ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАФТИ І ГАЗУ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЩЕРБІЙ АНДРІЙ БОГДАНОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК З ТРІЩИНАМИ ЗА НАЯВНОСТІ ГНУЧКОГО ПОКРИТТЯ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________________А.Б. Щербій

Науковий керівник: Шацький Іван Петрович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради ________ /Ясінський А. В./

Львів – 2021

АНОТАЦІЯ

Щербій А. Б. Гранична рівновага пологих оболонок з тріщинами за наявності гнучкого покриття. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 2021.

У дисертації досліджено вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пологих оболонок з тріщинами. Така мета роботи реалізується шляхом формулювання задач статики пологих оболонок з тріщинами, підсилених гнучким покриттям, розробки методики оцінювання граничного стану дефектних оболонок за двома критеріями, асимптотичного дослідження граничної рівноваги пологої оболонки довільної форми з тріщиною вздовж лінії кривини за наявності гнучкого покриття, числового аналізу впливу гнучкого покриття на міцність сферичної та циліндричної оболонки з тріщиною для довільних значень параметра кривини та вивчення закономірностей взаємодії колінеарних тріщин у оболонках з гнучким покриттям.

Дослідження проводили у двовимірній постановці на базі класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява. Тріщина в оболонці з гнучким покриттям трактується як розріз, береги якого з'єднані шарнірно у лицьовій поверхні оболонки.

Подано огляд наукових досліджень з механіки оболонок з тріщинами та висвітлено основні підходи до моделювання надтріснутих тонкостінних елементів конструкцій з покриттями. Відзначено, що одним із основних ефектів однобічного підкріплення розтягнутих пластин з тріщинами є поява локального вигину поблизу дефектів. Обґрунтовано спрямованість роботи на вирішення актуального наукового завдання – розвинути методи дослідження рівноваги пологих оболонок з тріщинами задля оцінки впливу гнучкого покриття на напружено-деформований та граничний стан тонкостінних елементів конструкцій.

Наведено основні співвідношення теорії пологих оболонок, зроблено постановку задачі про статичний розтяг пологої оболонки з наскрізною тріщиною за наявності одностороннього гнучкого покриття, яке деформується сумісно з підкладкою.

Описано методологію дослідження. Сформульовано крайову задачу для диференціальних рівнянь теорії пологих оболонок із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізі, які описують шарнірне з’єднання його берегів. Прийняте припущення про малу товщину покриття порівняно з товщиною оболонки дає змогу не ускладнювати задачу змінами інтегральних жорсткостей, а припущення про гнучкість покриття призводить до моделі ідеального шарніру, який не передає згинальний момент. Отож, у пропонованій постановці роль однобічного покриття зводиться виключно до двох чинників: в задачі пружної рівноваги – це сполучення берегів тріщини в лицьовій поверхні оболонки з можливістю їх розвороту, в задачі граничної рівноваги – це урахування обмеженої міцності покриття.

Подано схему зведення сформульованої задачі до сингулярного інтегрального рівняння відносно розриву переміщень на розрізі. Ця схема передбачає використання інтегральних виразів зусиль та моментів через похідні від стрибків переміщення та кута повороту на розрізі. Ядра таких подань виражаються через фундаментальний розв’язок рівнянь теорії оболонок інтегралами Фур’є. Для визначення невідомих стрибків слугують крайові умови на контурі тріщини.

Наведено асимптотичний та числовий алгоритми для знаходження розв’язків інтегральних рівнянь у класі функцій з необмеженою на кінцях відрізка похідною.

Наведено асимптотику зусиль та моментів в околі вершин тріщини. Сформульовано критерії руйнування. Для оцінки граничної рівноваги вкритих пологих оболонок з тріщинами запропоновано використовувати два критерії: 1) інтегральний по товщині енергетичний критерій лінійної механіки крихкого руйнування оболонки для одночасного розтягу-згину; 2) класичний критерій міцності покриття. Механізм проростання тріщини у матеріал покриття, а також питання адгезійної міцності у двовимірній постановці не розглядаються.

У випадку малого параметра кривини побудовано асимптотичні розв’язки для вкритих оболонок довільної форми з тріщиною вздовж лінії кривини серединної поверхні. Числові розв’язки для сферичної оболонки з меридіональною тріщиною та циліндричної оболонки з поздовжньою або поперечною тріщиною вперше знайдено в широкому діапазоні зміни параметра кривини. Шляхом порівняння асимптотичних і прийнятих за точні числових результатів визначено область застосовності асимптотичних формул, отриманих у першому оболонковому наближенні.

Уперше досліджено взаємодію колінеарних тріщин у оболонках з гнучким покриттям. На базі моделі тріщини з шарнірно з’єднаними берегами сформульовано крайову задачу теорії оболонок у безмежній області із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізах, розташованих на одній прямій. Для побудови розв’язку задачі методом сингулярних інтегральних рівнянь використано інтегральні подання зусиль і моментів на лінії розрізів через похідні від стрибків переміщень і кутів повороту нормалі як суперпозиції вкладів від кожної тріщини. Детальний числовий аналіз проведено для двох однаковими співвісних дефектів, орієнтованих вздовж меридіана у сферичній оболонці та вздовж твірної чи напрямної у циліндричній оболонці.

На основі знайдених розв’язків побудовано залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів у вершинах тріщин, а також реактивного зусилля в шарнірі від параметрів кривини, форми оболонок та взаємного розташування дефектів. За двома критеріями граничної рівноваги визначено руйнівні навантаження, за величиною яких встановлено закономірності впливу гнучкого покриття на утримувальну здатність оболонок з наскрізними тріщиноподібними дефектами.

Усі отримані результати порівнюються з відповідними відомими розв’язками класичних задач про рівновагу пологих оболонок, послаблених наскрізними тріщинами з вільними від в’язей берегами. У випадку плоскої серединної поверхні оболонки асимптотичні та числові результати узгоджуються з відомими аналітичними розв’язками для тріщин у пластині з гнучким покриттям.

На підставі отриманих результатів виявлено низку нових закономірностей щодо впливу гнучких покриттів на міцність пологих оболонок з наскрізними тріщинами.

Перш за все однобічне підкріплення оболонки знижує рівень мембранних напружень в околі розрізу, проте призводить до появи істотного поля згинальних напружень.

Для малих кривин у оболонках довільної форми встановлено: якщо без покриття утримувальна здатність розтягнутої оболонки з тріщиною завжди нижча, ніж для так само навантаженої пластини, то за наявності гнучкого покриття руйнівне навантаження для оболонки може бути як більшим, так і меншим від аналогічного значення для пластини. Це залежить від кривини і форми оболонки та від орієнтації дефекту. Крім того, утримувальна здатність покриття для оболонки завжди менша, ніж для пластини.

Для довільних значень параметра кривини у сферичній та циліндричній оболонках встановлено, що вирішальне значення для структурної цілісності композиції має співвідношення між міцністю покриття та тріщиностійкістю оболонки. При цьому у разі високоміцного покриття завжди першою розтріскується оболонка; у випадку покриття середньої міцності для малих кривин першою руйнується оболонка, а для великих кривин першим руйнується покриття; слабке покриття руйнується при малих навантаженнях і не дає підкріплювального ефекту. Спостерігається також немонотонна залежність руйнівного навантаження для підкріпленої оболонки з тріщиною від параметра кривини.

Для циліндричної та сферичної оболонок з колінеарними дефектами вплив кривини на міцність вкритих оболонок з колінеарними тріщинами якісно такий самий, як для оболонок з поодинокими розрізами, а вплив взаємного розташування дефектів у вкритих оболонках на відміну від оболонок без покриття є менш відчутним, крім того, практично зникає немонотонна залежність руйнівного навантаження від віддалі між дефектами. Для далеко розташованих розрізів характер та локалізація руйнування залежать від міцності покриття, для близько розташованих тріщин втрата цілісності відбувається шляхом розтріскування оболонки біля ближніх вершин;

Нарешті гнучке підкріплення зовнішньої поверхні оболонок з дефектами у всіх випадках є вигіднішим порівняно з підкріпленням на внутрішній поверхні.

Практичне значення проведеного дослідження полягає у тому, що запропонований підхід до аналізу напружено-деформованого стану оболонок з тріщинами на підставі моделі розрізу з шарнірно з’єднаними берегами та двох критеріїв граничної рівноваги дав змогу точніше оцінити ефекти підкріплення оболонок залежно від їх тріщиностійкості та від міцності покриття. Отримані результати можна використати для інженерного розрахунку параметрів пружної та граничної рівноваги тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами в судно-, авіа- і машинобудуванні, в будівельній індустрії та нафтогазовій промисловості.

*Ключові слова***:** пологa оболонка, тріщина, гнучке покриття, розтяг, шарнірне з’єднання, напружений стан, гранична рівновага.

ABSTRACT

Shcherbii A. B. Limit equilibrium of cracked shallow shells with flexible coating. – Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the Candidate's Degree in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Lviv, 2021.

The influence of the one-sided flexible coating on the stress-strain state and the limit equilibrium of cracked shallow shells are studied in the thesis. This goal is realized by formulating problems of statics of shallow shells with cracks reinforced with flexible coating, development of methods for estimating the limiting state of defective shells by two criteria, the asymptotic study of the limit equilibrium of a shallow shell of arbitrary shape with a crack along the curvature line, numerical analysis of the effect of flexible coating on the strength of spherical and cylindrical shells with a cracks for arbitrary values of the curvature parameter and the study of the patterns of interaction of collinear cracks in shells with a flexible coating.

The studies were carried out in a two-dimensional setting based on the classical Kirchhoff-Love theory of shells. A crack in a shell with a flexible coating is interpreted as a cut, the edges of which are hinged at the front surface of the shell.

An overview of scientific research on the mechanics of cracked shells is presented and the main approaches to modeling cracked thin-walled structural elements with coatings are highlighted. It is noted that one of the main effects of one-sided reinforcement of cracked plates in tension is the appearance of local bending near defects. The focus of the work on solving an urgent scientific problem is justified – to develop methods for studying the equilibrium of shallow

shells with cracks to assess the effect of a flexible coating on the stress-strain and limit state of thin-walled structural elements.

The basic relations of the theory of shallow shells are presented; the problem is formulated on the static tension of a shallow shell with a through crack in the presence of a one-sided flexible coating, which is deformed together with the lining.

The research methodology is described. A boundary value problem is formulated for the differential equations of the theory of shallow shells with interconnected boundary conditions on the cut, describing the hinged connection of its edges. The accepted assumption about the small thickness of the coating as compared to the thickness of the shell makes it possible not to complicate the problem by changes in the integral roughness, and the assumption about the flexibility of the coating leads to a model of an ideal hinge that does not transfer a bending moment. Thus, in the proposed formulation, the role of a one-sided coating is reduced exclusively to two factors: in the problems of elastic equilibrium, this is a combination of crack edges in the front surface of the shell with the possibility of their reversal; in problems of limit equilibrium, this is taking into account the limited strength of the coating.

A scheme for reducing the formulated problem to a singular integral equation with respect to the discontinuity of displacements on the cut is presented. This scheme provides for the use of integral expressions of forces and moments through the derivatives of the displacement jumps and the angle of rotation in the section. The kernels of such representations are expressed in terms of the fundamental solution of the equations of shell theory by Fourier integrals. The boundary conditions on the crack contour are used to determine the unknown jumps.

Asymptotic and numerical algorithms are presented for finding solutions of integral equations in the class of functions with an unbounded derivative at the ends of the segment.

The asymptotics of the forces and moments near the tips of the crack are given. Criteria for destruction are formulated. To assess the limit equilibrium of coated shallow shells with cracks, it is proposed to use two criteria: 1) an energy criterion integral over the thickness of the linear mechanics of brittle fracture of the shell for simultaneous tension-bending; 2) the classical criterion for the strength of the coating. The mechanisms of crack growth into the coating material, as well as the issues of adhesive strength in a two-dimensional formulation, are not considered.

In the case of a small curvature parameter, asymptotic solutions are constructed for coated shells of arbitrary shape with a crack along the line of curvature of the middle surface. Numerical solutions for a spherical shell with a meridional crack and a cylindrical shell with a longitudinal or circumferential crack were found for the first time in a wide range of variation of the curvature parameter. By comparing the asymptotic and numerical results taken as exact, the range of applicability of the asymptotic formulas obtained in the first shell approximation is determined.

The interaction of collinear cracks in shells with a flexible coating is studied for the first time. On the basis of a model of a crack with hinged edges, a boundary value problem of the theory of shells in an infinite region with interconnected boundary conditions on cuts located on one straight line is formulated. To construct a solution to the problem by the method of singular integral equations, we used integral representations of the forces and moments on the cut line in terms of the derivatives of displacement jumps and angles of rotation of the normal as a superposition of contributions from each crack. A detailed numerical analysis was carried out for two identical coaxial defects oriented along the meridian in the spherical shell and along the generatrix or guiding line in the cylindrical shell.

On the basis of the solutions found, the dependences of the coefficients of the intensity of the forces and moments at the tips of the cracks, as well as the reactive force in the hinge, on the parameters of curvature, the shape of the shells and the mutual arrangement of defects are constructed. By two criteria of limit equilibrium, the breaking loads were determined, according to the magnitude of which the regularities of the influence of the flexible coating on the holding capacity of shells with through crack-like defects were established.

All the results obtained are compared with the corresponding well-known solutions of the classical equilibrium problems for shallow shells weakened by through cracks with edges free from constraints. In the case of a flat middle surface of the shell, the asymptotic and numerical results are consistent with the known analytical solutions for cracks in a plate with a flexible coating.

Based on the results obtained, a number of new regularities have been revealed regarding the influence of flexible coatings on the strength of shallow shells with through cracks.

First of all, one-sided reinforcement of the shell reduces the level of membrane stresses near the cut, but leads to the appearance of a significant field of bending stresses.

For small curvatures in shells of arbitrary shape, it is established: if the holding capacity of a stretched shell with a crack is always lower without a coating than for a plate with a similar load, then in the presence of a flexible coating, the breaking load for the shell can be either greater or less than the same value for the plate. This depends on the curvature and shape of the shell and on the orientation of the defect. In addition, the holding capacity of the coating for the shell is always less than for the plate.

For arbitrary values of the curvature parameter in spherical and cylindrical shells, it was found that the ratio between the strength of the coating and the crack resistance of the shell is of decisive importance for the structural integrity of the composition. Thus, in the case of a high-strength coating, the shell is always the first to crack; in the case of a coating of medium strength for small curvatures, the shell is destroyed first, and for large curvatures, the coating is destroyed first; a weak coating breaks down at low loads and does not provide a reinforcing effect. A non-monotonic dependence of the breaking load for a reinforced shell with a crack on the curvature parameter is also observed.

For cylindrical and spherical shells with collinear defects, the effect of curvature on the strength of coated shells with collinear cracks is qualitatively the same as for shells with single cuts, and the effect of the mutual arrangement of defects in coated shells, in contrast to shells without a coating, is less noticeable; moreover, the nonmonotonic dependence of the breaking load on the distance between defects practically disappears. For distant cuts, the nature and localization of destruction depend on the strength of the coating; for closely spaced cracks, the loss of integrity occurs by cracking the shell at the near tips.

Finally, flexible reinforcement on the outer surface of defective shells is in all cases more advantageous than on the inner surface.

The practical significance of the study is that the proposed approach to the analysis of the stress-strain state of shells with cracks on the basis of a section model with hinged edges and two criteria of limiting equilibrium made it possible to more accurately assess the effects of reinforcement of the shells depending on their crack resistance and on the strength of the coating. The results obtained can be used for engineering calculation of the parameters of elastic and ultimate equilibrium of thin-walled structural elements with cracks in shipbuilding, aircraft and mechanical engineering, in the construction industry and the petroleum industry.

Key words: shallow shell, crack, flexible coating, tension, hinged joint, stress state, limit equilibrium.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2015. Вип. 24. С. 248–257.
2. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2016. Т. 59. № 4. С. 135–141

   (*те саме:* Shats'kyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 238. Issue 2. P. 165–173).
3. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Взаємодія колінеарних тріщин в сферичній оболонці з гнучким покриттям. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 342–350.
4. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *Вісник Київського національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 3. С. 131–134.
5. Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщинами вздовж твірної. *Дослідження в математиці і механіці.* 2017. Т. 22. Вип. 2(30). С. 94–104.
6. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриву на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2019. Т. 55. № 4. С. 27–33

(*те саме:* Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of flexible coating on the limit equilibrium of a spherical shell with meridional crack. *Materials Science.* 2020. Vol. 55. Issue 3. P. 484–491).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Шацький І. П., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 14–16 вересня 1999 р.)]. Львів: Каменяр. 1999. Т. 2. С. 333–335.
8. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізах. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: В 2-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Луцьк, 16–18 травня 2000 р.)]. Львів. 2000. Т. 2. С. 51–54.
9. Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Equilibrium of cracked shell with flexible coating. *Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 4:* Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017) (Gdansk, Poland, October 11–13, 2017). Leiden: CRC Press. 2018. P. 165–168.
10. Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на міцність циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *5 Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези. доп. (Львів, 16–18 травня 2001 р.). Львів: Кінпатрі ЛТД. 2001. С. 51.
11. Шацький І. П, Даляк Т. М., Щербій А. Б. Інтегральні рівняння для системи тріщин в пластинах і оболонках з гнучким покриттям. *Тези науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу ІФДТУНГ* (Івано-Франківськ, 24–25 квітня 2002 р.). Івано-Франківськ. 2002. С. 74.

12. Щербій А. Про взаємодію колінеарних дефектів в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача* (Львів, 24–27 травня 2005 р.). Львів: ІППММ НАН України. 2005. С. 78.
13. Шацький І. П., Даляк Т. М., Маковійчук М. В., Перепічка В. В., Щербій А. Б. Взаємодія берегів тріщин у пластинах та оболонках. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій.* Тези доп. Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17–19 жовтня 2007 р.). Дніпропетровськ: ДНУ. 2007. С. 88–89.
14. Даляк Т., Маковійчук М., Перепічка В., Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на рівновагу пластин та оболонок з дефектами. *Сучасні проблеми механіки та математики*: В 3-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 25–29 травня 2008 р.)]. Львів. 2008. Т. 2. С. 34.
15. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *IV Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки"*: матер. конф. (Київ, 28–30 серпня 2017 р.). Київ. 2017. С. 59.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$x,\ y,\ z$ – декартові координати;

$\varphi(x,\ y)$ – функція Ері;

$w(x,\ y)$ – прогин оболонки;

$[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки;

$[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі на берегах розрізу;

$N_x,\ N_y,\ N_{xy}$ – мембранні зусилля;

$M_x,\ M_y,\ M_{xy}$ – згинальні моменти;

$Q_x^*,\ Q_y^*$ – узагальнені поперечні сили;

$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\Delta_k = \beta_2\partial^2/\partial x^2 + \beta_2\partial^2/\partial y^2$ – диференціальні оператори;

$\beta_1 = R/R_1,\ \beta_2 = R/R_2$ – параметри форми серединної поверхні;

$R_1,\ R_2,\ R = \min(|R_1|, |R_2|)$ – головні радіуси кривини нормальних перерізів серединної поверхні та найменший радіус кривини;

L – контур тріщини;

$K_{jk}(z)$ – ядра інтегральних операторів;

$\lambda = (l/\sqrt{Rh})(3(1-\nu^2))^{1/4}$ – безрозмірний параметр кривини;

E – модуль Юнга матеріалу оболонки;

ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки;

$B = 2Eh,\ D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$ – жорсткості оболонки;

K_N, K_M – коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів;

G – потік енергії у вершину тріщини;

γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу оболонки;

N_* – допустиме зусилля для покриття;

$p^0 = 2h\sqrt{2E\gamma_* /(\pi l)}$ – руйнівне зусилля Гріффітса для пластини з прямолінійною тріщиною;

$\mathrm{ker}(...)$, $\mathrm{kei}(...)$ – функції Томсона;

$H(...)$ – функція Гевісайда;

$[f] = f^+ - f^- = f(x,+0) - f(x,-0)$ – функція стрибка.

ВСТУП

Актуальність теми. У багатьох галузях сучасної техніки широкого застосування набули тонкостінні елементи конструкцій. Маючи безперечні переваги у низькій матеріаломісткості, такі конструкції однак є досить чутливими до локальних збурень напруженого стану. Зокрема, їхня міцність принципово залежить від наявності гострокінцевих концентраторів напружень типу тріщин чи проєктно передбачених розрізів, які можуть істотно скоротити ресурс експлуатації чи призвести до катастрофічних руйнувань виробів та споруд. Тому дослідження напружено-деформованого стану в околі тріщин та їхнього впливу на граничну рівновагу пластин та оболонок мають значний науковий та практичний інтерес.

Одним із способів подовження ресурсу експлуатації тонкостінних конструкцій з дефектами є нанесення на їхню поверхню підкріплень у вигляді покриттів, тонких латок, пластирів чи бандажів. Такі підкріплення зазвичай зменшують концентрацію напружень поблизу дефектів, але водночас приймають на себе частину навантаження. Тому при розрахунку таких істотно неоднорідних композицій треба обов’язково враховувати і міцність підкріплення.

Дисертаційна робота спрямована на розв’язання наукового завдання – розвинути методи дослідження рівноваги пологих оболонок з тріщинами задля оцінки впливу гнучкого покриття на напружено-деформований та граничний стан тонкостінних елементів конструкцій.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах держбюджетних наукових тем Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу МОН України “Розробка комплексної технології покращення експлуатаційних властивостей виробів машинобудування мікродуговим оксидуванням” (№ держреєстрації 0119U002231, 2019–2020 рр.) та Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України “Моделювання та оптимізація термомеханічної поведінки структурно неоднорідних тіл за сталого та змінного навантаження” (№ держреєстрації 0113U007685, 2014–2018 рр.), “Моделі і розвиток методів розрахунку та оптимізації напруженого стану і дослідження граничної рівноваги неоднорідних тіл з дефектами” (№ держреєстрації 0119U100672, 2019–2023 рр.), дисертант – виконавець.

Мета дисертаційної роботи полягає у дослідженні впливу одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та граничну рівновагу оболонок з тріщинами.

Для досягнення поставленої мети визначено такі задачі:

- сформулювати задачі статики пологих оболонок з тріщинами, підсилених гнучким покриттям;
- розробити методику оцінювання граничного стану дефектних оболонок за двома критеріями: тріщиностійкості оболонки та міцності покриття;
- методом малого параметра дослідити граничну рівновагу пологої оболонки довільної форми з тріщиною вздовж лінії кривини за наявності гнучкого покриття;
- на підставі числового аналізу дослідити вплив гнучкого покриття на міцність сферичної та циліндричної оболонки з тріщиною для довільних значень параметра кривини;
- вивчити закономірності взаємодії колінеарних тріщин у оболонках з гнучким покриттям.

Об’єктом досліджень є пологі оболонки з наскрізними тріщинами, підкріплені гнучким покриттям.

Предметом досліджень є вплив гнучкого покриття на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пологих оболонок з тріщинами.

Методи досліджень. Сформульовані крайові задачі для пологих оболонок з розрізами розв’язано з використанням методу сингулярних інтегральних рівнянь. Для побудови розв’язків отриманих рівнянь застосовано асимптотичний метод малого параметра та числовий метод механічних квадратур.

Наукова новизна одержаних результатів визначається наступними положеннями:

1) розвинуто методику асимптотичного аналізу граничної рівноваги покритої пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини у частині врахування скінченної міцності покриття, що дало змогу узагальнити відомі результати, отримані для нескінченно міцного покриття;

2) вперше побудовано числові розв'язки задач статики підсилених гнучким покриттям циліндричної та сферичної оболонки з тріщинами; на їх основі обчислено руйнівні навантаження для довільних значень параметра кривини та встановлено діапазон застосовності асимптотичних результатів, отриманих методом малого параметра;

3) вперше сформульовано та розв’язано задачі про взаємодію колінеарних тріщин оболонках з гнучким покриттям. Це дало змогу оцінити вплив взаємного розташування дефектів на граничну рівновагу підкріплених оболонок.

Достовірність одержаних результатів забезпечується: використанням апробованої в літературі моделі тріщини з шарнірно з’єднаними берегами, узгодженням асимптотичних та числових розв’язків для малих значень безрозмірного параметра кривини оболонок, фізичною несуперечливістю отриманих результатів та їх збігом у часткових випадках з даними, отриманими іншими авторами.

Практичне значення одержаних результатів. Запропонований підхід дослідження напружено-деформованого стану оболонок з тріщинами на підставі моделі розрізу з шарнірно з’єднаними берегами та двох критеріїв граничної рівноваги дав змогу точніше оцінити ефекти підкріплення оболонок залежно від їх тріщиностійкості та від міцності покриття. Отримані результати можна використати для інженерного розрахунку тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами в судно-, авіа- і машинобудуванні, в будівельній індустрії та нафтогазовій промисловості.

Особистий внесок здобувача. Автором самостійно розв’язані усі наведені у дисертаційній роботі задачі, розроблено алгоритми розрахунків та програмні модулі. У публікаціях, що висвітлюють дисертаційні дослідження та написані у співавторстві, виконана наукова робота розподілена наступним чином:

– в роботах [1, 2, 6, 7] постановка задачі та обґрунтування структури розв’язку належать науковому керівнику, здобувач отримав інтегральні рівняння, побудував асимптотичний і числовий розв’язки та запропонував долучити до оцінювання граничної рівноваги критерій міцності покриття.
– у публікаціях [8–10] дисертантові належать розв’язання задач про напружений стан вкритих оболонок з тріщинами і визначення руйнівних навантажень, формулювання задач здійснено І. П. Шацьким;
– в роботах [3, 4, 11, 13–15] дисертантом записано та розв’язано системи інтегральних рівнянь поставлених задач, отримані результати проаналізовані авторами спільно.

Результати досліджень, опубліковані в працях [5, 12], отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 2-й Міжнародній конференції з механіки руйнування матеріалів і міцності конструкцій (Львів, 1999), 5-ій конференції з механіки неоднорідних структур (Луцьк, 2000), 5-ому Міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків у Львові (2001), Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського "Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій" (Дніпропетровськ, 2007), 2-ій Міжнародній конференції "Сучасні проблеми механіки і математики" (Львів, 2008), 4-ій Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки" (Київ, 2017); 11-ій Міжнародній конференції "Shell Structures: Theory and Applications" (Gdansk, 2017), конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 2005), науково-технічній конференції професорсько-викладацького складу ІФДТУНГ (Івано-Франківськ, 2002).

У повному обсязі дисертація доповідалася на міжкафедральному семінарі Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу під керівництвом доктора техн. наук, проф. В. І. Артима, на спільному семінарі відділу моделювання демпфуючих систем та відділу механіки деформівного твердого тіла Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук Ю. В. Токового, на загальноінститутському науковому семінарі за напрямком "Математичні проблеми механіки руйнування і поверхневих явищ" Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, проф. М. В. Марчука, на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом чл.-кор. НАН України О. Є. Андрейківа, на семінарі відділу теоретичних основ механіки руйнування Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України під керівництвом доктора техн. наук, проф. В. П. Силованюка.

Публікації. За основними результатами дисертаційних досліджень автором опубліковано 15 друкованих праць [1–15], з них 6 статей [1–6] у наукових фахових виданнях України, 3 статті [7–9] у збірниках матеріалів конференції, 6 тез доповідей [10–15]. Три публікації [2, 6, 9] проіндексовано в наукометричній базі Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація загальним обсягом 156 сторінок складається із вступу, чотирьох розділів, які містять 29 рисунків, висновків, переліку використаних джерел із 175 найменувань та додатку. Обсяг основного тексту становить 110 сторінок.

РОЗДІЛ 1
СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ МЕХАНІКИ ОБОЛОНОК З ТРІЩИНАМИ ТА ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Значну кількість інженерних конструкцій та споруд в авіа- та суднобудуванні, у хімічній та нафтогазовій індустрії, в цивільному будівництві спроектовано із пластин та оболонок із високоміцних матеріалів. Такі конструкції мають велику питому міцність і низьку матеріаломісткість, є високотехнологічними. Однак непередбачувані перевантаження та мікродефекти у структурі матеріалу призводять до розвинення та поширення тріщин, і як наслідок – до повного чи часткового руйнування цих об’єктів. Окремим питанням є проблема подовження ресурсу тонкостінних конструкцій, які вичерпують свій плановий період експлуатації. Крім чисто технологічних задач з конструювання засобів та способів ремонту постає нагальна проблема теоретичного прогнозування залишкового ресурсу відновлених деталей чи споруд. З огляду на це дослідження утримувальної здатності тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами за наявності підкріплень, зокрема, тонких покриттів, має значний теоретичний та практичний інтерес..

Наведемо огляд основних робіт, що безпосередньо стосуються тематики дисертації. Будемо дотримуватися такої послідовності. Спочатку мова йтиме про класичні задачі статики оболонок з тріщинами, береги яких вільні від в’язей, потім – про згин оболонок з контактними тріщинами та про інші задачі теорії оболонок із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізах. Відтак будуть описані основні підходи до моделювання взаємодії тонких підкріплень із пластинами, послабленими тріщиноподібними дефектами, серед них відзначимо праці, які спираються на модель шарнірного з’єднання берегів розрізу. Поза межами огляду залишаються плоскі та просторові задачі механіки тріщин у кусково-однорідних тілах.

Вперше дослідження напружено-деформованого стану тонких оболонок з тріщинами, навантажених внутрішнім тиском, провів E. S. Folias [16–18]. Методом малого параметра у першому оболонковому наближенні знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень для сферичної оболонки з розрізом вздовж меридіана, для циліндричної оболонки з поздовжнім та поперечним розрізами. Аналіз граничної рівноваги пошкоджених оболонок під внутрішнім тиском проведено в працях [19–21].

Пізніше сингулярні інтегральні рівняння, побудовані в працях E. S. Folias, були розв'язані числово із застосуванням методу ортогональних многочленів (В. Т. Сапунов, Е. М. Морозов, F. E. Erdogan, J. J. Kibler, M. Ratwani, M. E. Duncan, L. G. Copley, J. L. Sanders [22–27]). Подібні задачі для з періодичної системи тріщин у сферичній та циліндричній оболонці розглянуто в працях [28, 29].

Симетричну задачу про напружений стан пологої циліндричної оболонки з поздовжньою або поперечною тріщинами незалежно від E. S. Folias розглянули С. Я. Ярема, М. П. Саврук [30]. Розглянуто також рівновагу циліндричної оболонки з довільно орієнтованою тріщиною [31] та пологої ізотропної оболонки з тріщиною вздовж головної лінії кривини серединної поверхні [32–34]. М. П. Савруком [35] отримано асимптотичне розвинення фундаментального розв'язку системи рівнянь теорії пологих оболонок та коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль і згинальних моментів у першому наближенні для оболонки з дугоподібною тріщиною та для співвісних пів безмежних тріщин, розділених перемичкою. Цим же автором [36] отримано асимптотичні результати і другому наближенні для пологих циліндричної та сферичної оболонок з прямолінійними тріщинами. Монографії [35, 36] підбивають підсумки тогочасних досліджень.

Пологу ізотропну оболонку двоякої кривини з тріщиною, орієнтованою у головному напрямку, розглядали також J. G. Simmonds, M. R. Bradley [37]. Методом малого параметра знайдено поправки для коефіцієнтів інтенсивності напружень у першому наближенні. Пізніше J. G. Simmonds, M. R. Bradley J. W. Nikolson [38] дослідили пружну рівновагу пологої оболонки, послабленої довільно орієнтованою тріщиною, яка перебуває під дією довільного самозрівноваженого навантаження. Техніку інваріантного інтегрування використали J. W. Nikolson, M. R. Bradley, C. K. Carington [39] для побудови асимптотичний розв’язку задачі статики циліндричної оболонки з тріщиною вздовж твірної.

Дослідження впливу ортотропії матеріалу на напруження у циліндричній оболонці з поздовжньою тріщиною проведено у праці F. E. Erdogan та ін. [40]. Рівновагу ізотропних і спеціально ортотропних оболонок з розрізами вдовж лінії кривини на основі теорії Рейснера десятого порядку розглянуто у працях F. Delale, F. E. Erdogan [41, 42]. Дослідження напруженого стану циліндричної оболонки з довільно орієнтованою тріщиною описано у статті [43].

Методи побудови фундаментальних розв’язків рівнянь статики пологих оболонок у вигляді рядів за спеціальними (подібними до циліндричних) функціями розроблено у донецькій школі механіків. Так В. К. Хижняк, В. А Цванг, В. П. Шевченко [44–46] такі результати використали для виведення інтегральних рівнянь на розрізах. Зокрема, отримано систему інтегральних рівнянь типу Коші для ортотропної оболонки з криволінійним розрізом та проведено числові розрахунки для випадку прямолінійної тріщини. Пізніше цей підхід до побудови систем граничних інтегральних рівнянь для пологих оболонок з розрізами розвинуто у працях В. П. Шевченка, А. С. Гольцева, К. М. Довбні [47–56]. Із застосуванням диференціювання узагальнених функцій на лініях розриву переміщень та теореми взаємності робіт побудовано системи інтегральних рівнянь для пологих ізотропних та ортотропних оболонок довільної форми з системами прямолінійних та криволінійних розрізів. Здобуто низку асимптотичних та числових результатів щодо впливу форми поверхні, ортотропії матеріалу та взаємного розташування тріщин на значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершини дефектів. Проміжні підсумки цих досліджень підведено у колективній монографії [57].

Оригінальний підхід до дослідженні поведінки тріщин в оболонках, т. зв. метод дисторсій, розроблено Я. С. Підстригачем, В. А. Осадчуком та М. М. Николишиним [58, 59]. Оболонка з тріщинами моделюється суцільною оболонкою із зосередженими у місці розрізів полями дислокацій та дисклінацій, що обумовлюють такі ж стрибки переміщень та кути повороту, як у вихідній оболонці. На підставі цього методу проведено широкомасштабні дослідження напруженого стану пологих сферичних, пологих та непологих циліндричних оболонок з поздовжніми та поперечними тріщинами (В. А. Осадчук, Є. М. Федюк [60, 61]), замкнутих циліндричних оболонок (В. А. Осадчук, М. М. Николишин та ін [62–66]). Отримані результати у розширеному вигляді викладено в монографії В. А. Осадчука [67], а також підсумовано в огляді В. А. Осадчука, Я. С. Підстригача [68]. Пізніше цей підхід знайшов своє ефективне застосування в задачах рівноваги пружно-пластичних та кусково-однорідних оболонок з тріщиноподібними дефектами (Р. М. Кушнір, М. М. Николишин та ін [69–71]), оболонок на пружній основі Вінклера [67].

Окремі дослідження [72–76] розглядають проблеми підкріплення оболонок з тріщинами ребрами жорсткості, які вважаються приєднаними по лінії.

G. C. Sih, H. C. Hagendorf [77, 78], D. Berger [79], F. E. Erdogan, F. Delale [80] для аналізу напружено-деформованого стану пологих оболонок з тріщинами використовували уточнену тіеорію оболонок типу Тимошенка-

Рейснера. Оглядова стаття [81] підсумовує дослідження, проведені у цьому напрямку.

Таким чином, основним засобом дослідження задач пружної рівноваги тонких оболонок з тріщинами у двовимірній постановці є метод граничних інтегральних рівнянь. Різні підходи відрізняються хіба що способом зведення задачі до системи інтегральних рівнянь.

Експериментальні дослідження з механіки руйнування пластин та оболонок з тріщинами, зокрема, в умовах одночасної дії мембранного та згинального навантажень, є вкрай нечисленними. Експериментальне дослідження напруженого стану поблизу тріщини за згину пластини присвячена робота F. Erdogan, O. Tuncel, P. Paris [82], а руйнівне навантаження для тріснутої пластини за згину з пропорційними розтягом визначали Р.Г. Вінн, С.М. Сміт [83]. Подібні дослідження для пошкоджених тріщинами оболонок під внутрішнім тиском описано в праці P. D. Ewing, J. G. Williams [84].

Окрім теоретичних досліджень напруженого стану тонкостінних елементів з тріщинами важливим безумовно є визначення руйнівного навантаження, при якому розпочнеться поширення тріщини і відбудеться втрата цілісності дефектної конструкції. Такі дослідження граничного стану надтріснутих оболонок під внутрішнім тиском на основі концепції Гріффітса проведено у працях в роботах E. S. Folias [18, 19, 20], L. Lemaitre, та ін. [21]. У разі комбінованого розтягу-згину циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною діаграми граничної рівноваги за інтегральним енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування побудував В. А. Осадчук [66, 67]. Дослідження міцності трубопроводів за двокритеріальною концепцією нелінійної механіки руйнування та оцінки ризиків для трубопровідних систем, уражених тріщиноподібними дефектами, викладено в монографії І. В. Ориняка [85]. Слід відзначити ще задачі для ізотропної циліндричної оболонки з напівнескінченною поздовжньою тріщиною під внутрішнім тиском [90].

Описані вище результати, отримані без урахування взаємодії берегів тріщин, є правомірними за умови додаткової дії на оболонку розтягувальних навантажень, достатніх для попередження закриття тріщин, спричиненого згином. Умови коректності таких суперпозицій розглядалися у працях К. М. Довбні, Р. М. Кушніра, М. М. Николишина, В. А. Осадчука, В. П. Шевченка [51, 57, 67, 69].

Дослідженням впливу закриття тріщини на напружений стан пластин та оболонок займалися ряд вітчизняних та зарубіжних наукових колективів. Під час згину оболонок задача ускладнюється нерівномірним розподілом напружень по товщині і, як наслідок, появою просторового ефекту – неповного по товщині контакту поверхонь тріщини.

Найбільш ефективним засобом дослідження феномену закриття тріщин за згину оболонок у двовимірній постановці стала модель контакту вздовж лінії. І. П. Шацьким у роботі [91] отримано інтегральні рівняння згину пологої оболонки з тріщиною, що закривається, і дано обґрунтування можливості використання моделі контакту вдовж лінії. Дослідження впливу закриття тріщини розташованої вдовж головної лінії кривини на напружений стан та граничну рівновагу під час згину пологої оболонки довільної форми здійснено асимптотичним методом [92, 93]. Аналогічні задачі для циліндричних панелей з поперечною або поздовжньою тріщинами та для сферичної оболонки з меридіональною тріщиною розв’язано числово методом квадратур [94, 95]. К. М. Довбня та Н. П. Шевцова [96, 97] провели числовий аналіз контактної взаємодії берегів тріщини у ізотропній та ортотропній пологій оболонці двоякої кривини.

Взаємодія колінеарних контактних тріщин за згину циліндричної та сферичної оболонки стала предметом досліджень, описаних у статтях

І. П. Шацького та М. В. Маковійчука [98–101], Схожі задачі для пологих оболонок довільної форми з тріщинами вздовж лінії кривини розглянуто К. М. Довбнею та Ю. В. Григорчук [102].

Задачу про згин пологої сферичної оболонки на пружній основі Вінклера з урахуванням закриття колінеарних тріщини розглянуто М. В. Маковійчуком [103].

З літературних джерел відомі також публікації Rong Liu, C. H. Wang та ін., присвячені вивченню ефекту закриття тріщини при згині ізотропних [104, 105] та спеціально ортотропних [106] пологих сферичної та циліндричної оболонок з позицій уточнених теорій. Ці роботи теж базуються на моделі контакту по лінії і допускають варіант змішаних крайових умов.

Теоретичне підґрунтя моделі контакту вздовж лінії викладено у працях О. М. Хлуднєва [107, 107]. Виходячи з теорії варіаційних нерівностей, крайові умови часткового контакту записуються у формі контактної альтернативи. Крім того, показано еквівалентність варіаційної та диференціальної постановки задачі і з’ясовано умови існування, єдиності та гладкості розв’язку.

У працях В. К. Опанасовича [109, 110] для оцінки ефекту взаємодії берегів тріщин за згину тонкостінних елементів конструкцій розроблено модель смугового контакту.

Врахування закриття тріщини та застосування інтегрального по товщині енергетичного критерію крихкого руйнування дало змогу асимптотичним та числовим методом визначити руйнівне навантаження при чистому згині пологих оболонок [93–95]. У свою чергу дослідження граничної рівноваги оболонок з тріщинами за одночасного розтягу та згину сферичної та циліндричної оболонок з врахуванням можливої контактної взаємодії берегів проводились в працях Д. В. Гриліцького, І. П. Шацького та М. В. Маковійчука [111, 112].

Близькими з погляду математичного моделювання є задачі з взаємозв'язаними крайовими умовами для оболонок з глибокими поверхневими тріщинами: Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук, [69, 113], К. М. Довбня, О. А. Корохіна [114, 115], F. Erdogan, F. Delale [116]. Такі задачі на основі моделі лінійних пружин або пластичного шарніру зводяться до систем сингулярних інтегродиференціальних рівнянь щодо стрибків переміщень і кутів повороту нормалі на розрізах. Жорсткості пружин, розташованих у приповерхневій зоні, підбираються із задачі про комбінований розтяг-згин пружної смуги з крайовою тріщиною.

Напруження в пластинах з тріщинами та отворами за наявності підкріплень у вигляді пружних накладок, приклеєних чи приварених по лінії, досліджували Y. H. Chen, H. G. Hahn [117], М. П. Саврук, В. С. Кравець [118–121], G. J. Tsamasphyros та ін. [122], А. Ю. Землянова, В. В. Сільвестров [123–126], S. M. Mkhitaryan, D. I. Bardzokas [127]. При цьому методом сингулярних інтегральних рівнянь розглядались задачі плоского напруженого стану композицій.

Ефекти підсилення дефектних пластин однобічними чи двобічними накладками (покриттями, пластирами), у тому числі з урахуванням ефектів супутнього згину, в рамках двовимірних теорій найчастіше вивчались на основі моделі лінійних пружин L. R. F. Rose [128–132] чи її модифікацій (R. J. Clark, D. P. Romilly [133]).

Так у працях [128–130] розв'язання задачі розбивається на два етапи. Спочатку досліджується напружений стан бездефектної пластини, підкріпленої латкою скінченних розмірів через клейовий прошарок Вінклера. Потім досліджується одновимірна задача про розтяг розрізаної смуги (балки) з покриттям безмежної протяжності і аналітично встановлюються коефіцієнти жорсткості лінійних пружин, якими моделюється вплив покриття. Ці коефіцієнти використовуються для формулювання задач про деформування пластини, послабленої скінченним чи півнескінченним розрізом з пружно зв’язаними берегами.

Використовуючи такий підхід, L. R. F. Rose, C. H. Wang [131] розглянули задачу про підкріплення пластини з тріщиною, використавши для описання ефекту згину рівняння теорії Рейснера. Задача зведена до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь другого роду відносно стрибків переміщень та кутів повороту на розрізі. Вивчається взаємодія розтягувальної та зсувної мод деформування. Обговорюються перспективи геометрично нелінійного аналізу.

Ще далі в цьому напрямку досліджень просунулись R. J. Clark, D. P. Romilly [133], які врахували ефект трансверсального зсуву при згині за теорією Міндліна, а дослідження плоского напруженого стану доповнили врахуванням поперечного обтиснення. Тут теж використано метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Методом скінчених елементів у дво- [134–138] чи тривимірній [139–144] постановці вивчено вплив багатьох чинників на граничну рівновагу підкріплених пластин з тріщинами. Серед них – асиметрія кріплення, анізотропія структури, товщина та конфігурація пластиру, товщина та механічні властивості клейового прошарку, можливість відшарування накладки, циклічне навантаження тощо.

У працях B. B. Bouiadjra та ін. [134], D. Ouinas [135, 138], A. Amiri та ін. [136], F. Ricci та ін. [137] засобами двовимірного скінченноелементного моделювання розглядаються переважно однобічні підкріплення, з’єднані з пошкодженою пластиною через тонкий клейовий прошарок. Однак, ефект згину у перерахованих працях не досліджується. Відзначимо також, що у статті [136] значну акцентовано увагу на питанні розшарування по інтерфейсу, а у праці [137] – на ефекті втоми від циклічного квазістатичного навантаження.

H. I. Beloufa та ін. [140], використовуючи метод скінченних елементів, у тривимірній постановці детально вивчили вплив товщини пластиру, в тому числі змінної при краях, на напружений стан поблизу тріщини. Вплив форми латки досліджено в праці M. Belhouari та ін. [141], а варіанти одно- та двобічних композитних накладок розглядались у статті M. Jamal-Omidi та ін. [142]. Оптимізацію форми пружної накладки за цільовими функціями коефіцієнта інтенсивності напружень, максимального напруження у клейовому прошарку та матеріаломісткості підкріплення здійснено M. S. Bouchiba, B. Serier [143].

Ряд авторів займалися числово-експериментальними (H. Hosseini-Toudeshky та ін. [145], H. N. Maleki, T. N. Chakherlou [146]) та експериментальними ([147–149]) дослідженнями зростання втомних тріщин у пластинах, підкріплених односторонніми композитними пластирами. На особливу увагу заслуговує стаття H. Hosseini-Toudeshky та ін. [148], у якій описано експериментально встановлену форму фронту підростаючої тріщини залежно від товщини латки. Аналогічні дані наведено в статті [149] для траєкторії розвитку тріщини, нахиленої під кутом 45° до напрямку розтягувального навантаження.

Вивчення взаємного впливу двох однакових колінеарних тріщин у пластині з композитною накладкою здійснено методом скінчених елементів у двовимірній постановці Chi Chen та ін. [150].

У літературі відомі також поодинокі дослідження пружної рівноваги наскрізних тріщин у трубі із наклеєним композитним покриттям за допомогою тривимірного скінченноелементного аналізу: A. Achour та ін. [151], M. Meriem-Benziane та ін. [152].

Аналіз переваги ремонту конструкцій з тріщинами композиційними накладками, а також вплив найважливіших параметрів на їх ефективність та довговічність підкріплених композицій зроблено в оглядовій статті

S. Mohammadi та ін. [153].

У роботі M. Ramji, R. Srilakshmi [139] проведено тривимірний аналіз для вивчення та порівняння характеристик одно- та двостороннього пластиру на алюмінієвій панелі з тріщинами. Виділено ефекти різних параметрів, таких як укладка пластиру, його товщина та властивості матеріалу, на коефіцієнт інтенсивності напружень. Показано, що механіка двобічного ремонту повністю відрізняється від однобічного, зокрема встановлено, що двобічний ремонт є набагато ефективним. Проте, найважливішим для нашого дослідження, є наведений у цій статті висновок, який свідчить, що локальний згин в околі дефекту у розтягнутій пластині з одностороннім підкріпленням є найбільш вагомим явищем, яке впливає на перерозподіл напруженого стану поблизу тріщини.

Для аналізу поведінки тріщин в розтягнутих пластинах та оболонках з однобічним гнучким покриттям І. П. Шацьким [154, 155] розроблено модель розрізу з шарнірно з’єднаними берегами, яка головно враховує ефект локального згину поблизу дефекту. Нехтування іншими подробицями підкріплення дало змогу отримати аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів біля вершин прямолінійної тріщини (точні в пластині та асимптотичні в оболонці малої кривини) та знайти руйнівне навантаження для випадку нескінченно міцного покриття [154–157]. В той же час результати, отримані в рамках такої моделі, якісно узгоджуються з числовими результатами дво- та тривимірного аналізу, наведеними у зазначених вище публікаціях, наприклад, в статті [139].

Після пропозиції автора [7] долучити до аналізу граничної рівноваги критерій міцності покриття у всіх наступних публікаціях про гнучке покриття уже застосовують двокритеріальні оцінки. Це стосується праць Т. М. Даляка, І. П. Шацького, В. В. Перепічки [158–162] для пластин з системами тріщин, а також публікацій [1–6, 8–15] для пологих оболонок з тріщинами.

Отож, задачі про пружну та граничну рівновагу вкритих оболонок з тріщинами для великої кривини поверхні та з урахуванням обмеженої міцності покриття не досліджені. Невивченою також є взаємодія тріщин в оболонках з одностороннім гнучким покриттям. У зв’язку з цим обрано напрямок досліджень, мета і завдання яких описані у вступі до дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ СТАТИКИ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК З ТРІЩИНАМИ ТА ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ ТА МЕТОДОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У другому розділі наведено основні співвідношення теорії пологих оболонок, зроблено постановку задачі про розтяг пологих оболонок з наскрізними тріщинами за наявності однобічного гнучкого покриття та описано методологію дослідження. Подано схему зведення сформульованої задачі до сингулярних інтегральних рівнянь. Описано асимптотичний та числовий алгоритми для знаходження розв'язків інтегральних рівнянь. Сформульовано критерії граничної рівноваги.

2.1. Основні співвідношення теорії пологих оболонок

Розглянемо пружну оболонку як тіло, що обмежене двома еквідистантними поверхнями, розташованими на віддалі, малій порівняно з іншими розмірами тіла. Уведемо у серединній поверхні оболонки квазідекартову систему координат x, y, z так, що вісь z напрямлена по нормалі до базової поверхні оболонки, а осі x та y орієнтовані у головних напрямках (рис. 2.1).

Нехай оболонка займає область $(x, y) \in \Omega \times [-h, h]$, обмежену лицьовими поверхнями $z = \pm h$ та бічною поверхнею $(x, y) \in \partial\Omega \times [-h, h]$. Тут $\partial\Omega$ – край області Ω, $2h$ – стала товщина оболонки. Перерахуємо основні співвідношення, які описують механіку тонкої оболонки у рамках класичної лінійної теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява.

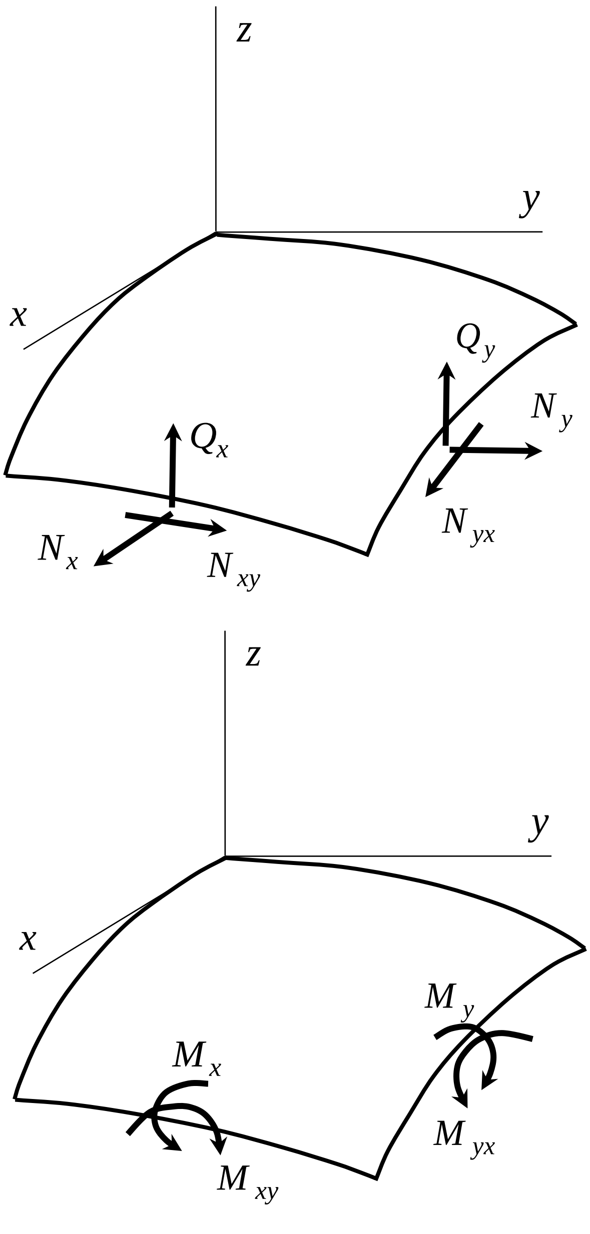


Рис. 2.1

На підставі гіпотези прямої нормалі, перпендикулярної до серединної поверхні оболонки, приймаємо лінійну за координатою z апроксимацію компонент вектора переміщення:

$$U_x(x, y, z) = u_x(x, y) - z\theta_x(x, y),$$

$$U_y(x,y,z)=u_y(x,y)-z\theta_y(x,y),$$

$$U_z(x,y,z)=w(x,y),$$

$$\theta_x=\partial w/\partial x,\quad \theta_y=\partial w/\partial y. \tag{2.1}$$

Тут

U_x, U_y, U_z – компоненти вектора переміщень довільної точки оболонки;

u_x, u_y, w – переміщення її серединної поверхні;

θ_x, θ_y – кути повороту нормалі до серединної поверхні.

Компоненти тензора деформацій теж лінійно розподілені по товщині:

$$\mathrm{E}_x(x,y,z)=\varepsilon_x(x,y)+z\kappa_x(x,y),$$

$$\mathrm{E}_y(x,y,z)=\varepsilon_y(x,y)+z\kappa_y(x,y),$$

$$\mathrm{E}_{xy}(x,y,z)=\varepsilon_x(x,y)+z\kappa_{xy}(x,y),$$

$$\mathrm{E}_{xz}(x,y,z)=\mathrm{E}_{yz}(x,y,z)=\mathrm{E}_z(x,y,z)=0. \tag{2.2}$$

Мембранні та згинальні деформації серединної поверхні зв’язані з переміщеннями та кутами повороту залежностями:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{w}{R_1},\ \varepsilon_y=\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{w}{R_2},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

$$\kappa_x=-\frac{\partial\theta_x}{\partial x},\ \kappa_y=-\frac{\partial\theta_y}{\partial y},\ \kappa_{xy}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right). \tag{2.3}$$

Розглянемо тепер інтегральні характеристики напруженого стану оболонки:

зусилля

$$N_x(x,y)=\int_{-h}^{h}\sigma_x(x,y,z)dz\,,\ N_y(x,y)=\int_{-h}^{h}\sigma_y(x,y,z)dz\,,$$

$$N_{xy}(x,y)=\int_{-h}^{h}\tau_{xy}(x,y,z)dz\,;$$

$$Q_x(x,y)=\int_{-h}^{h}\tau_{xz}(x,y,z)dz\,,\ Q_y(x,y)=\int_{-h}^{h}\tau_{yz}(x,y,z)dz\,; \qquad (2.4)$$

та моменти

$$M_x(x,y)=\int_{-h}^{h}\sigma_x(x,y,z)zdz\,,\ M_y(x,y)=\int_{-h}^{h}\sigma_y(x,y,z)zdz\,,$$

$$M_{xy}(x,y)=\int_{-h}^{h}\tau_{xy}(x,y,z)zdz\,. \qquad (2.5)$$

Рівняння рівноваги елементарного об’єму, записані в термінах зусиль та моментів будуть:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}+q_x=0\,,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+q_y=0\,,$$

$$N_{yx}-N_{xy}=0\,,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{N_x}{R_1}+\frac{N_y}{R_2}+q_z=0\,,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-Q_x+m_x=0\,,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y+m_y=0\,, \qquad (2.6)$$

де

q_x, q_y, q_z – компоненти поверхневих напружень;

m_x, m_y – компоненти поверхневих моментів;

R_1, R_2 – головні радіуси кривини серединної поверхні.

Вважаємо, що нормальні напруження поперечного обтиснення відсутні: $\sigma_{zz} \approx 0$. Тоді фізичні співвідношення класичної теорії оболонок, які відповідають лінійному законові Гука для ізотропного матеріалу, можна записати у вигляді:

$$N_x = \frac{B}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),\ N_y = \frac{B}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),\ N_{xy} = \frac{B}{1+\nu}\varepsilon_{xy};$$
$$M_x = -D\left(\kappa_x + \nu\kappa_y\right),\ M_y = -D\left(\kappa_y + \nu\kappa_x\right),\ M_{xy} = -D(1-\nu)\kappa_{xy}, \quad (2.7)$$

де

$B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 \big/ \left(3(1-\nu^2)\right)$ – інтегральні жорсткості оболонки;

E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу.

Перерізувальні сили за відомими деформаціями можна знайти не із фізичних співвідношень, а скориставшись додатково п’ятим та шостим рівняннями рівноваги (2.6).

Враховуючи постульований лінійний розподіл деформації по товщині, за інтегральними характеристиками можна відновити розподіл напружень у тонкій оболонці обабіч її серединної поверхні:

$$\sigma_x = \frac{1}{2h}\left(N_x + \frac{3z}{h^2}M_x\right),\ \sigma_y = \frac{1}{2h}\left(N_y + \frac{3z}{h^2}M_y\right),\ \tau_{xy} = \frac{1}{2h}\left(N_{xy} + \frac{3z}{h^2}M_{xy}\right). \quad (2.8)$$

Сумісність мембранних деформацій можна забезпечити, врахувавши лише одне рівняння суцільності:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 . \qquad (2.9)$$

Завдяки кінематичним гіпотезам Кірхгофа сумісність деформацій згину досягається автоматично.

Уведемо ключову функцію напружень φ за допомогою таких співвідношень:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \; N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \; N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} .$$

Тоді перші три рівняння рівноваги (2.6) виконуються тотожно. Із рівнянь сумісності (2.9) отримуємо рівняння

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \qquad (2.10)$$

де

$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – двовимірний оператор Лапласа;

$\Delta_k = \beta_2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_1 \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор форми;

$\beta_1 = R / R_1$, $\beta_2 = R / R_2$ – параметри форми серединної поверхні оболонки;

$R = \min\{R_1, R_2\}$ – мінімальний радіус кривини.

Інші три рівняння рівноваги за згину зводяться до неоднорідного рівняння

$$\Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k \varphi + q = 0 , \quad (x, y) \in \Omega , \qquad (2.11)$$

де $q = q_z + \dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_y}{\partial y}$.

За функціями φ, w із наведених вище співвідношень можна знайти усі характеристики напружено-деформованого стану оболонки.

Для однозначного розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних (2.10), (2.11) (сумарно 8-ого порядку) необхідно зафіксувати способи навантаження та закріплення межі $\partial\Omega$, тобто задати узагальнені сили та/або узагальнені переміщення.

Нехай $\vec{n}$, $\vec{t}$ – зовнішня нормаль та дотична до контура $\partial\Omega$. У загальному випадку на кожній ділянці $\partial\Omega$ потрібно задати чотири крайові умови – по одній величині із кожної пари (u_n, N_n), (u_t, N_{nt}), (θ_n, M_n), (w, Q_n^*), або лінійні комбінації цих величин.

Тут

$Q_n^* = Q_n + \dfrac{\partial M_{nt}}{\partial s}$ – узагальнена перерізувальна сила Кірхгофа;

s – дугова координата на $\partial\Omega$.

Наведені вище ключові рівняння (2.10), (2.11) виведено за таких припущень теорії пологих оболонок [163–165]:

– метрика серединної поверхні оболонки ототожнюється з метрикою дотичної площини;

– у рівняннях рівноваги у проекціях на осі x, y нехтуємо добутками кривини на перерізувальні сили;

– у співвідношеннях Коші для згинальних деформацій нехтуємо добутками кривини на переміщення серединної поверхні;

– під час дослідження явищ локальної концентрації напружень (напружених станів з високим ступенем змінюваності) додатково вважаємо, що радіуси кривини серединної поверхні не залежать від координат.

2.2. Постановка задачі, модель шарнірного з’єднання та інтегральні рівняння

2.2.1. Постановка задачі та модель шарнірного з’єднання берегів тріщини.

Розглянемо пологу ізотропну оболонку завтовшки $2h$ з наскрізною прямолінійною в плані тріщиною завдовжки $2l$, яка розташована вздовж головної лінії кривини серединної поверхні (рис. 2.2). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Береги тріщини розкриваються мембранними зусиллями p. Решта поверхонь оболонки вільні від навантаження. Потрібно дослідити напружено-деформований стан та граничну рівновагу оболонки з тріщиною за наявності гнучкого покриття. '

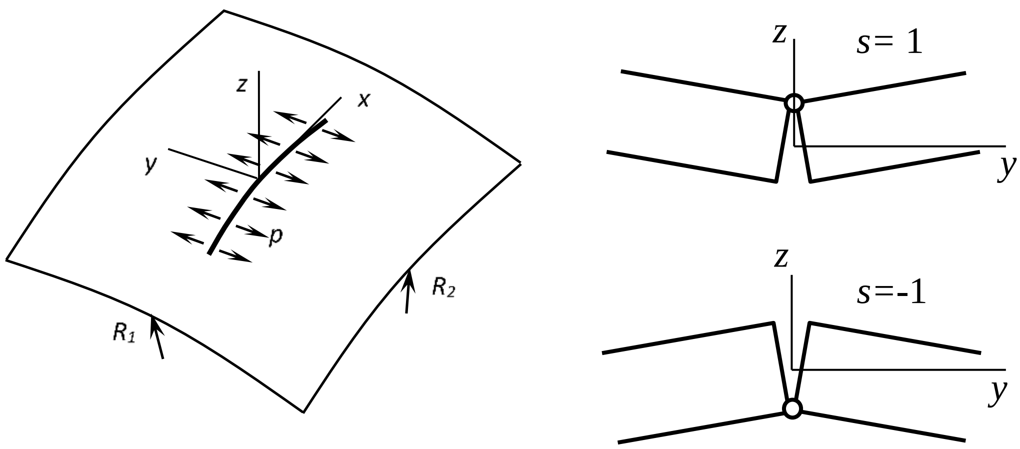


Рис. 2.2. Серединна поверхня оболонки з тріщиною
та схема шарнірного з’єднання берегів розрізу у лицьовій поверхні

Дослідження проводили у двовимірній постановці на базі класичної теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява. Приймаючи двовимірну модель, ми свідомо нехтуємо низкою подробиць, які могли би бути враховані за тривимірного підходу, вважаючи їх несуттєвими порівняно з ключовим, на наш погляд, явищем – появою істотного локального вигину в однобічно підкріпленій конструкції.

Виберемо систему квазідекартових координат $Oxyz$ з початком в центрі розрізу та віссю абсцис вздовж його лінії (рис. 2.2). Отож, тріщина займає контур $L = (-l,\, l) \times \{y = \pm 0\}$.

У безмежній області поза розрізом $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus L$ справджуються ключові рівняння теорії пологих оболонок, які включають рівняння сумісності деформацій та рівняння рівноваги:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0\,,\ \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k \varphi + q = 0\,,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L\,. \qquad (2.12)$$

Припущення про малу товщину покриття порівняно з товщиною оболонки дає змогу не ускладнювати задачу змінами інтегральних жорсткостей B та D.

Перейдемо до розгляду ситуації на тріщині. Припущення про гнучкість покриття призводить до моделі ідеального шарніру, який не передає згинальний момент.

Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщину в оболонці з абсолютно гнучким покриттям доцільно трактувати як математичний розріз, береги якого з’єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = sh$ ($s = +1$ для зовнішнього чи $s = -1$ для внутрішнього підкріплення). У такому разі істотно порушується симетрія напружень по товщині оболонки, і в околі розрізу, крім вигину за рахунок кривини серединної поверхні, виникає місцевий вигин за рахунок однобічного підкріплення.

Розглянемо крайові умови шарнірного з’єднання берегів розрізу у лицьовій поверхні.

Ілюстрації кінематичної та силової схем взаємодії у шарнірному з’єднанні подані рис. 2.3.

Із умови неперервності нормальних переміщень у шарнірному з’єднанні на лицьовій поверхні $z = sh$ маємо:

$$[U_y](x,\ sh) = 0,\ (x,\ y) \in L.$$

Тут і далі

$[f] = f^+ - f^-$;

$f^{\pm}$ – граничні значення функції f на берегах розрізу $y = \pm 0$.

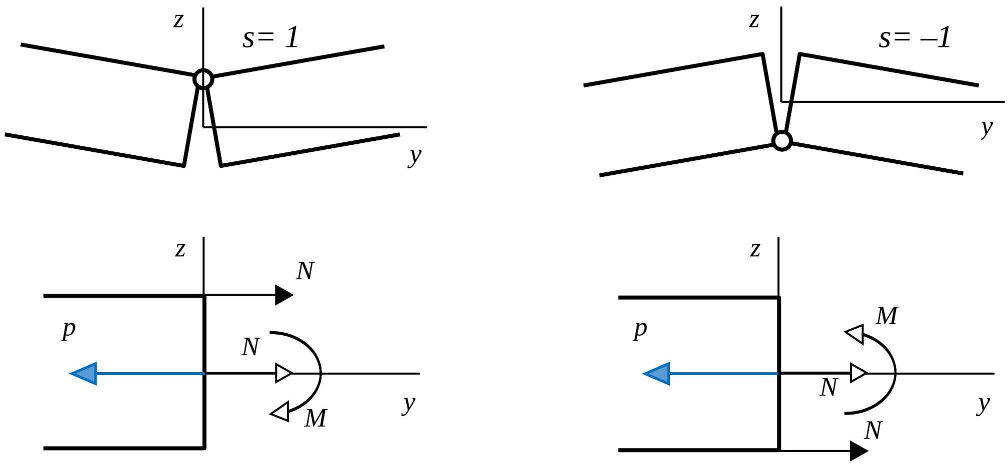


Рис. 2.3. Кінематична та силова схема взаємодії берегів через шарнірне з’єднання

Враховуючи лінійний розподіл переміщень по товщині оболонки (2.1), дістаємо кінематичну крайову умову на розрізі:

$$[u_y] - sh[\theta_y] = 0, \quad (x, y) \in L, \tag{2.13}$$

де

$[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки;

$[\vartheta_y] = [\partial w / \partial y]$ – стрибок кута повороту нормалі.

Дотичні переміщення при переході через розріз змінюються неперервно [155]:

$$[u_x] = 0,\ [w] = 0,\ [\theta_x] = 0, \quad (x, y) \in L. \tag{2.14}$$

Нормальне зусилля N, яке діє у покритті на лінії тріщини, замінимо його статичним еквівалентом: мембранним зусиллями N, та компенсуючими згинальним M моментом. За правилом паралельної трансляції сил $M = shN$. Враховуючи прикладене навантаження, на берегах розрізу $y = \pm 0$ отримаємо внутрішні зусилля та моменти:

$$N_y^{\pm} = N - p, \quad M_y^{\pm} = M = shN. \tag{2.15}$$

Виключаючи із співвідношень (2.15) шарнірну реакцію N, одержуємо силову крайову умову на розрізі:

$$M_y^{\pm} - sh(N_y^{\pm} + p) = 0, \quad (x, y) \in L. \tag{2.16}$$

Враховуючи неперервність зусиль та моментів при переході через розріз ($[N_y] = 0$, $[M_y] = 0$), умови (2.16) подамо у формі:

$$M_y - sh(N_y + p) = 0, \quad (x, y) \in L, \tag{2.17}$$

де $N_y(x, 0) = \dfrac{N_y^+ + N_y^-}{2}$, $M_y(x, 0) = \dfrac{M_y^+ + M_y^-}{2}$ – середні значення мембранного зусилля та згинального моменту на розрізі.

При $p = 0$ крайова умова (2.17) співпадає з аналогічною умовою для ненавантаженої тріщини, вперше описаною І. П. Шацьким у публікаціях [134, 155, 156, 157].

Через симетрію розглянутого об'єкта та навантаження відносно осі абсцис крайові умови для зсувних зусиль та крутного моменту на тріщині не розглядаємо.

У безмежно віддалених точках усі компоненти напруженого стану загасають:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0,\ M_x = M_{xy} = M_y = 0,\ (x,y) \to \infty.$$

Підсумуємо сказане. У рамках моделі шарнірного з'єднання берегів тріщини ми сформулювали крайову задачу теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізі:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0,\ \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k \varphi + q = 0,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \qquad (2.18)$$

$$[u_y] - sh[\vartheta_y] = 0,\ M_y - sh(N_y + p) = 0,\ (x,y) \in L; \qquad (2.19)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0,\ M_x = M_{xy} = M_y = 0,\ (x,y) \to \infty. \qquad (2.20)$$

2.2.2. Сингулярні інтегральні рівняння задачі

Сформульовану задачу доцільно розв'язувати методом сингулярних інтегральних рівнянь [35, 36, 44, 67]. У задачах механіки оболонок з тріщинами цей метод є аналогом методу переміщень, який застосовується у механіці стержневих систем для розкриття статичної невизначуваності. За невідомі приймаються стрибки переміщень та кутів повороту на берегах розрізу. За фундаментальними розв'язками ключових рівнянь на підставі теореми взаємності робіт будуються вирази зусиль та моментів в області через функції стрибка. Розподіл невідомих стрибків уздовж контура тріщини встановлюється на підставі крайових умов задачі. Наостанок за знайденими стрибками розраховуються усі характеристики напружено-деформованого стану.

Запишемо інтегральні подання зусиль та моментів на лінії $y = 0$ через похідні від функцій стрибка:

$$N_y(x,0)=\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi-x)[u_y]'(\xi)-K_{13}(\xi-x)c[\theta_y]'(\xi)\right\}d\xi\,, \quad (2.21)$$

$$M_y(x,0)=\frac{Bc}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{31}(\xi-x)[u_y]'(\xi)-K_{33}(\xi-x)c[\theta_y]'(\xi)\right\}d\xi\,. \quad (2.22)$$

Ядра цих зображень виражаються через фундаментальний розв'язок рівнянь (2.18) і подаються інтегралами Фур'є [35, 36]:

$$K_{jk}(z)=\left[\delta_{jk}\,\mathrm{Re}+(1-\delta_{jk})\,\mathrm{Im}\right]\int_0^\infty g_{jk}\left(\gamma\frac{\sqrt{-i}}{s}\right)\sin zs\,ds,\; j,k=1,3. \quad (2.23)$$

У формулі (2.23) позначено:

$$g_{11}(\tau)=\frac{r(\tau)}{\omega(\tau)},\quad g_{13}(\tau)=g_{31}(\tau)=-r(\tau)\left(1+\frac{\nu}{\omega(\tau)}\right),$$

$$g_{33}(\tau)=r(\tau)\left(2-2\nu+\beta_1\tau^2+\omega(\tau)-\frac{\nu^2}{\omega(\tau)}\right),$$

$$r(\tau)=\frac{2}{\sqrt{2+\beta_1\tau^2+2\omega(\tau)}},\quad \omega(\tau)=\sqrt{1+\beta_2\tau^2},\quad \tau=\frac{\gamma\sqrt{-i}}{s};$$

$$c=\frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}},\;\gamma=\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}},\;z=\xi-x;$$

δ_{jk} – символ Кронекера.

Ядра з однаковими індексами містять сингулярні доданки типу Коші $\frac{a_{jk0}}{\xi-x}\delta_{jk}$, регулярна частина ядер залежить від кривини і форми поверхні оболонки та від орієнтації дефекту.

Диференціюючи першу з умов (2.16) та підставляючи вирази (2.21), (2.22) у другу крайову умову (2.16), приходимо до системи, яка складається з лінійного та інтегрального рівняння відносно двох невідомих – похідних від розривів переміщення та кута повороту нормалі:

$$[u_y]'(x) - sh[\vartheta_y]'(x) = 0\,, \tag{2.24}$$

$$\frac{Bc}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\right\}d\xi\; -$$

$$- sh\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\right\}d\xi = 0\,, \quad x \in (-l,\, l)\,. \tag{2.25}$$

Виключаючи із системи рівнянь (2.24), (2.25) стрибок кута повороту нормалі, отримуємо одне сингулярне інтегральне рівняння відносно розкриття тріщини у серединній поверхні:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}K(\xi - x)[u_y]'(\xi)d\xi = -p\,, \quad x \in (-l,\, l)\,; \tag{2.26}$$

$$K(z) = K_{11}(z) - \frac{2sK_{13}(z)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{K_{33}(z)}{3(1-\nu^2)}\,.$$

Це ядро містить сингулярний доданок $\dfrac{a_0}{\xi - x}$, де $a_0 = a_{110} + \dfrac{a_{330}}{3(1-\nu^2)}$. Для однозначного розв’язку сингулярного рівняння (2.26) у класі функцій з необмеженою на кінцях відрізка похідною треба задатися значенням інтеграла $\int_{-l}^{l}[u_y]'(\xi)d\xi$ [166], а саме – виконати умову однозначності переміщень при обході контура L:

$$\int_{-l}^{l}[u_y]'(\xi)d\xi = 0\,. \tag{2.27}$$

Для знаходження самої функції $[u_y](x)$ шляхом інтегрування похідної

$[u_y]'(x)$ слід задатися значенням $[u_y]$ на одному з кінців розрізу:

$$[u_y](l) = 0 \text{ або } [u_y](-l) = 0. \tag{2.28}$$

Рівності (2.27), (2.28) виконуються тоді і тільки тоді, коли мають місце умови:

$$[u_y](\pm l) = 0. \tag{2.29}$$

Надалі ми будемо користуватися співвідношеннями (2.27), (2.28) або (2.29) як еквівалентними.

Таким чином, вихідну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (2.18)–(2.20) зведено до задачі (2.26), (2.29) для сингулярного інтегрального рівняння.

Подальший хід досліджень наступний. За знайденими $[u_y]'$ та $[u_y]$ відповідно до формул (2.13), (2.24) обчислюємо

$$[\vartheta_y]'(x) = \frac{[u_y]'(x)}{sh}, \quad [\vartheta_y](x) = \frac{[u_y](x)}{sh}.$$

Відтак за інтегральним виразом (2.21) знаходимо мембранне зусилля на лінії розрізу

$$N_y(x,\,0) = \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x) - s\,\frac{K_{13}(\xi - x)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right\}[u_y]'(\xi)\,d\xi\,,$$

та реакцію в шарнірі

$$N(x) = N_y(x,\,0) + p = p + \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x) - s\,\frac{K_{13}(\xi - x)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right\}[u_y]'(\xi)\,d\xi\,. \tag{2.30}$$

На завершення цього пункту побудуємо іще регулярний вираз для шарнірної реакції. Запишемо співвідношення (2.30) та рівняння (2.26) разом у такому вигляді:

$$N(x) = p + \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x) - s\frac{K_{13}(\xi - x)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right\}[u_y]'(\xi)\,d\xi\ ,$$

$$0 = p + \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}K(\xi - x)[u_y]'(\xi)d\xi .$$

Ядро першого інтеграла містить сингулярний доданок Коші $\frac{a_{110}}{\xi - x}$, ядро другого інтеграла – $\frac{a_0}{\xi - x}$.

Домножимо друге рівняння на $\frac{a_{110}}{a_0}$ і віднімемо від першого. Результат буде такий:

$$N(x) = \left(1 - \frac{a_{110}}{a_0}\right)p + \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x) - \frac{s}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}K_{13}(\xi - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{110}}{a_0}K(\xi - x)[\right\}u_y]'(\xi)\,d\xi$$

або

$$N(x) = \left(1 - \frac{a_{110}}{a_0}\right)p + \frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}L(\xi - x)[u_y]'(\xi)\,d\xi\ , \tag{2.31}$$

$$L(z) = \left(1 - \frac{a_{110}}{a_0}\right)K_{11}(z) - s\left(1 - 2\frac{a_{110}}{a_0}\right)\frac{K_{13}(z)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - \frac{a_{110}}{a_0}\frac{K_{33}(z)}{3(1-\nu^2)} .$$

Враховуючи, що $a_0 = a_{110} + \frac{a_{330}}{3(1-\nu^2)}$, після перетворень подамо ядро $L(z)$ у формі

$$L(z)=\frac{1}{3(1-\nu^2)a_{110}+a_{330}}\left\{a_{330}K_{11}(z)-\right.$$

$$\left.-s\left(a_{330}-3(1-\nu^2)a_{110}\right)\frac{K_{13}(z)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}-a_{110}K_{33}(z)\right\},$$

із якої видно, що $L(z)$ не містить сингулярних членів. Справді, $K_{13}(z)$ – регулярне, а

$$a_{330}\frac{a_{110}}{z}-a_{110}\frac{a_{330}}{z}=0.$$

2.2.3. Критерії граничної рівноваги.

Задля аналізу гранично рівноважного стану вкритої оболонки з тріщиною скористаємось підходами лінійної механіки руйнування та класичної теєорії міцності.

Відомо [35, 67], що у рамках класичної лінійної теорії оболонок Кірхгофа-Лява асимптотичний розподіл зусиль, моментів та переміщень в околі вершин тріщини у оболонці має вигляд:

$$\begin{pmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{pmatrix}=\frac{K_N^{\pm}}{4\sqrt{2r}}\begin{bmatrix} 5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2} \\ 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{K_S^{\pm}}{4\sqrt{2r}}\begin{bmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2}+3\sin\frac{3\theta}{2} \\ -3\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}+O(r^0),$$

$$(3+\nu)\begin{pmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_M^{\pm}}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} (3+5\nu)\cos\frac{\theta}{2} - (7+\nu)\cos\frac{3\theta}{2} \\ (5+3\nu)\cos\frac{\theta}{2} + (7+\nu)\cos\frac{3\theta}{2} \\ -(1-\nu)\sin\frac{\theta}{2} + (7+\nu)\sin\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{K_H^{\pm}}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} -(3+5\nu)\sin\frac{\theta}{2} + (5+3\nu)\sin\frac{3\theta}{2} \\ -(5+3\nu)\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ -(1-\nu)\cos\frac{\theta}{2} + (5+3\nu)\cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + O(r^0)\,,$$

$$(3+\nu)\begin{pmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{pmatrix} = \frac{K_M^{\pm}}{\sqrt{2r^3}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \frac{K_H^{\pm}}{\sqrt{2r^3}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + O(r^{-1})\,;$$

$$B\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = K_N^{\pm}\sqrt{\frac{r}{2}} \begin{pmatrix} \frac{5-3\nu}{1+\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ \frac{\nu-7}{1+\nu}\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} +$$

$$+K_S^{\pm}\sqrt{\frac{r}{2}} \begin{pmatrix} \frac{3\nu-5}{1+\nu}\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \\ \frac{\nu-7}{1+\nu}\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} + O(r)\,,$$

$$(3+\nu)D\,w = \frac{\sqrt{2r^3}}{6} K_M^{\pm}\left(-3\cos\frac{\theta}{2} + \frac{7+\nu}{1-\nu}\cos\frac{3\theta}{2}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2r^3}}{6} K_H^{\pm}\left(3\sin\frac{\theta}{2} - \frac{5+3\nu}{1-\nu}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + O(r^2)\,.$$

Тут

r, θ – полярні координати з центром у вершині тріщини;

K_N, K_S – коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль;

K_M, K_H – коефіцієнти інтенсивності моментів.

За знайденими функціями стрибка коефіцієнти асимптотики K_N та K_M обчислюються з використанням відомих формул [36]:

$$K_N^{\pm} = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \to \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_S^{\pm} = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \to \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_x]'(x);$$

$$K_M^{\pm} = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \to \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x),$$

$$K_H^{\pm} = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \to \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_x]'(x); \tag{2.32}$$

або

$$K_N^{\pm} = \frac{B\sqrt{l}}{4} \lim_{x \to \pm l} \frac{[u_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

$$K_S^{\pm} = \frac{B\sqrt{l}}{4} \lim_{x \to \pm l} \frac{[u_x](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}};$$

$$K_M^{\pm} = (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D\sqrt{l}}{4} \lim_{x \to \pm l} \frac{[\theta_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

$$K_H^{\pm} = (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D\sqrt{l}}{4} \lim_{x \to \pm l} \frac{[\theta_x](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \tag{2.33}$$

Як показано у статті [150], шарнірне з’єднання берегів тріщини у лицьовій поверхні блокує їхнє взаємне проковзування. Через це ми розглядаємо лише випадок симетричного мембранного навантаження. Таким чином, враховуючи, що $[u_x] = 0$, $[w] = 0$, $[\theta_x] = 0$, із формул (2.32), (2.33) слідує, що $K_S^{\pm} = 0$, $K_H^{\pm} = 0$, а отже, маємо симетричний розподіл напружень відносно лінії розташування розрізу.

Для оцінки граничної рівноваги оболонок з тріщинами за наявності гнучкого покриття пропонуємо розглядати два можливі механізми руйнування композиції:

1) розповсюдження тріщини “розтягу-згину” у оболонці без порушення цілісності покриття;

2) розрив покриття з наступним, можливо, поширенням уже наскрізної тріщини.

Граничний стан пластини за першим із вказаних механізмів руйнування оцінимо, застосовуючи відомий енергетичний критерій лінійної механіки руйнування за комбінованого розтягу та згину [66, 67, 83]:

$$G \equiv \frac{\pi}{4h^2 E}\left\{K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu}\left(\frac{K_M}{h}\right)^2\right\} = 2\gamma_*; \tag{2.34}$$

Тут

G – потік енергії у вершину тріщини;

γ_* – питома поверхнева енергія матеріалу оболонки.

Відзначимо також, що вираз (2.34) для потоку енергії у вершину тріщини нормального відриву (інтенсивність вивільненої пружної енергії при утворенні одиниці площі поверхні розриву) отриманий за припущення, що тріщина може підростати по товщині оболонки рівномірно. Крім того, приймається, що тріщина за умов комбінованого розтягу та згину почне поширюватися, коли інтенсивність вивільненої енергії (рушійна сила тріщини) досягає того ж значення, при якому розпочнеться розтріскування у разі дії самого лише розтягу.

Для описання другого механізму руйнування застосуємо класичну теорію міцності, а саме теорію максимальних нормальних напружень, відповідно до якої небезпечний стан для покриття наступає тоді, коли найбільше зусилля у покритті (в шарнірному з’єднанні) досягає свого граничного значення:

$$\max_{x\in[-l,\,l]} N(x) = N_* . \qquad (2.35)$$

Тут

$N_* = \sigma_* h_c$ – допустиме зусилля розтягу для покриття;

σ_* – допустиме напруження розтягу для матеріалу покриття;

h_c – товщина покриття.

Зауважимо, що характеристики γ_* та N_* (або σ_*) визначаються експериментально.

Уведення додаткового критерію руйнування покриття відрізняє це дисертаційне дослідження від ранніх робіт І. П. Шацького [134, 158, 159, 156, 157], у яких покриття вважалося необмежено міцним.

Зазначимо також, що механізм проростання тріщини у матеріал покриття та питання адгезійної міцності у прийнятій тут двовимірній постановці не розглядаються.

2.3. Асимптотичний та числовий методи розв’язування сингулярного інтегрального рівнянь

Для побудови розв’язку сингулярного інтегрального рівняння сформульованої задачі використовувався асимптотичний метод малого параметра [171] та числовий метод механічних квадратур [170, 172, 173]. Ми обрали варіанти цих методів, обґрунтовані та детально описані в монографіях [35, 36]. У наступних пунктах подаємо розрахункові схеми цих методів стосовно задач, які розглядаються в роботі.

2.3.1. Метод малого параметра.

На проміжку $t \in (-1, 1)$ розглянемо сингулярне інтегральне рівняння виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\tau - t)\, f'(\tau) d\tau = F(t), \quad t \in (-1, 1); \tag{2.36}$$

з додатковою умовою

$$\int_{-1}^{1} f'(\tau) d\tau = 0. \tag{2.37}$$

Вважаємо, що ядро та права частина інтегрального рівняння (2.36) допускають степенево-логарифмічні розвинення в ряди за малим параметром λ, тобто:

$$K(\tau - t) = \frac{a_0}{\tau - t} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \left(a_p + b_p \ln \lambda |\tau - t|\right)\left(\lambda(\tau - t)\right)^p; \tag{2.38}$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[n/2]} F_{nm}(t) \lambda^n \ln^m \lambda.$$

Через наявність у розкладах (2.38) логарифмічних членів похідну від невідомої функції теж шукаємо у вигляді степенево-логарифмічного розкладу:

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{[n/2]} f'_{nm}(t) \lambda^n \ln^m \lambda. \tag{2.39}$$

Підставимо розвинення (2.38), (2.39) у співвідношення (2.36), (2.37). Перемноживши асимптотичні ряди та прирівнявши вирази при однакових степенях λ і $\ln\lambda$, отримаємо ланцюжок сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші, які рекурентно визначають коефіцієнти розвинення невідомої функції:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{a_0}{\tau-t}f'_{00}(\tau)d\tau=F_{00}(t)\,,\ t\in(-1,1)\,;\quad \int_{-1}^{1}f'_{00}(\tau)d\tau=0\,;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{a_0}{\tau-t}f'_{nm}(\tau)+P_{nm}(\tau,t)\right]d\tau=F_{nm}(t)\,,\ t\in(-1,1)\,;\quad \int_{-1}^{1}f'_{nm}(\tau)d\tau=0\,,\quad (2.40)$$

де

$$P_{nm}(\tau,t)=\sum_{p=1}^{n-1-2m}\left(a_p+b_p\ln|\tau-t|\right)(\tau-t)^p f'_{n-1-p,\,m}(\tau)+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1-2(m-1)}b_p(\tau-t)^p f'_{n-1-p,\,m-1}(\tau)\,. \quad (2.41)$$

Перенесемо вирази $P_{nm}(\tau,t)$ у праву частину і, використовуючи формулу обернення для сингулярного інтеграла Коші, будуємо аналітичні розв'язки рівнянь (2.40) відносно $f'_{nm}(\tau)$. При цьому $P_{nm}(\tau,t)$ поки що вважаються відомими.

У результаті дістаємо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів розвинення функції $f'(t)$:

$$f'_{00}(t)=-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t}F_{00}(\tau)d\tau\,;$$

$$f'_{nm}(t)=-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t}\Bigg\{F_{nm}(\tau)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Bigg[\sum_{p=1}^{n-1-2m}\left(a_p+b_p\ln|\xi-\tau|\right)(\xi-\tau)^p f'_{n-1-p,\,m}(\xi)+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1-2(m-1)} b_p (\xi-\tau)^p f'_{n-1-p,\, m-1}(\xi)\Bigg]d\xi\Bigg\}d\tau. \tag{2.42}$$

Коефіцієнти розвинення первісної функції $f(t)=\int\limits_{-1}^{t} f'(\tau)d\tau$ в асимптотичний ряд

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[n/2]} f_{nm}(t)\lambda^n \ln^m\lambda$$

отримуються інтегруванням:

$$f_{nm}(t)=\int\limits_{-1}^{t} f'_{nm}(\tau)d\tau.$$

Для проміжних обчислень у рекурентних формулах використовуються інтеграли [36, 174, 175]

$$H_r(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\xi^r\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-t}d\xi,\quad |t|<1; \tag{2.43}$$

$$H_0(t)=-t;\ H_1(t)=-t^2+\frac{1}{2};\ H_{2r}(t)=tH_{2r-1}(t);$$

$$H_{2r+1}(t)=-t^{2(r+1)}+\sum_{s=0}^{r}\frac{(2r-2s-1)!!}{(2r-2s+2)!!}t^{2s},\quad r=1,2,\ldots;\quad (-1)!!=(0)!!=1.$$

$$L_r(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\xi^r\ln|\xi-t|}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi,\quad |t|<1; \tag{2.44}$$

$$L_0(t)=\ln 2;\ \ L_1(t)=H_0(t)=-t;\ \ L_2(t)=-\frac{t^2}{2}-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4};$$

$$L_r(t)=\frac{1}{r}\left[H_{r-1}(t)+(r-1)L_{r-2}(t)\right],\quad r=3,4,\ldots$$

2.3.2. Метод механічних квадратур.

Для побудови числового розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь типу (2.36) у роботі використано варіант методу механічних квадратур, описаний в працях [36, 172].

Ядро інтегрального рівняння подамо як суму його сингулярної та регулярної частин:

$$K(\tau - t) = \frac{a_0}{\tau - t} + R(\tau - t).$$

Інтегральне рівняння задачі набуде вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a_0}{\tau - t} + R(\tau - t)\right) f'(\tau)d\tau = F(t), \quad t \in (-1, 1). \tag{2.45}$$

Його розв'язок за додаткової умови (2.37) шукаємо у класі функцій, необмежених на кінцях інтервалу:

$$f'(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1 - t^2}},$$

де $\varphi(t)$ – регулярна на $t \in (-1, 1)$.

Для апроксимації інтегралів у рівнянні (2.45) скористаємось квадратурними формулами Ґауса. Зокрема, для сингулярного інтеграла має місце подання:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)} = \frac{\pi}{M}\sum_{q=1}^{M}\frac{\varphi(\tau_q)}{\tau_q - t} + \pi\varphi(t)\frac{U_{M-1}(t)}{T_M(t)}, \tag{2.46}$$

де

$T_M(t) = \cos(\arccos t)$, $U_{M-1}(t) = \dfrac{\sin(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ – многочлени Чебишева відповідно першого та другого роду;

$\tau_q = \cos\frac{2q-1}{M}\pi$, $\quad q = \overline{1,\ M}$, – квадратурні вузли, які є коренями рівняння $T_M(t) = 0$.

Залишок квадратурної формули (2.46) зануляється у вузлах $t_r = \cos\frac{\pi r}{M}$, $r = \overline{1,\ M-1}$, що є нулями полінома Чебишева другого роду $U_{M-1}(t)$. Тоді має місце апроксимація:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_r)} = \frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{\varphi(\tau_m)}{\tau_m - t_r}. \qquad (2.47)$$

Для регулярного інтеграла з вагою квадратурна формула Ґауса має вигляд

$$\int_{-1}^{1} R(\tau - t)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = \frac{\pi}{M}\sum_{q=1}^{M} R(\tau_q - t)\varphi(\tau_q), \qquad (2.48)$$

і придатна для будь-яких t.

Дискретний аналог інтегрального рівняння (2.45) з додатковою умовою (2.37) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\sum\limits_{q=1}^{M}\left(\dfrac{a_0}{\tau_q - t_r} + R(\tau_q - t_r)\right)\varphi(\tau_q) = F(t_r), \quad \overline{r = 1,\ M-1}; \\ \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{q=1}^{M}\varphi(\tau_q) = 0. \end{cases} \qquad (2.49)$$

Отож, для знаходження набору M невідомих $\varphi(\tau_q)$ отримано систему M лінійних алгебраїчних рівнянь (2.49).

Систему рівнянь (2.49) можна переписати, не виділяючи сингулярну частину ядра:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\sum\limits_{q=1}^{M} K(\tau_q - t_r)\varphi(\tau_q) = F(t_r), \quad \overline{r = 1,\, M-1}; \\ \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{q=1}^{M} \varphi(\tau_q) = 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Функцію $\varphi(t)$ для будь-якого значення аргументу можна знайти, скориставшись інтерполяційним поліномом Лагранжа по квадратурних вузлах:

$$\varphi(t) = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^{q+1}\varphi(\tau_q)\frac{T_M(t)\sqrt{1-\tau_q^2}}{t-\tau_q}. \tag{2.51}$$

Зокрема, значення функцій у точках $t = \pm 1$, необхідні для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершини тріщини, підраховуються за формулами

$$\varphi(1) = -\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^{q}\varphi(\tau_q)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2q-1}{4M}\pi\right),$$

$$\varphi(-1) = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^{q+M}\varphi(\tau_q)\,\mathrm{tg}\left(\frac{2q-1}{4M}\pi\right). \tag{2.52}$$

Саму функцію стрибка $f(t)$ можна відновити зваженим інтегрування виразу (2.51)

$$f(t)=\int_{-1}^{t}f'(\tau)d\tau=\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^{q+1}\varphi(\tau_q)\sqrt{1-\tau_q^2}\int_{-1}^{t}\frac{T_M(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\tau_q)}d\tau. \qquad (2.53)$$

Замість того, щоб обчислювати останній інтеграл у формулі (2.53), на практиці поступали простіше:

$$f(t)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(\tau-t)\,f'(\tau)d\tau=-\frac{\pi}{2M}\sum_{q=1}^{M}\mathrm{sgn}(\tau_q-t)\varphi(\tau_q). \qquad (2.54)$$

2.4. Висновки до розділу 2

В даному розділі з використанням моделі розрізу з шарнірно з’єднаними берегами сформульовано задачу про розтяг пологої оболонки з тріщиною за наявності покриття в одній з лицьових поверхонь, яке деформується сумісно з підкладкою. Особливість постановки – взаємозв’язані крайові умови на розрізі, які відображають неперервність переміщень на сполучених берегах та визначають згинальний момент. утворений переносом шарнірної реакції у серединну поверхню оболонки.

У пропонованій двовимірній постановці роль однобічного покриття зводиться виключно до двох чинників: в задачі пружної рівноваги – це сполучення берегів тріщини в лицьовій поверхні оболонки з можливістю їх розвороту, в задачі граничної рівноваги – це урахування обмеженої міцності покриття.

Крайова задача теорії пологих оболонок зведена до сингулярного інтегрального рівняння відносно розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки.

Наведено асимптотику зусиль та моментів в околі вершин тріщини. Оцінку граничної рівноваги покритої оболонки з тріщиною пропонується проводити за двома критеріями: розтріскування оболонки та міцності покриття.

Описано відомі асимптотичний метод малого параметра та числовий метод механічних квадратур, які використовуються в роботі для розв’зування сингулярних інтегральних рівнянь у класі функцій, необмежених на кінцях проміжку інтегрування.

Основні результати розділу 2 викладено у публікаціях автора [1, 2, 6–9, 13, 14].

РОЗДІЛ 3
АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ ВКРИТОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ

У даному розділі виконано аналітико-числове дослідження напружено-деформованого стану та міцності вкритої пологої оболонки з тріщиною за дії на берегах дефекту сталого навантаження розтягу. Для оболонки двоякої кривини з тріщиною, орієнтованою у головному напрямку серединної поверхні, побудовано асимптотичний розв’язок задачі у першому оболонковому наближенні. За критеріями крихкого руйнування та класичної теорії міцності отримано наближені аналітичні формули для граничних навантажень. Для сферичної оболонки з меридіональною тріщиною та для циліндричної оболонки з поздовжньою або поперечною тріщиною виконано числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, шарнірної реакції та граничних навантажень. Проведено порівняння асимптотичних та числових результатів. Встановлено діапазон застосовності асимптотичних формул.

3.1. Асимптотичний аналіз граничної рівноваги вкритої оболонки з тріщиною вдовж лінії кривини

3.1.1. Побудова асимптотичного розв’язку.

Нехай прямолінійна в плані наскрізна тріщина розташована вздовж лінії кривини серединної поверхні оболонки, а оболонка з тріщиною підсилена гнучким покриттям на одній із лицьових поверхонь $z = sh$ ($s = +1$ або $s = -1$), яке деформується сумісно з підкладкою. В рамках запропонованої двовимірної моделі шарнірного з’єднання берегів розрізу дослідимо напружено-деформований стан та граничну рівновагу розглянутої композиції у разі навантаження берегів тріщини самозрівноваженими мембранними зусиллями $p = \mathrm{const}$.

Припускаючи, що мінімальний радіус кривини оболонки R значно перевищує розмір тріщини ($R >> 2l$), для побудови наближеного аналітичного розв'язку задачі скористаємося методом малого параметра, описаним у пункті 2.3.1.

Уведемо безрозмірні змінні $t = x/l$, $\tau = \xi/l$. Тоді інтегральне рівняння (2.26) запишеться так:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-1}^{1} K(\tau - t)[u_y]'(\tau)d\tau = -p, \quad t \in (-1, 1); \tag{3.1}$$

$$K(\zeta) = K_{11}(\zeta) - \frac{2sK_{13}(\zeta)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{K_{33}(\zeta)}{3(1-\nu^2)},$$

$$K_{jk}(\zeta) = lK_{jk}(l\zeta) = \left[\delta_{jk}\,\mathrm{Re} + (1-\delta_{jk})\,\mathrm{Im}\right]\int_0^\infty g_{jk}\left(\lambda\frac{\sqrt{-i}}{s}\right)\sin(\zeta s)\,ds, \; j,k = 1,3; \tag{3.2}$$

$$\lambda = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{Rh}}\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}, \quad \zeta = \tau - t.$$

Вирази для $g_{jk}(\tau)$ тут такі ж, як і у формулах (2.23).

Додаткові умови (2.29) набувають вигляду

$$[u_y](\pm 1) = 0. \tag{3.3}$$

Перейдемо до побудови наближеного аналітичного розв'язку задачі (3.1), (3.3) у вигляді асимптотичного розкладу за малим безрозмірним параметром максимальної кривини λ.

Невласні інтеграли (3.2) виражаються асимптотичними рядами за степенево-логарифмічною шкалою:

$$K_{jk}(\tau - t) = \frac{a_{jk0}}{\tau - t} + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}\left(a_{jkp} + b_{jkp}\ln\lambda\,|\tau - t|\right)\left(\lambda(\tau - t)\right)^p. \tag{3.4}$$

Нульові та перші коефіцієнти цих розкладів визначаються поведінкою Фур'є-образів $g_{jk}\left(\lambda\frac{\sqrt{-i}}{s}\right)$ при великих s і обчислюються за формулами [35, 36, 93, 157]:

$$a_{110}=1,\ a_{130}=a_{310}=0,\ a_{330}=3-2\nu-\nu^2,$$

$$a_{111}=-\frac{\beta_1+5\beta_2}{32}\pi\text{B}-\frac{\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{24}\frac{3\beta_1^2-22\beta_1\beta_2+15\beta_2^2}{(\beta_1-\beta_2)^2}H(-\beta_1\beta_2),$$

$$a_{131}=a_{311}=\left[\frac{3(1+\nu)\beta_1^2+4(1+11\nu)\sqrt{\beta_1\beta_2^3}+(5+37\nu)\beta_2^2}{48\left(\sqrt{\beta_1}+\sqrt{\beta_2}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+b_{131}\left(\ln\frac{\gamma_0\left(\sqrt{\beta_1}+\sqrt{\beta_2}\right)}{4}-1\right)\right]H(\beta_1\beta_2)+$$

$$+\left[\frac{(1+\nu)(\beta_1+3\beta_2)}{16}+\frac{\beta_2^2}{12}\frac{3(1-3\nu)\beta_1-(1-7\nu)\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)^2}+\right.$$

$$\left.+b_{131}\left(\ln\frac{\gamma_0\sqrt{|\beta_1-\beta_2|}}{4}-1\right)\right]H(-\beta_1\beta_2),$$

$$a_{331}=\frac{(5+2\nu+\nu^2)\beta_1+(1+2\nu+5\nu^2)\beta_2}{32}\pi\text{B}+$$

$$+\frac{\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{24}\frac{3(5+2\nu+\nu^2)\beta_1^2-2(11+2\nu+11\nu^2)\beta_1\beta_2+3(1+2\nu+5\nu^2)\beta_2^2}{(\beta_1-\beta_2)^2}\times$$

$$\times H(-\beta_1\beta_2),$$

$$b_{111}=b_{331}=0,\ b_{131}=b_{311}=\frac{(1+\nu)\beta_1+(1+5\nu)\beta_2}{8}; \tag{3.5}$$

де

$$\text{B}=1-\frac{2}{\pi}\text{arctg}\frac{2\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{\beta_1+\beta_2}H(-\beta_1\beta_2),$$

$H(...)$ – функція Гевісайда,

а $\ln\gamma_0 = 0.5772...$ – стала Ейлера.

Для ядра $K(\zeta)$ відповідно отримаємо:

$$K(\tau - t) = \frac{a_0}{\tau - t} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \left(a_p + b_p \ln\lambda \,|\, \tau - t \,|\right)\left(\lambda(\tau - t)\right)^p; \tag{3.6}$$

де

$$a_0 = a_{110} + \frac{a_{330}}{3(1-\nu^2)},$$

$$a_p = a_{11p} - 2s \frac{a_{13p}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{a_{33p}}{3(1-\nu^2)},$$

$$b_p = b_{11p} - 2s \frac{b_{13p}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{b_{33p}}{3(1-\nu^2)}. \tag{3.7}$$

За процедурою, описаною в пункті 2.3.1, із інтегрального рівняння (3.1) знаходимо похідні від функцій стрибка у першому оболонковому наближенні:

$$[u_y]'(t) = \frac{pl}{B}\Psi(\lambda, t), \quad [\theta_y]'(t) = \frac{pshl}{3(1-\nu^2)D}\Psi(\lambda, t); \tag{3.8}$$

$$\Psi(\lambda, t) = -\frac{4t}{a_0\sqrt{1-t^2}}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left(a_1 + b_1\left(t^2 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right) + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right)\right].$$

Інтегруючи вирази (3.8), отримуємо з тією ж точністю формули для розривів переміщення та кута повороту нормалі:

$$[u_y](t) = \frac{pl}{B}\Phi(\lambda, t), \quad [\theta_y](t) = \frac{pshl}{3(1-\nu^2)D}\Phi(\lambda, t); \tag{3.9}$$

$$\Phi(\lambda,t)=\frac{4\sqrt{1-t^2}}{a_0}\left[1-\frac{\lambda^2}{2a_0}\left(a_1+b_1\left(\frac{2}{3}+\frac{t^2}{3}+\ln\frac{\lambda}{2}\right)\right)+O\left(\lambda^4\ln^2\lambda\right)\right],$$

За знайденими функціями (3.8), поданими у безрозмірних змінних, використовуючи формули (2.32), підрахували коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів в околі вершин тріщини:

$$K_N^{\pm}=\mp\frac{B}{4}\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\sqrt{1-t^2}[u_y]'(t),$$

$$K_M^{\pm}=\pm(3-2\nu-\nu^2)\frac{D}{4}\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\sqrt{1-t^2}[\theta_y]'(t). \qquad (3.10)$$

а, використовуючи вирази (2.30) або (2.31), – реакцію в шарнірі:

$$N(t)=p+\frac{B}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left\{K_{11}(\tau-t)-s\frac{K_{13}(\tau-t)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right\}[u_y]'(\tau)d\tau,$$

$$N(t)=\left(1-\frac{a_{110}}{a_0}\right)p+\frac{B}{4\pi}\int_{-1}^{1}L(\tau-t)[u_y]'(\tau)d\tau. \qquad (3.11)$$

Звісно, друга з формул (3.11) є прийнятнішою, оскільки у першому доданку в явному вигляді уже фігурує готовий нульовий (пластинковий) член асимптотичного розкладу.

Остаточно результати (3.10), (3.11) набудуть вигляду:
коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів –

$$K_N=\frac{3p\sqrt{l}(1+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda),\ \ K_M=-\frac{psh\sqrt{l}(3+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda); \qquad (3.12)$$

$$F(\lambda)=1-\frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1+b_1\left(1+\ln\frac{\lambda}{2}\right)\right]+O(\lambda^4\ln^2\lambda);$$

розподіл контактної реакції в шарнірі –

$$N(t) = \frac{p(3+\nu)}{2(3+2\nu)}\Omega(t,\,\lambda); \tag{3.13}$$

$$\Omega(t,\,\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[A_1 + B_1\left(\frac{1}{2} + t^2 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda),$$

$$A_1 = a_{111} + \frac{2s\nu}{3(1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}a_{131} - \frac{a_{331}}{a_{330}},$$

$$B_1 = \frac{2s\nu}{3(1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}b_{131}.$$

Якщо розглядати аналогічну задачу для оболонки з розрізом без покриття, то із класичних крайових умов

$$N_y = -p,\ M_y = 0,\ x \in (-l,\, l)$$

отримаємо відому систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left\{K_{11}(\tau - t)[u_y]'(\tau) - K_{13}(\tau - t)c[\theta_y]'(\tau)\right\}d\tau = -p,$$

$$\frac{Bc}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left\{K_{31}(\tau - t)[u_y]'(\tau) - K_{33}(\tau - t)c[\theta_y]'(\tau)\right\}d\tau = 0,\ t \in (-1,1),$$

наближеними розв’язками якої будуть функції [35, 36]:

$$[\bar{u}_y]'(t) = -\frac{4plt}{Ba_{110}\sqrt{1-t^2}}\left[1 - \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right)\right],$$

$$[\bar{\theta}_y](t) = -\frac{4phl}{Da_{110}\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\lambda^2}{2a_{330}}\left[a_{331} + b_{311}\left(t^2 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right).$$

Тоді

$$[\bar{u}_y](t) = \frac{4pl\sqrt{1-t^2}}{Ba_{110}}\left[1 - \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right)\right],$$

$$[\bar{\theta}_y](t) = \frac{4phl\sqrt{1-t^2}}{Da_{110}\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{\lambda^2}{2a_{330}}\left[a_{331} + b_{311}\left(\frac{2}{3} + \frac{t^2}{3} + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right).$$

Цим стрибкам відповідають коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів з поправками E. S. Folias [20] на кривину:

$$\bar{K}_N = p\sqrt{l}\left[1 - \frac{a_{111}}{2a_{110}}\lambda^2 + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right)\right],$$

$$\bar{K}_M = -\frac{ph\sqrt{l}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{\lambda^2}{2a_{110}}\left[a_{331} + b_{311}\left(1 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O\left(\lambda^4 \ln^2 \lambda\right). \qquad (3.14)$$

3.1.2. Формули для граничних навантажень.

Перейдемо до асимптотичного аналізу граничної рівноваги оболонки з тріщиною за наявності гнучкого покриття. Для цього скористаємося критеріями, описаними в пункті 2.2.3.

Підставляючи вирази (3.12) у критерій (2.34), визначаємо граничне навантаження, при якому настає ріст тріщини:

$$p_{1*} = p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}\frac{1}{F(\lambda)}}, \qquad (3.15)$$

де $p^0 = 2h\sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi l}}$ – руйнівне зусилля Гріффітса для пластини, послабленої прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$ з вільними від в’язей берегами.

Позбавляючись від знаменника, конкретизуємо формулу (3.15) з прийнятою тут точністю:

$$p_{1*} = p^0 \sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[a_1 + b_1 \left(1 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\}. \quad (3.16)$$

Граничний стан покриття оцінюємо за критерієм (2.35). Враховуючи вираз (3.13), знаходимо граничне навантаження, відповідальне за втрату цілісності покриття:

$$p_{2*} = N_* \frac{2(3+2\nu)}{3+\nu} \frac{1}{\max\limits_{t \in [-1,1]} \Omega(t, \lambda)},$$

або з прийнятою мірою точності маємо

$$p_{2*} = N_* \frac{2(3+2\nu)}{3+\nu} \min_{t \in [-1,1]} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[A_1 + B_1 \left(\frac{1}{2} + t^2 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\}. \quad (3.17)$$

За руйнівне зусилля слід, вочевидь, прийняти менше з p_{1*} та p_{2*}:

$$p_* = \min\{p_{1*}, p_{2*}\} \quad (3.18)$$

Нарешті, підставляючи вирази (3.14) у критерій (2.34) отримаємо руйнівне навантаження для оболонки з тріщиною без покриття, обчислене з прийнятою точністю:

$$p_{3*} = p^0 \left[1 + \frac{a_{111}}{2a_{110}} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right]. \quad (3.19)$$

При певних співвідношеннях параметрів задачі (для низькоміцних покриттів) може статися так, що $p_{2*} < p_{3*}$, тобто після руйнування покриття утримувальна здатність оболонки з тріщиною ще не вичерпана і є резерв для підвищення навантаження аж до p_{3*}.

Тому, замість виразу (3.18), під руйнівним навантаженням остаточно слід розуміти:

$$p_* = \max\{p_{3*}, \min\{p_{1*}, p_{2*}\}\}. \tag{3.20}$$

Формула (3.20) разом з наведеними вище виразами для p_{i*} аналітично описує залежність міцності оболонки з тріщиною від максимальної кривини λ і параметрів форми β_1, β_2 базової поверхні, від коефіцієнта Пуассона ν і характеристики тріщиностійкості p^0 матеріалу оболонки, та від параметра міцності покриття N_*.

Найбільш важливим для практики частковим значенням параметрів форми оболонки β_1, β_2 відповідають наступні вирази для граничних навантажень p_{i*}.

а) для псевдосферичної оболонки з розрізом вздовж лінії кривини ($\beta_1 = -\beta_2 = \pm 1$).

$$a_{111} = -\frac{5}{12}, \quad a_{131} = a_{311} = -\frac{1-\nu}{24} - \frac{\nu}{2}\ln\frac{\gamma_0\sqrt{2}}{4}, \quad a_{331} = \frac{10+3\nu+7\nu^2}{24},$$

$$b_{111} = b_{331} = 0, \quad b_{131} = b_{311} = -\frac{\nu}{2};$$

тоді

$$\begin{aligned} p_{1*} = p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}}\Bigg\{1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\Bigg[\frac{5-\nu-10\nu^2}{64}\pi \mp \\ \mp s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+11\nu}{48} + \frac{\nu}{4}\ln\frac{\gamma_0\sqrt{2}\lambda}{8}\right)\Bigg] + O(\lambda^4\ln^2\lambda)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$p_{2*} = N_*\frac{2(3+2\nu)}{3+\nu}\min_{t\in[-1,1]}\Bigg\{1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\Bigg[\frac{5-2\nu}{6(3-2\nu-\nu^2)} +$$

$$+\frac{s\nu}{3(1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{1-11\nu}{24}+\frac{\nu}{2}\left(t^2+\ln\frac{\gamma_0\sqrt{2}\lambda}{2}\right)\right)\Bigg]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\Bigg\},\qquad(3.22)$$

$$p_{3*}=p^0\left[1-\frac{5}{24}\lambda^2+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right];\qquad(3.23)$$

б) для циліндричної оболонки з поперечним розрізом ($\beta_1=1,\ \beta_2=0$)

$$a_{111}=-\frac{\pi}{32},\quad a_{131}=a_{311}=-\frac{1+\nu}{16}+\frac{1+\nu}{8}\ln\frac{\gamma_0}{4},\quad a_{331}=\frac{5+2\nu+\nu^2}{32}\pi,$$

$$b_{111}=b_{331}=0,\quad b_{131}=b_{311}=\frac{1+\nu}{8};$$

тоді

$$p_{1*}=p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}}\Bigg\{1+\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\Bigg[\frac{5+\nu+2\nu^2}{64}\pi-$$
$$-s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+\nu}{32}+\frac{1+\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\Bigg]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\Bigg\},\qquad(3.24)$$

$$p_{2*}=N_*\frac{2(3+2\nu)}{3+\nu}\min_{t\in[-1,1]}\Bigg\{1-\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\Bigg[\frac{1}{3-2\nu-\nu^2}\frac{\pi}{8}-$$
$$-\frac{s\nu}{24\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(t^2+\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\Bigg]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\Bigg\},\qquad(3.25)$$

$$p_{3*}=p^0\left[1-\frac{\pi}{64}\lambda^2+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right];\qquad(3.26)$$

в) для циліндричної оболонки з поздовжнім розрізом ($\beta_1=0,\ \beta_2=1$)

$$a_{111}=-\frac{5\pi}{32},\quad a_{131}=a_{311}=-\frac{1-7\nu}{48}+\frac{1+5\nu}{8}\ln\frac{\gamma_0}{4},\quad a_{331}=\frac{1+2\nu+5\nu^2}{32}\pi,$$

$$b_{111}=b_{331}=0\,,\quad b_{131}=b_{311}=\frac{1+5\nu}{8}\,;$$

тоді

$$p_{1*}=p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}}\left\{1-\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{7-\nu-10\nu^2}{64}\pi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{5+37\nu}{96}+\frac{1+5\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\right]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right\}, \qquad (3.27)$$

$$p_{2*}=N_*\frac{2(3+2\nu)}{3+\nu}\min_{t\in[-1,1]}\left\{1-\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{2-\nu}{3-2\nu-\nu^2}\frac{\pi}{4}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{s\nu}{3(1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{1-6\nu}{24}+\frac{1+5\nu}{8}\left(t^2+\ln\frac{\gamma_0\,\lambda}{8}\right)\right)\right]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right\}, \qquad (3.28)$$

$$p_{3*}=p^0\left[1-\frac{5\pi}{64}\lambda^2+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right]; \qquad (3.29)$$

г) для сферичної оболонки з меридіональним розрізом ($\beta_1=\beta_2=1$)

$$a_{111}=-\frac{3\pi}{16}\,,\quad a_{131}=a_{311}=\frac{5+48\nu}{48}+\frac{1+3\nu}{4}\ln\frac{\gamma_0}{2}\,,\quad a_{331}=\frac{3+2\nu+3\nu^2}{16}\pi\,,$$

$$b_{111}=b_{331}=0\,,\quad b_{131}=b_{311}=\frac{1+3\nu}{4}\,;$$

тоді

$$p_{1*}=p^0\sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}}\left\{1-\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{3-\nu-6\nu^2}{32}\pi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+s\sqrt{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1+7\nu}{32}+\frac{1+3\nu}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{4}\right)\right]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right\}, \qquad (3.30)$$

$$p_{2*}=N_*\frac{2(3+2\nu)}{3+\nu}\min_{t\in[-1,1]}\left\{1-\frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2}\left[\frac{3-\nu}{3-2\nu-\nu^2}\frac{\pi}{4}-\right.\right.$$

$$-\frac{s\nu}{3(1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(-\frac{1-\nu}{16}+\frac{1+3\nu}{16}\left(t^2+\ln\frac{\gamma_0\lambda}{4}\right)\right)\Bigg]+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\Bigg\}, \quad (3.31)$$

$$p_{3*}=p^0\left[1-\frac{3\pi}{32}\lambda^2+O(\lambda^4\ln^2\lambda)\right]. \quad (3.32)$$

3.1.3. Аналіз результатів.

Перейдемо до обговорення отриманих результатів. На рис. 3.1 побудовано графіки, які описують вплив форми оболонки на коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів при $\nu=0{,}3$. Лінії *0* відповідають випадку розтягнутої пластини для $\lambda=0$ [134, 155]. Криві *1* характеризують орієнтацію розрізу в оболонці уздовж лінії найбільшої кривини ($\beta_1=1$, $\beta_2=\beta$), а криві *2* – вздовж лінії найменшої кривини ($\beta_1=\beta$, $\beta_2=1$), за фіксованого $\lambda=0{,}8$. При цьому точки *A* і *C* відповідають псевдосферичній і сферичній оболонці, точки *B* і *D* – циліндричній оболонці відповідно із поперечною і подовжньою тріщиною. Вирази (3.12), що враховують наявність гнучкого покриття, подані відповідно штрих-пунктирними ($s=1$) і суцільними ($s=-1$) лініями. Для порівняння штриховими лініями показані результати (3.14), отримані у класичній постановці для тріщини без в'язей, розташованої вздовж лінії кривини серединної поверхні оболонки.

Формули (3.12) та подані графіки свідчать про те, що шарнірне з'єднання берегів тріщини призводить до суттєвого зменшення коефіцієнта інтенсивності зусиль (до порядку $O(1/2)$) та до виникнення значного за величиною коефіцієнта інтенсивності моментів (теж порядку $O(1/2)$. Нагадаємо, що у розтягнутій оболонці з тріщиною без покриття коефіцієнт інтенсивності зусиль є домінуючим: $O(1)$, а коефіцієнт інтенсивності моментів – малим: $O(\lambda^2\ln\lambda)$ (див. формули (3.14)).

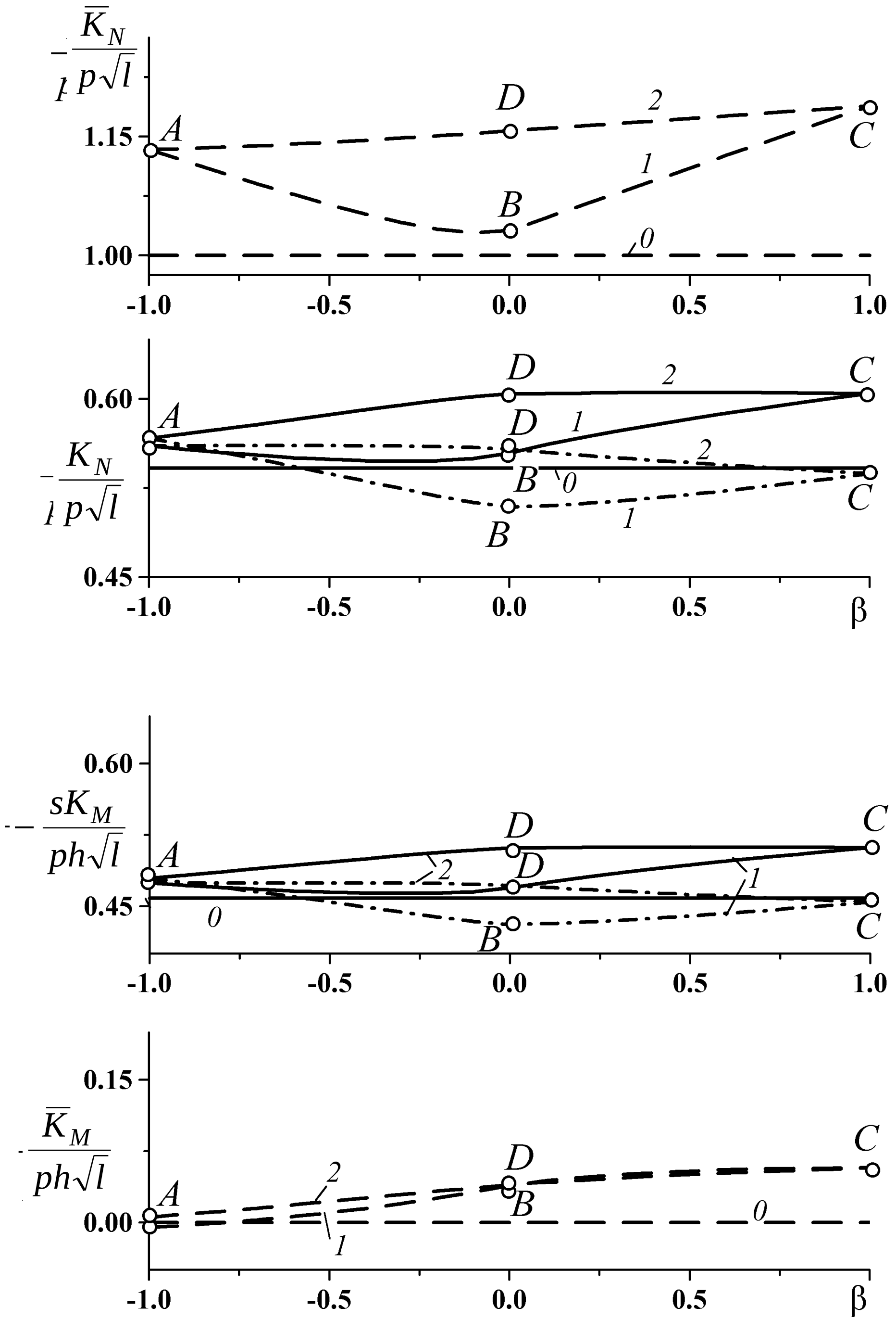


Рис. 3.1. Залежності безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від параметра форми оболонки

Проаналізуємо тепер асимптотичний вираз (3.13) для шарнірної реакції. Функція $\Omega(\lambda, t)$ є квадратичним поліномом від t і, залежно від знаку коефіцієнта B_1, може досягати свого найбільшого значення посередині або на кінцях відрізка $[-1, 1]$. У свою чергу знак B_1 збігається зі знаком добутку sb_{131} і залежить від розташування покриття та від форми оболонки. Тому форму (опуклість) параболи, яка у першому оболонковому наближенні характеризує розподіл зусиль у шарнірі, можна встановити, лише задавшись конкретною конфігурацією об'єкта.

Асимптотичні залежності для безрозмірних критичних навантажень протабульовано на рис. 3.2. Як і раніше, лінії *0* побудовано для пластини; криві *1* характеризують орієнтацію тріщини в оболонці уздовж лінії найбільшої, а криві *2* – вздовж лінії найменшої кривини. Вирази (3.16), (3.17) що враховують наявність гнучкого покриття, оформлено суцільними ($s=-1$) і штрих-пунктирними ($s=1$) лініями. Штриховими лініями показано результати (3.19) для непідкріпленої оболонки з тріщиною, отримані у класичній постановці.

Із верхнього фрагмента рисунку видно, що, якщо в класичній постановці утримувальна здатність розтягнутої оболонки з тріщиною завжди нижча, ніж для пластини, то за наявності гнучкого покриття руйнівне навантаження для оболонки може бути як більшим, так і меншим від аналогічного значення для пластини. Це залежить від кривини і форми оболонки, а також від орієнтації дефекту. В той же час графіки знизу показують, що утримувальна здатність покриття для оболонки завжди менша, ніж для пластини.

Справді, поправка на кривину у формулі (3.19) в першому наближенні залежить лише від коефіцієнтів розвинення ядра $K_{11}(\zeta)$ і є від'ємною для довільних значень параметрів форми β_1, β_2. У той же час множник $a_1 + b_1(1+\ln(\lambda/2))$ у виразі (3.16), який враховує наявність покриття, визначається коефіцієнтами розкладу всіх ядер $K_{jk}(\zeta)$ і залежно від форми оболонки, орієнтації розрізу, параметрів s і λ може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

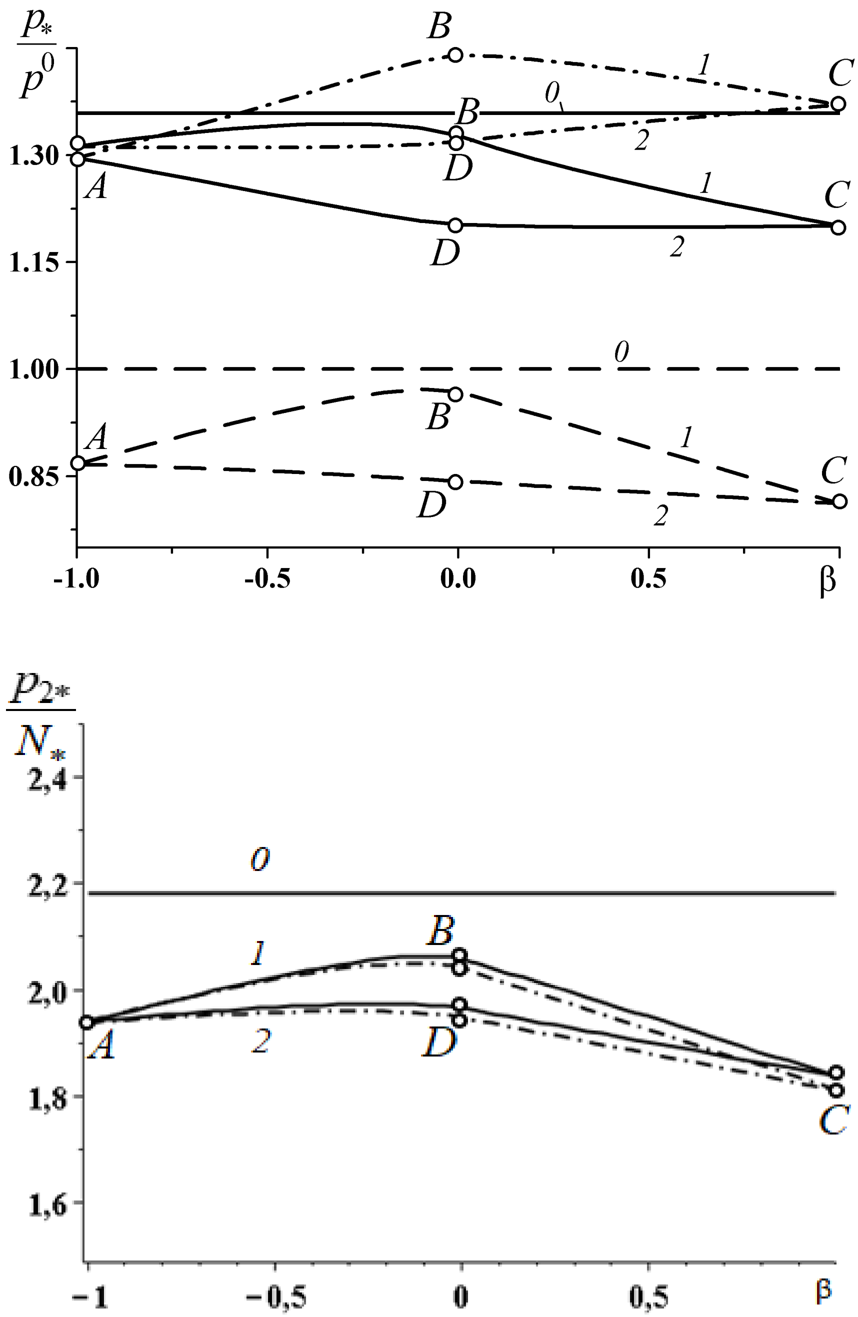


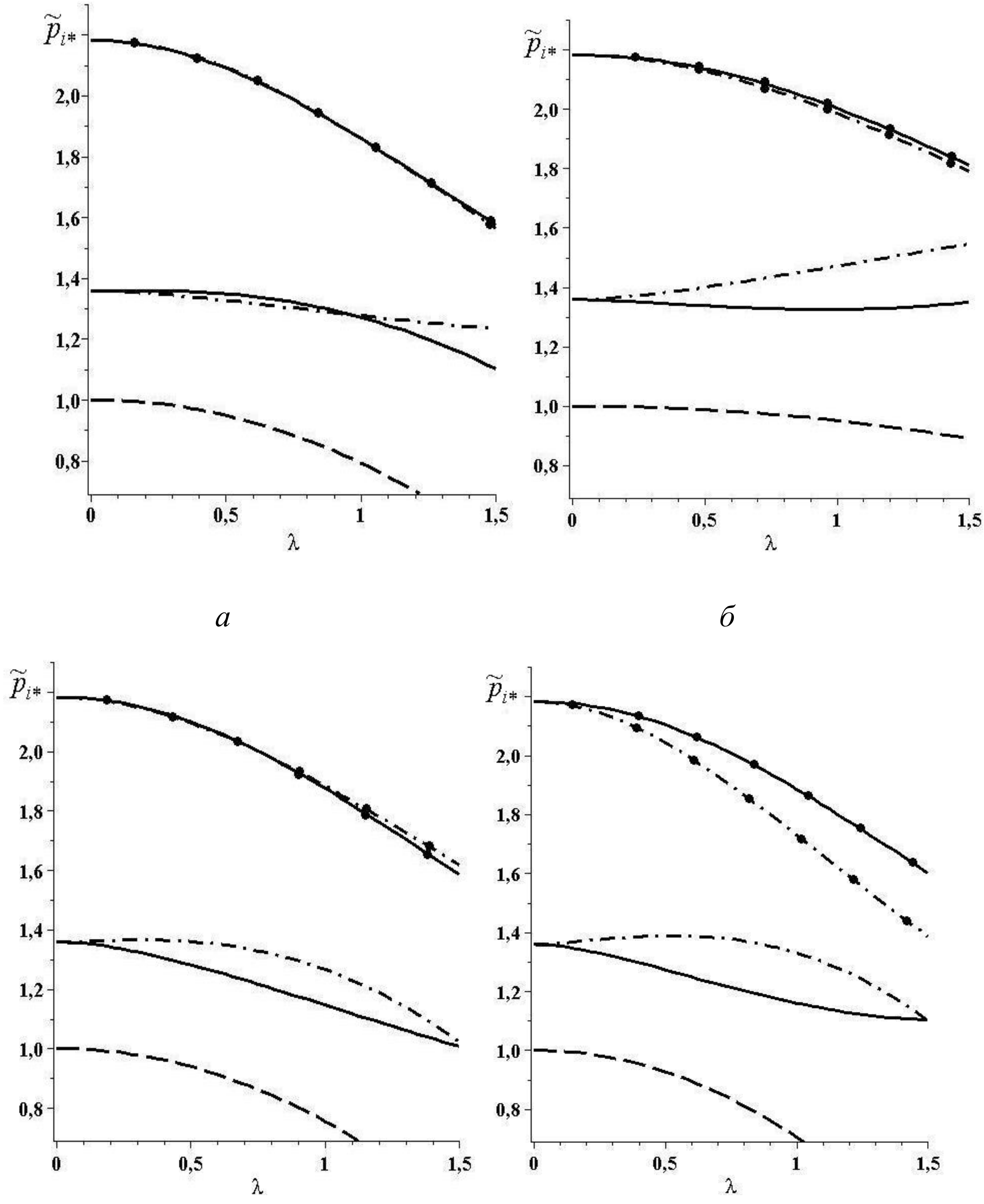
Рис. 3.2. Залежності граничних навантажень від параметра форми оболонки

Нижній фрагмент рис. 3.2 показує, що визначена за формулою (3.17) утримувальна здатність покриття для оболонки будь-якої форми завжди менша, ніж для пластини, незалежно від того, на якій поверхні це покриття розташовано.

Нагадаємо, для того, щоб знайти підсумкове руйнівне навантаження, треба користуватися формулою (3.20). Звернемо, однак, увагу, що наведені на рис. 3.2 графічні результати не можна порівнювати, оскільки p_{1*}, p_{3*} та p_{2*} віднесено до різних величин. Щоби провести кількісне зіставлення, треба віднести всі граничні навантаження p_{i*} до однієї величини, наприклад, до p^0, побудувати графік p_{2*}/p^0 для конкретного значення N_*/p^0 і аж тоді, проводячи порівняння p_{i*}/p^0, встановлювати, за яким механізмом руйнуватиметься композиція, та визначати руйнівне навантаження на підставі формули (3.20). Нижче і в наступних параграфах ми будемо дотримуватися саме такої процедури під час оцінювання утримувальної здатності оболонок з конкретною формою серединної поверхні при фіксованій орієнтації дефекту.

Перейдемо до аналізу граничної рівноваги оболонок конкретної форми. На рис. 3.3 наведено більш детальні залежності руйнівних навантажень від параметра λ, отримані при $\nu = 0{,}3$ та $N_*/p^0 = 1$ для оболонок простої геометрії: псевдосферичної оболонки з тріщиною вдовж лінії кривини (*а*), циліндричної оболонки з поперечною тріщиною (*б*), циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною (*в*), та сферичної оболонки з тріщиною вдовж меридіана (*г*). Як і раніше, штрихові лінії відповідають p_{3*} в оболонці з без покриття, штрихпунктирні та суцільні – p_{1*} для оболонки з покриттям відповідно на зовнішній та внутрішній поверхні. Маркованими кривими позначено руйнівні навантаження p_{2*} .

Оскільки для псевдосферичної оболонки потрібно домовлятися, котра поверхня є внутрішньою, а котра зовнішньою, то зміна орієнтації тріщини є по суті еквівалентною зміні знаку параметра s. Тому графіки для випадку $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ отримуються перестановкою суцільної і штрих-пунктирної кривих на рис. 3.3, *а*.



а *б* *в* *г*

Рис. 3.3. Граничні навантаження для простих форм оболонок:

а – $\beta_1 = -\beta_2 = \pm 1$, *б* – $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0$, *в* – $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1$, *г* – $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Відзначимо, що для тріщини з шарнірно з’єднаними берегами в розтягнутій оболонці характерна, взагалі кажучи, немонотонна залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів та граничних навантаження від параметра кривини. Це пов’язано з присутністю логарифмічних членів у асимптотичних розкладах.

Нагадаємо, що марковані графіки на рис. 3.3 побудовано для $N_* / p^0 = 1$. У цьому випадку немарковані криві лежать нижче від маркованих, тобто першою руйнується оболонка через критичну ситуацію у вершині тріщини. У разі $N_* / p^0 \neq 1$ ординати маркованих ліній слід помножити на величину відношення N_* / p^0. Тоді для високоміцного покриття ($N_* / p^0 >> 1$) марковані лінії розташуються значно вище від відповідних немаркованих кривих, і першою теж розтріскуватиметься оболонка. У разі низькоміцного покриття ($N_* / p^0 << 1$) марковані лінії проляжуть нижче від суцільних кривих *1, 2,* а, можливо, навіть нижче від лінії *3*, що свідчитиме про зниження, а той про повну відсутність відсутність підкріплювального ефекту. Орієнтовно десь при $N_* / p^0 \approx 0{,}6...0{,}75$ графіки p_{1*} та p_{2*} перетинатимуться, що означатиме зміну механізму руйнування із ростом λ.

Аналіз виразу (3.20) вкупі з наведеними на рис. 3.3 даними показав, що асимптотичні значення руйнівних навантажень, здобуті раніше для випадку абсолютно міцного покриття [157], слід розглядати як оцінку зверху. Отож, отримані результати за рахунок урахування обмеженої міцності покриття істотно розширюють можливості моделі шарнірного з’єднання берегів тріщини.

Вплив гнучкого покриття на напружений стан і граничну рівновагу оболонки при великих значеннях параметра λ, а також межі застосовності отриманих асимптотичних результатів для сферичної та циліндричної оболонок будуть з’ясовані у наступному підрозділі на основі числового розв'язання інтегрального рівняння (3.1) з використанням методу механічних квадратур.

3.2. Числовий аналіз міцності сферичної оболонки з меридіональною та циліндричної оболонки з поздовжньою або поперечною тріщиною

3.2.1. Система лінійних алгебраїчних рівнянь.

У разі сферичної та циліндричної оболонок з тріщинами, орієнтованими вздовж лінії кривини невласні інтеграли (3.2) виражаються через функції Томсона.

Для побудови числових розв'язків для таких конфігурацій оболонок скористаємось схемою методу механічних квадратур, описаною в п. 2.3.2.

Уведемо функцію

$$f(t) = \frac{B}{4}[u_y](t) . \tag{3.33}$$

Тоді записане у безрозмірних змінних інтегральне рівняння задачі (3.1) набуде вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\tau - t) f'(\tau) d\tau = -p, \quad t \in (-1, 1); \tag{3.34}$$

а додаткова умова запишеться так:

$$\int_{-1}^{1} f'(\tau) d\tau = 0 . \tag{3.35}$$

За функцією $f'(t)$ обчислюються коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів. Як слідує із формул (3.10), (3.2),

$$K_N^{\pm} = \mp\sqrt{l} \lim_{t\to\pm1} \sqrt{1-t^2}\, f'(t),$$

$$K_M^{\pm} = \pm\frac{3+\nu}{3(1+\nu)} sh\sqrt{l} \lim_{t\to\pm1} \sqrt{1-t^2}\, f'(t). \tag{3.36}$$

Для підрахунку шарнірної реакції використаємо регулярне подання. Друга з формул (3.11) тепер запишеться так:

$$N(t) = \frac{3+\nu}{3(1+\nu)} p + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} L(\tau - t)\, f'(\tau) d\tau\,. \tag{3.37}$$

де

$$L(\varsigma) = \frac{1}{2(3+2\nu)} K_{11}(\varsigma) + 2s\nu \frac{K_{13}(\varsigma)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - \frac{K_{33}(\varsigma)}{3(1-\nu)}. \tag{3.38}$$

Функцію $f'(t)$ шукаємо у вигляді

$$f'(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Тоді, за матеріалами пункту 2.3.2, дискретний аналог рівнянь (3.34), (3.35) буде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\sum\limits_{q=1}^{M} K(\tau_q - t_r)\varphi(\tau_q) = -p, \quad \overline{r = 1,\, M-1}; \\ \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{q=1}^{M} \varphi(\tau_q) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

У формулах (3.39) τ_q та t_r – відповідно квадратурні вузли та вузли колокації, означені у пункті 2.3.2.

Саму функцію $f(t)$ у довільній точці розрізу можна відновити за формулами (2.51).

Для коефіцієнтів інтенсивності (3.36) маємо

$$K_N^{\pm} = \mp\sqrt{l}\,\varphi(\pm 1), \quad K_M^{\pm} = \pm\frac{3+\nu}{3(1+\nu)} sh\sqrt{l}\,\varphi(\pm 1), \tag{3.40}$$

де $\varphi(\pm 1)$ обчислюються за формулами (2.52).

Формула (3.37) для розподілу зусиль у покритті на лінії тріщини трансформується у вираз:

$$N(t) = \frac{3+\nu}{3(1+\nu)} p + \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} L(\tau_q - t)\varphi(\tau_q),$$

який є достатньо точним для підрахунку $N(t)$ у будь-якій точці відрізка $[-1, 1]$, а не лише у вузлах колокації t_r. Якраз задля зменшення похибки обчислення $N(t)$ для довільних значень t ми і сконструювали регулярне ядро $L(\tau - t)$.

Загалом контроль точності розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь здійснювався шляхом подвоєння розмірності M вектора невідомих $\left(\varphi(\tau_1),...,\varphi(\tau_M)\right)$ і порівняння значень $\varphi(\pm 1)$ для числа вузлів M та $2M$. Якщо потрібна кількість значущих цифр співпадає, то точність вважається досягнутою. Зокрема, при $M = 40$ відносна похибка результатів обчислень не перевищувала 0,5% для усіх значень параметра λ, при яких проводили дослідження.

У разі відсутності покриття розв'язували систему лінійних алгебраїчних рівнянь удвічі більшої розмірності, яка є дискретним аналогом класичної системи інтегральних рівнянь.

Нехай

$$f_1(t) = \frac{B}{4}[u_y](t)\,,\;\; f_3(t) = -\frac{Bc}{4}[\theta_y](t)\,.$$

Тоді

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1,3}\int_{-1}^{1} K_{1k}(\tau - t)\, f_k^{'}(\tau)d\tau = -p\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1,3}\int_{-1}^{1} K_{3k}(\tau - t)\, f_k^{'}(\tau)d\tau = 0\,,\;\; t \in (-1, 1)\,;$$

$$\int_{-1}^{1} f_n^{'}(\tau)d\tau = 0\,,\;\; n = 1{,}3\,.$$

і відповідно для комп’ютерної реалізації будемо мати систему $2M$ лінійних алгебраїчних рінянь.

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1,3}\sum_{q=1}^{M} K_{1k}(\tau_q - t_r)\varphi_k(\tau_q) = -p\,,$$

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1,3}\sum_{q=1}^{M} K_{3k}(\tau_q - t_r)\varphi_k(\tau_q) = 0\,,\;\; \overline{r = 1,\, M-1}\,;$$

$$\frac{\pi}{M}\sum_{q=1}^{M}\varphi_n(\tau_q) = 0\,,\;\; n = 1{,}3\,,$$

де $\varphi_n(t) = \sqrt{1 - t^2}\, f_n^{'}(t)\,,\; n = 1{,}3\,.$

Розв’язки цієї системи повинні би узгоджуватися з відомими з літератури даними для пологих оболонок з наскрізними тріщинами, береги яких вільні від в’язей.

3.2.2. Сферична оболонка з меридіональною тріщиною.

Нехай сферична оболонка радіуса R і завтовшки $2h$, послаблена меридіональною тріщиною завдовжки $2l$ і підсилена однобічним гнучким покриттям (рис. 3.4). Побудуємо числовий розв'язок задачі у разі навантаження берегів тріщини мембранними зусиллями p.

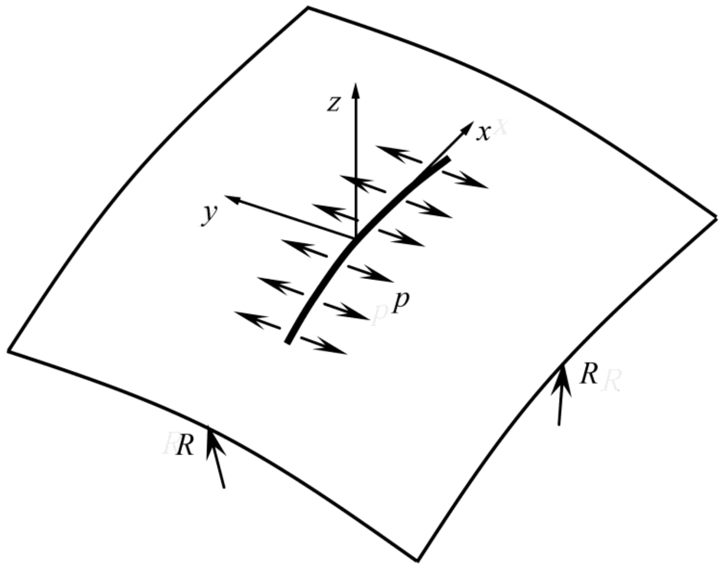


Рис. 3.4. Сферична оболонка з розрізом уздовж меридіана

Для описаної конфігурації досліджуваного об'єкта ядра інтегральних подань виражаються через циліндричні функції:

$$K_{11}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma}-\frac{2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\mathrm{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\mathrm{ker}(\lambda|\varsigma|)+\frac{1}{2}+\lambda|\varsigma|\,\mathrm{ker}'(\lambda|\varsigma|)\right),$$

$$K_{13}(\varsigma)=K_{31}(\varsigma)=-\frac{2(1-\nu)}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda^2\varsigma^2}+\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\mathrm{ker}'(\lambda|\varsigma|)+\mathrm{kei}(\lambda|\varsigma|)\right)-$$

$$-2\lambda\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{ker}'(\lambda|\varsigma|),$$

$$K_{33}(z)=\frac{2(1-\nu)^2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\mathrm{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\mathrm{ker}(\lambda|\varsigma|)\right)-$$

$$-2(1-\nu^2)\lambda\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\,\mathrm{ker}'(\lambda|\varsigma|)-2\lambda^2\int_0^{\varsigma}\mathrm{kei}(\lambda|\varsigma|)d\varsigma,$$

де $\mathrm{ker}\,\varsigma$, $\mathrm{kei}\,\varsigma$ – функції Томсона.

Вирази для ядер $K(\varsigma)$ та $L(\varsigma)$ будуть:

$$K(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma}-\frac{2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\operatorname{ker}(\lambda|\varsigma|)+\frac{1}{2}+\lambda|\varsigma|\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)\right)+,$$

$$+\frac{2s}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left\{\frac{2(1-\nu)}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda^2\varsigma^2}+\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)+\operatorname{kei}(\lambda|\varsigma|)\right)-2\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)\right\}+$$

$$+\frac{1}{3(1-\nu^2)}\left\{\frac{2(1-\nu)^2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\operatorname{ker}(\lambda|\varsigma|)\right)-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu^2)\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)-2\lambda^2\int_0^{\varsigma}\operatorname{kei}(\lambda|\varsigma|)d\varsigma\right\};$$

$$L(\varsigma)=\frac{1}{2(3+2\nu)}\left\langle(3+2\nu)\left\{\frac{1}{\varsigma}-\frac{2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\operatorname{ker}(\lambda|\varsigma|)+\frac{1}{2}+\lambda|\varsigma|\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)\right)\right\}-\right.$$

$$-\frac{2s\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left\{\frac{2(1-\nu)}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda^2\varsigma^2}+\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)+\operatorname{kei}(\lambda|\varsigma|)\right)-2\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)\right\}-$$

$$-\frac{1}{1-\nu}\left\{\frac{2(1-\nu)^2}{\varsigma}\left(\frac{2}{\lambda|\varsigma|}\operatorname{kei}'(\lambda|\varsigma|)-\operatorname{ker}(\lambda|\varsigma|)\right)-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu^2)\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\operatorname{ker}'(\lambda|\varsigma|)-2\lambda^2\int_0^{\varsigma}\operatorname{kei}(\lambda|\varsigma|)d\varsigma\right\}.$$

Числовий розв'язок задачі в діапазоні $0\le\lambda\le 4$ при $\nu=0{,}3$ побудували методом механічних квадратур. За одержаними числовими даними для $[u_y]'(t)$ знаходили $[\theta_y]'(t)$, значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів (рис. 3.5) та функцію шарнірної реакції (рис. 3.6).

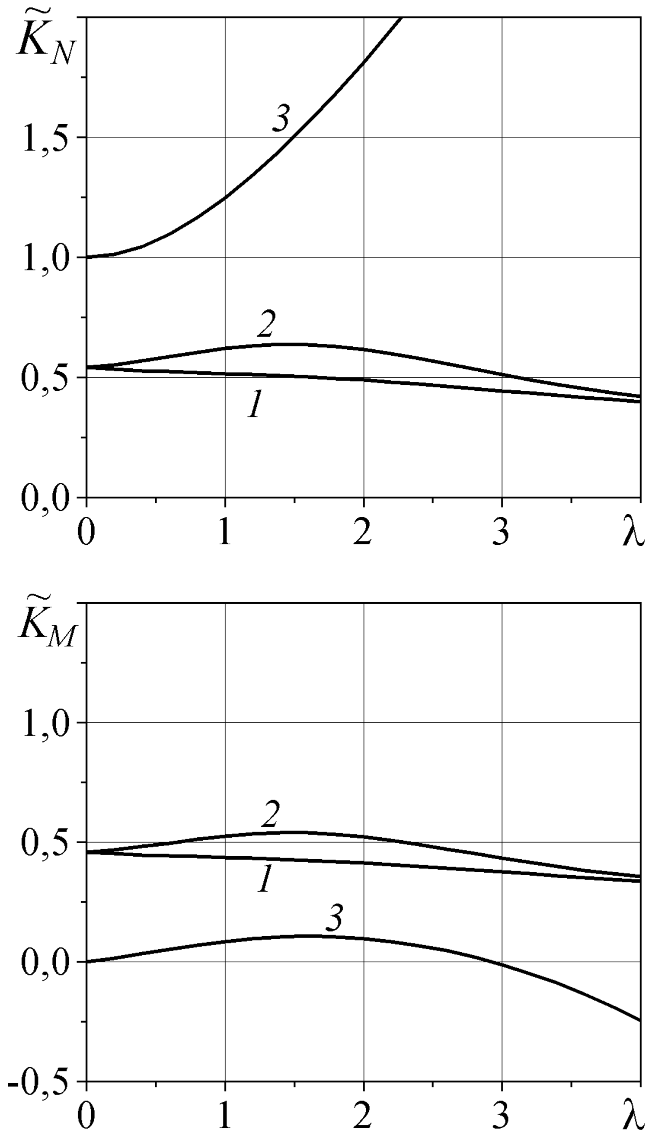


Рис. 3.5. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра кривини λ для сферичної оболонки з меридіональною тріщиною: *1* – оболонка із зовнішнім ($s = 1$), а *2* – оболонка з внутрішнім покриттям ($s = -1$), $\widetilde{K}_N = K_N / (p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = K_M / (sph\sqrt{l})$; *3* – оболонка без покриття, $\widetilde{K}_N = \overline{K}_N / (p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = \overline{K}_M / (ph\sqrt{l})$

Як видно з рис. 3.5, у вкритій оболонці з меридіональним розрізом коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів є співмірними між собою, незначно зменшуються або немонотонно змінюються з ростом параметра кривини. У той же час за відсутності покриття (лінії *3*) коефіцієнт інтенсивності зусиль $\overline{K}_N$ є сильно зростаючою функцією від λ, а коефіцієнт інтенсивності моментів $\overline{K}_M$ – малий.

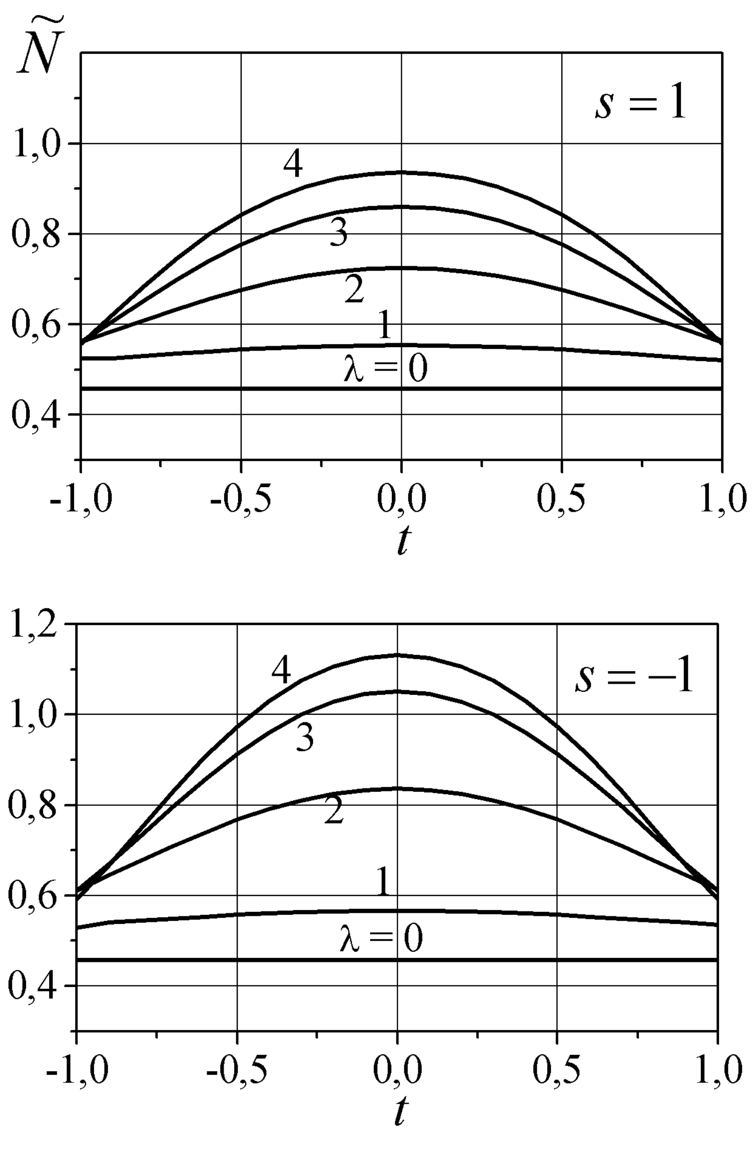


Рис 3.6. Розподіл реакції в шарнірі для сферичної оболонки з меридіональною тріщиною: вгорі – покриття на зовнішній, а внизу – покриття на внутрішній поверхні; $\widetilde{N}=N(t)/p$, $t=x/l$.

Графіки, подані на рис. 3.6, характеризують розподіл безрозмірних зусиль в покритті на лінії меридіональної тріщини для різних значень параметра кривини. При зростанні параметра λ спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля в шарнірі, особливо посередині розрізу. Більші зусилля виникають у покритті, розташованому на внутрішній поверхні оболонки.

Крім того, дослідили вплив кривини на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною за умов розтягу (рис. 3.7).

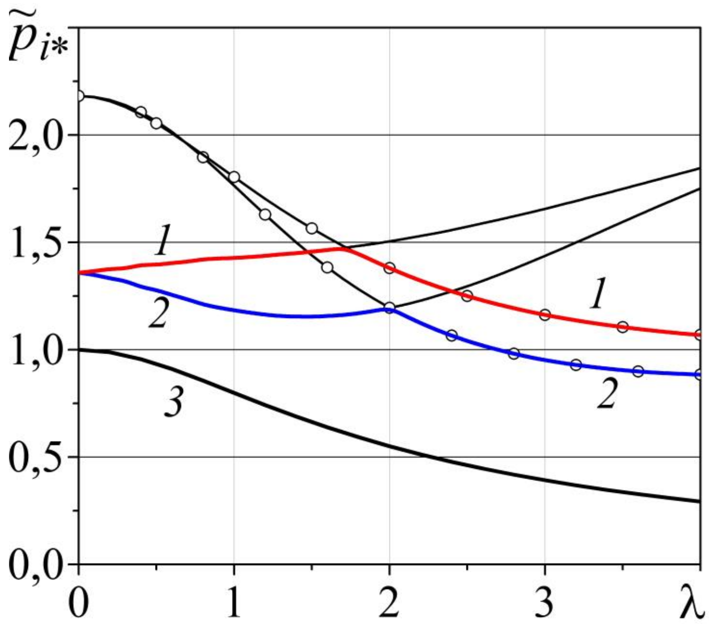


Рис. 3.7. Руйнівні навантаження $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p^0$ для сферичної оболонки з тріщиною вздовж меридіана: суцільні лінії *1, 2* – p_{1*} для оболонки із зовнішнім та внутрішнім покриттям; марковані лінії *1, 2* – p_{2*} для зовнішнього та внутрішнього покриття; *3* – p_{3*} для оболонки без покриття

На цьому рисунку видно такі закономірності. Якщо в класичній постановці граничне значення розтягувального навантаження для оболонки з тріщиною завжди менше, ніж для пластини, то, враховуючи підкріплення покриттям на внутрішній чи на зовнішній поверхні, залежно від величини параметра λ, за критерієм розтріскування оболонки можемо дістати для неї як вищу, так і нижчу утримувальну здатність порівняно з аналогічно навантаженою пластинкою. Граничні навантаження, розраховані за міцністю покриття при $N_* / p^0 = 1$, істотно знижуються при збільшенні параметра λ. Також спостерігаємо, що при малих кривинах оболонки руйнівним є навантаження $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$; при більших кривинах – $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$.

Для міцних покриттів $(N_* / p^0 > 2)$ у дослідженому діапазоні зміни параметра кривини ординати маркованих кривих зростуть, марковані лінії *1* та *2* проляжуть завжди вище від немаркованих, і першою завжди руйнуватиметься оболонка. Для слабких покрить з меншим N_* ординати маркованих кривих закономірно зменшаться, усуваючи тим самим ефект підкріплення. Так при $N_* / p^0 < 0{,}23$ марковані лінії *1* та *2* розташуються нижче від класичної лінії *3*, що означатиме першочергове руйнування покриття при навантаженнях менших, ніж для непідкріпленої оболонки з тріщиною.

Крім того, за будь-яким з критеріїв криві *2* розташовані нижче від кривих *1*, а це означає, що підкріплення покриттям дефектної сферичної оболонки ззовні є вигіднішим, ніж зсередини.

Насамкінець, порівнюючи асимптотичні і чисельні результати, можемо встановити діапазон застосовності аналітичних залежностей. Зокрема, похибка обчислення граничного навантаження за формулами (3.30)–(3.32),

$$\varepsilon = \left| \frac{p_*^{асимптотичне} - p_*^{числове}}{p_*^{числове}} \right| \cdot 100\,\%,$$

не перевищує 5% при $\lambda \le 1$.

3.2.3. Циліндрична оболонка з поздовжньою тріщиною.

Розглянемо ізотропну циліндричну оболонку завтовшки $2h$ з радіусом серединної поверхні R, яка послаблена наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, розташованою вздовж відрізка твірної (рис. 3.8). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою, а тріщина розкривається мембранними зусиллями $p = const$. Побудуємо числовий розв’язок задачі.

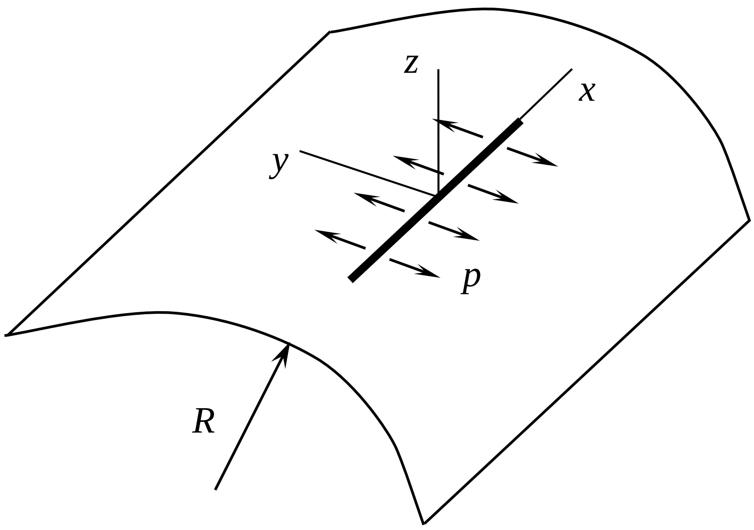


Рис. 3.8. Циліндрична оболонка з тріщиною вздовж твірної

У випадку поздовжньої тріщини ядра $K_{jk}(\varsigma)$ виражаються через циліндричні функції Томсона та балочні функції Крилова:

$$K_{11}(\varsigma) = \lambda \operatorname{sgn} \varsigma \left(B_1 \operatorname{kei}' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} - B_2 \operatorname{ker}' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\lambda}{4} \left[(B_3 + B_4) \left(\operatorname{ker}'' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} - \operatorname{kei} \frac{\lambda |\varsigma|}{2} \right) + (B_4 - B_3) \left(\operatorname{kei}'' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} + \operatorname{ker} \frac{\lambda |\varsigma|}{2} \right) \right],$$

$$K_{13}(\varsigma) = K_{31}(\varsigma) = -\nu\lambda \operatorname{sgn} \varsigma \left(B_1 \operatorname{ker}' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} - B_2 \operatorname{kei}' \frac{\lambda |\varsigma|}{2} \right) -$$

$$-\frac{\sqrt{2}(1-\nu)\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\operatorname{ker}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\operatorname{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}(1+\nu)\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\operatorname{ker}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\operatorname{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right),$$

$$K_{33}(\varsigma)=(1-\nu^2)\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\left(B_1\operatorname{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\operatorname{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1-\nu)^2\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\operatorname{ker}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\operatorname{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1+\nu)^2\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\operatorname{ker}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\operatorname{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right);$$

$$B_1=\sin\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4},\quad B_2=\cos\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4},$$

$$B_3=\sin\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4},\quad B_4=\cos\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}\lambda\varsigma}{4}.$$

Тоді

$$K(\varsigma)=\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\left(B_1\operatorname{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\operatorname{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}\lambda}{4}\left[(B_3+B_4)\left(\operatorname{ker}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-\operatorname{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+(B_4-B_3)\left(\operatorname{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+\operatorname{ker}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{2s}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left\{\nu\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\left(B_1\operatorname{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\operatorname{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1-\nu)\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\operatorname{ker}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\operatorname{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}(1+\nu)\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\operatorname{ker}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\operatorname{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{3(1-\nu^2)}\left\{(1-\nu^2)\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\left(B_1\operatorname{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\operatorname{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1-\nu)^2\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\ker''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\,\mathrm{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}(1+\nu)^2\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\ker\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\,\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right\};$$

$$L(\varsigma)=\frac{1}{2(3+2\nu)}\left\langle(3+2\nu)\left\{\lambda\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\left(B_1\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\ker'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{\sqrt{2}\lambda}{4}\left[(B_3+B_4)\left(\ker''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+(B_4-B_3)\left(\mathrm{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+\ker\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right]-$$

$$-\frac{2s\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left\{\nu\lambda\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\left(B_1\ker'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1-\nu)\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\ker''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\,\mathrm{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}(1+\nu)\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\ker\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\,\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{1-\nu}\left\{(1-\nu^2)\lambda\,\mathrm{sgn}\,\varsigma\left(B_1\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-B_2\ker'\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}(1-\nu)^2\lambda}{4}\left((B_3+B_4)\ker''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}+(B_4-B_3)\,\mathrm{kei}''\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)+$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{2}(1+\nu)^2\lambda}{4}\left((B_4-B_3)\ker\frac{\lambda|\varsigma|}{2}-(B_3+B_4)\,\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}\right)\right\}\right\rangle.$$

Розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.39) побудували в діапазоні $0\le\lambda\le 8$ при $\nu=0{,}3$.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра кривини ілюструє рис. 3.9. Як бачимо, вплив однобічного підкріплення за розтягу оболонки проявляється перш за все у суттєвому зменшенні коефіцієнта інтенсивності зусиль та появі немалого (того ж порядку) коефіцієнта інтенсивності моментів. При малих кривинах обидва коефіцієнти інтенсивності можуть змінюватися немонотонно. Нам видається, що це спричинено наявністю логарифмічних членів у розкладах ядра сингулярного інтегрального рівняння. Відзначимо також слабку залежність коефіцієнтів інтенсивності від параметра λ порівняно з випадком відсутності покриття.

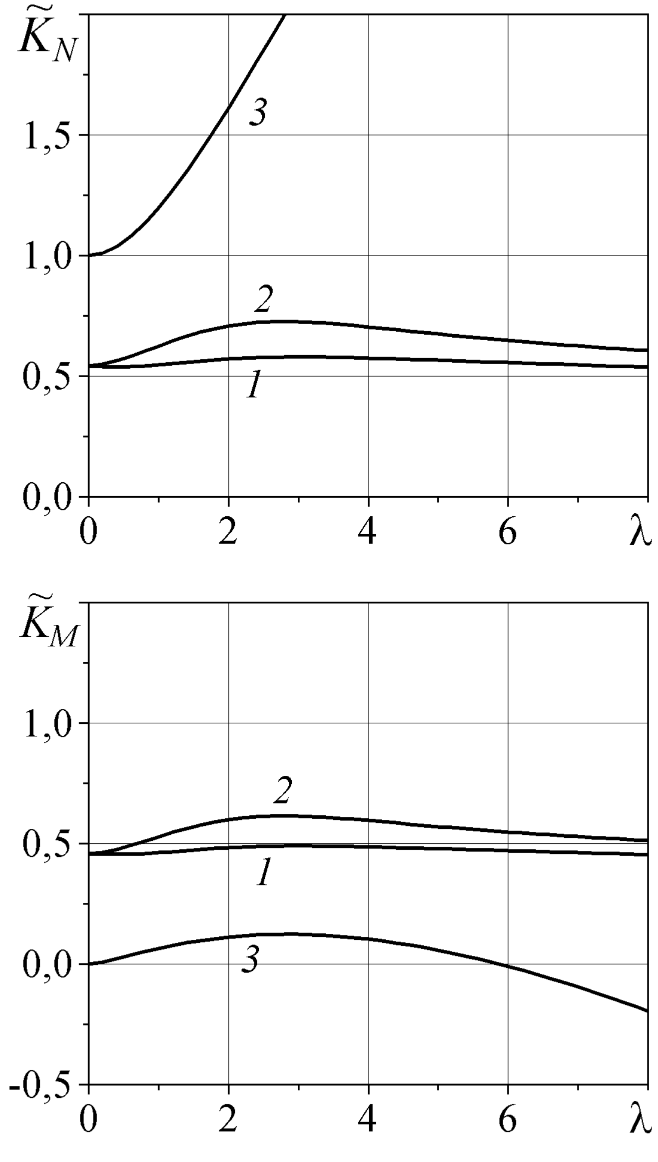


Рис. 3.9. Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у вершинах тріщини: *1* – оболонка з покриттям на зовнішній поверхні ($s=1$); *2* – із покриттям на внутрішній поверхні ($s=-1$), $\widetilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$; *3* – оболонка без покриття, $\widetilde{K}_N = \overline{K}_N/(p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = \overline{K}_M/(ph\sqrt{l})$

Графіки, побудовані на рис. 3.10, характеризують розподіли безрозмірних зусиль в покритті на лінії поздовжньої тріщини при різних значеннях параметра кривини λ. Із зростанням кривини спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля посередині тріщини та незначне його зменшення поблизу вершин. У разі розташування на зовнішній поверхні циліндричної оболонки покриття приймає на себе більше навантаження, ніж на внутрішній.

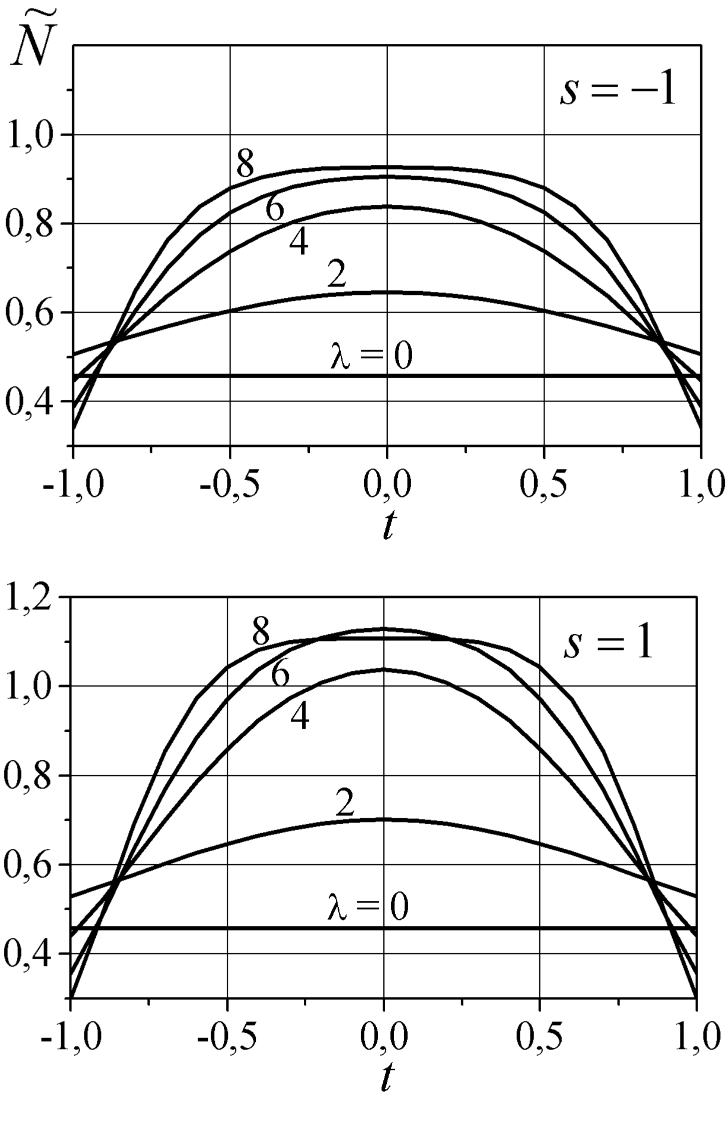


Рис. 3.10. Розподіл реакції в шарнірі для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною: вгорі – покриття на зовнішній, внизу – покриття на внутрішній поверхні; $\tilde{N} = N(t)/p$, $t = x/l$.

Графіки, подані на рис. 3.11 описують вплив кривини на граничну рівновагу циліндричної оболонки з повздовжньою тріщиною за умов розтягу. Якщо в класичній постановці граничне значення розтягувального навантаження для оболонки з тріщиною завжди менше, ніж для пластини (крива *3*), то, враховуючи підкріплення покриттям на внутрішній чи на зовнішній поверхні, залежно від величини λ, можемо дістати для оболонки як вищу, так і нижчу утримувальну здатність порівняно з аналогічно навантаженою пластинкою (суцільні криві *1, 2*). Сказане стосується розрахунку за критерієм розтріскування оболонки.

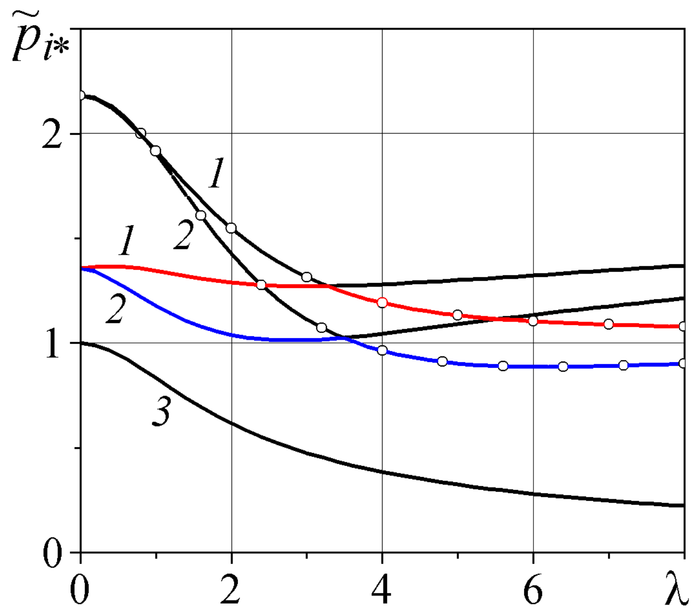


Рис. 3.11. Залежності граничного навантаження $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$ від параметра кривини для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною: суцільні лінії $-$ p_{1*}, марковані лінії *1, 2* $-$ p_{2*} для зовнішнього та внутрішнього покриття; *3* $-$ p_{3*} для оболонки без покриття

Граничні навантаження, розраховані за міцністю покриття (марковані криві *1, 2*), істотно знижуються при збільшенні параметра кривини. Для прийнятого у розрахунках співвідношення $N_* / p^0 = 1$ при малих кривинах оболонки руйнівним виявляється навантаження p_{1*}, а при більших кривинах – навантаження p_{2*}.

Для міцних покриттів ($N_* / p^0 > 1{,}8$) у прийнятому тут діапазоні спершу розтріскуватиметься оболонка, слабкі ж підкріплення з $N_* / p^0 < 0{,}18$ розірвуться при малих навантаженнях і реальним руйнівним навантаження стане p_{3*} для непокритої оболонки.

Порівнюючи усі криві *1* та *2*, також бачимо, що підкріплення покриттям дефектної циліндричної оболонки ззовні є завжди вигіднішим, аніж зсередини.

Зіставлення асимптотичних та числових результатів свідчить про те, похибка ε обчислення граничних навантажень за формулами (3.27)–(3.29) не перевищує 5% при $\lambda \le 0{,}9$.

3.2.4. Циліндрична оболонка з поперечною тріщиною.

Нехай тонке гнучке покриття підкріплює одну із лицьових поверхонь ізотропної циліндричної оболонки завтовшки $2h$ з радіусом серединної поверхні R (рис. 3.12).

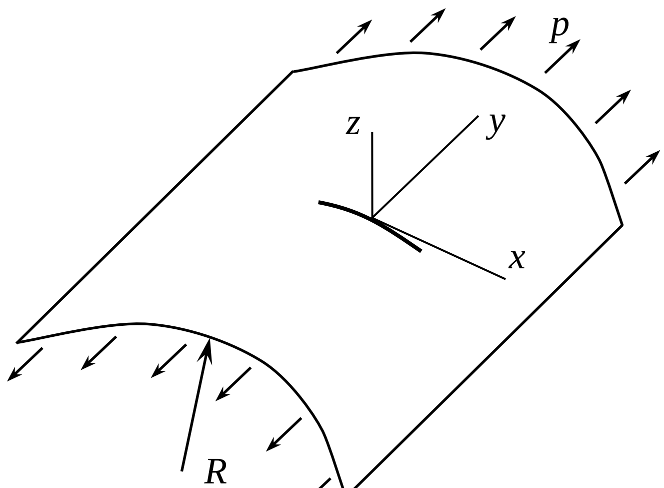


Рис. 3.12. Циліндрична оболонка з тріщиною вздовж напрямної

Оболонка послаблена наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, розташованою вздовж відрізка напрямної і навантаженою мембранними зусиллями p. Досліджуємо напружен-деформований стан та граничну рівновагу композиції.

У цій задачі ядра інтегральних подань $K_{jk}(\varsigma)$ обчислюються за формулами:

$$K_{11}(\varsigma) = -\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2},$$

$$K_{13}(\varsigma) = K_{31}(\varsigma) = -\frac{1+\nu}{2}\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2},$$

$$K_{33}(\varsigma) = -(3-2\nu-\nu^2)\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} - \lambda^2\int_0^{\varsigma}\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}d\varsigma.$$

Тоді

$$K(\varsigma) = -\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} + \frac{2s}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{1+\nu}{2}\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} -$$

$$-\frac{1}{3(1-\nu^2)}\left\{(3-2\nu-\nu^2)\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} + \lambda^2\int_0^{\varsigma}\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}d\varsigma\right\};$$

$$L(\varsigma) = \frac{1}{2(3+2\nu)}\left\langle -(3+2\nu)\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} - \frac{2s\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{1+\nu}{2}\lambda\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{kei}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\nu}\left\{(3-2\nu-\nu^2)\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\varsigma\,\mathrm{ker}'\frac{\lambda|\varsigma|}{2} + \lambda^2\int_0^{\varsigma}\mathrm{kei}\frac{\lambda|\varsigma|}{2}d\varsigma\right\}\right\rangle.$$

Числовий розв’язок інтегрального рівняння (3.34) в діапазоні $0 \le \lambda \le 8$ при $\nu = 0{,}3$ побудували методом механічних квадратур.

Рис. 3.13 ілюструє залежності від λ коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин поперечної тріщини у циліндричній оболонці. Якісно поведінка коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів така сама, як і для сферичної оболонки із меридіональним розрізом. Відмінності – лише кількісні.

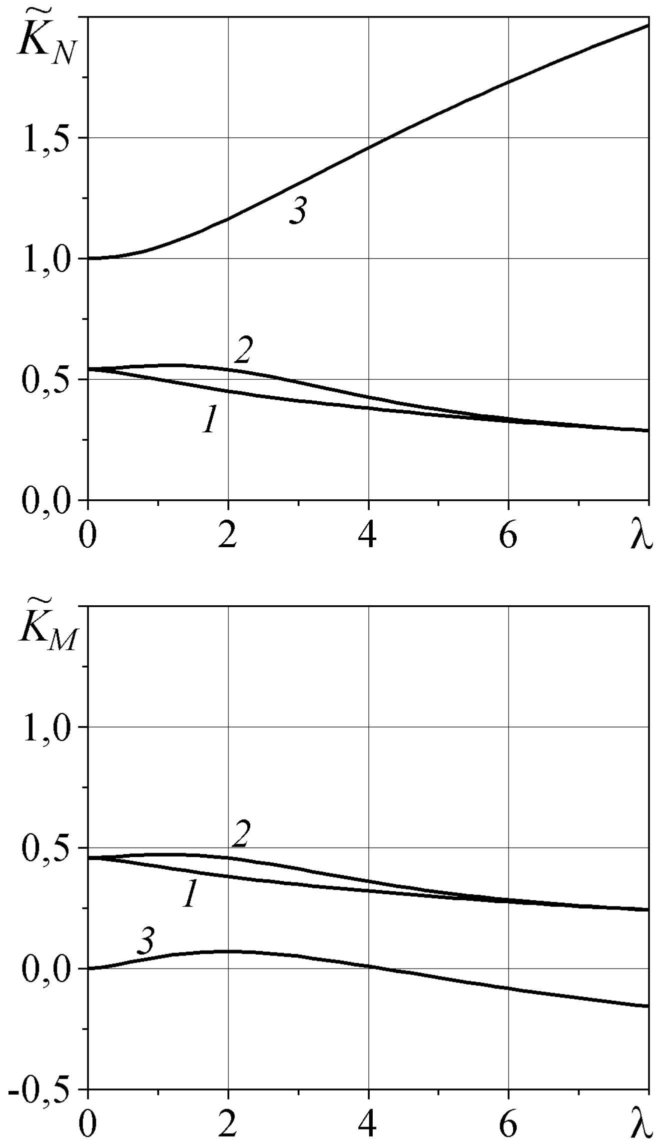


Рис. 3.13. Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у вершинах поперечної тріщини: *1* – оболонка з покриттям на зовнішній ($s=1$), *2* – на внутрішній поверхні ($s=-1$), $\widetilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$; *3* – оболонка без покриття, $\widetilde{K}_N = \overline{K}_N/(p\sqrt{l})$, $\widetilde{K}_M = \overline{K}_M/(ph\sqrt{l})$

У свою чергу графіки, подані на рис. 3.14, характеризують розподіл безрозмірних зусиль в покритті на лінії тріщини при різних значеннях параметра кривини. Відзначена вище подібність з результатами для сферичної оболонки стосується і закономірностей поведінки максимумів шарнірної реакції.

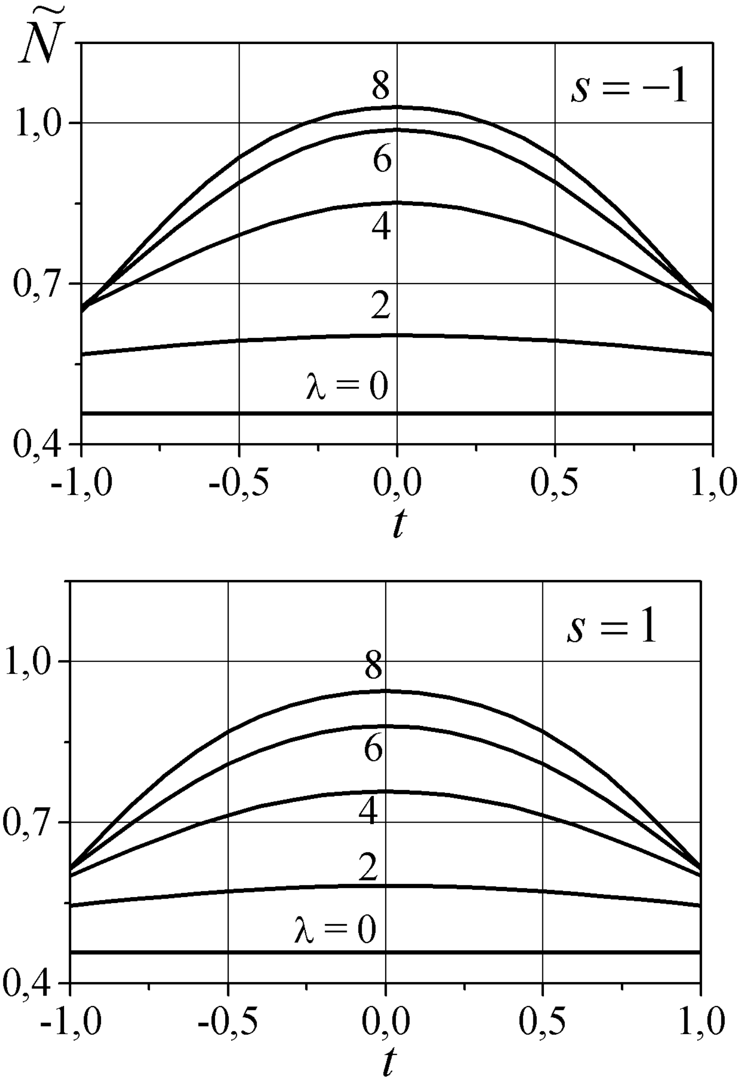


Рис. 3.14. – Розподіл реакції в шарнірі на лінії поперечної тріщини: зліва – покриття на внутрішній, справа покриття на зовнішній поверхні; $\tilde{N} = N(t)\,/\,p$

Графіки, подані на рис. 3.15, описують вплив кривини на граничну рівновагу циліндричної оболонки з поперечною тріщиною за умов розтягу.

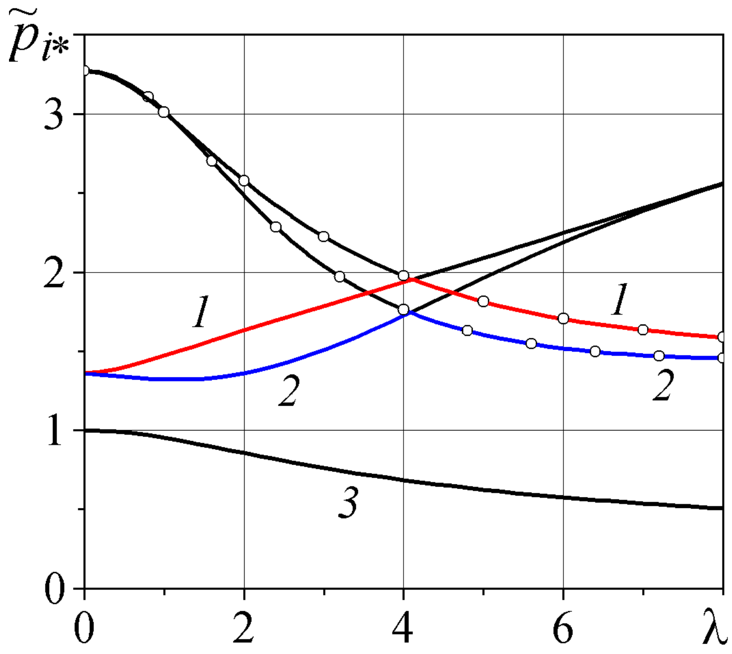


Рис. 3.15. Граничні навантаження розтягу для циліндричної оболонки з поперечною тріщиною: $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$; суцільні лінії *1, 2* – p_{1*} для оболонки з покриттям відповідно на зовнішній та внутрішній поверхні; марковані лінії *1, 2* – p_{2*} для зовнішнього та внутрішнього покриття при $N_* / p_0 = 1{,}5$; *3* – p_{3*} для оболонки без покриття

Якщо в оболонці без покриття граничне значення розтягувального навантаження для оболонки з тріщиною завжди менше, ніж для пластини (крива *3*), то, враховуючи підкріплення покриттям на внутрішній чи на зовнішній поверхні, залежно від величини параметра кривини, можемо дістати для оболонки як вищу, так і нижчу утримувальну здатність порівняно з аналогічно навантаженою пластиною (суцільні криві *1, 2*). Сказане стосується розрахунку за критерієм розтріскування оболонки. Граничні навантаження, розраховані за міцністю покриття (марковані криві *1, 2*), істотно знижуються при збільшенні параметра λ. Для прийнятого у цих розрахунках співвідношення $N_* / p_0 = 1{,}5$ ефект від підкріплення становить

50–60%; при цьому тип руйнування залежить від величини λ: для малих кривин оболонки руйнівним є навантаження $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$, для більших кривин – $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$. У разі міцніших підкріплень ($N_* / p_0 > 2{,}6$) композиція руйнуватиметься підростанням поперечної тріщини; для слабких покрить з $N_* / p_0 < 0{,}12$ ординати маркованих кривих закономірно зменшаться, тим самим ефективність підкріплення знівелюється ($p_{2*} < p_{3*}$).

Як і раніше, криві *2* завжди розташовані нижче від відповідних кривих *1*, отже, з'єднання берегів тріщини у зовнішній лицьовій поверхні дає більшу утримувальну здатність конструкції, ніж у внутрішній.

Порівнюючи асимптотичні і числові результати, можемо встановити діапазон застосовності аналітичних залежностей. Зокрема, похибка обчислення граничних навантажень за формулами (3.24)–(3.26) не перевищує 5% при $\lambda \leq 2{,}2$. Такий достатньо широкий діапазон імовірно виникає за рахунок того, що величини $O(\lambda^2 \ln \lambda)$ теж є малими при λ, близьких до 1.

3.3. Висновки до розділу 3

1. Проведено асимптотичний аналіз граничної рівноваги вкритої оболонки з тріщиною, орієнтованою вздовж лінії кривини серединної поверхні. Для оболонки довільної форми отримано аналітичний розв'язок задачі у першому оболонковому наближенні.

Для малих кривин встановлено:

– якщо в класичній постановці несуча здатність розтягнутої оболонки з тріщиною завжди нижча ніж для пластини, то за наявності гнучкого покриття руйнівне навантаження для оболонки може бути як більшим, так і меншим від аналогічного значення для пластини. Це залежить від кривини і форми оболонки та від орієнтації дефекту:

– несуча здатність покриття для оболонки завжди менша, ніж для пластини.

2. Уперше проведено числовий аналіз граничної рівноваги покритих сферичної та циліндричної оболонки з тріщиною для довільних значень параметра кривини.

Встановлено:

– вирішальне значення для міцності композиції має співвідношення між міцністю покриття та тріщиностійкістю оболонки N_* / p^0

– у разі високоміцного покриття завжди першою розтріскується оболонка;

– у разі покрить середньої міцності для малих кривин першою руйнується оболонка, а для великих кривин першим руйнується покриття;

– слабке покриття руйнується при малих навантаженнях і не дає підкріплювального ефекту;

– руйнівне навантаження для підкріпленої оболонки з тріщиною може немонотонно залежати від параметра кривини.

3. Встановлено діапазон застосовності асимптотичних результатів – відносна похибка асимптотики не перевищує 5 %, якщо $\lambda \leq 1$ для сферичної оболонки з тріщиною по меридіану, $\lambda \leq 0{,}9$ для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною, $\lambda \leq 2{,}2$ для циліндричної оболонки з поперечною тріщиною.

4. За результатами числового аналізу виявили, з’єднання берегів тріщини у зовнішній лицьовій поверхні дає більшу утримувальну здатність конструкції, ніж у внутрішній.

5. В усіх розглянутих задачах при $\lambda = 0$ як частковий випадок отримуємо відомий аналітичний розвя’зок задачі розтягу підсиленої гнучким

покриттям пластини з прямолінійною тріщиною [134, 155]. Результати обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів для оболонок з тріщинами без покриття повністю узгоджуються з відомими в літературі асимптотичними та числовими даними, опублікованими іншими авторами [23, 26, 27, 35, 36].

Основні результати третього розділу опубліковано в працях [1, 2, 6–10, 13, 14].

РОЗДІЛ 4
ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН ЗА РОЗТЯГУ ОБОЛОНОК З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

У цьому розділі досліджується вплив взаємного розташування колінеарних тріщин на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пологих оболонок з урахуванням обмеженої міцності гнучкого покриття. Сформульовано крайову задачу із взаємопов’язаними умовами шарнірного з’єднання на системі співвісних розрізів. Числовий розв’язок системи сингулярних інтегральних рівнянь для сферичної та циліндричної оболонок з двома однаковими тріщинами побудовано методом механічних квадратур. Визначено гранчні навантаження.

4.1. Формулювання та інтегральні рівняння задачі

Розглянемо ізотропну оболонку завтовшки $2h$ з системою наскрізних колінеарних розрізів, розміщених вздовж головної лінії кривини на відрізках L_n $(n=\overline{1, N})$, підкріплену гнучким покриттям (рис. 4.1). До протилежних берегів тріщин прикладено самозрівноважені мембранні зусилля p_n; решта поверхонь об’єкта вільні від зовнішнього навантаження.

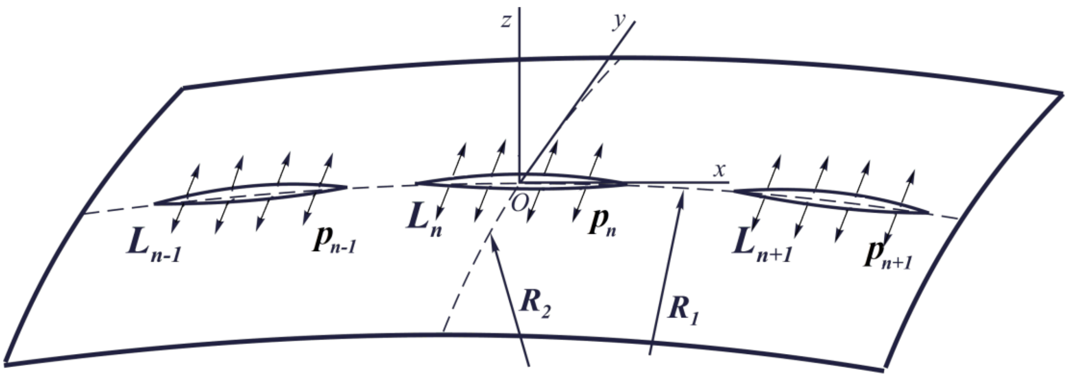


Рис.4.1 Система тріщин в оболонці з гнучким покриттям

Досліджуємо напружено-деформований стан, а також граничну рівновагу даної оболонки.

Вважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, введемо систему декартових координат $Oxyz$ з віссю абсцис, орієнтованою уздовж лінії тріщин. Напружено-деформований стан оболонки поза розрізами опишемо рівняннями теорії пологих оболонок

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0, \ \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k \varphi = 0, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L. \qquad (4.1)$$

Тут $L = \bigcup_{n=1}^{N} L_n$ – сукупність розрізів.

Враховуючи симетрію задачі відносно осі абсцис, на підставі гіпотези Кірхгофа запишемо крайові умови на розрізах

$$[u_y]_n - sh[\theta_y]_n = 0, \ M_y - sh(N_y + p_n) = 0, \ (x, y) \in L_n, \ n = \overline{1, N}; \quad (4.2)$$

На нескінченності напруження відсутні:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \ M_x = M_{xy} = M_y = 0, \ (x, y) \to \infty. \qquad (4.3)$$

У формулах (4.2), (4.3) позначено:

$[u_y]_n$, $[\theta_y]_n$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки і стрибок кута повороту нормалі для кожної з тріщин;

N_{ij}, M_{ij} – мембранні сили та згинальні моменти.

Для побудови розв'язку методом сингулярних інтегральних рівнянь запишемо інтегральні подання зусиль і моментів на лінії розрізів через похідні від стрибків зміщень і кутів повороту нормалі

$$N_y(x,0) = \frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}\left\{K_{11}(\xi - x)[u_y]'_m(\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y]'_m(\xi)\right\}d\xi,$$

$$M_y(x,0) = \frac{Bc}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}\left\{K_{31}(\xi - x)[u_y]'_m(\xi) - K_{33}(\xi - x)c[\theta_y]'_m(\xi)\right\}d\xi. \qquad (4.4)$$

Тут ядра $K_{jk}(\xi - x)$ визначаються формою оболонки і в загальному випадку виражаються через інтеграли Фур’є (2.23).

Задовольняючи граничним умовам на кожному розрізі L_n, $n = \overline{1, N}$ та виключаючи $[u_y]_n$ з допомогою першої з умов (4.2), отримаємо систему N сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих функцій стрибка переміщення:

$$\frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m} K(\xi - x)[u_y]'_m(\xi)d\xi = -p_n,\quad x \in L_n,\quad n = \overline{1, N}, \tag{4.5}$$

де $K(z)$ таке ж, як у рівнянні (2.26).

Розв'язки рівнянь повинні бути однозначними на кінцях розрізів:

$$[u_y](\partial L_n^{\pm}) = 0,\quad n = \overline{1, N}. \tag{4.6}$$

За розв’язками задачі (4.5), (4.6), подібно до підрозділу 3.2, для кожної тріщини знаходимо коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів, а також розподіл реакції в шарнірах. Кінцевою метою є встановлення граничних навантажень.

Аналіз граничної рівноваги вкритої оболонки з колінеарними дефектами проводили, як і для випадку поодинокої тріщини, за критеріями руйнування (2.34) та (2.35). Специфіка полягає лишень у необхідності врахувати, що дефекти та їх вершини перебувають у різних умовах. Отож, під руйнівним навантаженням слід тепер загалом розуміти

$$p_* = \max\left\{\min_n\left\{p_{3*,n}^{+},\, p_{3*,n}^{-}\right\}, \min_n\left\{p_{1*,n}^{+},\, p_{1*,n}^{-}, p_{2*,n}\right\}\right\}.$$

Нехай x_n^0 – координата центра відрізка L_n, а $2l_n$ – його довжина. Тоді в безрозмірних локальних координатах $\tau_m = (\xi - x_m^0)/l_m$, $t_n = (x - x_n^0)/l_n$ система співвідношень (4.5), (4.6) запишеться у вигляді:

$$\frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1} S_{nm}(\tau, t)[u_y]'_m(\tau)d\tau = -p_n,\quad t \in (-1, 1),\quad n = \overline{1, N}; \tag{4.7}$$

$$[u_y]_n(\pm 1) = 0\,, \tag{4.8}$$

де

$$S_{nm}(\tau, t) = l_m K(l_m\tau - l_n t - x_m^0 + x_n^0)\,. \tag{4.9}$$

Тут і далі індекси у τ_m, t_n опущено для спрощення запису.

Задачу (4.7), (4.8) розв’язували методом механічних квадратур, описаним у пункті 2.3.2.

Нехай

$$\frac{B}{4}[u_y]_n'(t) = \frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,, \quad n = \overline{1, N}\,,$$

де $\varphi_n(t)$ – регулярні функції.

Дискретним аналогом співвідношень (4.7), (4.8) є система $M \times N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій $\varphi_n(t)$ у квадратурних вузлах

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{N}\sum_{q=1}^{M} S_{nm}(\tau_q, t_r)\,\varphi_m(\tau_q) = -p_n\,, \quad r = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N}\,; \tag{4.10}$$

$$\frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{N} \varphi_m(\tau_q) = 0\,, \quad n = \overline{1, N}\,. \tag{4.11}$$

Вирази для коефіцієнтів інтенсивності будуть:

$$K_{N,n}^{\pm} = \mp\sqrt{l_n}\,\varphi_n(\pm 1)\,, \quad K_{M,n}^{\pm} = \pm\frac{3+\nu}{3(1+\nu)} sh\sqrt{l_n}\,\varphi_n(\pm 1)\,; \tag{4.12}$$

$$\varphi_n(1) = -\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^q \varphi_n(\tau_q)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2q-1}{4M}\pi\right),$$

$$\varphi_n(-1) = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}(-1)^{q+M} \varphi_n(\tau_q)\,\mathrm{tg}\left(\frac{2q-1}{4M}\pi\right).$$

Нарешті для підрахунку шарнірної реакції отримаємо формулу:

$$N_n(t) = \frac{3+\nu}{3(1+\nu)} p_n + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} T_{nm}(\tau_q,\, t)\,\varphi_m(\tau_q)\,, \tag{4.13}$$

$$T_{nm}(\tau,\, t) = l_m L(l_m \tau - l_m t - x_m^0 + x_n^0)\,.$$

Тут вираз для $L(\varsigma)$ береться з формули (3.38).

Уразі відсутності покриття, задовольняючи на кожному розрізі крайовим умовам, замість співвідношень (4.7)–(4.9) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{B}{4\pi} \sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} \left\{ G_{11nm}(\tau,\, t)[u_y]'_m(\tau) - G_{13nm}(\tau,\, t) c [\theta_y]'_m(\tau) \right\} d\tau = -p_n\,,$$

$$\frac{Bc}{4\pi} \sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} \left\{ G_{31nm}(\tau,\, t)[u_y]'_m(\tau) - G_{33nm}(\tau,\, t) c [\theta_y]'_m(\tau) \right\} d\tau = 0\,,$$

$$t \in (-1,1)\,, \quad n = \overline{1,\, N}\,;$$

$$[u_y]_n(\pm 1) = 0\,,\ [\theta_y]_n(\pm 1) = 0\,, \quad n = \overline{1,\, N}\,,$$

де

$$G_{jknm}(\tau,\, t) = l_m K_{jk}(l_m \tau - l_n t - x_m^0 + x_n^0)\,.$$

Дискретною формою такої системи рівнянь буде система $N \times 2M$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1,3} \sum_{q=1}^{M} G_{1knm}(\tau_q,\, t_r)\,\varphi_{km}(\tau_q) = -p_n\,,$$

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1,3} \sum_{q=1}^{M} G_{3knm}\varphi_{km}(\tau_q) = 0\,, \quad r = \overline{1,\, M-1}\,, \ n = \overline{1,\, N}\,;$$

$$\frac{\pi}{M} \sum_{q=1}^{M} \varphi_{kn}(\tau_q) = 0\,, \quad k = 1,3\,, \ n = \overline{1,\, N}\,,$$

де $\varphi_{kn}(t) = \sqrt{1-t^2}\, f_{kn}^{'}(t)$, а

$$f_{1n}(t) = \frac{B}{4}[u_y]_n(t), \; f_{3n}(t) = -\frac{Bc}{4}[\theta_y]_n(t) \; .$$

– безрозмірні фнкції стрибка на n-ому розрізі.

Числові розв’язки задачі (4.5), (4.6) будували при $\nu = 0.3$ для найбільш поширених (циліндрична, сферична) форм оболонок. Ядра інтегральних рівнянь для таких оболонок виражаються через функції Томсона.

Розглянуто детально випадки взаємодії двох рівних співвісних тріщин завдовжки $2l$, розташованих на віддалі d між їх центрами та навантажених однаковими зусиллями p.

Приймемо, що початок координат розташований посередині правого розрізу (рис. 4.2). Тоді $N = 2$, $l_1 = l_2 = l$, $p_1 = p_2 = p$, $x_1^0 = 0, x_2^0 = -d$.

Рівняння (4.7) у безрозмірних координатах будуть

$$\frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{2}\int_{-1}^{1} S_{nm}(\tau, t)[u_y]'_m(\tau)d\tau = -p, \quad t \in (-1, 1), \quad n = 1, 2 . \tag{4.14}$$

Враховуючи, що обидві тріщини перебувають в однакових умовах, в локальних координатах маємо

$$[u_y]'_2(\tau) = [u_y]'_1(-\tau) .$$

Тоді замість системи (4.14) досить розв’язати одне інтегральне рівняння, наприклад, на правому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-1}^{1} S(\tau, t)[u_y]'(\tau)d\tau = -p, \quad t \in (-1, 1), \tag{4.15}$$

де

$$[u_y]'(\tau) = [u_y]'_1(\tau) = [u_y]'_2(-\tau),$$

$$S(\tau, t) = S_{11}(\tau, t) - S_{12}(-\tau, t) = K(\tau - t) - K(-\tau - t - d) = K(\tau - t) + K\left(\tau + t + \frac{d}{l}\right),$$

а $K(\varsigma)$ – не що інше, як ядро інтегрального рівняння (3.1) для поодинокої тріщини.

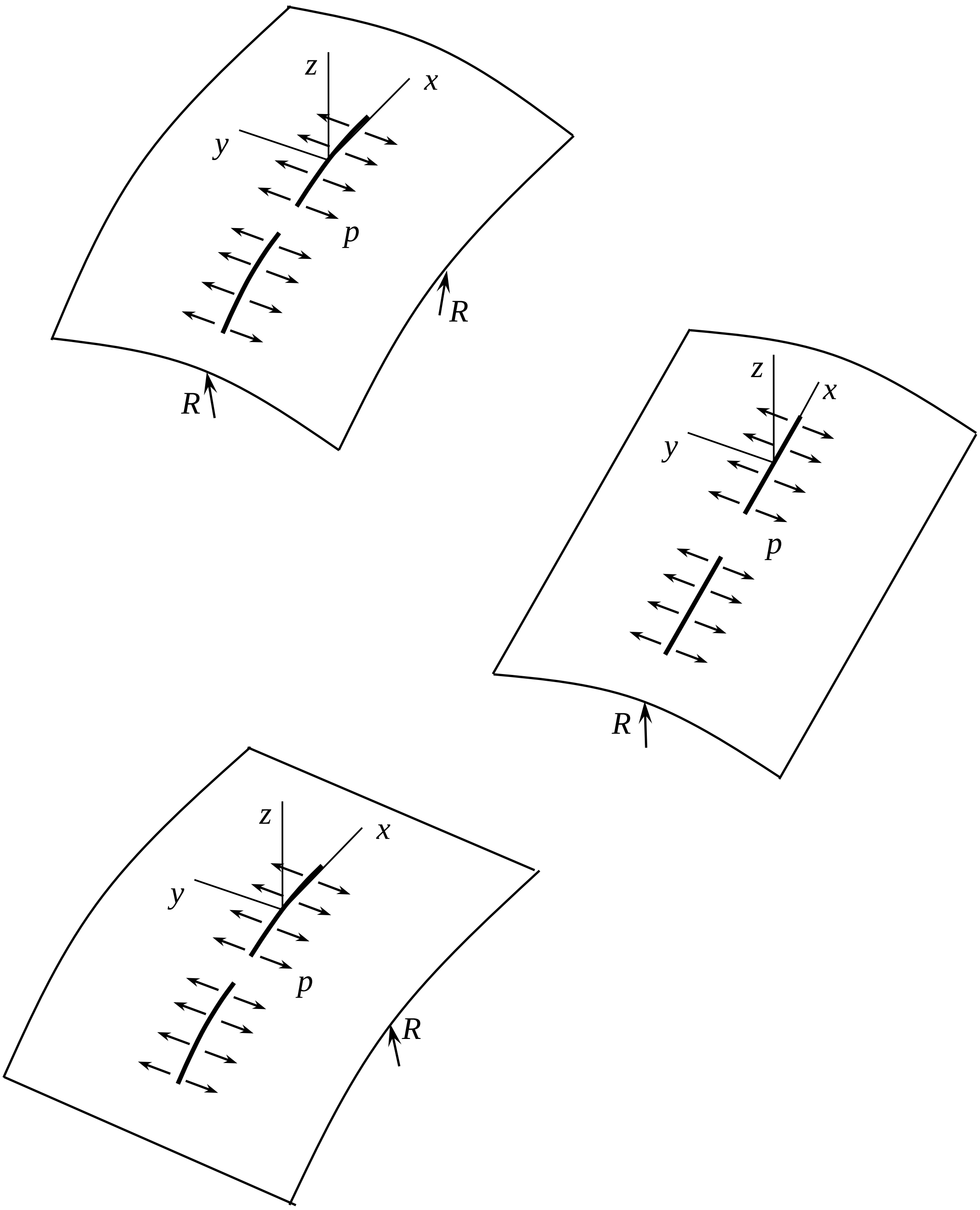


Рис.4.2 Сферична та циліндричні оболонки з двома колінеарними тріщинами

Уведемо безрозмірний параметр $\rho = \dfrac{2l}{d} \in [0, 1)$, обернений до відносної віддалі між дефектами. Вираз для ядра рівняння (4.15) остаточно набуде вигляду:

$$S(\tau, t) = K(\tau - t) + K\left(\tau + t + \frac{2}{\rho}\right).$$

Проводячи подібні міркування знаходимо регулярний вираз для шарнірної реакції на правому розрізі:

$$N(t) = \frac{3+\nu}{3(1+\nu)} p + \frac{B}{4\pi} \int_{-1}^{1} T(\tau, t)[u_y]'(\tau) d\tau ,$$

де

$$N(t) = N_1(t) = N_2(-t) ,$$

$$T(\tau, t) = L(\tau - t) + L(\tau + t + \frac{2}{\rho}) ,$$

а ядро $L(\varsigma)$ – те ж саме, що у формулі (3.38) для ізольованої тріщини.

Аналогічним способом система чотирьох інтегральних рівнянь для двох однакових співвісних тріщин з вільними від в'язей берегами перетвориться до двох рівнянь на одному (правому) розрізі:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ G_{11}(\tau, t)[u_y]'(\tau) - G_{13}(\tau, t) c [\theta_y]'(\tau) \right\} d\tau = -p ,$$

$$\frac{Bc}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ G_{31}(\tau, t)[u_y]'(\tau) - G_{33}(\tau, t) c [\theta_y]'(\tau) \right\} d\tau = 0 , \ t \in (-1, 1) ,$$

де

$$G_{jk}(\tau, t) = K_{jk}(\tau - t) + K_{jk}\left(\tau + t + \frac{2}{\rho}\right).$$

4.2. Аналіз числових результатів

4.2.1. Сферична оболонка з двома меридіональними тріщинами.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$ та моментів $\tilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$ від параметра розташування тріщин ρ будували для фіксованих значеннях параметра λ (рис. 4.9).

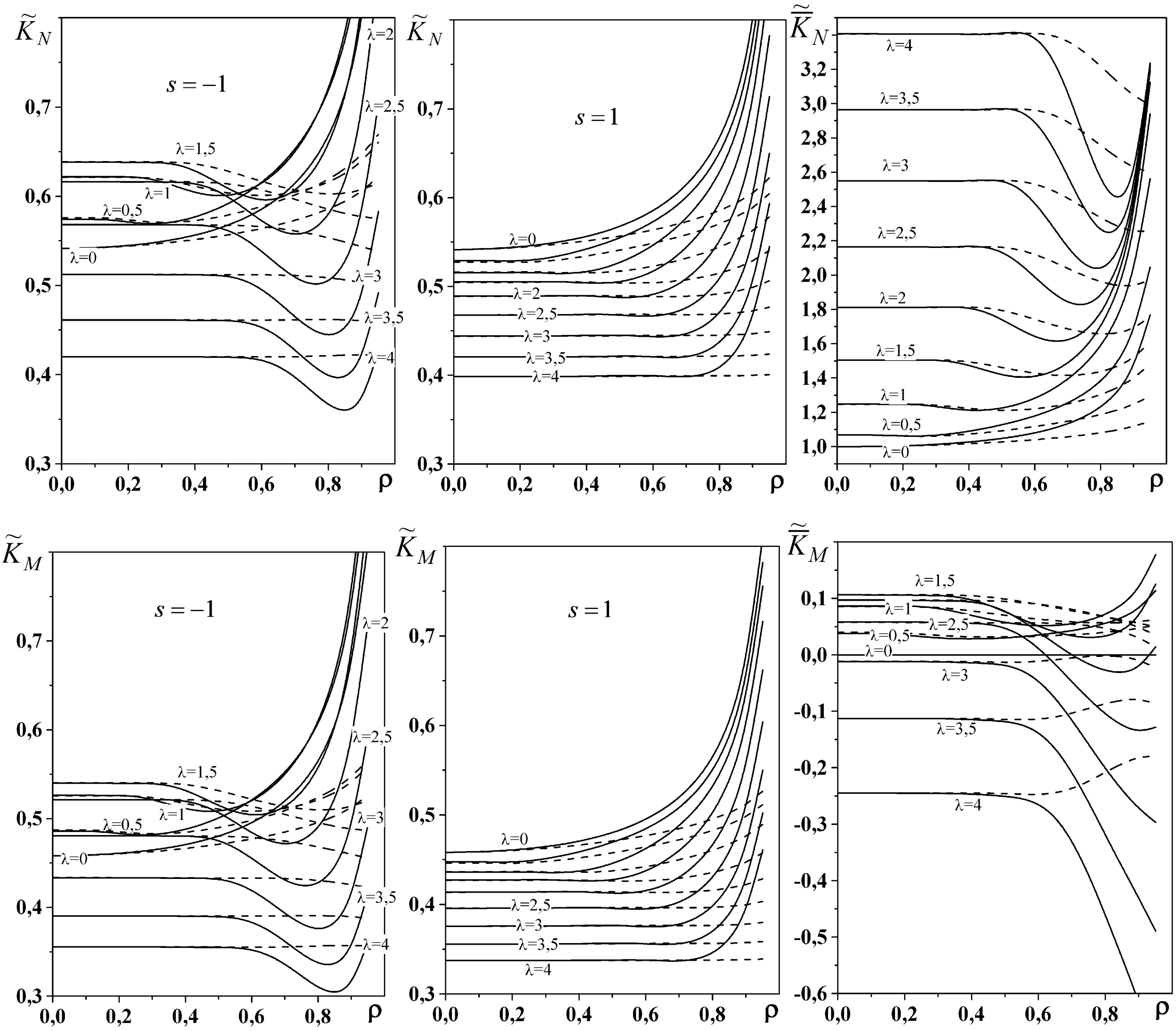


Рис. 4.3. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного роташування меридіональних тріщин у сферичній оболонці

Тут $s = 1$ відповідає зовнішньому, $s = -1$ – внутрішньому покриттю;

$\tilde{\bar{K}}_N = \bar{K}_N/(p\sqrt{l})$, $\tilde{\bar{K}}_M = \bar{K}_M/(ph\sqrt{l})$ – результати для оболонки без покриття; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам. Вплив шарнірного з’єднання берегів тріщини за розтягу оболонки проявляється у суттєвому зменшенні коефіцієнтів інтенсивності зусиль та збільшенні коефіцієнтів інтенсивності моментів.

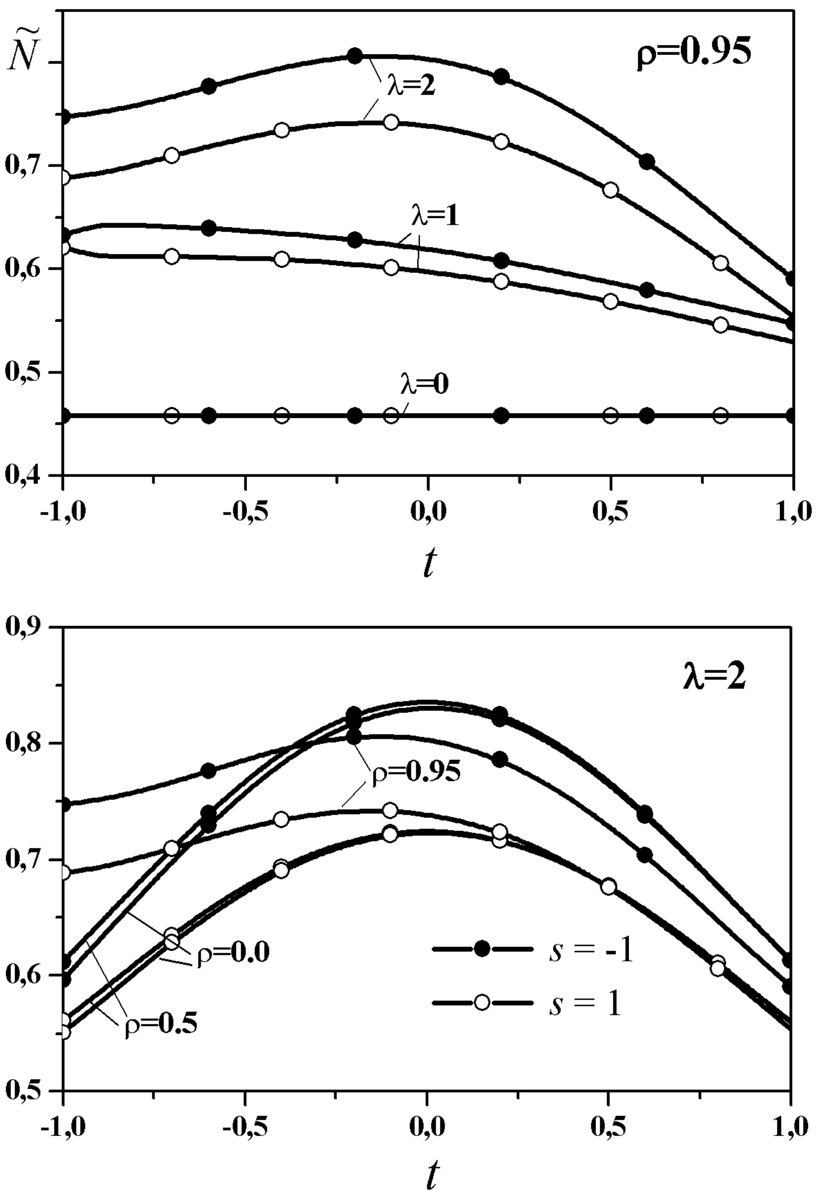


Рис. 4.4. Розподіл реакції в шарнірі для сферичної оболонки з меридіональними тріщинами $\tilde{N} = N(t)/p$, $t = x/l$: вгорі – залежність від параметра кривини λ, внизу – від параметра взаємного розташування тріщин ρ; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття.

У випадку з’єднання берегів у внутрішній поверхні ($s = -1$) спостерігається немонотонна залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів біля ближніх вершин від параметра ρ. характерна дяя оболонки без покриття. У разі підкріплення ззовні ($s = 1$) такі залежності монотонні. Вплив кривини на поведінку коефіцієнтів інтенсивності загалом такий самий, як і для ізольованого розрізу (п. 3.2.2).

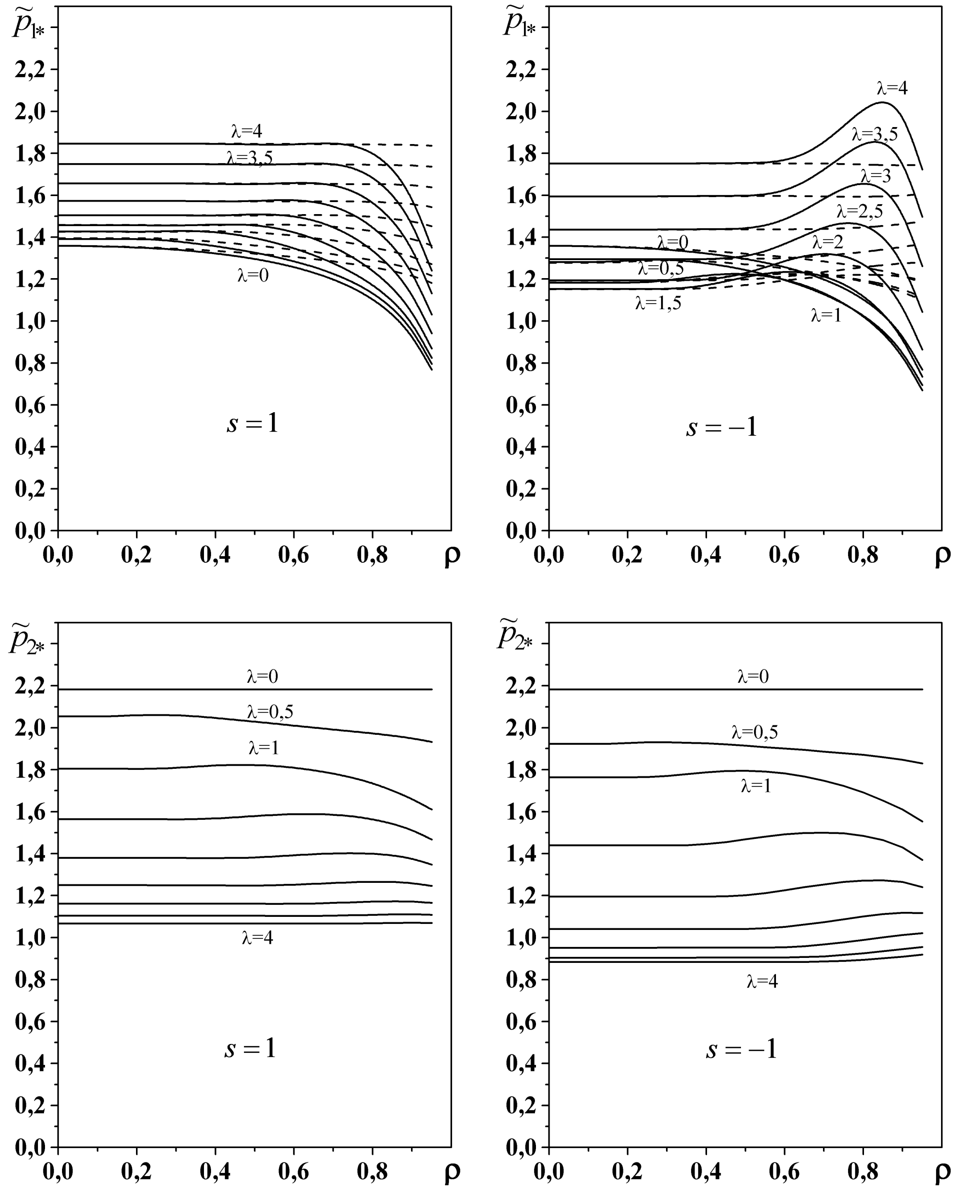
Графіки, подані на рис. 4.4, характеризують розподіл безрозмірних зусиль в покритті на лінії тріщин для різних значеннях безрозмірних параметрів кривини $\lambda = \gamma l = \left(3(1-\nu^2)\right)^{1/4} l/\sqrt{Rh}$ та відносної віддалі між тріщинами $\rho = 2l/d \in [0, 1)$.

При зростанні параметра кривини спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля в шарнірі, особливо близько середини розрізу. При зближенні розрізів абсциси максимумів $N(t)$ дещо зміщуються у бік внутрішньої вершини $t = -1$. Крім того, залежність реакції від параметра ρ загалом є немонотонною.

Результати дослідження граничної рівноваги вкритої сферичної оболонки з двома меридіональними тріщинами для випадку $N_*/p_0 = 1$ відображено на рис. 4.5.

Граничні навантаження p_{1*}, отримані за критерієм розтріскування оболонки, можуть набувати значень як більших, так і менших порівняно з аналогічно навантаженою пластиною. Для випадку покриття на внутрішній поверхні оболонки за великих λ небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних), і p_{1*}^- практично не залежить від ρ (за винятком хіба що $\rho \to 1$). Натомість, у разі підкріплення зовнішньої поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Граничні навантаження p_{2*} спадають із збільшенням кривини, подібно до поодинокого розрізу, та практично не залежать від параметра ρ.



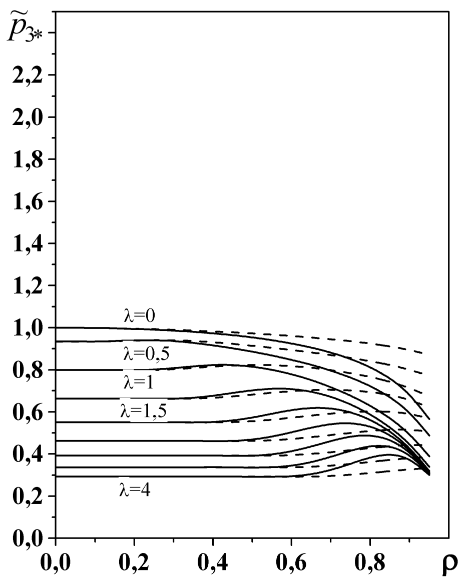


Рис. 4.5. Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$, , $N_* / p_0 = 1$; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття

Порівнянням отриманих графіків p_{1*}, p_{2*} з даними для p_{3*} при фіксованих геометричних параметрах задачі можна встановити реальний кількісний ефект підкріплення.

4.2.2. Циліндрична оболонка з двома поздовжніми тріщинами.

На рис. 4.6 подано графіки, які характеризують напружений стан у околі вершин двох колінеарних тріщин, розташованих уздовж твірної пологої циліндричної оболонки.

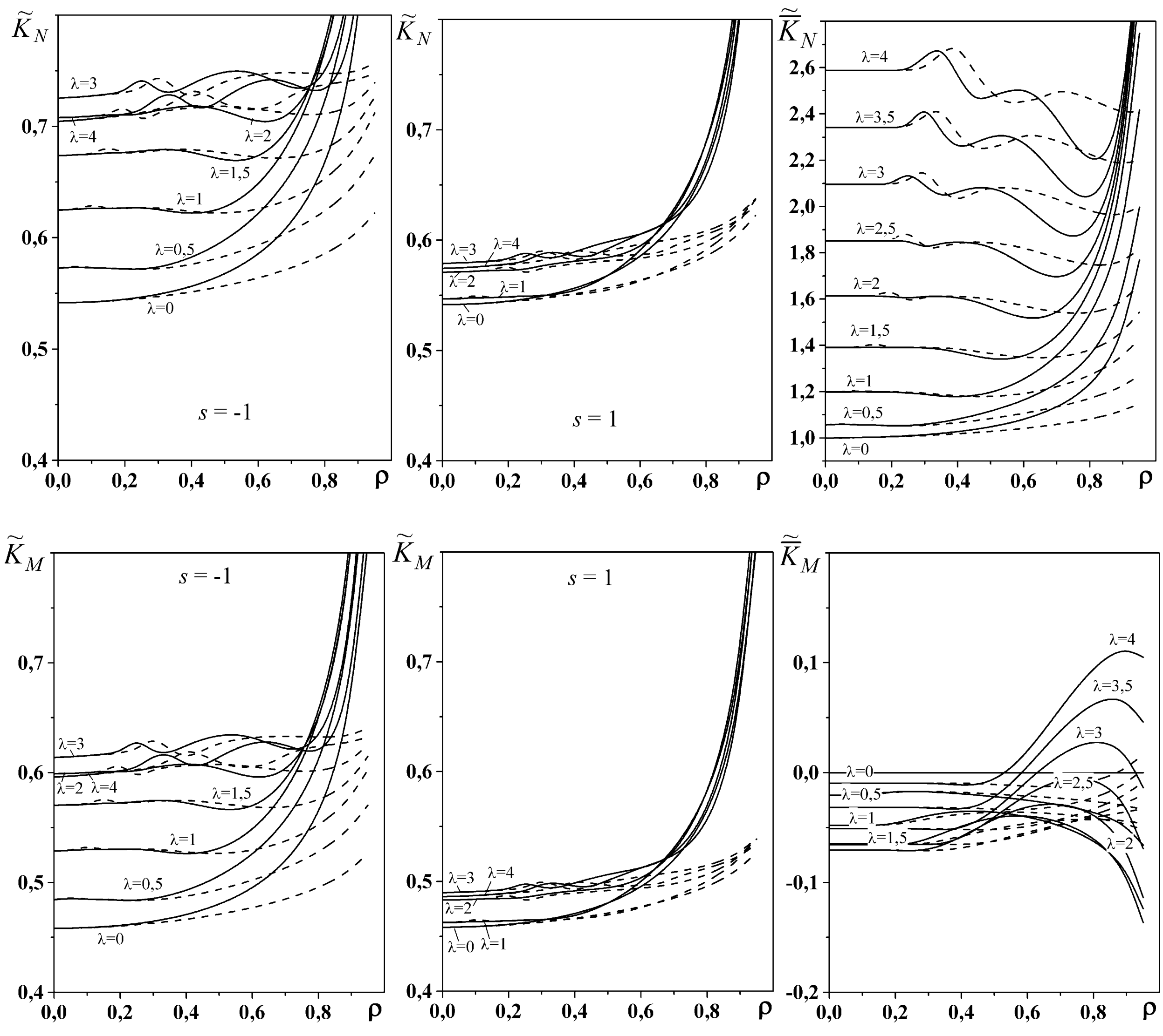
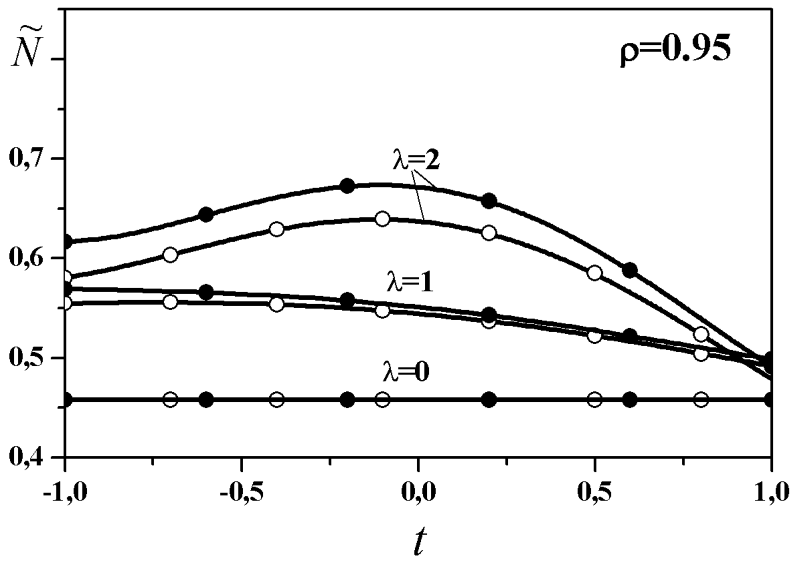


Рис. 4.6. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного роташування поздовжніх тріщин у циліндричній оболонці

Уявлення про розподіл реакції в шарнірі дають залежності, зображені на рис. 4.7. Позначення безрозмірних величин збережено такі, як у попередньому пункті.



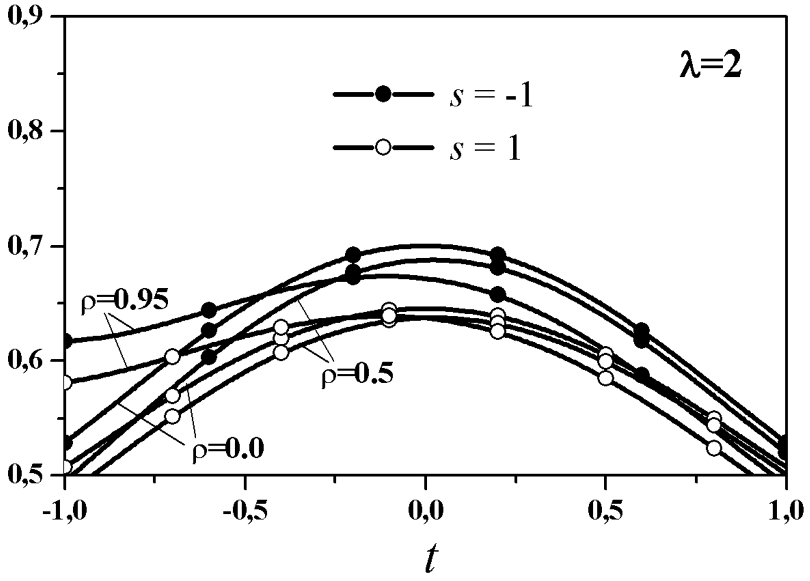


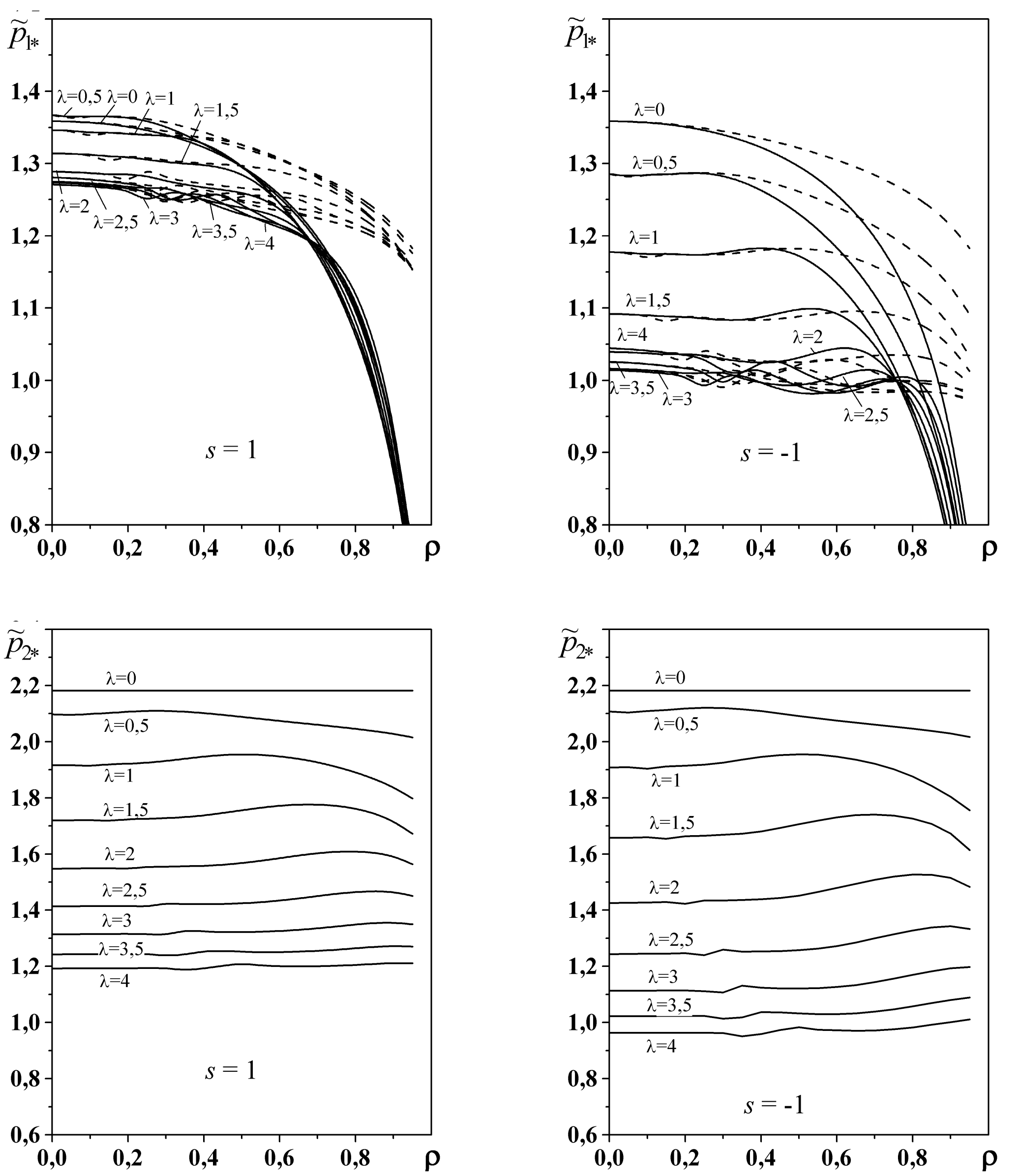
Рис. 4.7. Розподіл реакції в шарнірі для циліндричної оболонки з поздовжніми тріщинами $\tilde{N} = N(t)/p$, $t = x/l$: зверху – залежність від параметра кривини λ, знизу – від параметра взаємного розташування тріщин ρ; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття.

Як видно з цих результатів, з ростом кривини оболонки покриття стає більш напруженим не тільки посередині, але й біля внутрішніх вершин розрізів.

Як свідчить рис. 4.6, відомий за класичної постановки осцилюючий при великих λ характер залежності домінуючого коефіцієнта $\overline{K}_N(\rho)$ радикально змінюється для підкріпленої оболонки: при підкріпленні зсередини осциляції слабшають, а у разі підкріплення ззовні – практично зникають. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра кривини для пари колінеарних тріщин подібні до відповідних залежностей для ізольваного розрізу.

Графіки розподілу шарнірної реакції вздовж розрізу (рис. 4.7) свідчать про те, що для роглянутої конфігурації дефектів максимум шарнірної реакції може істотно зміститися від центра розрізу, у оремих випадках – аж до його внутрішньої вершини. Крім того, темні маркери розташовані вище від світлих, а це означає, що внутрішнє покриття буде більше напруженим, ніж зовнішнє.

Як слідує із графіків граничних навантажень, поданих на рис. 4.8, для далеко розташованих розрізів характер та локалізація руйнування залежатимуть від співвідношення N_* / p^0, для близько розташованих тріщин втрата цілісності відбувається шляхом розтріскування оболонки біля ближніх вершин.



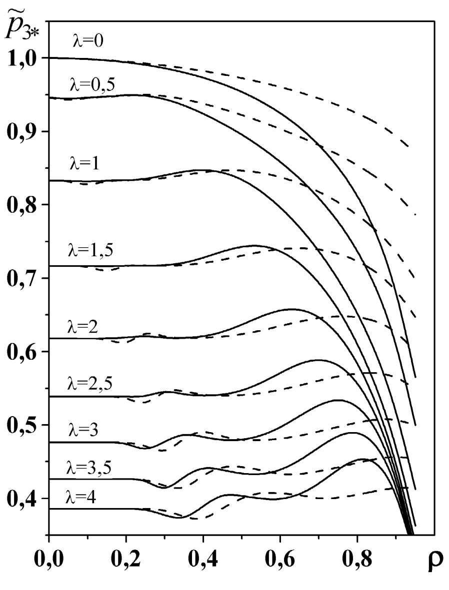


Рис. 4.8. Руйнівні навантаження для циліндричної оболонки з поздовжніми тріщинами $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$, $N_* / p_0 = 1$; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття

4.2.3. Циліндрична оболонка з двома поперечними тріщинами.

Числове дослідження пружної та граничної рівноваги виконано також і для пологої циліндричної оболонки з двома поперечними тріщинами. Результати розрахунків безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів подано на рис. 4.9–4.11. Якісно їхня поведінка така ж, як і для сферичної оболонки з меридіональним дефектом (див. п. 4.2.1). Відмінності – лише кількісні.

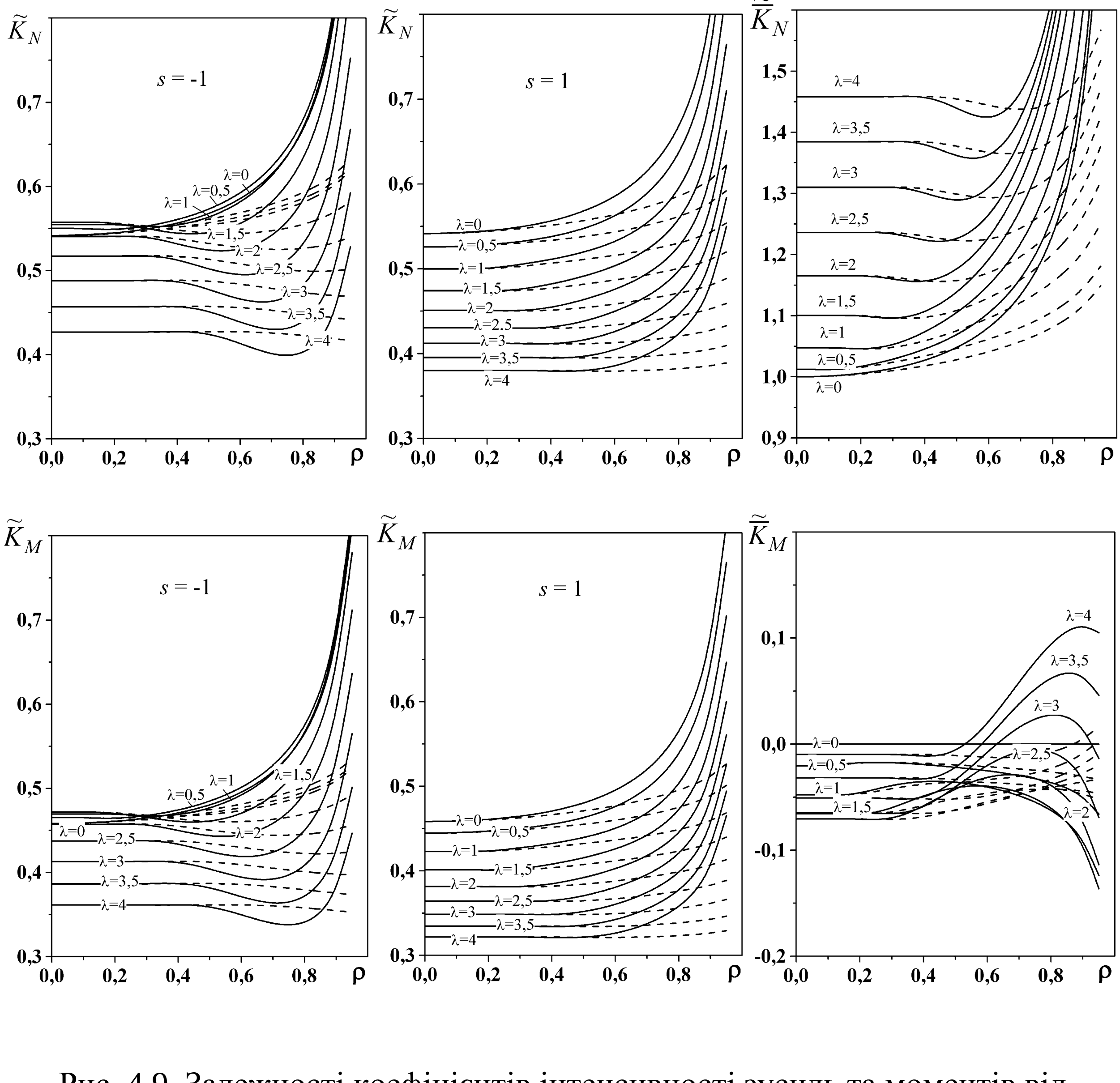


Рис. 4.9. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного роташування поперечних тріщин у циліндричній оболонці

Сказане не стосується розподілу зусиль у покритті на лінії розташування тріщини, зображеного на рис. 4.10.

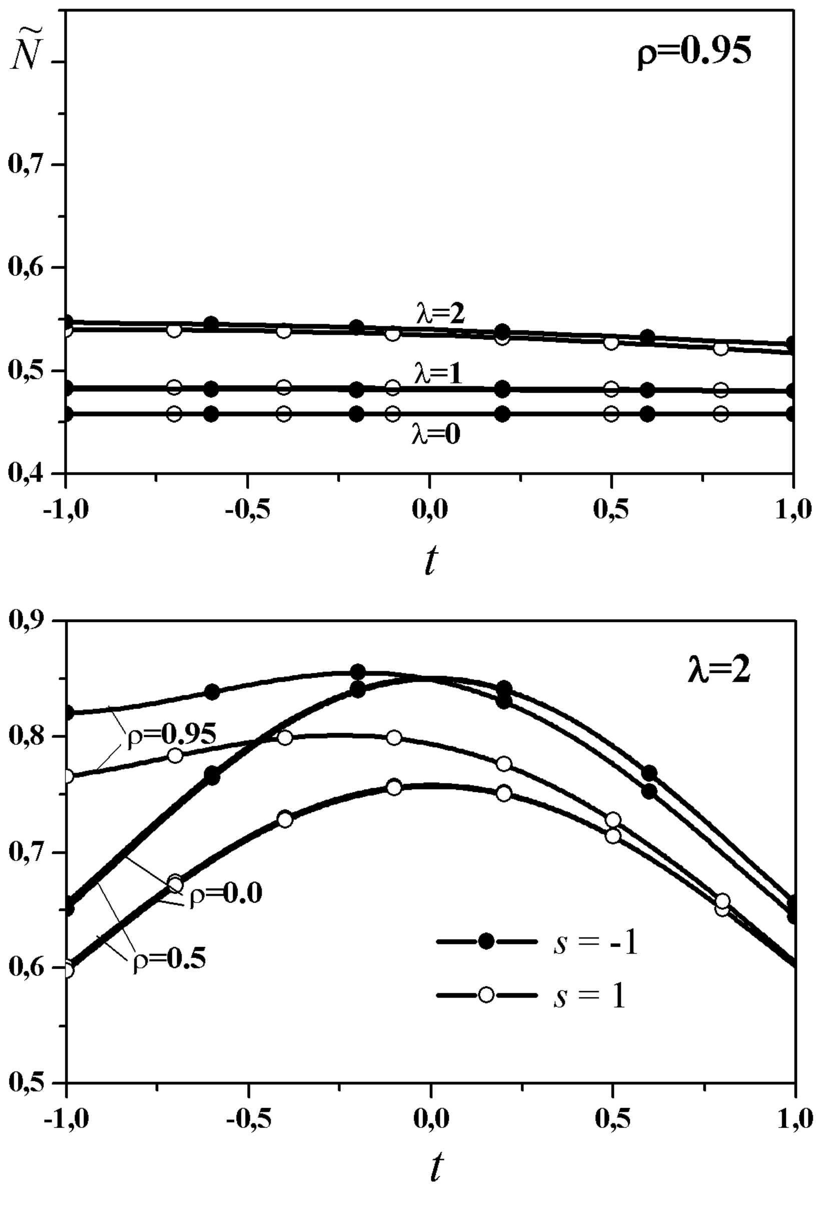
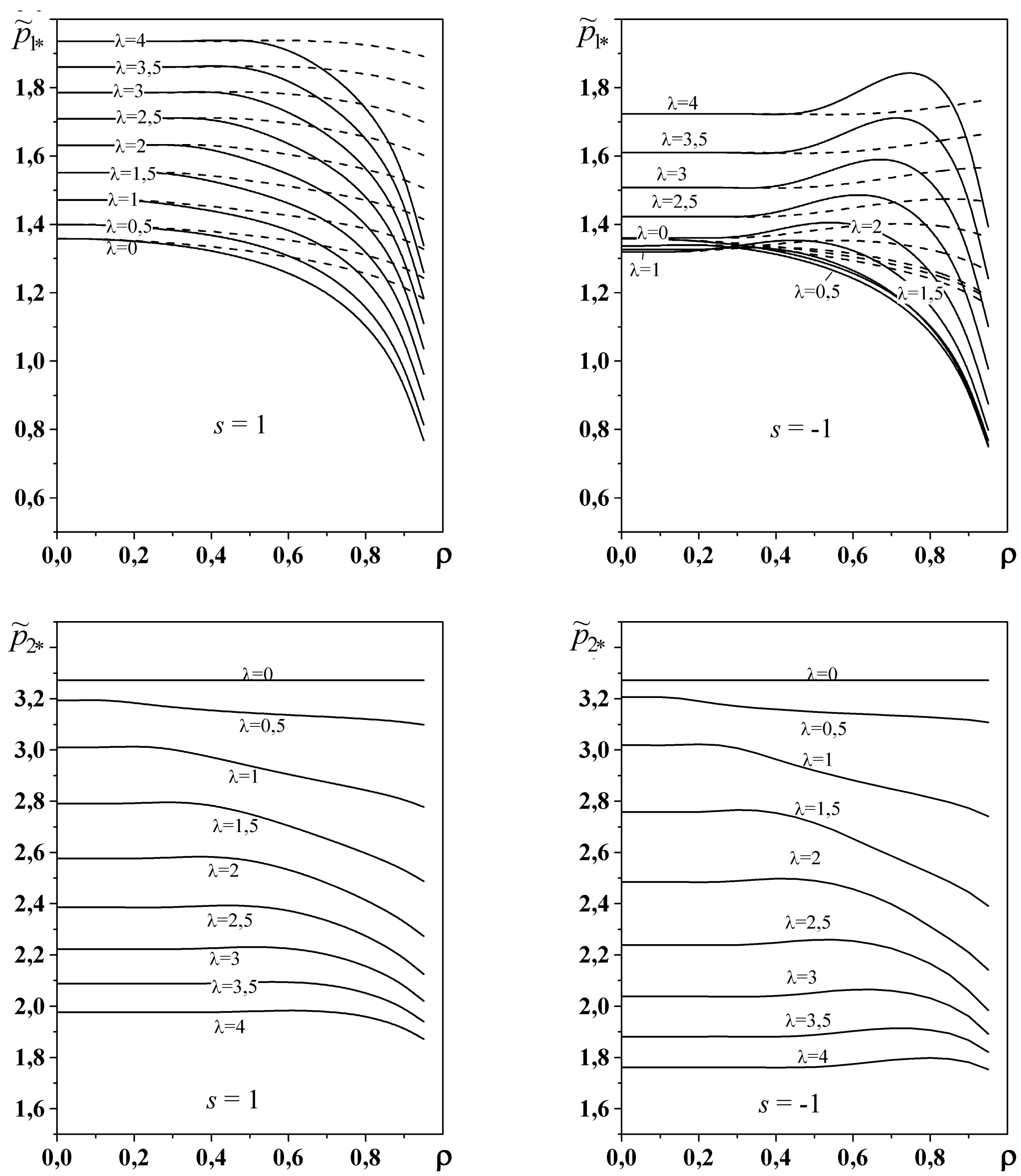


Рис. 4.10. Розподіл реакції в шарнірі для циліндричної оболонки з поперечними тріщинами $\tilde{N} = N(t)/p$, $t = x/l$: зверху – залежність від параметра кривини λ, знизу – від параметра взаємного розташування тріщин ρ; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття.



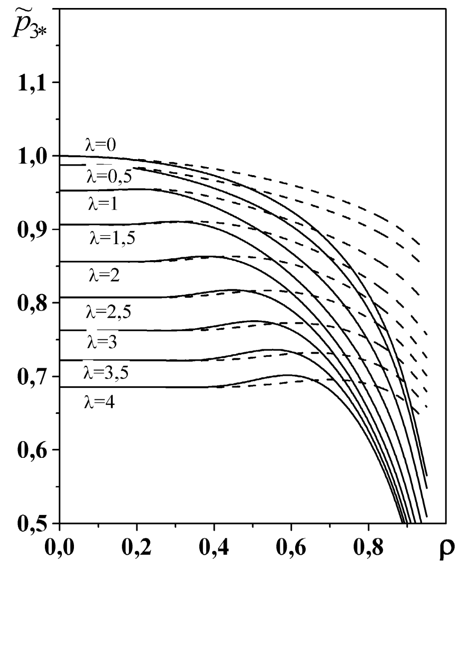


Рис. 4.11. Руйнівні навантаження для циліндричної оболонки з поперечними тріщинами $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$, $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_* /(\pi l)}$, $N_* / p_0 = 1{,}5$; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття

Для близько розташованих поперечних тріщин зусилля в покритті менші від аналогічних у сферичній оболонці і розподілені вздовж тріщини майже рівномірно.

Насамкінець зазначимо, що характер залежностей граничних навантажень від параметра ρ для вкритої циліндричної оболонки з поперечними тріщинами (рис. 4.11) теж не сильно відрізняється від встановленого для сферичної оболонки з колінеарними дефектами.

4.3. Висновки до розділу 4

У даному розділі івперше сформульовано та розв'язано задачі про взаємодію колінеарних тріщин у розтягнутих оболонках підсилени однобічним гнучким покриттям.

Із аналізу числових розв'язків задач для циліндричної та сферичної оболонок з колінеарними дефектами встановлено:

– вплив кривини на міцність вкритих оболонок з колінеарними тріщинами якісно такий самий як для оболонок з поодинокими розрізами;

– на відміну від оболонок без покриття вплив взаємного розташування дефектів у вкритих оболонках є менш відчутним; крім того, практично зникає немонотонна залежність руйнівного навантаження від параметра ρ;

– для далеко розташованих розрізів характер та локалізація руйнування залежать від співвідношення N_* / p^0, для близько розташованих тріщин втрата цілісності відбувається шляхом розтріскування оболонки біля ближніх вершин;

У часткових випадках отримані результати для колінеарних тріщин узгоджуються з відомими раніше, що слугує підтвердженням їх достовірності. Так при $\rho = 0$ дістаємо розв'язки для вкритих сферичної та циліндричної оболонок з поодинокими тріщинами, описані в підрозділі 3.2;

при $\lambda = 0$ числові результати збігаються з точним розв'язком для покритої пластини з двома колінеарними тріщинами [159]; у разі відсутності покриття маємо добре узгоження з відомими з літератури даними для розтягнутих оболонок, послаблених колінеарними дефектами з вільними від в'язей берегами [23, 57, 60, 67, 69].

Основні результати наведених у цьому розділі досліджень взаємного впливу колінеарних тріщин у розтягнутих оболонках за наявності гнучкого покриття опубліковано у працях [3–5, 11, 12, 15].

ВИСНОВКИ

Роблячи підсумки досліджень, виділимо основні результати та висновки, отримані у дисертаційній роботі.

У роботі вирішено актуальне наукове завдання – розвинути методи дослідження рівноваги пологих оболонок з тріщинами задля оцінки впливу гнучкого покриття на напружено-деформований та граничний стан тонкостінних елементів конструкцій.

Отримано наступні основні наукові результати.

1. На базі класичної теорії оболонок і моделі шарнірного з’єднання берегів тріщини сформульовано задачі статики пологих оболонок з тріщинами за наявності одностороннього гнучкого покриття та розроблена схема їх розв’язування методом сингулярних інтегральних рівнянь.

2. Розвинуто методику оцінювання утримувальної здатності вкритих дефектних оболонок, яка передбачає аналіз граничної рівноваги за двома критеріями: тріщиностійкості оболонки та міцності покриття.

3. Методом малого параметра досліджено напружений стан та граничну рівновагу пологої оболонки довільної форми з тріщиною вздовж лінії кривини за наявності гнучкого покриття.

4. На підставі числового аналізу вперше досліджено вплив гнучкого покриття на напружений стан та міцність сферичної та циліндричної оболонки з тріщиною для довільних значень параметра кривини і встановлено діапазон застосовності асимптотичних результатів – відносна похибка асимптотики не перевищує 5 %, якщо $\lambda \le 1$ для сферичної оболонки з тріщиною по меридіану, $\lambda \le 0{,}9$ для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною, $\lambda \le 2{,}2$ для циліндричної оболонки з поперечною тріщиною.

5. Уперше сформульовано та розв’язано нові задачі про взаємодію колінеарних тріщин за розтягу пологих оболонок з гнучким покриттям.

Проведено числовий аналіз взаємного впливу двох однакових тріщин, розташованих вздовж меридіана у сферичній оболонці та вздовж твірної чи напрямної у циліндричній оболонці.

На підставі отриманих результатів виявлено нові закономірності щодо впливу гнучких покриттів на міцність пологих оболонок з наскрізними тріщинами.

1. Однобічне підкріплення оболонки знижує рівень мембранних напружень в околі розрізу, проте призводить до появи істотного поля згинальних напружень.

2. Для малих кривин у оболонках довільної форми встановлено:

– якщо без покриття утримувальна здатність розтягнутої оболонки з тріщиною завжди нижча, ніж для пластини, то за наявності гнучкого покриття руйнівне навантаження для оболонки може бути як більшим, так і меншим від аналогічного значення для пластини. Це залежить від кривини і форми оболонки та від орієнтації дефекту;

– утримувальна здатність покриття для оболонки завжди менша, ніж для пластини.

3. Для довільних значень параметра кривини у сферичній та циліндричній оболонках встановлено:

– вирішальне значення для міцності композиції має співвідношення між міцністю покриття та тріщиностійкістю оболонки (N_* / p^0);

– у разі високоміцного покриття ($N_* >> p^0$) завжди першою розтріскується оболонка;

– у випадку покриття середньої міцності ($N_* \sim p^0$) для малих кривин першою руйнується оболонка, а для великих кривин першим руйнується покриття; при цьому виграш у міцності порівняно з оболонкою без покриття становить 1,4–1,6 раза для малих та 2–3 рази для великих значень параметра кривини.

– слабке покриття ($N_* << p^0$) руйнується при малих навантаженнях і не дає підкріплювального ефекту;

– руйнівне навантаження для підкріпленої оболонки з тріщиною може немонотонно залежати від параметра кривини.

4. Для циліндричної та сферичної оболонок з колінеарними дефектами встановлено:

– вплив кривини на міцність вкритих оболонок з колінеарними тріщинами якісно такий самий як для оболонок з поодинокими розрізами;

– на відміну від оболонок без покриття вплив взаємного розташування дефектів у вкритих оболонках є менш відчутним; крім того, практично зникає немонотонна залежність руйнівного навантаження від параметра ρ;

– для далеко розташованих розрізів характер та локалізація руйнування залежать від співвідношення N_* / p^0, для близько розташованих тріщин втрата цілісності відбувається шляхом розтріскування оболонки біля ближніх вершин;

5. Підкріплення зовнішньої поверхні оболонок з дефектами у всіх випадках є ефективнішим порівняно з підкріпленням на внутрішній поверхні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2015. Вип. 24. С. 248–257.
2. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2016. Т. 59. № 4. С. 135–141

   (*те саме:* Shats'kyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 238. Issue 2. P. 165–173).
3. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Взаємодія колінеарних тріщин в сферичній оболонці з гнучким покриттям. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 342–350.
4. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *Вісник Київського національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 3. С. 131–134.
5. Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщинами вздовж твірної. *Дослідження в математиці і механіці.* 2017. Т. 22. Вип. 2(30). С. 94–104.
6. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриву на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною.

Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2019. Т. 55. № 4. С. 27–33 (*те саме:* Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of flexible coating on the limit equilibrium of a spherical shell with meridional crack. *Materials Science.* 2020. Vol. 55. Issue 3. P. 484–491).

7. Шацький І. П., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 14–16 вересня 1999 р.)]. Львів: Каменяр. 1999. Т. 2. С. 333–335.
8. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізах. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: В 2-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Луцьк, 16–18 травня 2000 р.)]. Львів. 2000. Т. 2. С. 51–54.
9. Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Equilibrium of cracked shell with flexible coating. *Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 4:* Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017) (Gdansk, Poland, October 11–13, 2017). Leiden: CRC Press. 2018. P. 165–168.
10. Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на міцність циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *5 Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези. доп. (Львів, 16–18 травня 2001 р.). Львів: Кінпатрі ЛТД. 2001. С. 51.
11. Шацький І. П, Даляк Т. М., Щербій А. Б. Інтегральні рівняння для системи тріщин в пластинах і оболонках з гнучким покриттям. *Тези науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу ІФДТУНГ* (Івано-Франківськ, 24–25 квітня 2002 р.). Івано-Франківськ. 2002. С. 74.

12. Щербій А. Про взаємодію колінеарних дефектів в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача* (Львів, 24–27 травня 2005 р.). Львів: ІППММ НАН України. 2005. С. 78.
13. Шацький І. П., Даляк Т. М., Маковійчук М. В., Перепічка В. В., Щербій А. Б. Взаємодія берегів тріщин у пластинах та оболонках. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій.* Тези доп. Міжнар. наук.-техн. конф. пам’яті акад. НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17–19 жовтня 2007 р.). Дніпропетровськ: ДНУ. 2007. С. 88–89.
14. Даляк Т., Маковійчук М., Перепічка В., Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на рівновагу пластин та оболонок з дефектами. *Сучасні проблеми механіки та математики*: В 3-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 25–29 травня 2008 р.)]. Львів. 2008. Т. 2. С. 34.
15. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *IV Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки”*: матер. конф. (Київ, 28–30 серпня 2017 р.). Київ. 2017. С. 59.
16. Folias E. S. A finite line crack in a pressurized spherical shell. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1965. Vol. 1. № 1. P. 20–46.
17. Folias E. S. An axial crack in a pressurized cylindrical shell. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1965. Vol. 1. № 2. P. 104–113.
18. Folias E. S. A circumferential crack in a pressurized cylindrical shell. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1967. Vol. 3. № 1. P. 1–12.
19. Folias E.S. On the theory of fracture of curved sheets. *Eng. Fract. Mech.* 1970. Vol. 2. № 2. P. 151–164.
20. Фолиас Е. С. Разрушение сосудов высокого давления В кн.: Тонко-

стенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. С. 481–508.

21. Lemaitre L., Turbat A., Loubet R. Fracture mechanics analysis of pressurized cracked challow shells. *Eng. Fract. Mech*. 1977. Vol. 9. № 2. P. 443–460.
22. Сапунов В. Т., Морозов Е. М. Анализ напряженного состояния в сферической оболочке с трещиной В кн.: Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях. М.: Атомиздат, 1968. Т. 2. С. 260–271.
23. Erdogan F. E., Kibler J. J. Cylindrical and spherical shells with cracks. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1969. Vol. 5. № 3. P. 229–237.
24. Erdogan F. E., Ratwani M. Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1970. Vol. 6. № 4. P. 379–292.
25. Erdogan F. E., Ratwani M. A circumferential crack in a cylindrical shell under torsion. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1972. Vol. 8. № 1. P. 87–95.
26. Copley L. G., Sanders J. L., Jr. A longitudinal crack in a cylindrical shell under internal pressure. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1969. Vol. 5. № 2. P. 117–131.
27. Duncan M. E., Sanders J. L., Jr. A circumferential crack in a cylindrical shell under tension. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1972. Vol. 8. № 1. P. 15–20.
28. Erdogan F. E. Crack problems in cylindrical and spherical shells. *Mech. of Fracture*. 1977. № 3. P. 161–199.
29. Xie Y. J. An analytical method on circumferential periodic cracked pipes and shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2000. Vol. 37. № 37. P. 5189–5201.
30. Ярема С. Я. Саврук М. П. Напружений стан циліндричної оболонки з

поздовжньою або поперечною тріщиною при симетричному навантаженні. *Доповіді АН УРСР. Сер. А.* 1967. № 8. С. 720–724.

31. Ярема С. Я. Саврук М. П. Напряжения в цилиндрической оболочке с произвольно ориентированной трещиной. *Физико-химическая механика материалов.* 1969. Т. 5. № 3. С. 328–337.
32. Ярема С. Я., Саврук М. П. Напружений стан пологої оболонки з тріщиною при симетричному навантаженні. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1969. № 1. С. 55–58.
33. Ярема С. Я., Саврук М. П. Влияние кривизны на напряженное состояние оболочки с трещиной. *Прикладная механика*. 1970. Т. 6, № 11. С. 32–40.
34. Ярема С. Я. Саврук М. П. Пологая оболочка с трещиной. В кн.: Концентрация напряжений. К.: Наук. думка, 1971. Т. 3. С. 208–214.
35. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
36. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1976. 444 с.
37. Simmonds J. G., Bradley M. R. Stress-intensity factors for very short cracks in arbitrary pressurized shells. *Trans. ASME*. 1976. E43, № 4. P. 657–662.
38. Simmonds J. G., Bradley M. R., Nicholson J. W. Stress-intensity factors for arbitrarily oriented cracks in shallow shells. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1978. Vol. 45. № 1. P. 135–141.
39. Nikolson J. W., Bradley M. R., Carington C. K. Asymptotic evaluation of combined stress intensity factors for pressurized cylindrical shell containing a longitudinal crack. *J. Appl. Mech*. 1980. Vol. 47. № 3. P. 583–585.
40. Erdogan F.E., Ratwani M., Yuseoglu U. On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell. *International Journal of Fracture* 1974. Vol. 10. № 3. P. 369–374.
41. Delale F., Erdogan F. E. Transverse shear effect in a circumferentially cracked

cylindrical shell. *Quart. Appl. Mathematics*. 1979. Vol. 37. № 3. P. 239–258.

42. Delale F., Erdogan F. E. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap. *International Journal of Solids and Structures*. 1979. Vol. 15. № 12. P. 907–926.
43. Yahsi O. S., Erdogan F. E. A cylindrical shell with an arbitrarily oriented crack. *International Journal of Solids and Structures*. 1983. Vol. 19. № 11. P. 609–616.
44. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. 126 с.
45. Цванг В. А., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропной оболочки с прямолинейной трещиной при антисиметричном нагружении. *Теорет. и Прикладная механика*. 1980. № 11. С. 55–62.
46. Цванг В. А., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропной оболочки, ослабленной прямолинейной трещиной. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1980. № 12. С. 41–44.
47. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Система прямолинейных трещин в пологой ортотропной оболочке произвольной кривизны. *Теорет. и Прикладная механика*. 1984. Вып. 15. С. 48–53.
48. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. К оценке взаимовлияния системы разрезов в пологих ортотропных оболочках. *Прикладная механика*. 1987. Vol. 23. № 7. С. 50–55.
49. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропных оболочек с прямолинейным разрезом. *Теоретическая и прикладная механика*. 1987. Вып. 18. С.63–65.
50. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами. К.: УМКВО, 1988. 84 с.
51. Довбня Е. Н. О корректности постановки симметричных задач механики пологих оболочек с разрезами. *Теоретическая и прикладная механика*.

1988. Вып. 19. С. 98–100.

52. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. Ортотропная оболочка произвольной кривизны с криволинейными разрезами. *Вісник Донецького університету. Сер.А*. 1997. Вип. 1. С.89–97.
53. Шевченко В. П., Довбня К. М. Система граничних інтегральних рівнянь для ортотропної оболонки з розрізом довільної конфігурації. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2001. Т. 44. № 1. С. 103–108.
54. Шевченко В. П., Гольцев А. С., Довбня К. М. Методи фундаментальних розв'язків у механіці тонкостінних конструкцій. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2001. Т. 37. № 3. С. 21–28.
55. Шевченко В. П., Довбня К. М. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статики пологих ортотропних оболонок із розрізами й отворами. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2003. Т. 46. № 1. С. 47–59.
56. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Яртемик В. В. Оболочка произвольной кривизны с системой трещин различного типа и геометрии. *Прикладная механика*. 2011. Т. 47. № 4. С. 89–98.
57. Механика композитов. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1993 (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. Киев: А. С. К., 1998. 387 с.)
58. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. *Математичнские методы и физико-механические поля*. 1975. Вип. 1. С. 29–41.
59. Осадчук В. А. Метод дисторсий в задачах об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами). *Математичнские методы и физико-механические поля*. 1979. Вип. 10. С. 27–50.
60. Осадчук В. А., Федюк Е. М. Система произвольно ориентированных трещин в пологой сферической оболочке. *Доклады АН УССР. Сер. А*.

1974. № 8. С. 711–714.

61. Осадчук В. А., Федюк Е. М. Система продольных трещин различной длины в пологой цилиндрической оболочке. В кн.: *Физико-механические поля в деформируемых средах*. Киев: Наук. думка. 1978. С. 45–51.
62. Осадчук В. А., Николишин М. М. Напряженное состояние в замкнутой цилиндрической оболочке с системой трещин. *Прикладная механика*. 1976. Т. 12. № 4. С. 26–31.
63. Осадчук В. А., Николишин М. М., Регейло С. П. Влияние упругого заполнителя на напряженное состояние замкнутой цилиндрической оболочки с системой трещин. *Математичнские методы и физико-механические поля*. 1979. Вип. 9. С. 70–76.
64. Осадчук В. А., Николишин М. М. Цилиндрическая оболочка с разрезом, находящаяся в упругой среде. *Теоретическая и прикладная механика*. 1985. № 16. С. 87–91.
65. Осадчук В. А., Николишин М. М., Маселко Т. Е., Предельное равновесие находящейся на упругом основании сферической оболочки, ослабленной трещиной. *Прикладная механика*. 1986. № 10. С. 47–52.
66. Осадчук В. А. Критерии распространения продольных и поперечных трещин в замкнутых цилиндрических оболочках. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1980. № 4. С. 151–159.
67. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка. 1985. 224 с.
68. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами. *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела*. 1986. Т. 18. С. 3–52.
69. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.

70. Кушнир Р. М., Николишин М. М., Ростун Н. И., Фещук Ю. П. Взаимодействие систем произвольно ориентированых трещин в упругопластической цилиндрической оболочке. *Теоретическая и прикладная механика*. 2005. Т. 41. С. 134–140.
71. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Ростун М. Й., Пружно-пластична сферична оболонка з системою довільно орієнтованих тріщин. *Математичі методи та фізико-механічні поля*. 2006. Т. 49. № 1. С. 155–163.
72. Folias E. S. Asymptotic approximations to crack problems in shells. *Mechfnics of Fracture*. 1977. № 3. P. 117–157.
73. Duncan M. E., Sanders J. L. The effect of circumferential stiffener on the stress in a pressurized cylindrical shell with a longitudinal crack. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1969. Vol. 5. № 2. P. 133–155.
74. Фильштинський А. А., Любчак В. А. Исследование влияния анизотропного материала и подкрепляющего ребра на напряженное состояние оболочки с трещиной. Докл. XIII Всесоюзн. конф. "Теория пластин и оболочек" (Таллин, 1983). Таллин, 1983. Т. 4. С. 212–216.
75. Фильштинський Л. А., Любчак В. А. Эффект подкрепления ребрами жесткости анизотропной оболочки с разрезами. *Физико-химическая механика материалов.* 1984. Т. 20. № 1. С. 53–58.
76. Стаценко Л. И., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние оболочек произвольной кривизны при наличии трещины и упругого ребра. *Известия АН СССР. Механика тверд. тела*. 1991. № 6. С. 117–121.
77. Sih G. C., Hagendorf H. C. On the cracks in shells with shear deformation. *Mechanics of Fracture*. 1977. № 3. P. 201–229.
78. Си, Хагендорф. *Новая теория сферических оболочек с трещинами Тонкостенные оболочечные конструкции*. М., 1980. С. 509–533.
79. Berger D. Linear elastic fracture mechanics applied to cracked plates and

shells. *International Journal of Fracture* 1976. Vol. 12. № 4. P. 587–593.

80. Erdogan F., Delale F. The effect of trasverse shear and material orthotropy in cracked cylindrical and spherical shells. *Trans. 5th Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol.* Berlin, 1979. Vol. G. Amsterdam e.a., 1979, G4.2/1–G4.2/8.
81. Zehnder A. T., Viz M. J. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews.* 2005. Vol. 58. P. 37–48.
82. Erdogan F., Tuncel O., Paris P. An experimental investigation of the crack tip stress intensity factors in plates under cylindrical bending. *Journal of Basic Engineering*. 1962. Vol. 84. P. 542–546.
83. Винн Р. Г., Смит С. М. Экспериментальное исследование критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе. *Труды Американского обществава инженеров механиков. Сер. Д.* 1969. № 4. С. 280–288.
84. Ewing P. D., Williams J. G. Fracture of sphericall-shells under pressure and circular tubes with angled cracks in torsion. *International Journal of Fracture* 1974. Vol. 10. № 4. P. 537–544.
85. Орыняк И. В. Прочность трубопроводов с дефектами. К.: Наук. думка, 2012. 445 с.
86. Yuseoglu U, Erdogan F. A cylindrical shell with an axial crack under skew-symmetric loading. *International Journal of Solids and Structures*. 1973. Vol. 9. № 3. P. 347–362.
87. Delale F., Erdogan F. The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature. *Engineering Fracture Mechanics.* 1983. Vol. 18. № 3. P. 529–544.
88. Erdogan F. E., Ratwani M. A note on the interference of two collinear cracks in a cylindricall shell. *International Journal of Fracture*. 1974. Vol. 10. № 4. P. 463–465.

89. Довбня К. М. Розвиток методу граничних інтегральних рівнянь в теорії ортотропних оболонок з розрізами та отворами: Автореф. дис… д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04./ ІППММ НАН України. Львів, 2002. 36 с.
90. Amazigo J.C. On the J integral for an internally pressurized cylindrical shell with longitudinal crack. *International Journal of Fracture*. 1973. 9, № 4. P. 492–494.
91. Шацький І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками. *Доповіді АН УРСР*. 1991. № 2. С. 26–29. і
92. Shatsky I. P. The cuts with the contacting edges in the bending shallow shells Adv. in Fract. Resist. in Mater. / Ed. V. V. Panasyuk e. a. New Delhi: Mc Craw-Hill. Publ., 1996. V. 1. P. 555–561.
93. Шацкий И. П. Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 1998. № 5. С. 164–173.
94. Шацький І. П. Закриття поперечної тріщини при згині пологої циліндричної оболонки. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2000. Т. 43. № 2. С. 149–154.
95. Шацький І. П. Закриття поздовжньої тріщини в пологій циліндричній панелі під час її згину. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2005. Т. 41. № 2. С. 45–48.
96. Довбня К. М., Григорчук Ю. В. Напружений стан оболонки двоякої кривини з тріщиною при згинальному навантаженні. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 19. С. 112–116.
97. Довбня К. М., Шевцова Н. А. Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною при згинальному навантаженні. *Проблемы прочности.* 2014. № 3. С. 59–64

98. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Аналіз граничного стану циліндричних оболонок з тріщинами з урахуванням контакту берегів. *Проблемы прочности*. 2009. № 5. С. 141–146.

99. Шацький І., Маковійчук М. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину. *Фізико-математичне моделювання та інфораційні технології.* 2010. № 12. С. 189–195.

100. Шацький І., Маковійчук М. Закриття колінеарних тріщин при згині пологої циліндричної оболонки. *Машинознавство*. 2011. № 11–12. С. 27–30.

101. Шацкий И. П. Маковийчук Н. В. Влияние закрытия коллинеарных трещин на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек. *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52. № 3. С. 159–167.

102. Довбня К. М., Григорчук Ю. В. Напружений стан оболонки двоякої кривини з двома колінеарними тріщинами при згинальному навантаженні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 1. С. 81–85.

103. Маковійчук М. В. Згин пологої сферичної оболонки на пружній основі з урахуванням закриття колінеарних тріщини *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2010. Вип. 8. С. 119–124.

104. Liu Rong, Wang C. H., Bathgate R. G. Crack closure in spherical shells. *International Journal of Fracture* 1999. Vol. 99. № 4. P. 307–323.

105. Liu Rong, Zhang Tie, Wu X. J., Wang C. H. Crack closure effect on stress intensity factors of an axially and a circumferentially cracked cylindrical shell. *International Journal of Fracture* 2004. Vol. 125 № 3-4. P. 227–248.

106. Liu Rong, Zhang Tie, Wu X. J., Wang C. H. Effect of crack closure in a specially orthotropic cylindrical shell containing an axial or a circumferential crack. *Engineering. Fracture Mechanics*. 2004. Vol. 71. № 16-17. P. 2493–

2512.

107. Хлуднев А. М. Контактная задача для пологой оболочки с трещиной. *Прикладная математика и механика*. 1995. Т. 59. №2. С. 318–326.

108. Khludnev A. M., Kovtunenko V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston : WIT-Press, 2000.

109. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університетуту*. 2007. – Вип. 20(2). С. 123–127.

110. Опанасович В. К. Математичні моделі і методи аналізу деформування пластинкових структур з тріщинами за контакту їх берегів: Автореф. дис… д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04./ ІППММ НАН України. Львів, 2013. 42 с.

111. Гриліцький Д. Шацький І. Проблема контакту берегів тріщин в тонких пластинах та оболонках. *Сучасні проблеми механіки та математики*: В 3-х т. Львів, 2008. Т. 2. С. 32–33.

112. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Контактна взаємодія берегів тріщин у пологих оболонках за згину з розтягом. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2005. 41. № 4. С. 45–52.

113. Николишин М.М. Гранична рівновага оболонок з наскрізними та поверхневими тріщинами при пружному та пружнопластичному деформуванні: Автореф. дис… д-ра фіз.-мат. наук. : 01.02.04./ ІППММ НАН України. Львів, 1996. 40 с.

114. Довбня Е. Н., Корохина О. А. Исследование прочности упруго-пластической оболочки произвольной кривизны с прямолинейной трещиной в рамках δ_c-модели. *Вестник ХГТУ*. 2003. № 3(19). С. 119–122.

115. Довбня К. М, Корохіна О. А. Напружений стан пружно-пластичної оболонки, послабленої внутрішньою тріщиною. *Машинознавство*. 2005. № 3. С. 8–11.

116. Erdogan F., Delale F. Ductile fracture of pipes and cylindrical containers with a circumferential flaw. *Transactions of ASME. Journal of Pressure Vessel Technologie*. 1981. Vol. 103. N 2. P. 160–168.

117. Chen Y. H., Hahn H. G. Interaction of a stiffener with a crack in an anisotropic sheet. *Engineering Fracture Mechanics*. 1989. Vol. 33. N 6. 887–895.

118. Саврук М. П., Кравець В. С. Напружений стан підкріпленої накладкою пластини з тріщиною. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 1991. Т. 27. № 4. С. 33–40.

119. Саврук М. П. Кравец В. С. Влияние подкрепляющих накладок на распределение напряжений в пластинах с трещинами. *Прикладная механика*. 1993. Т. 29. № 3. С. 48–55.

120. Саврук М.П., Кравець В.С. Плоскі задачі теорії пружності для підкріплених пластин з тріщинами. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 1995. Т. 31. № 3. С. 68–83.

121. Кравець В. С. Напружено-деформований стан і гранична рівновага підкріплених накладками пластин з тріщинами: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Нац. акад. наук України, Фіз.-механ. ін-т ім. Г. В. Карпенка. Львів, 1996. 233 с.

122. Tsamasphyros G. J., Kanderakis G. N., Karalekas D., Rapti D., Gdoutos E. E., Zacharopoulos D., Marioli Riga Z. P. Study of composite patch repair by analytical and numerical methods. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2001. Vol. 24. N. 10. P. 631–636.

123. Zemlyanova A. Y., Sil'vestrov V. V. The problem of a circular patch. *Journal of applied mathematics and mechanics*. Vol. 4. N. 69. P. 611–617.

124. Zemlyanova A. Singular integral equations for a patch repair problem. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. N. 21. P. 6860–6877.

125. Zemlyanova A. Y., Sil’vestrov V. V. The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-dimensional patch. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2007. Vol. 71. N. 1. P. 40–51.

126. Zemlyanova A. Y., Sil’vestrov V. V. Interaction of elastic plate weakened by multiple holes with a set of patches. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 62. N. 2. P. 201–220.

127. Mkhitaryan S. M., Bardzokas D. I. Reinforcement of a Cracked Infinite Elastic Plate with Defects. In *Recent Advances in Mechanics* (P. 397–411). Springer, Dordrecht.

128. Rose L. R. F. An application of the inclusion analogy for bonded reinforcements. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17. N 8. P. 827–838.

129. Rose L. R. F. A cracked plate repaired by bonded reinforcements. *International Journal of Fracture*. 1982. Vol. 18. N 2. P. 135–144.

130. Rose L. R. F. Theoretical analysis of crack patching. In *Bonded repair of aircraft structures* (1988. P. 77–106). Springer, Dordrecht.

131. Rose L. R. F., Wang C. H. Analytical methods for designing composite repairs. In *Advances in the bonded composite repair of metallic aircraft structure* (2002. P. 137–175). Elsevier Science Ltd.

132. Wang C. H., Rose L. R. F., Callinan R. Analysis of out-of-plane bending in one-sided bonded repair. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. N 14. P. 1653–1675.

133. Clark R. J., Romilly D. P. Linear coupled bending and extension of an unbalanced bonded repair. *International journal of solids and structures*. 2007. Vol. 44. N 10. P. 3156–3176.

134. Bouiadjra B. B., Belhouari M., Serier B. Computation of the stress intensity factors for repaired cracks with bonded composite patch in mode I and mixed mode. *Composite Structures*. 2002. Vol. 56. N. 4. P. 401–406.

135. Ouinas D. Effect of disbonding between a composite patch and a cracked aluminum plate on the stress intensity factor. *Journal of reinforced plastics and composites*. 2009. Vol. 29. N 14. P. 2227–2236.

136. Amiri A., Bouiadjra B. B., Serier B., Belhouari M. Analysis of the disbond effect on the stress intensity factor variation for repaired cracks with bonded composite patch. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: *Journal of Materials: Design and Applications*. 2006. Vol. 220. N 2. P. 91–93.

137. Ricci F., Franco F., Montefusco N. Bonded composite patch repairs on cracked aluminum plates: theory, modeling and experiments. *Advances in Composite Materials-Ecodesign and Analysis*. 2011. P. 445-464.

138. Ouinas D., Achour B., Bouiadjra B. B., Taghezout N. The optimization thickness of single/double composite patch on the stress intensity factor reduction. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2013. Vol. 32. N 9. P. 654–663.

139. Ramji M, Srilakshmi R. Design of composite patch reinforcement applied to mixed-mode cracked panel using finite element analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2012. Vol. 31. N. 9. P. 585–595.

140. Beloufa H. I., Ouinas D., Tarfaoui M., Benderdouche N. Effect of stacking sequence of the bonded composite patch on repair performance. *Structural Engineering & Mechanics.* 2016. Vol. 57. N 2. P. 295–313.

141. Belhouari M., Fekih S. M., Kouider M., Amiri A., Bachir Bouiadjra B. A. Experiments Method Design Applied to Optimization of Patch Repairs for Cracked Plates. In *Key Engineering Materials* (2014. Vol. 577. P. 441–444). Trans Tech Publications Ltd.

142. Jamal-Omidi M., Falah M., Taherifar D. 3-D fracture analysis of cracked aluminum plates repaired with single and double composite patches using XFEM. *Structural Engineering and Mechanics*. 2014. Vol. 50. N 4. P. 525–

539.

143. Bouchiba M. S., Serier B. New optimization method of patch shape to improve the effectiveness of cracked plates repair. *Structural Engineering & Mechanics*. 2016. Vol. 58. N 2. P. 301–326.

144. AAbid A. B. D. U. L., Hrairi M., Ali J. S. M., Abuzaid A. Effect of bonded composite patch on the stress intensity factors for a center-cracked plate. *IIUM Engineering Journal*. 2019. Vol. 20. N 2. P. 211–221.

145. Hosseini-Toudeshky H., Mohammadi B., Bakhshandeh S. Mixed-mode fatigue crack growth of thin aluminium panels with single-side repair using experimental and numerical methods. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2007. Vol. 30. N 7. P. 629–639.

146. Maleki H. N., Chakherlou T. N. Investigation of the effect of bonded composite patch on the mixed-mode fracture strength and stress intensity factors for an edge crack in aluminum alloy 2024-T3 plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2017. Vol. 36. N 15. P. 1074–1091.

147. Chung K. H., Yang W. H. Mixed mode fatigue crack growth in aluminum plates with composite patches. *International Journal of Fatigue*. 2003. Vol. 25. N. 4. P. 325–333.

148. Hosseini-Toudeshky H., Sadeghi G., Daghyani H. R. Experimental fatigue crack growth and crack-front shape analysis of asymmetric repaired aluminium panels with glass/epoxy composite patches. *Composite Structures*. 2005. Vol. 71. N 3-4. P. 401–406.

149. Hosseini-Toudeshky H., Bakhshandeh S., Mohammadi B., Daghyani H. R. Experimental investigations on fatigue crack growth of repaired thick aluminium panels in mixed-mode conditions. *Composite Structures*. 2006. Vol. 75. N 1-4. P. 437–443.

150. Chi Chen, Thanh Hai Tran, Alex A. Volinsky. Bonded composite repair structures multiple site damage analysis. Aircraft Engineering and Aerospace

Technology. 2013. Vol. 85. Issue: 3. P. 171–177.

151. Achour A., Albedah A., Benyahia F., Bouiadjra B. A. B., Ouinas D. Analysis of repaired cracks with bonded composite wrap in pipes under bending. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2016. Vol. 138. N 6. 060909.

152. Meriem-Benziane M., Abdul-Wahab S. A., Zahloul H., Babaziane B., Hadj-Meliani M., Pluvinage G. Finite element analysis of the integrity of an API X65 pipeline with a longitudinal crack repaired with single- and double-bonded composites. *Composites Part B: Engineering*. 2015. Vol. 77. P. 431–439.

153. Mohammadi S., Yousefi M., Khazaei M. A review on composite patch repairs and the most important parameters affecting its efficiency and durability. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2020. P. 0731684420941602.

154. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками. *Журнал прикладной механики и технической физики*. 1989. № 5. С. 163–165.

155. Шацький І. П. Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям. *Вісник Львівського університетуту. Сер. механіко-математична.* 2000. Вип. 57. С. 42–47.

156. Шацький І. П. Інтегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Доповіді АН України*. 1992. № 1. С. 46–48.

157. Шацкий И. П. Задача о трещине в пологой оболочке с гибким покрытием. *Прикладная механика и техническая физика*. 1996. Т. 37. № 2. С. 131–138.

158. Шацкий И. П. Периодическая система параллельных разрезов с шарнирно соединёнными кромками в растянутой пластине. *Теоретическая и прикладная механика*. 1992. Вып. 23. С. 40–45.

159. Шацький І. П. Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з’єднаними

берегами у розтягнутій пластинці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 1992. Вип. 36. С. 93–97.

160. Шацкий И. П., Даляк Т. М. Влияние гибкого покрытия на прочность пластины с циклической системой радиальных трещин. *Вісник Донецького університетуту. Сер. А. Природничі науки*. 2008. № 1. С. 84–87.

161. Шацький І., Даляк Т. Вплив гнучкого покриття на міцність пластини із зірчастим розрізом. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. №. 19. С. 228-233.

162. Перепічка В. В. Гнучке одностороннє покриття на півнескінченній пластині з наскрізною внутрішньою тріщиною. *Наукові нотатки*. 2014. № 47. С. 137–142.

163. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

164. Ventsel E. Krauthammer T. Thin plates and shells. Theory: analysis, and applications. CRC Press. 2001. 688 p.

165. Власов В. З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.

166. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз. 1962. 511 с.

167. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 448 с.

168. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.

169. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.

170. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989. 248 с.

171. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред

со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.

172. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations. *Methods of analysis and solutions of crack problems*. Leyden: Noordhoof Int. Publ. 1973. P. 368–425.

173. Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. *Известия вузов. Сер. Математика.* 1973. № 7. С. 12–24.

174. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.

175. Градштейн Р. В., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

ДОДАТОК
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

1. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2015. Вип. 24. С. 248–257.
2. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2016. Т. 59. № 4. С. 135–141

   (*те саме:* Shats'kyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 238. Issue 2. P. 165–173).
3. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Взаємодія колінеарних тріщин в сферичній оболонці з гнучким покриттям. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 1. С. 342–350.
4. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *Вісник Київського національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017. № 3. С. 131–134.
5. Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщинами вздовж твірної. *Дослідження в математиці і механіці.* 2017. Т. 22. Вип. 2(30). С. 94–104.
6. Шацький І. П., Маковійчук М. В., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриву

на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* 2019. Т. 55. № 4. С. 27–33

(*те саме:* Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Influence of flexible coating on the limit equilibrium of a spherical shell with meridional crack. *Materials Science.* 2020. Vol. 55. Issue 3. P. 484–491).

7. Шацький І. П., Щербій А. Б. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 14–16 вересня 1999 р.)]. Львів: Каменяр. 1999. Т. 2. С. 333–335.
8. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: В 2-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Луцьк, 16–18 травня 2000 р.)]. Львів. 2000. Т. 2. С. 51–54.
9. Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., Shcherbii A. B. Equilibrium of cracked shell with flexible coating. *Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 4:* Proc. 11th Int. Conf. "Shell Structures: Theory and Applications" (SSTA 2017) (Gdansk, Poland, October 11–13, 2017). Leiden: CRC Press. 2018. P. 165–168.
10. Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на міцність циліндричної оболонки з поперечною тріщиною. *5 Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези. доп. (Львів, 16–18 травня 2001 р.). Львів: Кінпатрі ЛТД. 2001. С. 51.
11. Шацький І. П, Даляк Т. М., Щербій А. Б. Інтегральні рівняння для системи тріщин в пластинах і оболонках з гнучким покриттям. *Тези науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу ІФДТУНГ* (Івано-Франківськ, 24–25 квітня 2002 р.). Івано-Франківськ.

2002. С. 74.

12. Щербій А. Про взаємодію колінеарних дефектів в пологій оболонці з гнучким покриттям. *Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача* (Львів, 24–27 травня 2005 р.). Львів: ІППММ НАН України. 2005. С. 78.
13. Шацький І. П., Даляк Т. М., Маковійчук М. В., Перепічка В. В., Щербій А. Б. Взаємодія берегів тріщин у пластинах та оболонках. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій.* Тези доп. Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17–19 жовтня 2007 р.). Дніпропетровськ: ДНУ. 2007. С. 88–89.
14. Даляк Т., Маковійчук М., Перепічка В., Шацький І., Щербій А. Вплив гнучкого покриття на рівновагу пластин та оболонок з дефектами. *Сучасні проблеми механіки та математики*: В 3-х т. [матер. міжнар. наук. конф. (Львів, 25–29 травня 2008 р.)]. Львів. 2008. Т. 2. С. 34.
15. Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з колінеарними поперечними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям. *IV Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки"*: матер. конф. (Київ, 28–30 серпня 2017 р.). Київ. 2017. С. 59.

Апробація результатів дисертації

Основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 2-й Міжнародній конференції з механіки руйнування матеріалів і міцності конструкцій (Львів, 1999), 5-ій конференції з механіки неоднорідних структур (Луцьк, 2000), 5-ому Міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків у Львові (2001), Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті акад. НАН України В. І. Моссаковського

“Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій” (Дніпропетровськ, 2007), 2-ій Міжнародній конференції “Сучасні проблеми механіки і математики” (Львів, 2008), 4-ій Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки” (Київ, 2017); 11-ій Міжнародній конференції “Shell Structures: Theory and Applications” (Gdansk, 2017), конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 2005), науково-технічній конференції професорсько-викладацького складу ІФДТУНГ (Івано-Франківськ, 2002).