунктир – третя фаза навантажування $Q^{**}_{2(p)} \le \left|Q_{2(p)}(t)\right|$.

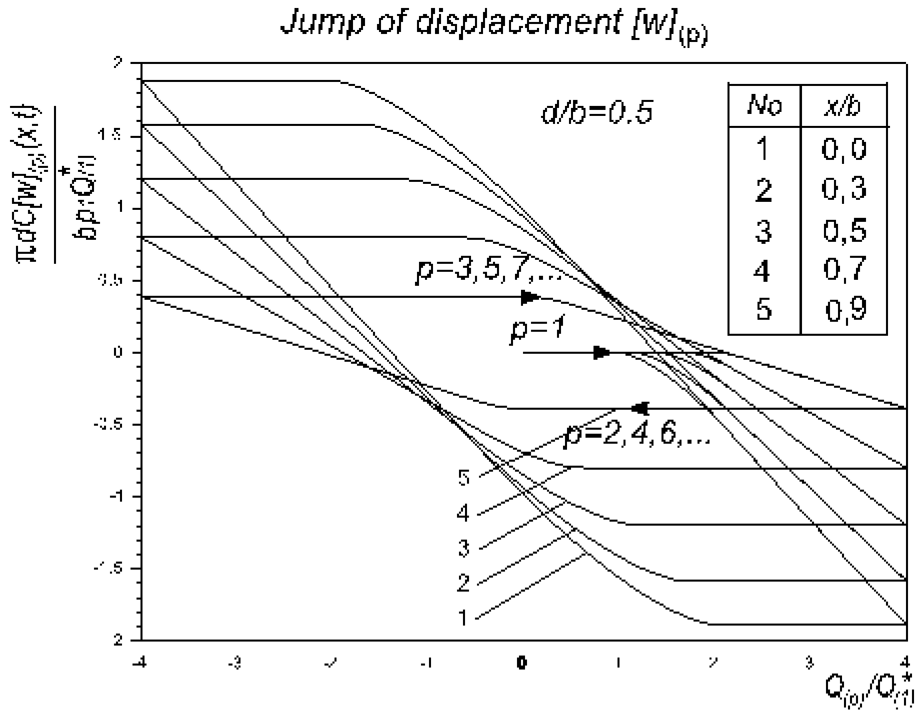



Рис. 4.13. Гістерезисний характер зміни стрибка переміщень упродовж циклу при зміні інтенсивності зсувної сили

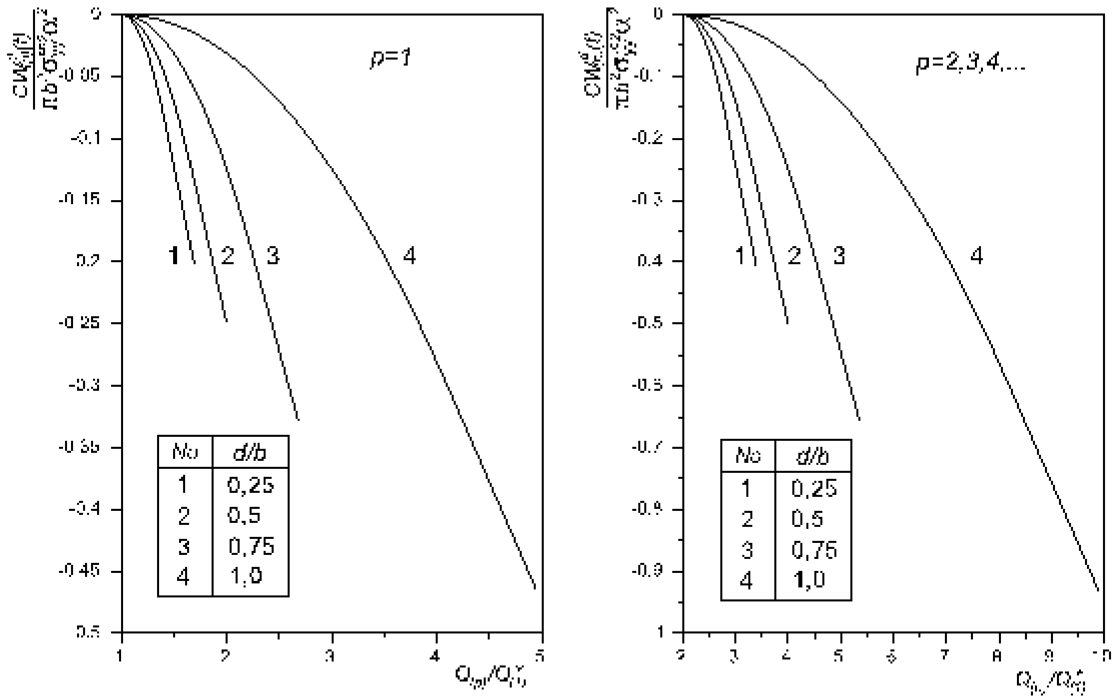



Рис. 4.14. Накопичення розсіяння енергії упродовж циклу. Суцільна лінія – друга фаза навантажування; пунктир – третя фаза навантажування.

## 4.2. Випадок пари нормальних сил стиску і різних варіантів зсувного навантаження

Нехай діють лише дотичні зсувні навантаження $\tau_{(p)}(t)$ $\left(\tau_{(1)}(t) > 0\right)$ на нескінченості (див. випадок №7, Додаток Б). Враховуючи, що $\tau_{yz}^{\max}(x)$ є змінним вздовж осі $x$ і досягає свого максимуму в т. $x = 0$ (див. випадки навантаження №7, 8, Додаток Б). Звідси можна зробити висновок, що зі зростанням зсувного навантаження проковзування почнеться в околі точок $x = \pm b$ при набутті навантаженням значення (3.46) $\tau_{(p)}^{*} = \alpha \left| \varepsilon_{(p)} \left( \sigma_{yy}^{\infty} - \frac{4P\gamma^{+}}{h} \right) \right|$ і пошириться всередину тріщини до т. $x = 0$ при досягненні другого критичного значення $\tau_{(p)}^{**} = \alpha \left| \varepsilon_{(p)} \left( \sigma_{yy}^{\infty} - \frac{4P\gamma^{+}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \right) \right|$. Подальше збільшення навантаження вже не змінить розміру зони проковзування $[-b; b]$. Тобто цей варіант навантаження коректно можна розглядати лише у формулюванні задачі з двома антисиметричними зонами проковзування.

Нехай в точці $z_{*2} = id$ верхнього півпростору діє лише одна зростаюча за амплітудою від нуля до $Q_{\max(p)}$ зосереджена сила $Q_{2(p)}(t)$ $\left(Q_{2(1)}(t) > 0\right)$ (див. випадок №9, Додаток Б).

Аналіз допустимого навантаження для цього випадку аналогічний до розглянутої в підрозділі 3.2 задачі і вимагає виконання умови (3.102). З використанням (3.65) – (3.73) та (3.74) − (3.80) можна записати явні аналітичні вирази для стрибка переміщень, КІН, критичних значень навантаження та поточного розміру зони проковзування на $p-$му кроці навантажування:

$$f_{6(p)}\left(x,t\right)=\frac{1}{\pi C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left\{-\pi\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}x+p_1Q_{2(p)}(t)\operatorname{Im}\frac{\sqrt{z_{*2}{}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{x-z_{*2}}-\right.$$

$$\left.-4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^{k+1}E_{3-k}\eta_k\gamma_k\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{z_k{}^{2}-a_{(p)}^{2}}}{x-z_k}\right)\right\}=$$

$$=\frac{x}{C\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\left(-\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}+4\pi\alpha\varepsilon_{(p)}P\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}}{x^{2}+h^{2}}+\right. \tag{4.16}$$

$$\left.+\frac{p_1Q_{2(p)}(t)\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}}{\pi\left(x^{2}+d^{2}\right)}\right)\qquad\left(x\in[-a_{(p)};a_{(p)}]\right);$$

$$\left[w\right]_{(p)}(x,t)=\frac{\alpha\varepsilon_{(p)}\sigma_{yy}^{\infty}}{C}\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}+\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{\pi C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}-\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}{\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}+\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}+$$

$$+\frac{4\alpha\varepsilon_{(p)}P\gamma^{+}}{C}\ln\frac{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}-\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}+\sqrt{a_{(p)}^{2}-x^{2}}}\qquad\left(|x|\le a_{(p)}\right), \tag{4.17}$$

З виразу (3.73) отримуємо

$$K_{3(p)}(t)=-\sqrt{\pi a_{(p)}}\varepsilon_{(p)}\alpha\left(\sigma_{yy}^{\infty}-\frac{4P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}}\right)+\sqrt{\frac{a_{(p)}}{\pi}}\frac{p_1Q_{2(p)}(t)}{\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}}. \tag{4.18}$$

Звідси, прирівнюючи до нуля УКІН (4.18), (4.17), отримуємо умову, коли на $\left(p\right)-$му кроці вперше з’являється проковзування та відповідне перше критичне значення

$$\left|Q_{2(p)}(t)\right|\ge Q_{2(p)}^{*}=\frac{\pi\alpha d}{p_1}\left|\varepsilon_{(p)}\left(\sigma_{yy}^{\infty}-\frac{4\gamma^{+}P}{h}\right)\right|. \tag{4.19}$$

Поточний розмір зони проковзування $a_{(p)}$ визначається з рівняння

$$\alpha\varepsilon_{(p)}\left(\sigma_{yy}^{\infty}-\frac{4P\gamma^{+}}{\sqrt{a_{(p)}^{2}+h^{2}}}\right)+\frac{p_1 Q_{2(p)}(t)}{\pi\sqrt{a_{(p)}^{2}+d^{2}}}=0 \tag{4.20}$$

і для випадку, коли відсутня складова $\sigma_{yy}^{\infty}$, має явний вигляд

$$a_{(p)}(t)=\sqrt{\frac{h^2 d^2\left(Q_{2(p)}(t)^2-{Q_{2(p)}^{*}}^{2}\right)}{h^2 {Q_{2(p)}^{*}}^{2}-d^2 Q_{2(p)}(t)^2}}\,. \tag{4.21}$$

Зрозуміло, що при $Q_{\max(p)}<Q_{2(p)}^{*}$ жодного проковзування на відповідному кроці навантажування немає. Покладаючи на $(p)$–му кроці у (4.20), (4.21) $a_{(p)}=b$, знаходимо друге критичне значення виникнення ненульових УКІН (сингулярних напружень) в околі кінців тріщини

$$Q_{2(p)}^{**}=\frac{\pi\alpha\sqrt{d^2+b^2}}{p_1}\left|\varepsilon_{(p)}\left(\sigma_{yy}^{\infty}-\frac{4\gamma^{+}P}{\sqrt{h^2+b^2}}\right)\right|, \tag{4.22}$$

або, коли відсутня складова $\sigma_{yy}^{\infty}$, –

$$Q_{2(p)}^{**}=\frac{4\pi\alpha\left|\varepsilon_{(p)}\right|\gamma^{+}P}{p_1}\frac{\sqrt{d^2+b^2}}{\sqrt{h^2+b^2}}=Q_{2(p)}^{*}\frac{h\sqrt{d^2+b^2}}{d\sqrt{h^2+b^2}}. \tag{4.23}$$

Отже, приймаючи в загальному випадку значення $Q_{\max(p)}\geq Q_{2(p)}^{**}$, отримуємо таку картину зміни НДС на $(p)$–му кроці багатокрокового змінюваного навантажування-розвантажування:

- при $Q_{2(p)}(t)\leq Q_{2(p)}^{*}$ — проковзування відсутнє:

$$\left[w\right]_{(p)}(x,t) = g_{6(p)}(z,t) \equiv 0;$$

- при $Q^{*}_{2(p)} \le Q_{2(p)}(t) \le Q^{**}_{2(p)}$ стрибок $\left[w\right]_{(p)}(x,t)$ та поточний розмір $a_{(p)}(t)$ визначаються з (4.17), (4.21), а вираз для обчислення розсіяної енергії має вигляд:

$$W^{d}_{(p)}(t) = -\frac{4\alpha}{C}\left| -\frac{\pi a^{2}_{(p)}\alpha\sigma^{\infty 2}_{yy}\varepsilon_{(p)}}{8} + 2\pi P\gamma^{+}\varepsilon_{(p)}\alpha\sigma^{\infty}_{yy}\left(\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}} - h\right) + \right.$$
$$+\frac{\sigma^{\infty}_{yy}}{4}\left(\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}} - d\right)p_{1}Q_{2(p)}(t) - \pi P^{2}\gamma^{+2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}}{h} - \tag{4.24}$$
$$\left. -\frac{\pi P\gamma^{+}}{2}\ln\frac{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}} + hd + a^{2}_{(p)}}{\sqrt{h^{2}+a^{2}_{(p)}}\sqrt{d^{2}+a^{2}_{(p)}} + hd - a^{2}_{(p)}}\,p_{1}Q_{2(p)}(t)\right|;$$

- при $Q^{**}_{2(p)} \le Q_{2(p)}(t) \le Q_{\max(p)} \le Q^{***}_{2(p)}$ у формулах (4.17), (4.24) слід замінити $a_{(p)}(t)$ на $b$, замість (4.21) маємо $a_{(p)} = b$ відтак з (4.17) визначаємо ненульовий КІН.

Аналіз випадку №9 у підрозділі **3.2** повністю прийнятний для даного випадку навантаження. Зазначимо лише, що якщо обрати значення параметрів $h = d$, то існує вироджений випадок $Q^{*}_{2(p)} = Q^{**}_{2(p)} = Q^{***}_{2(p)}$ миттєвого поширення зони проковзування на всю область $L'$ щойно $Q_{2(p)}(t)$ досягне значення $Q^{*}_{2(p)}$. З урахуванням співвідношення $1 \le \dfrac{h\sqrt{d^{2}+b^{2}}}{d\sqrt{h^{2}+b^{2}}} \le \dfrac{h}{d}$ неважко помітити, що зона проковзування пошириться на всю тріщину ще до того, як $Q_{2(p)}(t)\big/Q^{*}_{2(p)}$ досягне значення $h/d$.

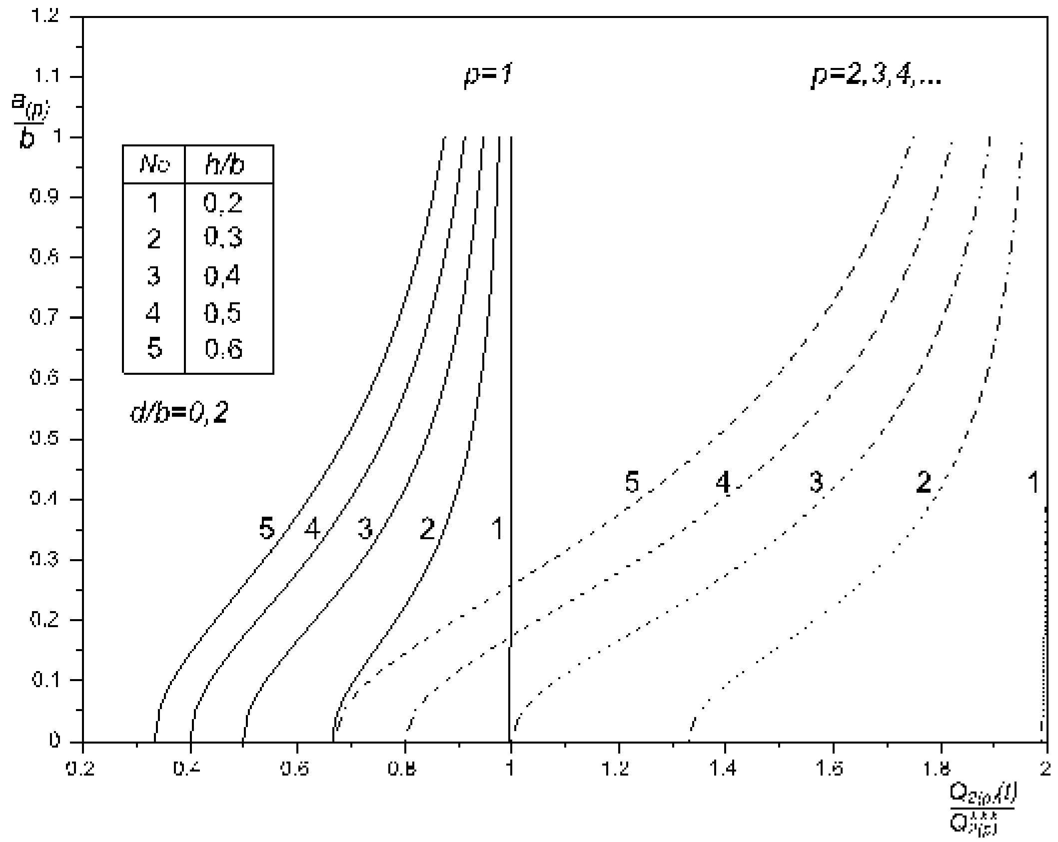



Рис. 4.15. Залежність розміру зони проковзування від координат точок прикладання зосереджених сил протягом циклу

Для числового аналізу введемо в розгляд знерозмірені величини: $a_{(p)}/b$, $x/b$, $d/b$, $h/b$ – зведені розмір зони проковзування, координата $x$ та віддалі від площини тріщини точок прикладання зосереджених зсувної та притискних сил відповідно; $Q_{2(p)}(t)/Q_{2(1)}^{***}$ та $Q_{2(p)}(t)/Q_{2(1)}^{*}$ – зведені абсолютна та відносна інтенсивність зсувної сили; $[w]_{(p)}(x)C/2\alpha\gamma^{+}P$, $W_1^d(t)C/8\pi\gamma^{+2}P^2$ та $K_{3(p)}\sqrt{b}/4\sqrt{\pi}\alpha\gamma^{+}P$ – зведені стрибок переміщень, розсіяння енергії та УКІН відповідно.

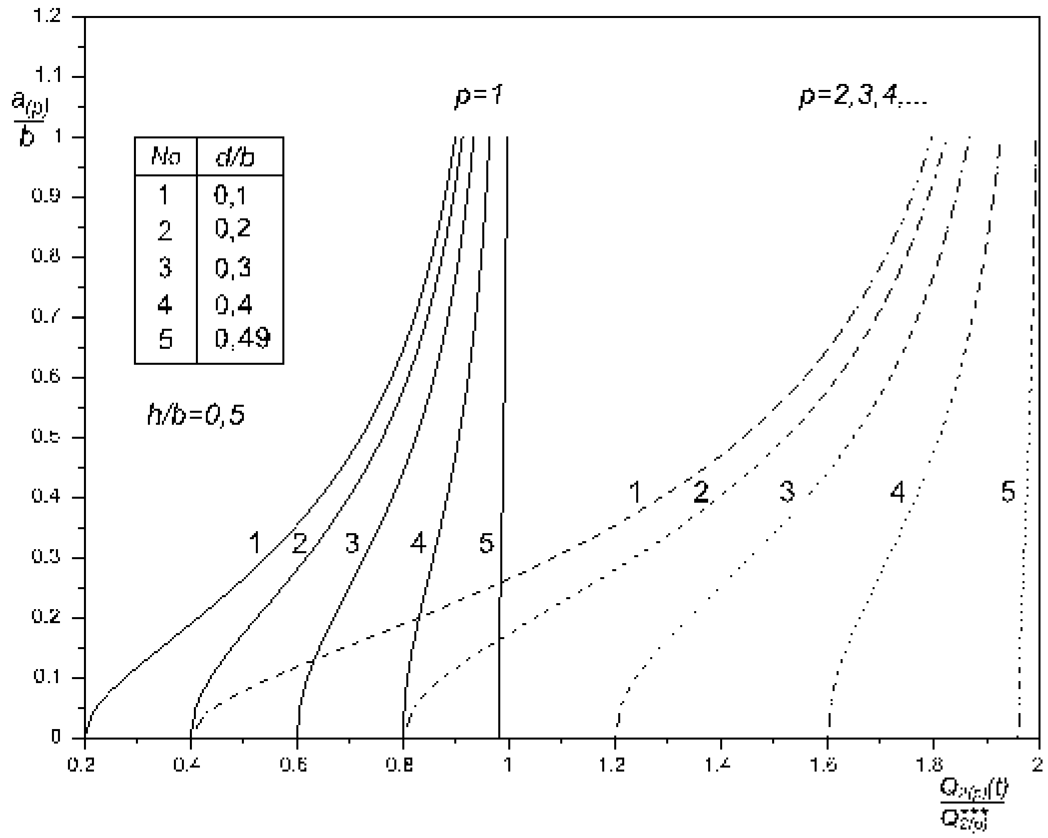



Рис. 4.16. Залежність розміру зони проковзування від координат точок прикладання зосереджених сил протягом циклу.

Розглянемо спочатку варіант навантаження за схемою симетричного циклу $Q_{2(1)}^{***} \to -2Q_{2(1)}^{***} \to 2Q_{2(1)}^{***} \to -2Q_{2(1)}^{***} \to \ldots$. Залежність розміру зони проковзування $a_{(p)}/b$ на $(p)$–ому кроці від зведеної абсолютної інтенсивності прикладеної сили $Q_{2(p)}(t)/Q_{2(1)}^{***}$ при різних значеннях координат $d/b,\ h/b$ і точок прикладання зосереджених сил зображена на рис. 4.15 – 4.16. Помітно, що швидкість росту зони проковзування істотно зростає при наближенні $d/b$ до $h/b$. Віддалення координати $h/b$ від тріщини (зростання $h/b$) також призводить до зростання швидкості росту $a_{(p)}/b$, хоча при цьому одночасно зростає значення критичних сил.

На рис. 4.17 зображено залежність діапазону зміни значень критичних сил від співвідношення геометричних параметрів навантаження. Добре видно, що зростання $h/b$ при фіксованому $d/b$ знижує поріг другої критичної сили одночасно істотно зменшуючи діапазон значень зсувного навантаження, при якому розмір зони зростає до максимальної величини.

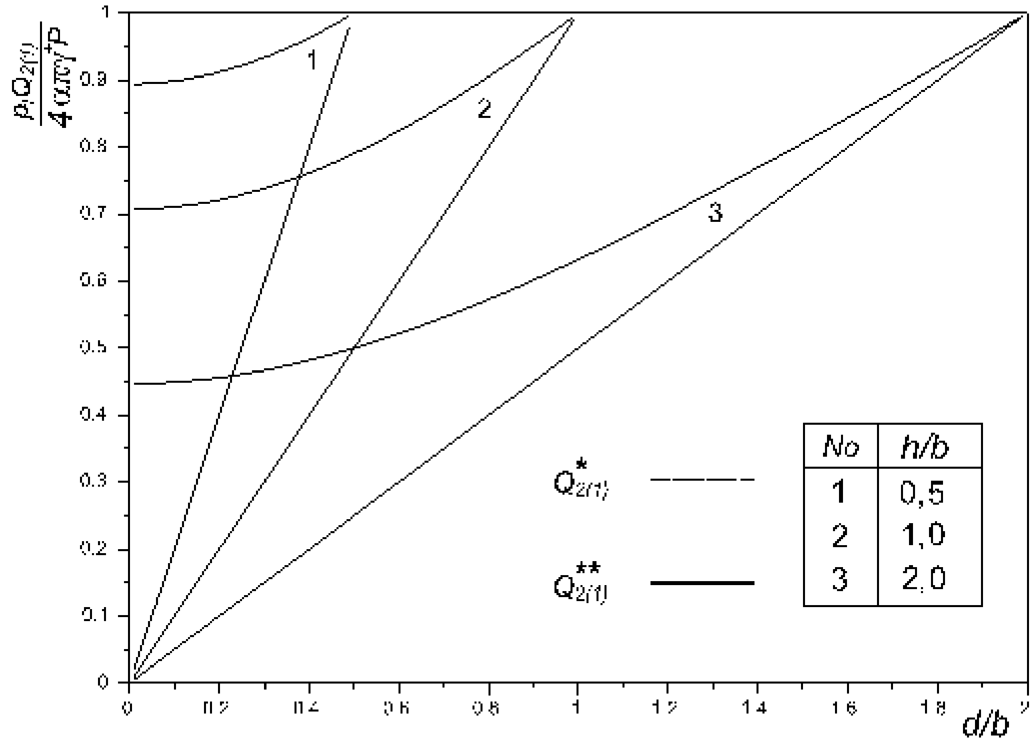



Рис. 4.17. Залежність діапазону зміни критичних значень зсувної сили від координат точок прикладання зосереджених сил упродовж циклу

На рис. 4.18 показана залежність розміру зони проковзування $a_{(p)}/b$ на $(p)$–ому кроці згаданого симетричного циклу навантаження від зведеної відносної інтенсивності прикладеної сили $Q_{2(p)}(t)/Q^{*}_{2(1)}$ при різних значеннях координат точок прикладання зосереджених сил. Помітно, що віддалення точок прикладання притискаючих зосереджених сил більше ніж на 5-тиразовий розмір тріщини, практично повторює характер зростання розміру зони проковзування при дії лише притискувальних зусиль $\sigma^{\infty}_{yy} < 0$.

Звернемо увагу на те, що при $Q_{2(p)}(t)/Q^{*}_{2(1)} \leq 1$ проковзування відсутнє завжди, а при $1 \leq Q_{2(p)}(t)/Q^{*}_{2(1)} \leq 2$ проковзування відбудеться лише на першому (початковому) кроці. Зона проковзування монотонно зростає синхронно із зростанням навантаження.

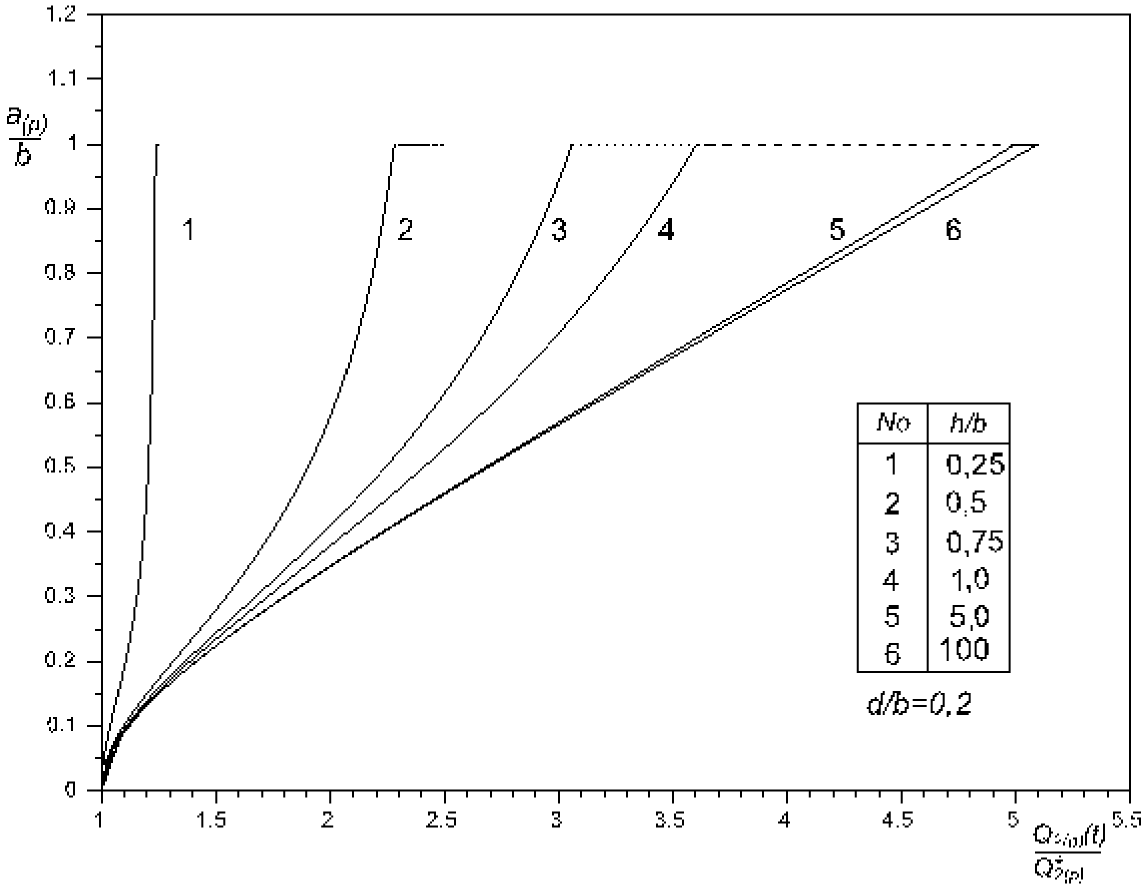



Рис. 4.18. Залежність розміру зони проковзування від координат точок прикладання притискних сил протягом циклу

Еволюція форми як локального, так і сумарного стрибка переміщень $\left[w\right]_{(p)}(x)C/2\alpha\gamma^{+}P$ в залежності від $x/h$ при різних значеннях параметрів навантажування подано на рис. 4.19 – 4.20. Помітно, що після повного циклу зміни навантаження краї тріщини не повертаються до первісного стану, зберігаючи деякий залишковий стрибок переміщень. Найбільша чутливість до змін форми стрибка переміщень спостерігається з наближенням точки прикладання зосередженої сили зсуву до тріщини. Наближення точок прикладання притискувальних зосереджених сил менше впливає на зміну форми стрибка переміщень, однак істотно змінює його амплітуду.

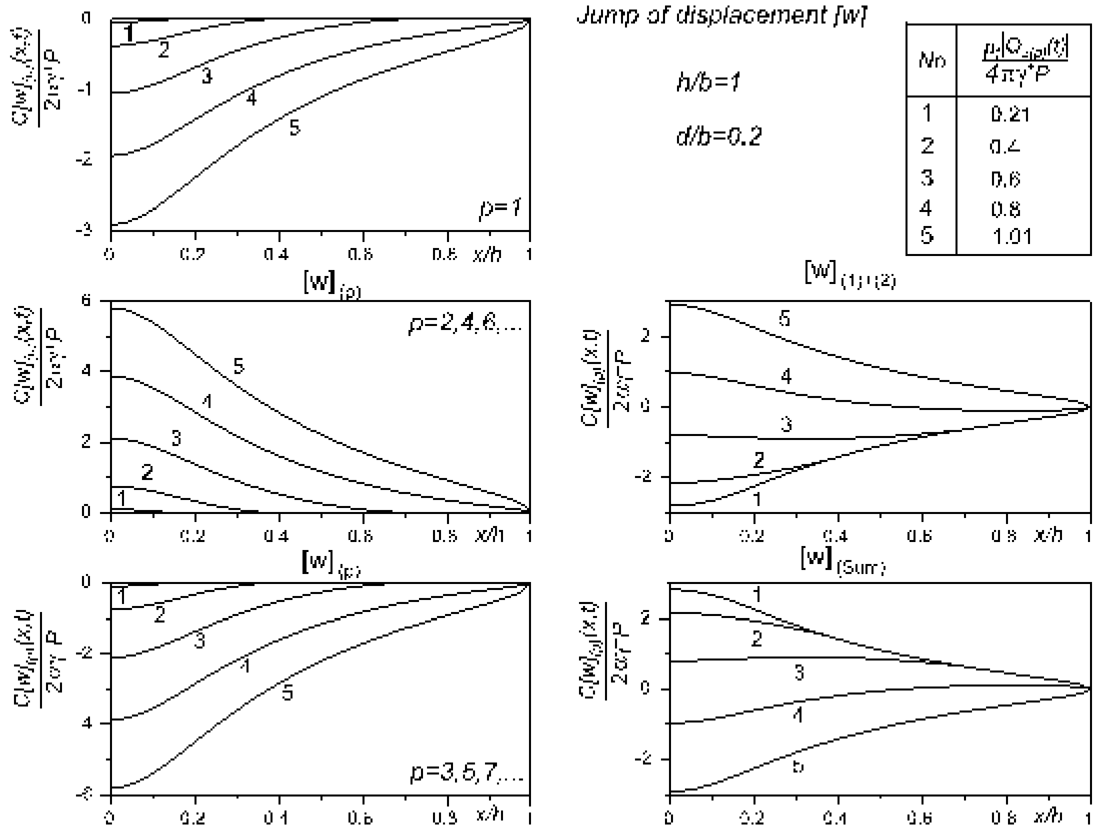



Рис. 4.19. Еволюція стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні.

Рис. 4.21 – 4.22 ілюструють гістерезисний характер сумарного стрибка переміщень $C\left[w\right]_{(p)}(x,t)\Big/2\alpha P\gamma^{+}$ у різних точках $x/h$ зони проковзування в залежності від величини навантаження в знакозмінному симетричному циклі. Добре помітно, що такий характер еволюції властивий стрибкам переміщень не лише у центрі зони проковзування, але й у всіх інших її точках.

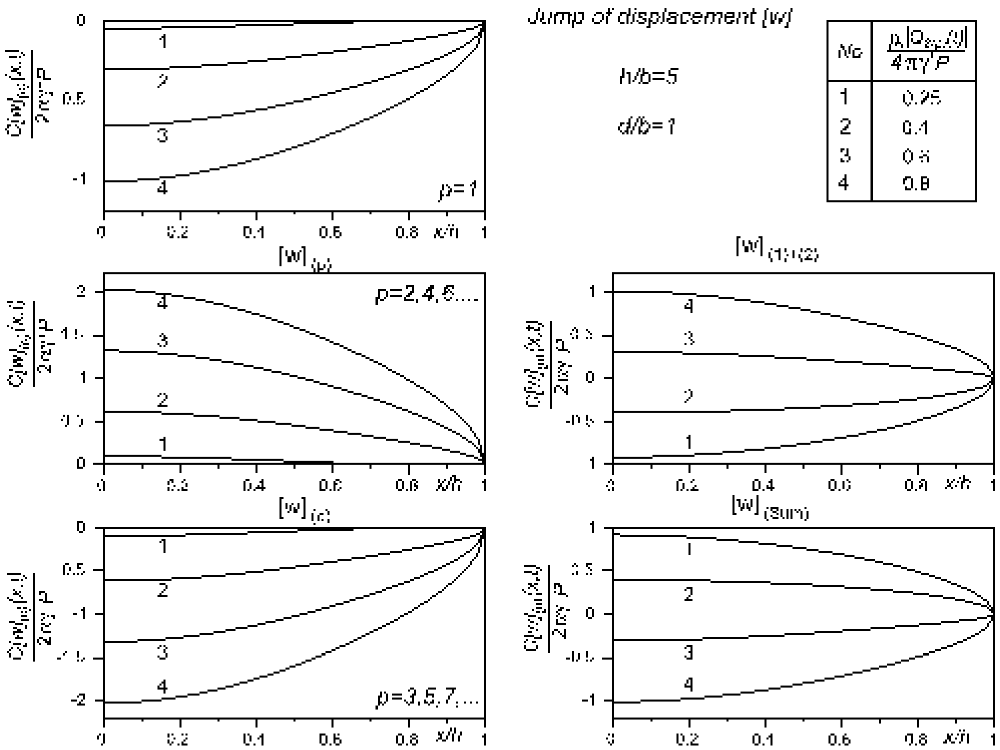



Рис. 4.20. Еволюція стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні

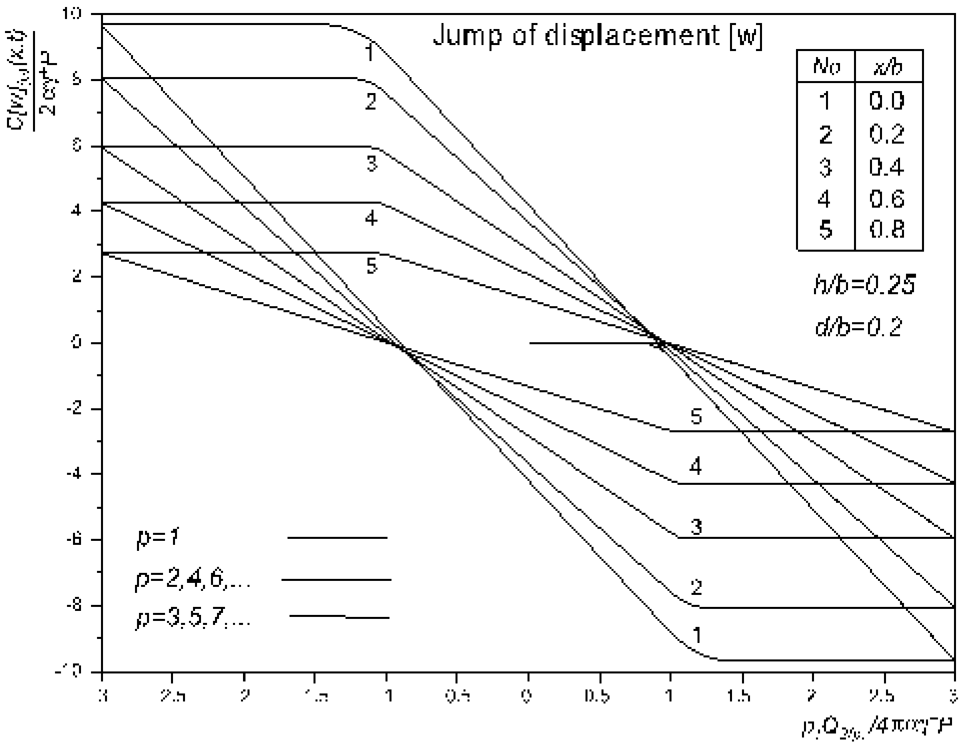



Рис. 4.21. Гістерезисний характер стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні.

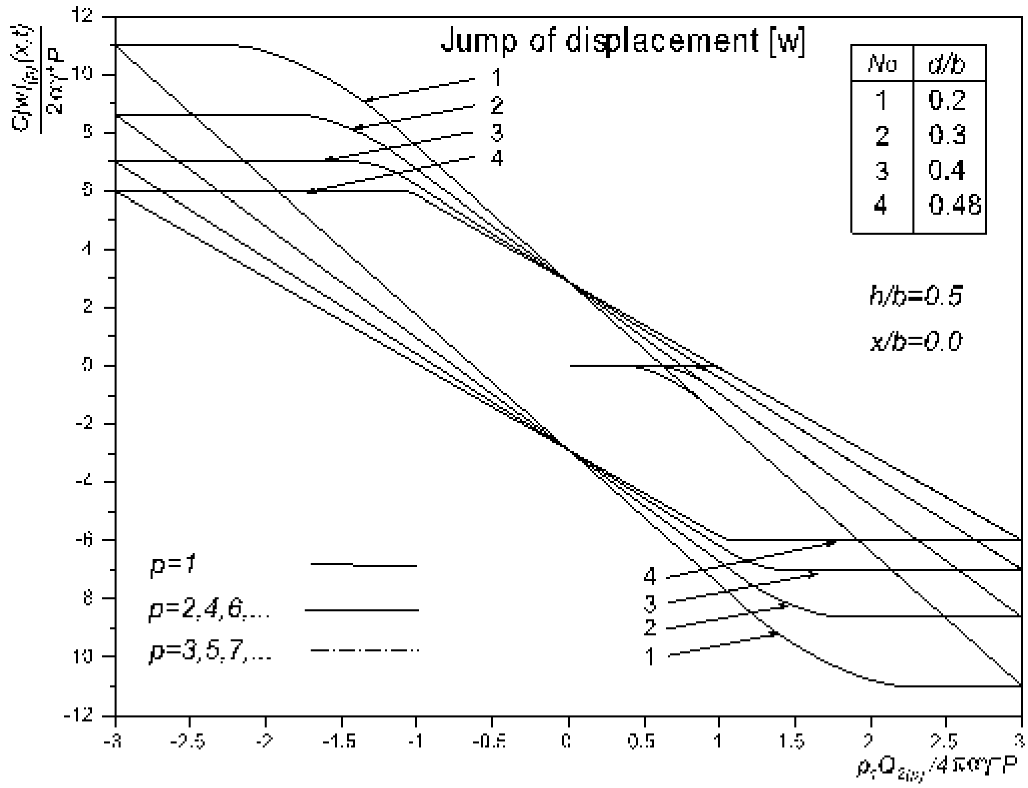



Рис. 4.22. Гістерезисний характер стрибка переміщень при симетричному циклічному навантаженні

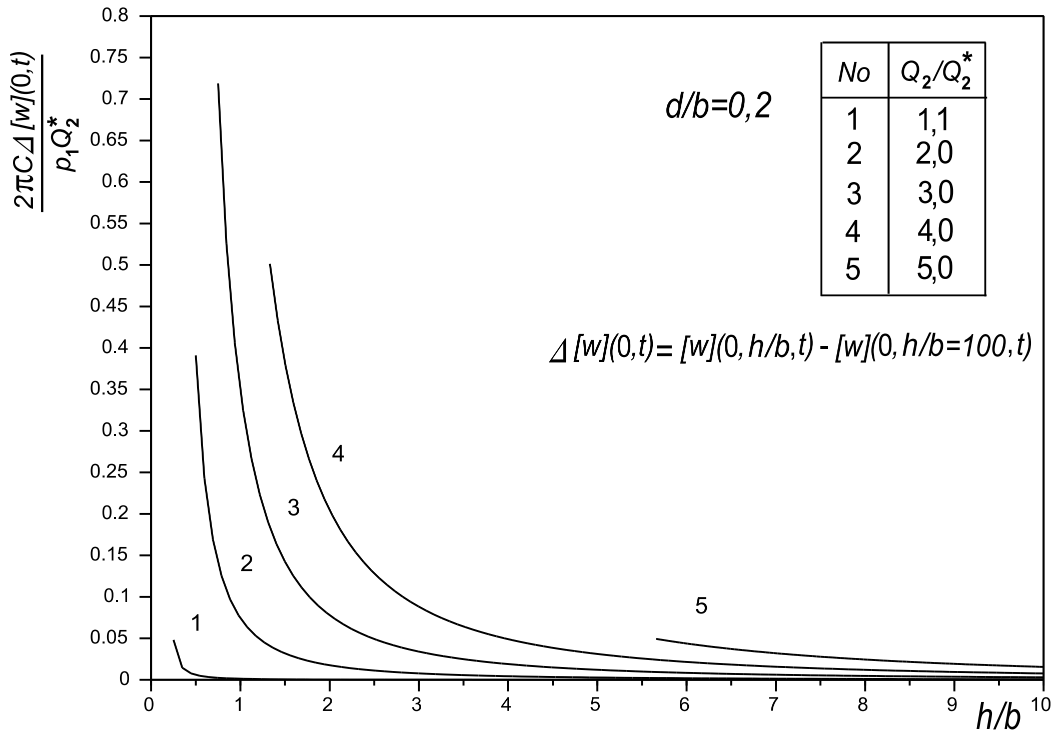



Рис. 4.23. Залежність стрибка переміщень від віддалі точок притискання

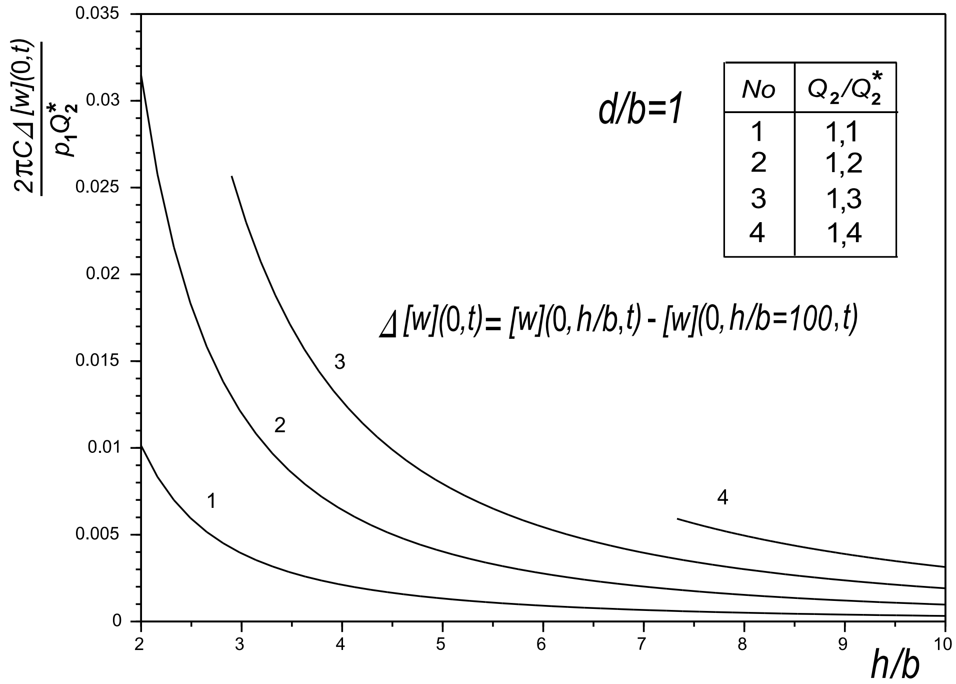



Рис. 4.24. Залежність стрибка переміщень від віддалі точок притискання

На рис. 4.23 – 4.25 відображена тенденція до затухання впливу віддалі притискаючих сил (в абсолютному вимірі та у %) на стрибок переміщень.

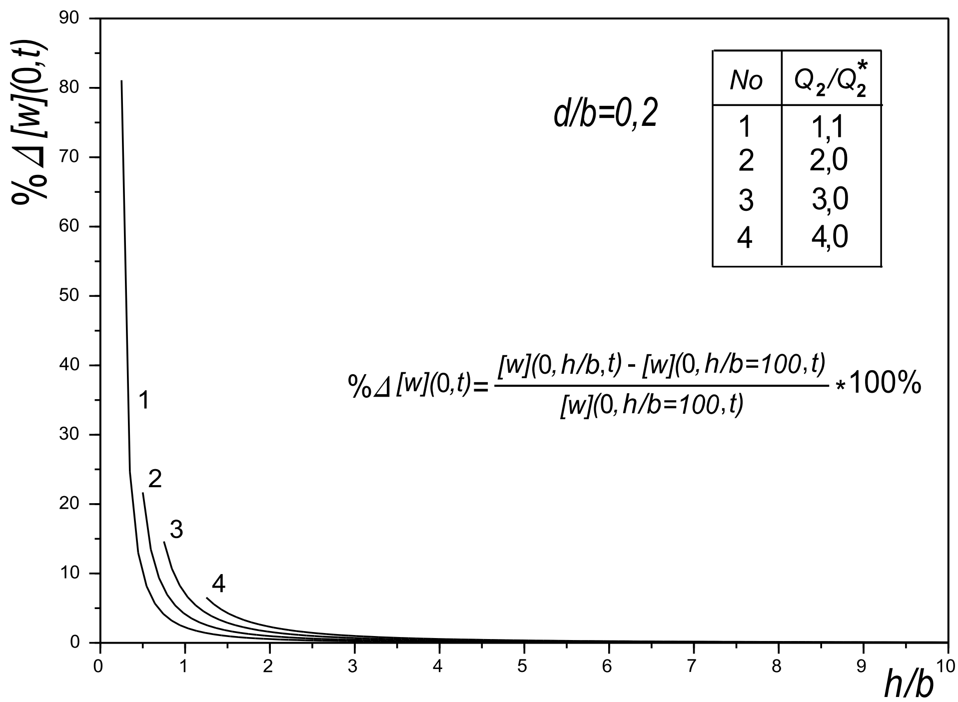
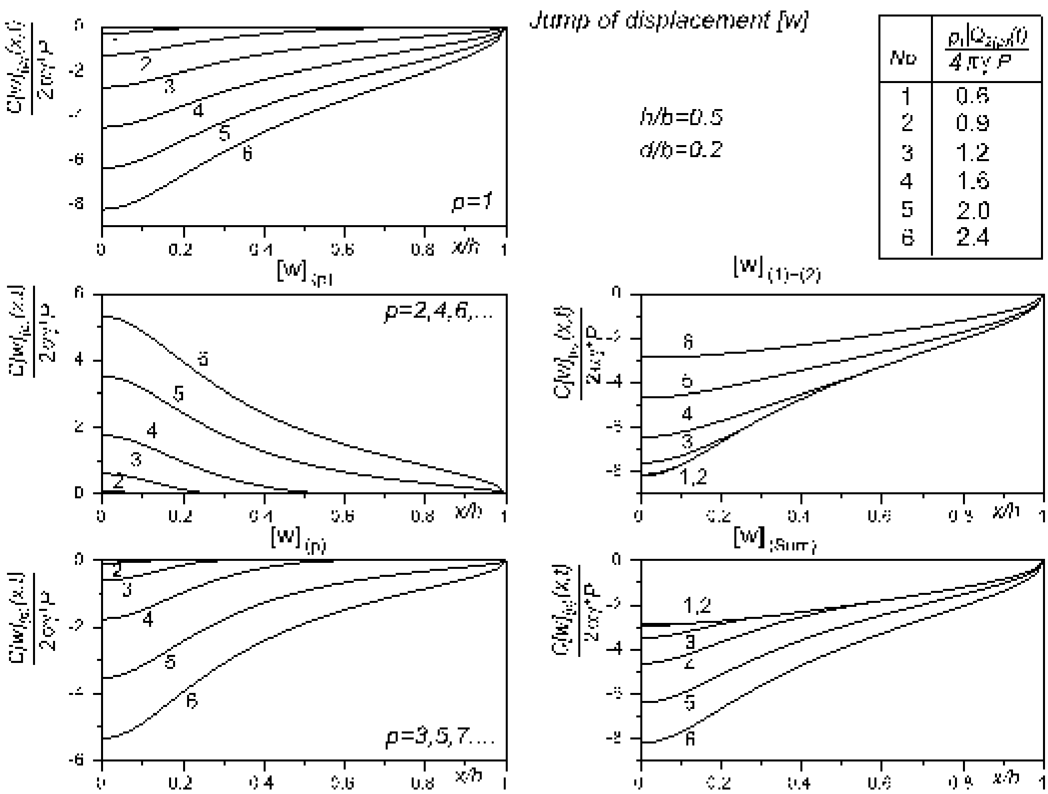



Рис. 4.25. Відносна залежність стрибка переміщень від віддалі точок притискання

Дослідження різних значень параметрів навантаження на форму та еволюцію стрибка переміщень $C\left[w\right]_{(p)}(x,t)\Big/2\alpha P\gamma^{+}$ для «віднульового» циклу $Q_{2(1)}^{***} \to -Q_{2(1)}^{***} \to Q_{2(1)}^{***} \to -Q_{2(1)}^{***} \to ...$ проілюстровано на рис. 4.26 – 4.28. Добре помітно, що другий та наступні кроки циклічного навантаження вже не повертають переміщення в початкову точку – існує певна залишкова віддаль, яка вже не зменшується.




| No | $\frac{\rho_1 \lvert Q_{2(1)}(t) \rvert}{4\pi\gamma P}$ |
|---|---|
| 1 | 0.6 |
| 2 | 0.9 |
| 3 | 1.2 |
| 4 | 1.6 |
| 5 | 2.0 |
| 6 | 2.4 |

Рис. 4.26. Еволюція стрибка переміщень при «віднульовому» циклічному навантаженні

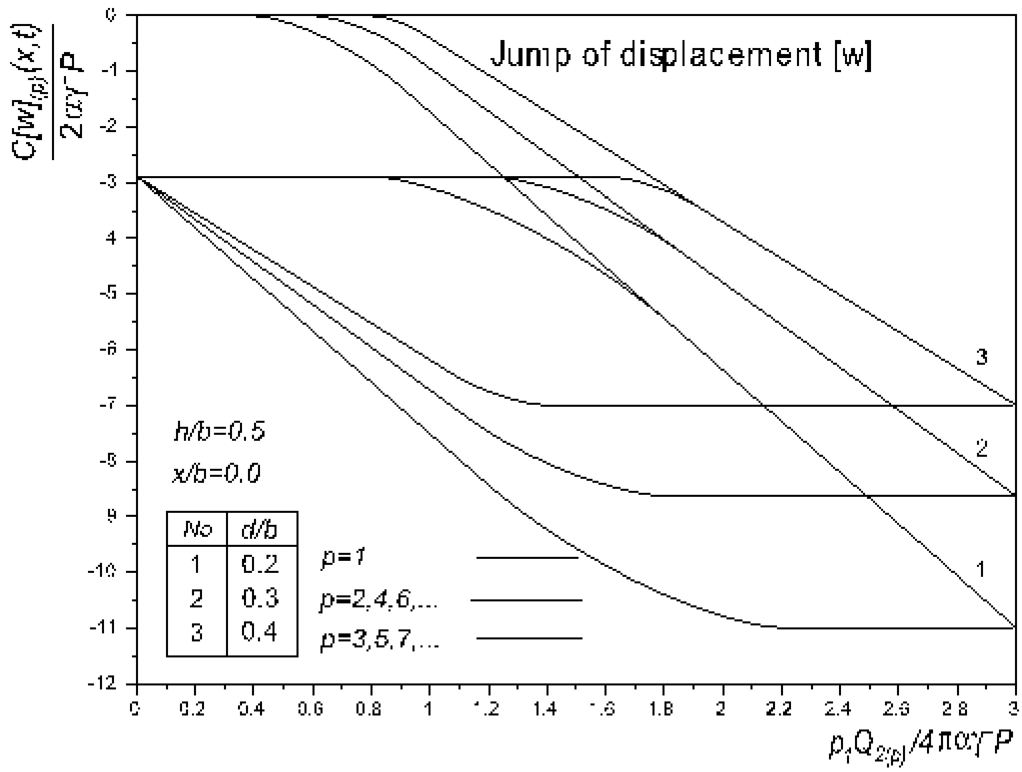



Рис. 4.27. Гістерезисний характер стрибка переміщень при «віднульовому» циклічному навантаженні

Для всіх згаданих випадків навантаження обчислено величину дисипації енергії та характер її зміни упродовж циклу (див. рис. 4.28). На рисунках суцільною лінією позначено розсіяння енергії упродовж підростання зони проковзування до межі тріщини, пунктиром – розсіяння енергії при зростанні зсувного навантаження після досягнення зоною проковзування максимального розміру. Спостерігається тенденція до зростання дисипації енергії при зростанні коефіцієнту тертя, наближенні точки прикладання зсувної зосередженої сили до тріщини та віддаленні від тріщини точок прикладання притискних сил. Слід відзначити, що для обчислення розсіяння енергії не має значення чи цикл навантажування симетричний, чи «віднульовий», важлива лише амплітуда навантаження. Тому рис. 4.28 відображає розрахунки розсіяння енергії для будь-якого виду циклу з амплітудою $2Q^{***}_{2(1)}$.

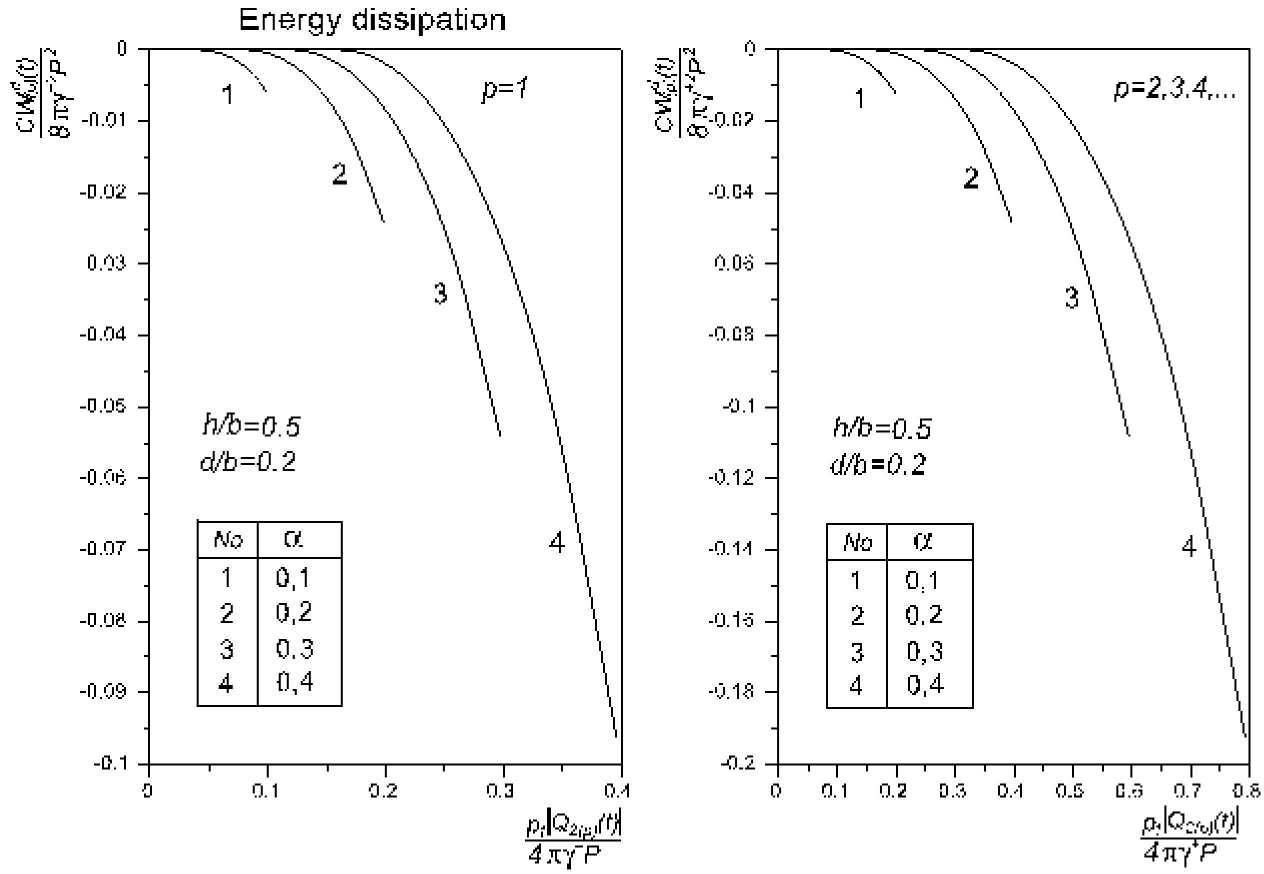



Рис. 4.28. Зміна дисипації енергії залежно від навантаження упродовж симетричного циклу

При перевищенні зсувною силою другого критичного значення (фаза 3) виникають ненульові УКІН в околі кінчиків тріщини, розрахунок яких порівняно із антиплоскою задачею для міжфазної тріщини за відсутності тертя відображено на рис. 4.29 – 4.31.

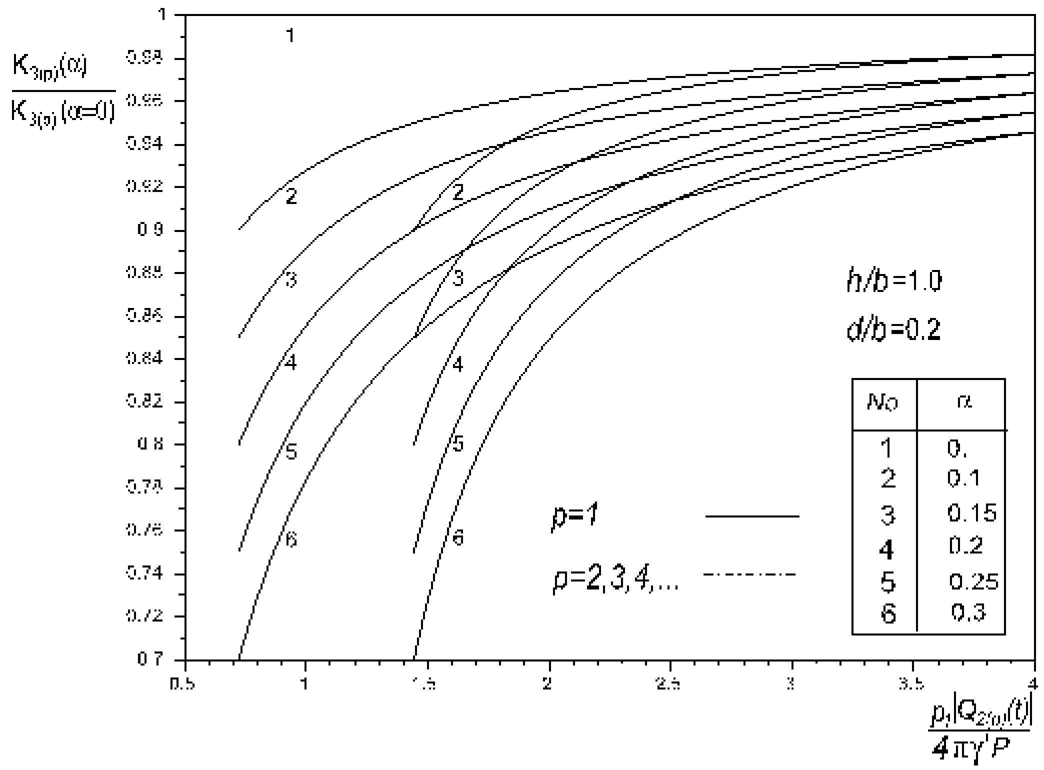



Рис. 4.29. Вплив тертя на УКІН залежно від навантаження упродовж циклу

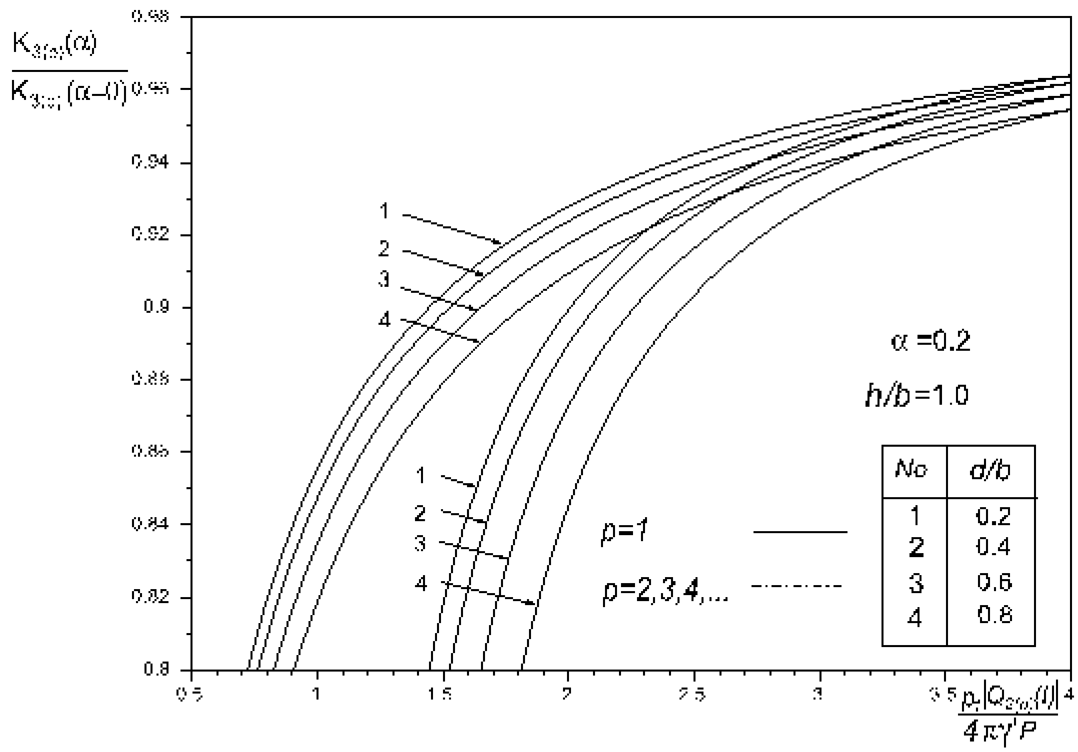



Рис. 4.30. Вплив віддалі від тріщини точки прикладання зсувної зосередженої сили на УКІН залежно від навантаження упродовж циклу

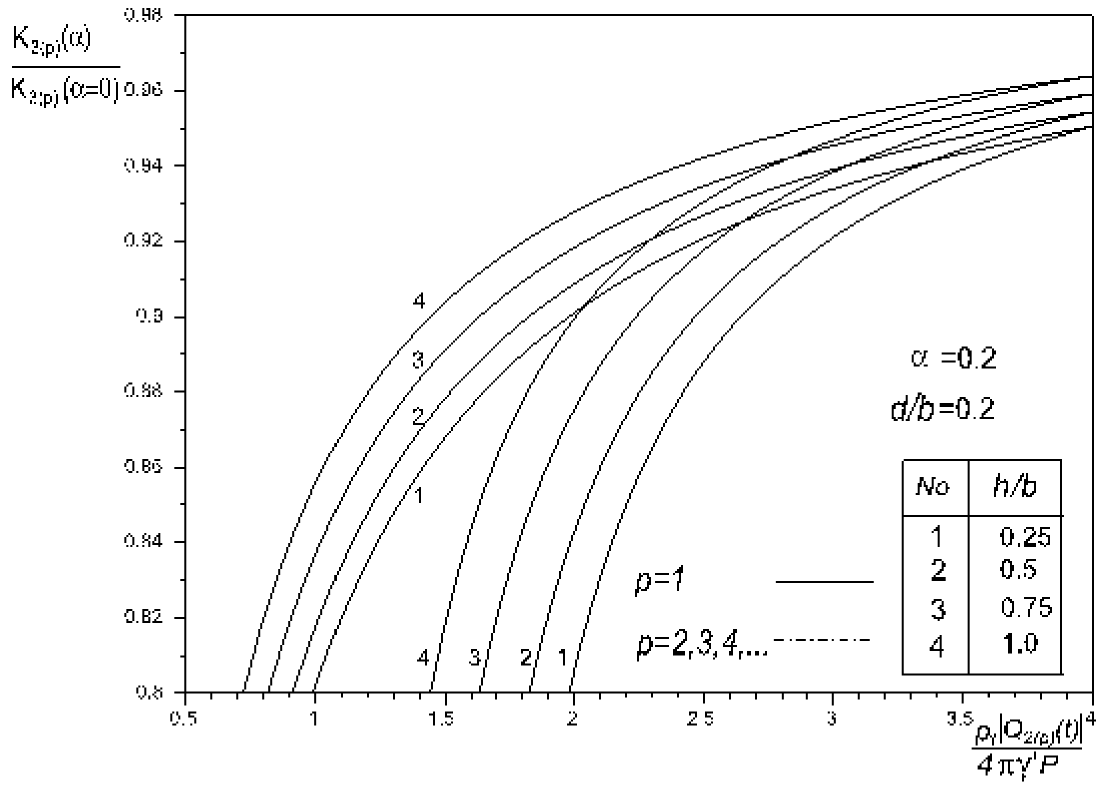



Рис. 4.31. Вплив віддалі від тріщини точок прикладання притискних сил на УКІН залежно від навантаження упродовж циклу

Зрозуміло, що на першому кроці циклу УКІН з'являться швидше внаслідок того, що друге критичне значення навантаження на цьому кроці менше. Але помітно, що при зростанні навантаження до приблизно чотириразового значення другої критичної сили УКІН на всіх кроках циклу практично збігаються. Наявність тертя дає змогу істотно знизити рівень УКІН (при $\alpha = 0{,}3$ вже зниження на 30%). Зменшує рівень УКІН також віддалення від тріщини (розшарування) точки прикладання зсувної зосередженої сили та наближення до тріщини точок прикладання притискувальних сил.

### 4.3. Випадок пари відриваючих нормальних сил і різних варіантів зсувного навантаження

Випадки №11, 12 дії пари відриваючих нормальних сил $P_k = (-1)^k iP \ (P > 0)$ при одночасному нормальному рівномірному стискуванні на нескінченості $\sigma_{yy}^{\infty}$ достатньо повно розглянуто у підрозділі **3.3** за умов відсутності обмежень на поширення зон проковзування. Узагальнюючи отримані в підрозділі **3.3** результати на випадок існування на межі поділу двох півпросторів $L$ $\left(y=0,\ |z|<\infty\right)$ на частині $L'=\left[-b;b\right]$ стиснутої тунельної тріщини, на ділянці $\gamma_{1(p)}=[-a_{1(p)};a_{1(p)}]\subset L_1'$ якої під час навантажування-розвантажування може виникати порушення ідеального зчеплення, зазначимо наступне.

Розв'язок (3.140), вирази (3.141), (3.142) для стрибка переміщень $\left[w\right]_{(1)}(x,t)$ та КІН, перше критичне значення зсувного навантаження (3.143) та вирази для поточного розміру зони проковзування (3.144) і розсіяння енергії (3.146) цілком задовольняють умовам сформульованої задачі. Проте поняття порогового значення навантаження у цьому разі слід доповнити другим критичним навантаженням, яке отримаємо покладаючи в (3.144) $a_{(1)}=b$

$$\tau_{(1)}^{**}=-\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(1-\frac{\delta h}{\sqrt{h^2+b^2}}\right)=4\alpha\gamma^{+}P\left(\frac{1}{h\delta}-\frac{1}{\sqrt{h^2+b^2}}\right). \qquad (4.25)$$

Порогове значення (3.145) у даному формулюванні задачі не має змісту через задану обмеженість розмірів зон проковзування.

Враховуючи вищезазначене, отримуємо таку картину зміни НДС на $(p)$–му кроці багатокрокового навантажування-розвантажування на проміжку $x\in[-a_{(p)};a_{(p)}]$:

- при $\tau_{(p)}(t)\le\tau_{(p)}^{*}$ — проковзування відсутнє: $\left[w\right]_{(p)}(x,t)=0$;
- при $\tau_{(p)}^{*}\le\tau_{(p)}(t)\le\tau_{(p)}^{**}$ розв'язок $f_{6(p)}\left(x,t\right)$, стрибок $\left[w\right]_{(p)}(x,t)$, поточний розмір $a_{(p)}(t)$ та дисипація енергії $W_{(p)}^{d}(t)$ визначають

залежності (3.148), (3.149), (3.152) та (3.154) відповідно;

- при $\tau_{(p)}^{**} \le \tau_{(p)}(t) \le \tau_{(p)}^{***}$ у формулах (3.148), (3.149) та (3.154) слід замінити $a_{(p)}(t)$ на $b$, замість (3.152) маємо $a_{(p)} = b$ і з (3.150) визначаємо ненульовий КІН.

Умови початку проковзування та перше критичне значення визначаються з (3.151), а друге критичне значення отримуємо, покладаючи в (3.152) $a_{(p)} = b$:

$$\tau_{(p)}^{**} = \varepsilon_{(p)}\alpha\sigma_{yy}^{\infty}\left(1 - \frac{\delta h}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) = -4\varepsilon_{(p)}\alpha\gamma^{+}P\left(\frac{1}{h\delta} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) . \qquad (4.26)$$

Рис. 4.32, 4.33 ілюструють залежність знерозміреної величини $a_{(p)}/b$ на $(p)$–ому кроці навантаження величиною $b\tau_{(p)}(t)/4\alpha P\gamma^{+}$ залежно від параметрів $\delta$ та $h/b$. Добре видно, що у граничному випадку $\delta = 1$ відсутності нормальних напружень на границі у точці $x = 0$ проковзування починається з моменту прикладання зсувного навантаження і зростає найшвидше. Зазначимо, що добре прослідковується локальність впливу притискувальних сил – з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів мінімум величини критичної сили стає яскравіше вираженим.

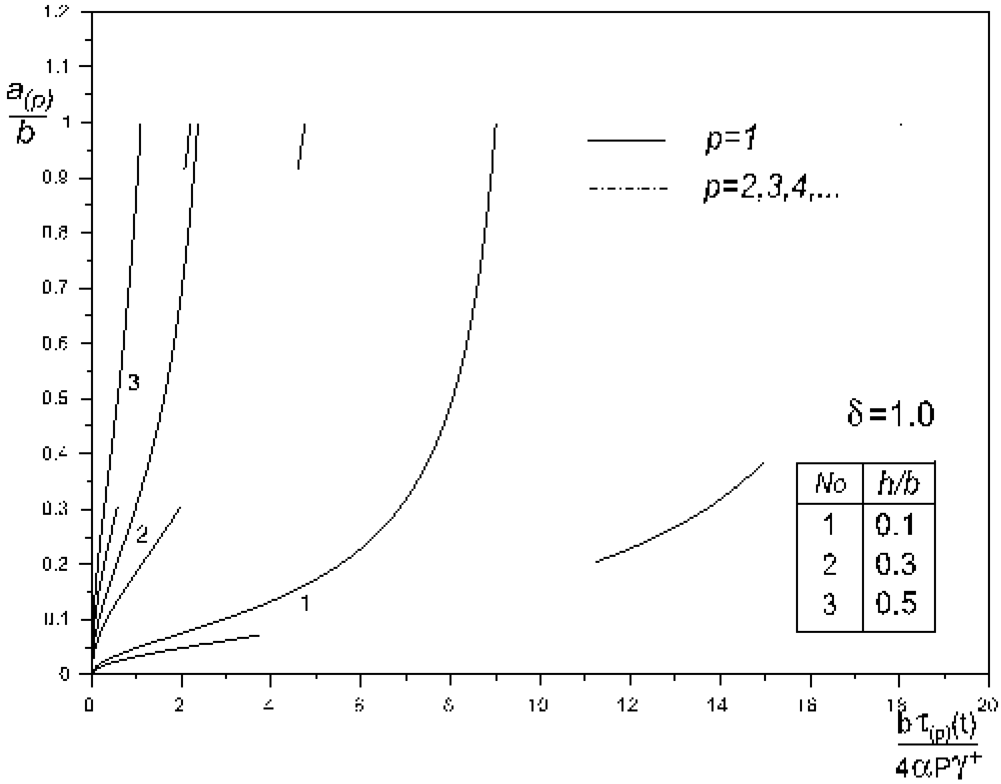



Рис. 4.32. Зростання розміру зони проковзування залежно від параметрів навантаження протягом циклу

На рис. 4.34 відображено вплив зростання притискувального навантаження на межі розділу матеріалів при малому $h/b$ на втрату чутливості до зростання розміру зони проковзування.

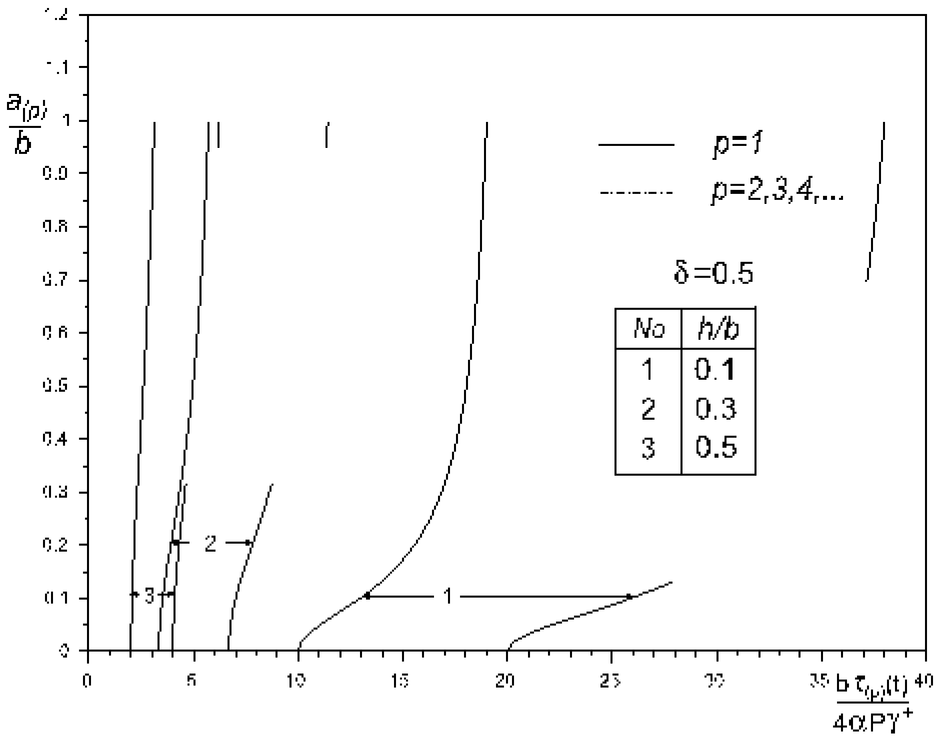



Рис. 4.33. Зростання розміру зони проковзування залежно від параметрів навантаження протягом циклу

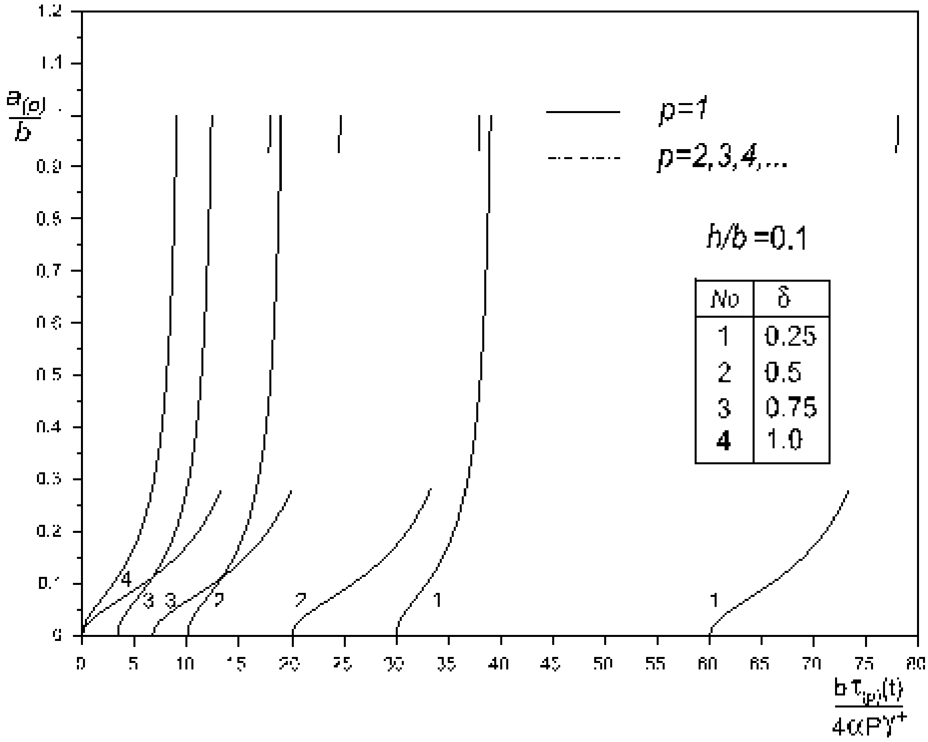



Рис. 4.34. Зростання розміру зони проковзування залежно від параметрів навантаження протягом циклу

На рис. 4.35 – 4.37 зображена динаміка зміни відношення УКІН за наявності та відсутності тертя $K_{3(p)}(\alpha > 0) \big/ K_{3(p)}(\alpha = 0)$ залежно від різних параметрів навантаження та коефіцієнта тертя.

Рисунки 4.38, 4.39 відображають характер зміни розсіяної у зоні проковзування енергії $CW_{(p)}(t) \big/ 8\pi\alpha^2 P^2 \gamma^{+2}$ залежно від $b\tau_{(p)}(t) \big/ 4\alpha P \gamma^+$ при різних значеннях параметрів навантаження. Прямолінійні ділянки ліній на рисунках відповідають третій стадії навантаження. Зазначимо, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів.

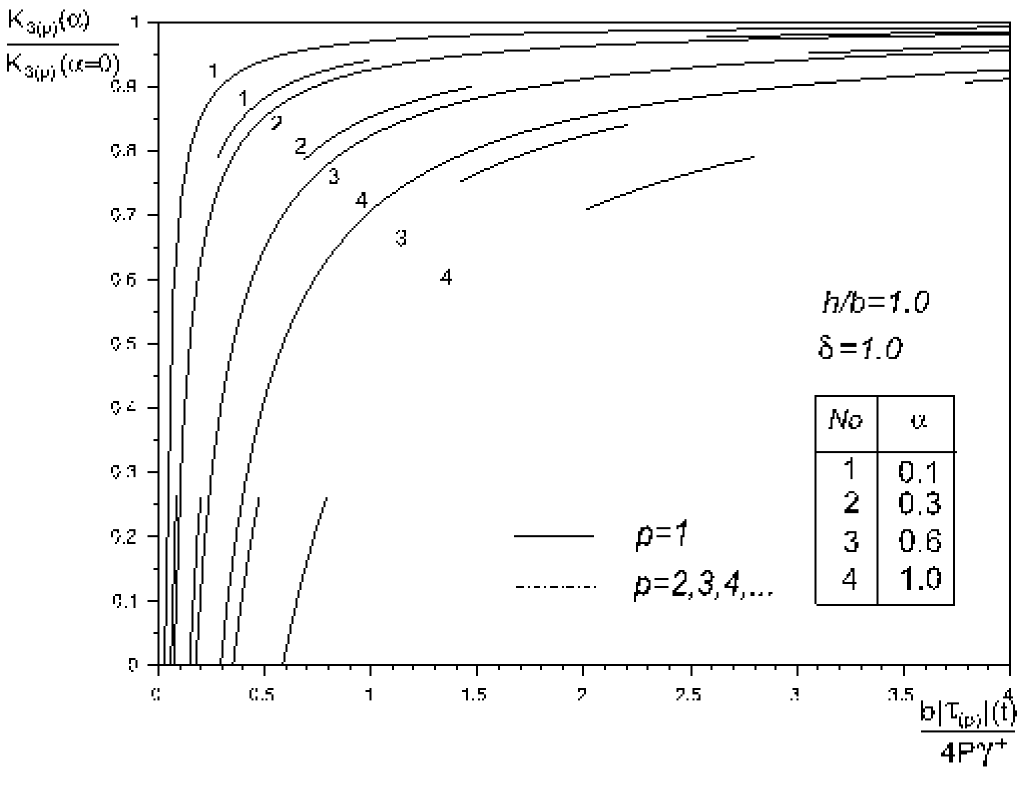



Рис. 4.35. Вплив параметрів навантаження на відносний УКІН упродовж циклу

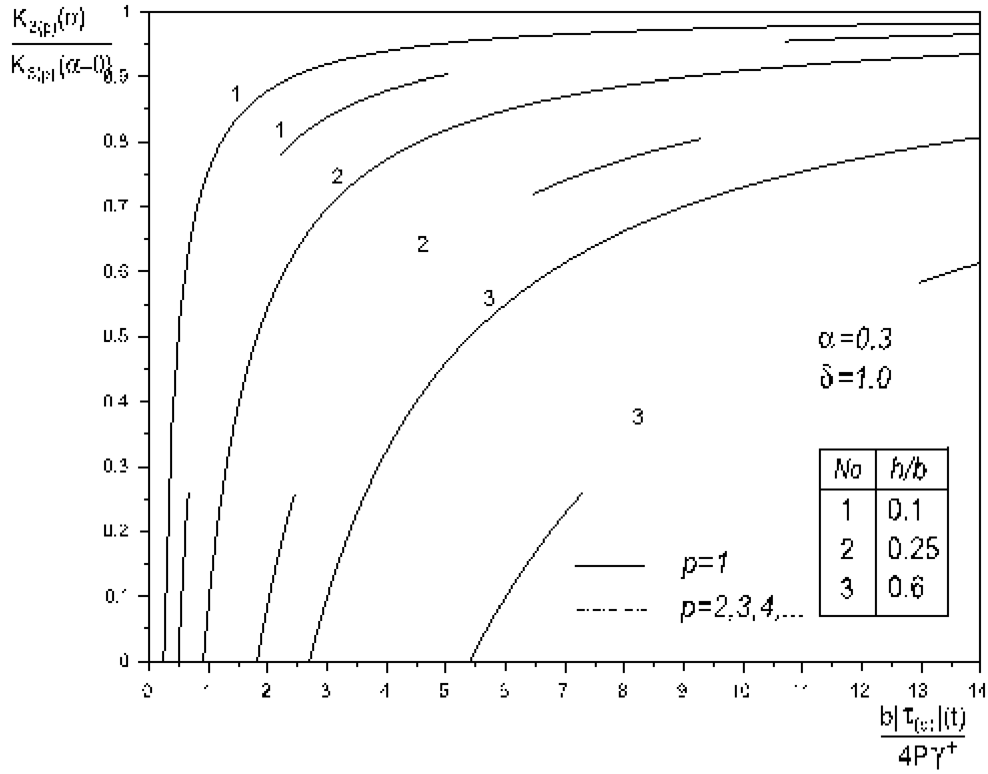



Рис. 4.36. Вплив параметрів навантаження на відносний УКІН упродовж циклу

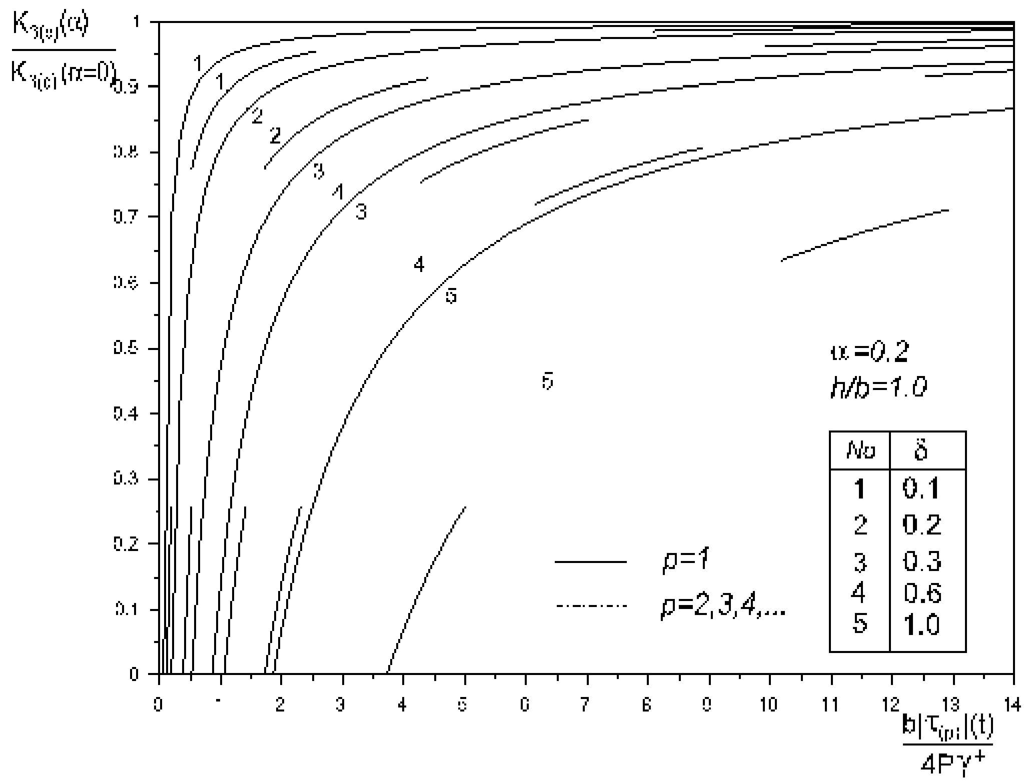



Рис. 4.37. Вплив параметрів навантаження на відносний УКІН упродовж циклу

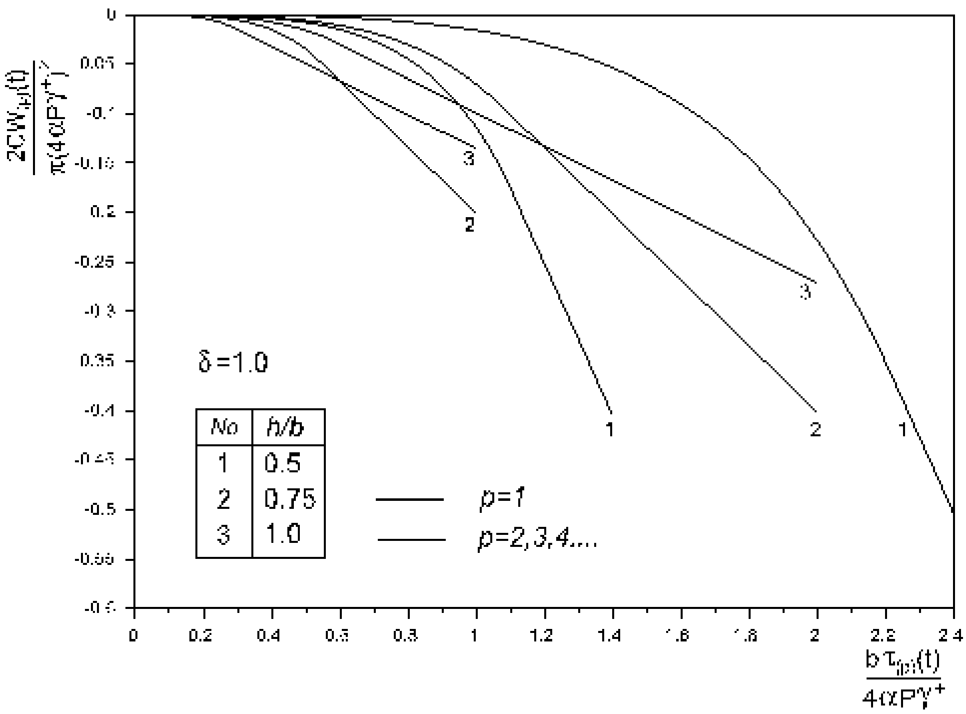



Рис. 4.38. Вплив параметрів навантаження на розсіяння енергії упродовж циклу

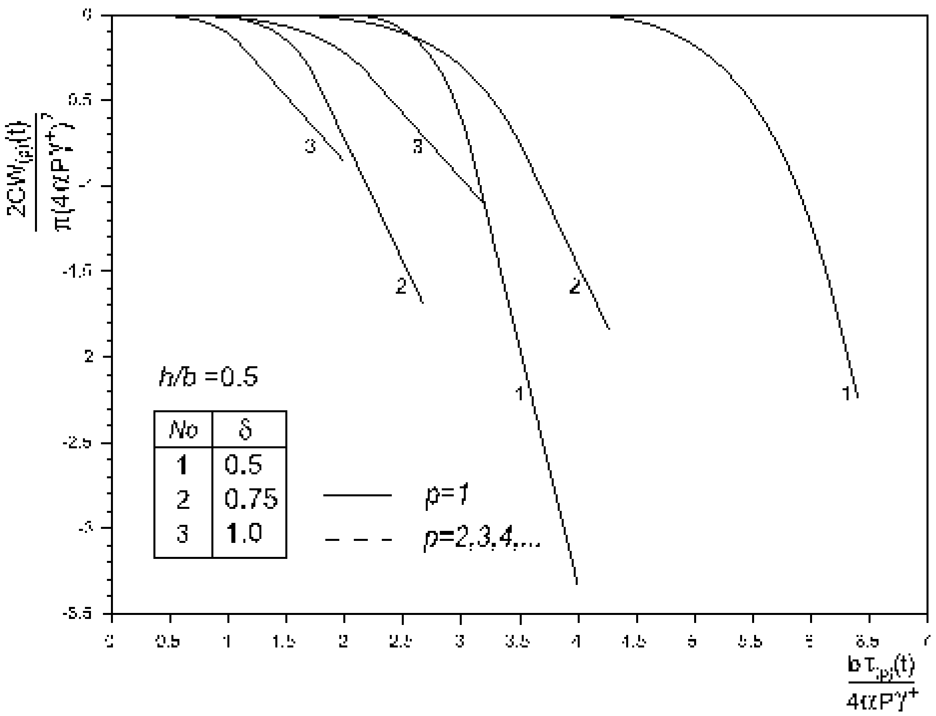



Рис. 4.39. Вплив параметрів навантаження на розсіяння енергії упродовж циклу

**Висновки до розділу 4**

1). Запропонована у розділі 3 методика розрахунку НДС при циклічному чи багатокроковому зсувному навантажуванні притискуваних тіл з можливістю фрикційного проковзування у контактній зоні узагальнена на випадок наявності заданих обмежень на розмір зон проковзування.

2). Отримано аналітичний розв'язок сформульованої задачі, який дав змогу описати у простій аналітичній формі всі найважливіші параметри для визначення поточного НДС тіла зокрема й упродовж циклічного процесу навантажування: критичні значення зсувного навантаження, розміри зони проковзування, стрибок переміщень та дисипацію енергії.

3). З'ясовано, що під час деформування притискуваних тіл зсувним навантаженням можна виділити три фази. На першій фазі збільшення зсувного навантаження від нуля до першого критичного значення проковзування відсутнє. На другій – монотонно зростає до другого критичного значення, поки розміри заданих зон допустимого проковзування (зокрема існуючих тріщин) не почнуть обмежувати їхнє збільшення. Фаза 3 у разі силової і геометричної симетрії задачі розпочнеться після збігу розмірів зони проковзування та тріщини. У цьому разі на краях тріщини виникатимуть сингулярні напруження, а відтак існуватимуть ненульові КІН, які після досягнення тепер вже свого критичного значення спричинять підростання тріщини.

4). Для найбільш характерних типів зсувного навантаження досліджені критичні значення навантаження для визначення моменту початку проковзування та сингулярні напруження в околі кінців тріщини, що з'являються при досягненні другого критичного значення навантаження, коли зона проковзування досягає краю тріщини та намагається вийти за її межі.

5). Числовий аналіз отриманих результатів дав можливість сформулювати такі загальні тенденції зміни НДС у залежності від геометричних та силових параметрів задачі:

- Локальність впливу притискаючих нормальних зосереджених сил на НДС в околі тріщин істотно заникає з віддаленням точок їхнього прикладання на віддаль більшу від 5-тиразового розміру тріщин.
- Зменшення віддалі від площини тріщин точок прикладання притискних сил зменшує інтенсивність розсіяння енергії та рівень КІН.
- Зростання коефіцієнта тертя істотно знижує рівень УКІН (при $\alpha = 0{,}3$ зниження на 30%), зменшує амплітуду стрибка переміщень, збільшує інтенсивність розсіяння енергії.
- Зменшення віддалі від площини тріщин точок прикладання зсувної сили збільшує рівень КІН, локальність її впливу на НДС задачі, дисипацію енергії, зменшує критичні значення навантаження.
- Збільшення інтенсивності прикладеної зсувної сили збільшує стрибок переміщень, розсіяння енергії, КІН.
- Збільшення відносної жорсткості півпростору, де прикладається зсувна сила, збільшує стрибок переміщень та істотно зменшуючи КІН, є вигідним з погляду забезпечення міцності конструкції.
- Характер стрибка переміщень упродовж циклу навантаження є гістерезисним. Для появи проковзування на 2-ому та наступних кроках циклічного навантажування необхідно, щоб інтенсивність навантаження досягала вдвічі більшого критичного значення, ніж на першому кроці навантажування.
- Для обчислення розсіяння енергії не має значення чи цикл навантажування симетричний, чи «віднульовий», важлива лише амплітуда навантаження.

# РОЗДІЛ 5. УРАХУВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ НАПРУЖЕНЬ ЗА АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ БІМАТЕРІАЛУ З ТОНКИМ СТРІЧКОВИМ МІЖФАЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В наш час у механіці матеріалів інтерес до вивчення об’єктів істотно перемістився з макро- ($10^0$ м) та мезорівнів ($10^{-1}$ – $10^{-3}$ м) на мікро- ($10^{-3}$ – $10^{-6}$ м) і нанорівень ($10^{-9}$ м) [104, 385, 408, 410] завдяки появі можливості використання у новітніх технологіях та продуктах виробництва специфічних властивостей наночастинок. Досі існує велика складність математичного моделювання механіки наноструктур, яка все ще залишається гостро актуальною проблемою матеріалознавства оскільки у цій сфері без врахування законів та досягнень квантової механіки не обійтися. Однак у здійсненні початкових кроків побудови перших наближень повинен допомогти в цілому позитивний досвід застосування до вивчення дислокаційних структур концепції механіки суцільного середовища.

Відтак на даному етапі розвитку теорії мікро- і наномеханіки цілком можливо і напевно доцілько зосередитися також і на конструюванні придатних для вивчення різномасштабних структур на основі ускладнення конститутивних рівнянь механіки деформівного твердого тіла та опрацювання методів їхнього розв'язування. В основу такого моделювання переважно покладають концепцію «репрезентативного елементу об’єму» (RVE) [385, 408, 410] для наділення придатних для макроструктурних об’єктів класичних моделей континууму певними додатковими властивостями, які, в межах гіпотези суцільності, могли би врахувати визначальні для механіки властивості структурних неоднорідностей. Зокрема, врахування впливу фізики поверхонь дефектів структури та меж поділу складових композитів стає в наномасштабі відчутним через вагоме зростання впливу площі поверхонь поділу в одиниці об’єму структур.

На основі численних та різноманітних досліджень впливу ефекту поверхневих напружень [343, 384, 387, 422, 437], якими в цілком адекватному першому наближенні можна в межах навіть лінійної теорії пружності вивчати механіку наноструктурованих тіл, було запропоновано емпіричний масштабуючий закон [433, 463, 464] із власною шкалою, що дає можливість, хоч і приблизно, все ж врахувати зміни основних нерозмірних механічних властивостей у залежності від характерного розміру в наномасштабі. На врахування поверхневих напружень та енергії в останні роки спрямовані зусилля щораз більшої кількості праць [342, 343, 384, 422, 433, 437]. Переважно вони використовують класичну також і для механіки композитів теорію Ешелбі для еліпсоїдального однорідного включення у однорідному ж необмеженому середовищі [318, 387, 462–464]. Низка праць стосується аналізу впливу поверхневих напружень на середовище з тріщиною [465].

Фізико-хімічна природа появи поверхневого натягу обумовлена різницею в енергетичній взаємодії між атомами того самого чи різних матеріалів, а відтак і перерозподілі енергії між атомами. Це є природна внутрішня властивість довільної гетерогенної структури як рідкої, так і деформівної твердої.

Відповідно до методу функцій стрибка силу поверхневого натягу можна моделювати і зовнішнім навантаженням, оскільки його прикладання у такий самий спосіб спричиняє стрибок напружень, як поява дислокації – стрибок переміщень. відтак натяг $\boldsymbol{T}$ і розуміється як "стрибок дотичних напружень при переході через поверхню розділу двох контактуючих середовищ." [206].

Фізико-хімічна природа $\boldsymbol{T}$ – це різниця властивостей матеріалів, яку можна також моделювати у вигляді деякого поверхневого шару нульової товщини на межі розділу. Причому цей шар має «поверхневу енергію» [342, 343]. Поверхневий натяг іноді означують як тангенціальні зусилля [Н] у приповерхневому шарі, віднесені до одиниці довжини [м]. Фізично відмінність між поверхневою енергією та натягом пояснюють тим, що умови взаємодії атомів у приповерхневих областях відрізняються від таких в об’ємі [52, 70].

Даний розділ стосується дослідження механічного впливу існування додаткових поверхневих напружень на тонкому міжфазному лінійно пружному включенні в межах антиплоскої задачі теорії пружності, якщо основний напружено-деформований стан (НДС) формують силові чинники та гвинтові дислокації. Отримані тут результати придатні також і для випадку тонких міжфазних макровключень.

## 5.1. Формулювання задачі

Формулювання даної задачі: загальна геометрія розглядуваної структури та навантажувальні чинники практично не відрізняються від загальної постановки зовнішньої задачі в підрозділі **2.2** для структурно-модульного МФС. Відтак, у ролі зовнішньої задачі розглядається структура, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $G_1, G_2$, на межі розділу яких (площина $xOz$) в напрямку осі зсуву z розташований тунельний розріз, у який вставлений певний об’єкт – тонке включення. Ускладнюється постановка в розумінні наявності внутрішньої задачі, яка полягає у моделюванні присутності такого тонкого пружного чи пружно-пластичного включення завтовшки $2h\,(h \ll a)$ з ортотропними механічними властивостями $G_y^{in}, G_x^{in}$ (рис. 5.1). Оскільки напружено-деформований стан структури в кожному перпендикулярному до осі $Oz$ перерізі ідентичний, то надалі будемо розглядати лише площину $xOy$, яка складається з двох плоских перерізів $S_k\;(k=1,2)$ півпросторів з межею поділу між півплощинами у вигляді осі абсцис $L\sim x$. На ній вздовж відрізка $L' = [-a;\, a]$ розташований переріз тонкого включення.

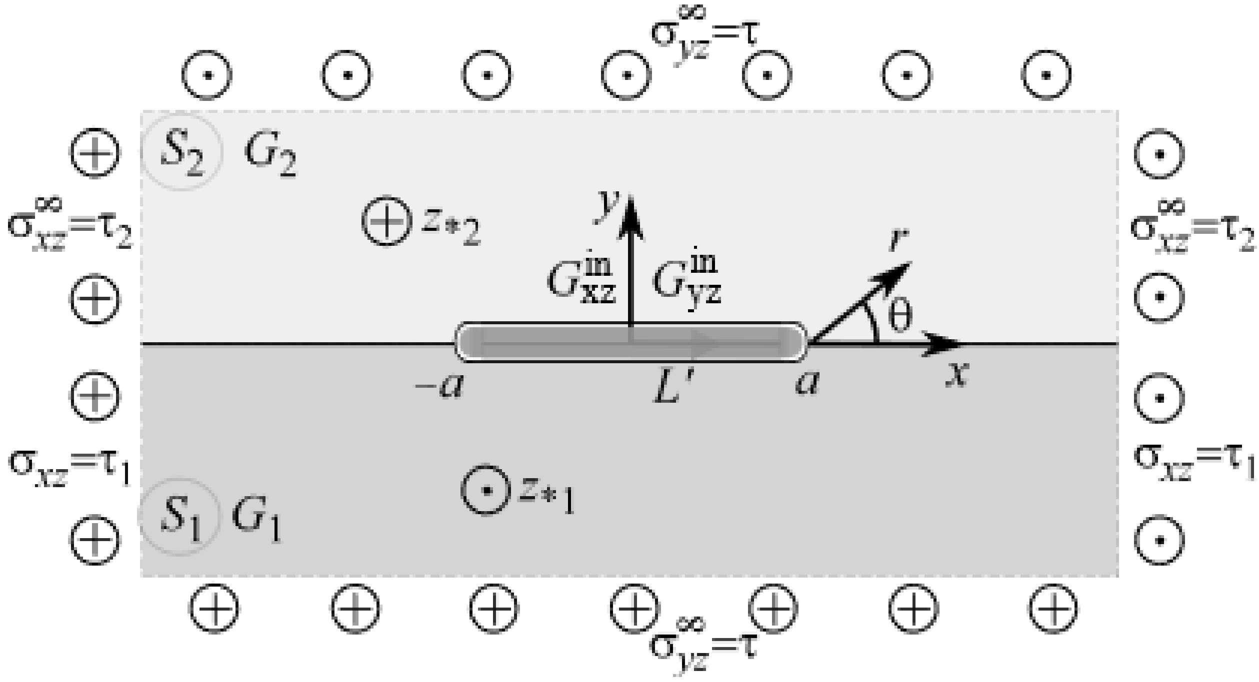



Рис. 5.1. Геометрія та навантаження мікроструктури

Навантаження структури в цій постановці можна прийняти виключно зсувним через відсутність впливу нормального навантаження на основні компоненти розглядуваних складових НДС.

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ вважаємо ідеальним

$$w_2(x,+0) = w_1(x,-0), \quad \sigma_{yz2}(x,+0) = \sigma_{yz1}(x,-0) \quad \left(x \in L''\right), \tag{5.1}$$

а між берегами включення та матрицею уздовж $L'$ приймаємо умови контакту з поверхневим натягом (2.61):

$$w^{in}(x,\pm h) = w\ \ (x,\pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h) - T_k\,. \tag{5.2}$$

Тут поверхневі напруження $T_k$ можуть бути залежними як від інтенсивності НДС, так і від властивостей матеріалів та характерного розміру задачі. Верхнім індексом “*in*” позначені компоненти НДС всередині включення.

Як і у підрозділі **2.1**, враховуючи припущення (2.3) можна записати

$$\begin{aligned}&\sigma_{rz}(x,y)=\sigma_{rz}^{0}(x,y)+\widehat{\sigma}_{rz}(x,y), \quad r=\{x,y\};\\ &w(x,y)=w^{0}(x,y)+\widehat{w}(x,y);\end{aligned} \tag{5.3}$$

а наявність включення на $L'$ зімітувати стрибками напружень та деформацій

$$\begin{aligned}&\left[\sigma_{yz}\right]_h \cong \sigma_{yz}^{-}-\sigma_{yz}^{+}=f_3\left(x\right),\\ &\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_h \cong \frac{\partial w^{-}}{\partial x}-\frac{\partial w^{+}}{\partial x}=\left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_h \equiv \frac{\sigma_{xz}^{-}}{G_1}-\frac{\sigma_{xz}^{+}}{G_2}=f_6\left(x\right), \; x\in L';\end{aligned} \tag{5.4}$$

$f_3(x)=f_6(x)=0$, якщо $x\notin L'$. Тут, як і у підрозділі **2.1**, позначено: $[\varphi]_h=\varphi(x,-h)-\varphi(x,+h)$, $\langle\varphi\rangle_h=\varphi(x,-h)+\varphi(x,+h)$; верхні індекси "+" та "–" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії $L$; величини, відзначені індексом “0” зверху, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без модельованих неоднорідностей за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв’язок (2.34)), а величини, відзначені зверху символом “^”, є збуреннями основного поля НДС наявністю включення.

Доповнюючи співвідношення (2.46), (2.47) виразами для деформацій можемо отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії $L$ необмеженої площини $S$, а також всередині $S$ дорівнюють (зовнішня задача)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yzk}(z)+i\sigma_{xzk}(z)=\sigma^{0}_{yzk}(z)+i\sigma^{0}_{xzk}(z)+ip_k g_3(z)-Cg_6(z),\\
&\qquad (z\in S_k;\ r=3,6;\ k=1,2),\\
&\sigma^{\pm}_{yzk}(x)=\mp p_k f_3(x)-Cg_6(x)+\sigma^{0\pm}_{yzk}(x),\\
&\sigma^{\pm}_{xzk}(x)=\mp Cf_6(x)+p_k g_3(x)+\sigma^{0\pm}_{xzk}(x),\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}(x)=\mp pf_3(x)-p_{3-k}g_6(x)+\frac{\sigma^{0\pm}_{yzk}(x)}{G_k},\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}(x)=\mp p_{3-k}f_3(x)+pg_6(x)+\frac{\sigma^{0\pm}_{xz}k(x)}{G_k},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

де

$$g_r(z)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_r(x)dx}{x-z},\ s_r(x)\equiv\int_{-a}^{x}f_r(x)dx,\ C=G_{3-k}p_k,\ p_k=pG_k,\ p=\frac{1}{G_1+G_2}.$$

Оскільки метою даної задачі є дослідження впливу саме поверхневого навантаження на НДС структури, тому в моделі включення приймемо конститутивну залежність деформацій від напружень (2.53) лінійною у вигляді закону Гука

$$\sigma^{in}_{xz}=G^{in}_x\frac{\partial w^{in}}{\partial x},\ \sigma^{in}_{yz}=G^{in}_y\frac{\partial w^{in}}{\partial y}\quad, \tag{5.6}$$

що істотно спростить загальний вигляд математичної моделі включення (2.54) до її часткового випадку (2.55):

$$\frac{G^{in}_x}{2}\left\langle\frac{\partial w^{in}}{\partial x}\right\rangle_h-\sigma^{in}_{xz}(-a)-\frac{1}{2h}\int_{-a}^{x}\left[\sigma^{in}_{yz}\right]_h(\xi)d\xi+F^{in}_{aver}(x,h)=0, \tag{5.7}$$

$$-\frac{\left[w^{in}\right]_h}{h}=\frac{\left\langle\sigma_{yz}^{in}\right\rangle_h}{G_y^{in}}, \tag{5.8}$$

де $F_{aver}^{in}(x,h)=\dfrac{\rho^{in}}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-a}^{x}F^{in}(\xi,y)d\xi dy$.

## 5.2. Побудова інтегральних рівнянь МФС

Підставляння крайових умов (5.2) з урахуванням залежності (5.3) в модель (5.7), (5.8) дає можливість отримати систему визначальних рівнянь для розв'язування сформульованої задачі:

$$\int\limits_{-a}^{x}f_3(\xi)d\xi=-N_{xz}(-a)+\omega_x^{in}\left\langle\frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle_h+\left(x+a\right)\left(T_1-T_2\right)+2hF_{aver}^{in}(x,h), \tag{5.9}$$

$$\int\limits_{-a}^{x}f_6(\xi)d\xi+\left[w\right]_h(-a)-h\left\langle\frac{\sigma_{yzk}}{G_k}\right\rangle_h=-\omega_y^{in}\left\{\left\langle\sigma_{yzk}\right\rangle_h-T_1-T_2\right\}, \tag{5.10}$$

Тут $\omega_x^{in}=hG_x^{in}$, $\omega_y^{in}=h\big/G_y^{in}$, $N_{xz}(-a,x)=2h\sigma_{xz}^{in}(-a)$.

Адекватність моделювання (5.9) – (5.10) верифікують всі можливі граничні випадки:

A) $h\to 0:\ \left[\sigma_{yzk}\right]_{0,h}\to 0,\ \left[\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]_{0,h}\to 0,\ \left[w\right]_{0,h}\to 0$;

B) $G_x^{in}\to 0:\ \displaystyle\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}\right]_h(\xi)d\xi+N_{xz}(-a)+2hF_{aver}^{in}(x,h)=0;$

C) $G_y^{in}\to\infty:\ \displaystyle\int\limits_{-a}^{x}\left[\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right]_h(\xi)d\xi+w(-a)-h\left\langle\frac{\sigma_{yz}^{0}}{G_k}\right\rangle_h=0,$ або $\left[w\right]_h\to 0$;

D) $G_x^{in} \to \infty : \left\langle \dfrac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \to 0, \; \left[ w \right]_h \to 0$;

E) $G_y^{in} \to 0 : \left\langle \sigma_{yzk} \right\rangle_h \to T_1 + T_2$;

F) $G_y^{in0} \to G_k : \left[ w \right]_h = \dfrac{h}{G_y^{in}} \left( T_1 + T_2 \right)$.

Окрім того, побудована модель узагальнює відомі на сьогоднішній день моделі «поверхневого шару» [291, 342, 343, 384] на випадок розімкнутого контуру, а також, як частковий випадок, модель міжфазної тріщини з поверхневим натягом [465].

За методикою МФС підставляючи (5.5) у модель (5.9) - (5.10) з використанням крайових умов (5.2) отримуємо

$$\begin{gathered} \int_{-a}^{x} f_3(\xi) d\xi + N_{xz}(-a) - 2hF_{aver}^{in}(x,h) - \left( x + a \right)\left( T_1 - T_2 \right) = \\ = \omega_x^{in} \left\{ (p_2 - p_1) f_6(x) + 2pg_3(x) + \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\}, \end{gathered} \tag{5.11}$$

$$\begin{gathered} \int_{-a}^{x} f_6(\xi) d\xi + \left[ w \right]_{0,h+\delta}(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yz}^0}{G_k} \right\rangle_h = \\ = -\omega_y^{in} \left\{ (p_1 - p_2) f_3(x) - \left( 2C - G_y^{in} \right) g_6(x) + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h - T_1 - T_2 \right\}, \end{gathered} \tag{5.12}$$

а також, як наслідок, систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР)

$$\begin{cases} \alpha_1 f_6(x) + \beta_1 g_3(x) - \gamma_1 s_3(x) = F_3(x), \\ \alpha_2 f_3(x) + \beta_2 g_6(x) - \gamma_2 s_6(x) = F_6(x), \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\alpha_1 = p_2 - p_1,\ \beta_1 = 2p,\ \gamma_1 = a/\omega_x^{in},$$

$$F_3(x) = \gamma_1\left\{N_{xz}(-a) - (x+a)(T_1 - T_2) - 2hF_{aver}^{in}(x,h)\right\} - \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h,$$

$$\alpha_2 = p_2 - p_1,\ \beta_2 = 2C - G_y^{in},\ \gamma_2 = a/\omega_y^{in},$$

$$F_6(x) = \gamma_2\left\{[w](-a) - h\left\langle \frac{\sigma_{yzk}^0}{G_k} \right\rangle_h\right\} + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h - T_1 - T_2$$

з додатковими умовами

$$\begin{gathered}\int_{-a}^{a} f_3(\xi)d\xi = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{aver}^{in}(a,h) + 2a(T_1 - T_2),\\ \int_{-a}^{a} f_6(\xi)d\xi = [w]_h(a) - [w]_h(-a).\end{gathered} \tag{5.14}$$

Якщо, крім цього, матеріали матриці одинакові $G_1 = G_2 = G$, то ССІР (5.13) розділяється на два незалежних рівняння

$$\begin{gathered}\beta_1 g_3(x) - \gamma_1 s_3(x) = F_3(x),\\ \beta_2 g_6(x) - \gamma_2 s_6(x) = F_6(x).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Аналіз ССІР (5.13) за методикою підрозділу **2.5.** дає можливість стверджувати, що функції стрибка $f_3$, $f_6$ можуть бути подані у вигляді

$$\begin{gathered}f_3(x) = \frac{G_{av}}{a}\left(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right),\quad f_6(x) = \frac{G_{av}}{a\sqrt{G_1 G_2}}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right),\\ \varphi_k(x) = (a-x)^{-1/2\pm\mu}(a+x)^{-1/2\mp\mu}\varphi_k^*(x),\qquad k = \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix},\end{gathered} \tag{5.16}$$

де $\varphi_k^*(x)$ – безрозмірні регулярні функції, $G_{av}$ – величина розмірності напружень, модулів зсуву, інтенсивність навантаження задачі; величина $\mu$ визначається характеристичною частиною системи сингулярних інтегральних рівнянь (5.13) [50, 141] і дорівнює $\mu = \operatorname{arctg}\dfrac{G_2 - G_1}{2\sqrt{G_2 G_1}}$.

Розв'язування ССІР (5.13) – (5.15) далі можна реалізувати за методикою підрозділу ***2.5.2*** [194]**.** У загальному випадку для ССІР (5.15) зручно представити $\varphi_k^*(x)$ у вигляді

$$\varphi_m^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m P_n^{-1/2 \pm \mu, -1/2 \mp \mu}(x), \tag{5.17}$$

і, застосовуючи відповідні набори точок колокації, звести (5.15) до СЛАР для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення $A_n^m$. Недоліком такого підходу є необхідність вибору набору точок колокації для кожного окремого випадку значення показника $\mu = \operatorname{arctg}\dfrac{G_2 - G_1}{2\sqrt{G_2 G_1}}$.

Для випадку, коли функції стрибка $f_r(\tilde{x})$ представляються у вигляді розвинень в ряди по поліномах Чебишова

$$f_r(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}} \sum_{j=0}^{N} B_j^r T_j(\tilde{x}), \qquad r = 3, 6; \;\; \tilde{x} = x/a, \tag{5.18}$$

набір точок колокації має вигляд множини $x_m = \cos\dfrac{m\pi}{N+1}$ $\left(m = \overline{1, N}\right)$ і підстановка (5.18) у (5.13) та обчислення отриманих залежностей на цій множині точок з урахуванням додаткових умов (5.14) та інтегралів

$$g_r(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} B_j^r \int_{-1}^{1} \frac{T_j(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\xi-\tilde{x}\right)} = \sum_{j=1}^{N} B_j^r U_{j-1}(\tilde{x}),$$

$$s_r(\tilde{x}) = B_0^r\left(\pi - \arccos(\tilde{x})\right) - \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}B_j^r\sqrt{1-\tilde{x}^2}U_{j-1}(\tilde{x}), \tag{5.19}$$

$$\int_{-1}^{1} f_r(\xi)d\xi = \pi B_0^r \qquad \left(r = 3,6\right),$$

породжує СЛАР порядку $2N+2$ щодо невідомих $B_j^r \ \left(r = 3,6;\ j = \overline{0,N}\right)$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n}\chi_{mj}^3 B_j^3 + \sum_{j=0}^{n}\psi_{mj}B_j^6 = F_3\left(x_m\right), \\ \sum_{j=0}^{n}\psi_{mj}B_j^3 + \sum_{j=0}^{n}\chi_{mj}^6 B_j^6 = F_6\left(x_m\right), \\ \pi B_0^3 = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{aver}^{in}(a,h) - 2a\left(T_2 - T_1\right), \\ \pi B_0^6 = \left[w\right](a) - \left[w\right](-a), \qquad m = \overline{1,N}, \end{cases} \tag{5.20}$$

де

$$\chi_{mj}^3 = -\delta_{0j}\gamma_1\pi\left(1-\frac{m}{N+1}\right) + \left(1-\delta_{0j}\right)\zeta_{mj}\left(\frac{\gamma_1}{j}+\frac{\beta_1}{\varepsilon_m}\right),$$

$$\chi_{mj}^6 = -\delta_{0j}\gamma_2\pi\left(1-\frac{m}{N+1}\right) + \left(1-\delta_{0j}\right)\zeta_{mj}\left(\frac{\gamma_2}{j}+\frac{\beta_2}{\varepsilon_m}\right),$$

$$\varepsilon_m = \sin\frac{m\pi}{N+1}, \quad \zeta_{mj} = \sin\frac{jm\pi}{N+1}, \quad \eta_{mj} = \cos\frac{jm\pi}{N+1},$$

$$\psi_{mj} = (p_2 - p_1)\frac{\eta_{mj}}{\varepsilon_m}.$$

### 5.3. Побудова рівнянь СМ МФС

На відміну від підрозділу **5.2**, де сформульована задача розв’язується методом МФС, застосування СМ МФС згідно з його концепцією не вимагає підстановки співвідношень зовнішньої задачі (5.5) у рівняння математичної моделі (5.7), (5.8) з використанням крайових умов (5.2).

Для отримання повної системи рівнянь поставленої задачі достатньо доповнити згадані співвідношення (5.2), (5.5), (5.7), (5.8) умовами балансу та однозначності переміщень (5.14):

$$\begin{cases} w^{in}(x,\pm h) = w\ (x,\pm h), \\ \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h) - T_k, \\ \dfrac{G_x^{in}}{2}\left\langle \dfrac{\partial w^{in}}{\partial x} \right\rangle_h - \sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}^{in}\right]_h(\xi)d\xi + F_{aver}^{in}(x,h) = 0, \\ -\dfrac{\left[w^{in}\right]_h}{h} = \dfrac{\left\langle \sigma_{yz}^{in} \right\rangle_h}{G_y^{in}}, \\ \sigma_{yzk}^{\pm}(x) = \mp p_k f_3\ (x) - Cg_6(x) + \sigma_{yzk}^{0\pm}(x), \\ \sigma_{xzk}^{\pm}(x) = \mp Cf_6\ (x) + p_k g_3(x) + \sigma_{xzk}^{0\pm}(x), \\ \dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial y}\ (x) = \mp pf_3\ (x) - p_{3-k}g_6(x) + \dfrac{\sigma_{yzk}^{0\pm}(x)}{G_k}, \\ \dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\ (x) = \mp p_{3-k} f_3\ (x) + pg_6(x) + \dfrac{\sigma_{xz}^{0\pm}k(x)}{G_k}, \\ \int\limits_{-a}^{a} f_3\ (\xi)d\xi = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{aver}^{in}(a,h) + 2a\left(T_1 - T_2\right), \\ \int\limits_{-a}^{a} f_6\ (\xi)d\xi = \left[w\right]_h(a) - \left[w\right]_h(-a). \end{cases} \quad (5.21)$$

Подальший розв’язок (5.21) передбачає застосування методу колокацій. Вводимо у розгляд множину точок $x_m \in L'\ \left(m = \overline{1,N}\right)$ і дискретизуємо співвідношення (5.21) у цій множині точок. У результаті отримуємо СЛАР порядку $6N$ для визначення $6N$ невідомих $\dfrac{\partial w^{in}}{\partial x}(x_m,\pm h),\ \sigma_{yz}^{in}(x_m,\pm h),\ f_3(x_m),\ f_6(x_m)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^{in}}{\partial x}(x_m, \pm h) = \dfrac{\partial w}{\partial x}(x_m, \pm h), \\ \sigma_{yz}^{in}(x_m, \pm h) = \sigma_{yzk}(x_m, \pm h) - T_k, \\ \dfrac{G_x^{in}}{2}\left\langle \dfrac{\partial w^{in}}{\partial x} \right\rangle_h (x_m) - \sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-a}^{x_m}\left[\sigma_{yz}^{in}\right]_h(\xi)d\xi + F_{aver}^{in}(x_m, h) = 0, \\ -\dfrac{\left[w^{in}\right]_h(x_m)}{h} = \dfrac{\left\langle \sigma_{yz}^{in} \right\rangle_h (x_m)}{G_y^{in}}, \\ \sigma_{yzk}^{\pm}(x_m) = \mp p_k f_3(x_m) - Cg_6(x_m) + \sigma_{yzk}^{0\pm}(x_m), \\ \sigma_{xzk}^{\pm}(x_m) = \mp Cf_6(x_m) + p_k g_3(x_m) + \sigma_{xzk}^{0\pm}(x_m), \\ \dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial y}(x_m) = \mp pf_3(x_m) - p_{3-k}g_6(x_m) + \dfrac{\sigma_{yzk}^{0\pm}(x_m)}{G_k}, \\ \dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial x}(x_m) = \mp p_{3-k} f_3(x_m) + pg_6(x_m) + \dfrac{\sigma_{xz}^{0\pm}k(x_m)}{G_k}, \\ \int\limits_{-a}^{a} f_3(\xi)d\xi = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a) + 2h\rho F_{aver}^{in}(a,h) + 2a(T_1 - T_2), \\ \int\limits_{-a}^{a} f_6(\xi)d\xi = [w]_h(a) - [w]_h(-a), \end{cases} \tag{5.22}$$

оскільки $\sigma_{yzk}(x_m, \pm h), w(x_m, \pm h)$ завдяки (5.5) повністю визначаються через множину значень стрибків $f_3(x_m)$, $f_6(x_m)$ у точках колокації. Ця множина значень дає змогу легко встановити НДС у будь-якій точці матриці (зовнішня задача). Наприклад, якщо вибрати множину точок колокації у вигляді $x_m = \cos\dfrac{m\pi}{N+1}$ $\left(m = \overline{1, N}\right)$ та, відповідно, розвинення функцій стрибка $f_r(x)$ $(r = 3, 6)$ у ряд

$$f_r(\tilde{x}_m) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{x}_m^2}} \sum_{j=0}^{N} B_j^r T_j(\tilde{x}_m), \tag{5.23}$$

то легко можна отримати значення $B_j^r$ за отриманими з СЛАР (5.22) значеннями $f_r(\tilde{x}_m)$ за інтерполяційною формулою

$$\varphi(x)=\frac{\pi}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\varphi(\xi_i)\sum_{n=0}^{N}T_n(\xi_i)T_n(x), \tag{5.24}$$

$$B_j^r=\frac{\pi}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\varphi(\xi_i)T_j(\xi_i),\ \text{де}\ \ \xi_i=\cos\frac{2i-1}{2(N+1)}\pi. \tag{5.25}$$

### 5.4. Дослідження НДС у матриці і включенні

Для оцінки впливу наявності включення на НДС матриці зручно проаналізувати деякі характеристики, зокрема узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які описують напружено-деформований стан поблизу вістря включення.

Введемо полярну систему координат $(r,\theta)$ з початком біля правого або лівого краю включення [268] (рис. 5.1) $z=\pm(z_1\mp a),\ z_1=r\cdot\exp^{i\theta}$ і у малому околі торців $\left(|z_1|\ll 2a\right)$ з урахуванням ((2.80), (2.84), (2.87) – (2.91) отримаємо для компонент тензора напружень в околі вістря дефекту двочленні асимптотичні залежності

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{a\pi G_1G_2}}\left[\left(\frac{r}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}\pm\mu}k_1^{\pm}M^{\mp}(-1)+\left(\frac{r}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}\mp\mu}k_2^{\pm}M^{\pm}(1)\right]+$$

$$+\frac{pG_{av}}{a}\begin{Bmatrix}\chi_3^{\pm}\\ -\dfrac{G_j}{\sqrt{G_1G_2}}\chi_6^{\pm}\end{Bmatrix}+O\left(r^{1/2\mp\mu}\right),\ \ M^{\mp}(\delta)=\begin{Bmatrix}-\dfrac{G_j}{\sqrt{G_1G_2}}\sin\theta^{\mp}+\delta\cos\theta^{\mp}\\ \delta\sin\theta^{\mp}+\dfrac{G_j}{\sqrt{G_1G_2}}\cos\theta^{\mp}\end{Bmatrix}, \tag{5.26}$$

$$\theta^{\mp}=\frac{\theta}{2}\mp\mu\theta,\ \ z\in S_k\ (k=1,2;\ j=3-k),$$

$$\chi_r^{\pm} = \lim_{x\to a_m^{\pm}\mp 0}\left[g_r(x)+tg\pi\mu\bullet f_{9-r}(x)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\cos\pi\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\mp\mu\right)}{(n-1)!\Gamma\left(\frac{3}{2}\mp\mu\right)}B_n^r \quad (r=3,6), \tag{5.27}$$

де згідно з (5.17)

$$B_n^r = \begin{cases} A_n^1 - A_n^2, & r=6, \\ A_n^1 + A_n^2, & r=3, \end{cases}$$

$k_1^{\pm}, k_2^{\pm}$ – складові КІН, які вводяться із співвідношень:

$$\lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta=0}} 2\sqrt{\pi a}\left\{\sigma_{yz}(\pm a)+i\sigma_{xz}(\pm a)\right\} =$$
$$= \left(\frac{r}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}\pm\eta} L_j(-1)k_1^{\pm} + \left(\frac{r}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}\mp\eta} L_j(1)k_2^{\pm}, \tag{5.28}$$

$$k_m^{\pm} = \frac{q\sqrt{\pi G_1 G_2}}{(G_1+G_2)\sqrt{a}\cos\pi\mu}\varphi_m^{*}(\pm 1),$$
$$L_j(r) = \left(r - i\frac{G_j}{\sqrt{G_1G_2}}\right),\; z\in S_k\; (k=1,2;\; j=3-k). \tag{5.29}$$

Коефіцієнти $\chi_r^{\pm}$ характеризують другі члени асимптотичних залежностей і у граничних випадках тріщини й абсолютно жорсткого включення вони визначаються лише однорідним розв'язком задачі.

Якщо матеріали півплощин механічно еквівалентні $(G_1 = G_2 = G)$ або маємо граничні випадки міжфазних тріщини чи абсолютно жорсткого (штивного) включення, то особливість розв'язку коренева ($\mu = 0$) і УКІН мають вигляд:

$$\lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta=0}} 2\sqrt{\pi a}\left\{\sigma_{yz}\left(\pm a\right)+i\sigma_{xz}\left(\pm a\right)\right\}=\left(\frac{r}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(K_{31}^{\pm}+iK_{32}^{\pm}\right),$$
$$\left(K_{31}^{\pm}=k_2^{\pm}+k_1^{\pm},\quad K_{32}^{\pm}=k_2^{\pm}-k_1^{\pm}\right). \tag{5.30}$$

Після розв'язування СЛАР (5.20) для обчислення НДС в кожній з точок колокації отримані $B_j^r\ \left(r=3,6;\ j=\overline{0,n}\right)$ підставляємо у співвідношення (5.18) – (5.19), а потім у (5.5):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yz}^{\pm}\left(x_m\right)=\mp\frac{p_k}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\eta_{mj}B_j^3-\frac{C}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\zeta_{mj}B_j^6+\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_m\right),\\
&\sigma_{xz}^{\pm}\left(x_m\right)=\mp\frac{C}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\eta_{mj}B_j^6+\frac{p_k}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\zeta_{mj}B_j^3+\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_m\right),\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}\left(x_m\right)=\mp\frac{p}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\eta_{mj}B_j^3-\frac{p_{3-k}}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\zeta_{mj}B_j^6+\frac{\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_m\right)}{G_k},\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\left(x_m\right)=\mp\frac{p_{3-k}}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\eta_{mj}B_j^6+\frac{p}{\varepsilon_m}\sum_{j=0}^{N}\zeta_{mj}B_j^3+\frac{\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_m\right)}{G_k}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Звідси, повертаючись до умов (5.2), можна отримати розрахункові залежності для компонент НДС всередині включення

$$\sigma_{yz}^{in\,+}\left(x_m\right)=\sigma_{yz2}^{+}\left(x_m\right)-T_2,\quad \sigma_{yz}^{in\,-}\left(x_m\right)=\sigma_{yz1}^{-}\left(x_m\right)-T_1, \tag{5.32}$$

$$\left\langle\sigma_{yz}^{in}(x_m)\right\rangle_h=\left\langle\sigma_{yzk}(x_m)\right\rangle_h-T_1-T_2,$$

і виразів для УКІН

$$K_{31}^{\pm}+iK_{32}^{\pm}=\sqrt{\pi}\sum_{j=0}^{n}\left(\pm 1\right)^j\left(CB_j^6-ip_kB_j^3\right). \tag{5.33}$$

З урахуванням значення інтегралів

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(x)dx}{\sqrt{1-x^2}\left(x-\tilde{z}\right)}=-\frac{\omega^j}{\sqrt{\tilde{z}^2-1}},\ \left\{\tilde{z}=z/a;\ \operatorname{Re}\tilde{z}>1\right\},$$

$$g_k(\tilde{z})=-\frac{1}{\sqrt{\tilde{z}^2-1}}\sum_{j=0}^{n}B_j^k\omega^j,\ \int g_k(\tilde{z})d\tilde{z}=-B_0^k\ln\frac{1}{2\omega}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}B_j^k\omega^j,\ \omega=\tilde{z}-\sqrt{\tilde{z}^2-1}$$

нескладно отримати вирази для компонент НДС у матриці:

$$\sigma_{yz}(\tilde{z})+i\sigma_{xz}(\tilde{z})=\frac{-i}{2\sqrt{\tilde{z}^2-1}}\sum_{j=0}^{n}\left(B_j^3+2iCB_j^6\right)\omega^j+\sigma_{yz}^0(\tilde{z})+i\sigma_{xz}^0(\tilde{z}), \qquad (5.34)$$

$$w(\tilde{z})=\frac{1}{2G_k}\operatorname{Re}\left\{\left(B_0^3+2iCB_0^6\right)\ln\frac{1}{2\omega}-\sum_{j=1}^{n}\left(B_j^3+iCB_j^6\right)\frac{\omega^j}{j}\right\}+w^0(\tilde{z}).$$

### 5.5. Числовий аналіз

Для ілюстрації методики дослідження зробимо детальніший аналіз розв’язку задачі для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ($G_1=G_2=G$) та навантажування однорідним полем зсувних напружень на безмежності $\tilde{\tau}=\tau/G, \tilde{\tau}_2=\tau_2/G$, зосередженими силами інтенсивністю $\tilde{Q}=Q/\pi aG$ (випадки №2-5 за відсутності нормального стиску, Додаток Б) та дислокаціями інтенсивністю $\tilde{b}=b/\pi a$ за схемою $\left(Q_2=-Q_1=Q,\ b_2=-b_1=b,\ z_2=x_2+id=\overline{z}_1\right)$ (випадок №13, Додаток Б). При цьому сили натягу для прикладу приймалися як сталі, так і залежні від пружних властивостей включення у вигляді $\tilde{T}_2=\tilde{T}_1=T/G=k_T\left(G^{in}/G\right)^{\alpha}$.

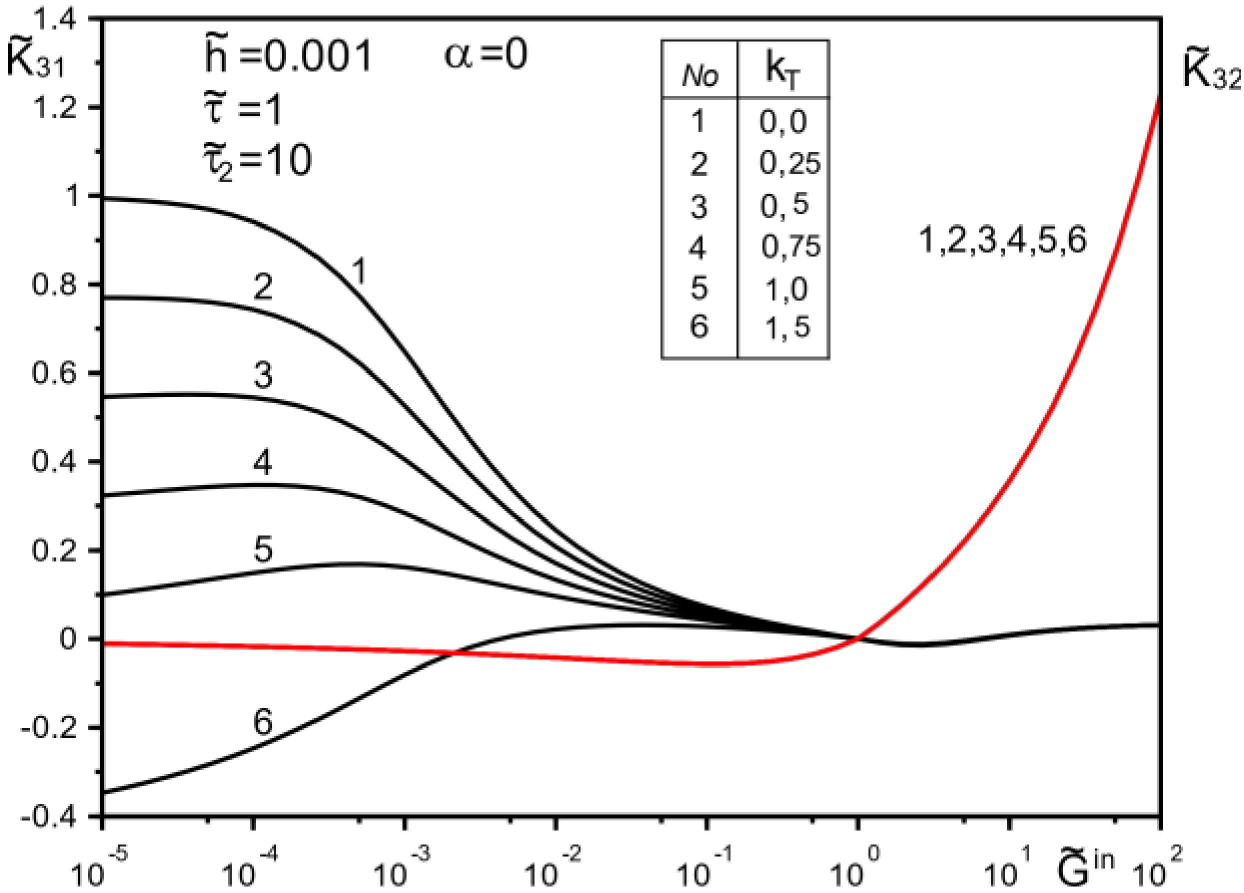



Рис. 5.2. Вплив інтенсивності поверхневого натягу $k_T$ на $\tilde{K}_{31}$ (чорна лінія) та $\tilde{K}_{32}$ (червона лінія)

На рисунках 5.2 – 5.5 показана залежність знерозмірених узагальнених УКІН $\tilde{K}_{31} = K_{31} / G\sqrt{\pi a}$, $\tilde{K}_{32} = K_{32} / G\sqrt{\pi a}$ від згаданих знерозмірених параметрів. Виявлено, що навантаження $\tilde{\tau}$ та силовий чинник $\tilde{Q}$ впливають практично лише на $\tilde{K}_{31}$ (ліва частина кожного рисунка) для більш податного від матриці включення, в той час як $\tilde{\tau}_2$ та дислокація $\tilde{b}$ – на $\tilde{K}_{32}$ (права сторона рисунків) для жорсткішого від матриці включення.

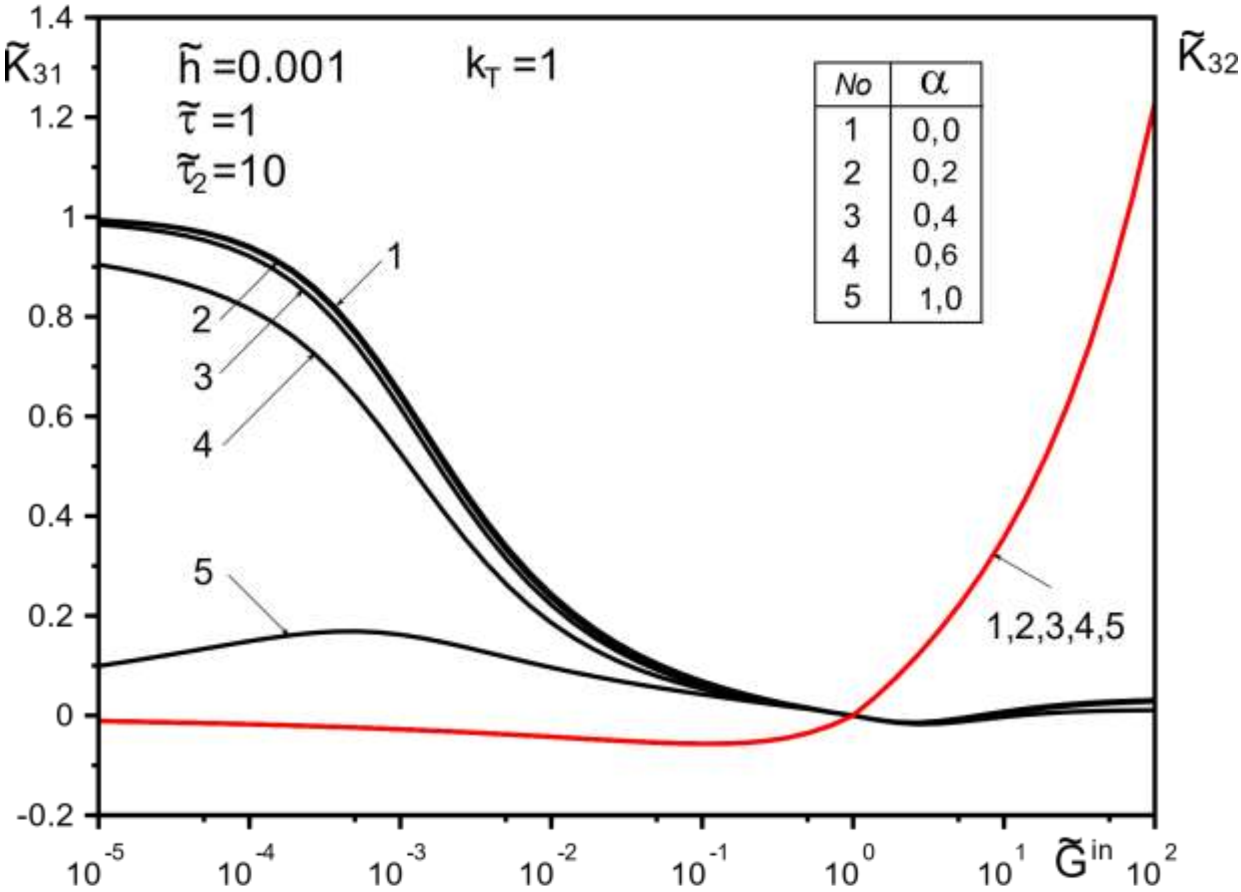



Рис. 5.3. Вплив параметра $\alpha$ поверхневого натягу на $\tilde{K}_{31}$ (чорна лінія) та $\tilde{K}_{32}$ (червона лінія)

При цьому зростання інтенсивності натягу $k_T$ істотно зменшує $\tilde{K}_{31}$ навіть до зміни знаку, а зростання $\alpha$ навпаки, зменшує $\tilde{K}_{31}$ (рис. 5.2, 5.3). За такої симетрії навантажування зміна цих параметрів жодного впливу на $\tilde{K}_{32}$ не чинить. Така ж тенденція зберігається і при навантаженні зосередженими чинниками $\tilde{Q}$ та $\tilde{b}$ (рис. 5.4, 5.5). Збільшення відносної віддалі точки прикладання цих чинників від лінії включення $\tilde{d} = d/a$ понад 1 істотно зменшує локальність її впливу на НДС задачі (рис.5.4). На відміну від цього зміна абсцис точок прикладання зосереджених чинників вздовж осі включення істотно впливає на обидва КІН, зменшуючи $\tilde{K}_{31}$ і збільшуючи $\tilde{K}_{32}$ (рис.5.5).

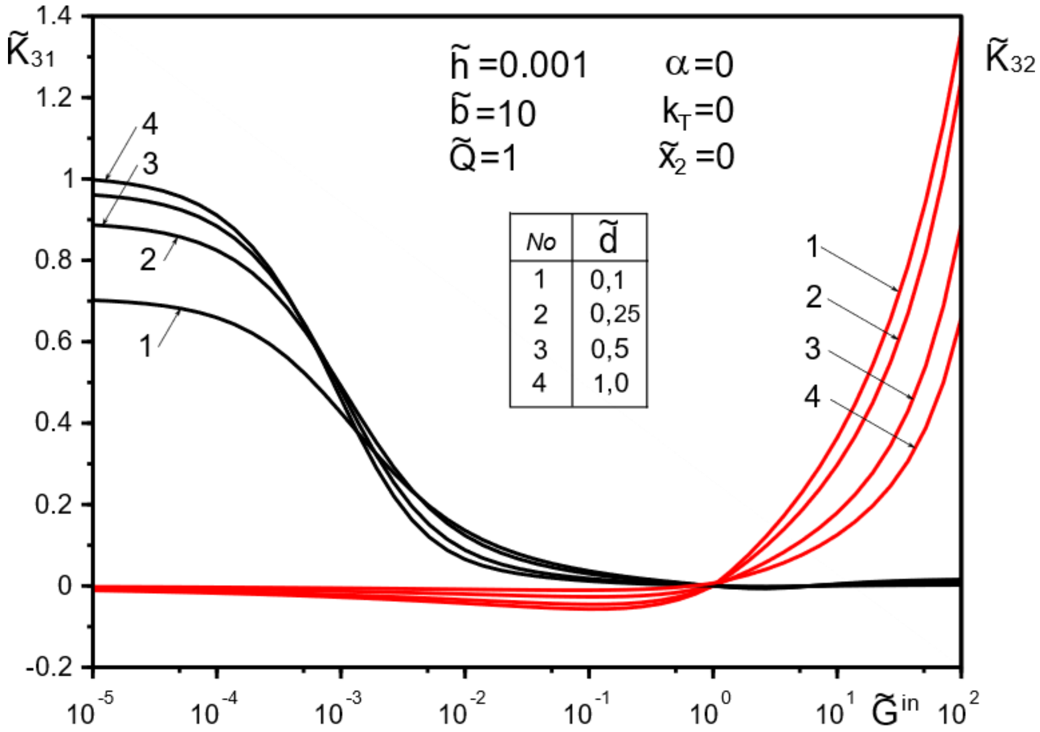



Рис. 5.4. Вплив віддаленості точок прикладання зосереджених чинників $\tilde{Q}$ та $\tilde{b}$ від осі включення за сталого поверхневого натягу на $\tilde{K}_{31}$ (чорні лінії) та $\tilde{K}_{32}$ (червоні лінії)

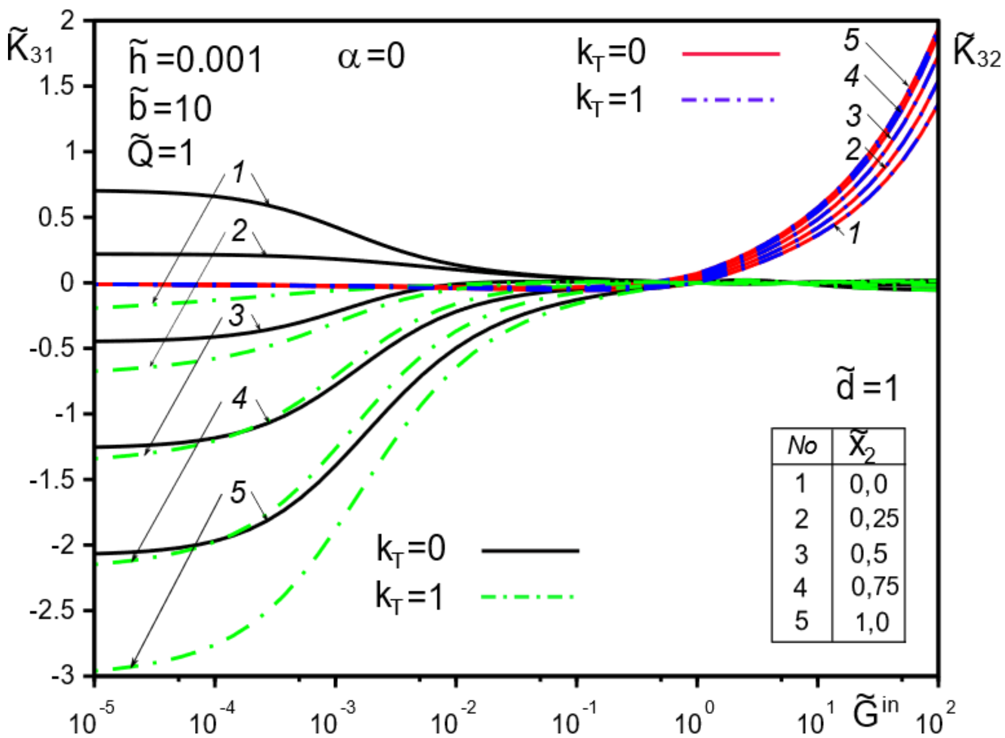



Рис. 5.5. Вплив зміщення точок прикладання зосереджених чинників $\tilde{Q}$ та $\tilde{b}$ уздовж осі включення за відсутнього та сталого поверхневого натягу на $\tilde{K}_{31}$ (чорні та зелені лінії) та $\tilde{K}_{32}$ (червоні та сині лінії)

На рисунках 5.6, 5.7 проілюстрований вплив натягу на енергію деформації $\tilde{W}^d$ матриці та $\tilde{W}_{in}^d$ включення у діапазоні змін координат точки прикладання дислокації $\left(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2\right)$ для податного включення. Головними тенденціями для зміни енергії можна вважати: 1) в цілому поява натягу знижує інтенсивність енергії деформації та поля напружень в околі податного включення; 2) швидке зменшення впливу дислокації з її віддаленням від осі включення на поле НДС та, відповідно, енергію деформації; 3) наявність локального екстремуму енергії при зміщенні точки розташування $\tilde{x}_2$ дислокації приблизно на $1{,}5a$ вздовж осі включення (рис. 5.7).

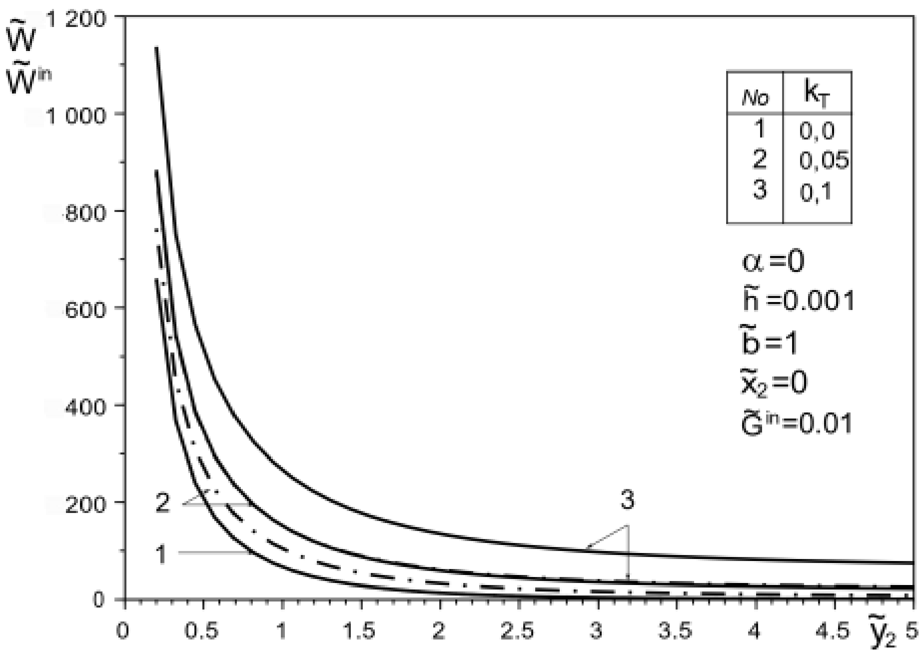



Рис. 5.6. Вплив параметра натягу $k_T$ на енергію деформації $\tilde{W}^d$ матриці (суцільна лінія) та включення $\tilde{W}_{in}^d$ (штрих-пунктир) при віддаленні дислокації від осі податного включення

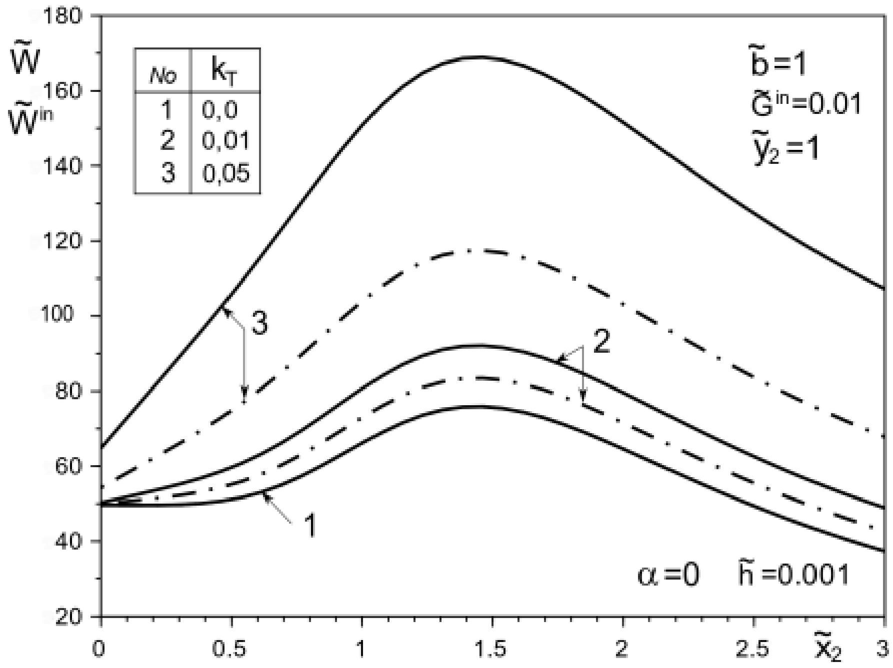



Рис. 5.7. Вплив параметра натягу $k_T$ на енергію деформації $\tilde{W}^d$ матриці (суцільна лінія) та включення $\tilde{W}_{in}^d$ (штрих-пунктир) при зміщенні точки прикладання дислокації вздовж осі податного включення

Вплив параметра натягу $k_T$ на поле напружень $\tilde{\sigma}_{yz}$ в околі включення відображено на рис. 5.8 – 5.12. Поява натягу знижує інтенсивність поля $\tilde{\sigma}_{yz}$. Це особливо помітно у податному діапазоні $\tilde{G}_{in}$ (рис. 5.8 – 5.10). Виявлено, що натяг істотно впливає лише на $\tilde{K}_{31}$, зменшуючи його, в той час як $\tilde{K}_{32}$ (рис. 5.11 – 5.12) практично не змінюється.

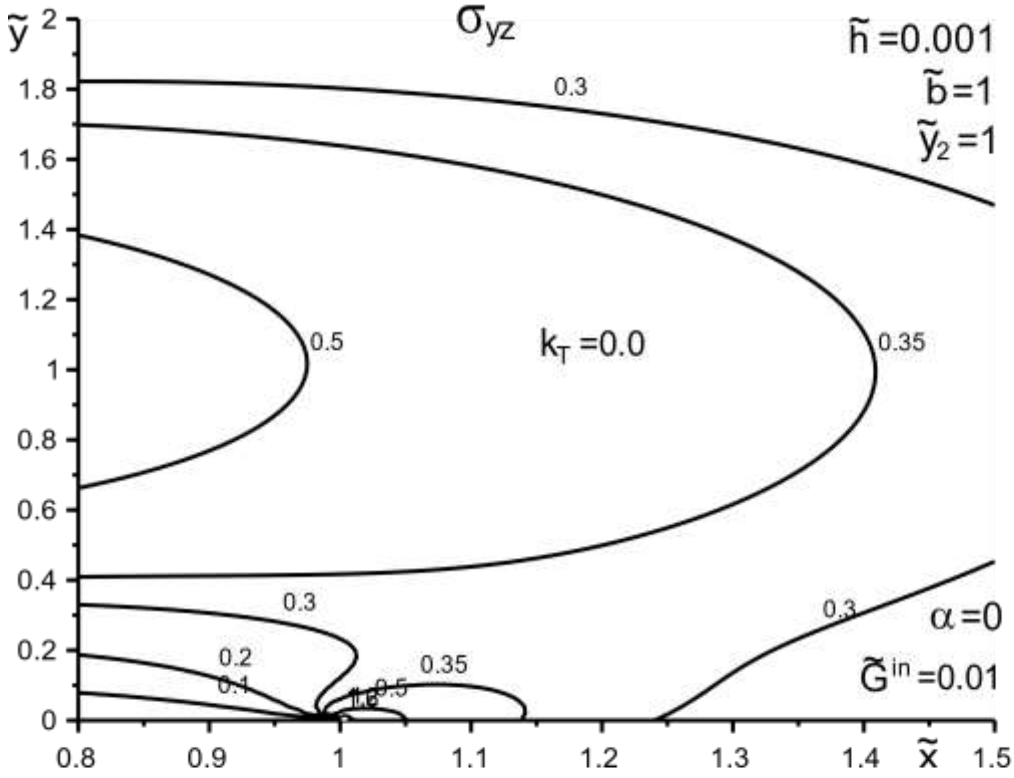



Рис. 5.8. Зміна поля напружень $\tilde{\sigma}_{yz}$ в околі кінчика включення при відсутності натягу

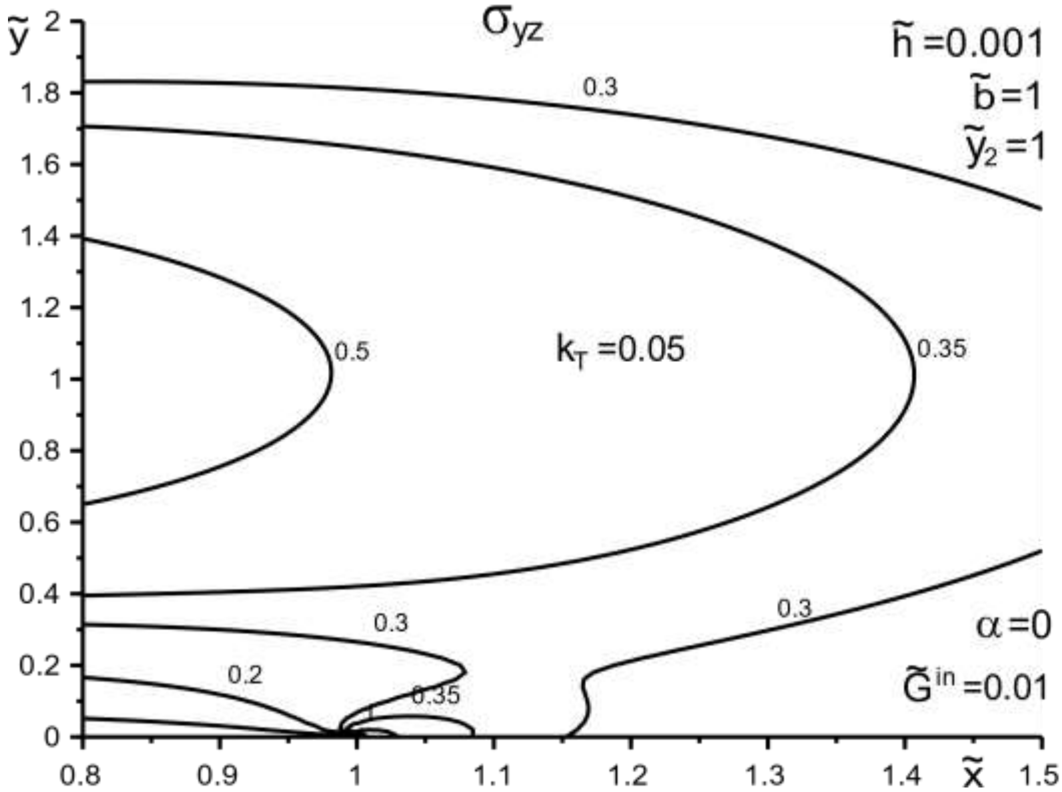



Рис. 5.9. Зміна поля напружень $\tilde{\sigma}_{yz}$ в околі кінчика включення при появі натягу.

При цьому віддалення від включення ядра дислокації перпендикулярно до його осі очікувано зменшує $\tilde{K}_{31}$, а для $\tilde{K}_{32}$ існує екстремум на висоті приблизно $a$. Переміщення ядра дислокації вздовж осі включення істотно впливає на обидва КІН, зменшуючи $\tilde{K}_{31}$ до екстремуму приблизно на віддалі півдовжини включення від його кінчика і збільшуючи $\tilde{K}_{32}$ до екстремуму над самим кінчиком включення (рис.5.12).

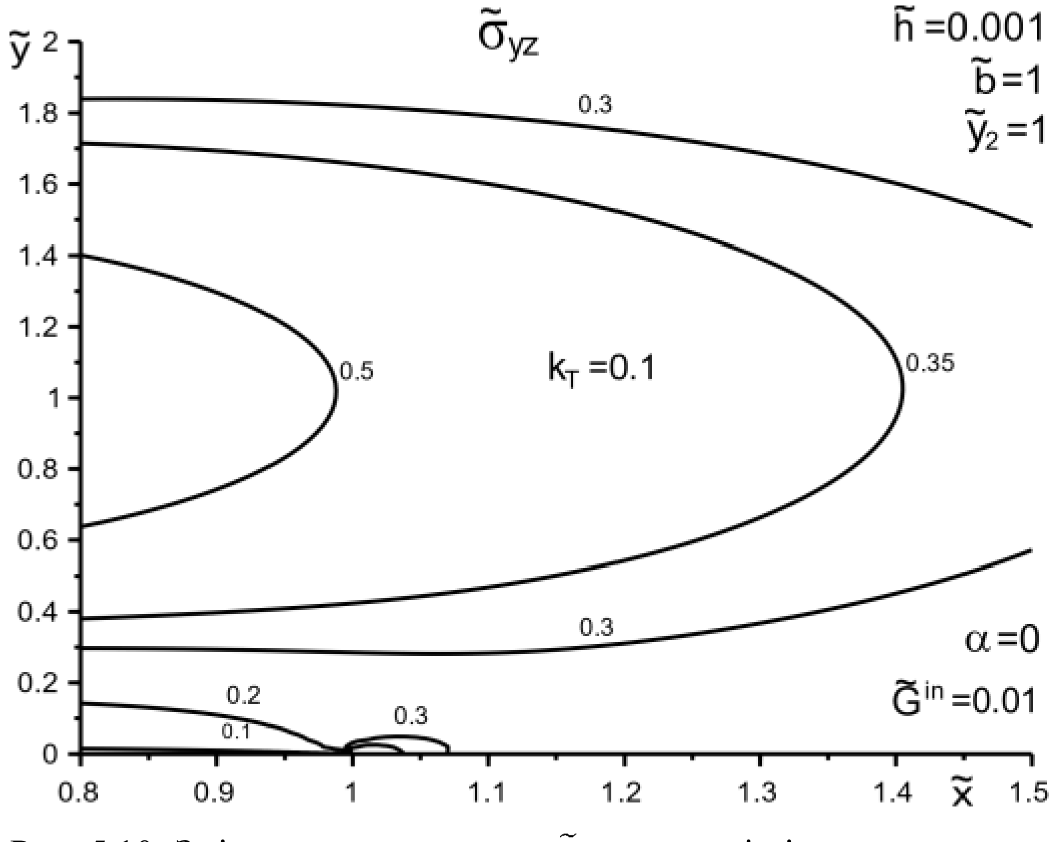



Рис. 5.10. Зміна поля напружень $\tilde{\sigma}_{yz}$ в околі кінчика включення при появі натягу

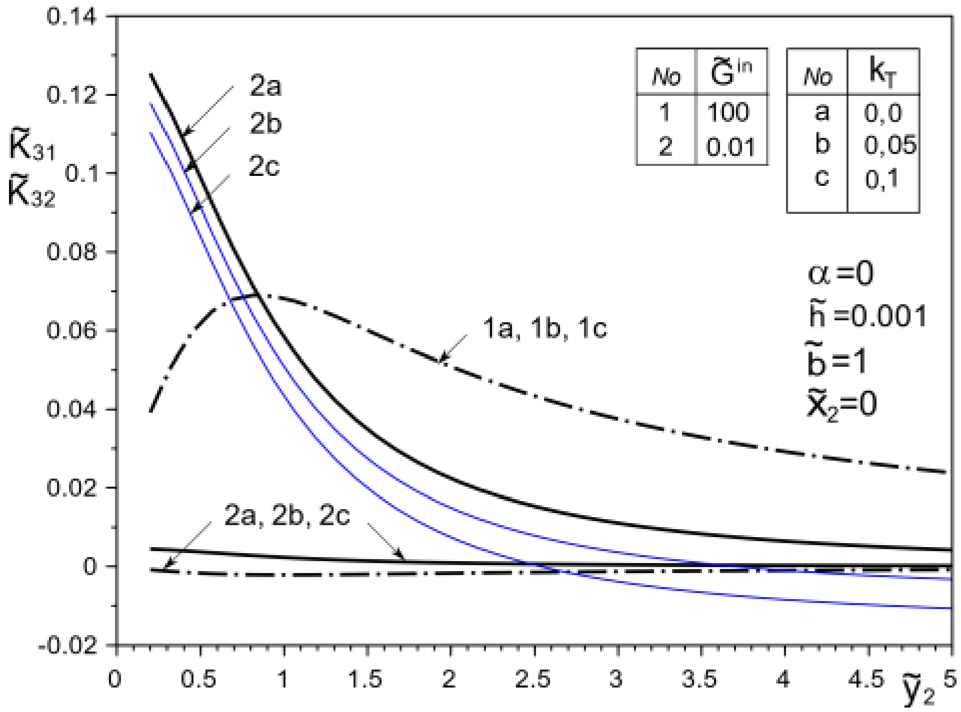



Рис. 5.11. Вплив параметра натягу $k_T$ на УКІН $\tilde{K}_{31}$ (суцільна лінія) та $\tilde{K}_{32}$ (штрих-пунктир) при віддаленні дислокації від осі включення

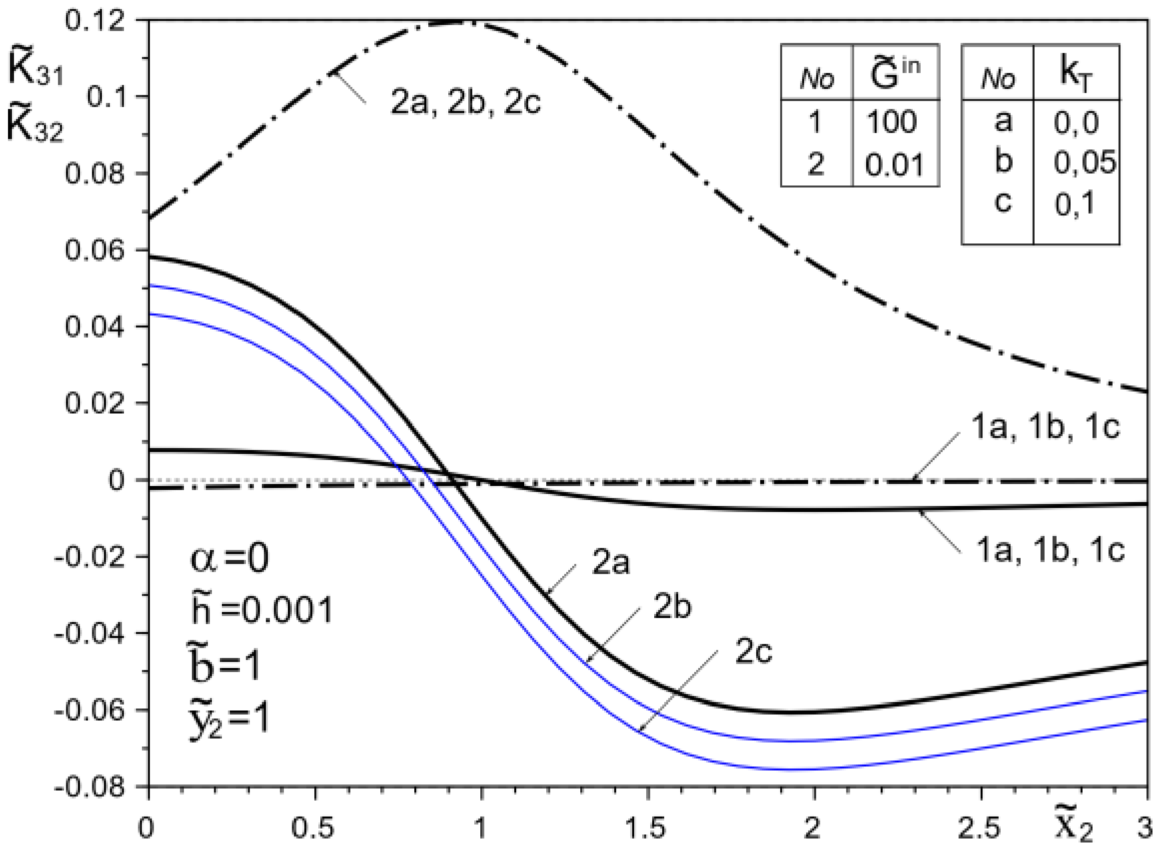



Рис. 5.12. Вплив параметра натягу $k_T$ на УКІН $\tilde{K}_{31}$ (суцільна лінія) та $\tilde{K}_{32}$ (штрих-пунктир) при зміщенні точки прикладання дислокації вздовж осі включення

Сили, що діють на дислокацію з вектором Бюргерса $b$ у т. $\varsigma_{*k} \in S_k$ (формули Peach-Kehler) (рис. 5.13 – 5.16)

$$F_x(\varsigma_{*k}) = b\widehat{\sigma}_{yz}(\varsigma_{*k}),\ F_y(z_{*k}) = -b\widehat{\sigma}_{xz}(\varsigma_{*k}) \qquad (5.35)$$

істотно залежать від координат прикладання дислокації та механічних властивостей включення. Так, незалежно від жорсткості існує локальний екстремум $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$ при розташуванні дислокації приблизно над вершиною включення (рис. 5.15 – 5.16). В той же час включення майже не впливає на дислокацію вже на висоті приблизно $a$ (рис. 5.13 – 5.14). Вплив натягу на $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$ помітний лише для податного включення.

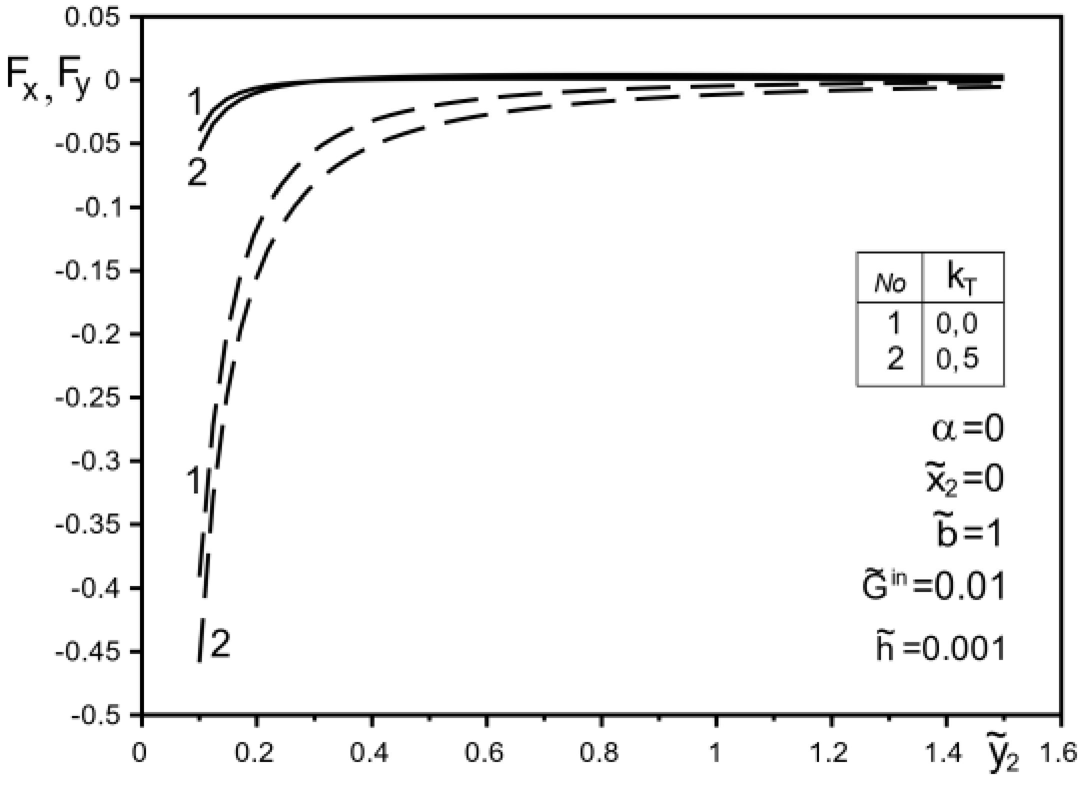



Рис. 5.13. Вплив параметра натягу $k_T$ на сили $\tilde{F}_x$ (суцільна лінія), $\tilde{F}_y$ (штрих), що діють на дислокацію при її віддаленні від осі податного включення

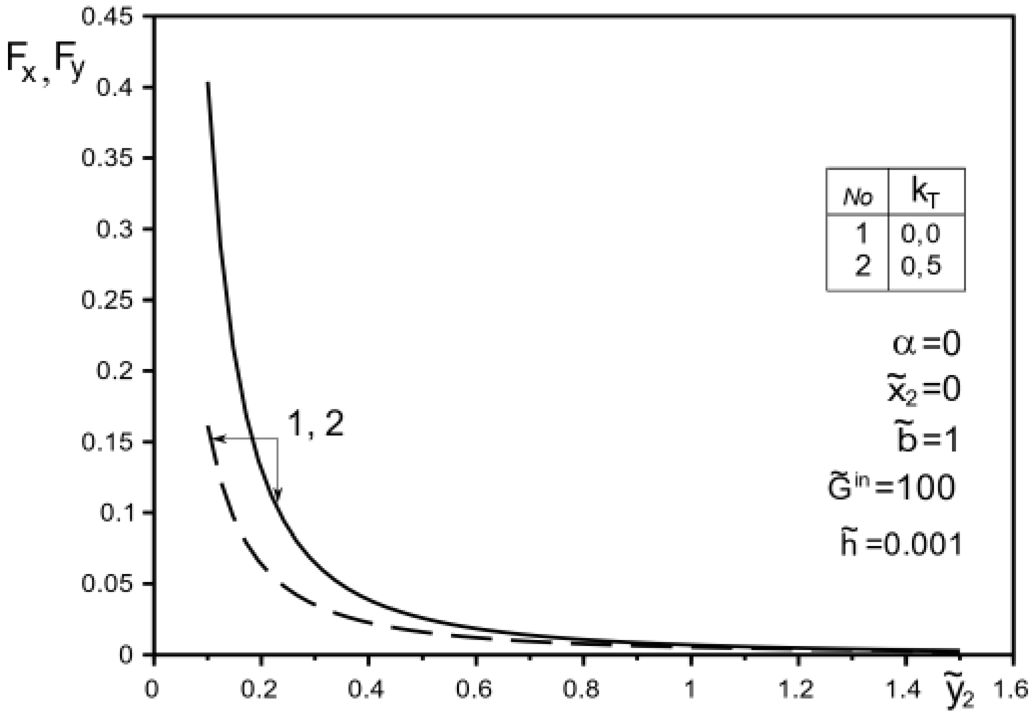



Рис. 5.14. Вплив параметра натягу $k_T$ на сили $\tilde{F}_x$ (суцільна лінія), $\tilde{F}_y$ (штрих), що діють на дислокацію при її віддаленні від осі жорсткого включення

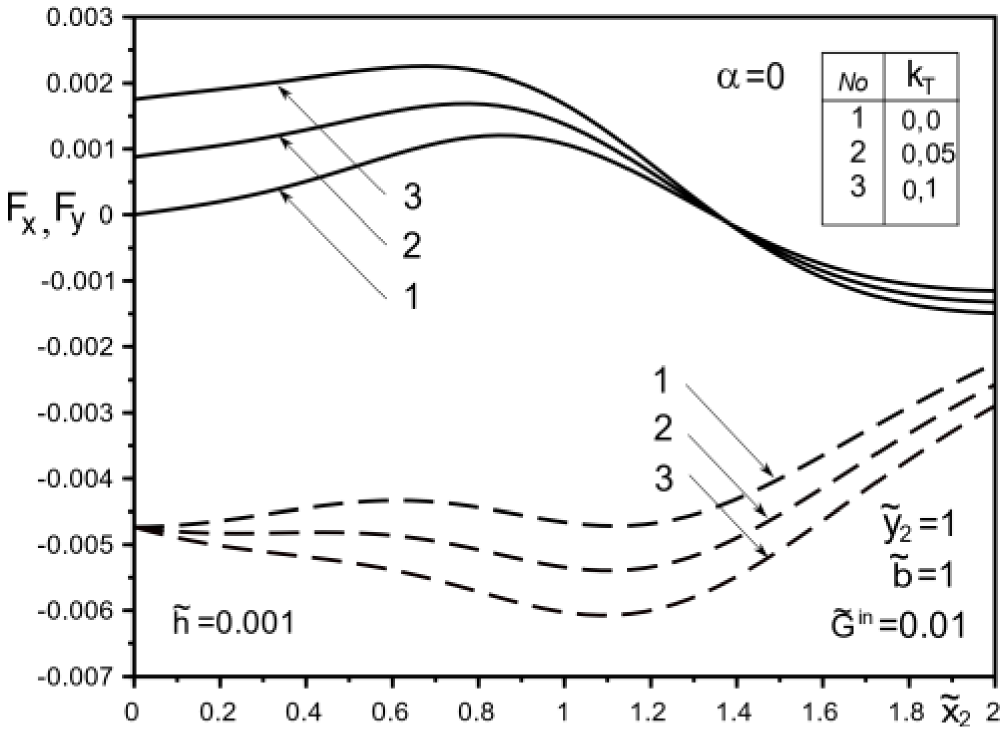



Рис. 5.15. Вплив параметра натягу $k_T$ на сили $\tilde{F}_x$ (суцільна лінія), $\tilde{F}_y$ (штрих), що діють на дислокацію при зміщенні точки прикладання дислокації вздовж осі податного включення

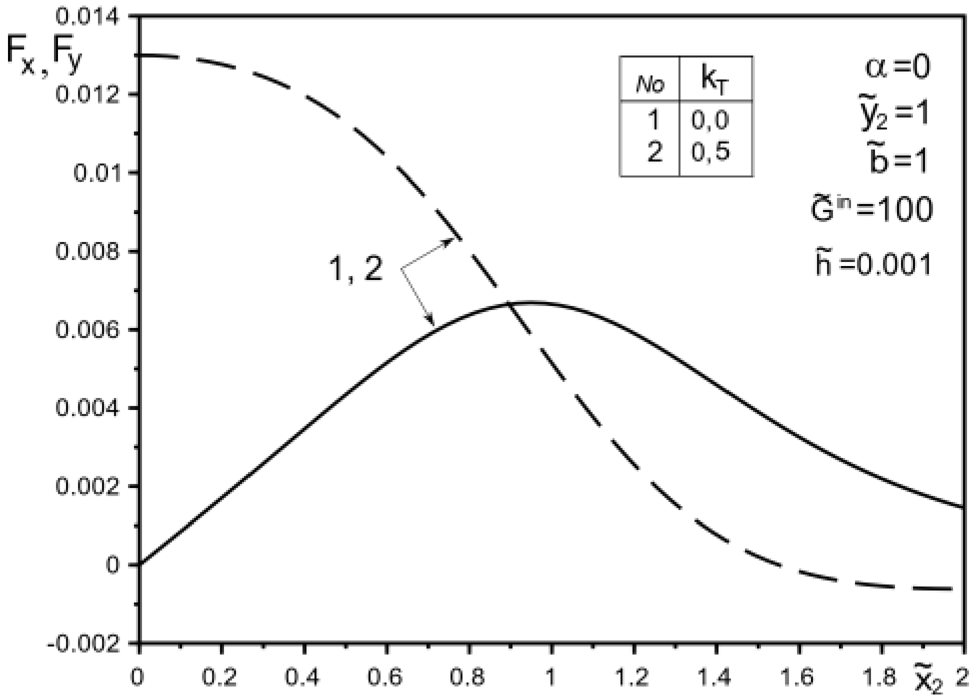



Рис. 5.16. Вплив параметра натягу $k_T$ на сили $\tilde{F}_x$ (суцільна лінія), $\tilde{F}_y$ (штрих), що діють на дислокацію при зміщенні точки прикладання дислокації вздовж осі жорсткого включення

Розрахунки проводилися на створеному у системі матричної математики SciLab (ліцензія OpenSource) авторському програмному комплексі. Програми було створено як для розрахунків за МФС, так і СМ МФС з метою порівняння. Було виявлено, що отримані числові результати практично не відрізняються, але програми для СМ МФС значно простіше створювати і модифікувати. При заданій відносній точності розрахунків $10^{-6}$ виявилося достатнім обмежитися 21 точкою колокації для обох методів. Наступне збільшення кількості точок колокації не показало якісного і кількісного покращення результатів.

**Висновки до розділу 5**

Методами МФС та СМ МФС отримано розв'язок сформульованої задачі деформування біматеріалу з тонким стрічковим міжфазним включенням за урахування поверхневих напружень на межі поділу матеріалів включення і матриці.

Рівняння математичної моделі при застосуванні обох згаданих методів залишаються незмінними, як і методи розв'язування відповідних сингулярних інтегральних рівнянь (хоча вони у разі застосування МФС вони дещо інші і складніші). Проблеми врахування поверхневих напружень та інших особливостей неідеального контакту між складовими у МФС переносяться у рівняння, а у СМ МФС вони враховані у окремих рівняннях проміжної задачі.

Виявлені у числових розрахунках особливості впливу натягу на НДС у матриці та включенні за різного навантаження. Зокрема:

1). Поява натягу знижує інтенсивність енергії деформації та поля напружень в околі включення. Натяг істотно зменшує $K_{31}$, водночас практично не впливаючи на $K_{32}$.

2). Аналогічний ефект має зміна точок прикладання зосереджених силових чинників.

3). Спостерігаються певні комбінації механічних параметрів включення та розташування ядра дислокації, коли є добре виражені екстремуми значень енергії деформації, узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень та сил, що діють на дислокацію.

4). Виявлено, що поява натягу максимально впливає на гвинтову дислокацію при її розташуванні практично над вістрям податного включення.

5). Згадані ефекти можуть бути використані при оптимізації навантажування розглянутої мікроструктури.

# РОЗДІЛ 6. ДЕФОРМУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО МАСИВУ З ТОНКИМ БАГАТОШАРОВИМ СТРІЧКОВИМ МІЖФАЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Особливої уваги в сучасній техніці та технологіях набувають мікроскопічні шаруваті структури у таких галузях, як мікроелектроніка, біотехнології, енергетика, озброєння тощо. Серед найбільш перспективних наукових проектів експерти називають значне підвищення продуктивності комп'ютерів, відновлення людських органів з використанням відтворених тканин (отриманих з 3D-друкарок), отримання нових матеріалів, створених в буквальному сенсі безпосередньо із заданих молекул та атомів тощо. Існує певна складність математичного моделювання механіки наноструктур, яка все ще залишається гостро актуальною проблемою теорії матеріалознавства. На даному етапі розвитку теорії можна зосередитися на конструюванні придатних для вивчення різномасштабних структур ускладнених конститутивних рівнянь та опрацювання методів їхнього розв'язування. В основу такого моделювання переважно покладають концепцію «репрезентативного елементу об'єму» (RVE) [385, 408, 410] для наділення придатних для макроструктурних об'єктів класичних моделей континууму певними додатковими властивостями, які в межах застосування гіпотези суцільності могли би врахувати наявність та визначальні для механіки властивості структурних неоднорідностей. Зокрема, врахування впливу явищ фізики поверхонь дефектів структури та меж поділу складових композитів стає відчутним в наномасштабі через подібне до фрактального зростання площі поверхні поділу, що припадає на одиницю об'єму структур.

## 6.1. Формулювання задачі

Геометрія та навантажувальні чинники (напруження на нескінченості, зосереджені сили та дислокації) у формулюванні *зовнішньої* задачі практично не відрізняються від загальної постановки задачі в підрозділі **2.2**, хоча це може бути також і мікро- чи наноструктура, яку відповідно до концепції механіки суцільного середовища (деформівного твердого тіла) далі вважатимемо поєднанням двох півпросторів з пружними сталими $G_1, G_2$, на межі розділу яких (площина $xOz$) в напрямку осі зсуву $z$ розташований тунельний розріз, у який вставлений певний об'єкт – тонке включення. Подібно до розділу **5**, постановка ускладнена в розумінні потреби розглядати також *внутрішню* задачу, яка полягає у моделюванні існування включення, яке на цей раз є не однорідним, а пакетом різних тонких плоскопаралельних шарів з ортотропними у напрямі двох осей механічними властивостями $G_y^{inK}$, $G_x^{inK}$ $(K=\overline{1,M})$ – шаруватого включення загальної товщини $2h\,(h \ll a)$ (рис. 6.1). Причому на межах поділу матеріалів між матрицею і включеннями та між самими шарами можуть діяти сили поверхневого натягу.

Обмежимося розглядом задачі поздовжнього зсуву у напрямі осі $z$ (антиплоска деформація). Тоді, з огляду на те, що напружено-деформований стан структури в кожному перпендикулярному до осі z перерізі ідентичний, то надалі будемо розглядати лише площину $xOy$, яка складається з двох плоских перерізів півпросторів $S_k$ $(k=1,2)$ з межею поділу між ними у вигляді осі абсцис $L \sim x$. На ній вздовж відрізка $L'=[-a;\,a]$ розташований переріз тонкого на цей раз шаруватого включення.

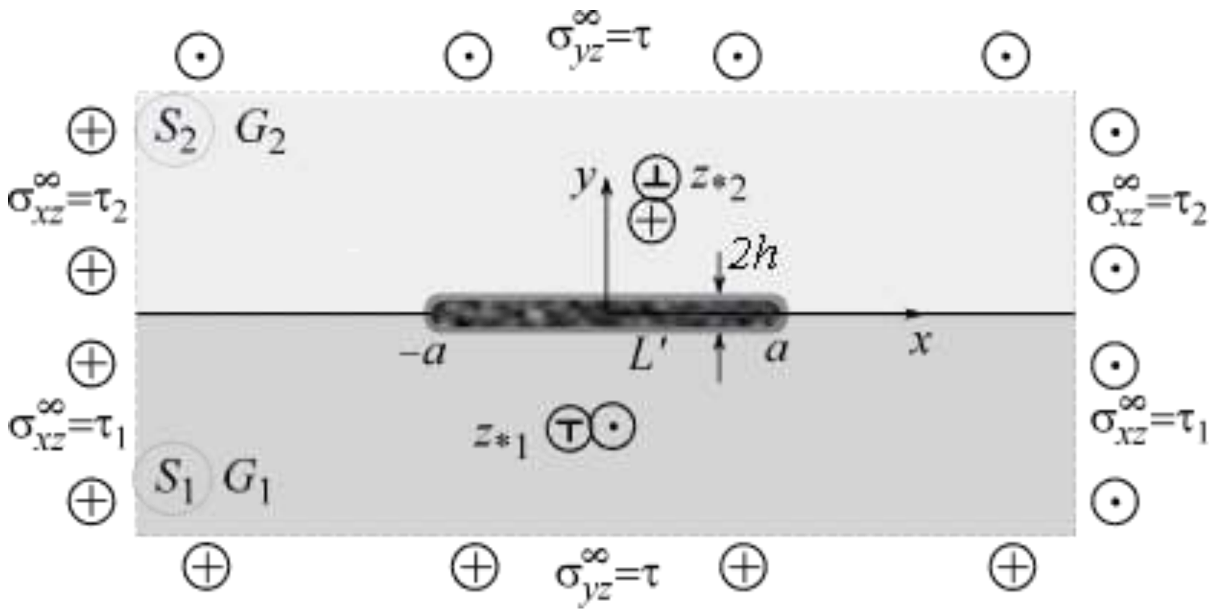



Рис. 6.1. Геометрія та навантаження мікроструктури

Застосовуючи МФС (підрозділ **2.1.)** і враховуючи припущення (2.3) для *зовнішньої* задачі можна записати

$$\begin{aligned} &\sigma_{rz}(x,y)=\sigma_{rz}^{0}(x,y)+\hat{\sigma}_{rz}(x,y),\ r=\{x,y\},\\ &w(x,y)=w^{0}(x,y)+\hat{w}(x,y), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &\left[\sigma_{yz}\right]_h \cong \sigma_{yz}^{-}-\sigma_{yz}^{+}=f_3\left(x\right),\\ &\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_h \cong \frac{\partial w^{-}}{\partial x}-\frac{\partial w^{+}}{\partial x}=\left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_h \equiv \frac{\sigma_{xz}^{-}}{G_1}-\frac{\sigma_{xz}^{+}}{G_2}=f_6\left(x\right),\ x\in L'\ ; \end{aligned} \tag{6.2}$$

$f_3\left(x\right)=f_6\left(x\right)=0$, якщо $x\notin L'$. Тут позначено: $\left[\varphi\right]_h=\varphi\left(x,-h\right)-\varphi\left(x,+h\right)$, $\left\langle\varphi\right\rangle_h=\varphi\left(x,-h\right)+\varphi\left(x,+h\right)$; верхні індекси "+" та "–" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії $L$; величини, відзначені індексом “0” зверху, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без змодельованих неоднорідностей за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв’язок (2.34)), а величини, відзначені зверху символом “^” («дашок»; сірконфлекс), є збуреннями основного поля НДС наявністю включення.

Застосовуючи до розв'язування зовнішньої задачі методику праць [194, 445–447], можна отримати залежності (2.46), (2.47), згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії $L$ необмеженої площини $S$, а також всередині неї дорівнюють

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{yzk}(z)+i\sigma_{xzk}(z)=\sigma^{0}_{yzk}(z)+i\sigma^{0}_{xzk}(z)+ip_k g_3(z)-Cg_6(z)\\
&\qquad\qquad (z\in S_k;\ r=3,6;\ k=1,2),\\
&\sigma^{\pm}_{yzk}(x)=\mp p_k f_3(x)-Cg_6(x)+\sigma^{0\pm}_{yz}(x),\\
&\sigma^{\pm}_{xzk}(x)=\mp Cf_6(x)+p_k g_3(x)+\sigma^{0\pm}_{xz}(x),\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}(x)=\mp pf_3(x)-p_{3-k}g_6(x)+\frac{\sigma^{0\pm}_{yz}(x)}{G_k},\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}(x)=\mp p_{3-k}f_3(x)+pg_6(x)+\frac{\sigma^{0\pm}_{xz}(x)}{G_k},
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

де

$$
g_r(z)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{f_r(x)dx}{x-z},\ s_r(x)\equiv\int_{-a}^{x}f_r(x)dx,\ C=G_{3-k}p_k,\ p_k=pG_k,\ p=\frac{1}{G_1+G_2}.
$$

## 6.2. Модель тонкого багатошарового ортотропного включення

Така багатокомпонентна конструкція вимагає комбінованого підходу для моделювання, оскільки для внутрішньої задачі важливо мати вирази для крайових значень $\sigma^{in}_{yz}(x,\pm h),\ w^{in}(x,\pm h)$. Разом з тим міжшарове контактування для кожного окремого шару є зовнішнім впливом.

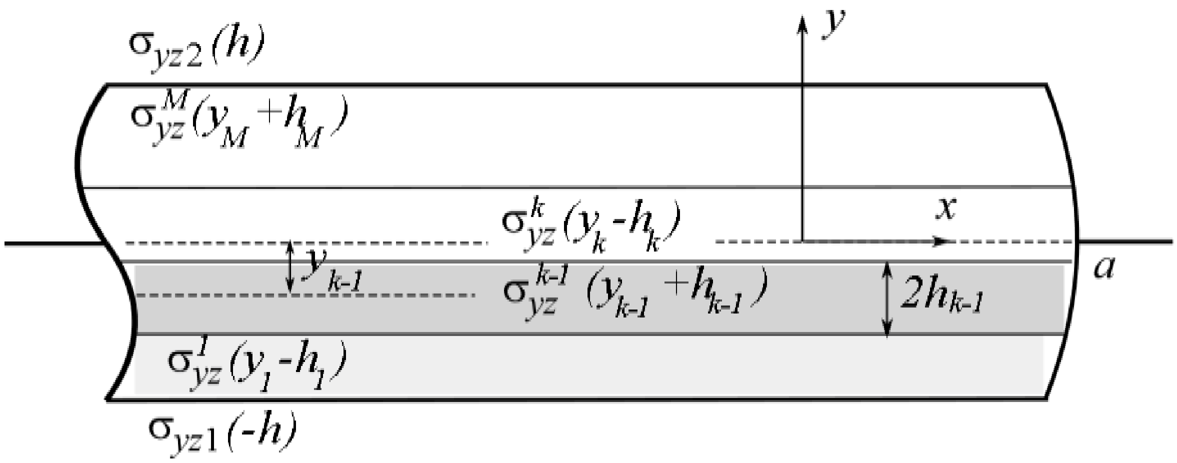



Рис.6.2. Шарувате включення

Тому спочатку замоделюємо наявність кожного тонкого шару – включення в загальному пакеті стрибком компонент тензора напружень $f_{3K}$ і вектора переміщень $f_{6K}$ на $L'$ $\left(K=\overline{1,M}\right)$ [231, 439, 440, 443]

$$\left[\sigma_{yz}^{inK}\right]_{y_K,h_K} \cong \sigma_{yz}^{inK}\left(x,y_K-h_K\right)-\sigma_{yz}^{inK}\left(x,y_K+h_K\right)=f_{3K}\left(x\right),\ \left(K=\overline{1,M}\right)$$
$$\left[\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\right]_{y_K,h_K} \cong \frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\left(x,y_K-h_K\right)-\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\left(x,y_K+h_K\right)=f_{6K}\left(x\right),\ x\in L' \ ; \tag{6.4}$$

$f_{3K}\left(x\right)=f_{6K}\left(x\right)=0$, якщо $x\notin L'$.

З другого боку, застосовуючи МФС (2.78), упроваджуємо в розгляд стрибки компонент тензора напружень та вектора переміщень для компонент матриці

$$\left[\sigma_{yz}\right]_{0,h} \cong \sigma_{yz1}\left(x,-h\right)-\sigma_{yz}\left(x,h\right)=f_3\left(x\right),$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{0,h} \cong \frac{\partial w}{\partial x}\left(-h\right)-\frac{\partial w}{\partial x}\left(h\right)=\left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_{0,h}=f_6\left(x\right),\ x\in L' . \tag{6.5}$$

Тут і далі позначено:

$$\left[\bullet\right]_{y,h}=\bullet\left(x,y-h\right)-\bullet\left(x,y+h\right),\quad \left\langle\bullet\right\rangle_{y,h}=\bullet\left(x,y-h\right)+\bullet\left(x,y+h\right).$$

Тепер ще раз, але вже докладніше проаналізуємо методику побудови математичної моделі (підрозділ **2.3**) на випадок багатошарового пакету тонких прошарків-включень. Основним співвідношеннями для довільного ортотропного пружного матеріалу з модулями зсуву $G_x^{inK}$, $G_y^{inK}$ кожного із шарів включення, що задається параметрами $y_K, h_K$ $\left(K=\overline{1,M}\right)$, є умови рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{inK}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{inK}}{\partial y}+\rho^K F^{inK}=0, \tag{6.6}$$

та конститутивна залежність деформацій від напружень виду (2.53) або (2.55) (ортотропна лінійна пружність)

$$\sigma_{xz}^{inK}=G_x^{inK}\frac{\partial w^{inK}}{\partial x},\ \sigma_{yz}^{inK}=G_y^{inK}\frac{\partial w^{inK}}{\partial y}\quad, \tag{6.7}$$

де $K$ — номер шару включення, $y_K, h_K$ — відповідно координата серединної лінії шару та його півтовщина. Загальна товщина багатошарового включення дорівнює $2h=2\sum_{K=1}^{M}h_K\ll 2a$, так що $y_1-h_1=-h,\ y_M+h_M=h$.

Інтегруючи (6.6) по $x$ в межах $\left[-a,x\right]$ і усереднюючи відповідно по товщинах кожного із шарів неоднорідності $y\in\left[y_K-h_K,y_K+h_K\right]$, отримуємо

$$\frac{1}{2h_K}\int\limits_{y_K-h_K}^{y_K+h_K}\sigma_{xz}^{inK}(\xi,y)dy\simeq\sigma_{xz}^{inAverK}(x)=\frac{1}{2}\left\langle\sigma_{xz}^{inK}\right\rangle_{y_K,h_K}=\frac{G_{xz}^{inK}}{2}\left\langle\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\right\rangle_{y_K,h_K}, \tag{6.8}$$

і, відповідно, першу групу $M$ рівнянь математичних моделей шарів

$$\frac{G_x^{inK}}{2}\left\langle\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\right\rangle_{y_K,h_K}-\sigma_{xz}^{inK}(-a)-\frac{1}{2h_K}\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}^{inK}\right]_{y_K,h_K}(\xi)d\xi+ \\ +F_{aver}^{inK}(x,-h_K,h_K)=0, \tag{6.9}$$

де $F_{aver}^{inK}(x,-h_K,h_K)=\dfrac{\rho^K}{2h_K}\int\limits_{y_K-h_K}^{y_K+h_K}\int\limits_{-a}^{x}F^{inK}(\xi,y)d\xi dy$, $\left(K=\overline{1,M}\right)$.

Враховуючи співвідношення тонкостінності шарів-включень

$$\frac{\partial w^{inK}}{\partial y}\left(x,y_K+h_K\right)+\frac{\partial w^{inK}}{\partial y}\left(x,y_K-h_K\right)\simeq \\ \simeq\frac{w^{inK}\left(x,y_K+h_K\right)-w^{inK}\left(x,y_K-h_K\right)}{h_K}=-\frac{\left[w^{inK}\right]_{y_K,h_K}}{h_K}, \tag{6.10}$$

$$w^{inK}\left(x,y_K\mp h_K\right)=w^{inK}\left(x,y_K\pm h_K\right)\mp 2h_K\frac{\partial w^{inK}}{\partial y}\left(x,y_K\pm h_K\right)\quad\left(K=\overline{1,M}\right),$$

і конститутивні співвідношення (6.7), отримаємо такий вигляд другої групи $M$ рівнянь моделі включення:

$$-\frac{\left[w^{inK}\right]_{y_K,h_K}}{h_K}=\frac{\left\langle\sigma_{yz}^{inK}\right\rangle_{y_K,h_K}}{G_y^{inK}}\quad\left(K=\overline{1,M}\right), \tag{6.11}$$

які разом із співвідношеннями (6.9) повністю описують модель тонкого $M$ - шарового включення, записану у величинах НДС матеріалів пакету включення.

Замість стрибка переміщень у багатьох випадках зручно скористатися також формулою для стрибка деформації

$$\left[w^{inK}\right]_{y_K,h_K}(x)=\left[w^{inK}\right]_{y_K,h_K}(-a)+\int\limits_{-a}^{x}\left[\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}\right]_{y_K,h_K}(\xi)d\xi. \tag{6.12}$$

На кожному шарі включення повинні задовольнятися умови балансу

$$\int_{-a}^{a} f_{3K}(\xi)d\xi = -N_{xzK}(-a) + N_{xzK}(a) + 2hF_{averK}^{in}(a,h), \tag{6.13}$$

$$\int_{-a}^{a} f_{6K}\left(\xi\right)d\xi = \left[w^{inK}\right]_{y_K, h_K}(a) - \left[w^{inK}\right]_{y_K, h_K}(-a). \tag{6.14}$$

Часткові випадки моделі (6.9), (6.11) виду $\mu_y^{inK} = \mu_y^{in}, \mu_x^{inK} = \mu_x^{in}$ $(K = \overline{1,M})$ (всі шари одинакові) чи $h_K \to 0$ $\mu_y^{inK} = \mu_y^{in} \to 0, \mu_x^{inK} = \mu_x^{in} \to 0$ $(K = \overline{1,M})$ (відсутнє включення чи тріщина) або $\mu_y^{inK} = \mu_y^{in} \to 0$ $\left(G_y^{inK} = G_y^{in} \to \infty\right)$, $\mu_x^{inK} = \mu_x^{in} \to \infty \left(G_x^{inK} = G_x^{in} \to \infty\right)$ (абсолютно жорстке однорідне включення) виконуються аналогічно до умов (2.55).

Завдяки синтетичності моделі (6.9), (6.11) та СМ МФС вибір конститутивних співвідношень (6.7) для окремих шарів з пакету у формі (2.51) фізичної нелінійності їх механічних властивостей не створює принципових труднощів. Буде ускладненою лише процедура розв’язування, яка стане ітераційно-інкрементальною.

### 6.3. Умови контакту між шарами і матрицею

Щоб перейти до величин НДС матриці потрібно використати умови контакту між складовими пакету. Згідно з переліком (2.56) – (2.62) є кілька варіантів умов контакту між шарами та між пакетом і матрицею:

**1)** Ідеальний контакт між всіма складовими пакету

$$\begin{cases} w^{in(K-1)}(x, y_{K-1} + h_{K-1}) = w^{inK}(x, y_K - h_K) & \left(K = \overline{2, M}\right), \\ \sigma_{yz}^{in(K-1)}(x, y_{K-1} + h_{K-1}) = \sigma_{yz}^{inK}(x, y_K - h_K) & \left(x \in L'\right). \end{cases} \quad (6.15)$$

**2)** Неідеальний контакт з додатковим натягом між шарами

$$\begin{cases} w^{in(K-1)}(x, y_{K-1} + h_{K-1}) = w^{inK}(x, y_K - h_K) & \left(K = \overline{2, M}\right), \\ \sigma_{yz}^{inK}(x, y_K - h_K) = \sigma_{yz}^{in(K-1)}(x, y_{K-1} + h_{K-1}) - T_K. \end{cases} \quad (6.16)$$

При $T_K = 0$ маємо той самий ідеальний контакт (6.15).

**3)** Контакт із тертям між $(K)$-им і $(K-1)$-им шарами на межі $\{x, y_K \pm h_K\}$ у деякій області $x \in L_f \subset L'$

$$\sigma_{yz}^{in(K-1)}(x, y_{K-1} + h_{K-1}) = \sigma_{yz}^{inK}(x, y_K - h_K) = -\mathrm{sgn}\left[w^{in}\right]_{y_K, h_K} \tau_{yzK}^{\max}. \quad (6.17)$$

При $\tau_{yzK}^{\max} = 0$ маємо гладкий контакт між вказаними шарами.

**4)** Ідеальний контакт між межовими складовими пакету і матрицею

$$\begin{cases} w^{in1}(x, y_1 - h_1) = w\ (x, y_1 - h_1) \\ \sigma_{yz}^{in1}(x, y_1 - h_1) = \sigma_{yz1}(x, y_1 - h_1), \\ w^{inM}(x, y_M + h_M) = w\ (x, y_M + h_M), \\ \sigma_{yz}^{inK}(x, y_M + h_M) = \sigma_{yz2}(x, y_M + h_M) & \left(x \in L'\right). \end{cases} \quad (6.18)$$

**5)** Неідеальний контакт між крайніми складовими пакету і матрицею

$$\begin{cases} w^{in1}(x, y_1 - h_1) = w\ (x, y_1 - h_1) \\ \sigma_{yz}^{in1}(x, y_1 - h_1) = \sigma_{yz1}(x, y_1 - h_1) - T_1, \\ w^{inM}(x, y_M + h_M) = w\ (x, y_M + h_M), \\ \sigma_{yz}^{inM}(x, y_M + h_M) = \sigma_{yz2}(x, y_M + h_M) + T_{M+1} \qquad (x \in L'). \end{cases} \tag{6.19}$$

При $T_1 = T_{M+1} = 0$ маємо ідеальний контакт (6.18).

**6)** Контакт із тертям між включенням та матрицею на межах $\{x, y_1 - h_1\}$, $\{x, y_M + h_M\}$ у деякій області $x \in L_f \subset L'$

$$\begin{cases} \sigma_{yz1}(x, y_1 - h_1) = \sigma_{yz}^{in1}(x, y_1 - h_1) = -\mathrm{sgn}\left[w^{in}\right]_{y_1, h_1} \tau_{yz1}^{\max}, \\ \sigma_{yz2}(x, y_M + h_M) = \sigma_{yz}^{inM}(x, y_M + h_M) = -\mathrm{sgn}\left[w\right]_{y_M, h_M} \tau_{yzM}^{\max}. \end{cases} \quad \left(x \in L_f\right) \tag{6.20}$$

При $\tau_{yzK}^{\max} = 0$ маємо гладкий контакт.

Зрозуміло, що одночасно мають бути виконані одна з умов (6.15) – (6.17) та одна з умов (6.18) – (6.20).

Використовуючи (6.4) та, наприклад, (6.16) можна отримати вирази напружень та деформацій у шарах через межові для пакету включення напруження та деформації для випадку наявності міжшарового натягу

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{inK}(x, y_K + h_K) &= \sigma_{yz}^{in1}(x, -h) - \sum_{j=1}^{K} f_{3,j} - \sum_{j=2}^{K} T_j = \\ &= \sigma_{yz}^{inM}(x, h) + \sum_{j=K+1}^{M} f_{3,j} + \sum_{j=K+1}^{M} T_j, \\ \frac{\partial w^{inK}}{\partial x}(x, y_K + h_K) &= \frac{\partial w^{in1}}{\partial x}(x, -h) - \sum_{j=1}^{K} f_{6,j} = \\ &= \frac{\partial w^{inM}}{\partial x}(x, h) + \sum_{j=K+1}^{M} f_{6,j} \qquad \left(x \in L'\right). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Тут сумарні стрибки межових для пакету включення напружень та деформацій мають значення

$$\begin{aligned} &\sigma_{yz}^{in1}(x,-h)-\sigma_{yz}^{inM}(x,h)=\sum_{j=1}^{M} f_{3,j}+\sum_{j=2}^{M} T_j, \\ &\frac{\partial w^{in1}}{\partial x}(x,-h)-\frac{\partial w^{inM}}{\partial x}(x,h)=\sum_{j=1}^{M} f_{6,j} \quad \left(x\in L'\right). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Отримані в результаті межові для пакету включення напруження та деформації (6.21), межові значення напружень та деформацій матриці (5.5) та крайові умови (6.15) – (6.20) утворюють повну систему рівнянь для розв’язування поставленої задачі.

Відзначимо, що різномодульність шарів включення ніяким чином не впливає на особливість розв’язку зовнішньої задачі, що дає змогу отримати велику різноманітність ефектів від маніпулювання властивостями шарів. Наприклад задача, розглянута в розділі **5** є частковим випадком даної, якщо припустити одношаровий варіант з умовами контакту з натягом або багатошаровий варіант шарів з однаковими властивостями при ідеальному контакті між ними.

### 6.4. Інтегральні рівняння задачі. Метод функцій стрибка

Згідно з методикою МФС (розділ **2**) можна підставити, наприклад, (6.21) у модель (6.9), (6.11) з урахуванням крайових умов, скажімо (6.18), отримуємо систему $2M$ рівнянь для визначення $2M$ невідомих стрибків компонент тензора напружень $f_{3,K}$ та вектора переміщень $f_{6,K}$

$$\begin{cases} \mu_x^{inK}\left(2\dfrac{\partial w^{in1}}{\partial x}(x,-h)-2\sum\limits_{j=1}^{K-1} f_{6,j}(x)-f_{6,K}(x)\right)-\int\limits_{-a}^{x} f_{3,K}(\xi)d\xi= \\ =2h_K\left(\sigma_{xz}^{inK}(-a)-F_{aver}^{inK}(x,y_K-h_K,y_K+h_K)\right), \\ \mu_y^{inK}\left(2\sigma_{yz}^{in1}(x,-h)-2\sum\limits_{j=2}^{K}T_j-2\sum\limits_{j=1}^{K-1} f_{3,j}(x)-f_{3,K}(x)\right)+ \\ +\int\limits_{-a}^{x} f_{6,K}(\xi)d\xi+\left[w\right]_{y_K,h_K}(-a)=0 \qquad \left(K=\overline{1,M}\right), \end{cases} \tag{6.23}$$

яка формує математичну модель багатошарового включення, де позначено $\mu_x^{inK}=h_K G_x^{inK}$, $\mu_y^{inK}=h_K\big/G_y^{inK}$, $(K=\overline{1,M})$. З урахуванням (6.22) можна ввести в модель вирази для $\dfrac{\partial w^{inM}}{\partial x}(x,h)$, $\sigma_{yz}^{inM}(x,h)$, що не змінить її сутності. Для силового балансу та однозначності переміщень до моделі (6.23) слід додати умови (6.13), (6.14) у вигляді

$$\begin{cases} \int\limits_{-a}^{a} f_{3,K}(\xi)d\xi=-2h_K\left(\sigma_{xz}^{inK}(a)-\sigma_{xz}^{inK}(-a)-F_{aver}^{inK}(a,y_K-h_K,y_K+h_K)\right), \\ \int\limits_{-a}^{a} f_{6,K}(\xi)d\xi=\left[w\right]_{y_K,h_K}(-a)-\left[w\right]_{y_K,h_K}(-a), \qquad \left(K=\overline{1,M}\right) \end{cases} \tag{6.24}$$

Підстановка (6.21) у модель (6.9), (6.11) з урахуванням крайових умов, скажімо (6.18),та виразів компонент НДС зовнішньої задачі (5.5) дає змогу отримати систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР), розв’язок якої можна отримати, якщо застосувати методику підрозділу **2.5.**, але він є доволі громіздким. Тому доцільніше застосувати до розв’язування поставленої задачі СМ МФС.

## 6.5. Інтегральні рівняння задачі. Структурно-модульний метод функцій стрибка

Розглянемо тепер підхід до розв'язування задачі структурно-модульним МФС. Враховуючи, що отримані в результаті межові для пакету включення напруження та деформації (6.21), межові значення напружень та деформацій матриці (5.5) та крайові умови (6.15) – (6.20) утворюють повну систему рівнянь для розв'язування поставленої задачі можемо відразу перейти до числово-аналітичного розв'язування цієї системи рівнянь. Інтегральні представлення (5.5) в результуючій системі рівнянь утворять в загальному випадку два СІР для визначення невідомих $f_3$ , $f_6$ . В той же час зазначу, що в частині рівнянь, які породжені моделлю внутрішньої задачі (6.9), (6.11), немає жодної необхідності використовувати інтегральні представлення компонент НДС виду (5.5), як у зовнішній задачі.

Для подальшого числово-аналітичного методу колокацій (підрозділ **2.5**) наявність СІР вимагатиме дослідження особливості їх розв'язку, після чого невідомі $f_3$ , $f_6$ доцільно представити у вигляді розвинення в ряди Якобі чи Чебишова (2.87), (2.93) і далі отримаємо на них $2N+2$ невідомих $A_n^r \ (n=\overline{1,N};\ r=3,6)$.

Згідно з парадигмою методу колокацій подаємо вирази (6.21), (5.5) та (6.15) – (6.20) у дискретній формі

$$\begin{gathered}
\sigma_{yzk}^{\pm}\left(x_n\right)=\mp p_k f_3\left(x_n\right)-C g_6\left(x_n\right)+\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_n\right),\\
\sigma_{xzk}^{\pm}\left(x_n\right)=\mp C f_6\left(x_n\right)+p_k g_3\left(x_n\right)+\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_n\right),\\
\frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}\left(x_n\right)=\mp p f_3\left(x_n\right)-p_{3-k} g_6\left(x_n\right)+\frac{\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_n\right)}{G_k},\\
\frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\left(x_n\right)=\mp p_{3-k} f_3\left(x_n\right)+p g_6\left(x_n\right)+\frac{\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_n\right)}{G_k} \qquad \left(k=1,2;\ n=\overline{1,N}\right),
\end{gathered} \tag{6.25}$$

$$\sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_K + h_K) = \sigma_{yz}^{in1}(x_n, -h) - \sum_{j=1}^{K} f_{3,j}(x_n) - \sum_{j=2}^{K} T_j =$$
$$= \sigma_{yz}^{inM}(x_n, h) + \sum_{j=K+1}^{M} f_{3,j}(x_n) + \sum_{j=K+1}^{M} T_j,$$
$$\frac{\partial w^{inK}}{\partial x}(x_n, y_K + h_K) = \frac{\partial w^{in1}}{\partial x}(x_n, -h) - \sum_{j=1}^{K} f_{6,j}(x_n) =$$
$$= \frac{\partial w^{inM}}{\partial x}(x_n, h) + \sum_{j=K+1}^{M} f_{6,j}(x_n) \qquad (K = \overline{1, M}), \tag{6.26}$$

$$\begin{cases} w^{in(K-1)}(x_n, y_{K-1} + h_{K-1}) = w^{inK}(x_n, y_K - h_K) \quad \left(K = \overline{2, M}\right), \\ \sigma_{yz}^{in(K-1)}(x_n, y_{K-1} + h_{K-1}) = \sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_K - h_K), \end{cases} \tag{6.27}$$

$$\begin{cases} w^{in(K-1)}(x_n, y_{K-1} + h_{K-1}) = w^{inK}(x_n, y_K - h_K) \quad \left(K = \overline{2, M}\right), \\ \sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_K - h_K) = \sigma_{yz}^{in(K-1)}(x_n, y_{K-1} + h_{K-1}) - T_K, \end{cases} \tag{6.28}$$

$$\sigma_{yz}^{in(K-1)}(x_n, y_{K-1} + h_{K-1}) = \sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_K - h_K) =$$
$$= -\operatorname{sgn}\left[w^{in}\right]_{y_K, h_K} \tau_{yzK}^{\max}, \qquad x_n \in L_f \subset L'. \tag{6.29}$$

$$\begin{cases} w^{in1}(x_n, y_1 - h_1) = w\ (x_n, y_1 - h_1), \\ \sigma_{yz}^{in1}(x_n, y_1 - h_1) = \sigma_{yz1}(x_n, y_1 - h_1), \\ w^{inM}(x_n, y_M + h_M) = w(x_n, y_M + h_M), \\ \sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_M + h_M) = \sigma_{yz2}(x_n, y_M + h_M), \end{cases} \tag{6.30}$$

$$\begin{cases} w^{in1}(x_n, y_1 - h_1) = w(x_n, y_1 - h_1), \\ \sigma_{yz}^{in1}(x_n, y_1 - h_1) = \sigma_{yz1}(x_n, y_1 - h_1) - T_1, \\ w^{inM}(x_n, y_M + h_M) = w(x_n, y_M + h_M), \\ \sigma_{yz}^{inM}(x_n, y_M + h_M) = \sigma_{yz2}(x_n, y_M + h_M) + T_{M+1}, \end{cases} \tag{6.31}$$

$$\begin{cases} \sigma_{yz1}(x_n, y_1 - h_1) = \sigma_{yz}^{in1}(x_n, y_1 - h_1) = -\mathrm{sgn}\left[w^{in}\right]_{y_1, h_1} \tau_{yz1}^{\max}, \\ \sigma_{yz2}(x_n, y_M + h_M) = \sigma_{yz}^{inM}(x_n, y_M + h_M) = -\mathrm{sgn}\left[w\right]_{y_M, h_M} \tau_{yzM}^{\max}. \end{cases} \quad \left(x_n \in L_f\right) \tag{6.32}$$

Слід пам’ятати, що одночасно може бути використана лише одна з крайових умов (7.27) – (6.29) разом із однією з умов (6.30) – (6.32).

Як наслідок, враховуючи умови балансу виду (5.14), отримуємо СЛАР порядку $\left(2+2N+2MN\right)$ на $\left(2+2N+2MN\right)$ невідомих $f_3\left(x_n\right),\ f_6\left(x_n\right),\ f_{3,j}(x_n),\ f_{6,j}(x_n)\ \ (j=\overline{1,M};\ n=\overline{1,N})$ через які з допомогою формул (7.25) – (6.32) можна знайти величини компонент НДС як матриці, так і шарів включення $\sigma_{yzk}^{\pm}\left(x_n\right)$, $\dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\left(x_n\right)$, $\sigma_{yz}^{inK}(x_n, y_K \pm h_K)$, $\dfrac{\partial w^{inK}}{\partial x}(x_n, y_K \pm h_K)\quad \left(K=\overline{2, M-1}\right)$.

Для знаходження компонент НДС внутрішньої задачі завдяки специфіці побудови моделі і СМ МФС цілком достатньо виразів (6.21), (6.22), (7.26), що істотно спрощує обчислювальну схему задачі.

### 6.6. Часткові випадки. Поява проковзування з тертям на поверхнях контакту включення з матрицею

Дослідимо поздовжній зсув тіла із тонким включенням за умови неідеального механічного контакту на спільній межі чи повного або часткового відшарування берегів включення за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного. Для конкретності приймемо, що включення одношарове, хоча принципового ускладнення крім громіздкості системи рівнянь для випадку багатошарового включення немає.

Формулювання даної задачі: геометрія та навантажувальні чинники відповідають загальній постановці задачі в підрозділі **2.2.** у сенсі зовнішньої задачі: розглядається мікроструктура, що складається з двох півпросторів з пружними сталими $G_1, G_2$, на межі розділу яких (площина xOz) в напрямку осі зсуву z розташований тунельний розріз вздовж відрізка $L' = [-a; a]$, у який вставлений певний об’єкт – тонке включення завтовшки $2h\,(h \ll a)$ з ортотропними механічними властивостями $G_y^{in}, G_x^{in}$ (рис. 6.3). Півпростори взаємно притиснені до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^{\infty} < 0$ та навантажені рівномірно розподіленими на нескінченності напруженнями $\sigma_{xxk}^{\infty}$ $(k = 1, 2)$. Зовнішнє навантаження поздовжнього зсуву окреслюють рівномірно розподілені на нескінченності напруження $\sigma_{yz}^{\infty}$, $\sigma_{xzk}^{\infty}$, зосереджені сили інтенсивності $Q_k$, гвинтові дислокації із складовою вектора Бюргерса $b_k$ у точках $\varsigma_{*k} \in S_k$ $\left(k = 1, 2\right)$, орієнтовані уздовж осі $Oz$ таким чином, що їх дія викликає у тілі квазістатичний антиплоский напружено-деформований стан. Для забезпечення прямолінійності межі розділу матеріалів на нескінченності напруження повинні задовольняти умову $\sigma_{xz2}^{\infty} G_1 = \sigma_{xz1}^{\infty} G_2$. $\dfrac{\nu_2 \sigma_{yy}^{\infty} - \left(1 - \nu_2\right) \sigma_{xx2}^{\infty}}{G_2} = \dfrac{\nu_1 \sigma_{yy}^{\infty} - \left(1 - \nu_1\right) \sigma_{xx1}^{\infty}}{G_1}$.

Припускаємо, що верхній та нижній краї включення можуть контактувати з матрицею неідеально з фрикційним проковзуванням на проміжках $L''^{\pm} = [b^{\pm}; c^{\pm}]$ $\left(\left|b^{\pm}\right| \le |a|, \left|c^{\pm}\right| \le |a|\right)$.

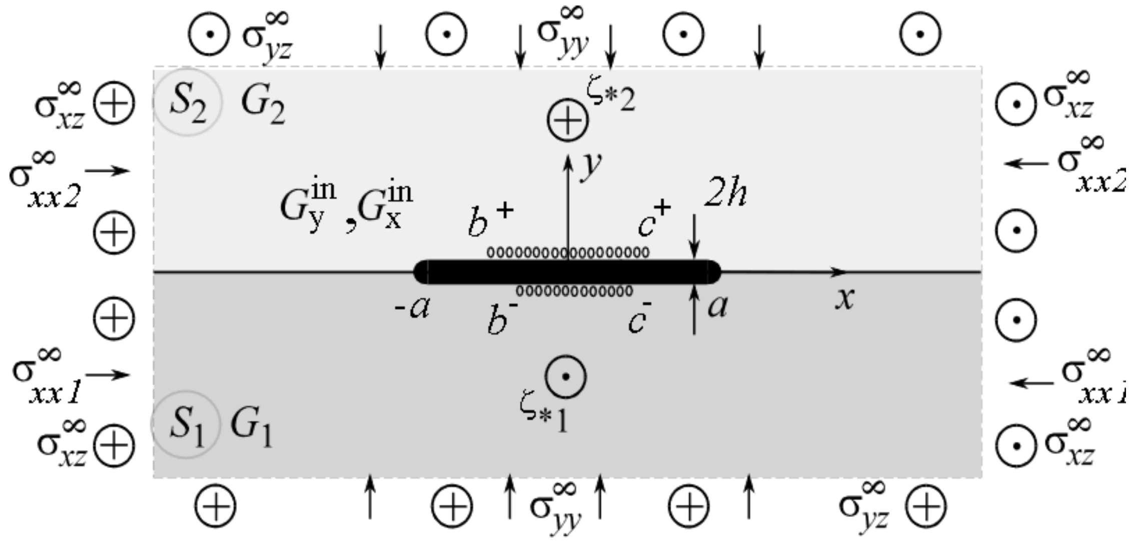


Рис. 6.3. Силова й геометрична схема задачі часткового відшарування

Наявність тонкого включення в масиві, як і в попередніх задачах, моделюється згідно з парадигмою СМ МФС (підрозділ **2.1.**) стрибком компонент векторів напружень і переміщень на $L'$ (6.5) у вигляді (2.35)

$$\left[\sigma_{yz}\right]_h \cong \sigma_{yz}^{-} - \sigma_{yz}^{+} = f_3\left(x\right),$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_h \cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_h \equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_6\left(x\right),\ \ x \in L' ; \qquad (6.33)$$

$$f_3\left(x\right) = f_6\left(x\right) = 0 \text{, якщо } x \notin L'. \qquad (6.34)$$

Математичну модель тонкого включення виберемо, наприклад, у вигляді (2.55) для випадку ідеально пружного ортотропного включення $G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in},t) = G_x^{in} = const, \quad G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in},t) = G_y^{in} = const$ (закон Гука).

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L \setminus L'$ вважаємо ідеальним

$$w(x,+0) = w(x,-0), \quad \sigma_{yz2}(x,+0) = \sigma_{yz1}(x,-0), \qquad x \in L \setminus L'. \qquad (6.35)$$

Між матрицею і берегами включення вздовж частин верхнього та нижнього берегів включення вздовж $L' \setminus L''^{\pm}$ контакт теж вважаємо ідеальним

$$w(x,\pm h) = w^{in}(x,\pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h), \qquad x \in L' \setminus L''^{\pm}. \quad (6.36)$$

На апріорі невідомих ділянках контакту $L''^{\pm} = [-b^{\pm}; b^{\pm}]$ $\left(b^{\pm} \le a\right)$ приймаємо умови дотикового тертьового контакту ((2.70); розділи **3,4**), які передбачають, що в усіх точках $L''^{\pm}$ дотичні напруження (зусилля тертя) дорівнюють

$$\sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h) = \operatorname{sgn}\left(w^{in}(x,\pm h) - w(x,\pm h)\right)\tau_{yz}^{\max\pm}(x), \quad (6.37)$$

де $\tau_{yz}^{\max\pm}(x) = -\alpha^{\pm}\sigma_{yy}(x)$ $\left(\sigma_{yy} < 0\right)$, $\alpha^{\pm}$– коефіцієнти тертя ковзання на верхньому та нижньому берегах включення відповідно. Поза ділянками $L''^{\pm}$ величина дотичних напружень за відсутності проковзування не може перевищувати рівня максимально допустимих (2.69)

$$\left|\sigma_{yz}(x,\pm h)\right| \le \tau_{yz}^{\max\pm}(x) \ \left(\sigma_{yy} < 0\right), \quad (6.38)$$

і взаємного переміщення поверхонь контакту (додаткового стрибка зміщень) немає. Знак (напрям дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знаку різниці переміщень $w^{in}(x,\pm h) - w(x,\pm h)$ на $L''^{\pm}$ у розглядуваній точці.

Використовуючи розв'язок зовнішньої задачі (2.46), (2.47), (2.34) та додаткові умови балансу

$$\int_{-a}^{a} f_3(\xi)d\xi = 2h\left(\sigma_{xz}^{in}(a) - \sigma_{xz}^{in}(-a)\right),$$
$$\int_{-a}^{a} f_6(\xi)d\xi = [w](a) - [w](-a), \tag{6.39}$$

можна отримати низку корисних результатів. Наприклад, рівняння (2.46) можна безпосередньо використати для визначення критичних значень прикладеного до структури навантаження, за якого на $L'$ в деяких точках обох берегів включення чи на одному з них почнеться проковзування (з'явиться $L''^{\pm},\ b^{\pm} > 0$) при досягненні максимально допустимого $\tau_{yz}^{\max\pm}(x)$

$$\sigma_{yzk}(x,\pm h) = \mp p_{3-k} f_3(x) - Cg_6(x) + \sigma_{yzk}^0(x,\pm h) = \tau_{yz}^{\max\pm}(x),\ k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{6.40}$$

Тобто, як тільки з розв'язку задачі при заданому навантаженні стануть відомі вирази для стрибків $f_r$, $(r = 3,6)$, можна досліджувати які величини прикладеного навантаження стають критичними.

До розв'язування отриманої системи рівнянь (2.55), (6.33) – (6.40) можна застосувати класичний МФС, який передбачає підстановку (2.46), (2.47) в (2.55) з використанням (6.37) – (6.39) і отримання результуючої системи сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих $f_r$, $(r = 3,6)$, які повністю визначають НДС матриці завдяки (2.46), (2.47). Однак наявність крайових умов дотикового тертьового контакту (6.37) – (6.38) з невідомими апріорі розмірами зон проковзування $2b^{\pm}$ вимагає доволі складних алгоритмів розв'язування, які не завжди гарантують точність обчислень.

Доцільніше використати описаний у підрозділі ***2.1.3.*** структурно модульний метод функцій стрибка. Представляючи систему рівнянь (2.46), (2.47), (2.55), (6.33) – (6.40) у дискретній формі в множині точок колокації

$\left(x_n,\ n=\overline{1,N}\right)$ можна отримати систему $8N$ лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення $8N$ невідомих $\sigma_{yzk}\left(x_n,\pm h\right)$, $\frac{\partial w}{\partial x}\left(x_n,\pm h\right)$, $\sigma_{yz}^{in}(x_n,\pm h)$, $\frac{\partial w^{in}}{\partial x}(x_n,\pm h)$, $\left(n=\overline{1,N}\right)$. Для коректності розв'язку необхідно коректно визначити розміри зон проковзування. З цією метою застосовуємо ідею описаного в підрозділі **2.6** ітеративного підходу:

1) Початково прикладається незначне навантаження для перевірки з допомогою (6.40) умов (6.38) початку процесу проковзування.
2) Якщо умови (6.38) виконуються, продовжуємо нарощувати інтенсивність навантаження і знову їх перевіряємо.
3) Як тільки хоча б одна з умов (6.38) перестає виконуватися в певних точках $x_n$, вводимо в цих точках додаткове переміщення $\delta_n^{\pm}$ (результат проковзування), визначаючи його з умови (6.37) і вимагаючи отримання величинами $\sigma_{yz}^{in}(x_n,\pm h)$, $\sigma_{yzk}(x_n,\pm h)$ значень $\tau_{yz}^{\max\pm}$ у всіх цих точках.
4) Цей процес ітераційний через наперед невідому зону проковзування і поступовий перерозподіл НДС по лінії контакту. На кожному кроці ітерації перевіряємо, чи всюди на $L'$ виконується обмеження (6.38) і якщо ні, то уточнюємо значення $\delta_n^{\pm}$ повторюючи вимогу отримання величинами $\sigma_{yz}^{in}(x_n,\pm h)$, $\sigma_{yzk}(x_n,\pm h)$ значень $\tau_{yz}^{\max\pm}$ у всіх $x_n$, де (6.38) не виконалася. Процес повторюється поки умова (6.38) не буде виконана всюди на $L'$. Досліджено, що такий ітеративний алгоритм є збіжним за умови монотонно зростаючого неконтрастного навантаження.

Для оптимізації режиму навантажування структури в умовах експлуатації важливо знати розташування «зон безпеки» для будь-яких зовнішніх силових чинників. На рис. 6.4 – 6.6 зображені результати дослідження «зон безпеки» для значень інтенсивності та розміщення зосереджених сил $\left(\tilde{Q}_2 = -\tilde{Q}_1 = \tilde{Q},\ \tilde{z}_{*k} = z_{*k}/a = \tilde{x}_{*k} + i\tilde{y}_{*k},\ \tilde{z}_{*2} = -\tilde{z}_{*1},\ \tilde{y}_{*k} = \pm i\tilde{d}\right)$,

де $\tilde{Q} = Q/\pi a G_{av}$, $\tilde{x}_{*2} = x_{*2}/a$, $\tilde{d} = d/a$, $G_{av} = \left\{\sqrt{G_1 G_2},\ \max\left(G_1, G_2\right), Q/\pi a\right\}$.

Під «зоною безпеки» для зосередженого чинника певної величини будемо розуміти такі координати його прикладання, за яких ще не починається проковзування, тобто в жодній точці межі $L'$ не виконується умова (6.38). Межу «зони безпеки» визначаємо з допомогою вищенаведеного ітераційного алгоритму з критерію: хоча б в одній точці $L'$ починає виконуватися умова (6.38). Аналізуючи результати розрахунків можна стверджувати, що отримані розрахунки підтверджують очікувані лінійні залежності зростання критичного значення $\tilde{Q}^*$ від нарощування значення $\tilde{\tau}_{yz}^{\max\pm} = \dfrac{\tau_{yz}^{\max\pm}}{G_{av}}$ (рис. 6.4), а також від збільшення віддалі $\tilde{d}$ точок прикладання зосереджених сил (рис. 6.5). Особливо відчутними ці впливи є при «податному» включенні, коли $\tilde{G}_y^{in} \ll \tilde{G}_k$.

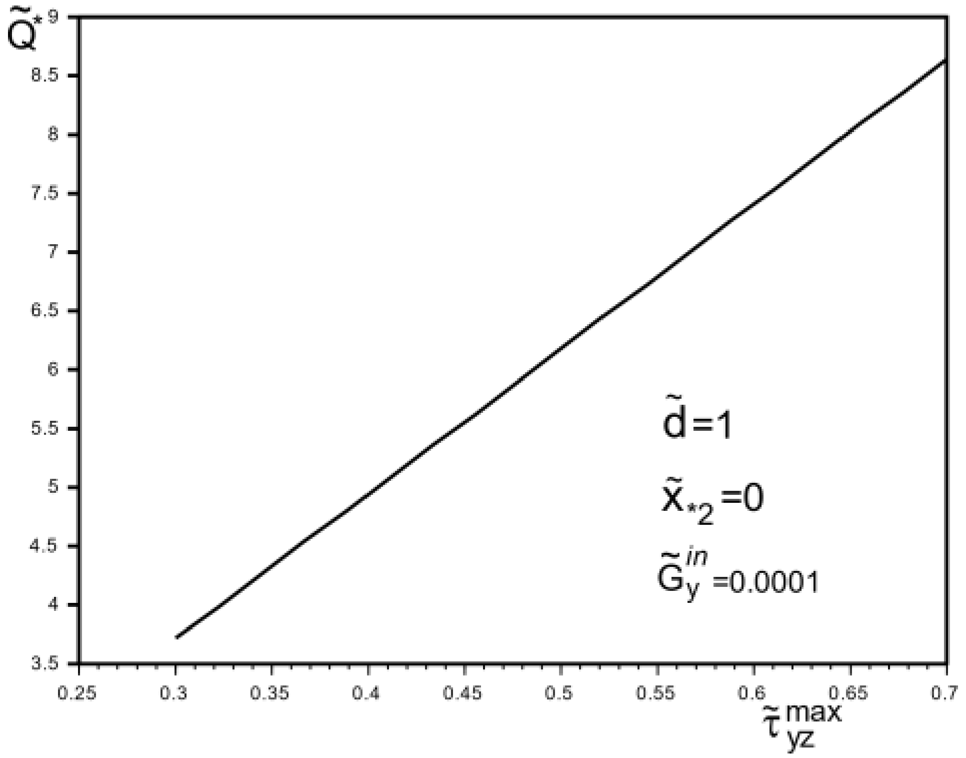



Рис. 6.4. Залежність критичного значення $\tilde{Q}^*$ від значення $\tilde{\tau}_{yz}^{\max\pm}$

При жорсткішому матеріалі включення від матеріалів матриці втрата зчеплення між включенням і матрицею відбувається значно швидше і при менших критичних значеннях $\tilde{Q}^*$. За вказаних координат точок прикладання зосереджених сил $\tilde{x}_{*2}=0$ втрата зчеплення відбувалася вперше в центрі включення у точці $\tilde{x}=0$. Цікавим є ефект від зміщення точок прикладання зосереджених сил $\tilde{x}_{*2}$ вздовж осі включення у напрямі його торця (рис. 6.6). Втрата зчеплення завжди починається строго під точкою прикладання сил і чим далі від центру включення, тим більшим ставало критичне значення $\tilde{Q}^*$ при однакових інших параметрах.

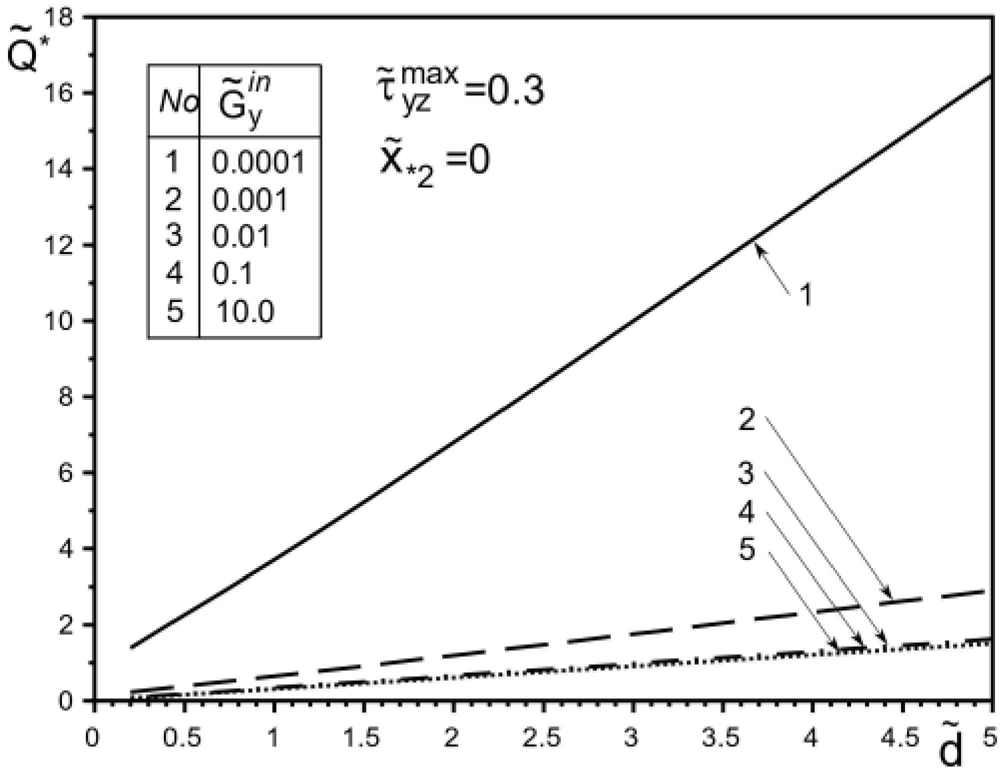



Рис. 6.5. Залежність критичного значення $\tilde{Q}^*$ від віддалі $\tilde{d}$

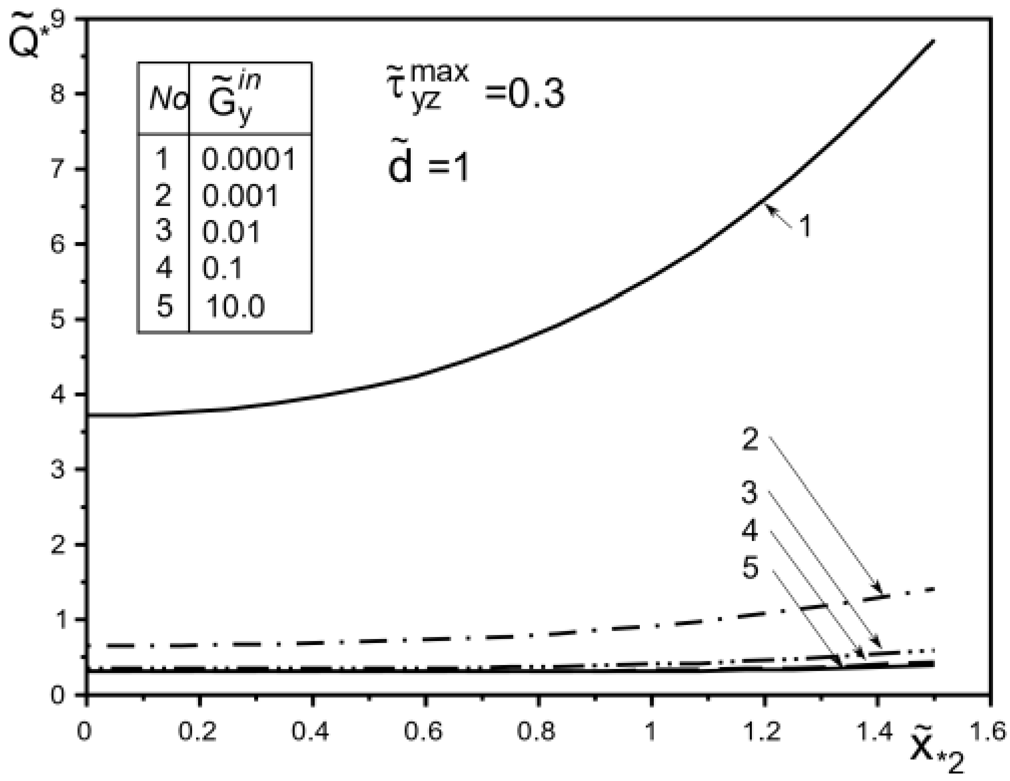



Рис. 6.6. Залежність критичного значення $\tilde{Q}^*$ від горизонтального зміщення точок $\tilde{x}_{*2}$ прикладання зосереджених сил

На рис. 6.7, 6,8 подано межі «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ точок прикладання значень зосередженої сили $\tilde{Q}^{*}$ для податного та жорсткого включення. Розміщення точок прикладання сили поза такою межею є «безпечним», бо для зазначеного значення сили $\tilde{Q}^{*}$ проковзування на $L'$ не виникне в жодній точці.

Можна відзначити, що жорсткіше від матриці включення (рис. 6.8) з одного боку значно чутливіше до появи проковзування – критичні значення $\tilde{Q}^{*}$ менші, ніж для податного (рис. 6.7). Але, з другого боку, форма «зони безпеки» для податного включення більше залежна від локалізації навантаження, ніж від розміру включення.

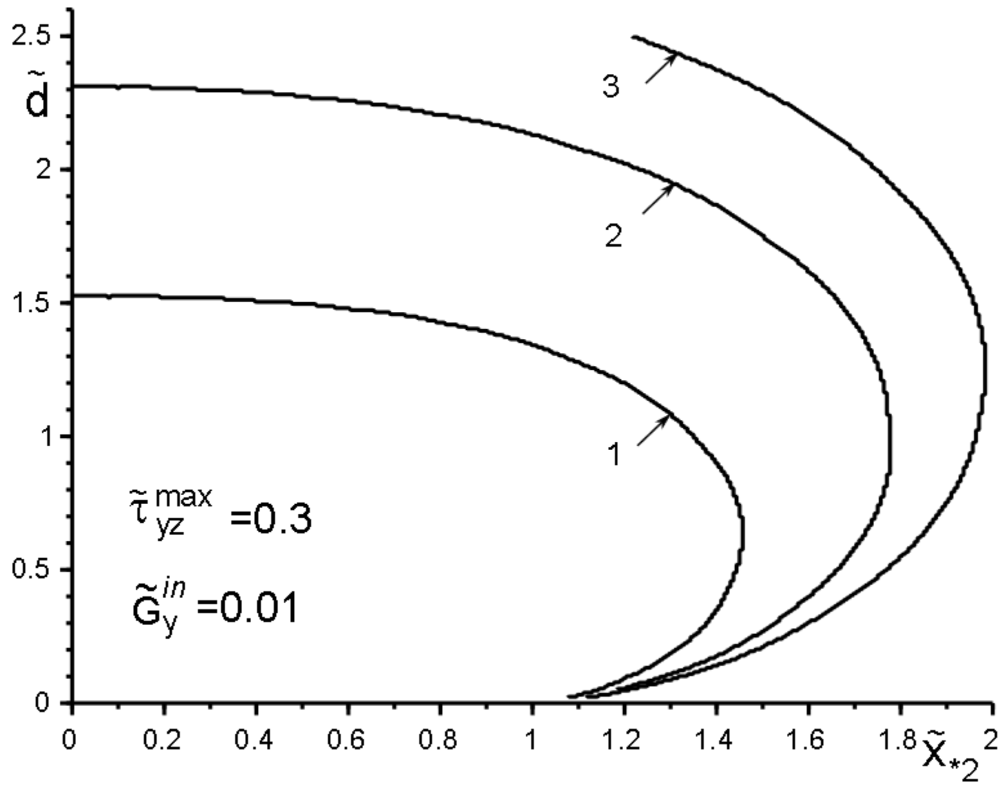



Рис. 6.7. Межа «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ прикладання зосередженої сили $\tilde{Q}^{*}$ у випадку наявності податного включення ( 1 – $\tilde{Q}^{*} = 0.5$; 2 – $\tilde{Q}^{*} = 0.75$; 3 – $\tilde{Q}^{*} = 0.9$)

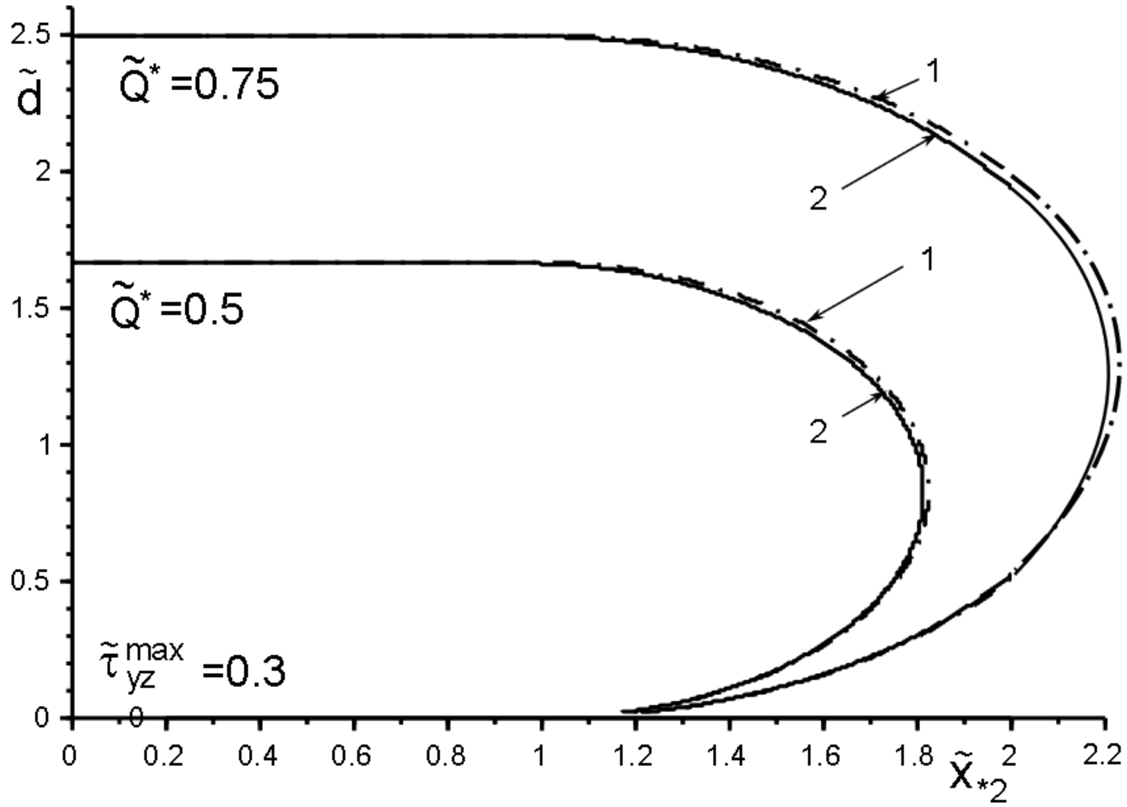



Рис. 6.8. Межа «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ прикладання зосередженої сили $\tilde{Q}^*$ у випадку відсутності включення (лінії 1 - $\tilde{G}_y^{in} = 1$)) та наявності жорсткого включення (лінії 2 – $\tilde{G}_y^{in} = 10$)

Окремо розглянемо варіант навантажування структури дислокаційними чинниками $\tilde{b}_2 = -\tilde{b}_1 = \tilde{b}$ у таких самих точках $\tilde{z}_{*2}$. На рис. 6.9, 6.10 подано межі «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ ядра дислокації з вектором Бюргерса $\tilde{b}^*$ для податного та жорсткого включення. Помітно, що форма «зони безпеки» розташування ядра гвинтової дислокації значно менше змінюється у випадку податного включення порівняно з випадком жорсткого включення.

Одночасно рівень критичних значень інтенсивності векторв Бюргерса $\tilde{b}^*$ гвинтової дислокації для приблизно одинакових за розміром «зон безпеки» податного і жорсткого включення значно менший для жорсткого випадку.

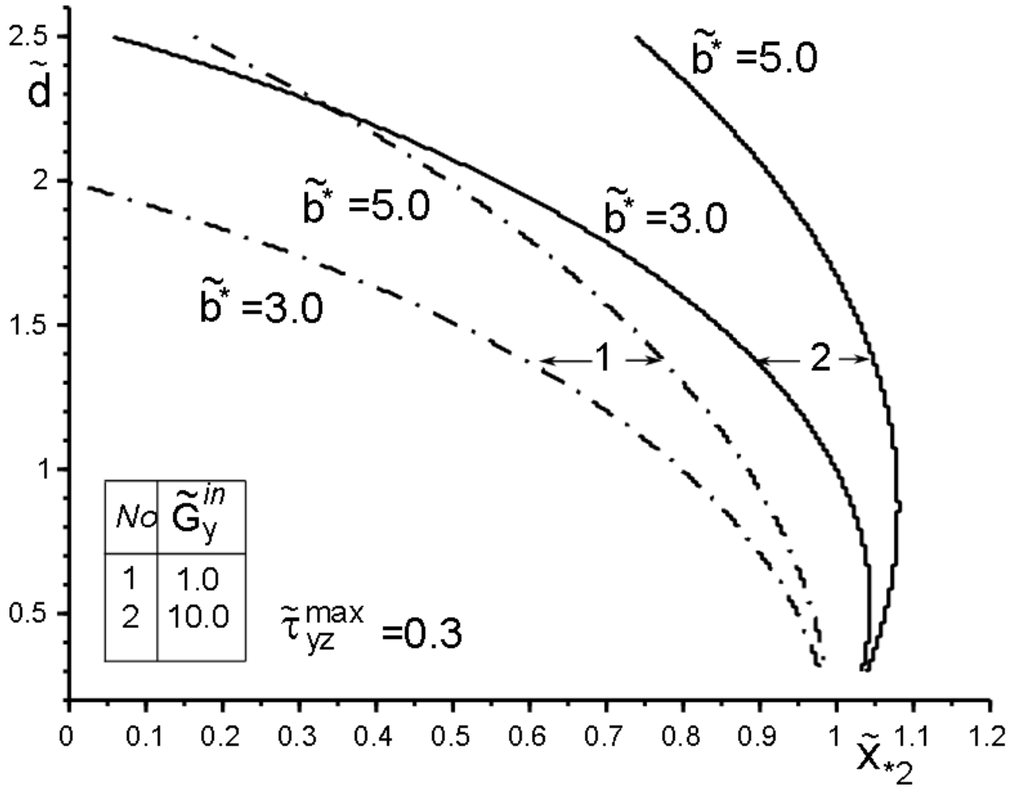



Рис. 6.9. Межа «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ ядра дислокації з вектором Бюргерса $\tilde{b}^*$ у випадку наявності податного включення

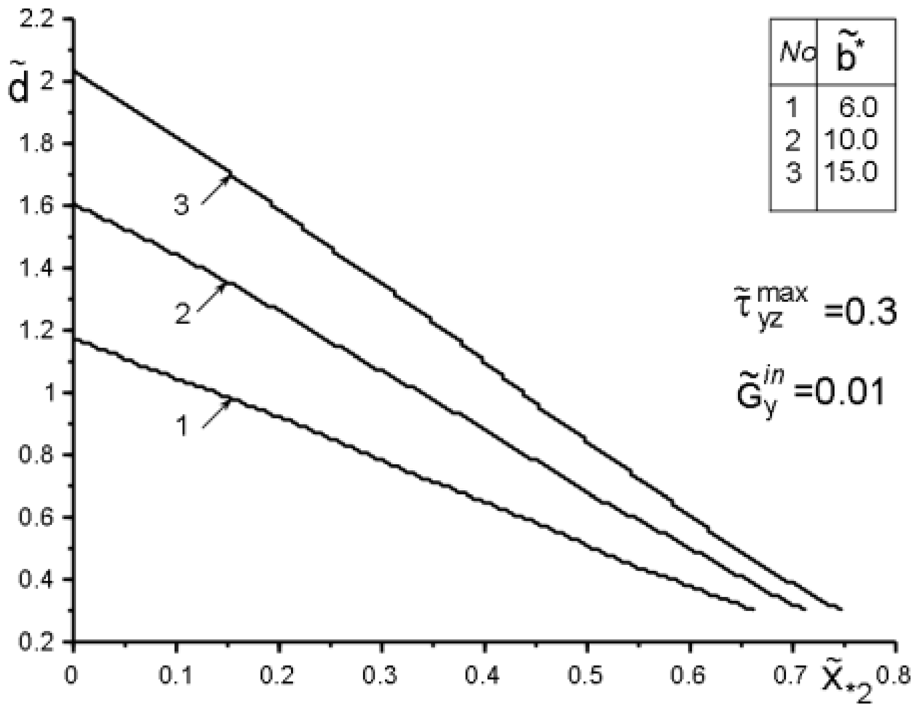



Рис. 6.10. Межа «зони безпеки» координат $\tilde{z}_{*2}$ ядра дислокації з вектором Бюргерса $\tilde{b}^*$ у випадку відсутності включення (лінії 1) та наявності жорсткого включення (лінії 2)

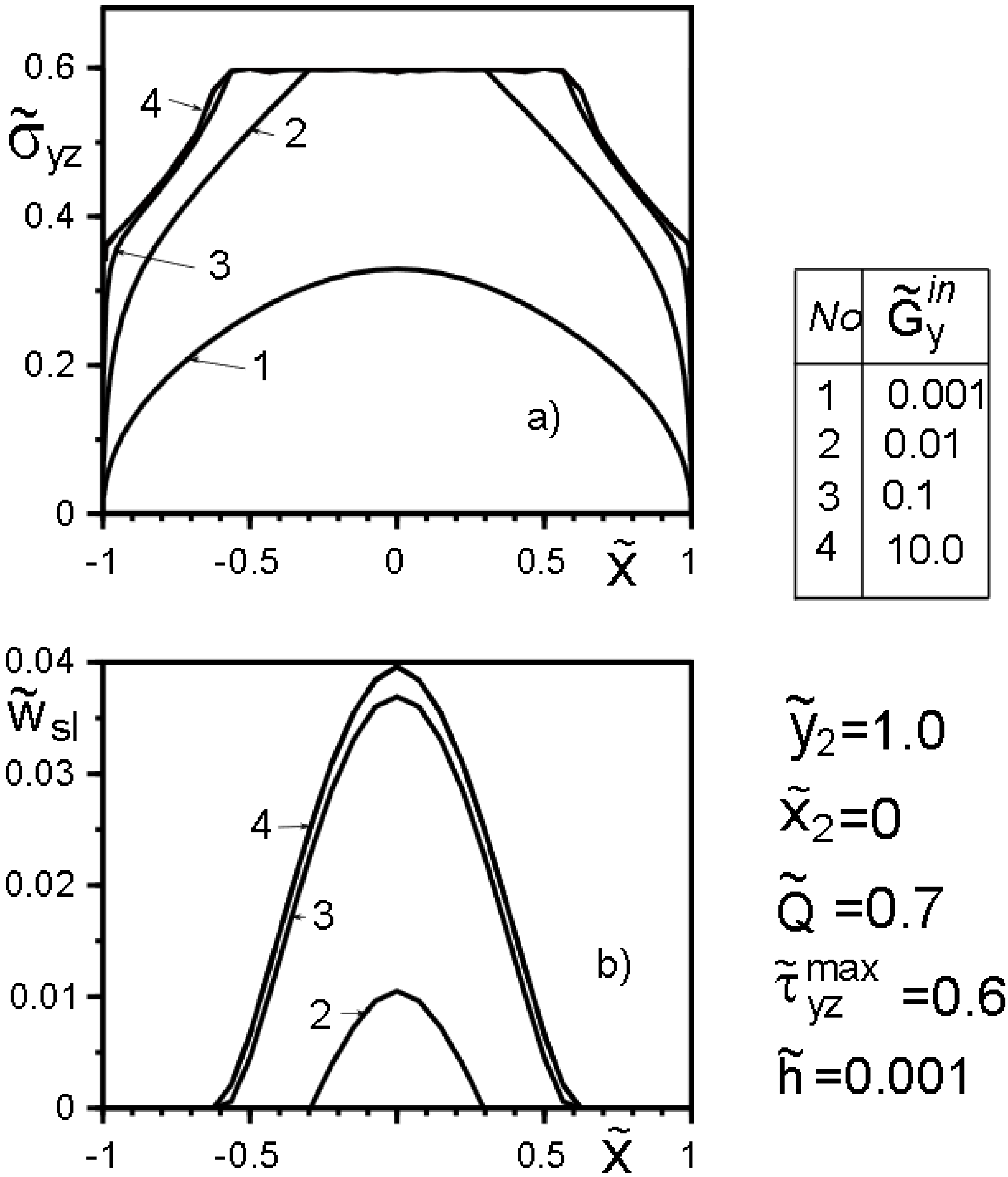



Рис. 6.11. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) у залежності від відношення $\tilde{G}_y^{in} / \tilde{G}_k$

На рис. 6.11 – 6.16 відображено вплив появи проковзування на розподіл напружень $\tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} / G_{av}$ вздовж межі включення-матриця, а також зростання розміру зони проковзування та його інтенсивності $\tilde{w}_{sl} = w_{sl} / a$ у залежності від параметрів задачі.

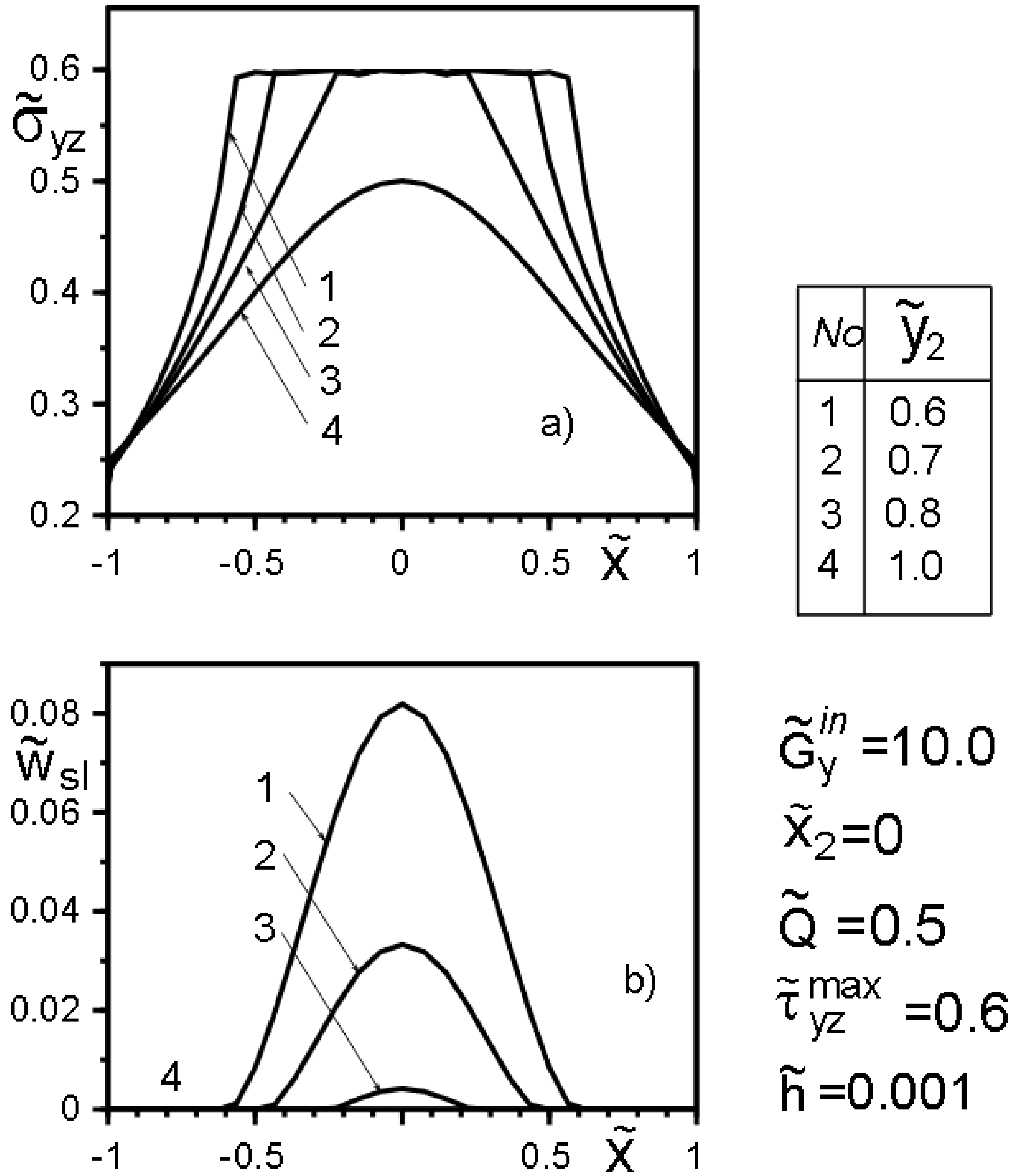



Рис. 6.12. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) для жорсткішого від матриці включення у залежності від віддаляння точки прикладання сили від його осі

Помітно, що для податнішого від матриці включення проковзування з’являється і зростає швидше, ніж для жорсткішого при однакових інших параметрах задачі (рис. 6.10, 6.12, 6.13).

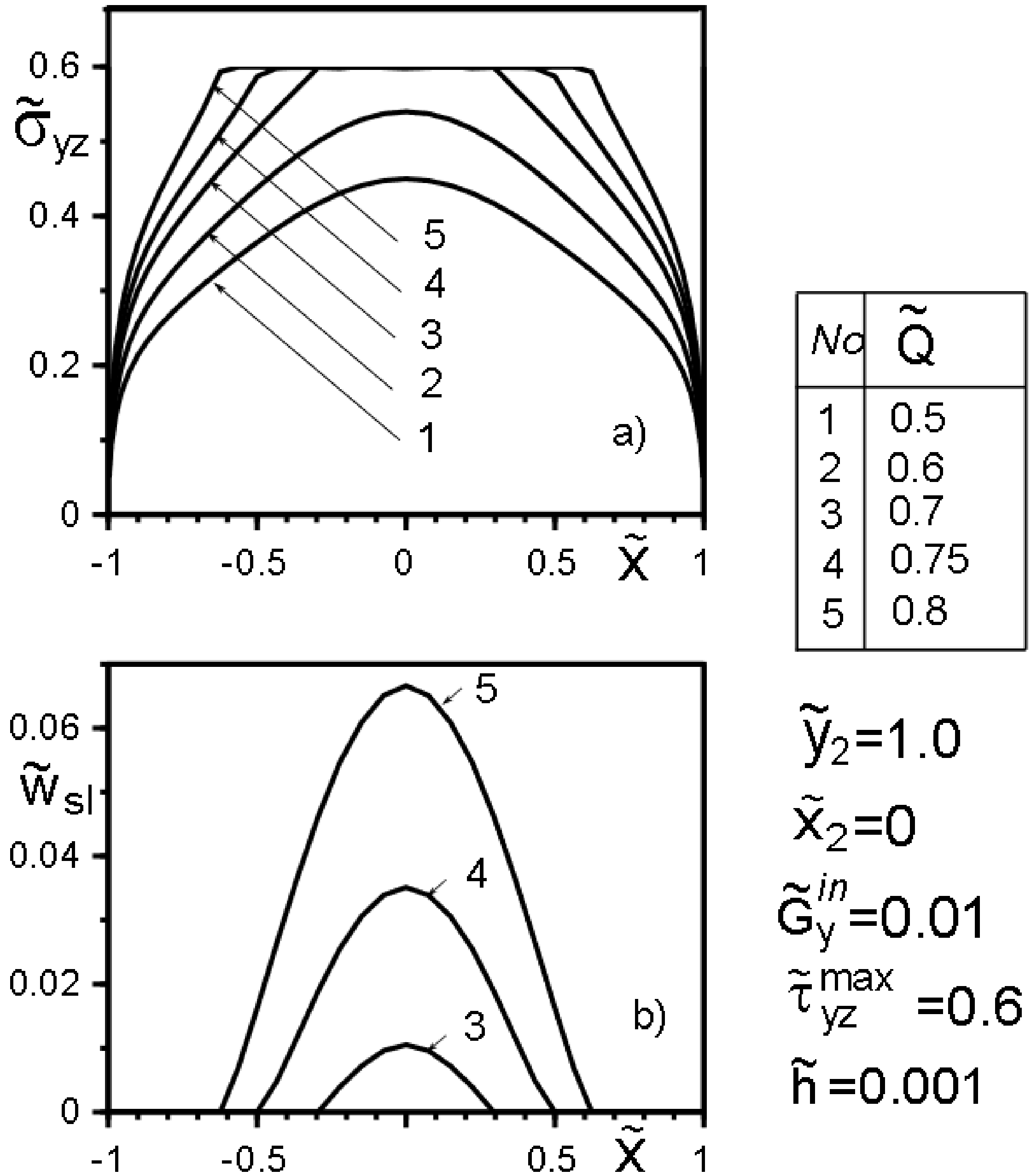



Рис. 6.13. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) для податнішого від матриці включення у залежності від зростання інтенсивності сили

Зменшення віддалі точок прикладання від осі включення, як і зростання інтенсивності навантаження очікувано призводить до зростання зони проковзування і його величини (рис. 6.11-6.13, 6.15).

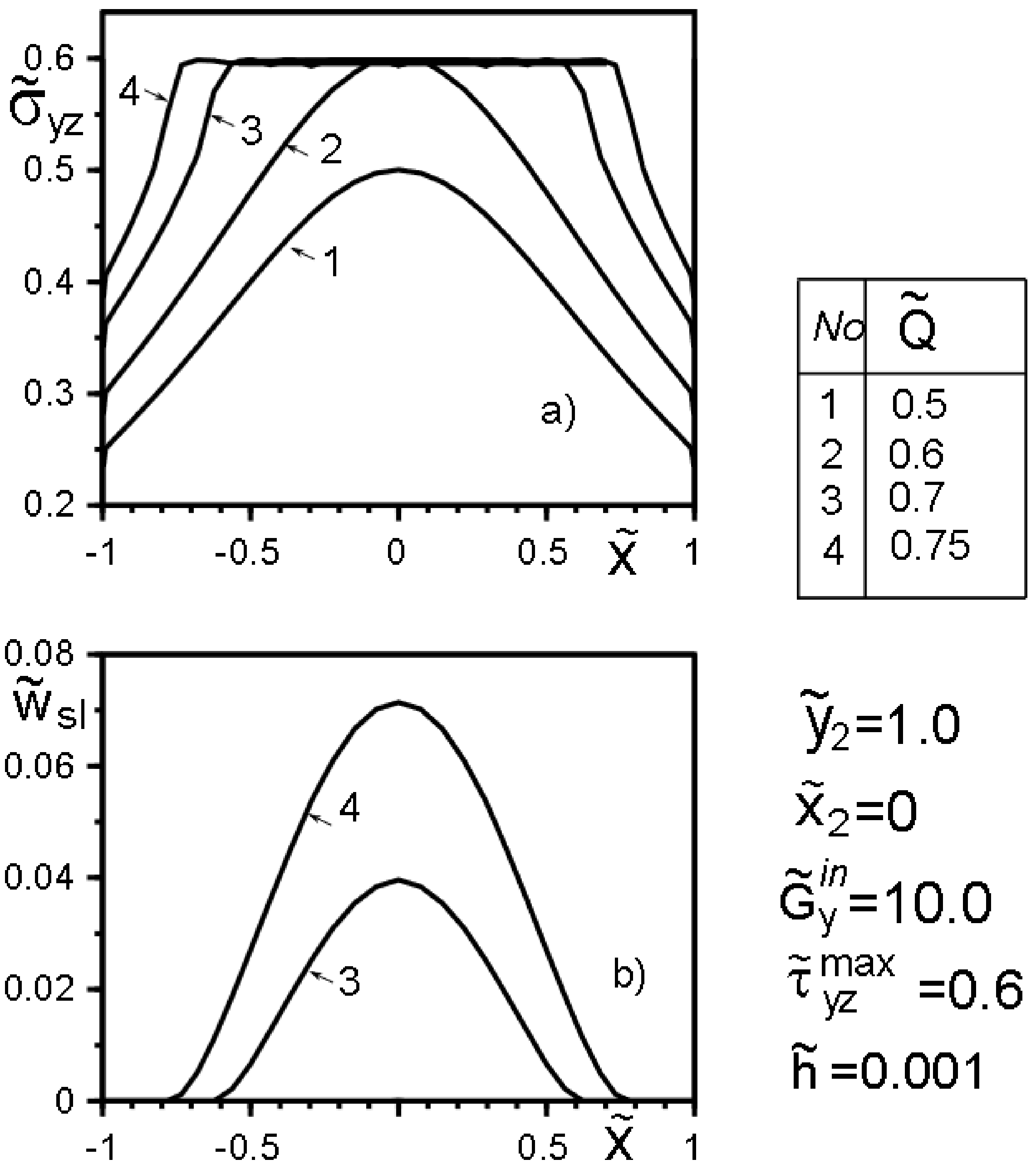



Рис. 6.14. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) для жорсткішого від матриці включення у залежності від зростання інтенсивності сили

Однак зміщення координати точок прикладання сил вздовж осі включення до його вершини (рис. 6.14), як і віддаляння від цієї осі (рис. 6.11) зменшує інтенсивність проковзування.

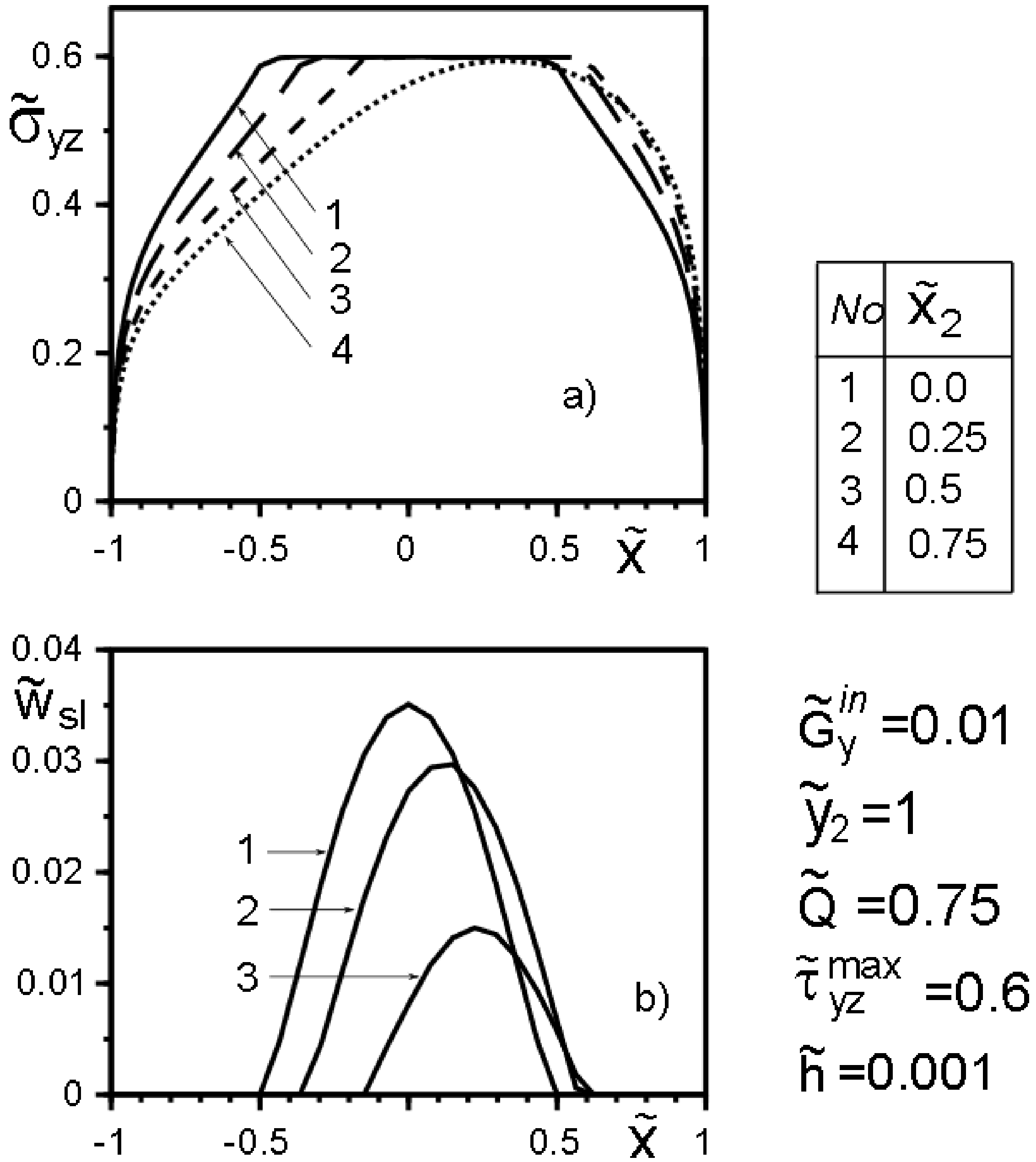



Рис. 6.15. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) для податнішого від матриці включення у залежності від зміщення координат точок прикладання сил вздовж осі включення

Навантажування прикладанням гвинтової дислокації з вектором Бюргерса $\tilde{b}_2 = b_2 G_2 / G_{av}$ в т. $x_2 = 0;\ y_2 = a$ призводить до появи двох зон проковзування антисиметричних відносно вертикальної осі включення (рис. 6.16).

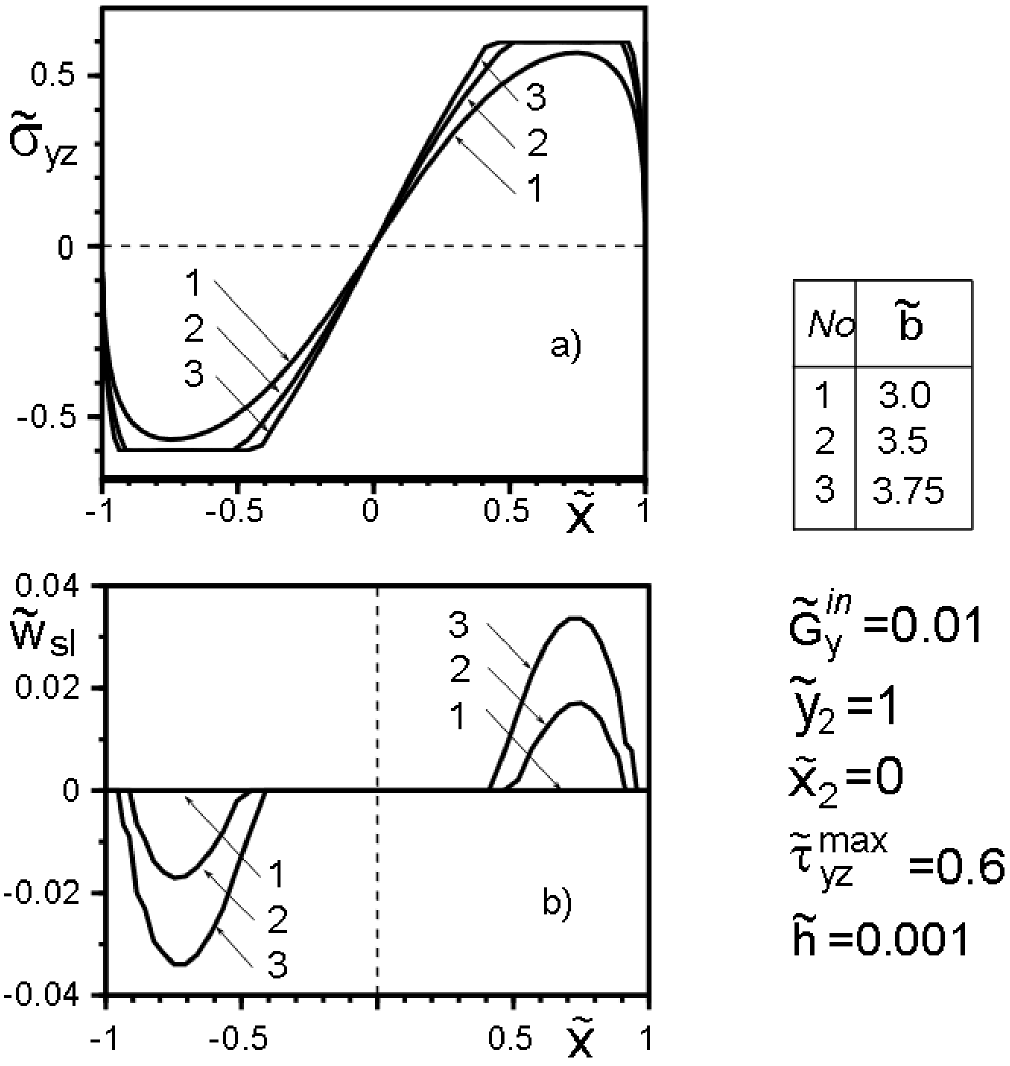



Рис. 6.16. Розподіл напружень вздовж межі включення-матриця (а) та величина зони проковзування (в) для податнішого від матриці включення за прикладання гвинтової дислокації

## 6.7. Часткові випадки. Двошарове різномодульне включення

Дослідимо поздовжній зсув структури у вигляді тіла із тонким двошаровим різномодульним включенням за умови неідеального механічного контакту з поверхневим натягом на поверхнях контакту складових структури за різного виду навантаження. Формулювання даної задачі: геометрія та навантажувальні чинники відповідають загальній постановці задачі в підрозділі **2.2.;** у сенсі зовнішньої задачі розглядається така ж мікроструктура, як і в підрозділі **6.6** (рис. 6.3), але в тунельний розріз вздовж відрізка $L' = [-a;\, a]$ вставлене тонке двошарове включення з шарами завтовшки $2h_K$ $(K = 1, 2)$, $2h = 2h_1 + 2h_2.$ та ортотропними механічними властивостями $G_y^{inK}, G_x^{inK}$ відповідно (рис. 6.17).

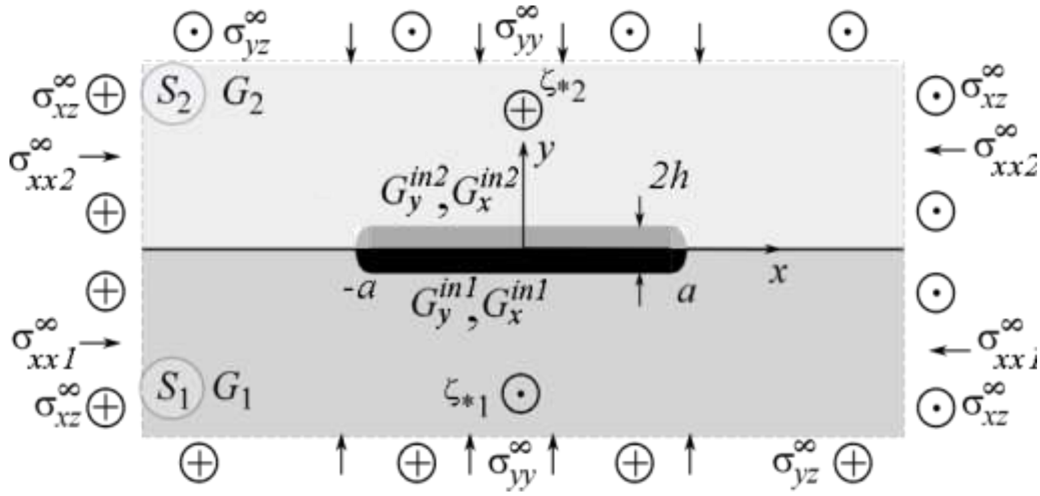



Рис. 6.17. Силова та геометрична схема задачі для двошарового різномодульного включення

Зовнішнє навантаження поздовжнього зсуву окреслюють рівномірно розподілені на нескінченності напруження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{xzk}^{\infty}$, зосереджені сили інтенсивності $Q_k$, гвинтові дислокації із складовою вектора Бюргерса $b_k$ у точках $\varsigma_{*k} \in S_k$ $(k = 1, 2)$, орієнтовані уздовж осі $Oz$ таким чином, що їх дія викликає у тілі квазістатичний антиплоский напружено-деформований стан. Для забезпечення прямолінійності межі розділу матеріалів на нескінченності напруження повинні задовольняти умову $\sigma_{xz2}^{\infty} G_1 = \sigma_{xz1}^{\infty} G_2$,

$$\frac{\nu_2 \sigma_{yy}^{\infty} - (1 - \nu_2)\sigma_{xx2}^{\infty}}{G_2} = \frac{\nu_1 \sigma_{yy}^{\infty} - (1 - \nu_1)\sigma_{xx1}^{\infty}}{G_1}.$$

Згідно з (6.9), (6.11) математична модель для двошарового включення має вигляд:

$$\begin{cases}\mu_x^{in1}\left\langle\dfrac{\partial w^{in1}}{\partial x}\right\rangle_{y_1,h_1}(x)-\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{xz}^{in1}\right]_{y_1,h_1}(\xi)d\xi=2h_1\left(\sigma_{xz}^{in1}(-a)-F_{aver}^{in1}(x)\right),\\ \mu_x^{in2}\left\langle\dfrac{\partial w^{in2}}{\partial x}\right\rangle_{y_2,h_2}(x)-\int\limits_{-a}^{x}\left[\sigma_{xz}^{in2}\right]_{y_2,h_2}(\xi)d\xi=2h_2\left(\sigma_{xz}^{in2}(-a)-F_{aver}^{in2}(x)\right),\\ \mu_y^{in1}\left\langle\sigma_{yz}^{in1}\right\rangle_{y_1,h_1}+\int\limits_{-a}^{x}\left[\dfrac{\partial w^{in1}}{\partial x}\right]_{y_1,h_1}d\xi+\left[w^{in1}\right]_{y_1,h_1}(-a)=0,\\ \mu_y^{in2}\left\langle\sigma_{yz}^{in2}\right\rangle_{y_2,h_2}+\int\limits_{-a}^{x}\left[\dfrac{\partial w^{in2}}{\partial x}\right]_{y_2,h_2}d\xi+\left[w^{in2}\right]_{y_2,h_2}(-a)=0.\end{cases} \quad (6.41)$$

Крайові умови між поверхнями шарів та тунельного розрізу на $L'=[-a;\,a]$ приймаємо неідеальними з поверхневим натягом (6.16) – (6.19)

$$\begin{aligned}&\sigma_{yz}^{in1}(x,y_1-h_1)=\sigma_{yz1}(x,-h)-T_1,\\ &\sigma_{yz}^{in2}(x,y_2-h_2)=\sigma_{yz1}^{in1}(x,y_1+h_1)-T_2,\\ &\sigma_{yz2}(x,h)=\sigma_{yz}^{in2}(x,y_2+h_2)-T_3,\\ &w(x,-h)=w^{in1}(x,y_1-h_1),\\ &w^{in2}(x,y_2-h_2)=w^{in1}(x,y_1+h_1),\\ &w^{in2}(x,y_2+h_2)=w(x,h).\end{aligned} \quad (6.42)$$

З урахуванням крайових умов (6.42) співвідношення між стрибками (6.2) та (6.4), (6.5) отримують вигляд:

$$\begin{aligned}&f_3(x)=f_{3,1}(x)+f_{3,2}(x)+T_1+T_2+T_3,\\ &f_6(x)=f_{6,1}(x)+f_{6,2}(x).\end{aligned} \quad (6.43)$$

Крім того, інтегральні представлення зовнішньої задачі (2.46), (2.47), (6.3), якщо натяг $T_K$ не є функцією координати $Ox$, можна розписати так

$$\sigma_{yz2}\left(x,h\right)=-p_2 f_{3,1}\left(x\right)-p_2 f_{3,2}\left(x\right)-Cg_{6,1}\left(x\right)-Cg_{6,2}\left(x\right)-$$
$$-p_2\left(T_1+T_2+T_3\right)+\sigma_{yz}^{0+}\left(x\right),$$
$$\sigma_{yz1}\left(x,-h\right)=p_1 f_{3,1}\left(x\right)+p_1 f_{3,2}\left(x\right)-Cg_{6,1}\left(x\right)-Cg_{6,2}\left(x\right)+$$
$$+p_1\left(T_1+T_2+T_3\right)+\sigma_{yz}^{0-}\left(x\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}\left(x,h\right)=-p_1 f_{6,1}\left(x\right)-p_1 f_{6,2}\left(x\right)+pg_{6,1}\left(x\right)+pg_{6,2}\left(x\right)+$$
$$+\frac{p}{\pi}\left(T_1+T_2+T_3\right)\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+\frac{\sigma_{xz}^{0+}\left(x\right)}{G_2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}\left(x,-h\right)=p_2 f_{6,1}\left(x\right)+p_2 f_{6,2}\left(x\right)+pg_{6,1}\left(x\right)+pg_{6,2}\left(x\right)+$$
$$+\frac{p}{\pi}\left(T_1+T_2+T_3\right)\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+\frac{\sigma_{xz}^{0-}\left(x\right)}{G_1}, \qquad (6.44)$$

що добре узгоджується з (6.43).

Підстановка (6.42) – (6.44) в (6.41) з урахуванням виразів

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yz1}^{in1}(x,y_1-h_1)=\sigma_{yz1}(x,-h)-T_1,\\
&\sigma_{yz2}^{in2}(x,y_2+h_2)=\sigma_{yz2}(x,h)+T_3,\\
&\sigma_{yz1}^{in1}(x,y_1+h_1)=\sigma_{yz}^{in2}(x,y_2-h_2)+T_2=\\
&\qquad=\sigma_{yz2}^{in2}(x,y_2+h_2)+f_{3,2}(x)+T_2=\\
&\qquad=\sigma_{yz2}(x,h)+f_{3,2}(x)+T_2+T_3,\\
&\sigma_{yz2}^{in2}(x,y_2-h_2)=\sigma_{yz1}^{in1}(x,y_1+h_1)-T_2=\\
&\qquad=\sigma_{yz1}^{in1}(x,y_1-h_1)-f_{3,1}(x)-T_2=\\
&\qquad=\sigma_{yz1}(x,-h)-f_{3,1}(x)-T_2-T_1,
\end{aligned} \qquad (6.45)$$

породжує наступний вигляд моделі двошарового різномодульного тонкого включення у термінах стрибків:

$$\begin{cases}
\left(p_2 - p_1\right) f_{6,1}(x) + 2p_2 f_{6,1}(x) + 2pg_{3,1}(x) + 2pg_{3,2}(x) - \dfrac{1}{\mu_x^{in1}} \displaystyle\int_{-a}^{x} f_{3,1}(\xi)d\xi = \\
\quad = \dfrac{2h_1}{\mu_x^{in1}}\left(\sigma_{xz}^{in1}(-a) - F_{aver}^{in1}(x)\right) - \left\langle \dfrac{\partial w^0}{\partial x} \right\rangle_h (x) - \left\{T_1 + T_2 + T_3\right\} \dfrac{2p}{\pi} \ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|, \\
-2p_1 f_{6,1}(x) + \left(p_2 - p_1\right) f_{6,2}(x) + 2pg_{3,1}(x) + 2pg_{3,2}(x) - \dfrac{1}{\mu_x^{in2}} \displaystyle\int_{-a}^{x} f_{3,2}(\xi)d\xi = \\
\quad = \dfrac{2h_2}{\mu_x^{in2}}\left(\sigma_{xz}^{in2}(-a) - F_{aver}^{in2}(x)\right) - \left\langle \dfrac{\partial w^0}{\partial x} \right\rangle_h (x) - \left\{T_1 + T_2 + T_3\right\} \dfrac{2p}{\pi} \ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|, \\
-\left(p_2 - p_1\right) f_{3,1}(x) + 2p_1 f_{3,2}(x) - 2Cg_{6,1}(x) - 2Cg_{6,2}(x) + \dfrac{1}{\mu_y^{in1}} \displaystyle\int_{-a}^{x} f_{6,1}(\xi)d\xi = \\
\quad = -\dfrac{1}{\mu_y^{in1}}\left[w^{in1}\right]_{y_1,h_1}(-a) + T_1 - T_2 - T_3 - \left\langle \sigma_{yzk}^{0} \right\rangle_h (x), \\
-2p_2 f_{3,1}(x) - \left(p_2 - p_1\right) f_{3,2}(x) - 2Cg_{6,1}(x) - 2Cg_{6,2}(x) + \dfrac{1}{\mu_y^{in2}} \displaystyle\int_{-a}^{x} f_{6,2}(\xi)d\xi = \\
\quad = -\dfrac{1}{\mu_y^{in2}}\left[w^{in2}\right]_{y_2,h_2}(-a) + T_1 + T_2 - T_3 - \left\langle \sigma_{yzk}^{0} \right\rangle_h (x).
\end{cases} \tag{6.46}$$

Отриману ССІР доповнюємо додатковими умовами балансу:

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f_{3,1}(\xi)d\xi = N_{xz}^{in1}(a) - N_{xz}^{in1}(-a) + a(T_1 + T_2), \\
&\int_{-a}^{a} f_{3,2}(\xi)d\xi = N_{xz}^{in2}(a) - N_{xz}^{in2}(-a) + a(T_2 + T_3),
\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f_{6,1}(\xi)d\xi = \left[w^{in1}\right]_{y_1,h_1}(a) - \left[w^{in1}\right]_{y_1,h_1}(-a), \\
&\int_{-a}^{a} f_{6,2}(\xi)d\xi = \left[w^{in2}\right]_{y_2,h_2}(a) - \left[w^{in2}\right]_{y_2,h_2}(-a),
\end{aligned} \tag{6.48}$$

де $N_{xz}^{inK}\left(x\right) = 2h_K\left(\sigma_{xz}^{inK}(-a) - F_{aver}^{inK}(x)\right) \quad \left(K = 1,2\right)$.

Або

$$\int_{-a}^{a} f_3(\xi)d\xi = N_{xz}^{in}(a) - N_{xz}^{in}(-a) + a(T_1 + T_3),$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f_{3,1}(\xi)d\xi + \int_{-a}^{a} f_{3,2}(\xi)d\xi + 2a(T_1 + T_2 + T_3) = \\
&\qquad = N_{xz}^{in1}(a) - N_{xz}^{in1}(-a) + a(T_1 + T_2) + \\
&\qquad + N_{xz}^{in2}(a) - N_{xz}^{in2}(-a) + a(T_2 + T_3),
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\int_{-a}^{a} f_{3,1}(\xi)d\xi + \int_{-a}^{a} f_{3,2}(\xi)d\xi = N_{xz}^{in1}(a) - N_{xz}^{in1}(-a) + N_{xz}^{in2}(a) - N_{xz}^{in2}(-a) - a(T_1 + T_3)\,.$$

Для збереження квазістатичної рівноваги розглянутої мікроструктури слід також вимагати виконання умови балансу поверхневих сил $T_1 + T_3 = 2T_2$.

Отриману систему рівнянь (6.46) – (6.49) зводимо до СЛАР описаним вище шляхом дискретизації в множині точок колокації $\left(x_n,\ n = \overline{1, N}\right)$.

Дослідження впливу різномодульності шарів включення, зовнішніх силових чинників за умови неідеального контакту з поверхневим натягом складових структури на знерозмірені параметри НДС на поверхнях включення та безрозмірний УКІН $K_{31}$ проілюстровані на рис. 6.18 – 6.31.

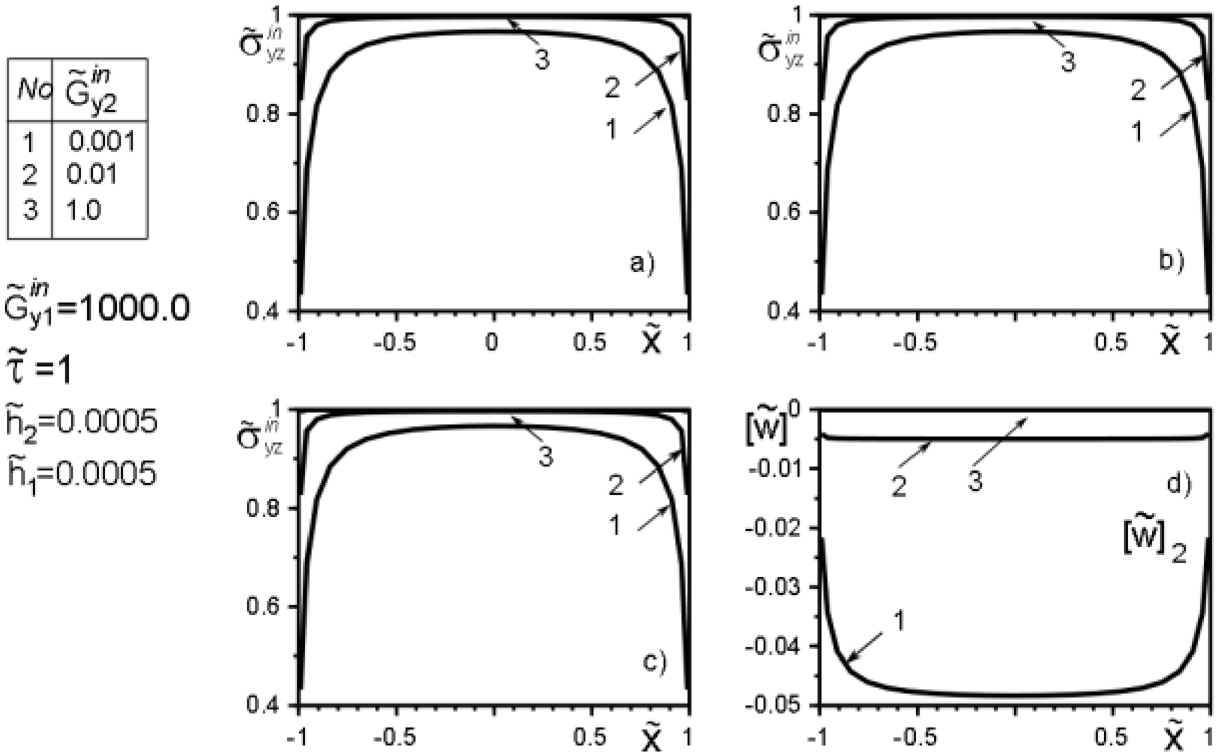



Рис. 6.18. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір $S_2$ матриці (a), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір $S_1$ матриці (c), та стрибка переміщень на включенні (d) для жорсткішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням

На рис. 6.18 – 6.21 зображено результати дослідження розподілів напружень на поверхнях контакту та стрибків переміщень на включенні від ступеня різномодульності шарів включення при різному зовнішньому навантаженні та за відсутності поверхневих сил.

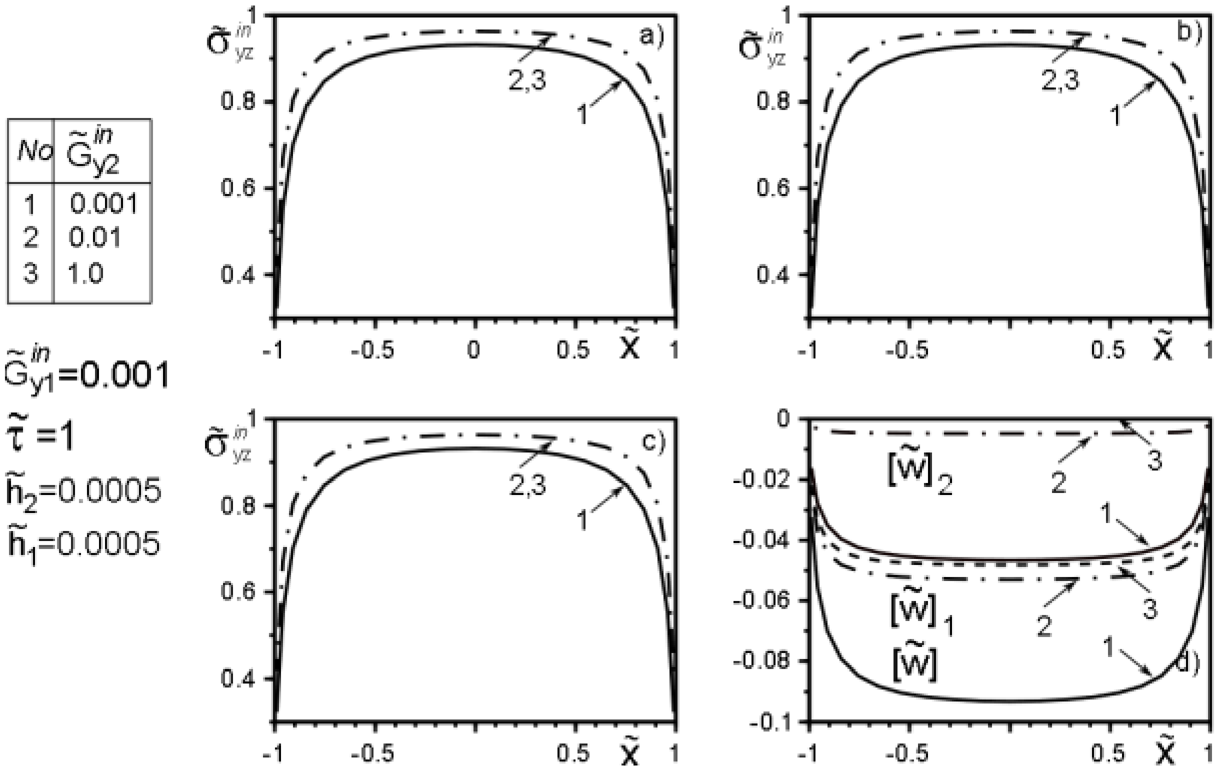



Рис. 6.19. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір $S_2$ матриці (a), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір $S_1$ матриці (c), та стрибка переміщень на включенні (d) для податнішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням

Для випадку, коли один з шарів значно мякший від матриці, спостерігається ефект «розвантаження» (зменшення рівня напружень) поверхонь незалежно від жорсткості другого шару. Причому цей ефект більш локальний за навантаження зосередженою силою, розташованою на віддалі $d$ від включення порядку $d / a \approx O(1)$.

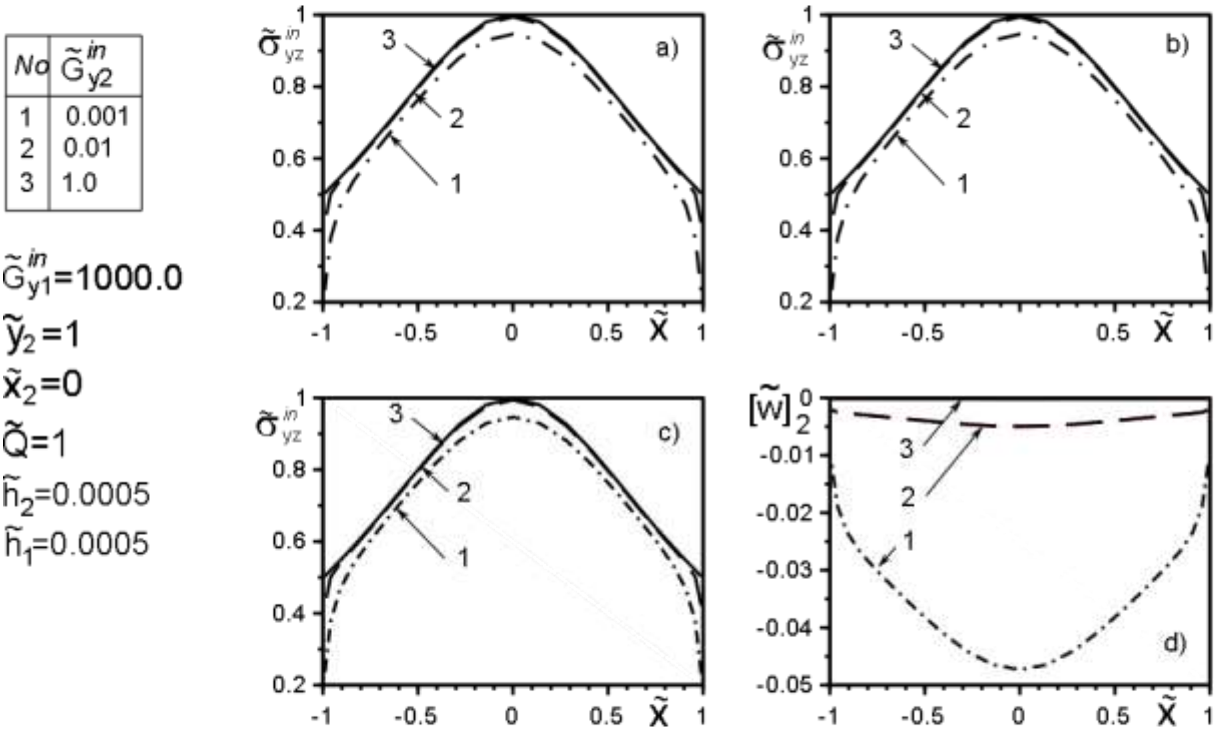



Рис. 6.20. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір $S_2$ матриці (a), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір $S_1$ матриці (c), та стрибка переміщень на включенні (d) для жорсткішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження зосередженою силою (схема 3)

На рис. 6.21d проілюстровано пропорційність стрибків переміщень кожного шару до їх жорсткості. На рис. 6.22 – 6.28 зображено результати дослідження впливу ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ при різному зовнішньому навантаженні та за відсутності поверхневих сил. Помітно, що зростання ступеню різномодульності матеріалів шарів включення істотніше впливає на УКІН, коли жорсткість одного з шарів більша від жорсткості матриці (рис. 6.22, 6.23, 6.27, 6.28) незалежно від виду навантажування.

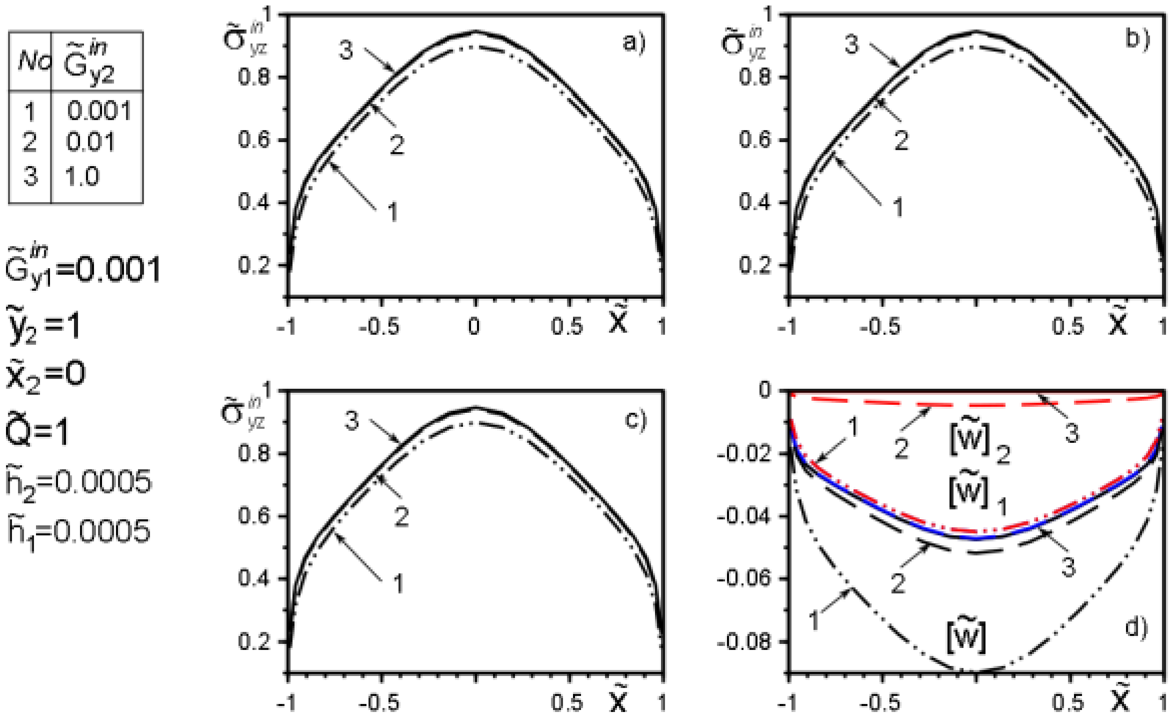


Рис. 6.21. Розподіл напружень вздовж верхньої межі шар 2 включення – півпростір $S_2$ матриці (a), межі шар 1 – шар 2 (b), нижньої межі шар 1 – півпростір $S_1$ матриці (c), та стрибка переміщень на включенні (d) для податнішого від матриці шару 1 включення у залежності від зміни жорсткості шару 2 за навантаження рівномірно зосередженою силою (схема 3)

На рис. 6.24 – 6.26 підтверджено відомий ефект наявності максимуму УКІН $K_{31}$ при навантажуванні зосередженою силою, розміщеною на віддалі приблизно $d \approx a$ від осі включення незалежно від жорсткості матеріалів шарів. Проте більш помітно він виражений в діапазоні жорсткості матеріалів шарів податніших від матеріалу матриці. Крім того, якщо матеріал одного з шарів еквівалентний до матеріалу матриці (рис. 6.26), то отримуються відомі результати для однорідного пружного включення на межі розділу матеріалів [231].

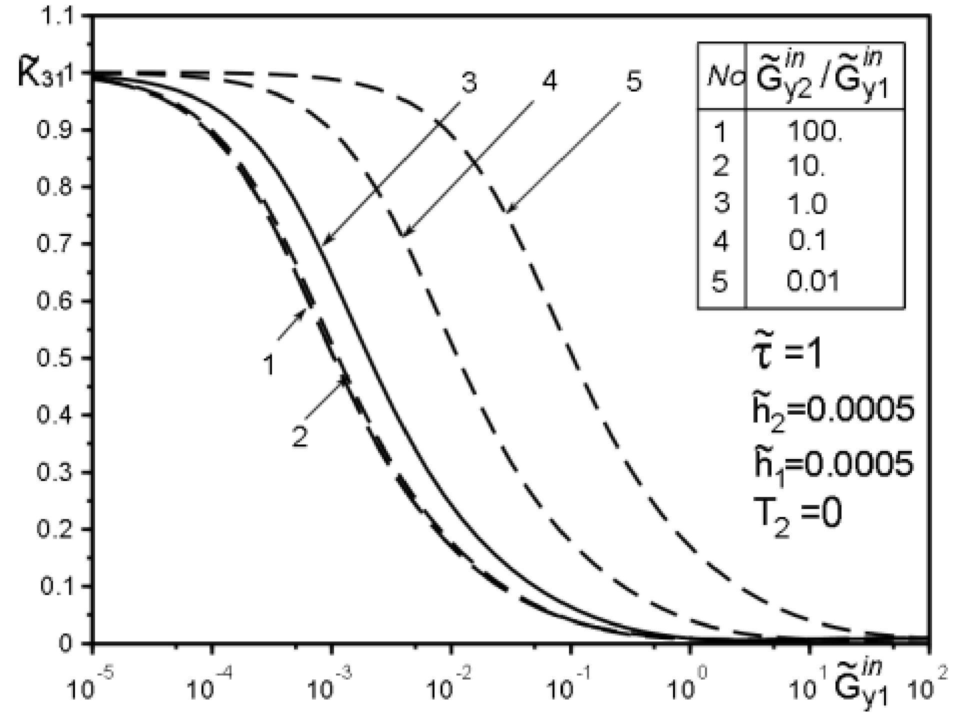



Рис. 6.22. Вплив ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням і відсутності поверхневого натягу

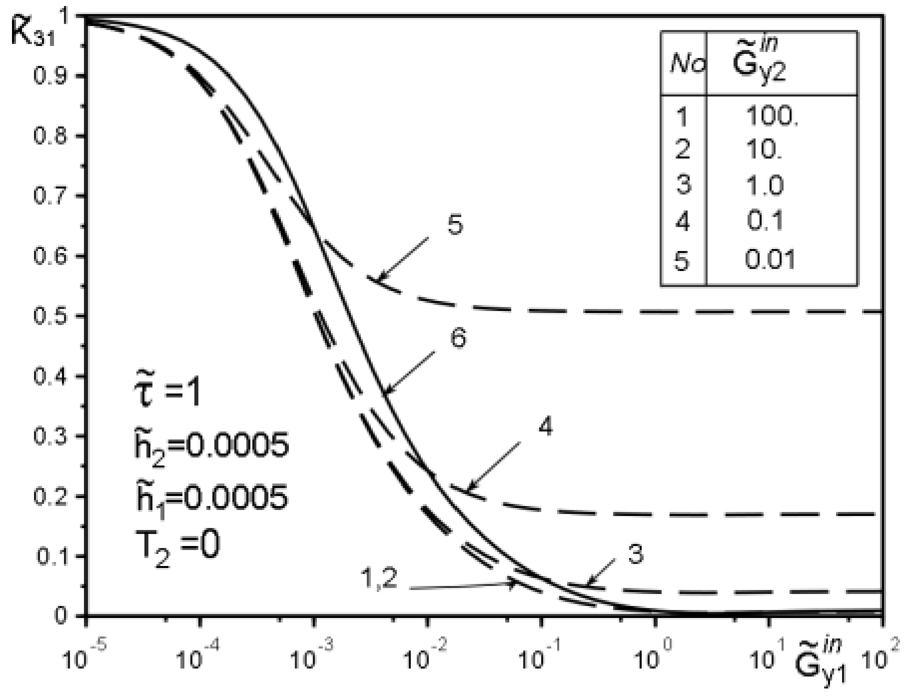



Рис. 6.23. Вплив ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ за навантаження рівномірно розподіленим на нескінченності напруженням і відсутності поверхневого натягу

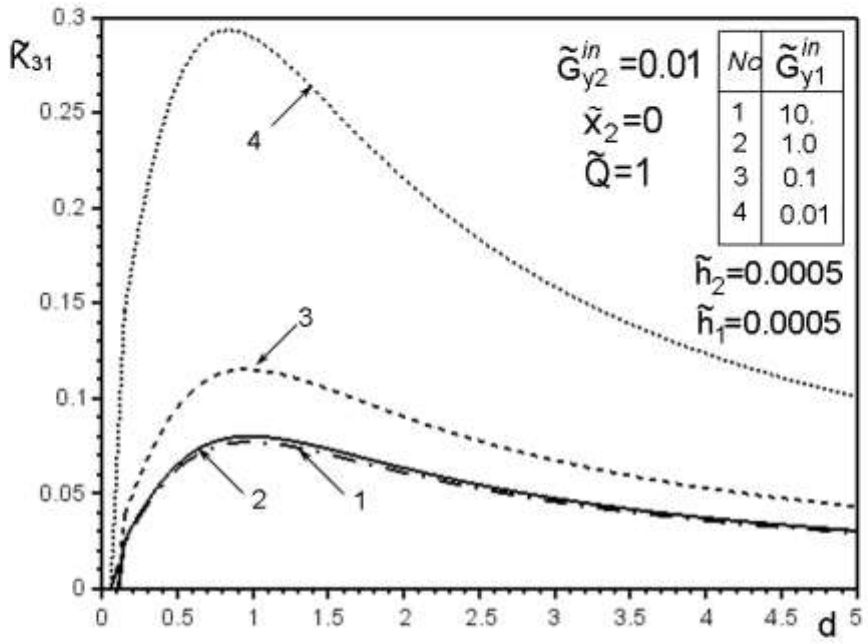



Рис. 6.24. Вплив віддалі від $d$ (схема 3) включення точки прикладання зосередженої сили і ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ за відсутності поверхневого натягу і податнішого від матриці шару 1

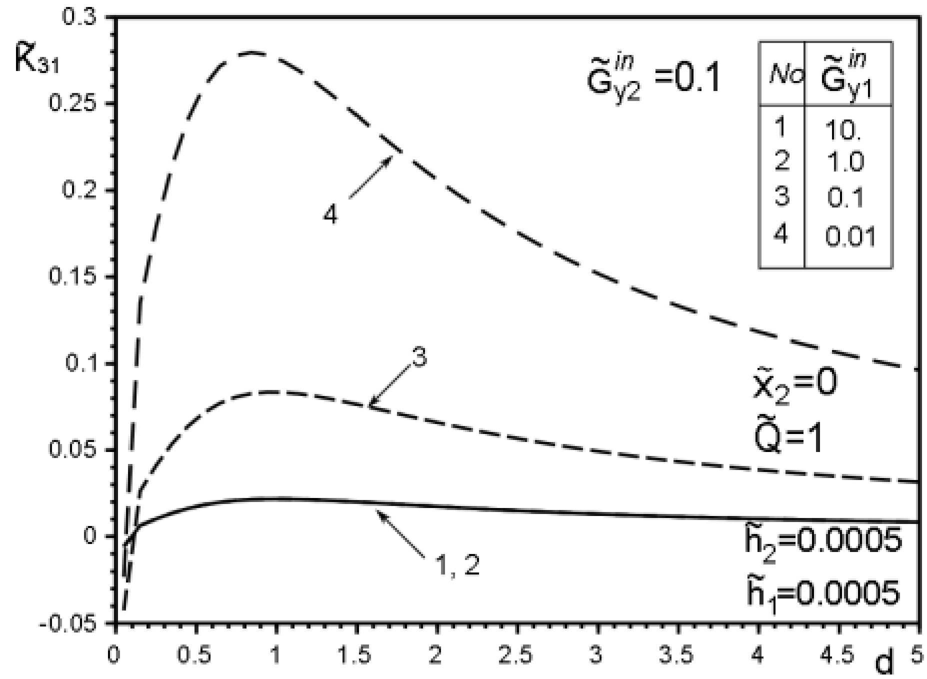



Рис. 6.25. Вплив віддалі від $d$ (схема 3) включення точки прикладання зосередженої сили і ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ за відсутності поверхневого натягу і податнішого від матриці шару 1

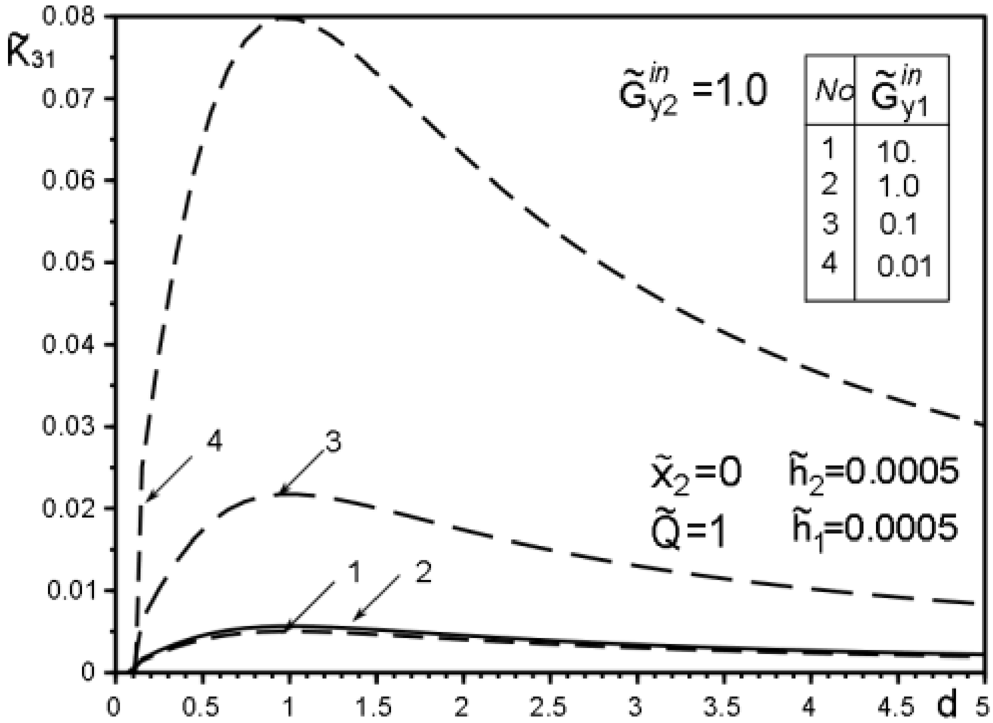



Рис. 6.26. Вплив віддалі від $d$ (схема 3) включення точки прикладання зосередженої сили і ступеню різномодульності на УКІН $K_{31}$ за відсутності поверхневого натягу і еквівалентного до матеріалу матриці шару 1

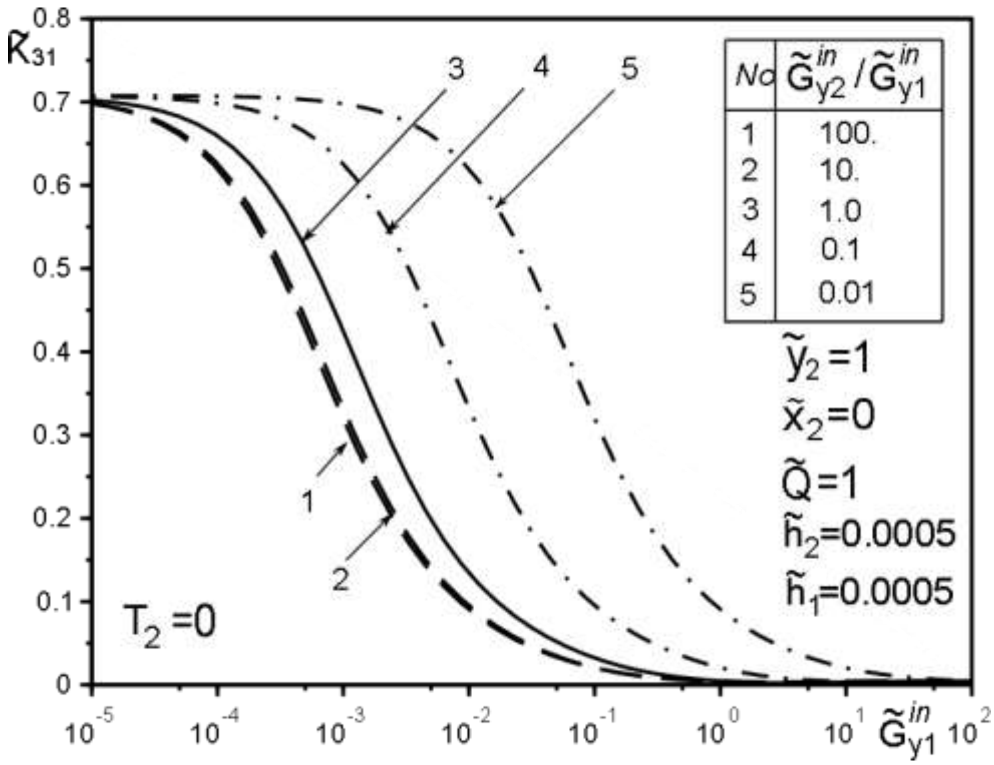



Рис. 6.27. Вплив ступеню різномодульності матеріалів шарів включення на УКІН $K_{31}$ за відсутності поверхневого натягу

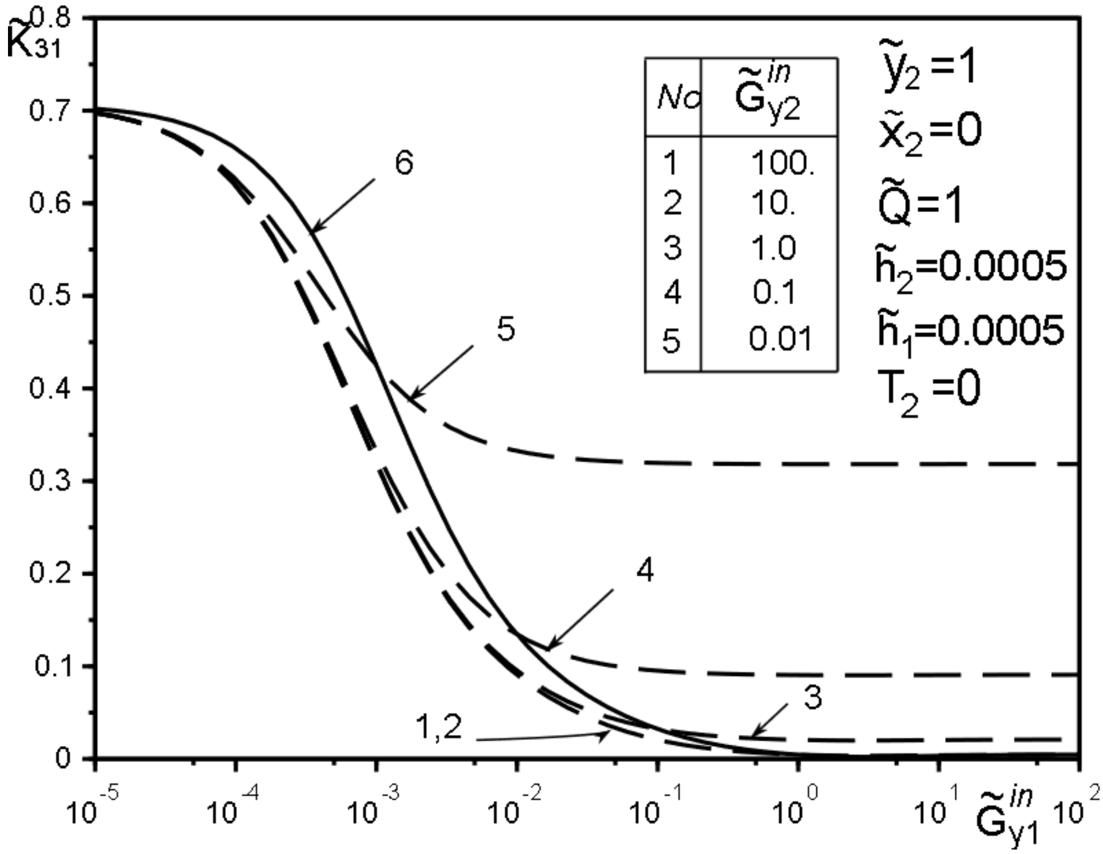



Рис. 6.28. Вплив ступеню різномодульності матеріалів шарів включення на УКІН $K_{31}$ за відсутності поверхневого натягу при навантажуванні зосередженою силою

На рис. 6.29 – 6.31 зображено результати дослідження впливу на УКІН $K_{31}$ ступеня різномодульності шарів включення та наявності поверхневих сил при різному зовнішньому навантаженні. Як і у результатах розділу 5 виявлено, що наявність поверхневих зусиль призводить до зростання УКІН, якщо вони співнапрямлені до зовнішнього навантаження, і зменшення – якщо спрямовані у протилежний від зовнішнього навантаження бік (рис. 6.29, 6.30).

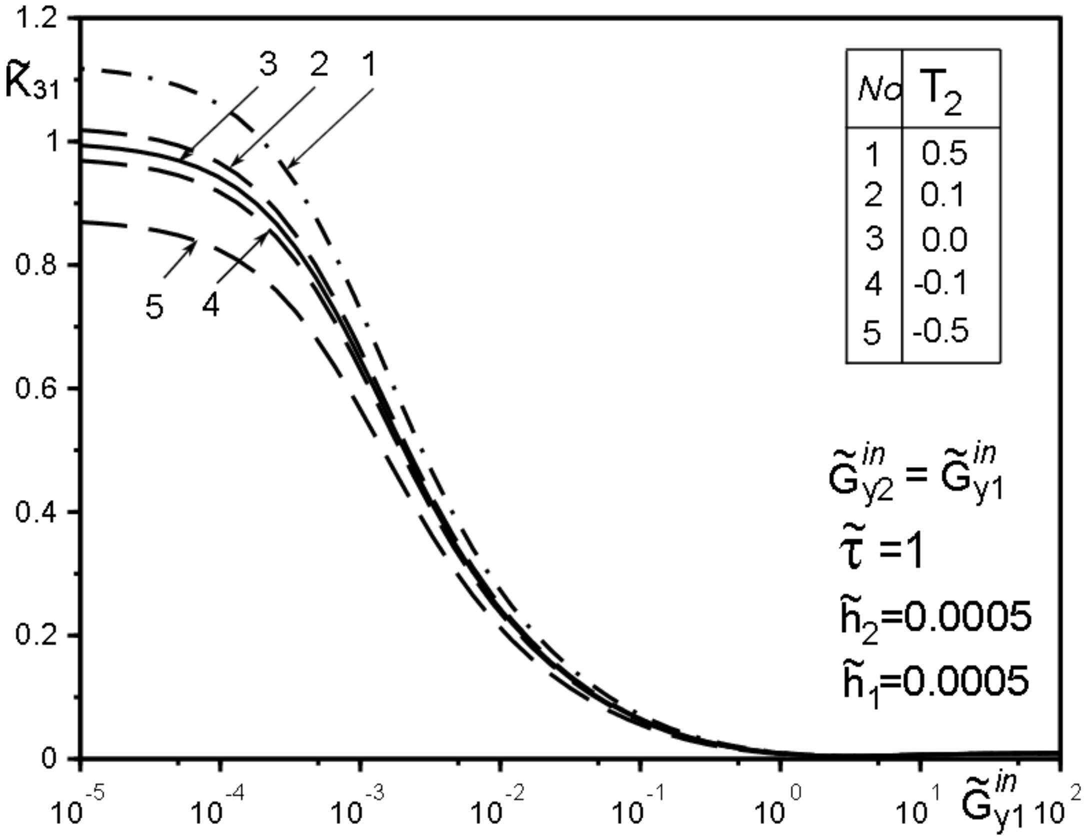



Рис. 6.29. Вплив на УКІН $K_{31}$ наявності міжшарового поверхневого натягу для однакових матеріалів шарів включення при навантажуванні рівномірно розподіленим на нескінченості напруженням

Різномодульність матеріалів шарів істотно спотворює цей ефект, що особливо помітно, коли один з шарів значно податніший від матеріалу матриці.  Виявлено, що існують певні комбінації параметрів зовнішнього навантаження, поверхневих зусиль та властивостей матеріалів шарів за яких існують локальні екстремуми УКІН. Цей ефект може виявитися корисним при проектуванні режимів експлуатації конструкцій з такою структурою.

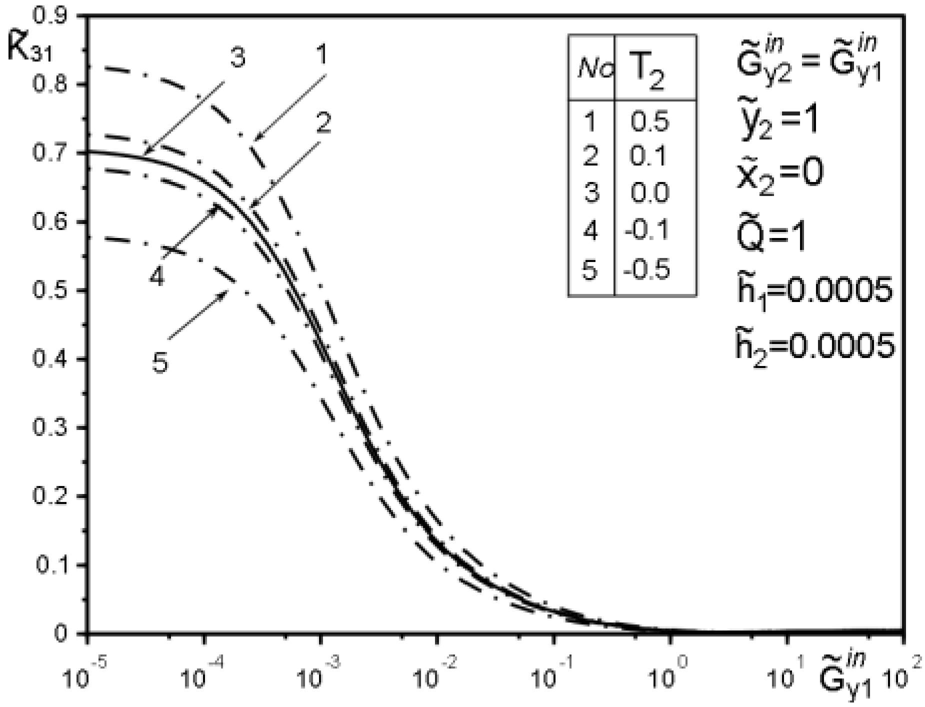



Рис. 6.30. Вплив на УКІН $K_{31}$ наявності міжшарового поверхневого натягу для однакових матеріалів шарів включення при навантажуванні зосередженою силою (схема 3) (6 – розрахунок для випадку одинакових матеріалів шарів)

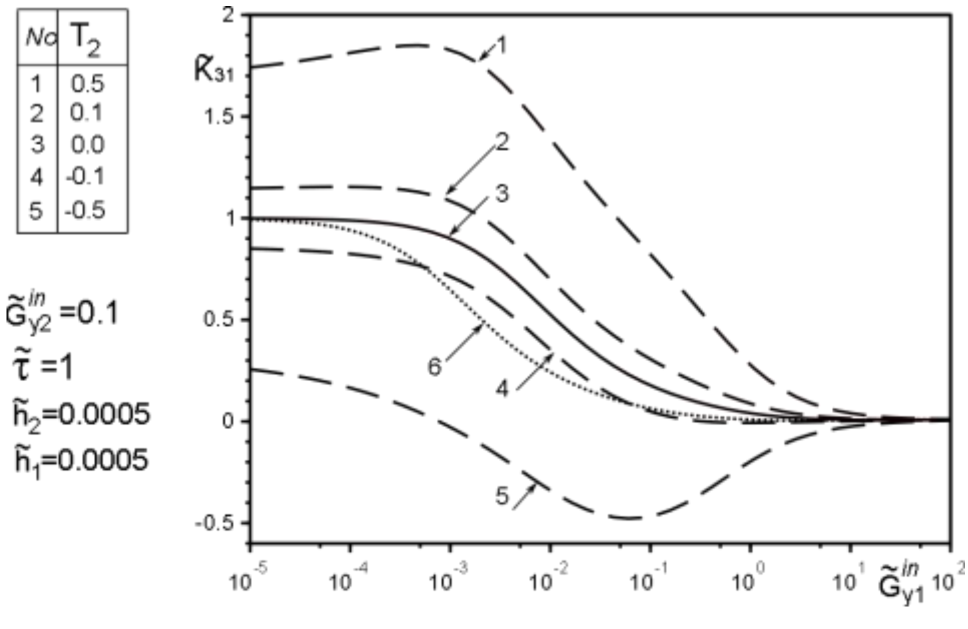



Рис. 6.31. Вплив на УКІН $K_{31}$ наявності міжшарового поверхневого натягу для податнішого від матриці шару 2 і довільного матеріалу шару 1 включення при навантажуванні рівномірно розподіленим на нескінченості напруженням; (6 – розрахунок для випадку однакових матеріалів шарів)

**Висновки до розділу 6**

1). Вперше розроблено математичну модель тонкого багатошарового включення з ортотропними властивостями шарів з урахуванням поверхневої енергії та можливості неідеального механічного контакту між ними.

2). Побудовано системи рівнянь СМ МФС і МФС для розв’язування задач антиплоскої деформації біматеріалу з такими міжфазними включеннями за довільного силового і дислокаційного навантаження у разі, коли контакт включення із матрицею може бути ідеальним або з поверхневим натягом чи проковзуванням (гладким або фрикційним).

3). Вивчено механічний вплив навантажування силовими та дислокаційними чинниками на таку структуру з можливим частковим відшаровуванням від матриці. Конфігурацію зони проковзування за різних видів навантажування окреслює опрацьований збіжний ітеративний алгоритм.

4). Для вибору режиму навантажування структури в умовах експлуатаці вивчене питання побудови «зон безпеки» розміщення зосереджених чинників в околі включення, коли проковзування на межі включення гарантовано не розпочнеться (збережуться умови ідеального механічного контакту).

5). Виявлено, що жорсткіше від матриці включення, з одного боку, значно чутливіше до появи на ньому проковзування – критичні значення сили $\tilde{Q}^{*}$ менші, ніж для податного. Але, з другого боку, форма «зони безпеки» для податного включення залежна від локалізації навантаження більше, ніж від розміру включення.

6). Форма «зони безпеки» розташування ядра гвинтової дислокації у разі податного включення змінюється значно менше порівняно з випадком жорсткого включення.

7). Рівень критичних значень інтенсивності векторів Бюргерса $\tilde{b}^*$ гвинтової дислокації для приблизно одинакових за розміром «зон безпеки» податного і жорсткого включення значно менший в останньому випадку.

8). Виявлено вплив параметрів задачі на розподіл напружень вздовж межі включення-матриця, а також зростання розміру зони проковзування та його інтенсивності. Помітно, що для податнішого від матриці включення проковзування з'являється і зростає швидше, ніж для жорсткішого при однакових інших параметрах задачі. Зменшення віддалі точок прикладання від осі включення, як і зростання інтенсивності навантаження очікувано призводить до зростання зони проковзування і його величини. Однак зміщення координати точок прикладання сил вздовж осі включення до його вершини, як і віддаляння від цієї осі зменшує інтенсивність проковзування. Навантажування прикладанням гвинтової дислокації призводить до появи двох зон проковзування антисиметричних відносно вертикальної осі включення.

9) Зростання ступеню різномодульності матеріалів шарів включення істотніше впливає на УКІН $K_{31}$, коли жорсткість одного з шарів більша від жорсткості матриці незалежно від виду навантажування.

10) Підтверджено ефект локалізації максимуму УКІН $K_{31}$ при навантажуванні зосередженою силою, розміщеною на віддалі приблизно $d \approx a$ від осі включення незалежно від жорсткості матеріалів шарів. Проте більш помітно він виражений в діапазоні жорсткості матеріалів шарів податніших від матеріалу матриці. Крім того, якщо матеріал одного з шарів еквівалентний до матеріалу матриці, то отримуються відомі результати для однорідного пружного включення (другий шар) на межі розділу матеріалів.

11) Як і у результатах розділу 5 підтверджено, що наявність поверхневих зусиль призводить до зростання УКІН, якщо вони співнапрямлені до зовнішнього навантаження, і зменшення – якщо

спрямовані у протилежний від зовнішнього навантаження бік. Різномодульність матеріалів шарів якісно змінює це явище, що особливо помітно, коли один з шарів значно податніший від матеріалу матриці. Виявлено, що існують певні комбінації параметрів зовнішнього навантаження, поверхневих зусиль та властивостей матеріалів шарів за яких існують локальні екстремуми УКІН. Це може виявитися корисним при проектуванні режимів експлуатації таких структур.

# РОЗДІЛ 7. ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОГО МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З НЕЛІНІЙНИМИ ФІЗИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи дуже часто збурюють однорідну будову матеріалів і тіл у вигляді дефектів (тріщини, включення), конструкційних (підкріплення, накладки) чи функціональних (різного типу давачі) елементів, арматури композитів, наповнювачів при застосуванні ін’єкційних технологій для «заліковування» дефектів тощо [231, 336, 428, 451]. Одним із характерних прикладів композиційного матеріалу є шаруваті структури, властиві, зокрема, й ґрунтам [171]. Задачі такого типу у разі лінійності фізико-механічних властивостей неоднорідностей та ідеального контакту між складовими вже достатньо добре вивчені, зокрема і для скінченних тіл та з урахуванням термічних і електромагнітних ефектів із використанням гранично-елементного методу функцій стрибка [194, 231, 246, 442, 428]. Врахування нелінійного характеру задачі (фізична пружна чи непружна нелінійність, а також невизначеність області контакту у разі можливості її порушення) досліджені дуже мало. Врахування нелінійності істотно ускладнює процес розв’язування задач і вимагає використання різноманітних наближених методів навіть для тіл простої геометрії [167, 231, 265]. Поміж праць на цю тематику варто згадати дослідження напружено-деформованого стану пружної пластини з тонким в'язкопружним включенням [451], врахування можливості розщеплення включення-балки [383] чи фрикційного контакту [119, 196, 198, 335, 445, 447], створення та застосування конститутивних співвідношень моделі деформування аркуша паперу [346] чи ґумової мембрани [346, 383, 427].

## 7.1. Формулювання задачі

Як і в попередніх розділах актуальною в плані геометрії та способів навантаження є описана в підрозділі **2.2.** у сенсі *зовнішньої* задачі антиплоскої деформації загальна постановка. Відтак розглядається структура з двох півпросторів з пружними сталими $G_1, G_2$, на межі розділу яких (площина $xOz$) в напрямку осі зсуву $z$ розташований тунельний розріз, у який вставлений певний фізичний об’єкт у вигляді тонкого включення. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини $S_k$ $(k=1,2)$, а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$. На ній вздовж відрізка $L'=[-a;a]$ знаходиться тонке включення (рис. 7.1). З огляду на малу товщину включення за загальною схемою МФС це включення можна вилучити із розгляду, заступаючи його вплив на напружено-деформований стан у півпросторах невідомими наперед функціями стрибка векторів напружень та переміщень при перетині площини $xOz$ (лінії $L'=[-a;a]$).

В розумінні *внутрішньої* задачі розглядаємо тонке включення завтовшки $2h\,(h \ll a)$, механічні властивості якого у різних напрямках можуть різнитися (ортотропія) і характеризуватися конститутивним рівнянням доволі загального нелінійного вигляду

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}\right),\ s=\{x,y\}, \tag{7.1}$$

де монотонна функція $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}\right)$ обирається із загальнотеоретичних міркувань або є якоюсь апроксимаційною залежністю емпіричних даних.

Коли прийняти $\varpi_s\left(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}\right) \sim \varpi_s\left(\sigma_{sz}^{in}\right)$, то конститутивні співвідношення (2.49) можуть бути записані у вигляді (2.53):

$$\sigma_{xz}^{in} = G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})\frac{\partial w^{in}}{\partial x},\ \sigma_{yz}^{in} = G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})\frac{\partial w^{in}}{\partial y}. \tag{7.2}$$

Зовнішнє навантаження механічної структури припускаємо багатокроковим, як це описано в підрозділі ***2.6.1***. Тобто, величина й напрямок дії зовнішніх силових чинників (рівномірно розподілених на нескінченності напружень $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_{p} \tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xzk}^{\infty} = \sum_{p} \tau_{k(p)}(t)$, зосереджених сил інтенсивності $Q_k(t) = \sum_{p} Q_{k(p)}(t)$, гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_k(t) = \sum_{p} b_{k(p)}(t)$ в точках $z_{*k} \in S_k \left(k = 1,2\right)$ уздовж осі $z$), що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних в часових проміжках $\left[t_{(p-1)}; t_{(p)}\right]$ покрокових послідовностей і описані в Додатку Б. Тут, як і в попередніх розділах, $(p)$— номер кроку навантажування. Згідно [231] напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$, щоб забезпечити прямолінійність межі розділу матеріалів на нескінченності.

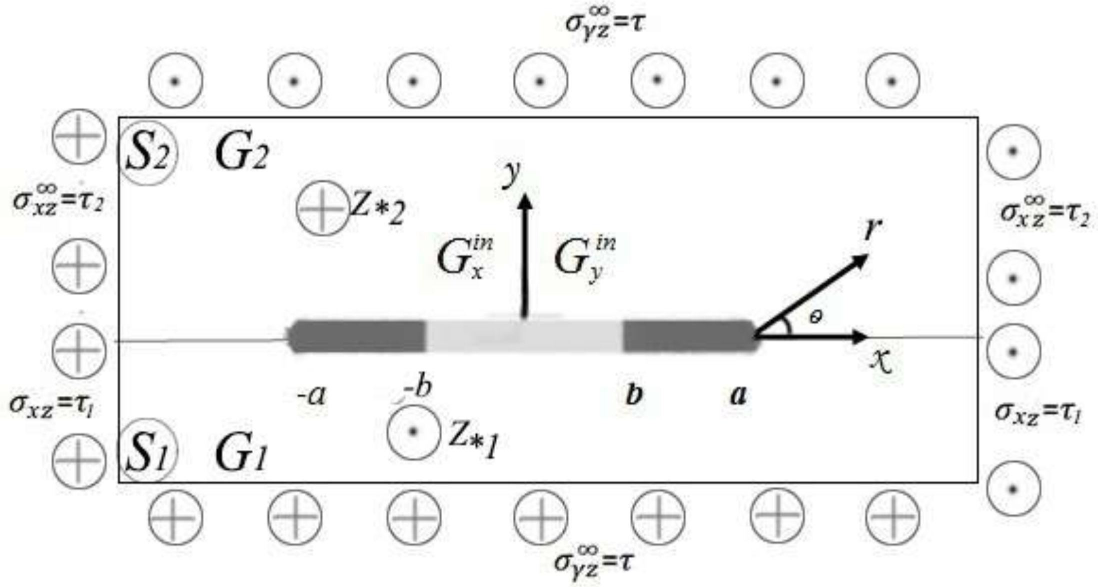



Рис. 7.1. Геометрія та навантаження мікроструктури

Застосовуючи МФС (підрозділ **2.1**) і враховуючи припущення (2.3) можна сформулювати таку *зовнішню* задачу: наявність тонкого включення в масиві на межі поділу матеріалів моделюють стрибки компонент векторів напружень і переміщень на $L'$ [231, 194] :

$$\begin{aligned} &\sigma_{rz}(x,y) = \sigma_{rz}^0(x,y) + \hat{\sigma}_{rz}(x,y),\ r = \{x,y\}, \\ &w(x,y) = w^0(x,y) + \hat{w}(x,y), \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} &\left[\sigma_{yz}\right]_{h(p)} \cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}\left(x,t\right), \\ &\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{h(p)} \cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_{h(p)} \equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}\left(x,t\right),\ x \in L'\ ; \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$f_{3(p)}\left(x,t\right) = f_{6(p)}\left(x,t\right) = 0\ \text{, якщо}\ x \notin L', \tag{7.5}$$

де $t$ – деякий момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю навантаження. Тут і далі позначено: $\left[\bullet\right]_h = \bullet\left(x,-h\right) - \bullet\left(x,+h\right)$, $\left\langle\bullet\right\rangle_h = \bullet\left(x,-h\right) + \bullet\left(x,+h\right)$; індекси "+" та "–" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії $L$.

Відзначені індексом “0” зверху величини характеризують однорідний розв'язок (2.34), тобто відповідні величини у суцільному тілі без модельних неоднорідностей за відповідного зовнішнього навантаження, а величини, відзначені зверху сірконфлексом “^”, є збуреннями основного поля НДС наявністю включення.

### 7.2. Математична модель тонкого включення з нелінійними фізичними властивостями (внутрішня задача)

В даній задачі буде використана узагальнена математична модель тонкого включення з нелінійними фізичними властивостями (2.52) у спрощеному вигляді з використанням формул (2.51), (7.2):

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in},t)\left\langle \dfrac{\partial w}{\partial x}\right\rangle_h (x,t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}\right]_h(\xi,t)d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in},t)\left[w\right]_h(x,t) + h\left\langle \sigma_{yz}\right\rangle_h (x,t) = 0. \end{cases} \tag{7.6}$$

Хоча вжито слова «спрощений вигляд», ця модель описує більшість діаграм і законів деформування, що застосовуються у інженерній практиці та наукових публікаціях. Наприклад, у вигляді (7.1) можна подати: класичний закон лінійної пружності Гука; закони пластичного деформування Баха – Шюле, Соколовського, Ільюшина [30]; діаграму лінійного пружно-пластичного деформування зі зміцненням [30, 330]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^{in}}{\partial s} = \dfrac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{0s}}, & \left|\sigma_{sz}^{in}\right| < \tau_{yield}, \quad s = \{x, y\}, \\ \dfrac{\partial w^{in}}{\partial s} = \left(\sigma_{sz}^{in} - \tau_{yield}\right)\dfrac{G_{0s} - G_{1s}}{G_{0s}G_{1s}}, & \left|\sigma_{sz}^{in}\right| \geq \tau_{yield}; \end{cases} \tag{7.7}$$

діаграму деформування у формі Рамберга–Осгуда [402]:

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{os}}\left(1 + K_s\left(\frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{os}}\right)^{m_s - 1}\right), \quad s = \{x, y\} \tag{7.8}$$

та інші. Тут $G_{os}, G_{1s}, m_s, K_s, \tau_{yield}$ – параметри матеріалу включення. Що найбільш важливо для практичних інженерних застосувань, діаграму деформування (7.2) можна описати якимись конкретними функціями, що апроксимує емпіричні дані з випробувань конкретного матеріалу. Зазначимо, що модель (7.8) можна розглядати і як доволі універсальний варіант нелінійного ідеально пружного деформування.

Модель (7.6) цілком придатна для подальших узагальнень з використанням складнішої залежності (2.49), причому застосування таких ускладнень не потребуватиме зміни запрропонованої тут загальної схеми розв’язування задачі.

Адекватність математичної моделі (7.6) добре верифікують граничні випадки. Наприклад, за ідеального контакту між включенням і матрицею з неї випливають умови:

**A)** відсутності включення

$$h \to 0: \left[\sigma_{yzk}\right]_h \to 0, \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_h \to 0, \ \left[w\right]_h \to 0;$$

**B)** відсутності опору вздовж осі $Ox$ (модель контакту Вінклера)

$$G_x^{in} \to 0: \int_{-a}^{x} \left[\sigma_{yz}\right]_h (\xi) d\xi + N_{xz}(-a) + 2hF_{aver}^{in}(x,h) = 0;$$

**C)** відсутності опору вздовж осі $Oy$ (плівка)

$$G_y^{in} \to \infty: \ \left[w\right]_h \to 0;$$

**D)** абсолютно жорсткого включення

$$G_x^{in} \to \infty: \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h \to 0, \ \ \left[w\right]_h \to 0.$$

## 7.3. Система рівнянь МФС і СМ МФС задачі у разі ідеального механічного контакту між компонентами матеріалів

Для розв’язування поставленої задачі систему рівнянь *зовнішньої* задачі (2.46), (2.47) та *внутрішньої* задачі (7.6) слід доповнити умовами контакту виду (2.56) – (2.62). Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ приймаємо ідеальним.

### *7.3.1. Побудова та розв'язок інтегральних рівнянь МФС*

Враховуючи нелінійність механічних властивостей включення, що відображено у побудованій моделі (7.6), розглянемо спочатку випадок, коли контакт та між масивом і берегами включення вздовж $L'$ теж вважаємо ідеальним

$$w^{in}(x,\pm h) = w_k(x,\pm h),\ \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h)\ \left(x \in L'\right). \tag{7.9}$$

Використовуючи залежності (2.46), (2.47) та крайові умови (7.9), з моделі (7.6) випливає ССІР для першого (у лінійному наближенні) кроку навантажування

$$\begin{cases} \alpha_1 f_{6(1)}(x,t) + \beta_1 g_{3(1)}(x,t) - \gamma_{1(1)}(x,t) s_{3(1)}(x,t) = F_{3(1)}(x,t), \\ \alpha_2 f_{3(1)}(x,t) + \beta_2 g_{6(1)}(x,t) - \gamma_{2(1)}(x,t) s_{6(1)}(x,t) = F_{6(1)}(x,t), \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\alpha_1 = p_2 - p_1,\ \beta_1 = 2p,\ \gamma_{1(1)}(x,t) = \frac{a}{hG_{x(1)}^{in}(x,t)},$$

$$F_{3(1)}(x,t) = \gamma_{1(1)}(x,t) N_{xz}(-a) - \left\langle \frac{\sigma_{xz}^0}{G_k} \right\rangle_h,$$

$$\alpha_2 = p_2 - p_1,\ \beta_2 = 2C,\ \gamma_{2(1)}(x,t) = \frac{aG_{y(1)}^{in}(x,t)}{h},$$

$$F_{6(1)}(x,t) = \gamma_{2(1)}(x,t) \left\{ \left[w\right]_h(-a) - h \left\langle \frac{\sigma_{yzk}^0}{G_k} \right\rangle_h \right\} + \left\langle \sigma_{yzk}^0 \right\rangle_h,$$

з додатковими умовами балансу

$$\begin{aligned}&\int_{-a}^{a} f_{3(1)}(\xi,t)\,d\xi = N_{xz}(a) - N_{xz}(-a),\\&\int_{-a}^{a} f_{6(1)}(\xi,t)\,d\xi = [w]_h(a) - [w]_h(-a).\end{aligned} \tag{7.11}$$

Якщо, крім цього, матеріали матриці вважати однаковими $G_1 = G_2 = G$, то ССІР (7.10) спрощується, розділяючись на два незалежних рівняння

$$\begin{aligned}&\beta_1 g_{3(1)}(x,t) - \gamma_{1(1)}(x,t) s_{3(1)}(x,t) = F_{3(1)}(x,t),\\&\beta_2 g_{6(1)}(x,t) - \gamma_{2(1)}(x,t) s_{6(1)}(x,t) = F_{6(1)}(x,t).\end{aligned} \tag{7.12}$$

Для подальшого аналізу та розв'язування зручно представити ССІР (7.10) у знерозміреному вигляді

$$\begin{cases}\alpha_1 \tilde{f}_{6(1)}(\tilde{x},t) + \beta_1 \tilde{g}_{3(1)}(\tilde{x},t) - \eta_{3(1)}(x,t)\displaystyle\int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{3(1)}(\xi,t)\,d\xi = \tilde{F}_{3(1)}\left(\tilde{x},\sigma_{xz(1)}^{in},t\right),\\ \alpha_2 \tilde{f}_{3(1)}(\tilde{x},t) + \beta_2 \tilde{g}_{6(1)}(\tilde{x},t) - \eta_{6(1)}(x,t)\displaystyle\int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{6(1)}(\xi,t)\,d\xi = \tilde{F}_{6(1)}\left(\tilde{x},\sigma_{yz(1)}^{in},t\right),\end{cases} \tag{7.13}$$

де

$$\begin{aligned}&\alpha_{1,2} = (p_2 - p_1),\;\; \beta_1 = 2\tilde{p},\;\; \beta_2 = 2\tilde{C},\\&\eta_{3(1)}(x,t) = 1\big/\tilde{h}\tilde{G}_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz(1)}^{in},t),\;\; \eta_{6(1)}(x,t) = \tilde{G}_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in},t)\big/\tilde{h},\\&\tilde{x} = x/a,\; \tilde{h} = h/a,\; \tilde{y} = y/a,\\&\tilde{G}_{0s} = G_{0s}/G_{av},\;\; \tilde{G}_{s(1)}^{in}(\sigma_{sz(1)}^{in}) = G_{s(1)}^{in}(\sigma_{sz(1)}^{in})\big/G_{av},\\&\tilde{f}_{3(1)} = G_{av} f_{3(1)},\;\; \tilde{f}_{6(1)} = f_{6(1)},\;\; \tilde{F}_{3(1)} = F_{3(1)}/G_{av},\; \tilde{F}_{6(1)} = F_{6(1)}/G_{av},\\&G_{av} = \left\{\sqrt{G_1 G_2},\; \max(G_1, G_2),\; \tau,\; \tau_{pl},\; Q/\pi a\right\},\\&\tilde{Q}_k(t) = Q_k(t)/a\pi G_{av},\; \tilde{C} = C/G_{av},\\&\tilde{z}_{*k} = z_{*k}/a = \tilde{x}_{*k} + i\tilde{y}_{*k},\; \tilde{\tau}_k(t) = \tau_k(t)/G_{av},\; \tilde{\tau}(t) = \tau(t)/G_{av},\; G_d = G_2/G_1.\end{aligned}$$

Тут

$$F_{3(1)}\left(x, G_x^{in}(\sigma_{xz(1)}^{in}), t\right) = \frac{2\sigma_{xz(1)}^{in}(-a)}{G_x^{in}(\sigma_{xz(1)}^{in}, t)} - \left(\frac{\sigma_{xz2}^{0}(x,t)}{G_2} + \frac{\sigma_{xz1}^{0}(x,t)}{G_1}\right),$$

$$F_{6(1)}\left(x, G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in}), t\right) = \left\langle \sigma_{yz}^{0} \right\rangle (x,t) - G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in}, t)\left(\frac{\sigma_{yz2}^{0}(x,t)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz1}^{0}(x,t)}{G_1}\right) -$$

$$- \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in})}{h}\left[w^0\right]_h(-a);$$

з додатковими умовами силового балансу та однозначності переміщень при обході навколо дефекту

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \tilde{f}_{3(1)}\left(\xi, t\right) d\xi = \tilde{N}_{xz(1)}(1) - \tilde{N}_{xz(1)}(-1), \\ &\int_{-1}^{1} \tilde{f}_{6(1)}\left(\xi, t\right) d\xi = \left[\tilde{w}\right]_{(1)}(1) - \left[\tilde{w}\right]_{(1)}(-1). \end{aligned} \qquad (7.14)$$

Тут треба врахувати, що

$$\begin{aligned} &\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right) + i\sigma_{xz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle = 2\tau_{(1)}(t) + i(\tau_{1(1)}(t) + \tau_{2(1)}(t)) + \\ &+ i\left\{(3p_1 + p_2)D_{2(1)}(x,t) + (p_2 - p_1)\overline{D}_{2(1)}(x,t) + \right. \\ &\left. + (3p_2 + p_1)D_{1(1)}(x,t) + (p_1 - p_2)\overline{D}_{1(1)}(x,t)\right\}. \end{aligned} \qquad (7.15)$$

Для розв’язування ССІР (7.13), (7.14) можна використати методику підрозділу ***2.5.2.*** з урахуванням того, що характеристична частина ССІР від нелінійних функцій-коефіцієнтів явно не залежить (підрозділ **2.5.**). Відтак ССІР на кожному кроці приросту навантажування зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих коефіцієнтів розвинення функцій стрибка $f_{r(1)}(x,t)$ у ряди за поліномами Якобі. У частковому випадку рівності пружних характеристик півпросторів

($G_1 = G_2 = G$) отримуємо ССІР виду (7.12) і можемо застосовувати розвинення функцій стрибка $f_{r(1)}(x,t)$ у ряди виду (2.93) за поліномами Чебишова для подальшого розв'язування задачі методом колокацій (підрозділ **2.6**)

$$\tilde{f}_{3(1)}(x,t) = \frac{G}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}}\varphi_{3(1)}(x,t)\,, \quad \tilde{f}_{6(1)}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}}\varphi_{6(1)}(x,t)\,, \tag{7.16}$$

де $\varphi_{r(1)}(x,t)$ − регулярні на проміжку $[-1;1]$ функції, які подамо у вигляді

$$\varphi_{r(p)}(x,t) = \sum_{k=0}^{n} B_{k(p)}^{r}(t) T_k(x)\,. \tag{7.17}$$

Підставляючи (7.16), (7.17) з використанням відомих інтегралів (2.94) у (7.12), (7.13) на множині точок колокації $x_m = \cos\dfrac{m\pi}{n+1}$ $\left(m = \overline{1,n}\right)$, з урахуванням додаткових умов (7.14) отримуємо дискретний аналог ССІР − дві незалежні СЛАР порядку $n+1$ з невідомими апріорі коефіцієнтами $\tilde{G}_{xm(1)}^{in} = \tilde{G}_{x(1)}^{in}\left(\tilde{\sigma}_{xz(1)}^{in}\left(x_m,t\right)\right)$, $\tilde{G}_{ym(1)}^{in} = \tilde{G}_{y(1)}^{in}\left(\tilde{\sigma}_{yz(1)}^{in}\left(x_m,t\right)\right)$ щодо шуканих $B_{k(1)}^{r}$ $\left(r = 3,6;\ k = \overline{0,n}\right)$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} B_{k(1)}^{3}\chi_{km(1)}\left(\tilde{G}_{xm(1)}^{in}\right) + B_{0(1)}^{3}\chi_{0m(1)}\left(\tilde{G}_{xm(1)}^{in}\right) = F_{3(1)}\left(x_m, \tilde{G}_{xm(1)}^{in}\right), \\ B_{0(1)}^{3} = 2\tilde{h}\left(\tilde{\sigma}_{xz(1)}^{in}(1) - \tilde{\sigma}_{xz(1)}^{in}(-1)\right), \qquad m = \overline{1,n} \end{cases} \tag{7.18}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} B_{k(1)}^{6}\psi_{jm(1)}\left(\tilde{G}_{xm(1)}^{in}\right) + B_{0(1)}^{6}\psi_{0m(1)}\left(\tilde{G}_{ym(1)}^{in}\right) = F_{6(1)}\left(x_m, \tilde{G}_{ym(1)}^{in}\right), \\ B_{0(1)}^{6} = \left[\tilde{w}\right]_{(1)}(1) - \left[\tilde{w}\right]_{(1)}(-1), \qquad m = \overline{1,n}; \end{cases} \tag{7.19}$$

де позначено

$$\chi_{km(1)}\left(\tilde{G}^{in}_{xm(1)}\right)=U_{k-1}(x_m)\left\{1+\frac{\sqrt{1-x_m^2}}{k\tilde{h}\tilde{G}^{in}_{xm(1)}}\right\},$$

$$\chi_{0m(1)}\left(\tilde{G}^{in}_{xm(1)}\right)=\frac{-1}{\tilde{h}\tilde{G}^{in}_{xm(1)}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(x_m\right)\right),$$

$$\psi_{km(1)}\left(\tilde{G}^{in}_{xm(1)}\right)=U_{k-1}(x_m)\left\{1+\frac{\tilde{G}^{in}_{ym(1)}\sqrt{1-x_m^2}}{k\tilde{h}}\right\},$$

.

$$\psi_{0m(1)}\left(\tilde{G}^{in}_{ym(1)}\right)=\frac{-\tilde{G}^{in}_{ym(1)}}{\tilde{h}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(x_m\right)\right).$$

Залежність $G^{in}_{x(1)}(\sigma^{in}_{xz}(x,t)),\, G^{in}_{y(1)}(\sigma^{in}_{yz}(x,t))$ від поточного НДС структури навіть на першому кроці навантажування породжує істотні труднощі при розрахунку внаслідок його змінюваності вздовж $L$. Тому для розв’язування поставленої задачі буде в повному обсязі застосований інкрементально-ітераційний метод, ідея якого описана в підрозділі **2.6.**

Для компактності запису вводимо позначення: $\gamma^j_{xm}=G^{in}_{x(1)}\left(\sigma^{in}_{xz}(x_m,t)\right)$, $\gamma^j_{ym}=G^{in}_{y(1)}\left(\sigma^{in}_{yz}(x_m,t)\right)$ – величини змінюваних модулів зсуву в точках колокації $x_m$ $\left(m=\overline{1,n}\right)$ у момент часу $\boldsymbol{t}$, $j$ – номер наближення. Далі пропонується застосувати таку методику розв’язування:

1) На початковому кроці значення $\gamma^0_{xm}=G^{in}_{xm(1)}(0,0),\, \gamma^0_{ym}=G^{in}_{ym(1)}(0,0)$ вибираються з діаграми деформування матеріалу включення рівними $G^{in}_{0x}, G^{in}_{0y}$, що відповідають стартовому моменту процесу навантажування при відсутності якихось залишкових компонент НДС. Ці значення поки вввважатимемо одинаковими у всіх точках колокації $x_m$ $\left(m=\overline{1,n}\right)$.

2) Починаємо зміну зовнішнього навантажування з деякого значення $\tau$, $Q$ чи $b$ згідно з вибраною схемою навантажування структури.

3) Розв'язуємо СЛАР (7.18) − (7.19) із заданими в пункті 2) величинами інтенсивності навантажування і значеннями $\gamma_{xm}^{j}$, $\gamma_{ym}^{j}$ (на першому кроці $j=0$). Підставимо отримані $B_{m(1)}^{r}\left(r=3,6;\ m=\overline{0,n}\right)$ у співвідношення (7.16), (7.17), (2.94), а потім у крайові умови (7.9) та (2.46), (2.47) обчислюючи компоненти НДС в кожній з точок колокації.

4) Обчислюємо з використанням (2.53) наступне $\left(j=1\right)$ наближення модуля зсуву у кожній точці колокації

$$\gamma_{xm}^{j}=G_{xm(1)}^{in}\left(\sigma_{xz}^{in}(x_m,\gamma_{xm}^{j-1})\right),\quad \gamma_{ym}^{j}=G_{y(1)}^{in}\left(\sigma_{yz}^{in}(x_m,\gamma_{ym}^{j-1})\right). \qquad (7.20)$$

5) Перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність (2.107). Якщо "так", то процес розрахунку цього кроку навантажування завершено і можна починати наступний крок. Якщо "ні", то продовжуємо мінімізувати відхилення розрахункових модулів пружності $\gamma_{xm}^{j+1}$, $\gamma_{ym}^{j+1}$ від заданих відповідно до значень компонент НДС в діаграмі деформування (2.53), повторюючи $\left(j\rightarrow j+1\right)$ схему розрахунку від пункту 3) з щойно отриманими значеннями модулів $\gamma_{xm}^{j}$, $\gamma_{ym}^{j}$ у кожній точці колокації.

У численних числових експериментах отримано, що такий ітераційний процес є збіжним.

Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу $t_{(1)}$ його завершення значення НДС масиву на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) будуть мати сенс залишкових. Тому після цього застосуємо для отримання розв'язку методику, описану в підрозділі ***2.6.1.***

Вважаємо, що постановка задачі на другому кроці відрізняється від постановки задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком. Тоді подання загального поля напружень має вигляд (2.98), (2.99)

$$\sigma_{yz}(z,t)+i\sigma_{xz}(z,t)=\sigma_{yz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)+i\sigma_{xz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)+\sigma^{0}_{yz(2)}(z,t)+$$
$$+i\sigma^{0}_{xz(2)}(z,t)+ip_k g_{3(2)}(z,t)-Cg_{6(2)}(z,t)\;\left(z\in S_k;\;k=1,2;\;j=3-k\right).$$

Переміщення та напруження повинні задовольняти крайові умови (7.9) на $L'$. Тоді з урахуванням (2.98), (2.99) можна сформулювати локальну задачу для другого кроку (2.100), (2.101):

$$\begin{gathered}\sigma_{yz(2)}(z,t)+i\sigma_{xz(2)}(z,t)=\left\{\sigma_{yz}(z,t)+i\sigma_{xz}(z,t)\right\}-\\ -\left\{\sigma_{yz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)+i\sigma_{xz(1)}\left(z,t_{(1)}\right)\right\}\;\left(z\in S_k;\;k=1,2;\;j=3-k\right)\end{gathered}\tag{7.21}$$

з крайовими умовами (7.9), які перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered}w^{in}_{(1)}(x,\pm h)+w^{in}_{(2)}(x,\pm h)=w_{k(1)}(x,\pm h)+w_{k(2)}(x,\pm h),\quad x\in L'\\ \sigma^{in}_{yz(1)}(x,\pm h)+\sigma^{in}_{yz(2)}(x,\pm h)=\sigma_{yzk(1)}(x,\pm h)+\sigma_{yzk(2)}(x,\pm h),\end{gathered}$$

або

$$\begin{gathered}w^{in}_{(2)}(x,\pm h)=\left\{w_{k(1)}(x,\pm h)-w^{in}_{(1)}(x,\pm h)\right\}+w_{k(2)}(x,\pm h),\quad x\in L'\\ \sigma^{in}_{yz(2)}(x,\pm h)=\left\{\sigma_{yzk(1)}(x,\pm h)-\sigma^{in}_{yz(1)}(x,\pm h)\right\}+\sigma_{yzk(2)}(x,\pm h).\end{gathered}\tag{7.22}$$

Вирази у фігурних дужках дорівнюють нулю внаслідок (7.9) на першому кроці і, отже, умови (7.22) отримують для другого кроку навантажування ідентичний до (7.9) вигляд

$$w_{(2)}^{in}(x,\pm h)=w_{k(2)}(x,\pm h),\ \ \sigma_{yz(2)}^{in}(x,\pm h)=\sigma_{yzk(2)}(x,\pm h)\ \ \ x\in L'. \qquad (7.23)$$

Оскільки вигляд (7.23) такий самий як вигляд (7.9), то ССІР для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень та напружень $f_{3(2)}$, $f_{6(2)}$ від локального (для цього кроку) навантаження

$$\begin{array}{ll} \tau_{(2)}(t)=\tau(t)-\tau_{(1)}(t), & \tau_{k(2)}(t)=\tau_k(t)-\tau_{k(1)}(t), \\ Q_{k(2)}(t)=Q_k(t)-Q_{k(1)}(t_{(1)}) & (k=1,2;\ t>t_{(1)}) \end{array}. \qquad (7.24)$$

матиме аналогічний до (7.10) – (7.12) вигляд.

Залежність $G_{x(2)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}(x,t)), G_{y(2)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}(x,t))$ від поточного локального НДС на цьому кроці не може бути обчислена так, як на першому кроці, бо вимагає врахування повного значення досягнутого на цьому етапі НДС. Тому пропонується наступний алгоритм їх визначення:

1) На наступному кроці як початкові вибираються значення $G_{x(1)}^{in}(НДС_{(1)},t_{(1)}), G_{y(1)}^{in}(НДС_{(1)},t_{(1)})$, що відповідають завершальному моменту $t_{(1)}$ процесу навантажування на першому кроці.
2) Продовжуємо зовнішнє навантажування як локальне згідно з (7.24) при вибраній на цьому кроці схемі навантажування.
3) Розв’язуємо СЛАР. Підставляємо отримані $B_{k(2)}^{r}\ \left(r=3,6;\ k=\overline{0,n}\right)$ у співвідношення (7.16), (7.17), (2.94), а потім у (7.9) та (2.46), (2.47), обчислюючи локальне НДС в кожній з точок колокації.
4) Обчислюємо згідно з (2.98), (2.99) повний НДС, вважаючи значення НДС з попереднього кроку залишковим.
5) Обчислюємо з використанням (2.53) наступне наближення модуля зсуву у кожній точці колокації

$$\gamma_{xm}^{j} = G_{xm(1)}^{in}\left(\sigma_{xz}^{in}(x_m, \gamma_{xm}^{j-1})\right),\ \gamma_{ym}^{j} = G_{y(1)}^{in}\left(\sigma_{yz}^{in}(x_m, \gamma_{ym}^{j-1})\right).$$

6) Перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо "так", то процес розрахунку на цьому кроці завершено і можна переходити до наступного кроку навантаження, вибравши відповідні для кожної точки колокації значення $G_{x(2)}^{in}(НДС_{(2)}, t_{(2)}),\ G_{y(2)}^{in}(НДС_{(2)}, t_{(2)})$ (на пункт 1). Якщо "ні", то мінімізуємо відхилення розрахункових модулів пружності $\gamma_{xm}^{j+1}$, $\gamma_{ym}^{j+1}$ від заданих відповідно до значень компонент НДС в діаграмі деформування (2.53), повторюючи $\left(j \to j+1\right)$ схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів $\gamma_{xm}^{j}$, $\gamma_{ym}^{j}$ у кожній точці колокації, відповідними для даного НДС.

Цей алгоритм може бути продовжений на довільну кількість достатньо малих для забезпечення належної точності розрахунків кроків квазістатичного навантажування на кожному із інтервалів монотонності змінюваного навантаження.

### *7.3.2. Побудова та розв’язування рівнянь СМ МФС*

Розглянемо тепер підхід до розв’язування задачі структурно-модульним МФС. Враховуючи, що отримані вирази межових значень напружень та деформацій у моделі включення (7.6), межових значень напружень та деформацій у матриці (2.46), (2.47) та крайові умови (7.9) – утворюють повну систему рівнянь для розв’язування поставленої задачі можемо відразу перейти до числово-аналітичного розв’язування цієї системи рівнянь. Інтегральні представлення (2.46), (2.47), (6.3) в результуючій системі рівнянь утворять в загальному випадку два СІР для визначення невідомих $f_3$ , $f_6$ .

Для подальшого числово-аналітичного методу колокацій (підрозділ **2.5**) наявність СІР вимагатиме дослідження особливості їх розв’язку, після чого невідомі $f_3$, $f_6$ доцільно представити у вигляді розвинення в ряди Якобі чи Чебишова (2.87), (2.93) і отримаємо на них $2N+2$ невідомих $A_n^r$ $(n=\overline{1,N};\ r=3,6)$.

Згідно з парадигмою методу колокацій представляємо вирази (2.46), (2.47), (6.3), (7.6) та (7.9) у дискретній формі

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{yzk}^{\pm}\left(x_n\right)=\mp p_k f_3\left(x_n\right)-Cg_6\left(x_n\right)+\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_n\right),\\
&\sigma_{xzk}^{\pm}\left(x_n\right)=\mp Cf_6\left(x_n\right)+p_k g_3\left(x_n\right)+\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_n\right),\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial y}\left(x_n\right)=\mp pf_3\left(x_n\right)-p_{3-k}g_6\left(x_n\right)+\frac{\sigma_{yz}^{0\pm}\left(x_n\right)}{G_k},\\
&\frac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\left(x_n\right)=\mp p_{3-k}f_3\left(x_n\right)+pg_6\left(x_n\right)+\frac{\sigma_{xz}^{0\pm}\left(x_n\right)}{G_k},\qquad \left(k=1,2;\ n=\overline{1,N}\right)
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

$$
w^{in}(x_n,\pm h)=w_k(x_n,\pm h),\ \sigma_{yz}^{in}(x_n,\pm h)=\sigma_{yzk}(x_n,\pm h),
\tag{7.26}
$$

$$
\begin{cases}
G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in},x_n,t)\left\langle\dfrac{\partial w}{\partial x}\right\rangle_h(x_n,t)-2\sigma_{xz}^{in}(-a)-\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-a}^{x_n}\left[\sigma_{yz}\right]_h(\xi,t)d\xi=0,\\
G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in},x_n,t)\left[w\right]_h(x_n,t)+h\left\langle\sigma_{yz}\right\rangle_h(x_n,t)=0.
\end{cases}
\tag{7.27}
$$

Як наслідок, враховуючи умови балансу виду (6.24), отримуємо СЛАР порядку $6N$ на $6N$ невідомих $f_3\left(x_n\right)$, $f_6\left(x_n\right)$, $\sigma_{yz}^{in}(x_n,\pm h)$, $\dfrac{\partial w^{in}}{\partial x}(x_n,\pm h)$, через які з допомогою формул (7.25), (5.24), (5.25) можна знайти величини компонент НДС матриці $\sigma_{yzk}^{\pm}\left(x_n\right),\dfrac{\partial w^{\pm}}{\partial x}\left(x_n\right),\ (n=\overline{1,N})$.

Для знаходження компонент НДС внутрішньої задачі завдяки специфіці побудови моделі і СМ МФС цілком достатньо виразів (7.26), що істотно спрощує обчислювальну схему задачі.

## 7.4. Числовий аналіз

### *7.4.1. Багатокрокове пружно-пластичне деформування*

Розглянемо випадок багатокрокового пружно-пластичного деформування включення з ідеально пружно-пластичного матеріалу із лінійним зміцненням згідно з (7.7) в умовах ідеального ефекту Баушінгера, де $G_{os}, G_{1s}, \tau_{yield}$ - параметри матеріалу включення (рис. 7.2)

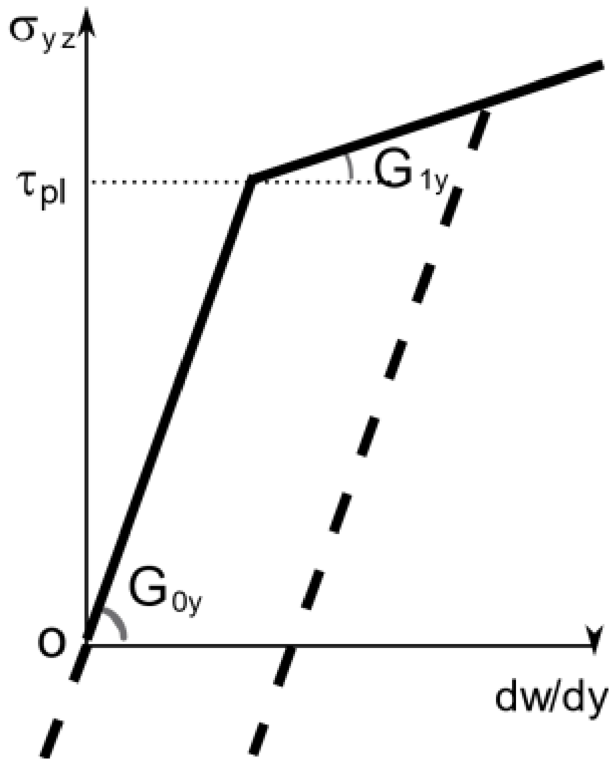



Рис. 7.2. Діаграма деформування ідеального пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням

Числовий аналіз розв'язку задачі зроблено для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ($G_1 = G_2 = G$), покрокової зміни навантажування зосередженими силами $\tilde{Q} = Q/aG_{av}$ $\left(\tilde{Q}_2 = -\tilde{Q}_1 = \tilde{Q},\ \tilde{z}_2 = -\tilde{z}_1 = i\tilde{d}\right)$ у глобальному циклі «навантажування – розвантажування» внаслідок покрокової зміни інтенсивності пари зосереджених сил (випадок №4 за відсутності нормального стиску, Додаток Б) $Q$: $0$; $1,5G_{av}$; $-1,5G_{av}$; $1,5G_{av}$. На рис. 7.3 – 7.4 зіставлено результати застосування для опису механічних властивостей включення конститутивних залежностей пружно-пластичного (штрихова лінія). деформування зі зміцненням (7.7) і суто пружного (суцільна лінія) із значенням $G_{1s} = G_{os}$.

Апробація цього прикладу була необхідна для того, щоб переконатися у придатності запропонованої схеми ітераційного процесу не лише для діаграм у вигляді гладких ліній, але й у разі дослідження включень із нелінійних матеріалів з діаграмами деформування, наділеними кутовими точками.

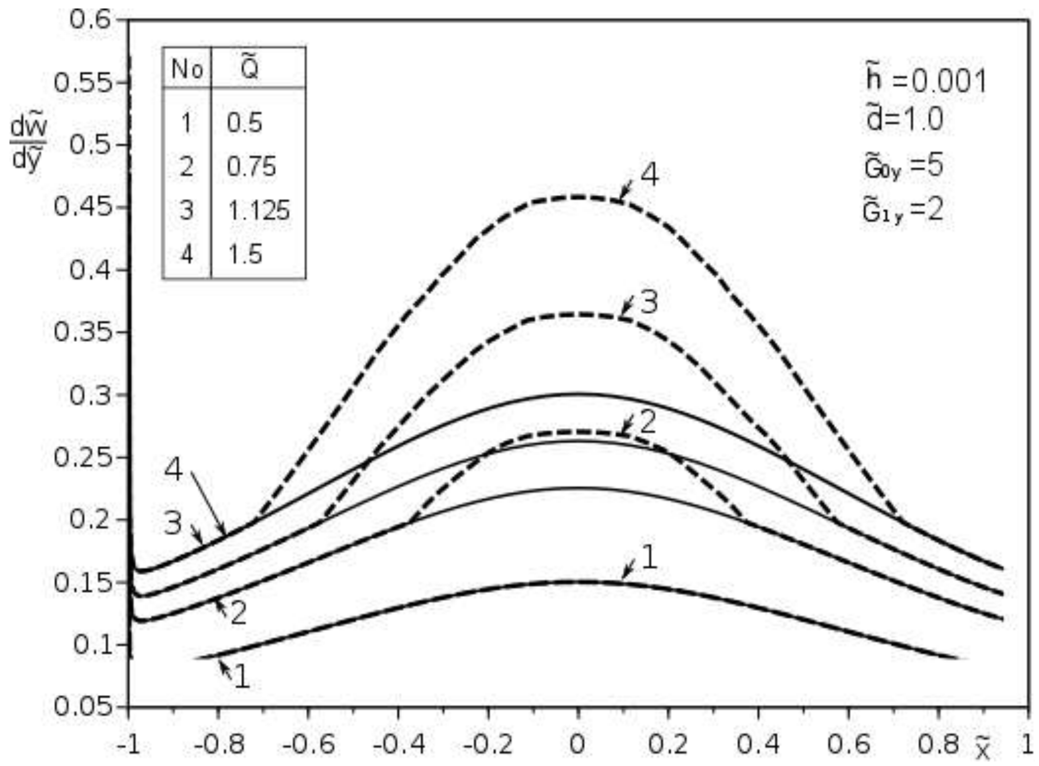



Рис. 7.3. Розподіл пружно-пластичних деформацій включення (штрих) протягом довантажування у порівнянні з ідеально пружним випадком (суцільна лінія)

Добре помітно, що після досягнення певного критичного значення $\tilde{Q}$ починається пластичне деформування, локалізоване вздовж $L'' = [-b; b]$ (рис. 7.3). Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення упродовж вищезгаданого симетричного циклу навантажування помітна на рис. 7.4 у точках $\tilde{x}=0$ (суцільна лінія), $\tilde{x}=0.25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x}=0.5$ (штрих), $\tilde{x}=0.75$ (пунктир).

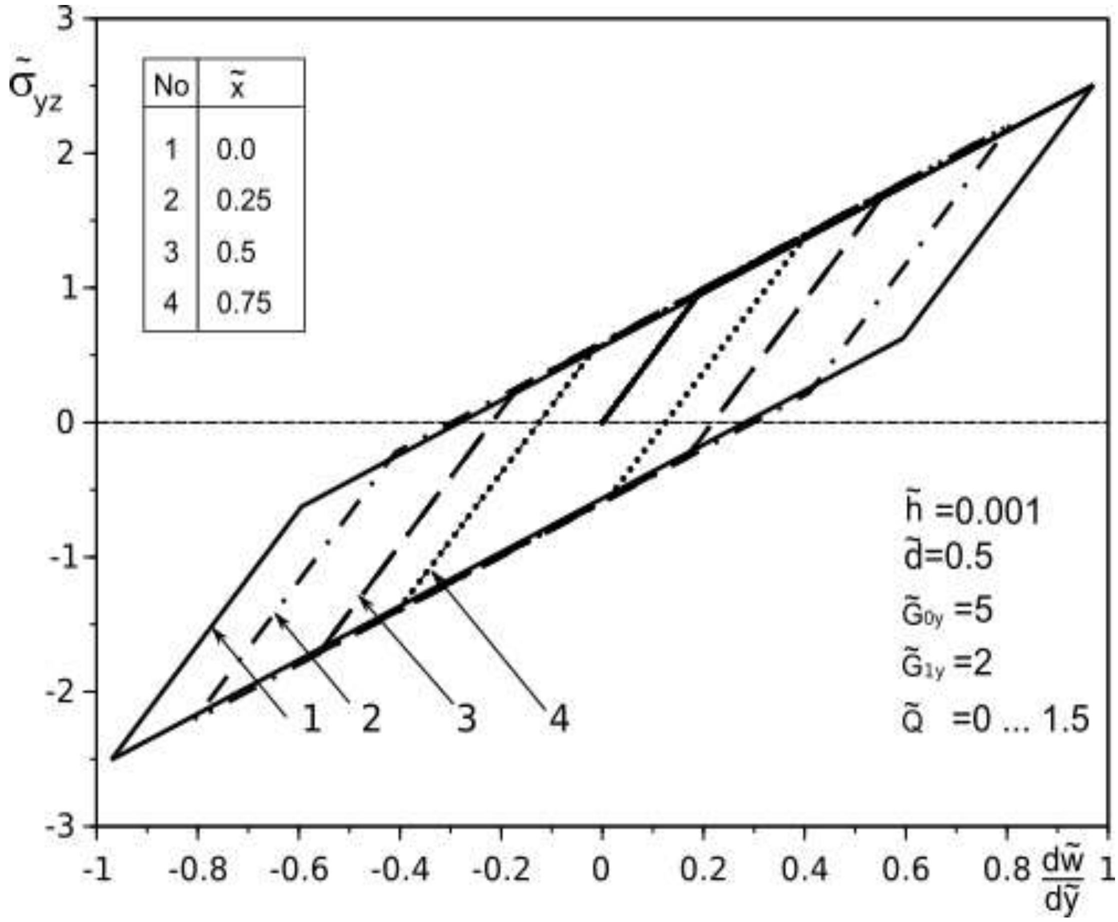



Рис. 7.4. Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення з ідеальним ефектом Баушінґера упродовж симетричного циклу у точках $\tilde{x}=0$ (суцільна лінія), $\tilde{x}=0.25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x}=0.5$ (штрих), $\tilde{x}=0.75$ (пунктир)

Рис. 7.5 ілюструє залежність розміру зони пластичності $\tilde{b}=b/a$ від інтенсивності прикладених сил $\tilde{Q}$ та віддаленості точок їх прикладання $\tilde{d}=d/a$. Добре помітно, що перше критичне значення інтенсивності прикладених сил $\tilde{Q}^*$, при якому з’являється пластична зона, залежить від віддаленості точок їх прикладання і зростає за збільшення $\tilde{d}$. Друге критичне значення інтенсивності прикладених сил $\tilde{Q}^{**}$, при якому все включення переходить у пластичному стані $\left(\tilde{b}=1\right)$ навпаки, тим менше, чим далі розміщені зосереджені сили.

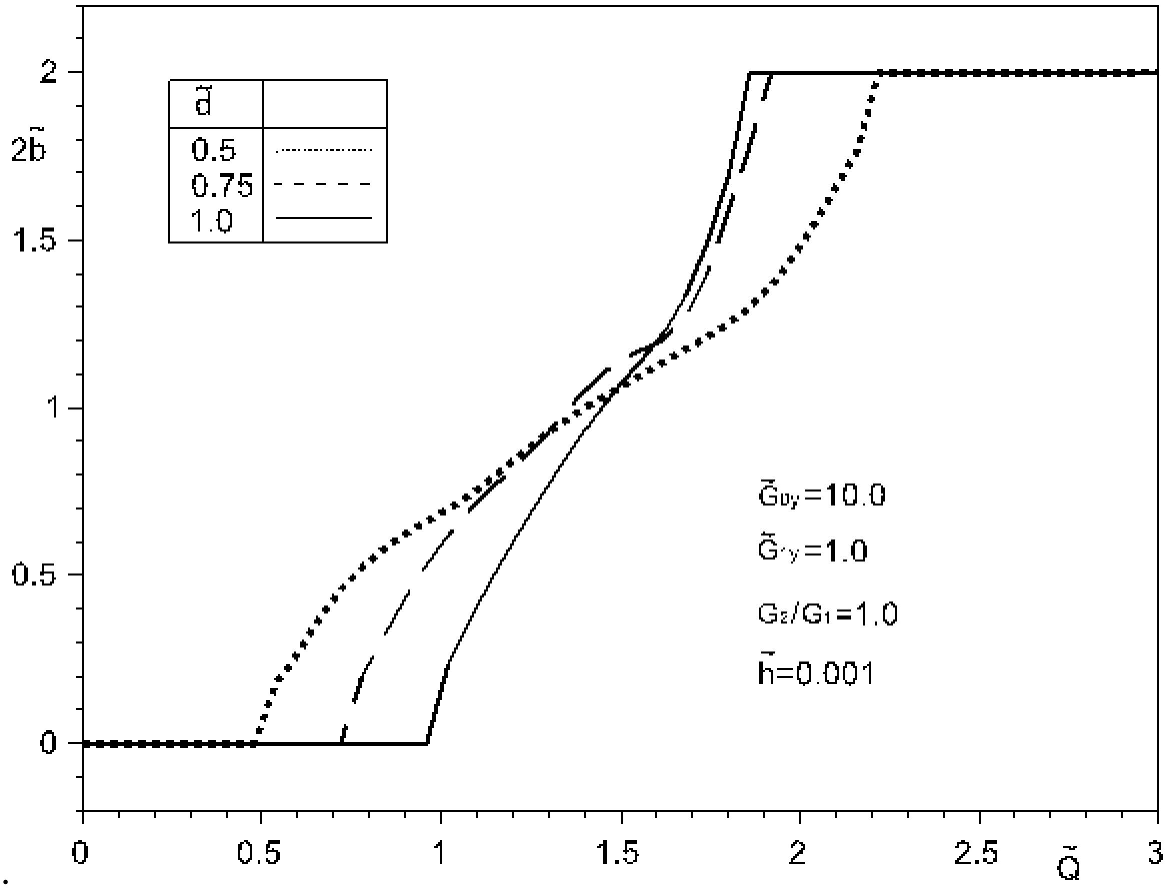



Рис. 7.5. Вплив параметрів навантажування на розмір зони пластичності

Рис. 7.6 демонструє еволюційний гістерезисний характер зміни компонент НДС у включенні за вказаного знакозмінного навантаження. Добре помітно, що, попри гладкий характер зміни напружень $\sigma_{yz}^{in}(x)$ уздовж осі $L'$ включення, деформації $\partial w/\partial x$ мають «ламаний» характер зміни уздовж $L'$ завдяки появі на частині $L''$ включення пластичної зони, еволюція якої залежить від поточного навантаження.

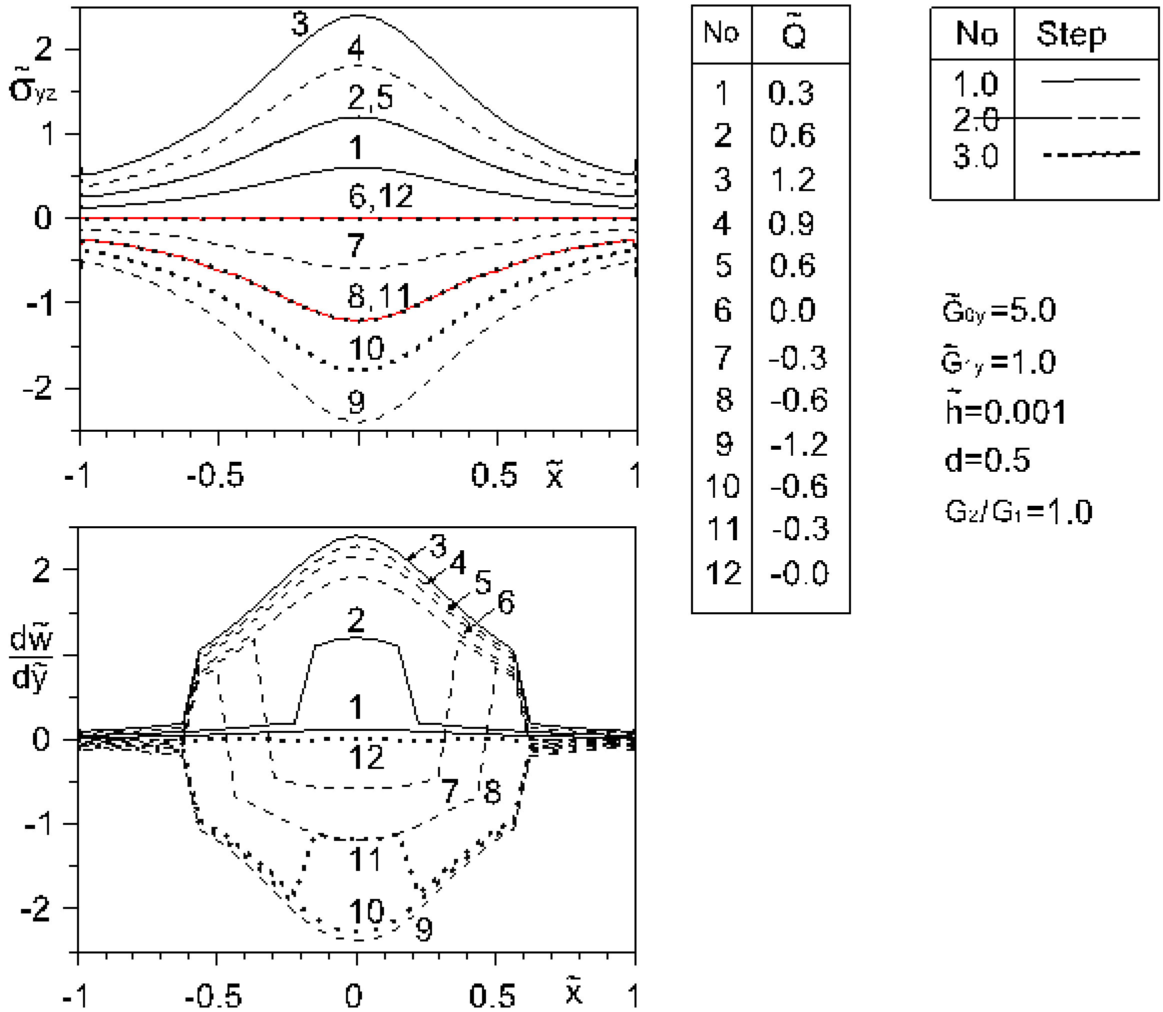



Рис. 7.6. Гістерезисний характер зміни НДС включення за знакозмінного навантажування

### *7.4.2. Багатокрокове деформування включення за моделлю Рамберга - Осгуда*

Розглянемо випадок багатокрокового деформування включення згідно з (7.8), приймаючи закон деформування матеріалу включення у формі Рамберга – Осгуда

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = A_x \sigma_{xz}^{in}\left(1 + B_x\left(\sigma_{xz}^{in}\right)^{M_x}\right),\ \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = A_y \sigma_{yz}^{in}\left(1 + B_y\left(\sigma_{yz}^{in}\right)^{M_y}\right). \qquad (7.28)$$

Співвідношення (7.28) у випадку $M_s = m_s - 1$, $A_s = 1/G_{os}$, $B_s = K_s A_s^{m_s - 1}$ співпадає з відомою моделлю деформування Рамберга - Осгуда [402], де $G_{os}, m_s, K_s, s = \{x; y\}$ – сталі матеріалу включення (рис. 7.7).

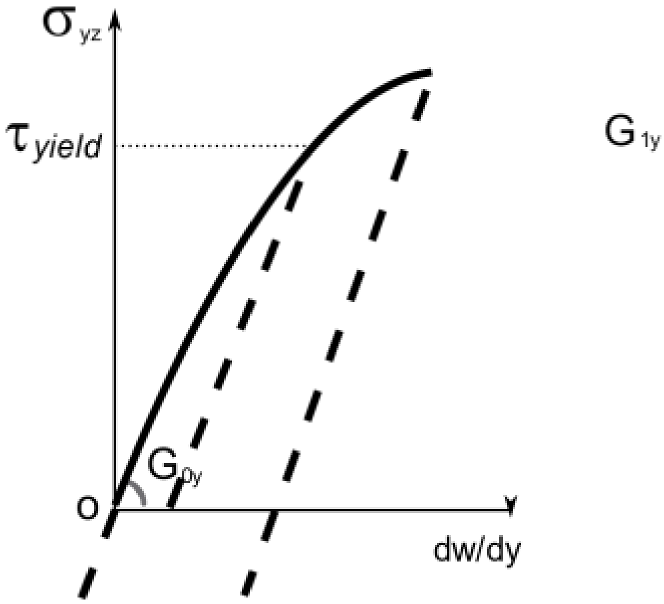



Рис. 7.7. Діаграма деформування матеріалу за законом Рамберга-Осгуда

Розглянемо співвідношення (7.28) у зручнішій для розрахунків знерозміреній формі

$$\tilde{G}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) = \frac{\tilde{G}_{0x}}{1 + K_x\left(\tilde{\sigma}_{xz}^{in}/\tilde{G}_{0x}\right)^{m-1}}, \quad \tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) = \frac{\tilde{G}_{0y}}{1 + K_y\left(\tilde{\sigma}_{yz}^{in}/\tilde{G}_{0y}\right)^{m-1}}, \quad (7.29)$$

де позначено

$$\tilde{G}_{0x} = \frac{G_{0x}}{G}, \quad \tilde{G}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) = \frac{G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})}{G}, \quad \tilde{G}_{0y} = \frac{G_{0y}}{G}, \quad \tilde{G}_y^{in}(\sigma_{xz}^{in}) = \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})}{G}.$$

Оскільки модель деформування багатопараметрична, то розглянемо послідовно окремий вплив кожного з параметрів $G_{os}, m_s, K_s, s = \{x; y\}$ моделі деформування (7.29) на НДС включення за різних схем навантажування та властивостей матриці (*схема 1*: діє лише однорідний зсув на безмежності $\tilde{\tau} = \tau / G$; *схема 2*: діє лише однорідний зсув на безмежності $\tilde{\tau}_2 = \tau_2^{\infty} / G_2 = \tau_1^{\infty} / G_1$; *схема* 3: діють зосереджені сили $Q_2 = -Q_1 = Q$, прикладені у точках $z_2 = -z_1 = id$; *схема* 4: діють зосереджені сили $Q_2 = -Q_1 = Q$, прикладені у точках $z_2 = -z_1 = x_2$; схема 5: діють зосереджені сили $Q_2 = -Q_1 = Q$, прикладені у точках $z_2 = \overline{z}_1 = x_2 + iy$).

На рис. 7.8 – 7.12 відображено вплив навантаження зсувом на безмежності за *схемою 1* навантаження та параметрів нелінійності на зміну значень $\tilde{G}_s^{in}(\sigma_{sz}^{in})$, $\tilde{\sigma}_{sz}^{in}$, $s = \{x; y\}$ та $\partial \tilde{w}^{in} / \partial x$ вздовж $L'$.

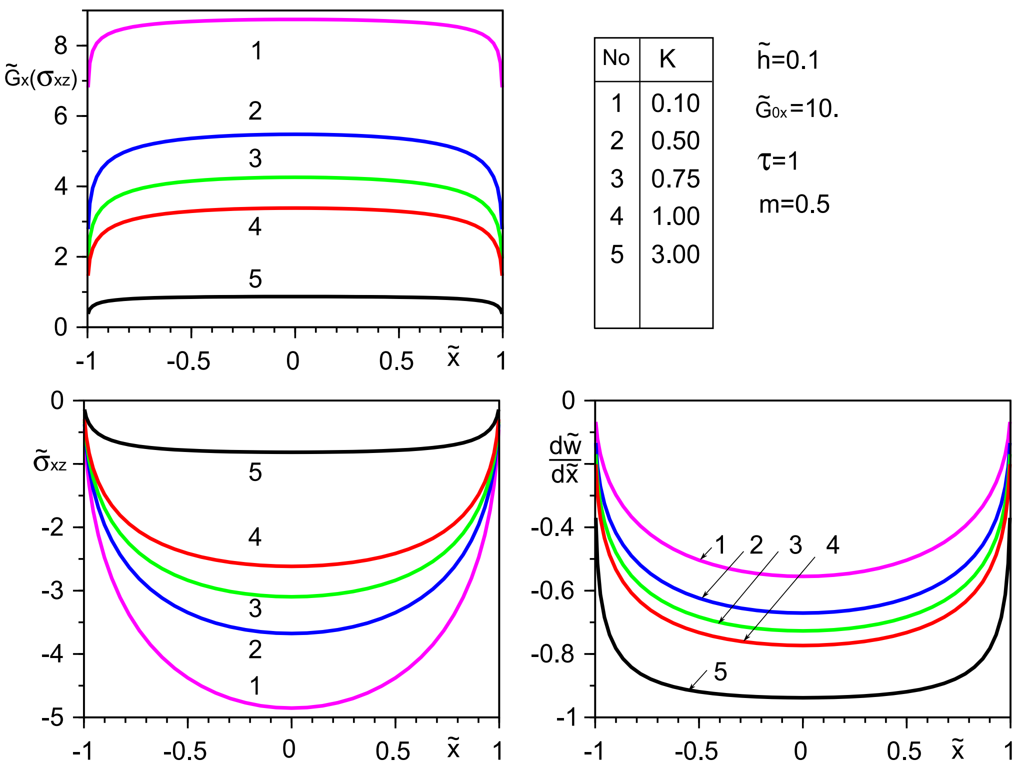



Рис. 7.8. Вплив параметру ***K*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "жорсткого" включення (схема 1)

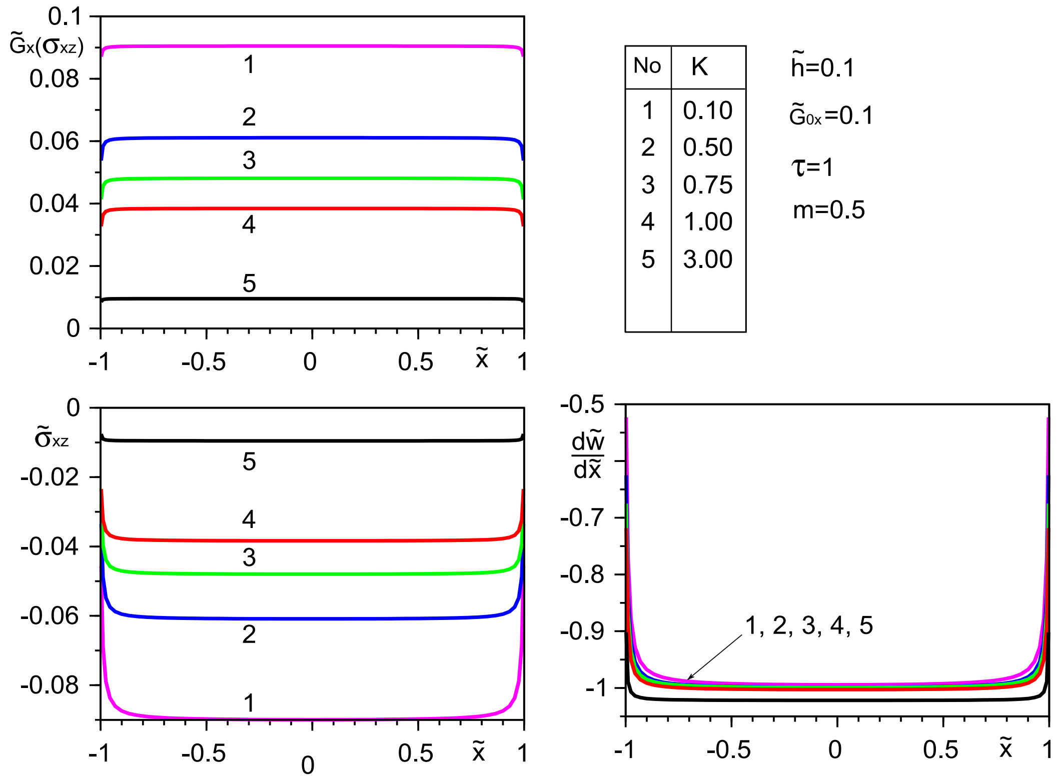



Рис. 7.9. Вплив параметру ***K*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "податного" включення (схема 1)

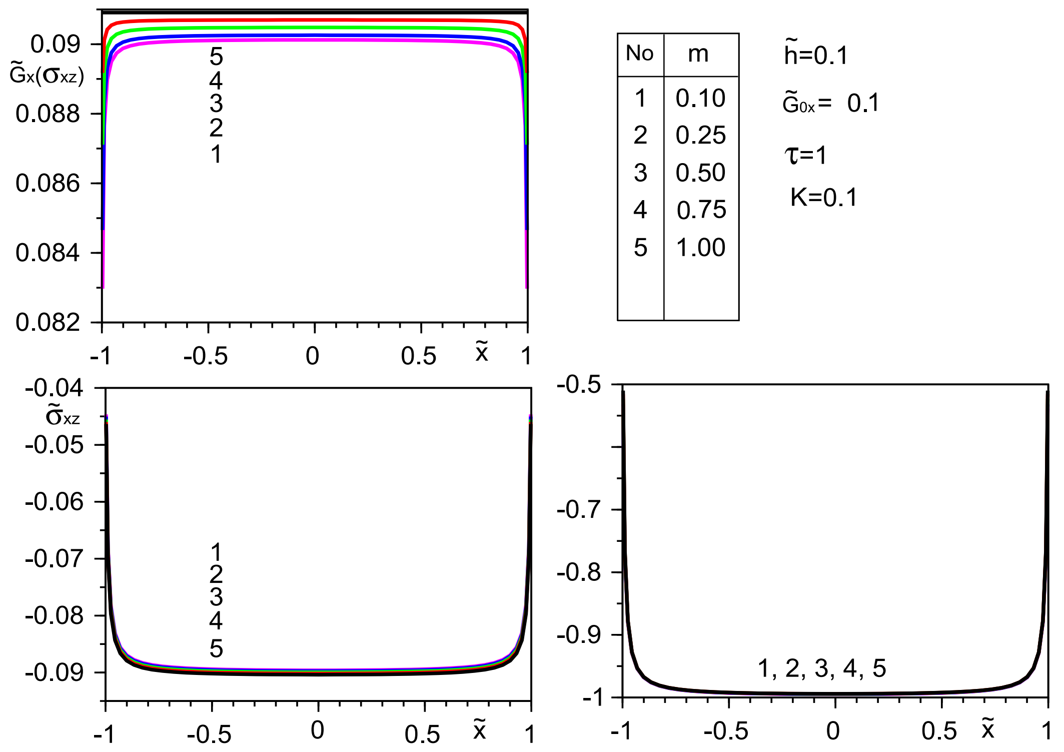



Рис. 7.10. Вплив параметра ***m*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "податного" включення (схема 1)

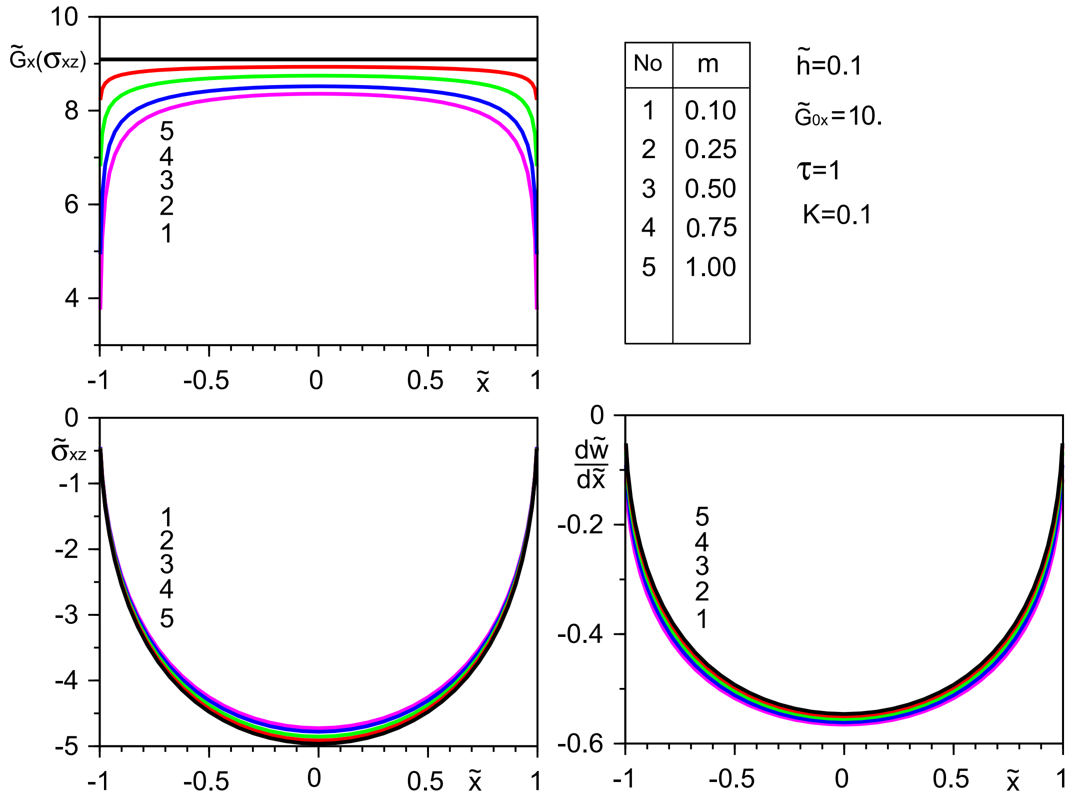



Рис. 7.11. Вплив параметру ***m*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "жорсткого" включення (схема 1)

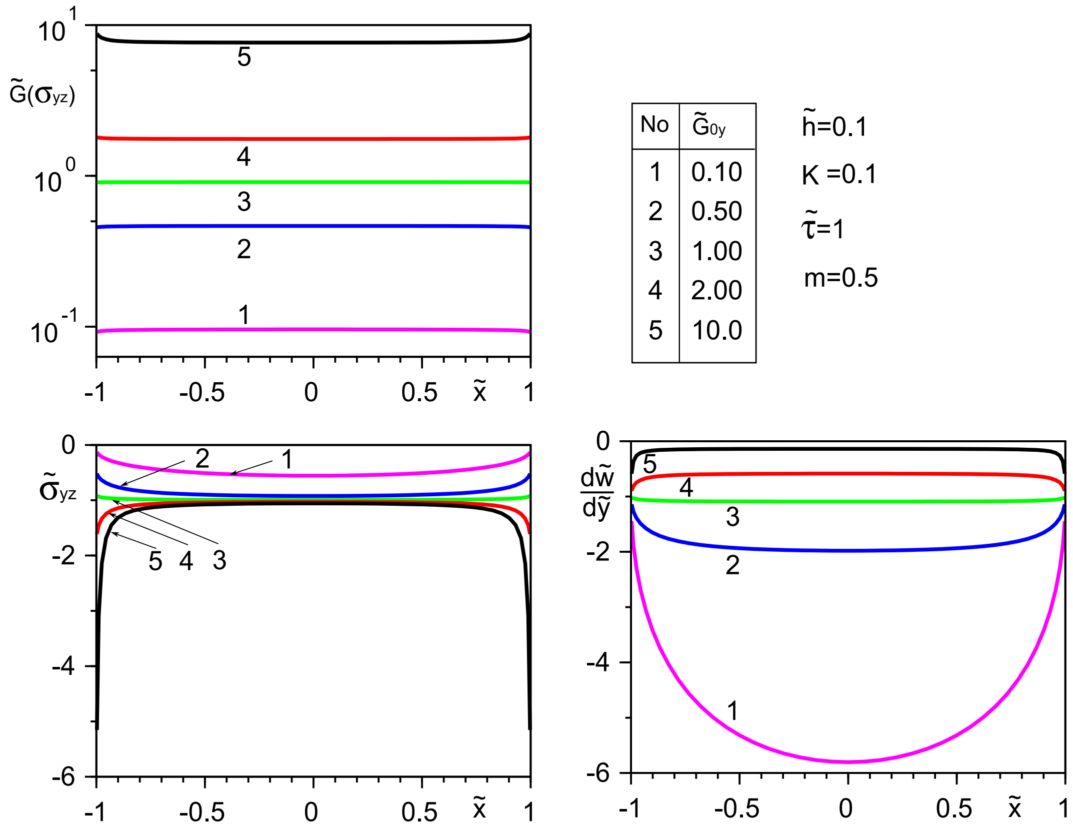



Рис. 7.12. Вплив "початкового" модуля зсуву $\tilde{G}_{0y}$ при навантаженні зсувом на безмежності (схема 1)

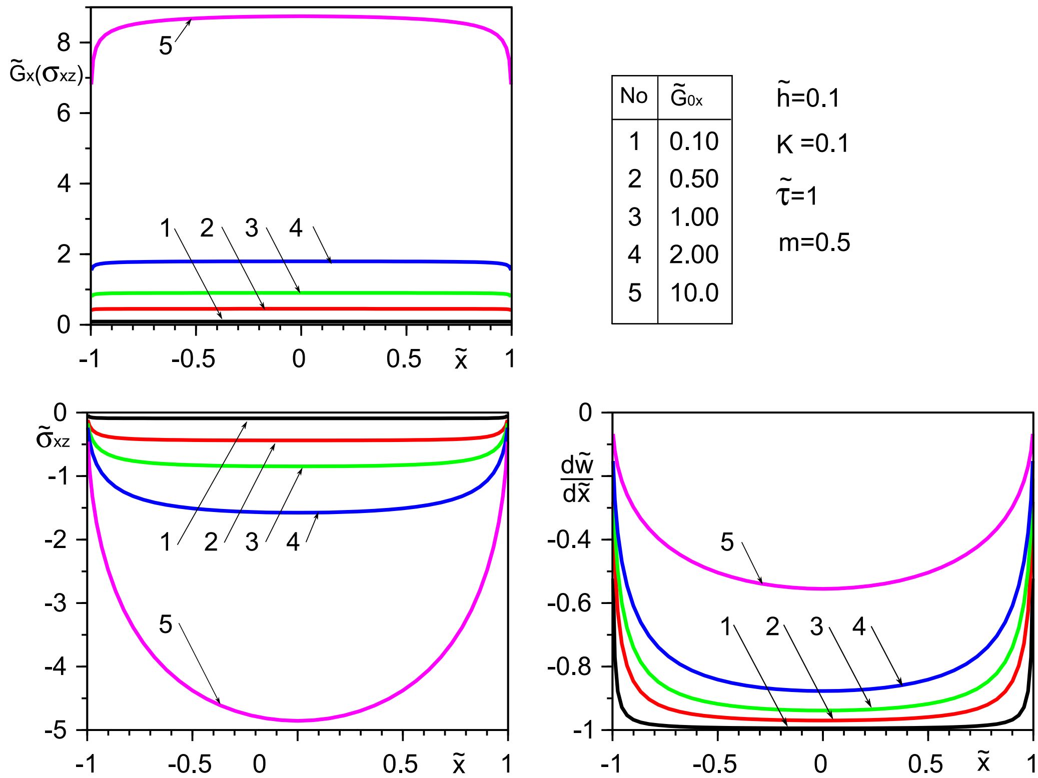



Рис. 7.13. Вплив "початкового" модуля зсуву $\tilde{G}_{0x}$ при навантаженні зсувом на безмежності (схема 1)

Аналіз розрахунків показує, що вплив параметрів ***m*** та ***K*** нелінійності характеристик включення відчутніший для "податного" включення. При цьому ***m*** практично не впливає на розподіл НДС у включенні на відміну від параметра ***K***, вплив якого є порівняльним з $\tilde{G}_{0s}$.

На рис. 7.14 – 7.16 відображено вплив параметрів ***m*** та ***K*** нелінійності характеристик матеріалу включення на універсальну характеристику НДС матриці («зовнішня» задача) в околі торців включення — УКІН $K_{31}$ та $K_{32}$, записаних у знерозміреному вигляді $\tilde{K}_{31}=\dfrac{K_{31}^{+}}{2\tilde{C}G_{gav}\sqrt{\pi a}}$,

$$\tilde{K}_{32}=\frac{K_{32}^{+}}{2p_2G_{gav}\sqrt{\pi a}}.$$

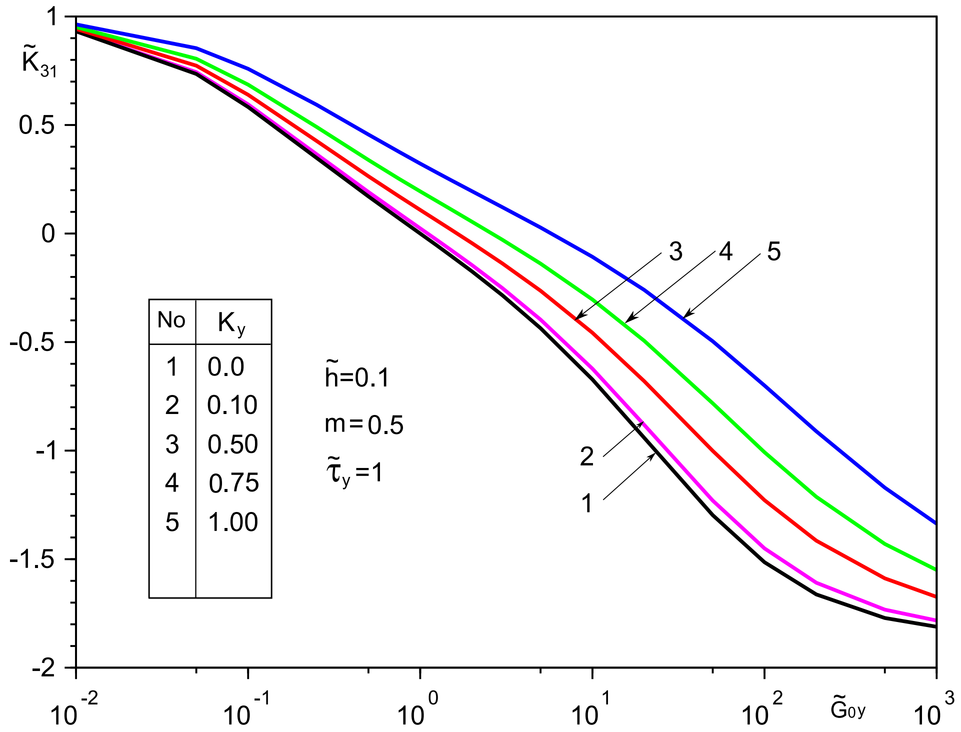



Рис. 7.14. Вплив на УКІН на $K_{31}$ параметру ***K*** у розподілі Рамберга - Осгуда (схема 1)

Помітно, що параметр ***K*** нелінійності у розподілі Рамберга – Осгуда чинить істотніший вплив на УКІН порівняно з параметром ***m***. При цьому зростання ***K*** призводить до зростання УКІН $K_{31}$ (до 50% для "жорсткого" включення) і до спадання УКІН $K_{32}$ (рис. 7.14 – 7.15). Вплив параметра нелінійності ***m*** істотний для жорсткого включення (рис. 7.16) і зменшує значення УКІН $K_{31}$. Для податного включення його вплив практично непомітний.

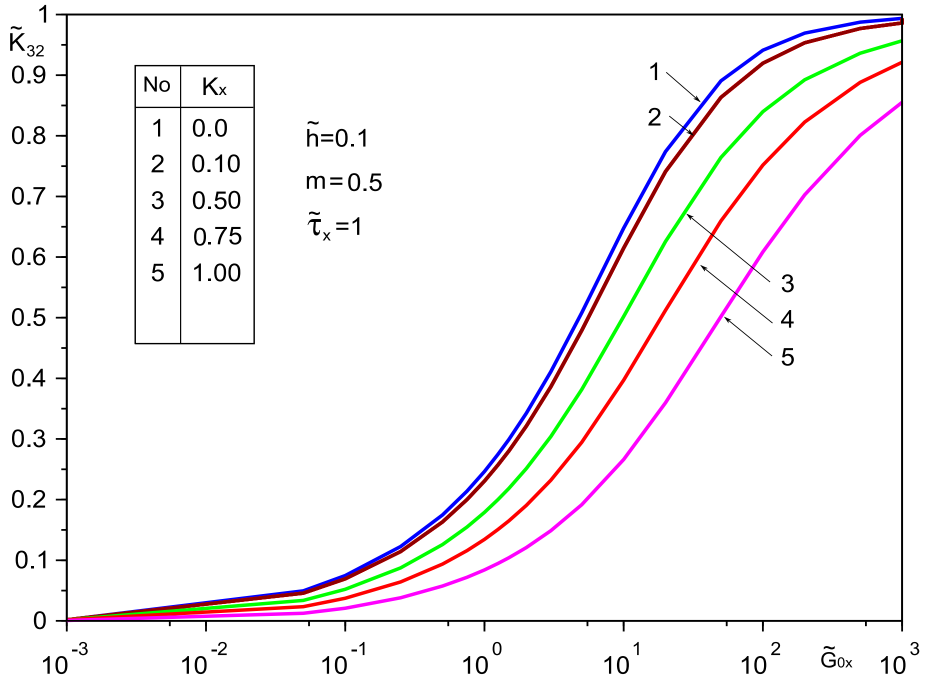



Рис. 7.15. Вплив параметру ***K*** у розподілі Рамберга - Осгуда на УКІН $K_{32}$ (схема 1)

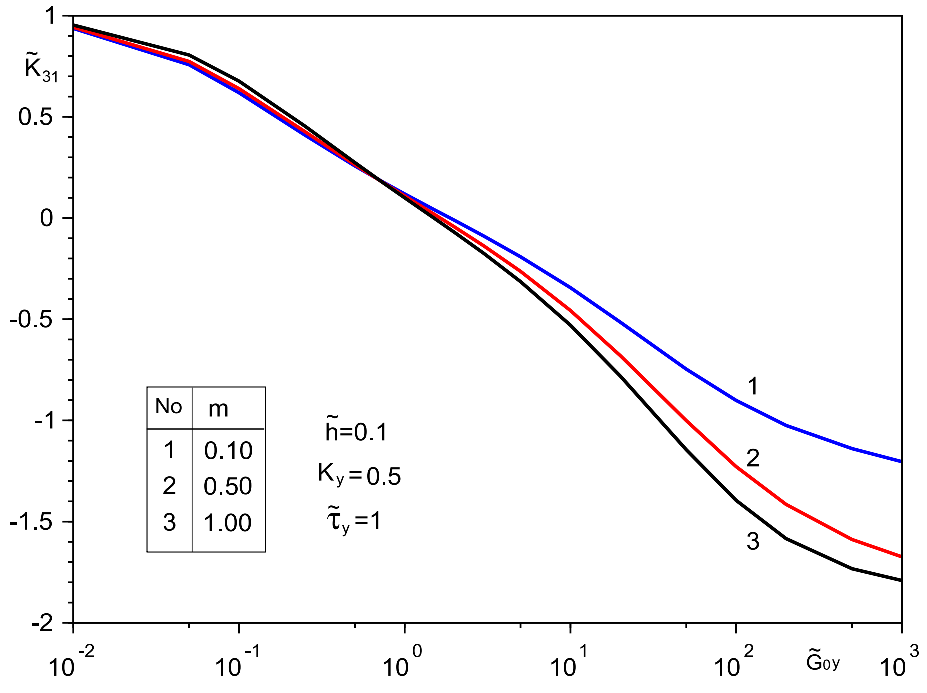



Рис. 7.16. Вплив параметру ***m*** у розподілі Рамберга - Осгуда на УКІН $K_{31}$ (схема 1)

Якщо додатково розглянути різномодульність півпросторів матриці, то можна зробити висновок, що за такого навантаження максимальними УКІН будуть для випадку однорідної матриці $G_2 = G_1 = G$ (рис. 7.17)

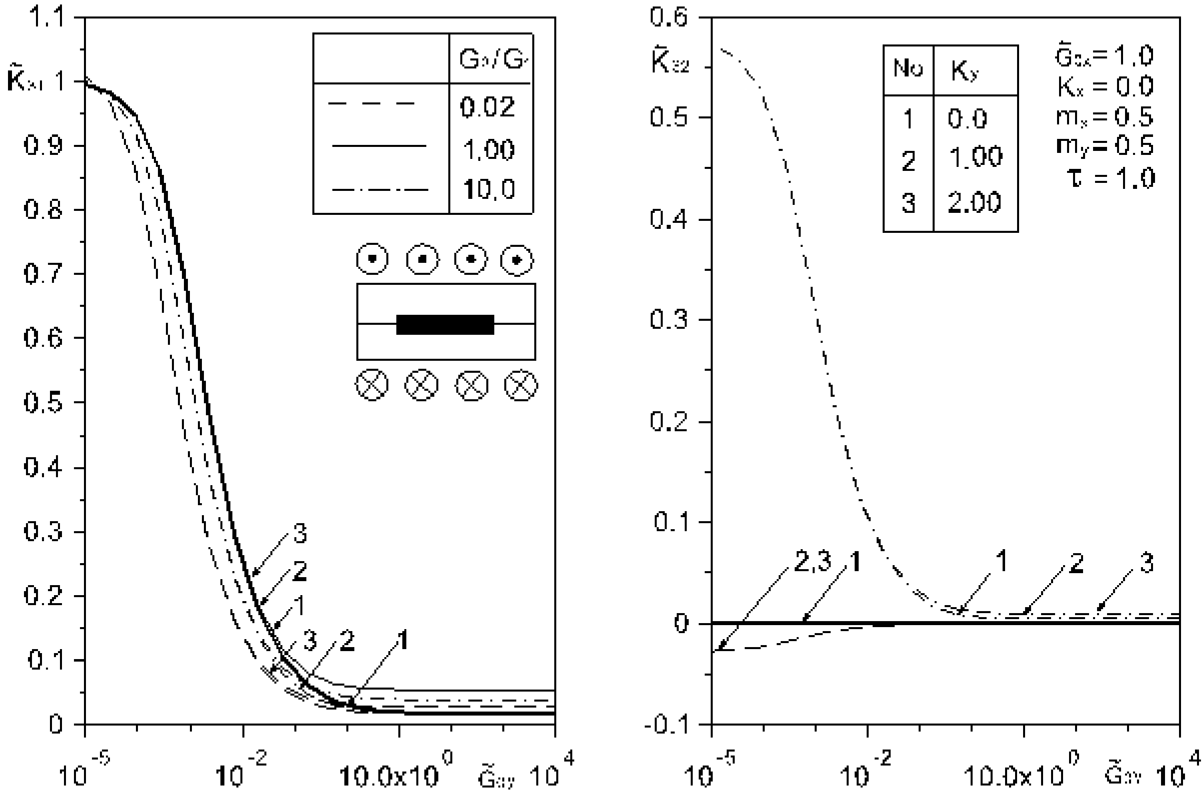



Рис. 7.17. Вплив параметру ***K*** та різномодульності компонент матриці у розподілі Рамберга – Осгуда на УКІН $K_{31}$ (схема 1)

Як і слід було очікувати, ненульові значення $\tilde{K}_{32}$ за такого навантаження (схема 1) з'явились лише тоді (рис. 7.17), коли $G_2 \neq G_1$. Зростання параметра ***K*** призводить до незначного збільшення УКІН $K_{31}$, на відміну від впливу різномодульності матриці.

Схема навантаження 2 практично не викликає ненульового $\tilde{K}_{31}$. Вплив $K_s, m_s, s = \{x; y\}$ за цієї схеми на $\tilde{K}_{32}$ непомітний (рис. 7.16).

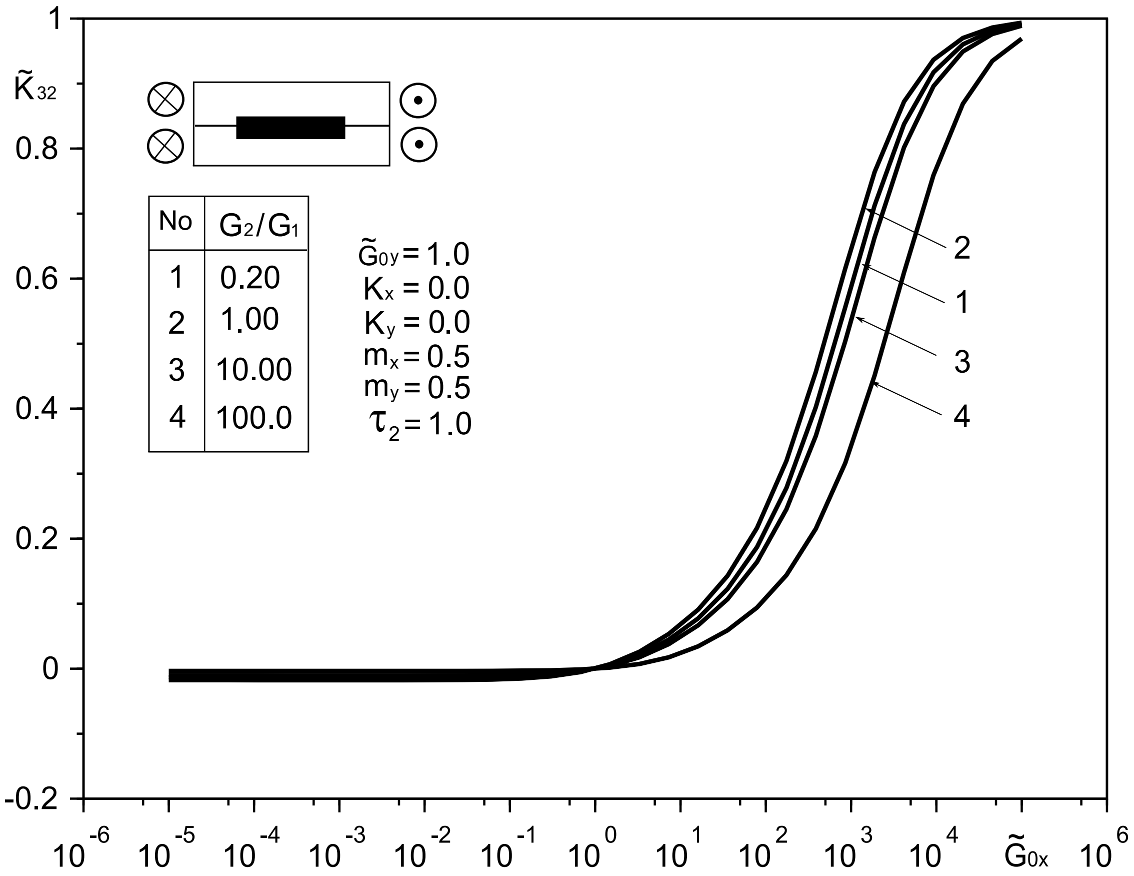



Рис. 7.18. Вплив параметру ***К*** та різномодульності компонент матриці у розподілі Рамберга – Осгуда на УКІН $K_{32}$ (схема 2)

На рисунках 7.19 – 7.23 відображено вплив навантаження структури зосередженими силами інтенсивністю $\tilde{Q} = Q/aG$ (схема 3) та параметрів нелінійної пружності на зміну значень $\tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})$ та компонент НДС вздовж $L'$. Досліджено, що зміна як ***m*** так і ***K<sub>y</sub>*** робить більший внесок на характеристики НДС у "жорсткішому" включенні (рис. 7.17 - 7.22), хоча й не такою мірою як $\tilde{G}_{0y}$ (рис. 7.23). Скажімо, зростання ***m*** та ***K<sub>y</sub>*** незначно зменшує $\tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})$, $\tilde{\sigma}_{yz}^{in}$ та збільшує $\partial\tilde{w}^{in}/\partial y$ для "податного" включення на відміну від оберненого значно вагомішого ефекту для "жорсткого" включення.

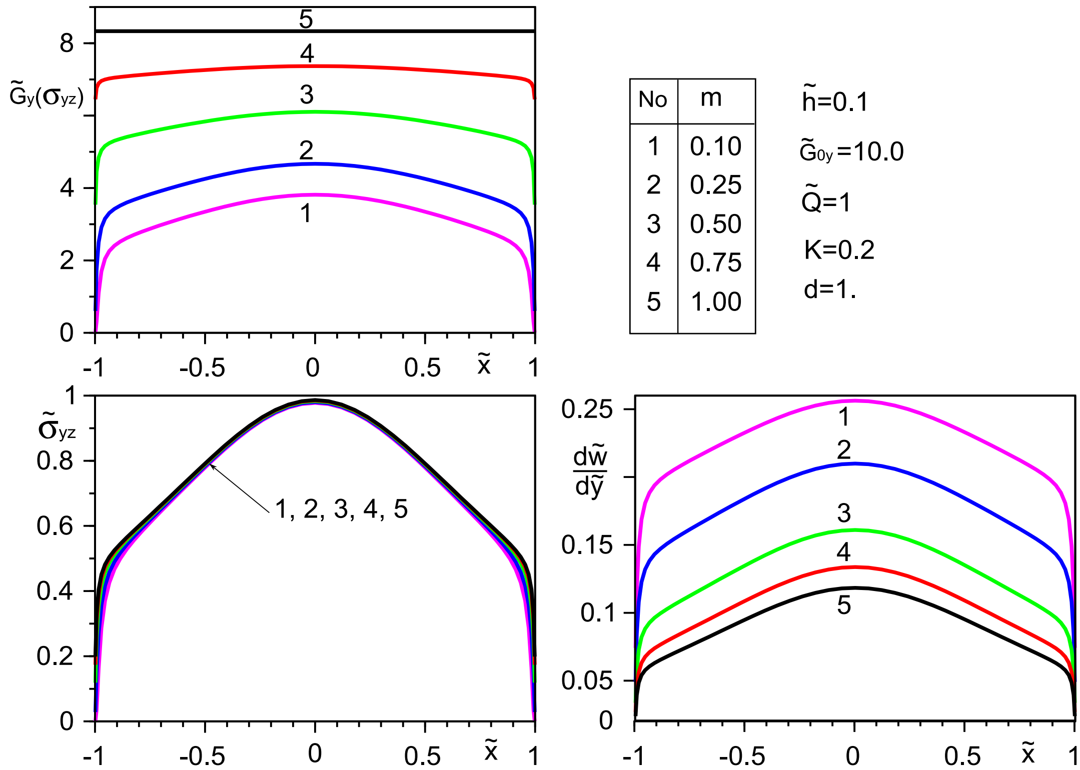



Рис. 7.19. Вплив параметру ***m*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "жорсткого" включення (схема 3)

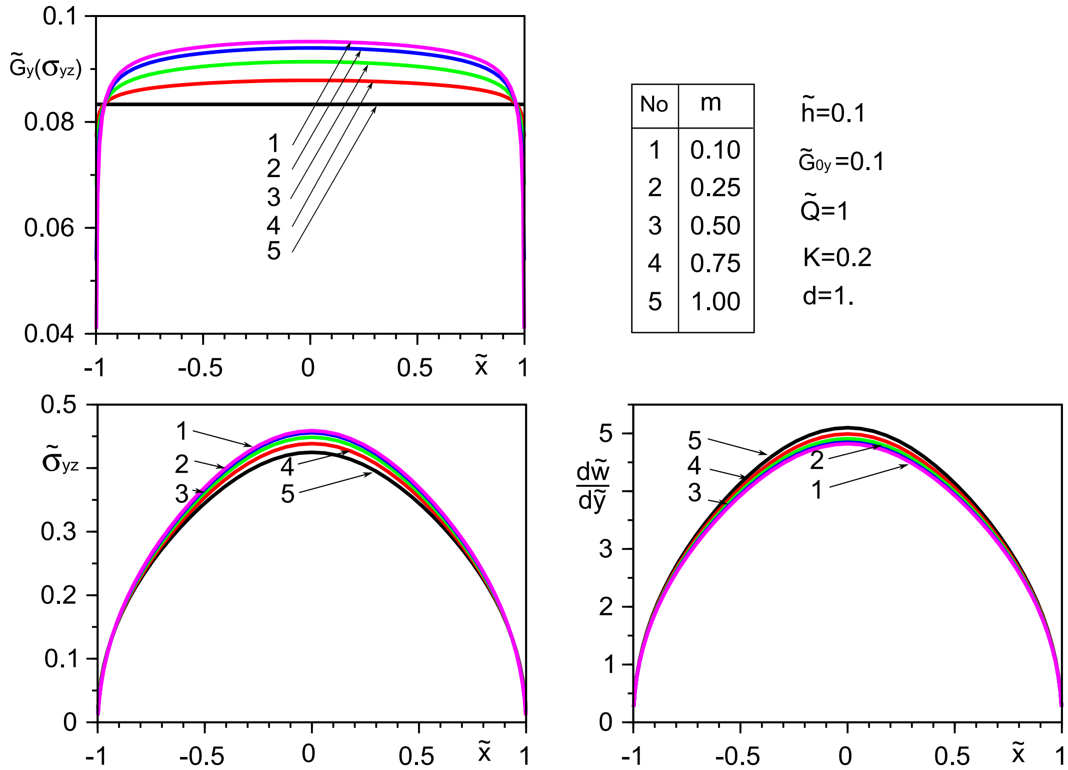



Рис. 7.20. Вплив параметру ***m*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "податного" включення (схема 3)

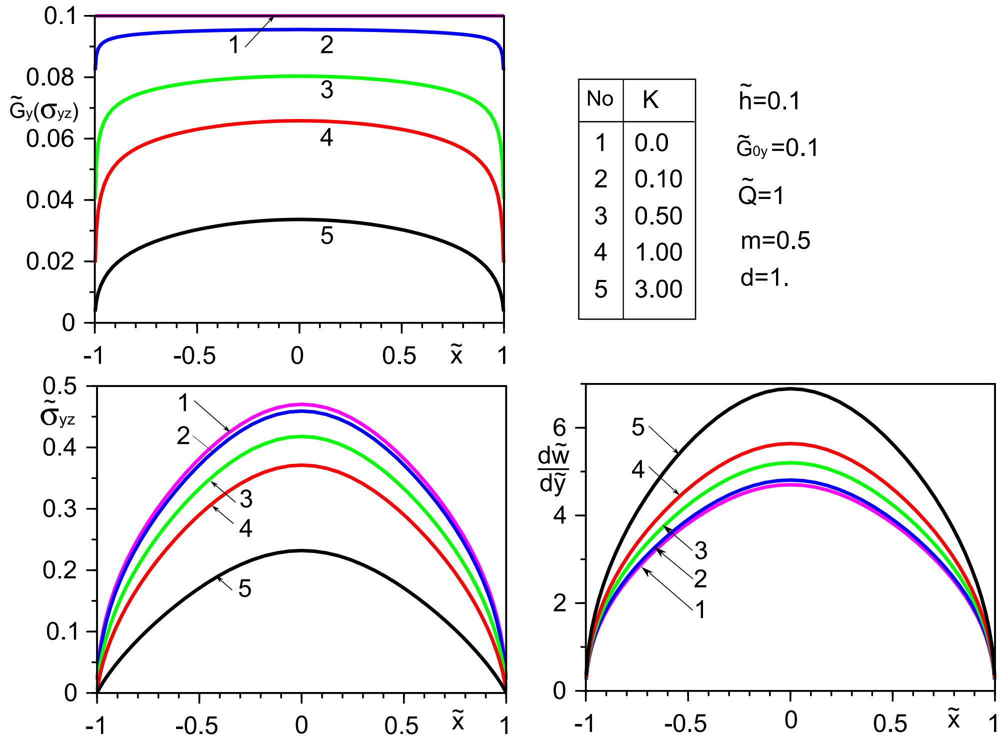



Рис. 7.21. Вплив параметру ***K*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "податного" включення (схема 3)

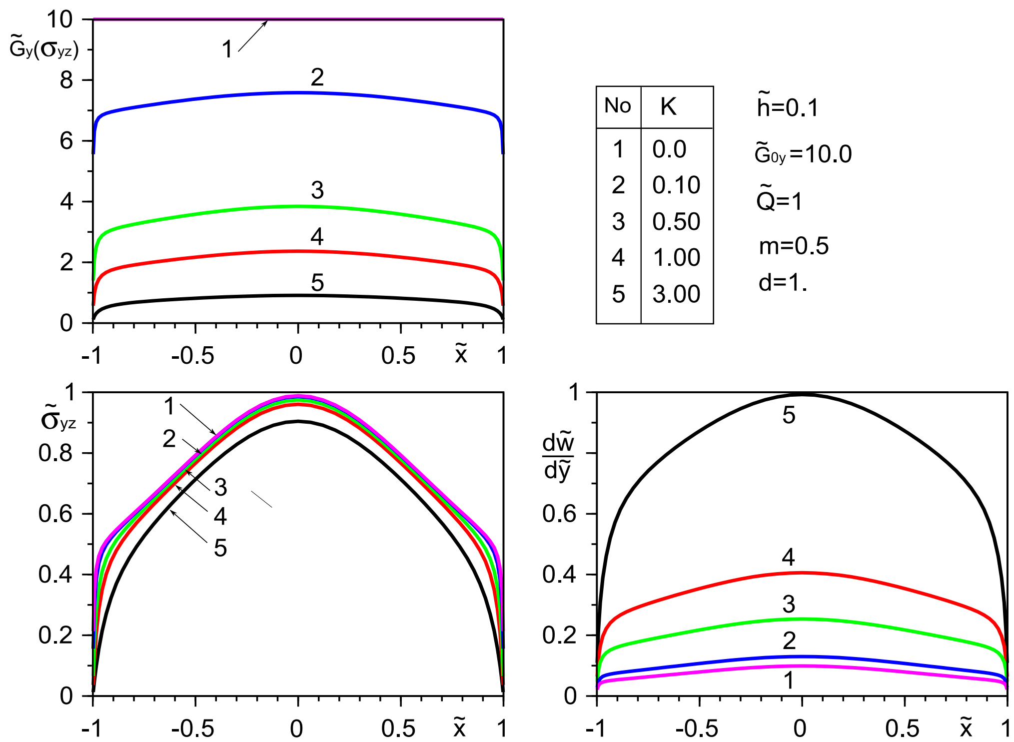



Рис. 7.22. Вплив параметру ***K*** у розподілі Рамберга – Осгуда для "жорсткого" включення (схема 3)

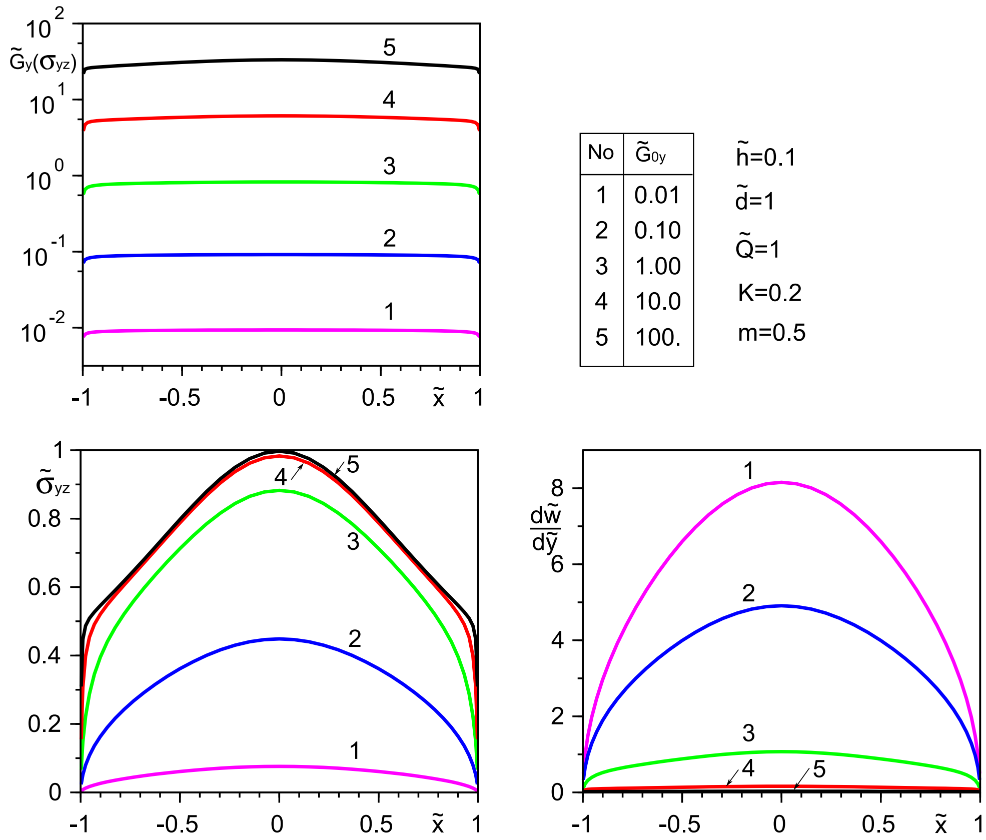



Рис. 7.23. Вплив "початкового" модуля зсуву $\tilde{G}_{0y}$ при навантаженні зосередженими силами (схема 3)

На рис. 7.24 – 7.25 проілюстровано вплив "близькості" до включення точок прикладання зосереджених сил на НДС включення. Цей ефект зберігається приблизно до значення $\tilde{d} = 5$. Вплив більш віддалених від включення сил вже можна вважати якісно еквівалентним впливу від навантаження зсувом на безмежності.

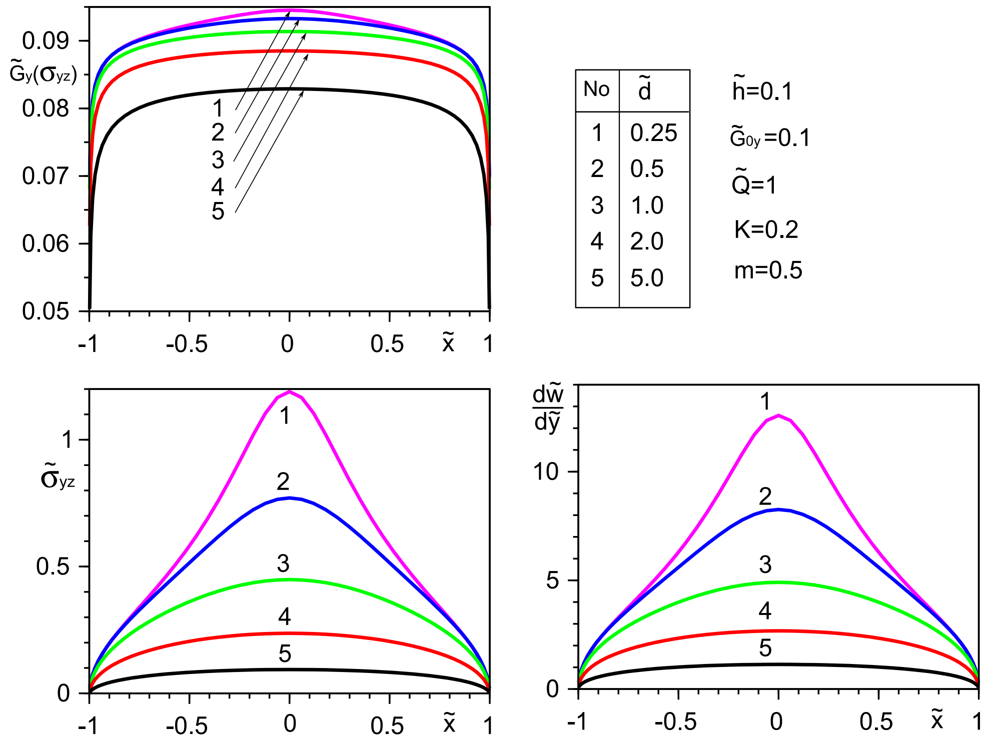



Рис. 7.24. Вплив міри віддаленості сили для "податного" включення

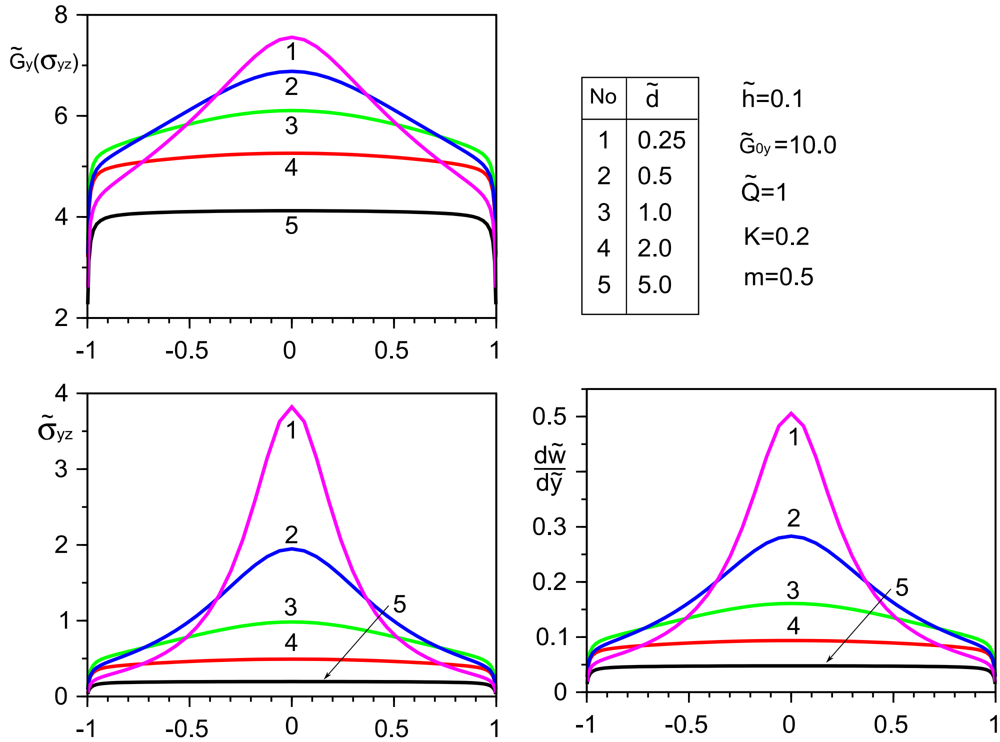



Рис. 7.25. Вплив міри віддаленості сили для "жорсткого" включення

Рис. 7.8 – 7.25 демонструють, що за навантаження зсувом (схеми 1,2) вплив параметрів нелінійності деформування, зокрема $\tilde{G}_{0y}$, який відповідає за "податність" чи "жорсткість" включення, значно менш помітний, ніж за навантаження зосередженими силами $\tilde{Q} = Q/aG$ (схема 3).

Розподіл нелінійних деформацій згідно з (7.29) вздовж $L'$ (штрих-пунктир) у порівнянні з лінійно пружною моделлю деформування (суцільна лінія) зображено на рис.7.26. Гістерезисний характер зміни НДС матеріалу включення упродовж вищезгаданого симетричного циклу навантажування у точках $\tilde{x} = 0$ (суцільна лінія), $\tilde{x} = 0.25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x} = 0.5$ (штрих) помітно на рис. 7.27.

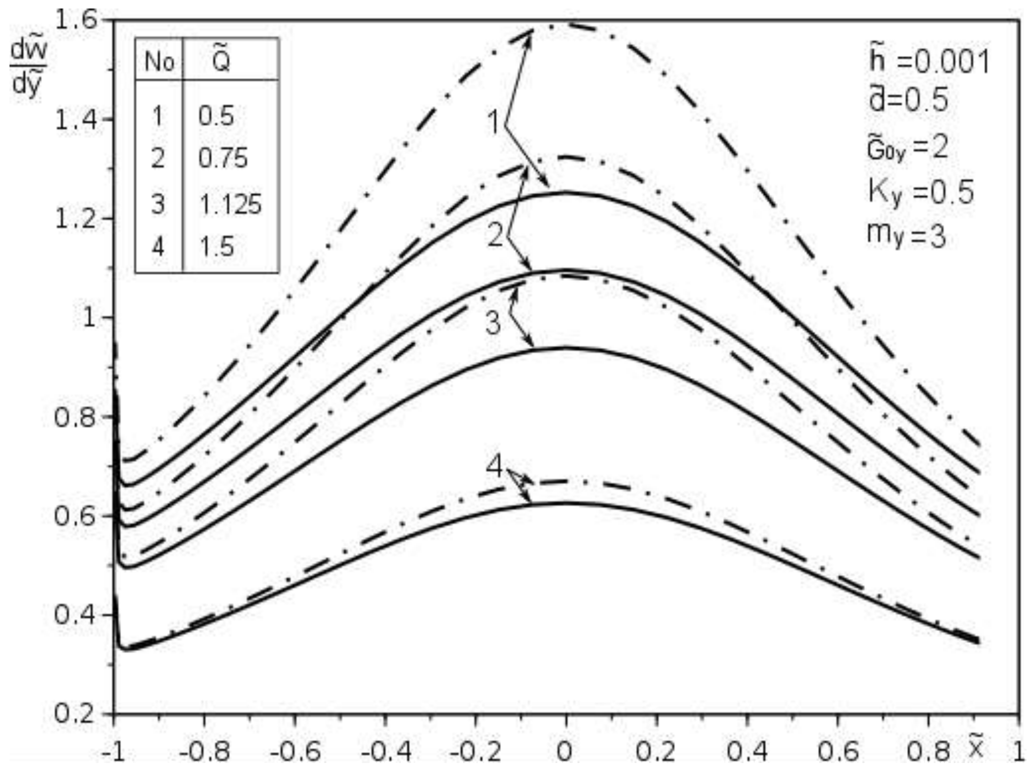



Рис. 7.26. Розподіл пружно-пластичних деформацій у включенні (штрих-пунктирна лінія) упродовж довантажування у порівнянні з ідеально пружним випадком (суцільна лінія)

Числові розрахунки дали змогу проаналізувати вплив параметрів нелінійності згідно закону деформування Рамберга – Осгуда на НДС тіла при навантажуванні збалансованою системою зосереджених сил та зсувом на безмежності за схемою 3. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлені такі важливі закономірності: 1) зростання ***m*** та ***K<sub>y</sub>*** незначно зменшує $\tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})$, $\tilde{\sigma}_{yz}^{in}$ та збільшує $\partial\tilde{w}^{in}/\partial y$ для "податного" включення на відміну від оберненого значно відчутнішого ефекту для "жорсткого" включення; 2) вплив параметрів з ***m*** та ***Kₓ*** на зміну значень $\tilde{G}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{in}$ та $\partial\tilde{w}^{in}/\partial x$ відчутніший для "податного" включення. При цьому параметр ***m*** практично не впливає на розподіл НДС у включенні на відміну від параметра $\boldsymbol{K_x}$, вплив якого є порівняльним з $\tilde{G}_{0x}$; 3) при багатокроковому процесі довантажування розподіли $\tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})$, $\tilde{G}_{0y}$ нечутливі до багатокроковості і величини кроку сценарію навантажування на відміну від деформацій $\partial\tilde{w}^{in}/\partial y$, які істотно зростають порівняно з однокроковим сумарно ідентичним навантаженням.

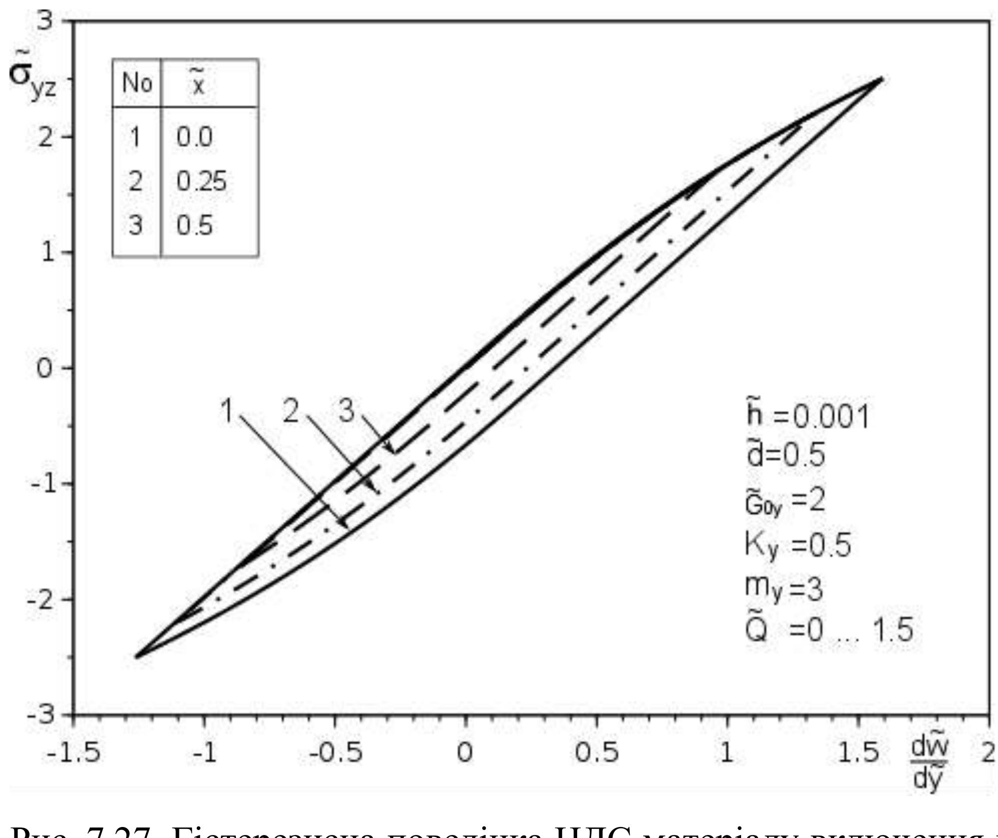



Рис. 7.27. Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення протягом симетричного циклу у точках $\tilde{x}=0$ (суцільна лінія), $\tilde{x}=0.25$ (штрих-пунктир), $\tilde{x}=0.5$ (штрих)

На рис.7.28, 7.29, як приклад, проілюстровано вплив сценарію покрокового навантажування на результуючий НДС. Розрахунки проводилися згідно із пропонованим вище алгоритмом. Лінії 1-4 відповідають послідовному довантажуванню силами інтенсивністю по +0.5 – чотири кроки, з урахуванням попередніх станів НДС як залишкових. Тобто, лінія 4 – сумарний вплив сил $\tilde{Q}=2$; штрих-пунктир 5 – це однокрокове прикладання еквівалентної сумарній сили. Якщо розподіли $\tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})$, $\tilde{G}_{0y}$ нечутливі до багатокроковості і величини кроку сценарію навантажування (рис. 7.28 а, рис. 7.28 б) то $\partial\tilde{w}^{in}/\partial y$ вздовж $L'$ суттєво на це реагує (неспівпадіння ліній 4 та 5 на рис. 7.28 в). При цьому на кожному кроці для забезпечення відносної точності 0.1% при 41 точці колокації було достатньо 2 ітерації для більш податного від матриці включення та 3 – для більш жорсткого.

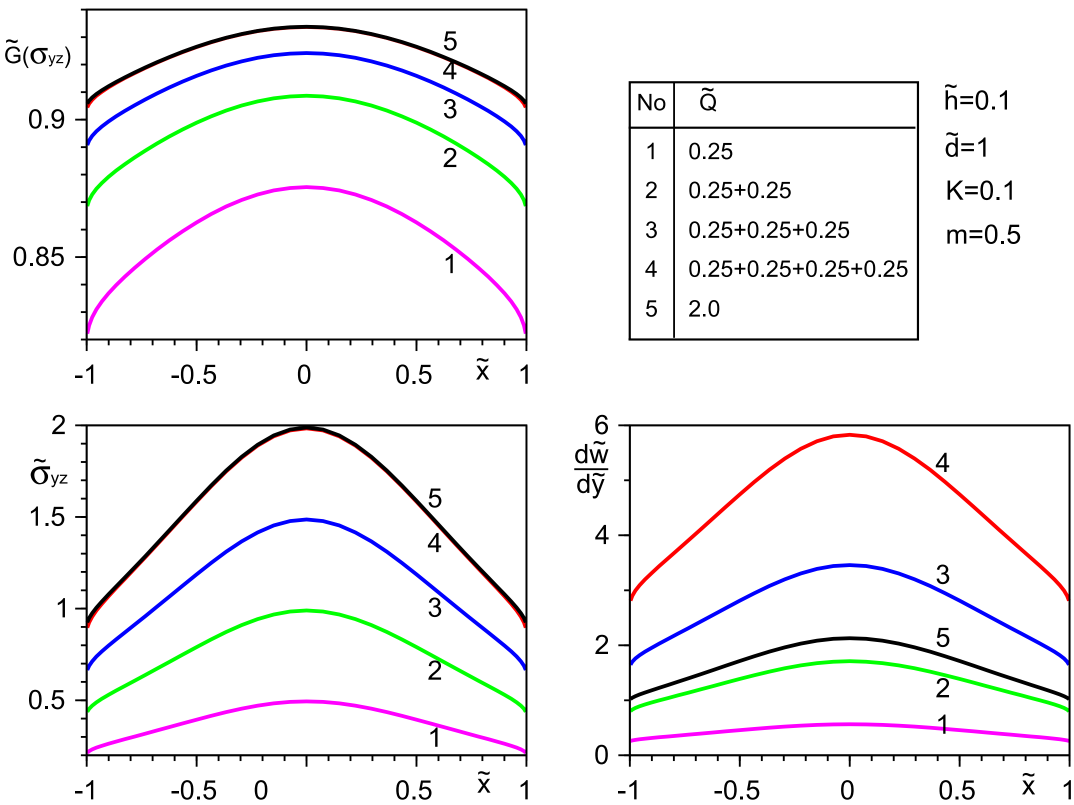



Рис. 7.28. Вплив покроковості процесу навантажування на НДС включення

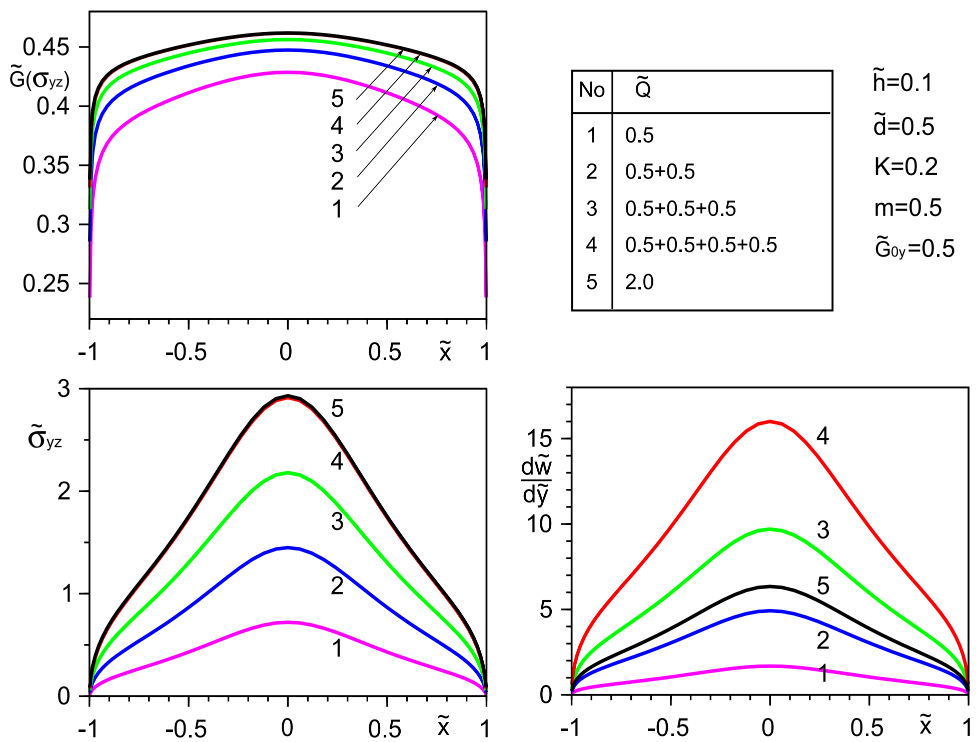



Рис. 7.29. Вплив покроковості процесу навантажування на НДС включення

На рис. 7.30 відображено сукупний вплив параметру нелінійності ***K*** та відносної товщини включення $\tilde{h}$ на зміну $K_{31}$ у разі навантажування зосередженими силами (схема 3). Як і у випадку навантажування зсувом на безмежності зростання ***K*** призводить до зростання УКІН $K_{31}$, причому значно помітніше для "жорсткого" включення. Істотніший вплив на $K_{31}$ має зміна відносної товщини включення $\tilde{h}$: збігаючись з відомими розв’язками у граничних випадках тріщини та АЖВ значення $K_{31}$ зростають у проміжкових випадках жорсткості включення при зростанні $\tilde{h}$.

Розрахунки проводились на авторському програмному забезпеченні у системі матричної математики SciLab (ліцензія OpenSource).

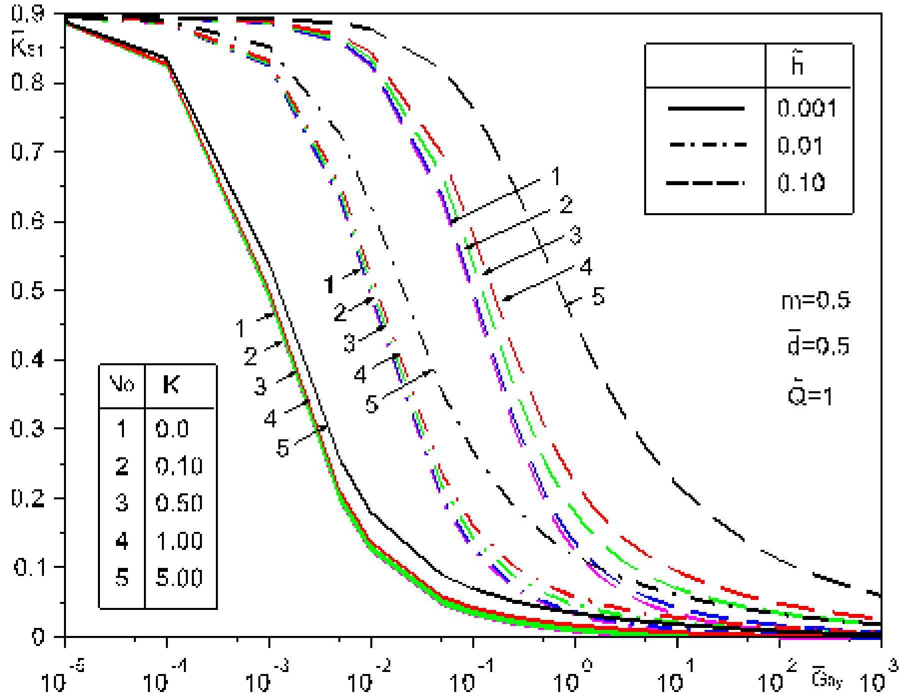



Рис. 7.30. Вплив параметрів ***K*** та $\tilde{h}$ на УКІН $K_{31}$ у випадку навантажування зосередженими силами (схема 3)

Сукупний плив параметру ***K*** та різномодульності компонент матриці у розподілі Рамберга – Осгуда на УКІН $K_{32}$ при навантажуванні за схемами 3 та 4 відображено на рис. 7.31 та 7.32, 7.33 відповідно.

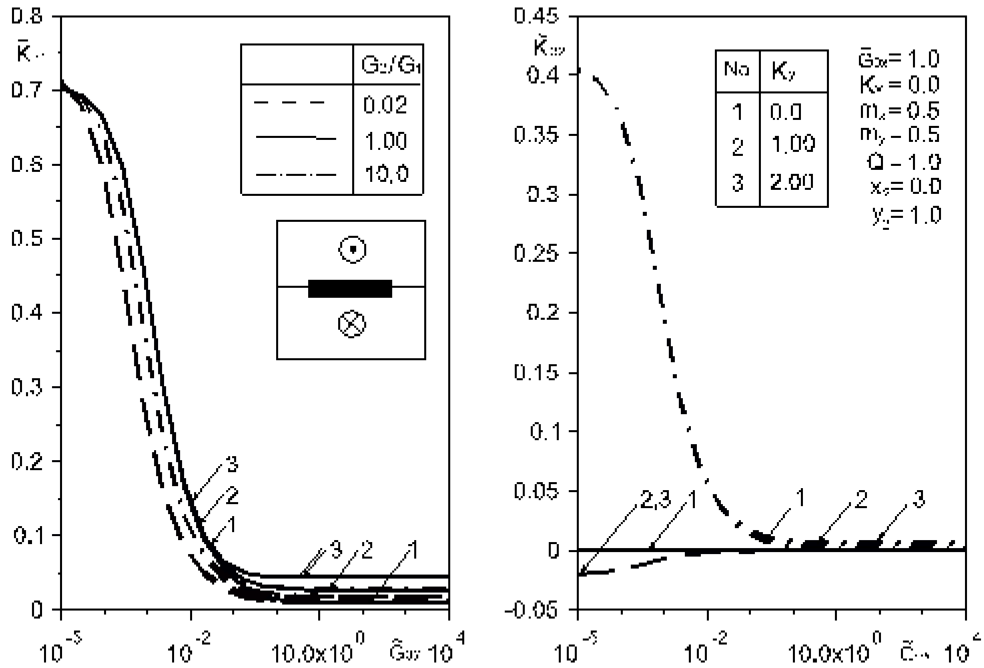



Рис. 7.31. Вплив параметрів ***K*** та різномодульності матриці на УКІН $K_{31}$, $K_{32}$ у випадку навантажування зосередженими силами (схема 3)

Числовий експеримент засвідчив, що зміна параметрів $\tilde{G}_{0x}$, $K_x$ майже жодним чином не впливає на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$, коли діє схема 3. На відміну від цього, зміна параметрів $K_y$, $G_2/G_1$ має більш відчутний вплив (рис. 7.31). В цілому, в цьому випадку навантаження $\tilde{K}_{31}$ зменшується при появі нелінійності, а на $\tilde{K}_{32}$ її вплив незначний.

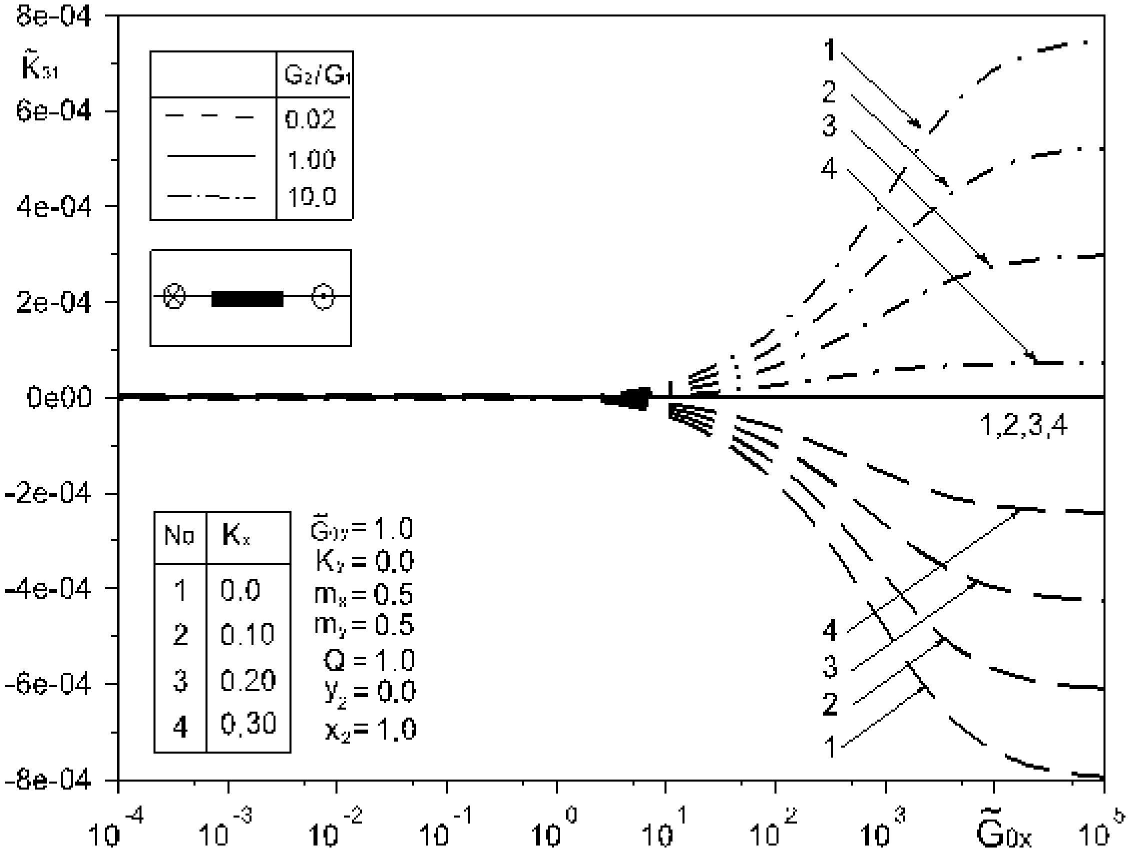



Рис. 7.32. Вплив параметрів ***K*** та різномодульності матриці на УКІН $K_{31}$ у випадку навантажування зосередженими силами (схема 4)

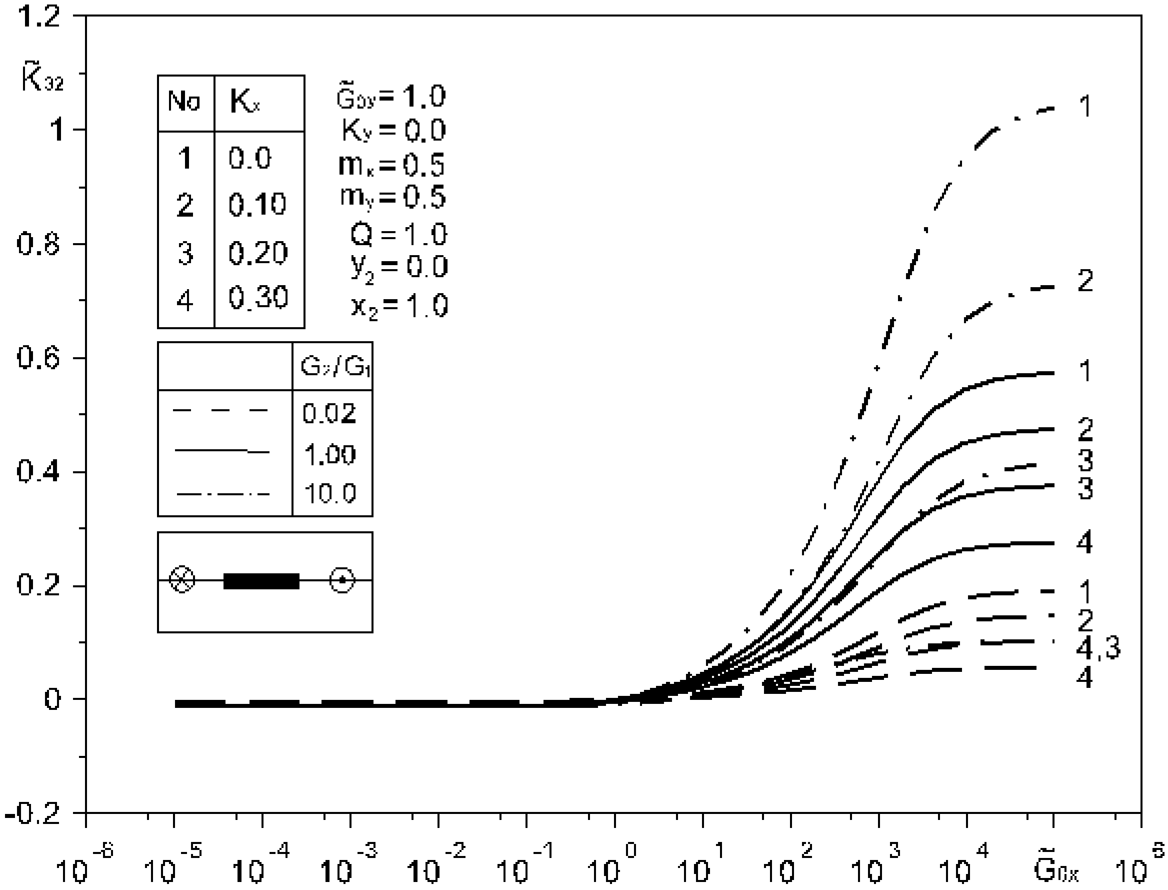



Рис. 7.33. Вплив параметрів ***K*** та різномодульності матриці на УКІН $K_{32}$ у випадку навантажування зосередженими силами (схема 4)

Результати розрахунків за схемою навантаження 4 демонструють, що ненульові значення $\tilde{K}_{31}$ з'являються для "жорсткого" включення $\left(\tilde{G}_{0y} > 1\right)$, зростають при збільшенні $G_2/G_1$ та зменшуються зі збільшенням $K_x$ (рис. 7.31). Аналогічна тенденція спостерігається в цьому випадку навантаження і для $\tilde{K}_{32}$ (рис. 7.32).

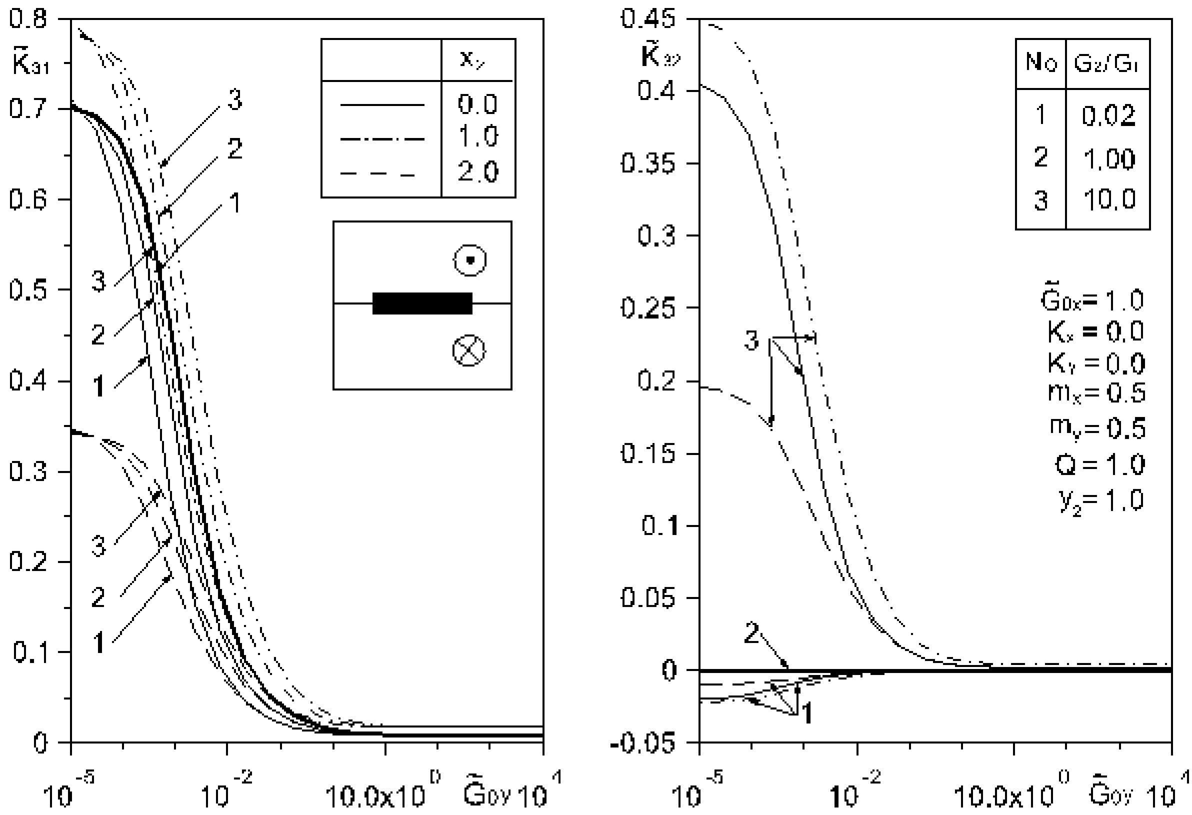



Рис. 7.34. Вплив різномодульності $G_2/G_1$ матриці та несиметричності відносно включення точок $x_2$ прикладання зосереджених сил на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ (схема 5)

Рис. 7.34 – 7.36 ілюструють результати розрахунків за схемою навантаження 5. На рис. 7.34 представлений вплив зміщення координати $x_2$ точки прикладання зосередженої сили на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ для різних значень параметра $G_2/G_1$ різномодульності матеріалів матриці. Відзначається, що максимальні значення УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ лише тоді, коли $G_2/G_1 \neq 1)$ досягають, коли точки прикладання зосереджених сил знаходяться приблизно над вістрям включення $x_2 = 1$.

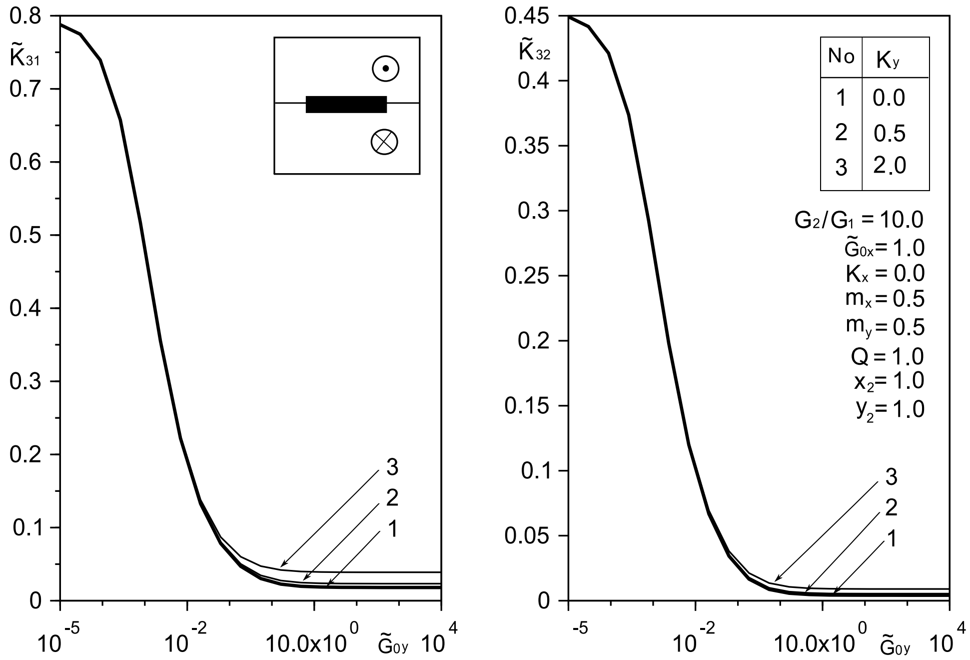



Рис. 7.35. Вплив параметра ***К*** та несиметричності точок $x_2$ прикладання зосереджених сил на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ (схема 5)

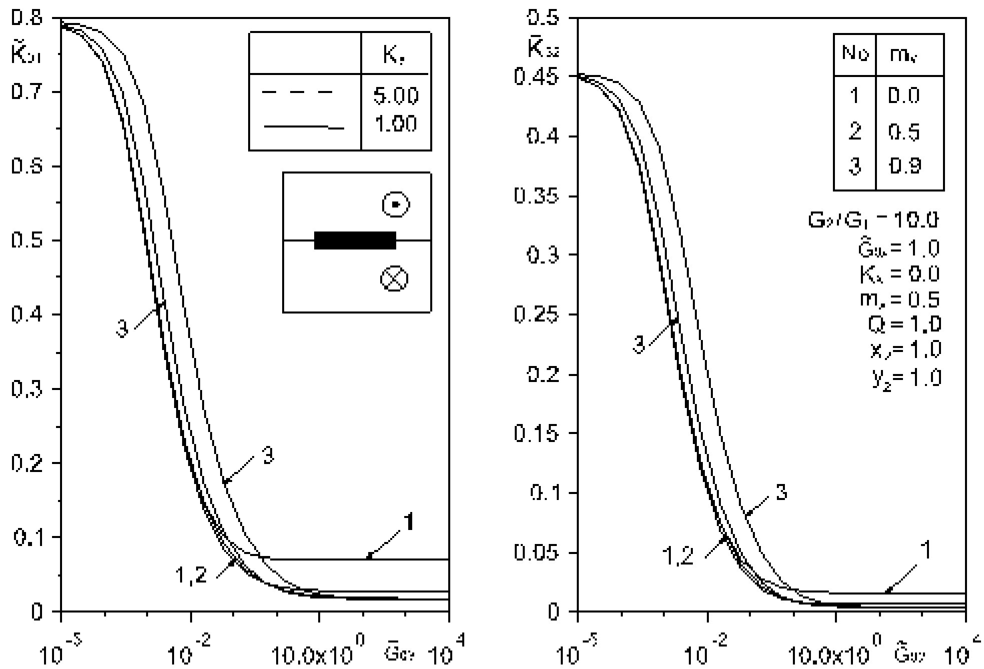



Рис. 7.36. Вплив параметра ***m<sub></sub>*** та несиметричності точок $x_2$ прикладання зосереджених сил на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ (схема 5)

Про вплив параметрів нелінійності $K_y$, $\boldsymbol{m_y}$ на УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ можна скласти думку на основі відображених на рис. 7.35, 7.36 результатів. Виявлено, що параметр $K_y$ вносить більші зміни в результат, ніж $\boldsymbol{m_y}$.

Таким чином, для навантаження, де складова знаходиться вздовж осі $Oy$ (схеми 1, 3, 5), збільшення $K_y$ збільшує значення КІН. Збільшення параметра $\boldsymbol{m_y}$ для "м'якого" включення $\left(\tilde{G}_{0y} < 1\right)$ збільшує КІН, а для "жорсткого" $\left(\tilde{G}_{0y} > 1\right)$ - зменшує значення КІН.

**Висновки до розділу 7**

1). Вперше розглянуті задачі антиплоского деформування тіл з тонкими включеннями із фізично нелінійного матеріалу (пружного чи пружно-плпстичного) у повному діапазоні змін їхніх властивостей від абсолютно податних, які відповідають стрічковим тріщинам (щілинам), до абсолютно жорстких у разі довільних. Розглянуто випадки як монотонного (активного) навантажування, так  і циклічних процесів навантажування-розвантажування.

2). Побудовано модель тонкого включення з істотно нелінійними та анізотропними механічними властивостями загального вигляду. З її використанням методом СМ МФС побудована система результуючих рівнянь із змінними коефіцієнтами-функціями, яка дає можливість описати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження (монотонний чи ні) та його вплив на НДС у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу.

3). Для числового розв’язування результуючої системи рівнянь із змінними коефіцієнтами-функціями запропоновано збіжний ітераційний аналітико-числовий метод. Для випадків багатокрокового процесу навантажування розвинуто інкрементальну методику розрахунку НДС у тілі.

4). На прикладі діаграми деформування ідеально пружно-пластичного матеріалу зі зміцненням за ідеального ефекту Баушінгера виявлено, що запропонована схема ітераційного процесу (реалізована на авторському програмному забезпеченні) придатна не лише для діаграм у вигляді гладких ліній, але й у разі дослідження включень із нелінійних матеріалів з діаграмами деформування, наділеними кутовими точками.

5). Числові розрахунки дали змогу проаналізувати вплив параметрів нелінійності згідно закону деформування Рамберга – Осгуда на НДС тіла при навантажуванні збалансованою системою зосереджених сил та зсувом на безмежності. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлені такі закономірності:

a) зростання ***m*** та $\boldsymbol{K_y}$ незначно зменшує $\tilde{G}_y^{вк}(\sigma_{yz}^{вк})$, $\tilde{\sigma}_{yz}^{вк}$ та збільшує $\partial\tilde{w}^{вк}/\partial y$ для "податного" включення на відміну від зворотного значно відчутнішого ефекту для "жорсткого" включення;

b) вплив параметрів ***m*** та $\boldsymbol{K_x}$ на зміну значень $\tilde{G}_x^{вк}(\sigma_{xz}^{вк})$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{вк}$ та $\partial\tilde{w}^{вк}/\partial x$ відчутніший для "податного" включення. При цьому ***m*** практично не впливає на розподіл НДС у включенні на відміну від параметра $\boldsymbol{K_x}$, вплив якого є порівняльним з $\tilde{G}_{0x}$;

c) при багатокроковому процесі довантажування розподіли $\tilde{G}_y^{вк}(\sigma_{yz}^{вк})$, $\tilde{G}_{0y}$ нечутливі до багатокроковості та величини кроку сценарію навантажування на відміну від деформацій $\partial\tilde{w}^{вк}/\partial y$, які істотно зростають порівняно з одномоментним сумарно ідентичним навантаженням;

d) вплив на узагальнені УКІН $\tilde{K}_{31}$, $\tilde{K}_{32}$ параметру різномодульності $G_2/G_1$ матеріалів матриці є більш помітним для "жорсткого" включення $\left(\tilde{G}_{0y} > 1\right)$;

e) для навантаження, де переважний внесок має складова вздовж осі $Oy$ (схеми 1, 3, 5), зростання $K_y$ збільшує значення УКІН, на відміну від складових перпендикулярного напрямку (вздовж осі $Ox$), коли зростання $K_x$ призводить до оберненого ефекту – зменшення величини УКІН.

# ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Досягнуто мети дисертаційного дослідження: вирішено важливу наукову проблему, що полягала у розробці цілісних математичних моделей і методів дослідження механічних полів у біматеріалах з тонкими фізично нелінійними неоднорідностями з урахуванням неідеальності контактної взаємодії елементів структури і впливу поверхневої енергії за довільного типу і режиму квазістатичного навантажування-розвантажування.

Основні наукові результати є такими:

1. На основі загальних співвідношень лінійної та фізично нелінійної теорії пружності і методу функцій стрибка побудовано структурно-модульний метод функцій стрибка для розв’язування задач цього класу. Завдяки цьому методу спрощується розв’язування нових ускладнених задач, зокрема, з’являється можливість істотно підвищувати складність рівня адекватності взятих до розгляду математичних моделей і умов контактної взаємодії та мінімізувати зміни у вже опрацьованому програмному забезпеченні.

2. Вперше побудована цілісна система універсальних структурно неоднорідних математичних моделей тонкого включення з урахуванням істотної фізичної нелінійності їх механічного деформування:

- модель тонкого ортотропного пружного включення (базова);
- модель тонкого фізично нелінійного включення (нелінійно пружного чи пружно-пластичного);
- модель тонкого багатошарового включення з можливим поверхневим натягом та неідеальним контактом між шарами, кожен з яких є варіантом базової моделі тонкого включення (розгорнута).

Така система моделей дає можливість створити на їх основі синтетичну модель фізично та структурно довільного тонкого включення, долучаючи чи вилучаючи з неї потрібні механічні чи структурні особливості у повному спектрі умов контакту між елементами структури.

3. Для розв'язування різних класів задач деформування притискуваних ізотропних біматеріалів із можливим існуванням як дефектів безпосереднього контактування, так і тонких стрічкових прошарків-неоднорідностей між ними за широкого спектру реологічних властивостей та умов ідеального чи практично довільного типу неідеального контакту розроблено низку додаткових методів-процедур:

а). Для вирішення нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах довільного багатокрокового навантажування–розвантажування імплементована концепція інкрементального підходу, в основу якого покладено моделююче припущення про можливість врахування напружено-деформованого стану (НДС) від попереднього кроку як залишкового на кожному наступному кроці довантажування чи розвантажування.

б). У разі фізичної нелінійності матеріалу включення (довільна діаграма деформування) та неідеального нелінійного контакту матеріалів в умовах апріорі невідомих зон контакту матриці з включенням та багатокрокового навантажування-розвантажування розроблено та успішно реалізовано збіжний ітераційно-інкрементальний метод розв'язування результуючих систем рівнянь із змінюваними коефіцієнтами, залежними від поточного стану НДС.

4. Розроблено математичний апарат та програмний комплекс для реалізації структурно-модульного методу функцій стрибка дослідження напруженого стану біматеріалів з тонкими міжфазними включеннями за дії зосереджених сил та дислокацій. Досліджено зокрема особливості розв'язків ССІР, використаних під час побудови системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для подальшого числового розв'язування

результуючих рівнянь. Достовірність отриманих результатів забезпечено верифікацією отриманих співвідношень і розрахункових методів на часткових випадках лінійної пружності матеріалу включення; тестуванням алгоритмів та схем узгодженості НДС включення із діаграмою деформування матеріалу тощо.

5. З використанням вищенаведених методів запропонована ефективна методика розрахунку НДС при циклічному чи довільному іншому багатокроковому квазістатичному зсувному навантажуванні притискуваних тіл, коли у зоні контакту може відбуватися гладке чи фрикційне проковзування різного типу.

6. Отримані аналітичні розв’язки нових задач антиплоского деформування біматеріалу для випадку комбінованого стискаючого навантаження та квазістатично змінюваного багатокрокового зсувного навантаження. Це стосується визначення всіх елементів НДС, у т.ч. переміщень, узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) та дисипації енергії в околі зон втрати зчеплення матеріалів, а також розмірів цих невідомих зон.

а). Числові експерименти дали можливість з’ясувати вплив тертя та застосування різних способів навантажування на зміну розміру зони проковзування, еволюцію стрибків переміщень та розсіяння енергії. Виявлено, що зона проковзування з’являється і зростає найшвидше у випадку, коли у ній притискаючі нормальні напруження мінімальні. Досліджено, що еволюція стрибка переміщень упродовж циклу має гістерезисний характер, а дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів, а також при зростанні розмірів зон проковзування.

б). З’ясовано, що під час деформування притискуваних тіл навантаженням зсуву за відсутності чи існування обмеження на розмір зони проковзування можна виділити відповідно дві або три фази. На першій фазі зміни навантаження від нуля до першого критичного значення проковзування завжди відсутнє. На другій, при збільшенні навантаження понад перше критичне – з’являється і монотонно зростає зона проковзування, причому на її краях напруження скінченні. Якщо ж задане хоч одне обмеження на розмір зони проковзування, то існує друге критичне значення навантаження, за якого розміри поточних зон проковзування досягнуть допустимої межі (зокрема внутрішнього краю існуючої тріщини). Подальше навіть безмежно мале збільшення навантаження (початок фази 3) призведе до виникнення сингулярних напружень (ненульові УКІН) і коли УКІН та відповідне навантаження досягнуть критичної величини (третього критичного значення), яке спричинить підростання тріщини.

в.) Числовий аналіз отриманих результатів дав можливість сформулювати загальні тенденції зміни НДС у залежності від геометричних та силових параметрів задачі. Зокрема, вигідним з погляду підвищення міцності конструкції є:

- зменшення віддалі від площини тріщини точок прикладання притискних сил (зменшує інтенсивність розсіяння енергії та рівень КІН);
- зростання коефіцієнта тертя (зменшує амплітуду стрибка переміщень, збільшує інтенсивність розсіювання енергії);
- збільшення відносної жорсткості півпростору, у якому прикладено зсувну сила (збільшує стрибок переміщень та істотно зменшує УКІН);

Окрім того:

- зменшення віддалі від площини тріщин точок прикладання зсувної сили збільшує рівень УКІН, дисипацію енергії, зменшує критичні значення навантаження;

- характер стрибка переміщень упродовж циклу навантаження є гістерезисним, причому для появи проковзування на 2-ому та наступних кроках циклічного навантажування необхідно, щоб інтенсивність навантаження досягала вдвічі більшого критичного значення, аніж на першому кроці навантажування;
- для обчислення розсіяння енергії не має значення чи цикл навантажування симетричний, чи «віднульовий», важлива лише амплітуда навантаження.

7. Методом функцій стрибка (МФС) та структурно-модульним методом функцій стрибка (СММФС) отримано розв'язок задачі деформування біматеріалу з тонким стрічковим лінійно пружним ортотропним міжфазним включенням за урахування поверхневих напружень на межі поділу матеріалів включення і матриці. У числових розрахунках виявлено, зокрема, такі особливості впливу натягу на НДС у матриці та включенні за різного навантаження:

a) поява натягу та зміна точок прикладання зосереджених силових чинників знижують інтенсивність енергії деформації та поля напружень в околі включення, причому натяг істотно зменшує УКІН $K_{31}$, водночас практично не впливаючи на УКІН $K_{32}$;

b) спостерігаються певні комбінації механічних параметрів включення та розташування ядра дислокації, коли помітні добре виражені екстремуми значень енергії деформації, УКІН;

c) виявлено, що натяг максимально впливає на гвинтову дислокацію при її розташуванні практично над вістрям податного включення.

8. Побудовано системи рівнянь СМ МФС і МФС для розв'язування задач антиплоскої деформації біматеріалу з тонкими багатошаровими міжфазними лінійно пружними включеннями за довільного силового і дислокаційного навантаження у разі, коли контакт включення із матрицею може бути ідеальним або з поверхневим натягом чи проковзуванням (гладким чи фрикційним). Для таких задач:

a) конфігурацію зони проковзування за різних видів навантажування окреслює опрацьований збіжний ітеративний алгоритм;
b) вивчене питання побудови «зон безпеки» розміщення зосереджених чинників в околі включення, коли проковзування на межі включення гарантовано не розпочнеться.
c) досліджено вплив ступеню різномодульності матеріалів шарів включення на УКІН матриці та НДС, що дозволить проводити розрахунки градієнтно-функційних матеріалів.

9. Вперше розглянуті задачі антиплоского деформування тіл з тонкими включеннями із фізично нелінійного матеріалу (пружного чи пружно-пластичного) у повному діапазоні змін їхніх властивостей від абсолютно податних, які відповідають стрічковим тріщинам (щілинам), до абсолютно жорстких у разі довільних. Розглянуто випадки як монотонного (активного) навантажування, так і циклічних процесів навантажування-розвантажування.

a) З використанням побудованої математичної моделі тонкого включення з істотно нелінійними та анізотропними механічними властивостями загального вигляду та МФС, СМ МФС записано системи результуючих інтегральних рівнянь із змінюваними коефіцієнтами-функціями, які дають можливість врахувати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження (монотонний чи ні) та описати його вплив на НДС у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу.

b) На прикладі діаграми деформування ідеально пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням за ідеального ефекту Баушінгера виявлено, що запропонована схема ітераційного процесу (реалізована на авторському програмному забезпеченні) придатна не лише для діаграм у вигляді гладких ліній, але й у разі дослідження включень із нелінійних матеріалів з діаграмами деформування, наділеними кутовими точками.

c) Обчислення дали можливість дослідити вплив параметрів нелінійності закону деформування Рамберга – Осгуда на НДС біматеріалу при навантажуванні збалансованою системою зосереджених сил та зсувом на безмежності. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлено низку важливих закономірностей:

  - зростання параметрів нелінійності $K_s$, $m_s$ збільшує деформації "податного" включення на відміну від оберненого значно відчутнішого ефекту для "жорсткого" включення;
  - при багатокроковому процесі довантажування розподіли набутих у різних точках включення модулів зсуву та досягнутих напружень нечутливі до багатокроковості та величини кроку сценарію навантажування на відміну від деформацій, які істотно зростають порівняно з одномоментним сумарно ідентичним навантаженням;
  - вплив різномодульності матеріалів матриці на узагальнені УКІН $K_{31}, K_{32}$ є більш помітним для "жорсткого" включення.

10. Розв’язки розглянутих задач рівноваги тіл з тонкими міжфазними неоднорідностями в рамках концепції механіки деформівного твердого тіла можуть бути застосовані для вирішення практичних застосувань як макро- чи мезомасштабу, так і на мікро- та нанорівнях.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Абрамян Б.Л. Обзор результатов, полученных по контактным задачам в АН АрмССР. *Контактные задачи и их инженерные приложения.* Москва: изд. НИИМаш, 1969.
2. Александров А.И., Бокий И.Б. Численное решение плоской контактной задачи теории упругости о взаимодействии тел с проскальзыванием и сцеплением. *Прочность металлов и материалов*. Волгоград, 1989. С. 18–22.
3. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. *ПММ*. 1968. Т. 32, № 4. С. 672–683.
4. Александров В.М., Аннакулов Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения. *Трение и износ*. 1990. Т. 11, № 1. С. 24–28.
5. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошной среды со смешанными граничными условиями. Москва: Наука, 1986. 336 с.
6. Александров В.М., Кудиш И.И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактной задачи при учёте поверхностной структуры взаимодействующих тел. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1979. № 1. С. 58–70.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва: Наука. Главная редакция физ. -мат. л-ры, 1983. 488 с.
8. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. Москва: Факториал, 1998. 223 с.
9. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. Москва: Машиностроение, 1986. 176 с.
10. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. Москва: Физматлит, 1993. 224 с.
11. Алексеев Н.М., Добычин М.Н. Модели изнашивания. *Трибология: Исследования и приложения: Опыт США и стран СНГ* / под ред. В.А. Белого, К. Лудемы, Н.К. Мышкина. Москва: Машиностроение, Нью-Йорк: Аллертон пресс, 1993. С. 66–87.

12. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. Київ: Наук. думка, 1982. 345 с.
13. Андрейкив А.Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. Київ: Наук. думка, 1992. 184 с.
14. Андрейкив А.Е., Чернец М.В. Оценка контактного взаимодействия трущихся детадей машин. Київ: Наукова думка, 1991. 160 с.
15. Бакли Д. Поверхностные явления при адгезии и фрикционном взаимодействии / под ред. А.И. Свириденка. Москва: Машиностроение, 1986. 359 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Москва: Наука, 1966. 296 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Москва: Наука, 1970. 328 с.
18. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. Москва: Наука, 1985. 256 с.
19. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. Москва: Мир, 1984. 494 с.
20. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. Оценка локального напряженно-деформированного состояния вблизи остроконечных упругих включений в анизотропной пластине. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1983. № 3. С. 28–32.
21. Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Садівський В.М. Поздовжній зсув ізотропного тіла з гострокінцевим пружним включенням. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1977. № 5. С. 413–417.
22. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Київ: Наук. думка, 1983. 288 с.
23. Бернар И.И., Опанасович В.К. Термоупругость пластинки с тонкостенным упругим включением по дуге окружности. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1987. № 3. С. 169–175.
24. Бернацек В.В., Піскозуб Й.З. Моделювання деформаційних явищ процесу каширування. *Кваліологія книги.* 2011. №1 (19). С. 100–109.
25. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів : монографія у 2-х т. Луцьк: Надстир'я, 2007.

26. Божидарник В.В., Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Термоупругое равновесие кусочно-однородной среды при наличии зон тепловыделения на границе раздела компонент. *Современные проблемы контактных взаимодействий* : матер. выездного заседания науч. совета АН СССР по трению и смазкам. Луцк, 1987. С. 58–59.
27. Божидарник В.В., Піскозуб Й.З., Попіна С.Ю, Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах з стохастичними теплопровідними тріщинами. *Вісн. Львів політехн. ін-ту : 251. Диференціальні рівняння та їх застосування.* 1991. Вип. 251. С. 9–15.
28. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Ч. 1. Львів: Світ, 1999. 532 с.
29. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Ч. 2. Львів: Світ, 1999. 418 с.
30. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.
31. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Механіка крихкого руйнування. Київ: УМК ВО, 1989. 95 с.
32. Боуден Ф., Табор Д. Трение и смазка твёрдых тел. Москва: Машиностроение, 1968. 544 с.
33. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. Москва: Мир, 1987. 525 с.
34. Бурак Я.Й. Вибрані праці. Львів: НУЦММІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. В-во "Ахіл", 2001. 352 с.
35. Бурак Я.И., Чекурин В.Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. Київ: Наук. думка, 1987. 264 с.
36. Вайсфельд Н.Д. Напряженное состояние неограниченной упругой среды, ослабленной монетообразной межфазной трещиной. *Теоретическая и прикладная механика.* 2005. Вып. 41. С. 26–30.
37. Вайсфельд Н.Д., Пастух А.И., Попов Г.Я. Задача о напряженном состоянии упругой среды, содержащей конический дефект. *Вісн. Дніпропетров. унту. Сер.:Фіз.-мат. науки.* 2001. Вип. 4, Т. 1. С. 16–24.
38. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я., Реут В.В. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для защемленного по боковой поверхности

конуса с присоединенным шаровым сегментом. *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, вып. 1. С.102–112.

39. Ванин Г.А. Механика ленточных композиционных материалов. *Прикл. механика*. 1985. **21**, № 4. С. 24–32.
40. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Київ: Наукова думка, 1985. 304 с.
41. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: Наука, 1970. 379 с.
42. Винницька Л.І., Григоренко Я.М., Савула Я.Г. Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням. *Доп. НАН України.* 2009. № 9. С. 62–66.
43. Власов В.М. Работоспособность упрочненных трущихся поверхностей. Москва: Машиностроение, 1987. 304 с.
44. Габдулхаев Б.Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений. *Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.* Москва: ВИНИТИ, 1980. Вып. 18. С. 251–307.
45. Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений I рода. *Изв. вузов. Математика.* 1973. № 7. С. 12–24.
46. Галанов Б.А. Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упруго-пластических деформациях неровностей. *ПММ.* 1984. Т. 48, № 6. С. 1020–1029.
47. Галати С. Ленточные наполнители. *Наполнители для полимерных композиционных материалов.* Москва, 1981. С. 429–468.
48. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. Москва: ГИТТЛ, 1953. 264 с.
49. Гаркунов Д.Н. Триботехника. Москва: Машиностроение, 1985. 424 с.
50. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва: Наука, 1977. 638 с.
51. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. Київ: Наук. думка, 1992. 192 с.
52. Гегузин Я.Е., Гончаренко Н.Н. Поверхностная энергия и процессы на поверхности твердых тел. *Успехи физически наук.* 1962. Т. LXXVI, вып. 2. С. 283–328.

53. Гембара В.М., Огірко І.В., Піскозуб Й.З. Дослідження напружень і деформацій в друкарських формах ротаційних поліграфічних машин. *1-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : тез. доп. (Львів, 18–20 травня, 1993 р.). С. 195.
54. Говоруха В.Б. Аналіз тріщини між двома п’єзоелектричними матеріалами в полі стискального напруження та зосереджених сил. *Вісн. Київ. ун-ту. Сер. : фіз. -мат. науки.* Спецвипуск. 2015. С. 65–69.
55. Говоруха В.Б., Геррманн К.П., Лобода В.В. Электрически проницаемая трещина с зонами контакта между двумя пьезоэлектрическими материалами. *Прикл. механика.* 2008. 44, № 3. С. 66–74.
56. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Аналіз міжфазної тріщини в п’єзокерамічному тілі скінченних розмірів. *Вісн. Київ. ун-ту. Сер. : фіз. -мат. науки.* 2008. Вип. 4. С. 47–52.
57. Говоруха В., Лобода В. Вплив електричної проникності міжфазної тріщини на характеристики електромеханічного поля в околі її вершини. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат.* 2010. Вип. 73. С. 44–55.
58. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
59. Горячева И.Г., Добычин Н.М. Контактные задачи в трибологии. Москва: Машиностроение, 1988. 253 с.
60. Градштейн И.С, Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
61. Григоренко О., Савула Н. Полівимірна крайова задача гетерогенної математичної моделі контактної взаємодії пружного тіла з тонким включенням. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2006. Вип. 11. С. 120–126.
62. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Полуплоскость с произвольно-ориентированным линейным упругим включением. *Изв. АН АрмССР. Механика.* 1980. Т. 33, № 1. С. 12–20.
63. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением. *Прикл. матем. и механика.* 1979. Т. 43, № 3. С. 542–549.
64. Гриліцький Д.В., Сорокатий Ю.І. Механічні і оптичні методи дослідження напружено-деформованого стану тіл. Львів: ЛДУ, 1984. 59 с.

65. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными включениями. *Прикл механика.* 1975. Т. 11, № 1. С. 74–81.
66. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. *Прикл. матем. и механіка.* 1975. Т. 39, № 3. С. 520–529.
67. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. *Мат. методы и физ. -мех. поля.* Київ: Наук. думка. 1975. Вып. 1. С. 41–48.
68. Гриліцький Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті. *Вісн. Львів ун-ту. Сер. мех. -мат.* Львів: Вища школа, вид-во при Львів ун-ті. 1987. Вип. 27. С. 3–9.
69. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Термоупругое деформирование ленточного композита. *Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них* : тез. докл. II Всесоюз. науч. -техн. сем. (Львов, сент. 1984 г. ). Киев: Наук. думка, 1984. С. 12–13.
70. Грицина О. Визначення поверхневої енергії твердих тіл. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2013. вип. 17. С. 43–54.
71. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. Москва: Мир, 1990. 303 с.
72. Гудрамович В.С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. Київ: Наук. думка, 2005. 223 с.
73. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Київ: Наук. думка, 1983. 296 с.
74. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища школа, 1995. 304 с.
75. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий, 2006. 710 с.
76. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. О построении основ механики нанокомпозитов : обзор. *Прикл. механика.* 2011. 47, № 1. С. 4–61.

77. Дёмкин Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей. Москва: Наука, 1970. 228 с.
78. Денисюк И.Т. Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке. *Изв. Рос. АН. Механика твердого тела.* 2000. № 4. С. 140–148.
79. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. Москва: Наука, 1985. 398 с.
80. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
81. Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью. *Физ. -хим. механика материалов.* 1980. Т. 16, № 6. С. 70–73.
82. Журавлев В.А. К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей. *ЖТФ.* 1940. Т. 10. Вып. 17.
83. Иванов В.В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. *Математический анализ. Итоги науки.* Москва: ВИНИТИ, 1963. С. 125–177.
84. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Київ: Наук. думка, 1968. 287 с.
85. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2005. № 3. С. 153–166.
86. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Частично отслоившееся тонкое жесткое включение между разными упругими материалами при наличии трения в зоне контакта. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* 2007. № 4 (54). С. 124–139.
87. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Москва: Высш. шк., 1972. 752 с.
88. Каландия А.И. Математические методы двухмерной теории упругости. Москва: Наука, 1973. 304 с.
89. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Качан Ю.Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами,

упругими и жесткими включениями. *Теоретическая и прикладная механика.* 2002. Вып. 35. С. 53–65.

90. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. Москва, Ленинград: Физматгиз, 1962. 708 с.
91. Кильчевский Н.А., Костюк Э.И. О развитии в 20-м веке теории контактных взаимодействий между твердыми телами. *Прикл. мех.* 1966. Т. 2. Вып. 8.
92. Кит Г.С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1977. № 4. С. 336–340.
93. Кит Г.С., Емец В.Ф., Кунец Я.И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 1999. № 3. С. 55–64.
94. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Київ: Наукова думка, 1983. 280 с.
95. Кит Г.С., Подстригач Я.С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением. *Физ. -хим. механика материалов.* 1966. **2,** № 3. С. 247–252.
96. Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів: Растр-7, 2018. 200 с.
97. Козлов М.М., Лейкин С.Л. Упругие свойства межфазных границ: модули упругости и спонтанные механические характеристики. *Биологические мембраны.* 1988. **5,** № 7. С. 752–767.
98. Колесов В.С., Пискозуб И.З. Влияние сферического дефекта на температурное поле в полупространстве при локальном нагреве. *Мат. методи та фізико-механічні поля.* 1996. 39, № 1. С.47–50.
    *Переклад*: Kolesov V.S., Piskozub I.Z. The influence of a spherical defect on the temperature field in a half-space under local heating *Journal of Mathematical Sciences.* Volume 86, Issue 2. 1997. Pages 2561–2564. URL: https://doi.org/10.1007/BF02356097 .
99. Коллинз Д. Повреждения материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение. Москва: Мир, 1984. 624 с.

100. Коляно Ю.М., Кушнир Р.М., Музычук Ю.А. Температурные напряжения в слоистых телах при неидеальном термомеханическом контакте на поверхностях раздела. *Прикл. механика.* 1986. **22,** № 11. С. 28–36.
101. Композиционные материалы : в 8-ми т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. Москва: Мир, Машиностроение, 1978.
102. Композиционные материалы : в 8-ми т. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах /ред. А.Меткалф. Москва: Мир, 1978. 440 с.
103. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. *Контактное взаимодействие твёрдых тел и расчёт сил трения и износа.* Москва: Наука, 1971. С. 130–140.
104. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. Київ: Наук. думка, 1978. 220 с.
105. Крагельский И.В. Трение и износ. Москва: Машиностроение, 1968. 480 с.
106. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. Москва: Мир, 1987. 328 с.
107. Кундрат М.М. Локальне руйнування композиції з включенням та зміцненням у смугах передруйнування. *ФХММ.* 2000. Т. 36, № 2. С. 27–32.
108. Кундрат Н.М. Отслоение включения в ортотропной композиции. *Прикл. механика.* 2000. **36,** № 9. С. 123–128.
109. Кундрат М.М., Делявський М.В. Напруження в ослабленій тріщиною півплощині з накладкою. *ФХММ.* 2000. Т. 36, № 6. С. 24–28.
110. Кундрат М.М., Сулим Г.Т. Зони передруйнування в композиції з включенням під час асиметричного навантаження. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ.* 2001. Вип. 1. С. 1–6.
111. Кунець Я.І. Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м’яким включенням в умовах поздовжнього зсуву. *Мат методи і фіз. -мех поля.* 2004. **47,** № 3. С. 144–148.
112. Кушнір Р.М. Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті. *Мат. методи та фіз. -мех. поля.* 1998. **41,** № 1. С. 108–116.

113. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Сполом, 2003. 320 с.

114. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.

115. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.

116. Лобода В.В. Контактна модель тріщини в ортотропному матеріалі. *Фіз. -хім. механіка матеріалів.* 1999. Т. 35, № 5. С. 59–60.

117. Лобода В.В., Шевельова А.Е. Трещина на границе раздела материалов с учетом Кулонова трения в области контакта ее берегов. *Смешаные задачи механики деформируемых тел* : сб. науч. трудов. Днепропетровск: ДГУ, 1995. С. 99–107.

118. Мартиняк Р.М. Механодифузійна взаємодія тіл з урахуванням заповнювача міжконтактних зазорів. *Фіз. -хім. механіка матеріалів.* 2000. 36, № 2. С. 124–126.

119. Мартыняк Р.М., Криштафович А.А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками. *Трение и износ.* 2000. 21, № 4. С. 350–360.
Те саме: Martynyak R., Kryshtafovych A. Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary. *J. Friction and Wear.* 2000. 21, № 4. P. 6–15.

120. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Монастирський Б.Є. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту. *Мат. методи та фіз. -мех. поля.* 2005. 48, № 3. С. 101–109.

121. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів: Растр-7, 2017. 168 с.

122. Маруха В.І., Панасюк В.В., Силованюк В.П. Ін’єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. Львів: СПОЛОМ, 2009. 262 с.

123. Матисяк С.Й., Євтушенко О.О., Зеленюк В.М. Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною. *Фіз. -хім. механіка матеріалів.* 2004. 40, № 4. С. 34–40.

124. Механика композитов : в 12-ти томах / под общ. ред. А.Н. Гузя. Київ: Наук. думка, 1993–1995, А. С. К., 1996–2003.

125. Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие в 4 т. / под общ. ред. Панасюка В.В. Т. 2 : Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Київ: Наук. думка, 1988. 620 с.

126. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. Москва: Физматлит, 2001. 672с.

127. Михаськів В.В., Хай О.М. Симетрична задача усталеної взаємодії тріщин і тонких жорстких включень у тривимірній матриці. *Фіз. -хім. механіка матеріалів.* 2003. 39, № 2. 11 с.

128. Михлин С.Г. Задача о соприкасании двух упругих полуплоскостей. *ПММ.* 1945. Т. 9. Вып. 2.

129. Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г., Кунин И.А. Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде. *Прикладная математика и механика*. Москва: АН СССР, 1973. Т. 37, вып. 2. С. 524–531.

130. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Москва: Наука, 1965. 250 с.

131. Мовчан А.Б., Морозов Н.Ф., Назаров С.А. О разрушении вблизи пикообразных включений при посадке с натягом. *Пластичность и разрушение тверд. тел.* Москва, 1988. С. 137–145.

132. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Асимптотическое поведение напряженно-деформированного состояния вблизи острых включений. *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 290, № 1. С. 48–51.

133. Можаровский В.В., Старжинский В.Е. Прикладная механика слоистых тел из композитов. Плоские контактные задачи. Минск: Наука и техника, 1988. 271 с.

134. Можи Д. Контакт упругих твердых тел с учетом поверхностной энергии. *Трение, износ и смазочн. материалы :* тр. Междунар. науч. конф. (Ташкент, 22–26 мая, 1985). Тез. секц. докл. Т. 1. Москва, 1985. С. 32–37.

135. Мойсеенок А.П., Попов В.Г. Нестационарная задача о концентрации упругих напряжений вблизи тонкого жесткого отслоившегося

включения находящегося в условиях плоской деформации. *Вісн. Дніпр. ун-ту. Серія МЕХАНІКА*. 2007. № 2/2. Вип. 11. Т. 2. С. 130–140.

136. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактное взаимодействие оболочечных элементов конструкций. Київ: Наук. думка, 1988. 288 с.
137. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка, 1985. 176 с.
138. Моссаковский В.И., Мищишин И.И. Качение упругих тел. *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 5.
139. Моссаковский В.И., Мищишин И.И. Об одной задаче линейного сопряжения. *Гидроаэромеханика и теория упругости.* 1968. Вып. 8.
140. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 706 с.
141. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 512 с.
142. Нагірний Т.С., Червінка К.А. Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. Львів: Растр-7, 2018. 204 с.
143. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 117 с.
144. Назарчук З.Т., Стаднік Т.М. Дифракційна взаємодія тріщиноподібних дефектів. *Фіз. -хім. механіка матеріалів.* 2008. 44, № 4. С. 47–51.
145. Олейник Н.В. Несущая способность элементов конструкций при циклическом нагружении. Київ: Наукова думка, 1985. 238 с.
146. Опанасович В.К. О двух подходах к исследованию антиплоской деформации изотропного массива с тонким упругим включением. *Прикл. математика и механика.* 1988. 52. Вып. 1. С. 116–119.
147. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат.* 1984. Вип. 22. С. 71–77.
148. Опанасович В.К., Драган М.С., Тисовский Л.О. Напряжения в плоскости, содержащей систему прямолинейных включений. *Физ. -хим. механика материалов.* 1985. 21, № 6. С. 21–26.

149. Осадчук В., Кушнір Р., Николишин М. Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною. *Машинознавство.* 1998. № 4/5. С. 40–43.
150. Острик В.І. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2003. Т. 39, № 2. С. 58–65.
151. Основы трибологии (трение, износ, смазка) / под ред. А. В. Чичинадзе. Москва: Машиностроение, 2001. 664 с.
152. Острык В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. Київ: Наук. думка, 2006. 328 с.
153. Павлычко В.М., Сулим Г.Т. Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. Львов, 1987. 11 с. *Ред. журн. "Физ. -хим. механика материалов". Деп. в ВИНИТИ* 15 янв 1987г. № 330–В87.
154. Панасюк В.В. Вибрані праці : у 3 ч. Ч. 1 : 1954–1979 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2001. 450 с. Ч. 2 : 1971–1990 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2002. 720 с. Ч. 3 : 1991–2001 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2001. 764 с.
155. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Київ: Наук. думка, 1991. 416 с.
156. Панасюк В.В., Андрейків О.Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1976. № 7. С. 636–639.
157. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Київ: Наукова думка, 1976. 444 с.
158. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Київ: Наук. думка, 1984. 344 с.
159. Панасюк В.В., Теплый М.И. Определение контактных напряжений при внутреннем соприкасании цилиндрических тел. *Прикл. механика.* 1971. Т. 7. Вып. 4. С. 3–8.
160. Панасюк В.В., Теплий М.І. Про одну контактну задачу теорії пружності для пластини з круговим отвором. *Доп. АН УРСР.* 1970. № 12. С. 1101–1105.
161. Панасюк В.В., Теплий М.І. Розподіл напружень в циліндричних тілах при їх внутрішньому контакті. *Доп. АН УРСР.* 1971. № 6. С. 550–553.

162. Пастернак Я.М. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро. *Доповіді НАН України.* 2012. № 11. С. 66–72.
163. Пастернак Я.М. Плоска задача теорії пружності для анізотропних тіл із тонкими пружними включеннями *Мат. методи та фіз. -мех. поля.* 2011. 54, № 3. С. 124–137.
164. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка».* 2011. Вип. 15. т. 2, №5. С. 200–210.
165. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Розв’язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. I. Загальні співвідношення. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2011. № 1. С. 37–43.
166. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах. *Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць.* Вип. 9. Львів: Каменяр, 2012. С. 98–113.
167. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пискозуб Л.Г. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом. *Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010* (Минск, 25 окт. – 1 нояб. 2010 г. ) : в 2 ч. Ч. 2. Минск: БГУ, 2010. С. 399–404.
168. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. Москва: Наука, 1974. 416 с.
169. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. Москва: Наука, 1977. 312 с.
170. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 688 с.
171. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Київ: Наук. думка, 1988. 280 с.
172. Пинегин С.В. Трение качения в машинах и приборах. Москва: Машиностроение, 1976. 264 с.

173. Підстригач Я.С. Вибрані праці. Київ: Наук. думка, 1996. 762 с.

174. Підстригач Я.С. Умови стрибка напружень і переміщень тонкостінному включенні у суцільному середовищі. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1982. № 12. С. 29–31.

175. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1963. № 7. С. 872–874.

176. Пискозуб И.З. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах квазистационарной термоупругости для кусочнооднородных тел с тонкими дефектами. *Механика неоднородных структур :* тезисы докладов 2 Всесоюзной конференции. (Львов. 2–4 сентября 1987 года). Львов, 1987. С. 209–210.

177. Пискозуб И.З. Решение системы СИУ второго рода с разрывными коэффициентами для задачи термоупругого равновесия кусочно-однородной среды с тонкими прослойками. IV Всесоюзная конференция *Смешанные задачи механики деформируемого тела* : тезисы докладов. (Одесса, 26–29 сентября 1989). Ч. 2. С. 54.

178. Пискозуб И.З., Гембара В.М. Двумерная задача термоупругости для тела с линейной неоднородностью и зависящими от температуры физико-механическими характеристиками. *Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур*. Всесоюзная конференция : тезисы докладов. (Саратов, 7–9 июня, 1988). Ч. 3. С. 78.

179. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. О термоупругом деформировании кусочно-однородных тел с тонкими дефектами. *Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.* Республиканская научная конференция : тезисы докладов. (22–24 сентября 1987). Одесса, 1987. С. 105–106.

180. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением. Инженерно-физический журнал. 1983. 44, № 6. С. 977–983.

181. Піскозуб Й.З. Вплив реологічних факторів на якість друкування. П'ятий українсько-польський науковий симпозіум *Актуальні задачі механіки неоднорідних структур :* тези доповідей. (Львів–Луцьк, вересень 18–23, 2003). С. 65–66.

182. Піскозуб Й.З. Вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. *Механіка*

*і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : матеріали 2-го Міжнародного симпозіуму. (Львів–Дубляни, 7–10 жовтня, 1996 р.). С. 107–108.

183. Піскозуб Й.З. Врахування часткового відшарування пружного міжфазного тонкого включення в умовах поздовжнього зсуву біматеріалу. *Прикладні проблеми механіки та математики*. 2020.  17. С. 162–167.

184. Піскозуб Й.З. Моделювання впливу реологічних факторів на якість фарбовідбитків. Міжнародна науково-практична конференція *Кваліологія книги* : доповіді й повідомлення. (Львів, 23–25 жовтня, 1996 р.). С. 32.

185. Піскозуб Й.З. Моделювання ускладненої взаємодії пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). (Львів, 5–8 грудня 2005 року). Львів. С. 74–75.

186. Піскозуб Й. Моделювання тонкої багатошарової міжфазної неоднорідності у біматеріалі за умов поздовжнього зсуву. 15-*й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : матеріали симпозіуму. (Львів, 20–21 травня 2021 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2021. С. 44–46.

187. Піскозуб Й.З. Неідеальна взаємодія пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. VI Polish-Ukrainian Science Conference *Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media*. (Warsaw, 6–10 September 2005).  p. 102.

188. Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. 24. С. 73–85.

189. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Вплив реологічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту в друкарських процесах. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки і математики.* (Львів, 25–28 травня 1998 р.). С. 112–113.

190. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Компенсаційний вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. Всеукраїнська наукова конференція

*Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, листопад 2–5, 2004). С. 82.
191. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Математичне моделювання впливу гідродинамічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту друкарських циліндрів. *ДРУКОТЕХН-96. Комп'ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи :* наукові праці конференції. (Львів, 16–18 жовтня, 1996 р.). С. 96–97.
192. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація термосилового навантаження в кусково-однорідному середовищі з теплоактивними прошарками. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, 7–9 грудня 2009). Львів. С. 31.
193. Піскозуб Л.Г., Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Вісник Тернопільського національного технічного університету.* 2015. №1 (77). С. 97–108.
194. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1996. 32, № 4. С. 39–48.
195. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив поверхневих напружень на антиплоский напружено-деформований стан тонкого стрічкового міжфазного включення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. Т. 63, № 2. С. 98–108.
196. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Моделювання нелінійної контактної взаємодії тіл. *Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент :* матеріали Міжнародної наукової конференції. (Львів, 17–18 вересня 2018 року). Львів: ЦММ ІППММ. 2018. С. 18–20.
197. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г. Термонапружений стан кусково-однорідного середовища з тонкими міжфазними включеннями. *Крайові задачі термомеханік :* збірник. Київ: Ін-т мат. НАН України. 1996. Ч. 2. С.64–68.
198. Піскозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2014. вип. 20. С. 160–172.
199. Піскозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2014. Вип. 12. С. 184–191.

200. Повстенко Ю.З. Учет поверхностной энергии в граничных условиях краевых задач механики деформируемых твердых тел. *Мат. методы и физ. -мах. поля.* Київ: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 15–28.
201. Повстенко Ю.З. Нелокальна і градієнтна теорії та їх застосування до опису дефектів в твердих тілах. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. 46, № 2. С. 136–146.
202. Поддубняк А.П., Кунец Я.И. Осесимметричное кручение упругого полупространства с упругой шайбой. *Прикл. механика* 1983. 19, № 7. С. 66–70.
203. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. Київ: Наукова думка, 1979. 240 с.
204. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерно-физический журнал.* 1963. **6**, № 10. С. 129–136.
205. Подстригач Я.С., Кит Г.С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин. *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* Київ: Наук. думка, 1967. Вып. 7. С. 194–201.
206. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наук. думка, 1985.
207. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и обусловленного им напряженного состояния в твердых телах. *Физ. -хим. механика материалов* 1967. **3**, № 5. С. 575–583.
208. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. *Прикл. механика.* 1967. **3**, № 6. С. 8–16.
209. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 344 с.
210. Попов В.Г., Мойсеенок А.П. Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига. *Теорет. и прикладная механика.* 2005. Вып. 41. С. 184–192.

211. Попина С.Ю., Сулим Г.Т. Предельная нагрузка для хрупкого тела с тонкостенным упругим включением. *Физ. -хим. механика материалов.* 1987. Т. 23. № 2. С. 115–118.
212. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва: Мир, 1979. 493 с.
213. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Специальные функции. Москва: Наука, 1983. 752 с.
214. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Москва: Наука, 1981. 800 с.
215. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л.А. Галина. Москва, 1971. 496 с.
216. Рвачев В.Л. Исследование ученых Украины в области контактных задач теории упругости. *Прикл. мех.* 1967. Т. 3. Вып. 10.
217. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
218. Саврук М.П., Зеленяк В.М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів: РАСТР, 2009. 212 с.
219. Саврук М.П., Чорненький А.Б. Плоска задача теорії пружності для багатозв’зного квазіортотропного тіла. Сучасні проблеми термомеханіки : збірник наукових праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра. Львів: ІППММ НАНУ. 2016. С. 227–229.
220. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
221. Свириденок А.И., Чижик С.А., Петроковец М.И. Механика дискретного фрикционного контакта. Минск: Навука і тэхшка, 1990. 272 с.
222. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. Львів: НАН України. ФМІ ім. Г. В. Карпенка, 2000. 300 с.
223. Сильвестров В.В., Ярдухин А.К. Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении. *Проблемы механики неупругих деформаций.* Москва: Физматлит, 2001. С. 301–313.
224. Сорокатый Ю.И. Экспериментальные исследования термоупругого состояния пластины с тонкостенным упругим включением. *Механика*

*неоднородных структур* : тез. докл. I Всес. конф. (Львов, 6–8 сент. 1983 г. ). Київ: Наук. думка, 1983. С. 209–210.

225. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде. *Прикл. матем. и механика.* 1981. Т. 45, № 2. С. 308–318.
226. Сулим Г.Т. Взаємодія дислокацій з тонкими включеннями. *Машинознавство.* 1997. № 3. С. 10–15.
227. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости. *Инженерно-физический журнал.* 1979. Т. 37, № 6. С. 1124–1130.
228. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине. *Физ. -хим механика материалов.* 1981. Т. 17, № 3. С. 64–68.
229. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений. *Прикл. механика.* 1981. Т. 17, № 11. С. 82–89.
230. Сулим Г.Т. Математична теорія тонких неоднорідностей у термопружному середовищі. *Перший українсько-польський науковий симпозіум „Змішані задачі механіки неоднорідних структур”* (Львів–Шацьк, 14–19 вересня 1995р.). Львів: Світ, 1997. С. 88–93.
231. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
232. Сулим Г.Т. Применение формулы Сомильяна в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями. *Мат. методы и физ -мех поля.* Київ: Наук. Думка. 1983. Вип. 18. С. 48–51.
233. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями. Львов, 1987. 47 с. *Ред. журн. "Физ. -хим механика материалов". Деп. в ВИНИТИ* 15 янв. 1987 г., № 329–В87.
234. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги середовищ з тонкими включеннями : дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.02.04. Львів, 1995. 404 с.
235. Сулим Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тонкостінним включенням. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті. 1979. Вип. 15. С. 85–92.

236. Сулим Г.Т. Упругое равновесие полуплоскости с системой линейных включений. *Прикл. механика.* 1983. Т. 19. № 2. С. 96–100.

237. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. *Прикл. механика.* 1972. Т. 8, № 11. С. 58–65.

238. Сулим Г.Т., Оліярник Н.Р., Піскозуб Й.З., Пастернак Я.М. Поздовжній зсув біматеріального бруса з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки* : спецвипуск. 2015. С. 251–254.

239. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Визначення параметрів граничного стану пружних тіл із тонкими включеннями за числовим розв’язком задачі. *Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту.* 2009. 14, № 1 С. 15–22.

240. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Вплив розмірів анізотропних тіл зі стрічковими пружними включеннями на параметри граничного стану за антиплоскої деформації. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дніпропетровськ, 2009. Вип. 10. С. 263–269.

241. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами. *Мат. методи та фіз. -мех. поля.* 2008. 51, № 4. С. 136–144.

242. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Асимптотическое распределение поля напряжений в окрестности концов тонкого дефекта на границе раздела материалов. *Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций.* 1-й Всесоюзный симпозиум : тезисы докладов. (Ужгород, 21–23 сентября, 1988). С. 70.

243. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Двухчленное асимптотическое представление напряжений в окрестности торцов тонкого межфазного упругого включения. *Механика разрушения материалов* : тез. докл. I Всесоюз. конф. (Львов, 20–22 октября 1987). С. 150.

244. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. *Ред. журн. "Инженерно-физический журнал".* Минск, 1986. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 12 мая 1987 г. № 3396-В87.

*Переклад:* Sulim G. T., Piskozub I. Z. Temperature gradient distribution in the vicinity of a thin thermal active insert. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1987. 53, № 4. P. 670.

245. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017. 53, № 5. С. 24–30.
246. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл : огляд. *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* 2004. 47, № 3. С. 110–125.
247. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Інкрементальний підхід до розв'язування задач деформування тонких фізично нелінійних включень. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки та математики :* збірник наукових праць. (Львів, 22–25 травня 2018 року). Львів, 2018. Т. 2. С. 98–99.
248. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Антиплоска деформація біматеріалу з фізично нелінійним міжфазним тонким включенням. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 319–327.
249. Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г., Піскозуб Й.З. Дисипація енергії при циклічному зсувному навантаженні біматеріалу з міжфазними дефектами контакту з урахуванням тертя. 4-а Міжнародна науково-технічна конференція *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL_12* : тези доповідей. (Львів, 30–31 жовтня 2014 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2014. С. 51.
250. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Антиплоска деформація масиву з тонкими міжфазними прошарками при урахуванні тертя. *Сучасні проблеми механіки та математики* : в 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. (Львів, 21–25 травня 2013 року). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 2. С. 111.
251. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением. Львов, 1982. 20 с. *Ред. журн. "Физ. -хим. механика материалов". Деп. в ВИНИТИ* 15 сент. 1982 г. № 4839–82.
252. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Поле напряжений и перемещений в антиплоской задаче для среды с тонкостенной прослойкой. Львов,

1982. 20 с. *Ред. журн. "Физ. -хим. Механика материалов". Деп. в ВИНИТИ* 15 сент. 1982 г. № 4838–82.

253. Сулим Г.Т., Фльорко М.М. Реалізація методу граничних елементів для задач теорії потенціалу. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій.* Львів: Каменяр. 1999. Т. 2. Вип. 2. С. 224–228.
254. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Поздовжній зсув біматеріалу з пружно-пластичним міжфазним тонким включенням. *Тринадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : матеріали симпозіуму. (Львів, 18–19 травня 2017 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2017. С. 50–52.
255. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням за їхнього фрикційного контакту. *Сучасні проблеми термомеханіки* : тези доповідей Міжнародної наукової конференції.(Львів, 22–24 вересня 2016). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2016. С. 235–236.
256. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Фізично нелінійне деформування тонкого міжфазного включення за умов антиплоскої задачі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2019. Вип. 28, 29. С. 42–54.
257. Трощенко В.Т., Сосновский Л.А. Сопротивление усталости металлов и сплавов : справочник в 2-х томах. Киев: Наукова думка, 1987. Том 1. 510 с. Том 2. 825 с.
258. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінчених елементів і штучні нейронні мережі. Львів: ЛНУ ім. Ів. Франка, 2014. 396 с.
259. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
260. Уотерхауз Р.Б. Фреттинг-коррозия / под. ред. Г.Н. Филимонова. Ленинград: Машиностроение, 1976. 271 с.
261. Успехи механики : в 6-ти т. / под ред. А.Н. Гузя. Київ: Літера ЛТД, 2009. Том 5 : Сенченков И.К., Жук Я.А., Карнаухов В.Г. Моделирование термомеханического поведения физически

нелинейных материалов при моногармоническом приближении. С. 432–462.

262. Хачикян А.С. Плоская задача теории упругости для прямоугольника с тонкостенным включением. *Изв. АН АрмССР. Механика.* 1971. **24**, № 4. С. 55–68.
263. Харун І.В., Лобода В.В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 45, № 2. С. 103–113.
264. Хачикян А.С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. *Изв. АН АрмССР. Механика.* 1970. **23**, № 3. С. 14–22.
265. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость (теория и приложения). Санкт-Петербург, 1998.
266. Черепанов Г.П. Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости. *Механика деформируемых тел и конструкций.* Москва: Машиностроение, 1975. С. 502–507.
267. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. Москва: Наука, 1983. 296 с.
268. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1974. 640 с.
269. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах. *Прикладная математика и механика.* 1966. 30, № 1. С. 82–93.
270. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. *Изв. АН АрмССР. Механика.* 1967. **20**, № 6. С. 19–29.
271. Шевельова А.Є., Лобода В.В. Математичне моделювання привершинних зон тріщин в областях поділу п'єзоактивних та п'єзопасивних матеріалів. Дніпро: ЛІРА, 2020. 204 с.
272. Шерман Д.И. Основные плоские и контактные (смешанные) задачи статической теории упругости. *Механика в СССР за 30 лет.* Москва – Ленинград: Гостехтеориздат, 1950.
273. Шлыков Ю.П., Ганин Е.Л., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление. Москва: Энергия, 1977. 328 с.
274. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва: Гостехтеориздат, 1949. 272 с.

275. Ярдухин А.К. Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. -мат. науки.* Самара, 2003. 19. С. 107–110.
276. Aboudi J. Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach. Amsterdam: Elsevier, 2013. Volume 29.
277. Adams D. F. Elastoplastic behavior of composites. Compos. Mater. *Mech. Compos. Mater*. 2016. 2. P. 169–208.
278. Alblas J. B. On the two-dimensional contact problem of a rigid cylinder, pressed between two elastic layers. *Mechanics research communications.* 1974. Vol. 1. P. 15–20.
279. Aliofkhazraei M. Nanocoatings: Size Effect in Nanostructured Films. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 251 p.
280. Amonton G. De la resistance caus´e dans le machines. Histoire de l'Acad´emie Royale des Sciences avec les Memoires de Mathematique et de Physique. 1699.
281. Atkinson C. Cracks in bimaterial interface – An overview. *Proc. 7th Int. Conf. Fract. "Adv. Fract. Res." (ICF7)* (Houston, Tex., 20–24 March, 1989). Vol. 4. Oxford, 1989. P. 3053–3061.
282. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems. *International Journal of Engineering Science.* 1973. **11**, No. 2. P. 243–266.
283. ASM Handbook. Vol. 21. Composites. ASM International, 2001. 2605 p. URL: http://mihd.net/4ivdlt http://depositfiles.com/en/files/353348.
284. Atlas of Stress Strain Curves. Second Edition. ASM Int., 2002. Vol. IV. 816 p.
285. Azoti W., Elmarakbi A. Constitutive modelling of ductile damage matrix reinforced by platelets-like particles with imperfect interfaces. *Application to graphene polymer nanocomposite materials. Compos. Part B Eng.* 2017. 113. P. 55–64.
286. Ballarini R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface. *Engineering Fracture Mechanics.* 1990. **37,** No. 1. P. 1–5.
287. Barber J.R. Elasticity. Dordrecht, Heidelberg, London New York: Springer, 2010. 534 p.
288. Benveniste Y. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys.*

*Solids*. 2006. 54. P. 708–734.

289. Benveniste Y. Models of thin interphases and the effective medium approximation in composite media with curvilinearly anisotropic coated inclusions. *Int. J. Eng. Sci.* 2013. 72. P. 140–154.
290. Benveniste Y., Dvorak G.J., Chen T. Stress fields in composites with coated inclusions. *Mech. Mater.* 1989. 7. P. 305–317.
291. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in tw0-dimensional elasticity. *Mechanics of Materials.* 2001. 33. P. 309–323. URL: https://doi. org/10. 1016/S0167-6636(01)00055-2.
292. Bottomley D.J., Ogino T. Alternative to the Shuttleworth formulation of solid surface stress. *Phys. Rev.* 2001. B 63, 165412.
293. Boussinesq J. Application des potentials ál'étude de l'equilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885.
294. Brito-Santana H., de Medeiros R., Rodriguez-Ramos R., Tita V. Different interface models for calculating the effective properties in piezoelectric composite materials with imperfect fiber–matrix adhesion. *Compos. Struct.* 2016. 151. P. 70–80.
295. Broutman L.J., Krock R.H. Composite Materials. Vol. 5. Broutman L.J. Fracture and fatigue. New York: Academic Press, 1974.
296. Brussat T.R., Westman R.A. A Westergaard-type stress function for line inclusion problem. *Int. J. Solids and Struct.* 1975. Vol. 11, № 6. P. 665–677.
297. Cahn J.W. Interfacial free energy and interfacial stress: the case of an internal interface in solid. *Acta met.* 1989. **37**, No. 3. P. 773–776.
298. Camanho P.P., Matthews F.L. Stress analysis and strength prediction of mechanically fastened joints in FRP: A review. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 1997. 28. P. 529–547.
299. Castañeda P.P., Telega J.J., Gambin B. Nonlinear Homogenization and its Applications to Composites, Polycrystals and Smart Materials. *In Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop*. Warsaw, Poland, 23–26 June 2003. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media, 2006. Volume 170.
300. Cattaneo C. Sur le probleme du contact entre deux corps elastiques. *Proc. Internat. Congr. Math.* Amsterdam, 1954. N 2.

301. Cavalcante M.A.A., Pindera M.-J. Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics – Part I: Framework. *J. Appl. Mech.* 2012. 79. 051006.
302. Chaboche J. Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *Int. J. Plast.* 2001. 17. P. 411–439.
303. Charalambakis N. Homogenization techniques and micromechanics. A survey and perspectives. *Appl. Mech. Rev.* 2010. 63. 030803.
304. Chandra R., Singh S.P., Gupta K. Damping studies in fiber-reinforced composites – A review. *Compos. Struct.* 1999. 46. P. 41–51.
305. Chekina O.G., Keer L.M. Wear-contact problems and modeling of chemical mechanical polishing. *J. Electrochem. Soc.* 1998. Vol. 145, N 6. P. 2100–2106.
306. Cooper E., Warrior N.A. Elastic–plastic material model for finite element analysis of crashworthy composites. *Plast. Rubber Compos.* 2002. 31. P. 262–269.
307. Coulomb Ch.A. Theorie des machines simples. *Memoire de Mathematiques et de Physique de l'Academie Royale. P.* 1785. P. 161–331.
308. Cuenot S., Frétigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev.* 2004. B 69. 165410.
309. Daniel I.M., Ishai O., Daniel I.M., Daniel I. Engineering Mechanics of Composite Materials. New York, NY, USA: Oxford University Press, 1994. Volume 3.
310. Dano M.-L., Gendron G., Picard A. Stress and failure analysis of mechanically fastened joints in composite laminates. *Compos. Struct.* 2000. 50. P. 287–296.
311. Doghri I., Ouaar A. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures – Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *Int. J. Solids Struct.* 2003. 40. P. 1681–1712.
312. Drago A., Pindera M.-J. Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: Macroscopically homogeneous vs periodic microstructures. *Compos. Sci. Technol.* 2007. 67. P. 1243–1263.
313. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. Eshelby formalism for nano-inhomogeneities. *Proc. R. Soc. Lond. **A***. 2005. **461,** No. 2062. P. 3335–3353.

314. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P, and Karihaloo B.L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *J. Mech. Phys. Solids*. 2005. 53. P. 1574–1596.
315. Dvorak G.J., Bahei-El-Din Y. Plasticity analysis of fibrous composites. *J. Appl. Mech.* 1982. 49. P. 327–335.
316. Dvorak G.J., Benveniste Y. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *A Math. Phys. Eng. Sci.* London, 1992. 437. P. 291–310.
317. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano-and microscales considering surface effects. *Acta Mechanica.* 2016. 227 (1). P. 29–42.
318. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Soc. Lond. A: Math. Phys. Eng. Sci.* 1957. 241 (1226). P. 376–396. URL: http://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133
319. Eshelby J.D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc. R. Soc.* London, 1959. A 252. P. 561–569.
320. Espinosa-Almeyda Y., Camacho-Montes H., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R., López-Realpozo J.C., Bravo-Castillero J., Sabina F.J. Influence of imperfect interface and fiber distribution on the antiplane effective magneto-electro-elastic properties for fiber reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.* 2017. 112. P. 155–168.
321. Fish J., Belsky V. Multi-grid method for periodic heterogeneous media. Part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1995. 126. P. 17–38.
322. Feingold A., Mirza S., Malhotra R.N. Photoelastic study of stress concentration in rectangular panels with inserts. *Proc. Int. Symp Exp. Mech. Res. and Develop.* (Waterloo, 1972). Waterloo, 1973. P. 821–837.
323. Fromme J.A., Golberg M.A. Numerical solution of a class of integral equations arising in two-dimensional aerodynamics. *J. Optim. Theory and Appl.* 1978 **24**, No. 1. P. 169–206.
324. Gautesen A.K. The interface crack in a tension field: an eigenvalue problem for the gap. International Journal of Fracture. 1992. Vol. 55 P. 580–586.
325. Gdoutos E.E. Failure of a composite with a rigid fiber inclusion *Acta mech.* 1981. 39, No. 3–4. P. 251–262.

326. Ghoniem N.M., Busso E.P., Kioussis N., Huang H. Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics : An overview. Phil. Mag. 2003. 83, 31. P. 3475–3528.

327. Ghosh S., Lee K., Raghavan P. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *Int. J. Solids Struct.* 2001. 38. P. 2335–2385.

328. Gladwell G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. 716 p.

329. Gladwell G.M. On inclusions at a bi-material elastic interface. *Journal of Elasticity*. 1999. **54**, No. 1. P. 27–41.

330. Gladwell G.M.L. The contact problem for a rigid cylinder pressed between two elastic layers. *J. Appl. Mech.* 1977. Vol. 44. P. 36–40.

331. Gladwell G.M.L. The contact problem for a rigid inclusion pressed between two dissimilar elastic half planed. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics.* 1981. **48**, No. 1. P. 104–108.

332. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure. *Acta Mater*. 2000. 48. P. 1–29.

333. Golberg M.A. Solution methods of Integral Equation: Theory and Applications. New York–London: Academic Press, 1979. 350 p.

334. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology. Series: Solid Mechanics and Its Applications. Springer, 1998. Vol. 61, **XIV**. 346 p.

335. Goryacheva I.G., Sadeghi F. Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate. *Wear.* 1995. Vol. 184. P. 125–132.

336. Goryacheva I.G., Sadeghi F., Xu C. Viscoelastic effects in lubricated contacts. *Wear.* 1996. Vol. 198, N 1. P. 307–312.

337. Govorukha V., Kamlah M., Loboda V., Lapusta Y. Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks. *Series : Lecture Notes in Applied and Computation Mechanics*. Springer. 2017. 235 p.

338. Greenwood J.A., Tabor D. The friction of hard sliders on lubricated rubber: The importance of deformation losses. *Proc. Phys. Soc.* 1958. Vol. 71. P. 989.

339. Greenwood J.A., Williamson J.B.R. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. R. Soc.* London, 1966. Ser. A, A316. P. 309–319.

340. Grujicic M., He T., Marvi H., Cheeseman B.A., Yen C.F. A comparative investigation of the use of laminate-level meso-scale and fracture-mechanics-enriched meso-scale composite-material models in ballistic-resistance analyses. *J. Mater. Sci.* 2010. 45. P. 3136–3150.
341. Guo J.-G., Zhao Y.-P. The size-depended elastic properties of nanofilms with surface effects. *J. Appl. Phys.* 2005. 98, 7. P. 074306–11.
342. Gurtin M.E., Murdoch, A.I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1975. 57**.** P. 291–323.
343. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface Stress in Solids. *Int. J. Solids Struct.* 1978. **14** (6). P. 431–440.
344. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. Mechanical models for nanomaterials / in: Sattler K. D. (eds). Handbook of Nanophysics. Vol. 1. Principles and Methods. CRC Press, 2010. 24-1–11.
345. Härkengård G. A finite element analysis of elastic-plastic plates containing cavities and inclusions with reference to fatigue crack initiation. *International Journal of Fracture.* 1973. **9**, No. 4. P. 437–447.
346. Harrysson Anders, Ristinmaa Matti. Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. 45. P. 3334–3352.
347. Han J., Hoa S. A three-dimensional multilayer composite finite element for stress analysis of composite laminates. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1993. 36. 3903–3914.
348. Hashin Z. Analysis of composite materials—A survey. *J. Appl. Mech.* 1983. 50. P. 481–505.
349. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 2002. 50. P. 2509–2537.
350. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber reinforced composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials.* 1990. **8**. P. 333–348.
351. Hashin Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *J. Mech. Phys. Solids.* 1991. 39. P. 745–762.
352. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1881. Bd. 92. P. 156–171.
353. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte. Verwandlungen des Vereine zur Beforderung des Gewerbefleisses. Berlin, 1882.

354. Hettich T., Hund A., Ramm E. Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2008. 197. P. 414–424.
355. Hills D.A., Nowell D. Mechanics of fretting fatigue. Dordrecht etc.: Kluwer, 1994. 236 p.
356. Hills D.A, Nowell D., Sackfield A. Mechanics of elastic contact. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993. 238 p.
357. Hills D.A., Sosa G. Origins of partial slip in fretting - a review of known and potential solutions. *J. Strain Anal.* 1999. Vol. 34, N 3. P. 175–181.
358. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. 13. P. 213–222.
359. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*. 1963. 11. P. 357–372.
360. Hill R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*. 1964. 12. P. 199–212.
361. Hisakado T. On the mechanism of contact between solid surfaces. *Bull. ASME.* 1969. Vol. 12, N 54. P. 1528–1549.
362. Hoang T.H., Guerich M., Yvonnet J. Determining the Size of RVE for Nonlinear Random Composites in an Incremental Computational Homogenization Framework. *J. Eng. Mech.* 2016. 142. 04016018.
363. Huang J.H., Furuhashi R., Mura T. Frictional sliding inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. 41. P. 247–265.
364. Huber M.T. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. *Annalen der Physic.* 1914. V. 14, N 1. P. 153–163.
365. Huber M.T., Fuchs S. Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder. *Physikalische Zeitschrift.* 1914. V. 15, N 6. P. 298–303.
366. Jiang T., Shao J.F. On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization. *Comput. Mater. Sci.* 2009. 46. P. 447–451.
367. Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University press, 1985.
*Переклад* : Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва : Мир, 1989. 510 с.

368. Johnson K.L. Mechanics of adhesion. *Tribol. Intern.* 1998. Vol. 31, N 8. P. 413–418.
369. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic wavy surfaces. *Intern. J. Mech. Sci.* 1985. Vol. 27, N 6. P. 383– 396.
370. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. Roy. Soc.* London, 1971. A. Vol. 324. P. 301–313.
371. Jones F.R. A Review of Interphase Formation and Design in Fibre-Reinforced Composites. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2010. 24. P. 171–202.
372. Kalamkarov A.L., Andrianov I.V., Danishevsâ V.V. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Appl. Mech. Rev.* 2009. 62. 030802.
373. Kalker J.J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik.* 1977. Vol. 57. P. 3–17.
374. Kalker J.J. On elastic line contact. *J. Appl. Mech.* 1972. Vol. 39. P. 1125–1132.
375. Kalker J.J. Rolling with slip and in the presence of dry friction. *Wear.* 1966. Vol. 9. P. 20.
376. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990. 314 p.
377. Kalker J.J. Transient phenomena in two elastic cylinders rolling over each other with dry friction. *J. of Applied Mech. ASME.* 1970. P. 677–688.
378. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction. *ASME. J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. P. 666–679.
379. Kalker J.J., Van Randen V.A. A minimum principle for frictionless elastic contact. *J. Eng. Math.* 1972. Vol. 6, N 2. P. 193–206.
380. Kanouté P., Boso D.P., Chaboche J.L., Schrefler B.A. Multiscale Methods for Composites: A Review. *Arch. Comput. Methods Eng.* 2009. 16. P. 31–75.
381. Kant T., Swaminathan K. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—A selective review and survey of current developments. *Compos. Struct.* 2000. 49. P. 65–75.
382. Kharun I.V., Loboda V.V. A set of interface crack with contact zone in combined tension-shear field. *Arch. Mech.* 2003. Vol. 166. P. 43–56.

383. Khludnev A.M. and Leugering G.R. Delaminated thin elastic inclusions inside elastic bodies. *Mathematics and Mech. Complex Systems*. 2014. **2**, № 1. 24 p.
384. Kim C.I., Schiavone, P., Ru C.Q. The Effects of Surface Elasticity on Mode-III Interface Crack. *Arch. Mech.* 2011. 63 (3). P. 267–286.
385. Kizler P., Uhlmann D., Schmauder S. Linking nanoscale and macroscale: calculation of the change in crack growth resistance of steels with different states of Cu precipitation using a modification of stress–strain curves owing to dislocation theory. *Nuclear Engineering and Design*. 2000. **196,** 2. P. 175–183. URL: http://dx. doi. org/10. 1016/ S0029-5493(99)00219-8 .
386. Kojic M., Bathe K.-J. Inelastic Analysis of Solids and Structures. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. XI. 418 p.
387. Kushch V.I., Shmegera S.V., Buryachenko V.A. Interacting elliptic inclusions by the method of complex potentials. *Int. J. Solids Struct.* 2005**. 42**, No. 20. P. 5491–5512. URL: https://doi. org/10. 1016/j. ijsolstr. 2005. 02. 035 .
388. Leite L.G.S., Venturini W.S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft inclusions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2005. **29,** No. 3. P. 257–267.
389. Li S., Gao X.-L. Handbook of micromechanics and nanomechanics. CRC Press, 2013. 1256 p.
390. Liu C.C., Met P.B. Stiction at the Winchester head-disk interface. *IEEE Trans. Magnetics*. 1983. Vol. 19, N 5. P. 1659–1661.
391. Liu P.F., Zheng J.Y. Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review. *Mater. Des.* 2010. 31. P. 3825–3834.
392. Liu Y.J., Nishimura N., Otani Y., Takahashi T., Chen X.L., Munakata H. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2005. **72**. P. 115–128.
393. Lo C.C. Elastic contact of rough cylinders. *Int. J. Mech. Sci.* 1969. Vol. 11. P. 105–115.
394. Loo, Tsu-Tao. Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact. *J. Appl. Mech.* 1958. Vol. 25. P. 122–124.

395. Lundberg G., Sjövall H. Stress and deformation in elastic contacts. Göteborg: Chalmers Solid Mechanics, 1958. 58 p.
396. Mao K., Bell T., Sun Y. Effect of sliding friction on contact stresses for multi-layered elastic bodies with rough surfaces. *ASME. J. Tribol.* 1997. Vol. 119. P. 476–480.
397. Matouš K., Geers M.G.D., Kouznetsova V.G., Gillman A. A review of predictive nonlinear theories for multiscale modeling of heterogeneous materials. *J. Comput. Phys.* 2017. 330. P. 192–220.
398. Maugis D. On the contact and adhesion of rough surface. *J. Adhesion Sci. and Technol.* 1996. Vol. 10. P. 161–175.
399. McCool J.I. Comparison of models for the contact of rough surfaces. *Wear.* 1986. Vol. 107. P. 37–60.
400. Medikonda S., Tabiei A., Hamm R. A comparative study of the effect of representative volume cell (RVC) boundary conditions on the elastic properties of a micromechanics based unidirectional composite material model. *Int. J. Compos. Mater*. 2017. 7. P. 51–71.
401. Meguid S.A., Hu G.D. A new finite element for treating plane thermomechanical heterogeneous solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. **44**, No. 4. P. 567–585.
402. Military Handbook. Metallic Materials and Elements for Aerospase Vehicle Structures. MIL-HDBK-5H. 1998. AMSC N/A. FSC 1560. 2530. Wright-Patterson AFB. OH. 45433-7101.
403. Miller R.E. and V.B. Shenoy. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotech.* 2000. 11. P. 139–147.
404. Miloh T. and Benveniste Y. On the effective conductivity of composites with ellipsoidal inhomogeneities and highly conducting interfaces. *Proc. R. Soc.* London, 1999. A. 455. P. 2687–2706.
405. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *J. of Applied Mech.* 1949. Vol. 16. N3. P. 259–268.
406. Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pękania w złożonych stanach obciążeń / pod red. A. Seweryna. Białystok: W-wo Politechniki Białostockiej, 2004. 280 s.
407. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 1973. 21. P. 571–574.

408. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids : second ed. Dordrecht, Netherlands : Martinus Nijhoff, 1987. 601 p.
409. Nahirnyj T., Tchervinka K. Near-surface mass defect in models of locally heterogeneous solid mechanics. *Acta Mechanica et Automatica*. vol. 13 no. 3. P.205–210. DOI 10.2478/ama-2019-0027
410. Nemat-Nasser S., Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials : 2nd edn. Amsterdam: Elsevier, 1999. 810 p.
411. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface crack in anisotropicdissimilar materials: an analytical solution. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 1991. Vol. 39 (1). P. 113–144.
412. Ochoa O.O., Reddy J.N. Finite Element Analysis of Composite Laminates. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media, 2013. Volume 7.
413. Oller S. Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2014.
414. Pauk V. Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych. Kielce: Politechnika świętokrzyska, 2005. 160 s.
415. Pauk V., Zastrau B. 2D rolling contact problem involving frictional heating. *Int. J. Mech. Sci.* 2002. Vol. 44. P. 2573–2584.
416. Peng X., Tang S., Hu N., Han J. Determination of the Eshelby tensor in mean-field schemes for evaluation of mechanical properties of elastoplastic composites. *Int. J. Plast.* 2016. 76. P. 147–165.
417. Pettermann H., Plankensteiner A.F., Böhm H.J., Rammerstorfer F.G. A thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental Mori–Tanaka approach. *Comput. Struct.* 1999. 71. P. 197–214.
418. Pindera M.-J., Khatam H., Drago A.S., Bansal Y. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. *Compos. Part B Eng.* 2009. 40. P. 349–378.
419. Piskozub Y.Z., Sulym H.T. Modeling of deformation of the bimaterial with thin Non-linear interface inclusion. *Researches in mathematics and mechanics*. 2020/ 25**,** № 2 (36). P. 40–54.
420. Piskozub J.Z. Effect of surface stresses on the tensely deformed state of thin interface microinclusion. *Mathematical modeling and computing*. 2021. 8, №1. P. 69–77.

421. Poritsky H. Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact. *J. Appl. Mech.* 1950. Vol. 17. N 2.
422. Povstenko Y.Z. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface-tension in solids. *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. 41. P. 1499–1514. URL: https://doi. org/10. 1016/0022-5096(93)90037-G .
423. Reddy J. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*. 1987. 3. P. 173–180.
424. Reynolds O. On rolling friction. *Philos Trans. Roy. Soc.* London, 1876. Vol. 166. P. 155–175.
425. Ru C.Q., Schiavone P. On the elliptic inclusion in anti plane shear. *Mathematics and Mechanics of Solids.* 1996. **1**, No. 3. P. 327–333.
426. Sackfield A., Hills D.A. A note on the Hertz contact problem – a correlation of standard formulae. *IMechE Journal of Strain Analysis.* 1983. Vol 18. No 3. P. 195–197.
427. Sang Jianbing, Xing Sufang, Wang Ling, Wang Jingyuan, Zhou Jing. Analysis of the nonlinear elastic response of rubber membrane with embedded circular rigid inclusion. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* Sofia, 2015. vol. 45, No. 3. P. 23–36.
428. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. Vii. Vol. VII. 510 p.
429. Seabra J., Berthe D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the Hertzian contact. *ASME. J. Tribol.* 1987. Vol. 109, N 3. P. 462–470.
430. Selvadurai A.P.S. An inclusion at a bi-material elastic interface. *Journal of Engineering Mathematics.* 2000. **37**, No. 1–3. P. 155–170.
431. Schmauder S., Mishnaevsky L. Micromechanics and Nanosimulation of Metals and Composites: Advanced Methods and Theoretical Concepts. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 420 p.
432. Sheveleva A., Lapusta Y., Loboda V. Opening and contact zones of an interface crack in a piezoelectric biomaterial under combined compressive-shear loading. *Mechanics Research Communications.* 2015. Vol. 63. P. 6–12.
433. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby’s Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface/Interface Energies. *ASME J. Appl. Mech.* 2004. **71** (5). P. 663–671. URL: https://doi. org/10. 1115/1. 1781177.

434. Sharma P., Ganti S., Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities. *Appl. Phys. Lett.* 2003. 82. P. 535–537. URL: https://doi. org/10. 1063/1. 1539929 .
435. Shuttleworth, R. The Surface Tension of Solids. *Proc. Phys. Soc. Sect. A*. 1950. 63. P. 444.
436. Sih G.C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions. Developments in mechanics. vol. 3. Pt. 1. : *Solid Mech. and Mater.* New York-Wiley, 1965. P. 61–79.
437. Steigmann D.J., Ogden R.W. Elastic surface-substrate interactions. *Proc. Roy. Soc.* London, 1999. 455. P. 437–474. URL: https://doi. org/10. 1098/rspa. 1999. 0320.
438. Sulim G.T. Concentration of stresses near thin-walled linear inclusions. *Prikl. Mekh.* 1981. 17, No. I I. P. 82–89.
439. Sulim G.T., Piskozub I.Z. Temperature gradient distribution in the vicinity of a thin thermal active insert. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1987. 53, № 4. P. 670.
440. Sulim G.T., Piskozub J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2008. 61. P. 315–337. URL: https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3 .
441. Sulym G.T. Jump Junction method in fracture mechanics. *Fracture mechanics, successes and problems* : Collection of Abstracts. Part 1. (ISF–8, Kiev, 8–14. 06.1993). Lviv, 1993. P. 100–101.
442. Sulym H., Pasternak Ia., Pasternak R. Boundary element analysis of multifield materials. *Scientific Thesis*. No 274. Library of Mechanics. Bialystok: Printing House of Białystok University of Technology. 2015. 172 p.
443. Sulym H.T., Piskozub I.Z. Nonlinear deformation of a thin interface inclusion. *Materials Science*. 2018. **53**, No. 5. P. 600–608. (Ukrainian Original : 2017. Vol. 53, No. 5.). URL: https://doi.org/10.1007/s11003-018-0114-2
444. Sulym H.T., Piskozub J.Z. Conditions of contact interaction : a survey. *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya*. 2004. **47**, No. 3. P.110–125.
445. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account

of friction. I. Single loading. *Acta Mechanica et Automatica.* 2015. **9**, No 2. P. 115–121. URL: https://doi. org/10. 1515/ama-2015-0020 .

446. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and Cyclic loading. *Acta Mechanica et Automatica.* 2015**.** 9, No 3. P. 178–185.
447. Sulym H., Pasternak Ia., Piskozub L., Piskozub Y. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 2015. **54**, No 2. P. 529–539. URL: https://doi. org/10. 15632/jtam-pl. 54. 2. 529.
448. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018. 12, № 3. P. 190–195. URL: https://doi.10.2478/ama-2018-0029 .
449. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problems for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 1999. **37**, No. 1. P. 47–63.
450. Sun C.T., Chen J.L. A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites. *Compos. Sci. Technol.* 1991. 40. P. 115–129.
451. Sylovanyuk V.P., Revenko A.V. Influence of creep of the material of inclusions on the stress concentration in the body. *Materials Science.* 2009. Vol. 45, Issue 4. P. 555–561.
452. Tabor D. Surface forces and surface interactions. *J. Colloid and Interface Sci.* 1977. Vol. 58, N 1. P. 2–13.
453. Tan H., Huang Y., Liu C., Geubelle P.H. The Mori–Tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *Int. J. Plast.* 2005. 21. P. 1890–1918.
454. Tchalla A., Azoti W. L., Koutsawa Y., Makradi A., Belouettar S., Zahrouni H. Incremental mean-fields micromechanics scheme for non-linear response of ductile damaged composite materials. *Compos. Part B Eng.* 2015. 69. P. 169–180.
455. Teng H. A New Incremental Formulation of Elastic–Plastic Deformation of Two-Phase Particulate Composite Materials. *J. Appl. Mech.* 2014. 81. 061006.

456. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. On the numerical solution of Cauchy-type singular integral equations and the determination of stress-intensity factors in case of complex singularities. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).* 1977. **28**, No. 6. P. 1085–1098.
457. Telles J.C.F. The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1983. 245 p.
458. Tolson S., Zabaras N. Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates. *Comput. Struct.* 1991. 38. P. 361–376.
459. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *J. Compos. Mater.* 1971. 5. P. 58–80.
460. Vaysfeld N., Popov G.Ya. The torsion of the conical layered elastic cone. *Acta Mechanica*. 2013. DOI10.1007/s00707-013-0957-4.
461. Voyiadjis G.Z., Ju J.-W. Inelasticity and Micromechanics of Metal Matrix Composites. Amsterdam, The Netherlands : Elsevier, 2013.
462. Wang J. Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proc. Roy. Soc.* London. A 462. P. 1355–1363. URL: https://doi. org/10. 1098/rspa. 2005. 1637.
463. Wang J. et al. Eshelby formalism for nano-inhomogeneities. *Proc. Roy. Soc.* London. 2005. A 461. P. 3335–3353.
464. Wang J., Karihaloo B.L., Duan H.L. Nano-mechanics or how to extend continuum mechanics to nano-scale. *J. Bulletin of the Polish academy of sciences. Technical sciences.* 2007. **55**, No. 2. P. 133–140.
465. Wang Xu, Schiavone P. A mode III interface crack with surface strain gradient elasticity. *Journal of integral equations and applications.* 2016. **28**, No 1. P. 123–148. URL: https://doi. org/10. 1216/JIE-2016-28-1-123 .
466. Wang Yanchao, ZhengMing Huang. Analytical Micromechanics Models for Elastoplastic Behavior of Long Fibrous Composites: A Critical Review and Comparative Study. *Materials.* 2018. 11. 1919. P. 1–55.
467. Wang Y., Huang Z. A Review of Analytical Micromechanics Models on Composite Elastoplastic Behaviour. *Procedia Eng.* 2017. 173. P. 1283–1290.
468. Wolfe W.E. Nanophisics and nanotechnology: an introduction to modern concepts in nanoscience. John Wiley & Sons, 2006. 292 p.

469. Wolfe W.E., Butalia T.S. A strain-energy based failure criterion for non-linear analysis of composite laminates subjected to biaxial loading. *Compos. Sci. Technol.* 1998. 58. P. 1107–1124.
470. Wu L., Adam L., Doghri I., Noels L. An incremental-secant mean-field homogenization method with second statistical moments for elasto-visco-plastic composite materials. *Mech. Mater.* 2017. 114. P. 180–200.
471. Wu L., Noels L., Adam L., Doghri I. A combined incremental-secant mean-field homogenization scheme with per-phase residual strains for elasto-plastic composites. *Int. J. Plast.* 2013. 51. P. 80–102.
472. Yao Z., Huang Z.-M. Stress concentration factors in the matrix with different imperfect interfaces. *Int. J. Damage Mech.* 2014. 23. P. 745–771.
473. Yu H. A new dislocation-like model for imperfect interfaces and their effect on load transfer. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 1998. 29. P. 1057–1062.
474. Y. Piskozub, H. Sulym, J. Polanski. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Matherials*. (June 4–8, 2017). Augustow, Poland: Proceedings. 2017. P. 115–121.
475. Zaoui A. Continuum micromechanics: Survey. *J. Eng. Mech.* 2002. 128, 8. P. 1–7.
476. Zhang L., Yu W. Variational asymptotic homogenization of elastoplastic composites. *Compos. Struct.* 2015. 133. P. 947–958.
477. Zhao J., Li H., Cheng G., Cai Y. On predicting the effective elastic properties of polymer nanocomposites by novel numerical implementation of asymptotic homogenization method. *Compos. Struct.* 2016. 135. P. 297–305.
478. Zhuk Y.A., Guz I.A. Dissipative Heating of Thin-Wall Structures Containing Piezoactive Layers / in Hetnarski R.B. (Ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses.* Dordrecht, Heidelberg, NewYork, London: Springer, 2014. Vol D. P. 971–985.
479. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *J. Acoust. Soc. Am. (JASA).* 2012. Vol. 132, No. 4. P. 2189–2197.

# ДОДАТОК А – СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Web of Science ResearcherID V-6509-2019
https://orcid.org/0000-0001-7978-4052
Scopus Author ID: 5673709 6500

**Публікації в іноземних виданнях (Web of Science, Scopus)**

1. Sulim G.T., Piskozub J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions. *Journal of Engineering Mathematics. Special Issue Thermomechanics*. 2008. 61. P. 315–337. URL: https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3
2. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. I. Single loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 2015. **9**, № 2. P. 115–121. URL: https://doi.org/10.1515/ama-2015-0020
3. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Y., and Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and Cyclic loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 2015. **9**, № 3. P. 178–185. URL: https://doi.org/10.1515/ama-2015-0030
4. Sulym H., Pasternak Ia., Piskozub L., Piskozub Y. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack. *J. Theoretic. and Appl. Mech.* 2015. **54**, № 2. P. 529–539. URL: https://doi: 10.15632/jtam-pl.54.2.529
5. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2018. 12, № 3. P. 190–195. URL: https://doi.10.2478/ama-2018-0029

**Публікації у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Web of Science, Scopus та є науковими фаховими виданнями України**


6. Piskozub I.Z., Sulym H.T. Asymptotics of stresses in the vicinity of a thin elastic interphase inclusion. *Materials Science*. 1996. **32,** No. 4. P. 421–432. URL: https://doi.org/10.1007/BF02538967
Те саме: Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1996. 32, № 4. С. 39–48.
7. Sulym H.T., Piskozub I.Z. Nonlinear Deformation of a Thin Interface Inclusion. *Materials Science*. 2018. 53, № 5. С. 600–608. URL: https://doi.org/10.1007/s11003-018-0114-2
Те саме: Сулим Г. Т., Піскозуб Й.З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017. 53, № 5. С. 24–30.
8. Sulym H.T., Piskozub J.Z. Conditions of contact interaction (a survey). *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya*. 2004. **47**, No. 3. P. 110–125.
Те саме: Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл : огляд. *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* 2004. 47, № 3. С. 110–125.
9. Kolesov V.S., Piskozub I.Z. The influence of a spherical defect on the temperature field in a half-space under local heating. *Journal of Mathematical Sciences*. Volume 86, Issue 2. 1997. P. 2561–2564. URL: https://doi.org/10.1007/BF02356097
Те саме: Колесов В.С., Пискозуб И.З. Влияние сферического дефекта на температурное поле в полупространстве при локальном нагреве. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 1996. 39, № 1. С. 47–50.
10. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив поверхневих напружень на антиплоский напружено-деформований стан тонкого стрічкового

міжфазного включення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. 63, № 2. С. 98–108.

11. Piskozub J.Z. Effect of surface stresses on the tensely deformed state of thin interface microinclusion. *Mathematical modeling and computing*. 2021. 8, № 1. P. 69–77.

**Публікації у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Copernicus та є науковими фаховими виданнями України**

12. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Антиплоска деформація біматеріалу з фізично нелінійним міжфазним тонким включенням. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 319–327.

**Публікації у наукових фахових виданнях України**

13. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г. Термонапружений стан кусково-однорідного середовища з тонкими міжфазними включеннями. *Крайові задачі термомеханіки :* збірник. Київ: Ін-т мат. НАН України. 1996. Ч. 2. С.64–68.
14. Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. 24. С. 73–85.
15. Піскозуб Й.З. Врахування часткового відшарування пружного міжфазного тонкого включення в умовах поздовжнього зсуву біматеріалу. *Прикладні проблеми механіки та математики.* 2020. 17. С. 162–167.
16. Piskozub Y.Z., Sulym H.T. Modeling of deformation of the bimaterial with thin Non-linear interface inclusion. *Researches in mathematics and mechanics*. 2020. 25, №2 (36). P. 40–54.

## Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

***Публікації у фахових виданнях для спеціальності «Математика»***

17. Божидарник В.В., Піскозуб Й.З., Попіна С.Ю., Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах із стохастичними теплопровідними тріщинами. *Вісник Львівського політехнічного ін-ту. 251. Диференціальні рівняння та їх застосування.* Львів. 1991. С. 9–15.

***Публікації у фахових виданнях для технічних наук***

18. Піскозуб Л.Г., Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Поздовжній зсув біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Вісник Тернопільського національного технічного університету.* 2015. № 1 (77). С. 97–108.
19. Бернацек В.В., Піскозуб Й.З. Моделювання деформаційних явищ процесу каширування. *Кваліологія книги.* 2011. №1 (19). С.100–109.

***Публікації у інших наукових періодичних виданнях***

20. Сулим Г.Т., Оліярник Н.Р., Піскозуб Й.З., Пастернак Я.М. Поздовжній зсув біматеріального бруса з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки : спецвипуск.* 2015. С. 251–254.
21. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Фізично нелінійне деформування тонкого міжфазного включення за умов антиплоскої задачі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2019. Вип. 28, 29. С. 42–54.
22. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. *Ред. журн. "Инженерно-физический журнал".* Минск, 1986. 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 12 мая 1987 г. № 3396-В87 Деп.

    *Переклад:* Sulim G. T., Piskozub I. Z. Temperature gradient distribution in the vicinity of a thin thermal active insert. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1987. 53, № 4. P. 670.

**Праці апробаційного характеру**

23. Піскозуб Й. Моделювання тонкої багатошарової міжфазної неоднорідності у біматеріалі за умов поздовжнього зсуву. 15-*й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : матеріали симпозіуму. (Львів, 20–21 травня 2021 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2021. С. 44–45.
24. Sulym H., Piskozub Y., Polanski J. Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion. 9th International symposium on Mechanics of Materials and Structures & 2nd International Conference on Advances in Micromechanics of Materials. (June 4–8, 2017, Augustow, Poland) : Proceedings. 2017. P. 115–121.
25. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з пружно-пластичним міжфазним тонким включенням. Тринадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові : матеріали симпозіуму. (Львів, 18–19 травня 2017 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2017. С. 50–52.
26. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Інкрементальний підхід до розв’язування задач деформування тонких фізично нелінійних включень. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки та математики :* збірник наукових праць (матер. міжн. наук. конф. Львів, 22–25 травня 2018 року). Львів, 2018. Т. 2. С. 98–99.
27. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Моделювання нелінійної контактної взаємодії тіл. *Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент :* матеріали Міжнародної наукової конференції. (м. Львів, 17–18 вересня 2018 року). Львів: Растр–7, 2018. С. 18–20.
28. Піскозуб Й.З. Неідеальна взаємодія пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. VI Polish-Ukrainian Science Conference *Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media*. (Warsaw, 6–10 September 2005). P. 102.

29. Піскозуб Й.З. Моделювання ускладненої взаємодії пружного тонкого міжфазного включення з середовищем. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки* (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). (Львів, 5–8 грудня 2005 року). Львів. С. 74–75.
30. Гембара В.М., Огірко І.В., Піскозуб Й.З. Дослідження напружень і деформацій в друкарських формах ротаційних поліграфічних машин. *1-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові* : тез. доп. (Львів, 18–20 травня, 1993 р.). С. 195.
31. Піскозуб Й.З. Вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : матеріали 2-го Між народного симпозіуму (Львів–Дубляни, 7–10 жовтня, 1996 р.). С. 107–108.
32. Піскозуб Й.З. Моделювання впливу реологічних факторів на якість фарбовідбитків. Міжнародна науково-практична конференція *Кваліологія книги* : доповіді й повідомлення. (Львів, 23–25 жовтня, 1996 р.). С. 32.
33. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Математичне моделювання впливу гідродинамічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту друкарських циліндрів. *ДРУКОТЕХН-96. Комп'ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи :* наукові праці конференції. (Львів, 16–18 жовтня, 1996 р.). С. 96–97.
34. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Вплив реологічних чинників на напружено-деформований стан в зоні контакту в друкарських процесах. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки і математики.* (Львів, 25–28 травня 1998 р.). С. 112–113.
35. Піскозуб Й.З. Вплив реологічних факторів на якість друкування. П'ятий українсько-польський науковий симпозіум *Актуальні задачі механіки неоднорідних структур :* тези доповідей. (Львів-Луцьк, вересень 18–23, 2003). С. 65–66.

36. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Компенсаційний вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками. Всеукраїнська наукова конференція *Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, листопад 2–5, 2004). С. 82.
37. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація термосилового навантаження в кусково-однорідному середовищі з теплоактивними прошарками. Міжнародна наукова конференція *Сучасні проблеми механіки :* тези доповідей. (Львів, 7–9 грудня 2009). Львів. С. 31.
38. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Антиплоска деформація масиву з тонкими міжфазними прошарками при урахуванні тертя. *Сучасні проблеми механіки та математики* : в 3-х т. / під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. (Львів, 21–25 травня 2013 року). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 2. С. 111.
39. Сулим Г., Піскозуб Л., Піскозуб Й. Дисипація енергії при циклічному зсувному навантаженні біматеріалу з міжфазними дефектами контакту з урахуванням тертя. 4-а Міжнародна науково-технічна конференція *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій ISUMEL_12* : тези доповідей. (Львів, 30–31 жовтня 2014 року). Львів: КІНПАТРІ ЛТД. 2014. С. 51.
40. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням за їхнього фрикційного контакту. *Сучасні проблеми термомеханіки* : тези доповідей Міжнародної наукової конференції (Львів, 22–24 вересня 2016). Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2016. С. 235–236.
41. Сулим Г., Піскозуб Й., Піскозуб Л. Поздовжній зсув біматеріалу з тонким міжфазним нелінійно пружним включенням при циклічному

зсувному навантаженні. *Теорія та практика раціонального виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій.* 5-а Міжнародна науково-технічна конференція : Тези доповідей (Львів, 27–28 жовтня 2016 р.). Львів, С. 53–54.

42. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Двухчленное асимптотическое представление напряжений в окрестности торцов тонкого межфазного упругого включения. *Механика разрушения материалов* : тез. докл. I Всесоюз. конф. (Львов, 20–22 октября 1987 года). С. 150.
43. Пискозуб И.З. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах квазистационарной термоупругости для кусочнооднородных тел с тонкими дефектами. *Механика неоднородных структур:* тезисы докладов 2 Всесоюзной конференции. (Львов, 2–4 сентября 1987 года). Львов, 1987. С. 209–210.
44. Божидарник В.В., Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Термоупругое равновесие кусочно-однородной среды при наличии зон тепловыделения на границе раздела компонент. *Современные проблемы теории контактных взаимодействий*: материалы выездного заседания Научного Совета АН СССР по трению и смазкам. Луцк, 1987. С. 58–59.
45. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. О термоупругом деформировании кусочно-однородных тел с тонкими дефектами. *Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.* Республиканская научная конференция: тезисы докладов. (Одесса, 22–24 сентября 1987 г.). Одесса, 1987. С. 105–106.
46. Пискозуб И.З., Гембара В.М. Двумерная задача термоупругости для тела с линейной неоднородностью и зависящими от температуры физико-механическими характеристиками. *Нелинейные задачи расчета конструкций в условиях высоких температур*. Всесоюзная конференция: тезисы докладов. (Саратов, 7–9 июня, 1988 г.). Ч. 3. С. 78.

47. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Асимптотическое распределение поля напряжений в окрестности концов тонкого дефекта на границе раздела материалов. *Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций.* 1-й Всесоюзный симпозиум : тезисы докладов. (Ужгород, 21–23 сентября, 1988 г.). С. 70.

48. Пискозуб И.З. Решение системы СИУ второго рода с разрывными коэффициентами для задачи термоупругого равновесия кусочно-однородной среды с тонкими прослойками. IV Всесоюзная конференция *Смешанные задачи механики деформируемого тела* : тезисы докладов. (Одесса, 26–29 сентября 1989 г.). Ч. 2. С. 54.

49. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. До питання про асимптотику полів температури та напружень в околі кінців пружного лінійного теплоактивного дефекту на межі розділу середовищ. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УПІ* : тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 1993 року). Львів, 1993. Вип. 1. С. 115.

50. Піскозуб Й. З. Моделювання впливу реологічних факторів на напружено-деформований стан в зоні контакту при друкуванні. *Звітна науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 28–31 січня 1997 року). Львів, 1997. Вип. 3. С. 99.

51. Піскозуб Й. З., Піскозуб Л. Г. Вплив дефектності границь розділу фаз на термо-, електрофізичний стан неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2007 року). Львів, 2007. С. 104.

52. Піскозуб Й.З. Особливості термоелектропружного стану неоднорідних тіл. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 3–6 лютого 2009 року). Львів, 2009. С. 74.

53. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Оптимізація навантаження неоднорідного тіла з тонкими дефектами термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 2–5 лютого 2010 року). Львів, 2010. С. 104.
54. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в шаруватому тілі з дефектами границь під навантаженням термосиловими чинниками. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 1–4 лютого 2011 року). Львів, 2011. С. 122.
55. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Розсіяння енергії в тілі з включеннями при проковзуванні з тертям на границях контакту. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 5–8 лютого 2013 року). Львів, 2013. С. 115.
56. Піскозуб Л.Г., Піскозуб Й.З. Гістерезисні явища при антиплоскому циклічному навантаженні масиву з тріщиною. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 4–7 лютого 2014 року). Львів, 2014. С. 133.
57. Піскозуб Й.З., Піскозуб Л.Г. Дисипація енергії в контактуючій тріщині при поздовжньому зсуві. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 16–20 лютого 2015 року). Львів, 2015. С. 133.
58. Піскозуб Й., Піскозуб Л. Гранично-елементне моделювання тонких дефектів довільної фізичної природи. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 16–19 лютого 2016 року). Львів, 2016. С. 153.

59. Piskozub Y.Z., Piskozub L.G. Deformation of a bimaterial with thin nonlinear elastic inclusion. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 14–17 лютого 2017 року). Львів, 2017. С. 153.
60. Піскозуб Й.З. Ітераційний метод розв’язування нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 27 лютого–2 березня 2018 року). Львів, 2018. С. 144.
61. Піскозуб Й.З. Розсіяння енергії при циклічному деформуванні тонкого міжфазного включення з фізично нелінійного матеріалу. *Науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і аспірантів УАД :* тези доповідей. (Львів, 26 лютого–1 березня 2019 року). Львів,  2019. С. 133.

# ДОДАТОК Б. СХЕМИ НАВАНТАЖУВАННЯ (ЗОВНІШНЯ ЗАДАЧА).

**Випадок №1.** Тривіальний випадок, коли діє лише однорідне нормальне притискувальне навантаження $\sigma_{yy}^{\infty}$ і зсув на безмежності

$$\sigma_{yy}^{0}(z,t)=\sigma_{yy}^{\infty}, \tag{Б.1}$$

$$\sigma_{yzk}^{0}(z,t)=\tau(t), \qquad z\in S_k \ (k=1,2;\, l=3-k). \tag{Б.2}$$

**Випадок №2.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та одна із зсувних сил $Q_2(t)$ у точці $z_2^{*}=id\in S_2$ верхнього півпростору.

$$\sigma_{yy}^{0}(z,t)=\sigma_{yy}^{\infty},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle =\frac{2p_1Q_2(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*2}}=\frac{2p_1dQ_2(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}. \tag{Б.3}$$

**Випадок №3.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та одна із зсувних сил $Q_1(t)$ у точці $z_1^{*}=id\in S_1$ нижнього півпростору.

$$\sigma_{yy}^{0}(z,t)=\sigma_{yy}^{\infty},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle =\frac{2p_2Q_1(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*1}}=-\frac{2p_2dQ_1(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}. \tag{Б.4}$$

**Випадок №4.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та пара збалансованих взаємно протилежних за напрямом зосереджених сил у різних півпросторах $Q_2(t)=-Q_1(t)=Q(t)$ розташованих у симетричних точках $z_2^{*}=-z_1^{*}=id$.

$$\sigma_{yy}^{0}(z,t)=\sigma_{yy}^{\infty},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle =\frac{2Q(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*1}}=-\frac{2dQ(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}. \tag{Б.5}$$

**Випадок №5.** Діє лише однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та дві співнапрямлені зосереджені сили у різних півпросторах $Q_2(t)=Q(t)=Q_1(t),\ z_2^*=id=-z_1^*$.

$$\sigma_{yy}^0(z,t)=\sigma_{yy}^\infty,$$

$$\left\langle\sigma_{yz}^0\left(x,t\right)\right\rangle=\frac{2\left(p_2-p_1\right)Q(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*1}}=-\frac{2\left(p_2-p_1\right)dQ(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}. \qquad (Б.6)$$

**Випадок №6**. Діє лише однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості (Б.1) та пара зсувних сил $Q_k(t)\ (k=1,2)$, розташованих у далеко рознесених відносно вертикальної осі $x=0$ точках $\operatorname{Re} z_{*1}\neq\operatorname{Re} z_{*2}$.

**Випадок №7.** Діє лише пара збалансованих притискних зосереджених сил $P_k=\mp iP\ \left(P>0\right)$ у точках $z_k=\mp ih\in S_k\left(k=1,2\right)$ та однорідне зсувне навантаження на нескінченості (Б.2).

$$\sigma_{yy}(x)=-\frac{4Ph\gamma^+}{x^2+h^2} \qquad (Б.7)$$

$$\sigma_{yzk}^0(z,t)=\tau(t),\qquad z\in S_k\ (k=1,2;\ l=3-k).$$

**Випадок №8.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості $\sigma_{yy}^\infty<0$, пара збалансованих притискних зосереджених сил $P_k=\mp iP\ \left(P>0\right)$ у точках $z_k=\mp ih\in S_k\left(k=1,2\right)$ та однорідне зсувне навантаження на нескінченості (Б.2).

$$\sigma_{yy}(x)=\sigma_{yy}^\infty-\frac{4Ph\gamma^+}{x^2+h^2}, \qquad (Б.8)$$

$$\sigma_{yzk}^0(z,t)=\tau(t),\qquad z\in S_k\ (k=1,2;\ l=3-k).$$

При $P<0$ цей випадок відповідає парі збалансованих розтягуючих зосереджених сил, напрямлених у протилежний від $\sigma_{yy}^\infty$ бік.

**Випадок №9.** Діє лише пара збалансованих стискаючих зосереджених сил $P_k = \mp iP \ \left(P > 0\right)$ у симетричних точках $z_k = \mp ih \in S_k \left(k = 1,2\right)$ (Б.7) та одна із зсувних сил $Q_k(t)\ (k = 1,2)$, розташованих у симетричних точках $z_{*k} = \mp id$ (Б.3) або (Б.4).

$$\sigma_{yy}(x) = -\frac{4Ph\gamma^+}{x^2 + h^2},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^0 \left(x,t\right) \right\rangle = \frac{2p_1 Q_2(t)}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_{*2}} = \frac{2p_1 d Q_2(t)}{\pi\left(x^2 + d^2\right)},$$

або $$\left\langle \sigma_{yz}^0 \left(x,t\right) \right\rangle = \frac{2p_2 Q_1(t)}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_{*1}} = -\frac{2p_2 d Q_1(t)}{\pi\left(x^2 + d^2\right)}.$$

**Випадок №10.** Діє лише пара збалансованих стискаючих зосереджених сил $P_k = \mp iP \ \left(P > 0\right)$ у симетричних точках $z_k = \mp ih \in S_k \left(k = 1,2\right)$ (Б.7) та пара зсувних сил $Q_2(t) = -Q_1(t) = Q(t)$, розташованих у симетричних точках $z_{*k} = \mp id$ (Б.5).

$$\sigma_{yy}(x) = -\frac{4Ph\gamma^+}{x^2 + h^2},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^0 \left(x,t\right) \right\rangle = \frac{2Q(t)}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_{*1}} = -\frac{2dQ(t)}{\pi\left(x^2 + d^2\right)}.$$

**Випадок №11.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості $\sigma_{yy}^\infty < 0$, пара збалансованих розтягуючих зосереджених сил $P_k = (-1)^k iP \ \ (P > 0)$ у симетричних точках $z_k = \mp ih \in S_k \left(k = 1,2\right)$ (Б.8) та одна із зсувних сил $Q_k(t)\ (k = 1,2)$, розташованих у симетричних точках $z_{*k} = \mp id$ (Б.3) або (Б.4).

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{yy}^\infty - \frac{4Ph\gamma^+}{x^2 + h^2},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle = \frac{2p_1Q_2(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*2}} = \frac{2p_1dQ_2(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)},$$

або
$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle = \frac{2p_2Q_1(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*1}} = -\frac{2p_2dQ_1(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}.$$

**Випадок №12.** Діє однорідне нормальне притискувальне навантаження на нескінченості $\sigma_{yy}^{\infty}<0$, пара збалансованих розтягуючих зосереджених сил $P_k=(-1)^k iP\ (P>0)$ у симетричних точках $z_k=\mp ih\in S_k\left(k=1,2\right)$ (Б.8) та пара зсувних сил $Q_2(t)=-Q_1(t)=Q(t)$, розташованих у симетричних точках $z_{*k}=\mp id$ (Б.5).

$$\sigma_{yy}(x)=\sigma_{yy}^{\infty}-\frac{4Ph\gamma^{+}}{x^2+h^2},$$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle = \frac{2Q(t)}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z-z_{*1}} = -\frac{2dQ(t)}{\pi\left(x^2+d^2\right)}.$$

**Випадок №13.** Діє пара гвинтових дислокацій з векторами Бюргерса інтенсивністю $b(t)$ за схемою $b_2(t)=-b_1(t)=b(t)$, розташованих у симетричних точках $z_2=x_2+id=\overline{z}_1$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)+i\sigma_{xz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle = 2\tau+i(\tau_1+\tau_2)+i\frac{\left(G_1+G_2\right)db(t)}{\pi\left(\left(x-x_2\right)^2+d^2\right)}. \qquad (Б.9)$$

**Випадок №14.** Діє пара гвинтових дислокацій з векторами Бюргерса інтенсивністю $b(t)$ за схемою $b_2(t)=b_1(t)=b(t)$, розташованих у симетричних точках $z_2=x_2+id=\overline{z}_1$

$$\left\langle \sigma_{yz}^{0}\left(x,t\right)+i\sigma_{xz}^{0}\left(x,t\right)\right\rangle =$$
$$=2\tau+i(\tau_1+\tau_2)+\frac{b(t)\left\{4C\left(x-x_2\right)+i\left(G_2-G_1\right)d\right\}}{\pi\left(\left(x-x_2\right)^2+d^2\right)}. \qquad (Б.10)$$