ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ШЕВЧУК ВІКТОР АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ТЕРМОМЕХАНІКИ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла
Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
В.А. Шевчук

Наукові консультанти
Попович Василь Степанович
доктор технічних наук, професор
Токовий Юрій Владиславович
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради /Ясінський А. В./

Львів – 2021

АНОТАЦІЯ

Шевчук В.А. **Математичні моделі та методи термомеханіки тіл з покриттями.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2021.

Дисертацію присвячено побудові адекватних математичних моделей та розробці ефективних методів розрахунку і дослідження термонапруженого стану тіл з покриттями за силового та теплового навантаження. **Об'єктом дослідження** є тіла з одно- та багатошаровими ізотропними та анізотропними покриттями, які перебувають під дією теплових і силових навантажень. **Предмет дослідження** – математичні моделі термомеханіки та відповідні задачі теплопровідності та термопружності для визначення нестаціонарних температурних полів і термонапружень в тілах з одно- та багатошаровими покриттями та методи побудови їх аналітичних та аналітично-числових розв'язків.

Наукова новизна дисертаційного дослідження полягає в тому, що уперше:

– побудовано математичні моделі для визначення температурного поля та термонапружень у тілах з тонкими багатошаровими покриттями;

– сформульовано некласичні крайові задачі теплопровідності і термопружності та розроблено методику їх розв'язування;

– на основі розроблених методик отримано розв'язки низки нових задач термопружності для тіл з багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні;

– із використанням інтегрального перетворення Лапласа та методу квазілінеаризації на основі моделі із застосуванням узагальнених граничних умов розроблено аналітично-числову методику розв'язування нестаціонарної задачі теплопровідності для тіл з покриттями з нелінійною граничною умовою променево-конвективного теплообміну;

– розвинуто методику розв’язування задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів для випадку ортотропних властивостей матеріалу циліндра та застосовано її до дослідження процесу накопичення пошкоджень у керамічних покриттях.

Практичне значення одержаних результатів. Практична цінність результатів роботи визначається розробкою ефективного підходу для розв’язування важливих у теоретичному та прикладному аспектах нових класів задач та полягає у можливості використати методику дослідження задач термомеханіки для тіл з покриттями для встановлення якісних та кількісних закономірностей впливу геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність і деформативність елементів конструкцій з неоднорідними покриттями. Отримані у дисертаційній роботі наближені розв’язки можуть бути застосовані при тестуванні результатів розрахунків, одержаних за допомогою інших методів.

У **першому** розділі розвинуто методологію розв’язування задач термомеханіки тіл з тонкими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні таких покрить оболонками з відповідними термомеханічними властивостями. При такому підході вплив покрить на тепловий і механічний стан всієї системи тіло–покриття описується спеціальними узагальненими граничними умовами (УГУ).

Для задачі теплопровідності наведено підхід до побудови узагальнених граничних умов променево-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через тонкі неплоскі покриття, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті, розвиненні функції температури за товщиною покриття в степеневий ряд та застосуванні методу матриць переносу. Цей підхід дає можливість отримувати розрахункові варіанти УГУ з різною точністю. Також виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничне значення температури та її похідної в тілі.

Порівняння з відомими в літературі граничними умовами показало, що вони є частковими варіантами виведених розрахункових УГУ.

На прикладі задачі конвективного нагріву циліндра з покриттям проаналізовано випадки, коли слід враховувати члени вищого порядку в розрахункових варіантах УГУ.

Виведення УГУ механічного спряження тіла зі середовищем здійснено для двох випадків – ізотропного та трансверсально ізотропного покриття з використанням рівнянь теорії термопружності тонких оболонок.

Отримано спрощений варіант УГУ для випадку відсутності деформацій згину та кручення поверхні поділу тіло–покриття, який містить лише компоненти тензора напружень.

Записано формули відновлення напружень в покритті через граничні значення переміщень та напружень у тілі.

Отже, методика розв'язування задачі теплопровідності в тілах з тонкими покриттями реалізується у два етапи:

1) розв'язування некласичної крайової задачі теплопровідності з узагальненою граничною умовою;

2) знаходження температурного поля в покритті за формулою відновлення через граничні значення температури та її похідної в тілі.

Відповідно, подальше визначення термонапруженого стану системи тіло–покриття складається з двох етапів:

1) розв'язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням узагальнених граничних умов;

2) знаходження температурних напружень у покритті за формулами відновлення через граничні значення компонент тензора напружень і вектора переміщень (у випадку відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло–покриття – лише напружень).

У **другому** розділі сформульовано нестаціонарні задачі теплопровідності та відповідні задачі термопружності для півпростору з одностороннім та пластини з двостороннім багатошаровим покриттям. На основі запропонованої у першому розділі математичної моделі з використанням УГУ отримано аналітичні розв’язки низки задач теплопровідності за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем для півпростору та пластини. Для випадку півпростору розв’язано задачі з неоднорідною початковою умовою за стаціонарної зовнішньої теплової дії та з однорідною початковою умовою за циклічного теплового навантаження, а для випадку пластини – зі змінною з часом температурою довкілля. Наведено вирази для визначення термонапружень. Розглянуто тестову задачу для одностороннього стаціонарного нагріву пластини з багатошаровим покриттям. Досліджено вплив теплофізичних і термомеханічних характеристик системи та умов взаємодії із зовнішнім середовищем на розподіли температури та напружень.

У **третьому** розділі на основі математичної моделі теплових процесів у тілах з тонкими шаруватими покриттями наведено постановку нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності та відповідної задачі термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем.

Методом квазілінеаризації побудовано ітераційну схему розв’язання сформульованої нелінійної крайової задачі теплопровідності. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано наближений розв’язок лінеаризованої задачі для кожної ітерації.

Виконано порівняльний аналіз ефективності застосування методів Пікара, зведення до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри, послідовних наближень та квазілінеаризації для розв’язання тестової нелінійної нестаціонарної задачі радіаційної взаємодії півпростору без покриття з довкіллям.

На основі розробленої ітераційної процедури досліджено вплив геометричних та теплофізичних характеристик покриття і параметрів променево-конвективного теплообміну з довкіллям на теплові процеси та напружений стан у півпросторі з багатошаровим покриттям.

У **четвертому** розділі сформульовано постановки та отримано аналітичні розв’язки на основі використання УГУ статичної задачі пружності та нестаціонарних задач теплопровідності та термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям.

Розглянуто тестові задачі пружності, теплопровідності та термопружності для циліндра з тришаровим покриттям.

Досліджено вплив фізико-механічних характеристик системи тіло–багатошарове покриття, параметрів теплообміну із зовнішнім середовищем та умов закріплення торців циліндра на розподіли температури та напружень.

У **п’ятому** розділі розвинуто метод безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги й суцільності в напруженнях одновимірних задач теорії пружності та термопружності для циліндричних тіл з неоднорідними трансверсально ізотропними покриттями. Вихідні задачі зведено до інтегральних рівнянь, які розв’язано методом послідовних наближень. Ефективність підходу проілюстровано на тестових прикладах розв’язування задачі Ляме та задачі рівномірного нагріву для порожнистого ортотропного циліндра з коефіцієнтами деформації та коефіцієнтами температурного розширення, які змінюються за степеневою залежністю уздовж радіальної координати. Проаналізовано вплив анізотропії і початкового наближення на швидкість збіжності ітераційного алгоритму розрахунку.

У **шостому** розділі розвинуто ефективний напіваналітичний підхід для дослідження процесу накопичення пошкоджень у крихких тонких багатошарових і товстих одношарових покриттях під впливом теплових навантажень. Підхід ґрунтується на загальній обчислювальній схемі для визначення параметрів процесу накопичення пошкоджуваності, що включає аналітичний розв’язок відповідної проміжної крайової задачі термопружності. Для тонких багатошарових покрить спрощення в аналізі досягнуто застосуванням математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження підкладки з середовищем через покриття, а для покрить довільної товщини дослідження ґрунтується на застосуванні підходу зі зведенням вихідної задачі термопружності до системи еквівалентних інтегральних рівнянь. Підхід апробовано на прикладах рівномірного нагрівання тонкого модельного тришарового покриття на титановій підкладці та одношарового покриття з оксиду алюмінію на основах з титанового сплаву і вольфраму.

У **сьомому** розділі розглянуто нестаціонарну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям, що містить тріщину під покриттям, перпендикулярну до поверхні поділу. Задачу розв’язано на основі принципу суперпозиції та незв’язаної термопружності. Нестаціонарні розподіли температури та відповідні теплові напруження для системи без тріщини отримано в замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі з УГУ теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття. Задачу з тріщиною сформульовано як збурену змішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини є рівним за величиною та протилежним за знаком термічним напруженням, отриманим для задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв’язано чисельно. Виконано числові розрахунки для аналізу впливу покриття на термонапруження та коефіцієнти інтенсивності термічних напружень.

Ключові слова: теплопровідність**,** термопружність**,** термомеханіка**,** багатошарові покриття**,** керамічні покриття, узагальнені граничні умови**,** променево-конвективний теплообмін, накопичення пошкоджень, метод квазілінеаризації, інтегральне рівняння.

ABSTRACT

Shevchuk V.A. **Mathematical models and methods of thermomechanics of bodies with coatings.** – Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for a degree of Doctor in Physics and Mathematics. Speciality 01.02.04 Mechanics of Deformable Solid. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2021.

The thesis focuses on the development of adequate mathematical models and elaboration of effective methods of calculation and investigation of thermal stressed state of bodies with coatings under thermal and mechanical loading. **The object of research** is bodies with single- and multilayer isotropic and anisotropic coatings which are influenced by thermal and mechanical loads. **The subject of research** – mathematical models of thermomechanics and appropriate problems of heat conduction and thermoelasticity for determination of nonstationary temperature fields and thermal stresses in solids with single- and multilayer coatings and methods of elaboration of their analytical and analytic-numerical solutions.

The research novelty of the thesis consists in:

- elaborating the mathematical models for determination of temperature field and thermal stresses in solids with thin multilayer coatings;
- formulating the corresponding non-classical boundary value problems of heat conduction and thermoelasticity and elaborating a method for their solution;
- obtaining solutions, based on the developed method, of a number of new thermoelasticity problems for bodies with multilayer thin coatings under thermal load;
- developing, with the use of the integral Laplace transform and the method of quasilinearization based on the model which involves generalized boundary conditions, an analytical-numerical method for solving a non-stationary heat conduction problem for bodies with coatings with a nonlinear boundary condition under convective-radiant heat exchange;

– elaborating the method of solving elasticity and thermoelasticity problems for non-homogeneous hollow cylinders for the case of orthotropic properties of a cylinder material and applying it to the investigation of the damage evolution process in ceramic coatings.

The practical value of the obtained results is determined by the development of an effective approach for solving new classes of problems, important in theoretical and applied aspects, and consists in the possibility of using the methodology of studying the problems of thermomechanics for bodies with coatings to establish qualitative and quantitative regularities of the influence of geometrical, physico-mechanical, thermophysical characteristics on the strength and deformability of structural elements with non-homogeneous coatings. The approximate solutions, provided in the dissertation, can be applied when testing the results of calculations obtained using other methods.

In the **first** chapter, a methodology for solving problems of thermomechanics of bodies with thin coatings is developed, which is based on the simulation of such coatings by shells with the corresponding thermomechanical properties of the coating. Within this approach, the influence of the coating on the thermal and mechanical state of the entire body–coating system is described by special generalized boundary conditions (GBCs).

For the problem of heat conduction, an approach to the construction of GBCs of the radiant-convective heat exchange of bodies with the ambient medium via a thin nonplanar coating is suggested, which is based on the use of an exact equation of heat conduction in a coating, the expansion of the temperature function over the thickness of the coating in the power series, and the use of the transfer matrix method. This approach gives a possibility to obtain the calculation variants of GBCs with different accuracy. Also, recovery formulas are derived for temperature distribution over the thickness of the coating through the boundary values of temperature and its derivative in the body.

A comparison with the boundary conditions, known in the literature, has shown that they are partial modifications of the derived calculation variants of GBCs.

By the example of the test problem of convective heating of a cylinder with a coating, those cases when it is important to keep additional terms of higher order in the calculation variants of the GBCs are illustrated.

The derivation of GBCs of the mechanical conjugation of a body with an ambient medium is carried out for two cases – isotropic and transversally isotropic coatings using the equations of the theory of thermoelasticity of thin shells.

A simplified version of the GBCs is also written for the case of the absence of bending strains and twisting of the body-coating interface, which contains only the components of the stress tensor.

The formulas for restoring the stresses in the coating are written down in terms of boundary values of the stress tensor and displacements vector components in the body.

Thus, the technique of solving the heat conduction problem in thin-coated bodies consists of two stages:

1) solving a non-classical boundary-value problem of heat conduction for a body with a GBC;

2) finding the temperature field in the coating according to the recovery formula in terms of boundary values of temperature and its derivative in a body.

Accordingly, further determination of the thermal stress state of the body-coating system consists of two stages:

1) solving the non-classical boundary-value problem of thermoelasticity for a body using GBCs;

2) finding thermal stresses in the coating by the recovery formulas in terms of boundary values of stress tensor and vector displacements components (in the case of absence of bending strains and twisting of body-coating interface – only stresses).

In the **second** chapter, non-stationary heat conduction problems and corresponding thermoelasticity problems for a half-space with one-sided coatings and plates with two-sided multilayer ones under convective heat exchange with ambient medium have been formulated. Based on the mathematical model, proposed in the first chapter with the use of GBCs, analytical solutions of a number of thermal conduction problems for a half-space and a plate under convective heat exchange with ambient medium have been obtained. For the case of a half-space, the problems with a non-uniform initial condition under stationary external thermal action and with a homogeneous initial condition under cyclic heat loading, and for the case of a plate – with a time-varying ambient temperature – have been solved. Expressions for the determination of thermal stresses are provided. The test problem for one-sided stationary heating of a plate with a multilayer coating is considered. The influence of thermophysical and thermomechanical characteristics of the system and the conditions of interaction with the ambient medium on the distribution of temperature and stresses are studied.

In the **third** chapter, based on the mathematical model of thermal processes in thin-layer laminate bodies, the statement of the nonlinear non-stationary heat conduction problem and the corresponding thermoelasticity problem for a half-space with a multilayer coating for radiant-convective heat transfer with an ambient medium is formulated.

Using the method of quasilinearization, an iterative scheme for solving this nonlinear boundary value problem of thermal conduction has been elaborated. By means of the integral Laplace transform, an approximate solution of the linearized problem for each iteration is obtained.

A comparative analysis of the efficiency of application of the methods of Picard, reduction to the Volterra type nonlinear integral equation, successive approximations and quasilinearization for solving the nonlinear test non-stationary problem of radiative interaction of a half-space without the coating with the ambient medium is carried out.

Based on the developed iteration procedure, the influence of geometrical and thermophysical characteristics of the coating and the parameters of the radiant-convective heat exchange with the ambient medium on the thermal processes and the stressed state in the half-space with the multilayer coating is carried out.

In the **fourth** chapter, formulation of statements and analytical solutions are obtained based on the use of GBCs of the static problem of elasticity and non-stationary heat conduction problems and corresponding thermoelasticity problems for a cylinder with a multilayer coating.

A series of test problems of elasticity, thermal conduction and thermoelasticity for a cylinder with a three-layer coating are considered.

The influence of physical and mechanical characteristics of the body-multilayer coating system, heat transfer parameters with an ambient medium and fixing conditions of the ends of the cylinder on the temperature and stress distributions is investigated.

In the **fifth** chapter, the direct integration method to differential equilibrium and compatibility equations in terms of stresses to one-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for cylindrical bodies with nonhomogeneous orthotropic coatings is developed. Original problems have been reduced to integral equations, which are solved by the method of successive approximations. The efficiency of the approach is illustrated in the test examples of solving the Lame problem and the problem of uniform heating for a hollow orthotropic cylinder with power law dependence of elastic compliances and thermal expansion coefficients along the radial coordinate. In this case, the influence of the degree of anisotropy and initial approximation on the rate of convergence of the iterative method of calculation is analyzed.

In the **sixth** chapter, an effective semi-analytical approach for investigating the process of damage evolution in brittle thin multilayer and thick single-layer coatings under influence of thermal loads has been developed. The approach is based on a general computational scheme to determine damage evolution parameters, which incorporates an analytical solution of the appropriate interim boundary-value thermoelasticity problem.

For thin multilayer coatings, the simplification in the analysis is achieved by applying a mathematical model with GBCs of the thermomechanical conjugation of the substrate with the ambient medium via the coating, and for the coatings with arbitrary thickness, the study is based on the application of the approach with the reduction of the original problem of thermoelasticity to the system of equivalent integral equations.

The approach is tested by the examples of uniform heating of a thin model three-layer coating on a titanium alloy substrate and a single-layer coating of aluminum oxide on the titanium-alloy and tungsten substrates.

In the **seventh** chapter, the transient thermoelasticity problem for a half-space with a multilayer coating under thermal surface loading containing an undercoat crack, perpendicular to the interface, is considered. The problem is solved using the principle of superposition and uncoupled quasi-static thermoelasticity. Transient temperature distribution and corresponding thermal stresses for the uncracked multilayer assembly are obtained in a closed analytical form using the model with GBCs of heat exchange of a half-space with ambient media via the coating. The crack problem is formulated as a perturbation mixed boundary value problem, in which the crack surface loading should be equal and opposite to the thermal stresses obtained for the uncracked medium, and is reduced to a singular integral equation which is solved numerically. Numerical computations are performed for the analysis of influence of the coating upon thermal stresses and thermal stress intensity factors.

Keywords: heat conduction, thermal elasticity, thermomechanics, multilayer coatings, ceramic coatings, generalized boundary conditions, radiant-convective heat exchange, damage evolution, quasilinearization method, integral equation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у фахових виданнях України

1. Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие. *Математические методы и физико-механические поля*. 1995. Вып. 38. С. 116-120.

   Те саме: Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin covering. *Journal of Mathematical Sciences.* 1996. Vol. 81. No. 6. P. 3099-3102.

2. Шевчук В.А. Одновимірні задачі пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 4. С. 104-112.

3. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багатошаровими покриттями. *Машинознавство*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41.

4. Шевчук В.А., Калиняк Б.М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35-41.

   Те саме: Shevchuk V.A., Kalynyak B.M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746-755.

5. Шевчук В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття. *Доповіді НАН України*. 2011. № 7. С.76–82.

6. Шевчук В.А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54. № 2. С.179–185.

   Те саме: Shevchuk V.A. Nonstationary one-dimensional problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. Vol. 184. No. 2. P. 215-223.

7. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка.* 2011. Т. 19. № 5. Вип. 15, т. 1. С. 129–139.

8. Шевчук В.А. Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багатошаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2012. Вип. 10. С. 159-167.

9. Шевчук В.А. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2013. Вип. 11. С. 157-163.

10. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 4. С. 90-97.

    Те саме: Shevchuk V.A., Havrys' O. P. Choice of the iterative method for the solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction for a half space in the course of radiative cooling. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 220. No. 2. P. 226-234.

11. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2014. Вип. 20. С. 229-240.

12. Шевчук В.А. Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного нагріву. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 181-190.

    Те саме: Shevchuk V.A. Heat conduction in plates with thin two-sided multilayer coatings under the conditions of nonstationary heating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 223. No. 2. P. 184-197.

13. Шевчук В.А. Термонапружений стан пластини з тонким двостороннім багатошаровим покривом за умов нестаціонарного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2016. Вип. 14. 113-122.

14. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Аналітичний розв’язок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір-багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 130-140.

15. Шевчук В.А. Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2017. Т. 60. № 2. С. 117-129.

    Те саме: Shevchuk V.A. Problem of thermoelasticity for a cylinder with thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 243. No. 1. P. 145-161.

16. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево-конвективного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2017. Вип. 15. С. 171-179.

17. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2019. Том 62. № 2. С. 82-97.

Статті у закордонних виданнях

18. Shevchuk V.A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *Lecture Notes in Computer Sciences.* 2002. Vol. 2330. P. 500-509.

19. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. No. 16-17. P. 4738-4757.

20. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system "body-multilayer coating". *Heat Transfer Research*. 2006. Vol. 37. No. 5. P. 412-423.

21. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *Materials Science and Engineering A*. 2006. Vol. 426. No. 1-2. P. 121-127.

22. Шевчук В.А. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием. *Инженерно-физический журнал*. 2013. Т. 86. № 2. С. 423–431.

Те саме: Shevchuk V.A. Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2013. Vol. 86. No. 2. P. 450–459.

23. Shevchuk V.A. Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*. 2017. Vol. 40. No. 10. P. 1215-1230.

24. Шевчук В.А., Гаврись А.П. Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды. *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 6. С. 1543-1551.

Те саме: Shevchuk V.A., Gavrys' A.P. Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020. Vol. 93. No. 6. P. 1489–1457.

Статті, які додатково відображають зміст дисертації

25. Шевчук В.А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями. *Проблемы прочности*. 2000. №1. С. 136-150.

Те саме: Shevchuk V.A. Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings. *Strength of Materials*. 2000. Vol. 32. No 1. P. 92-102.

26. Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R.B. Hetnarski. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer. 2014. Vol. 4. P. 1942–1953.

Праці апробаційного характеру

27. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови механічного спряження тіла із середовищем через тонке багатошарове тонке покриття. *IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур* : тези доповідей. (Тернопіль, 19-22 вересня 1995 р.). Тернопіль, 1995. С. 171.
28. Шевчук В. Наближений підхід до розв'язування задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-28 травня 1998 р.). Львів, 1998. С. 137-138.
29. Shevchuk V. Approximate calculation of stresses in solids with thin multilayer coatings. *The Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics* : Book of Abstracts (Edinburgh, Scotland, 5-9 July 1999). Edinburgh, 1999. P. 309.
30. Shevchuk V.A. Effective boundary conditions incorporating the influence of a thin multilayer coating upon the mechanical state of bodies. *4th Euromech Solid Mechanics Conference* : Book of Abstracts II (Mets, France, 26-30 June 2000). Mets: University of Mets, 2000. P. 261.
31. Шевчук В.А. Застосування узагальнених граничних умов до розв'язку статичних задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Український математичний конгрес-2001. Секція 8: Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* : тези доповідей. (Київ, 21-23 серпня 2001 р.). Київ, 2001. С 53.
32. Shevchuk V.A. Procedure of calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *VIII Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"*: тези доповідей. (Львів, 25-27 вересня 2001 р.). Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. С. 73-74.
33. Шевчук В.А. Розрахунок теплового стану тіл з багатошаровими покриттями. *Наукові читання, присвячені пам'яті академіка Я.С. Підстригача* (Львів, 23-24 травня 2002 р.). Львів, 2002. С. 18.

34. Shevchuk V. Approximate calculation of thermal stresses in solids with thin multilayer coatings. *Fifth World Congress on Computational Mechanics* : Book of Abstracts (Vienna, Austria, 7-12 July 2002). Vienna: Vienna University of Technology, 2002. Volume II. P. 135.
35. Шевчук В. Визначення термонапруженого стану в тілах з тонкими багатошаровими покриттями. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф. (Львів, 26-29 травня 2003 р.). Львів. 2003. С. 169-170.
36. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analytico-numerical approach to evaluation of damage of ceramic coatings under heating. *Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics* (TS2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, Virginia). Blacksburg, 2003. Vol. 1. pp. MA-6-2-1-4.
37. Шевчук В. А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе тело-многослойное покрытие. *Материалы 5-го Международного форума по тепломассобмену* (Минск, Беларусь, 24-28 мая 2004 г.). Минск: CD-ROM. Статья №3-36. 10с.
38. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thin multilayer coatings under thermal loading. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (TS2005, Vienna, Austria, 26-29 May 2005). Vienna: Vienna University of Technology, 2005. Vol. 1. P. 313-316.
39. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Computational analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *EUROMECH Colloquium 466 Computational and Experimental Mechanics of Materials* : Book of Abstracts (Loughborough, UK, 20-22 July 2005). Loughborough: Loughborough University, 2005. P. 12.
40. Шевчук В. Розв’язування одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних циліндричних тіл. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. Т. 1. С. 121-123.

41. Shevchuk V.A. Determining mechanical state of the body – multilayer coating system. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2006. Vol. 6. No. 1. P. 267-268.

42. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses* (TS 2007, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007). Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. Vol. 2. P. 549–552.

43. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів, 2008. Т. 1. С. 244-245.

44. Гаврись О., Шевчук В., Шевчук П. Математичне моделювання радіаційно-конвективного теплообміну при високотемпературному нанесенні на тіло багатошарових покрить. *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* / Під заг. ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 258-259.

45. Shevchuk V.A. Analytical-numerical treatment of elasticity and thermoelasticity problems for nonhomogeneous orthotropic cylindrical bodies. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2009. Vol. 9. No. 1. P. 649-650.

46. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Узагальнені граничні умови променево-конвективної взаємодії системи тіло-багатошарове покриття з робочим середовищем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. С. 305–307.

47. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими покрытиями. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали III міжнародної наукової конференції (Дніпропетровськ, 4-6 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 93–95.

48. Shevchuk V.A. Approximate analytical solution to one-dimensional heat conduction problem for cylinder with thin multilayer coating. *Proceedings of The 9th International Congress on Thermal Stresses* (Budapest, Hungary, 5-9 June 2011). Budapest: Hungary University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences. On CD-ROM. 4p.

49. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Методика розв'язання нелінійної задачі теплопровідності радіаційної взаємодії півпростору з довкіллям. *Сучасні проблеми механіки і математики:* збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 185-187.

50. Шевчук В. Вплив нестаціонарного нагрівання на температурне поле пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О.І. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 171-173.

51. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Визначення температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : наукові праці IX міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 173-175.

52. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку термонапруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 269-270. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

53. Шевчук В. Аналітико-числова процедура розрахунку накопичення пошкоджень в керамічних покриттях за теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки:* збірник наукових праць міжнар. наук. конф.

(Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 284-285. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

54. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження термонапруженого стану системи півпростір-багатошарове покриття за променево-конвективного тепло-обміну. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 246-247. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

55. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за циклічної зміни температури довкілля. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. А.М. Самойленка, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 214-215. URL: www.iapmm.lviv.ua/ mpmm2018.

56. Шевчук В., Гаврись О. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за термоциклічної обробки. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Г.С. Кіта. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2019. Вип. 5. С. 129-130.

57. Shevchuk V., Havrys O., Tokovyy Yu., Gao C.-F. Thermocyclic loading of a half-space with a multilayer coating under piecewise-uniform variation of the ambient temperature. *Proceedings of 12th International Congress on Thermal Stresses* (TS 2019, Hangzhou, China, 1–5 June 2019). Hangzhou: Zhejiang University, 2019. P. 300–303.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу (корозійного, абразивного, теплового, механічного та ін.) зовнішнього середовища використовують спеціальні покриття. Такі покриття є складними структурами, неоднорідними за товщиною, пористими, з різними властивостями на поверхні та в області, прилеглій до підкладки. Залежно від функціонального призначення існує широкий діапазон товщин використовуваних покрить: від дуже тонких (декілька мікрон) до відносно товстих (сотні мікрон, зокрема, керамічних теплозахисних покрить).

У більшості практично важливих випадків властивості покрить змінюються за напрямком, ортогональним до твірної поверхні (глибиною, радіальною або кутовою координатою, залежно від геометричної форми підкладки). Неоднорідність покрить спричиняється як технологією виготовлення, так і функціональними вимогами. Вона також може бути пов’язана з поверхневою обробкою вже нанесених покрить (лазерна обробка, іонна імплантація тощо).

Особливе значення мають покриття, виготовлені нашаровуванням матеріалів з різними механічними і теплофізичними характеристиками. У таких покриттях кожний шар має своє функціональне призначення, зокрема антикорозійне, антиабразивне, теплозахисне, зміцнююче для гальмування і блокування росту тріщин, зниження пористості, забезпечення високого ступеня адгезії з підкладкою. Завдяки багатошаровості архітектури можна також підвищувати експлуатаційний ресурс покрить, а їх використання для забезпечення міцності та теплоізоляції дозволяє суттєво зменшити матеріалоємність та збільшити витривалість виробів.

Разом з цим у тілі з шаруватими покриттями виникає концентрація напружень в місцях різкої зміни фізико-механічних характеристик матеріалу, тобто на поверхнях спряження однорідних шарів. Уникнути концентрації напружень у зоні контакту покриття з підкладкою та на міжшарових поверхнях дають змогу неоднорідні покриття з неперервно змінними за глибиною фізико-механічними властивостями, відомі як функціонально-градієнтні покриття. Переваги, пов’язані з підвищенням терміну експлуатації виробів, стимулюють процес виробництва таких покрить, незважаючи на складність технології їх отримання. При цьому математичні моделі шаруватих матеріалів недостатньо точно описують функціонально-градієнтні покриття через кількісні та якісні відмінності у поведінці цих покрить порівняно з однорідними або шаруватими.

Окрім того, процес нанесення деяких типів покрить, зокрема керамічних, може призводити до формування специфічних мікроструктур у таких крихких покриттях. Характерні риси цих покрить включають технологічно зумовлені пористість, мікротріщини та анізотропію термомеханічних властивостей.

Проблематика термомеханіки тіл з покриттями привертала увагу багатьох представників відомих вітчизняних та зарубіжних наукових шкіл (Я.С. Підстригач, П.Р. Шевчук, Д.В. Іващук, Ю.М. Коляно, Є.П. Хомякевич, О.П. Гаврись [193-198, 186, 187, 189, 86, 106-108, 112, 114, 115, 312, 313, 47, 48], В.О. Барвінок [10], Г.М. Бартенев, О.І. Жорник, В.О. Киричек [11, 78-80], В.М. Гембара, Н.О. Гембара [52-54], Г.І. Костюк [117, 118], М.А. Криштал, Л.Є. Епштейн [120], Р.М. Кушнір, В.С. Попович [128, 205, 206], П.О. Люкшин [145, 146], Б.А. Ляшенко [147, 148], В.В. Можаровський, О.М. Березовська [159], Д.В. Нуштаев, А.Н. Астапов [166, 330], Г.Т. Сулим, І.М. Турчин [234-237, 254-257], М.А. Сухорольський [238-240], Г.М. Третьяченко [249, 251], В.Ф. Чекурін, Б.В. Процюк [263, 264] Р.М. Швець, О.І. Яцків [268, 269, 271, 316-318], В.Г. Шевченко, О.Г. Попович [202, 275], X. Chen, Q. Liu [349, 350], G.P. Cherepanov [356-358], M. Ciavarella [363], T. Elperin, G. Rudin [376-381], C. Gao [388], S.Y. Hu [405], F. Kroupa [423, 424], R. Kulchytsky-Zhyhailo, A. Bajkowski, S. Matysiak [426, 427], Y.-D. Lee, F. Erdogan [431, 432], S. Marie [449], Y. Mencik [452], A. Mioduchowski, J. Yoon [455, 569], S.Q. Nusier, G.M. Newaz [465], A.W. Obst [466], Z.S. Olesiak [168, 467], O. Sayman, F. Sen, M. Toparli [494, 495, 543], H.M. Shodja [519], E. Suhir [527, 528], Z.W. Wang, Q. Zhang [559, 571], A. Yevtushenko, M. Rozniakowska [490, 564-566], N.-H. Zhang [570], X.C. Zhang [574-576], Y. Zhang [577, 578],

J. Zhao [579, 580] та ін.). Переважна більшість праць стосувалася систем з однорідними покриттями. Багато авторів (О.В. Аттетков, М.С. Беляков [5-9, 337], А.А. Березовський [19-21], Ю.В. Бразалук, О.І. Губін, Д.В. Євдокимов [25--27, 76], В.Б. Веселовський [36, 37], О.Д. Горбунов [57], Л.М. Дяконюк [72-75], В.С. Зарубін [81], Ю.А. Кирсанов [97], Й.Й. Лучко [139-143, 55], В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська, О.П. Дем'янченко [149, 17], Р.Ф. Терлецький, О.П. Турій [243], Н.П. Флейшман [260], M.A. Al Nimr [325, 326], X. Chen [351], H. Li, J. Li [435-437], D. Moulton, J.A. Pelesko [459], D.M. Perkowski [476, 477], R. Prasad, N.K. Samria [479, 480], H. Wang, Q. Qin [557], S. Zhang, Z. Liu [572, 573]) вивчали лише теплофізичні процеси. Деякі дослідники при вивченні механічної поведінки таких систем (С.М. Айзикович [2], В.М. Александров, С.М. Мхитарян [3], О.І. Воячек [46], М.А. Долгов [66-71], Б.Л. Пелех, Ф.Н. Флейшман [172, 174, 262], В.П. Плевако [179], Я.Г. Савула, Л.І. Винницька, І.І. Дияк, О.С. Коссак, І.Г. Макар [41, 226, 227, 229, 371, 372, 421, 446], С.О. Тинчук [245], C.E. Beevers [336], Y. Gu [393], M. Kashtalyan, M. Menshykova [405, 416], L. Rahmani [483, 484], T.C.T. Ting [538, 539]) не враховували впливу теплових процесів на механічний стан тіл з покриттями. Практично не розглядався вплив термомеханічної анізотропії. У низці робіт (О.В. Аттетков [5, 8, 9], Г.М. Бартенев, О.І. Жорник [11, 78-80]) вплив покриття враховано на основі надмірно спрощених припущень, а підходи з використанням числових методів (Л.М. Дяконюк [72], Я.Г. Савула зі співавторами [41, 73-75, 225-229, 371, 372, 421, 446, 493], О.І. Олейніков [167], Ю.І. Швець зі співавторами [272], Y. Gu et al [393]) є доволі складними.

Отже, актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла залишається побудова адекватних математичних моделей та ефективних методів розрахунку і дослідження теплового та напружено-деформованого станів тіл з покриттями [176]. Такі моделі та методи повинні достатньою мірою враховувати характерні особливості систем тіло–покриття, зокрема, малість товщини покриття, неоднорідність та анізотропію його властивостей, температурну залежність параметрів покриття та підкладки, специфіку мікроструктури.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планам і темами.

Дослідження за темою дисертації виконані в межах науково-дослідних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України:: «Розробка математичних моделей і теоретико-експериментальних методів оптимізації, керування та дослідження нелінійних температурних, дифузійних і корозійних процесів в неоднорідних і термочутливих тілах з покриттями з метою прогнозування їх довговічності» (№ держреєстрації 0102U001615, 2002–2004 рр.); «Математичне моделювання, розвиток методів розрахунку та оптимізація фізико-механічних процесів у неоднорідних деформівних структурах та тілах з багатошаровими покриттями при комплексній зовнішній дії» (№ держреєстрації 0102U000453, 2002–2005рр.), «Моделі та методи прямих і обернених задач для дослідження фізико-механічних процесів у неоднорідних шаруватих структурах із залишковими деформаціями та дефектами» (№ держреєстрації 01060U000592, 2006–2009 рр.); «Математичні моделі та методи дослідження напруженого стану неоднорідних тіл та тіл з покриттями за дії силових і теплових навантажень та наявності дефектів і залишкових деформацій» (№ держреєстрації 0109U008764, 2010–2013 рр.); «Моделювання та оптимізація термомеханічної поведінки структурно неоднорідних тіл за сталого та змінного навантаження» (№ держреєстрації 0113U007685, 2014–2018 рр.), "Методи визначення та оптимізації напружено-деформованого стану і граничної рівноваги структурно-неоднорідних систем стосовно проблем оцінювання їх міцності, прогнозування ресурсу та надійності функціонування" (№ держреєстрації 0119U100672, 2019–2023 рр.).

Мета дисертаційної роботи – розроблення математичних моделей та ефективних методів розрахунку термонапруженого стану тіл з багатошаровими тонкими та одношаровими неоднорідними ізотропними та анізотропними покриттями за силового та теплового навантаження. Поставлена мета передбачає необхідність розв'язання таких **завдань**:

- побудувати математичні моделі для визначення нестаціонарних температурних полів і термонапружень у тілах з тонкими багатошаровими покриттями;
- розробити методики розв'язання сформульованих на основі цих моделей некласичних нестаціонарних задач теплопровідності та термопружності;
- розвинути методику визначення термонапружень у циліндричних тілах з неоднорідними трансверсально ізотропними покриттями довільної товщини;
- сформулювати та розв'язати нові задачі термопружності для тіл плоскої та циліндричної геометрії з тонкими шаруватими покриттями;
- застосувати розроблені методики для дослідження процесу еволюції пошкоджень в циліндричних тілах з тонкими та товстими керамічними покриттями.

Об'єкт дослідження – тіла з одно- та багатошаровими покриттями, які перебувають під дією теплових і силових навантажень.

Предмет досліджень – математичні моделі термомеханіки та відповідні задачі теплопровідності та термопружності для визначення нестаціонарних температурних полів і термонапружень в тілах з одно- та багатошаровими покриттями та методи побудови їх аналітичних та аналітично-числових розв'язків.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети у роботі використано низку методів. Зокрема, для побудови аналітичних та аналітично-числових розв'язків лінійних та нелінійних задач теплопровідності використано методи інтегрального перетворення Лапласа та квазілінеаризації. Для розв'язання задач термопружності для неперервно-неоднорідних за радіальною координатою циліндричних тіл застосовано метод зведення їх до інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду та метод послідовних наближень для їх розв'язання. Для числового вирішення задач дослідження накопичень пошкоджень використано ітераційну схему. Розв'язки задач для тіл з тріщинами отримано за допомогою принципу суперпозиції та методик розв'язування сингулярних рівнянь і обчислення невласних інтегралів.

Наукова новизна дисертаційного дослідження полягає в тому, що уперше:

– побудовано математичні моделі для визначення температурного поля та термонапружень у тілах з тонкими багатошаровими покриттями;

– сформульовано відповідні некласичні крайові задачі та розроблено методику їх розв’язування;

– на основі розробленої методики отримано розв’язки низки нових задач термопружності для тіл з багатошаровими тонкими покриттями при тепловому навантаженні;

– із використанням інтегрального перетворення Лапласа та методу квазілінеаризації на основі моделі із застосуванням узагальнених граничних умов розроблено аналітично-числову методику розв’язування нестаціонарної задачі термопружності для тіл з покриттями з нелінійною граничною умовою при конвективно-променевому нагріванні;

– розвинено методику розв’язування задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів на випадок ортотропних властивостей матеріалу циліндра та застосовано її до дослідження процесу накопичення пошкоджень у керамічних покриттях.

Достовірність отриманих результатів та висновків дисертаційної роботи забезпечується: використанням належно апробованих математичних моделей термомеханіки деформівних твердих тіл; коректним формулюванням крайових задач; застосуванням до їх розв’язання класичних аналітичних і числових методів; дослідженням збіжності побудованих ітераційних алгоритмів; узгодженням деяких часткових результатів з відомими в літературі.

Практичне значення отриманих результатів. Практична цінність результатів роботи визначається розробкою ефективного підходу для розв’язування важливих у теоретичному та прикладному аспектах нових класів задач та полягає у можливості використання методики дослідження задач термомеханіки для тіл з покриттями для встановлення якісних та кількісних закономірностей впливу геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність і деформативність елементів конструкцій з неоднорідними покриттями. Отримані у дисертаційній роботі наближені розв'язки можуть бути застосовані при тестуванні результатів розрахунків, одержаних за допомогою інших методів.

Особистий внесок здобувача. Усі наведені в роботі основні наукові результати, положення, моделі, висновки та рекомендації отримано автором самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві (див. *Список публікацій здобувача*), здобувачеві належать: постановка задачі та підхід до виведення нелінійних узагальнених граничних умов радіаційної взаємодії тіла із середовищем через багатошарове покриття [3, 44, 46]; ідея підходу, побудова ітераційних алгоритмів до розв'язання задачі теплопровідності з нелінійною граничною умовою, участь у програмній реалізації та інтерпретації результатів [10, 49]; формулювання задачі термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну, побудова алгоритму, участь у програмній реалізації та аналізі й інтерпретації результатів [11, 16, 51, 54]; участь у постановці задачі пружності та термопружності для циліндра з неоднорідним багатошаровим покриттям, отримання розв'язку для випадку тонких покрить на основі підходу із застосуванням узагальнених граничних умов, участь в аналізі результатів [4, 43, 52]; участь у постановці задачі про еволюцію накопичення пошкоджень, розробка методики її розв'язування, програмна реалізація, участь в аналізі та інтерпретації результатів [19, 21, 36, 38, 39]; постановка задачі термопружності для ортотропного неоднорідного циліндра, методика її розв'язання, програмна реалізація, участь у формулюванні висновків [42]; формулювання задачі, ідея та реалізація підходу до отримання аналітичного розв'язку задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям з неоднорідною початковою умовою [14], за циклічного теплового навантаження [24, 55, 57] та відповідної задачі термопружності [56].

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на 4-й та 6-10-их Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Тернопіль, 1995; Львів, 2003, 2006, 2010, 2014, 2019); Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 1998, 2008, 2013, 2018); 4-му Міжнародному конгресі з індустріальної та прикладної математики (Единбург, Велика Британія, 1999); 4–й Європейській конференції з механіки деформівного твердого тіла (Метц, Франція, 2000); Українському математичному конгресі-2001 (Київ, 2001); 8-ій Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (Львів, 2001); конференції «Наукові читання, присвячені пам'яті академіка Я.С Підстригача» (Львів, 2002); 5-му Світовому конгресі з обчислювальної математики (Відень, Австрія, 2002); 5-7-му, 9-му та 12-ому Міжнародних конгресах з температурних напружень (Блексбург, США, 2003; Відень, Австрія, 2005; Тайпей, Тайвань, 2007; Будапешт, Угорщина, 2011; Ханчжоу, Китай, 2019); 5-му Міжнародному форумі з тепломасообміну (Мінськ, Білорусь, 2004); Колоквіумі EUROMECH 466 з обчислювальної та експериментальної механіки матеріалів (Лафборо, Велика Британія, 2005); 78-му та 80-му симпозіумах GAMM (Берлін, Німеччина, 2006; Гданськ, Польща, 2009), 3-й Міжнародній науковій конференції «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу» (Дніпропетровськ, 2010), Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016).

У повному обсязі робота доповідалася на наукових семінарах відділу механіки деформівного твердого тіла під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М.М. Николишина та за напрямком «Механіка взаємозв'язаних полів» під керівництвом д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевича Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.т.н., проф. О.Є. Андрейківа та д.ф.-м.н., проф. В.К. Опанасовича; на науковому семінарі «Сучасні проблеми механіки» кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Я.О. Жука та на науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Вайсфельд.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 57 наукових праць. Серед них 24 статті [1-24] у наукових фахових виданнях України і у наукових періодичних виданнях інших держав, 1 стаття [25] у галузі технічних наук, 1 стаття [26] в енциклопедії, 31 публікація [27-57] в матеріалах міжнародних і національних конференцій. П'ятнадцять статей [1, 4, 6, 10, 12, 15, 17-25] опубліковані у виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([19] входить до квартилю Q1, [18, 21, 23] – до Q2, [4, 6, 10, 12, 15] – до Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 37. Автором одноосібно опубліковано 34 праці [1, 2, 5-9, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25-35, 37, 40, 41, 45, 47, 48, 50, 53], зокрема 10 статей [1, 6, 12, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25] у виданнях, які індексуються базами Scopus та/або Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (586 найменувань, з них 318 – кирилицею, а 268 – латиницею) і додатків, містить 66 рисунків та 18 таблиць. Загальний обсяг роботи – 350 сторінок, з них 254 сторінки основного тексту.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ ТІЛ З ТОНКИМИ ПОКРИТТЯМИ

Визначення термомеханічного стану тіл із покриттями пов'язано з формулюванням і розв'язуванням задач теплопровідності та термопружності для цих тіл.

Моделюванню і дослідженню процесів теплопровідності (дифузії) в тілах з покриттями присвячено багато праць [5-11, 17, 19-21, 25-27, 36, 37, 45, 47, 48, 52-55, 57, 72-76, 78, 79, 81, 86, 97, 98, 100, 106-108, 112, 114-116, 118, 126, 132, 139-143, 145, 146, 148-151, 170, 184, 187, 189, 193, 195-198, 205, 222, 225, 228, 231, 234-240, 243, 249, 251, 254-257, 260, 267-269, 271-273, 312, 313, 316-318, 325, 326, 337, 348, 351, 360, 363, 370, 376-379, 381, 392, 402, 413, 414, 419, 422, 426-428, 435-437, 439, 449, 450, 453, 454, 459, 463, 465, 476, 477, 479, 480, 487, 490, 492, 493, 518, 557, 564-566, 572, 573, 579, 580].

Нестаціонарні крайові задачі теплопровідності у точній постановці для покрить довільної товщини розв'язувались або аналітично [6, 7, 84, 97, 98, 107, 130, 148, 234-237, 249, 251, 254-257, 337, 381, 413, 414, 439, 463, 479, 480, 487, 490, 564-566, 572, 573], або на основі чисельних підходів [37, 145, 146, 231, 370, 392, 419, 492].

Було запропоновано й низку наближених підходів. У роботі [11] при дослідженні теплоперенесення у скляних покриттях на металевих підкладках враховано лише градієнт температури вздовж товщини покриття, а в роботах [5, 8, 9], які реалізують схему «зосередженої ємності» [77, 221], навпаки, – лише її градієнт уздовж товщини підкладки. В [453] використано припущення сталості градієнта концентрації в покритті. В [57, 162, 557] вважається достатнім ураховувати вплив покриття через ефективний коефіцієнт тепловіддачі у граничній умові. У працях [376-379, 402, 449] спрощення відбувається на етапі аналітичного розв'язування задачі, коли береться до уваги малість товщини покриття. У [25-27, 76] розроблено асимптотичну математичну модель на основі застосування методу малого параметра. У [579] для випадку неоднорідних покрить отримано асимптотичні формули для малих часів. У [72-75, 225, 493] при побудові загальної числової схеми розв'язування методом скінченних елементів (як і у [228] із одночасним застосуванням методу декомпозиції області) використовується некласична комбінована модель теплопровідності, яка описується системою диференціальних рівнянь різної вимірності за просторовими змінними. У [518, 577] при застосуванні методу граничних елементів проводиться регуляризація обчислення граничних інтегралів. У [108] використовується підхід, пов'язаний з поданням теплофізичних характеристик через асиметричні функції, що приводить до розв'язування рівнянь з коефіцієнтами типу дельта-функцій Дірака.

Розв'язуванню задач визначення напружено-деформованого стану з врахуванням або без врахування температурних деформацій тіл з одно- та багатошаровими покриттями присвячені роботи [2, 3, 10, 11, 28, 41, 46, 47, 52-54, 56, 66-71, 78, 79, 84-86, 100, 101, 106, 107, 120, 126, 145, 146, 156, 159, 160, 166-170, 172, 174, 179, 185, 193, 195-198, 201, 206, 234-236, 238-240, 245, 248, 249, 251, 255, 257, 262, 263, 265, 268, 269, 271, 273, 313, 316-318, 330, 336, 344-346, 349, 356-358, 363, 366, 369, 371, 372, 378-381, 385, 388, 393, 395, 400, 404, 405, 415, 416, 421, 423-427, 431, 434, 444, 446-449, 451, 452, 455, 456, 460, 463, 465-468, 481, 482, 487, 495-497, 499, 519, 527, 528, 539, 543, 551, 559, 564, 565, 569, 570, 574-576, 579, 580]. В [3, 41, 94, 166, 169, 226, 227, 229, 238-240, 265, 336, 345, 371, 372, 421, 446, 493, 529] використовується наближений підхід, у якому для опису напружено деформованого стану у масивних елементах конструкцій (підкладці) використовують рівняння теорії термопружності або пружності, а для розрахунку стану в тонкостінних елементах конструкцій (покритті) – рівняння теорії оболонок.

Один з ефективних підходів до розв'язування задач визначення теплового поля і напруженого стану конструкцій з тонкими покриттями ґрунтується на концепції узагальнених граничних умов (УГУ), які описують вплив покриття на термомеханічний стан в тілі. У теплопровідності він застосовується у працях [5, 8, 9, 17, 19-21, 45, 47, 48, 52-55, 57, 78, 79, 81, 86; 96, с. 69; 112, 114-116, 140-142, 170, 187, 189, 193, 195-198, 222, 243, 260, 267, 269, 312, 313, 316-318, 325, 326, 348, 351, 370, 435-437, 454, 459, 557], у пружності та термопружності – в роботах [82, 86, 112, 164, 172, 174, 187, 189, 195, 196, 198, 262, 271, 329, 395, 481-484, 538, 539].

Такі узагальнені граничні умови на термомеханічні параметри дозволяють (на основі рівнянь дифузійного типу і рівнянь рівноваги) формулювати і розв'язувати некласичні крайові задачі термопружності для визначення термомеханічного стану тіл з тонкими покриттями в умовах нестаціонарних теплових і механічних навантажень. Вони можуть використовуватися як для аналітичного розв'язування, так і для числового.

Виведення УГУ може бути проведено різними методами і підходами:
(і) операторний метод, що дозволяє не приймати жодних попередніх гіпотез щодо поперечного розподілу шуканих функцій в покритті [48, 55, 86, 112, 114, 115, 140-142, 178, 183, 187, 189, 191-193, 195, 243, 284, 285, 312, 314, 315, 348, 443, 538];
(іі) підхід, який використовує апріорні припущення про поперечний розподіл шуканих функцій в покритті, який звичайно приймається постійним [6, 8, 9, 19-21, 81; 96, с. 69; 325, 326, 417] або лінійним [57, 78, 79, 81, 116, 199];
(ііі) дискретний підхід, заснований на відповідних різницевих апроксимаціях похідних по нормалі шуканих функцій в покритті [260, 262, 370, 557];
(іv) підхід, пов'язаний з використанням рівнянь балансу теплоти [64, 116, 149, 325, 326];
(v) асимптотичний підхід, заснований на методі малого параметра [82, 164, 331, 446, 459, 464, 484].

Слід зауважити, що аналогічно виведенню узагальнених граничних умов термомеханічного спряження тіл із середовищем через тонкі покриття застосовуються подібні наближені підходи до побудови узагальнених умов термомеханічного контакту через тонкі однорідні та неоднорідні прошарки. Тут можна виділити піонерську роботу стосовно теплового контакту Я.С. Підстригача [177], подальше розвинення із використанням операторного методу в роботах [51, 106, 111, 115, 178, 187, 189, 194, 314], із застосуванням дискретного методу у дисертації Ф.Н. Флейшман [262] і статтях Н.П. Флейшмана [259-261] та методу стрибка функцій у монографії Г.Т. Сулима [233], виведення імпедансних умов спряження при врахуванні неідеальності теплового контакту в статті А.А. Березовського [20] та уточнених варіантів у праці Г.М. Комарова [116], узагальнення умов теплового контакту на випадок врахування анізотропії прошарку в [121, 338, 340], узагальнення термомеханічних умов контакту на випадок неоднорідності властивостей прошарку в працях Р.М. Мартиняка та Р.М. Швеця [154, 155], роботи E. Hashin [397, 398], D. Givoli з співавторами [390, 530, 545], розвиток підходу із отримання умов високої точності у роботах Y. Benveniste [339].

1.1. Методика визначення температурного поля в тілах з багатошаровими покриттями

Зрозуміло, що кожний з вищезгаданих підходів має свої переваги та недоліки.

Зокрема, традиційний операторний метод доцільно застосовувати для плоских або дуже тонких неплоских покрить, оскільки його точність обмежується точністю використовуваних рівнянь теплопровідності.

У теорії теплопровідності тонкостінних елементів конструкцій наближене зведення тривимірних задач до двовимірних, як зазначається в [183, 192] може бути виконано різними методами. Окрім звичайно використовуваних підходів на основі гіпотез про лінійний розподіл температури за поперечною координатою, також застосовуються підходи з менш жорсткими обмеженнями на закон розподілу температури за товщиною. Поліноміальний розподіл приймався у книзі А.Д. Коваленка [102] при виведенні відповідних рівнянь теплопровідності пластин та у роботах І.О. Мотовиловця [161, 162] – рівнянь для пластин і оболонок. У монографії Б.Л. Пелеха і М.А. Сухорольського [173] та статті Н.В. Сметанкіної і В.В. Бредихіна [232] використовувалась апроксимація поліномами Лежандра, а у роботах Я.Ф. Малкіна [152, 153] та

А.Г. Терегулова [241] дослідження базувались на використанні розвинення температури в ряд по нормальній до серединної поверхні координаті.

З іншого боку, для вирішення проблеми побудови УГУ для багатошарового покриття виникає необхідність подання граничних значень температури та її похідної на межі покриття–зовнішнє середовище через відповідні граничні значення температури та її похідної на межі поділу тіло–покриття. Ефективним інструментом побудови таких співвідношень є метод матриць переносу (метод трансляційних матриць, transfer matrix method), який використовується у випадках, коли загальна система може бути розбита на послідовність підсистем, які взаємодіють тільки з сусідніми підсистемами. Зокрема, цей метод застосовується в теорії пружності [16, 332, 333, 341, 354, 544, 561], термопружності [334, 558] та теплопровідності [135, 210, 353, 386, 403, 413, 414, 438, 478] стосовно процесів в шаруватих структурах.

У цьому підрозділі представлено підхід до побудови узагальнених граничних умов променево-конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті, розвиненні функції температури по товщині покриття в степеневий ряд та застосуванні методу матриць переносу. Цей підхід дає можливість отримувати розрахункові варіанти узагальнених граничних умов з довільною точністю.

1.1.1. Рівняння теплопровідності для покриття

Досліджуваний об'єкт – тіло з багатошаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, шари якого виготовлені з різних ізотропних матеріалів. При цьому n-шарове покриття розглядаємо як тонку оболонку, віднесену до триортогональної змішаної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, які є, відповідно, лініями головних кривин поверхні поділу тіло–покриття й нормаллю до неї (рис. 1.1). Припускаємо, що поверхня краю Σ такої оболонки – лінійчата поверхня, для якої контур G, який обмежує поверхню поділу тіло–покриття S_0, є напрямною, а нормаль до S_0 у кожній точці контуру – твірною.

Загальне рівняння тривимірної теорії теплопровідності для i-го шару покриття в криволінійній ортогональній змішаній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ має вигляд [161, 162, 192]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_{2i}H_{3i}}{H_{1i}}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_{1i}H_{3i}}{H_{2i}}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{H_{1i}H_{2i}}{H_{3i}}\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right)=\frac{H_{1i}H_{2i}H_{3i}}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial\tau}, \quad (1.1)$$

де t_i – температура i-го шару; τ – час; H_{ji} – коефіцієнти Ляме; $a_i = \lambda_i / \omega_i$, λ_i, ω_i – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та теплоємність i-го шару.

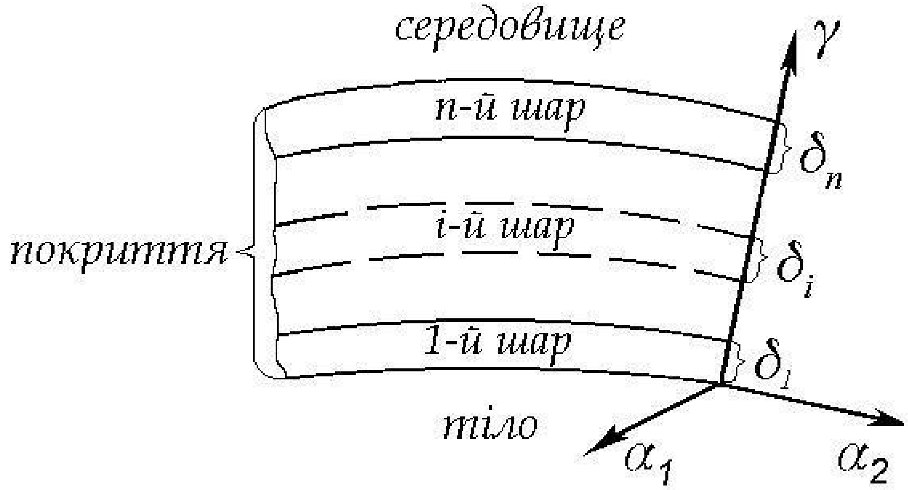


Рис. 1.1. Схема до постановки задачі

Подамо формули, які пов’язують коефіцієнти Ляме з коефіцієнтами першої квадратичної форми A_{1i}, A_{2i} поверхонь поділу i-го та (i-1)-го шарів ($i=\overline{2,n}$) та поверхні поділу тіло–покриття ($i=1$) і кривинами k_{1i}, k_{2i} координатних ліній ($\gamma_0 = 0$ при $i=1$ та $\gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1}\delta_j$ при $i=\overline{2,n}$):

$$H_{1i} = A_{1i}\left(1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right), \quad H_{2i} = A_{2i}\left(1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})\right), \quad H_{3i} = 1. \qquad (1.2)$$

Враховуючи формули (1.2), запишемо рівняння теплопровідності (1.1) так:

$$\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})}{1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})}{1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\big(1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})\big)\big(1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})\big)\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right]=\frac{\big(1+k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})\big)\big(1+k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})\big)}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial\tau}. \quad (1.3)$$

Для випадку однорідних шарів покрить (оболонок) подання рівняння теплопровідності у вигляді (1.3) використовувалось у роботах [73, 191].

Уводячи позначення

$$\tilde{\gamma}=\gamma-\gamma_{i-1}, \quad (1.4)$$

перепишемо рівняння (1.3) у вигляді

$$\frac{1}{\big(1+k_{1i}\tilde{\gamma}\big)\big(1+k_{2i}\tilde{\gamma}\big)}\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{1+k_{2i}\tilde{\gamma}}{1+k_{1i}\tilde{\gamma}}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{1+k_{1i}\tilde{\gamma}}{1+k_{2i}\tilde{\gamma}}\frac{\partial t_i}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$
$$+2k_i\frac{1+\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}\tilde{\gamma}}{\big(1+k_{1i}\tilde{\gamma}\big)\big(1+k_{2i}\tilde{\gamma}\big)}\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}+\frac{\partial^2 t_i}{\partial\gamma^2}=\frac{1}{a_i}\frac{\partial t}{\partial\tau}, \qquad i=\overline{1,n}, \quad (1.5)$$

де $k_i=(k_{1i}+k_{2i})/2$ – середня кривина координатних ліній.

У випадку особливо тонких шарів покриття ($k_{1i}(\gamma-\gamma_{i-1})<<1$, $k_{2i}(\gamma-\gamma_{i-1})<<1$) рівняння (1.5) можна спростити:

$$\Delta_i t_i+2k_i\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}+\frac{\partial^2 t_i}{\partial\gamma^2}=\frac{1}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial\tau}, \quad i=\overline{1,n}; \quad (1.6)$$

$$\Delta_i=\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right]. \quad (1.7)$$

1.1.2. Формулювання проблеми

У випадку променево-конвективного нагрівання (охолодження) тіла з багатошаровим покриттям постановка задачі теплопровідності для покриття в контакті з тілом включатиме рівняння теплопровідності (1.5) або (1.6), граничні умови променево-конвективного теплообміну на межі покриття–середовище

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial \gamma} = \mu\left(t_{\text{C}} - t_n\right) + \sigma_0 \varepsilon \left(t_{\text{C}}^4 - t_n^4\right) \text{ при } \gamma = \gamma_n = \delta\,, \tag{1.8}$$

$$\lambda_i \,\mathrm{L}_i\, t_i = \mu_i\left(t_{\Sigma i} - t_i\right) + \sigma_0 \varepsilon_i \left(t_{\Sigma i}^4 - t_i^4\right) \text{ на } \Sigma\,,\quad \mathrm{L}_i = \frac{n_1}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{n_2}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_2},\ i = \overline{1,n}, \tag{1.9}$$

умови ідеального теплового контакту між шарами покриття і покриттям та тілом

$$\begin{aligned} &t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial \gamma} \ \text{ при } \ \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = \overline{2,n}; \\ &t_1 = t_{\text{T}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} = \lambda_{\text{T}} \frac{\partial t_{\text{T}}}{\partial \gamma} \quad \text{ при } \gamma = \gamma_0 = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

та початкову умову

$$t_i = t_{i0}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \text{ при } \tau = 0,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{1.11}$$

Тут t_{C}, t_{Σ} – температури середовищ, які оточують поверхні покриття $\gamma = \delta$ і Σ; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і навколишнім середовищем; σ_0 – стала Стефана–Больцмана; ε – ступінь чорноти поверхні покриття; n_1, n_2 – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні краю Σ. Індексами «i» та «Т» позначено величини, що відносяться до i-го шару покриття та тіла, відповідно.

1.1.3. Узагальнені граничні умови променево-конвективного теплообміну тіл через багатошарові покриття

Побудова УГУ здійснюється так. Подамо температуру t_i у вигляді розвинення

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} t_{i,m}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)(\gamma - \gamma_{i-1})^m\ ,\quad \gamma_{i\text{-}1} \le \gamma \le \gamma_i\ ,\quad i = \overline{1,n}\,. \tag{1.12}$$

Підставляючи розвинення (1.12) у рівняння теплопровідності (1.5) з урахуванням позначення (1.4) і формул

$$\frac{1+k_{qi}\tilde{\gamma}}{1+k_{si}\tilde{\gamma}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\gamma}^{m}(-1)^{m}k_{si}^{m-1}\left(k_{si}-k_{qi}\right),\ q=1,2;\ s=3-q;$$

$$\frac{1}{\left(1+k_{1i}\tilde{\gamma}\right)\left(1+k_{2i}\tilde{\gamma}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}k_{i(m)}\tilde{\gamma}^{m}\ ,$$

$$\frac{1+\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}\tilde{\gamma}}{\left(1+k_{1i}\tilde{\gamma}\right)\left(1+k_{2i}\tilde{\gamma}\right)}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\left(k_{i(m)}-\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}k_{i(m-1)}\right)\tilde{\gamma}^{m},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{\gamma}^{m}\sum_{j=0}^{m}k_{i,(m-j)}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{m-l}\Delta_{i,j-l}t_{i,l}+\\&+2k_i\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+1\right)\tilde{\gamma}^{m}t_{i,m+1}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\gamma}^{m}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m-j}\left(k_{i,(m-j)}-\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}k_{i,(m-j-1)}\right)t_{i,j+1}\right]+\\&+\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+2\right)\left(m+1\right)t_{i,m+2}=\frac{1}{a_i}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{\gamma}^{m}\frac{\partial t_{i,m}}{\partial\tau},\ 0<\tilde{\gamma}<\delta_i.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Тут
$$k_{i(m)}=\sum_{j=0}^{m}k_{1i}^{m-j}k_{2i}^{j},$$

$$\Delta_{i,j}=\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}k_{1i}^{j-1}\left(k_{1i}-k_{2i}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}k_{2i}^{j-1}\left(k_{2i}-k_{1i}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right]$$

$$\Delta_{i,0}=\Delta_i \qquad i=\overline{1,n};\ j=1,2,...$$

З формули (1.13), прирівнюючи члени при однакових степенях $\tilde{\gamma}$, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned}&\Delta_{i,0}t_{i,0}+2k_it_{i,1}+2t_{i,2}=\frac{1}{a_i}\frac{\partial t_{i,0}}{\partial\tau},\\&-\left(2k_i\Delta_{i,0}+\Delta_{i,1}\right)t_{i,0}+\left(\Delta_{i,0}-4k_i^2+2k_{1i}k_{2i}\right)t_{i,1}+4k_it_{i,2}+6t_{i,3}=\frac{1}{a_i}\frac{\partial t_{i,1}}{\partial\tau},\\&\sum_{j=0}^{m}k_{i,(m-j)}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{m-l}\Delta_{i,j-l}t_{i,l}+2k_i\left[\left(m+1\right)t_{i,m+1}+\right.\\&\left.+\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m-j}\left(k_{i,(m-j)}-\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}k_{i,(m-j-1)}\right)t_{i,j+1}\right]+\left(m+2\right)\left(m+1\right)t_{i,m+2}=\frac{1}{a_i}\frac{\partial t_{i,m}}{\partial\tau},\ m\geq 2.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Зі співвідношень (1.14) випливає

$$
\begin{gathered}
t_{i,m}=-\frac{2k_i}{m}t_{i,m-1}-\frac{1}{m(m-1)}\left[\sum_{j=0}^{m-2}k_{i,(m-j-2)}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{m-l}\Delta_{i,j-l}t_{i,l}+\right.\\
\left.+2k_i\sum_{j=0}^{m-3}(\text{-}1)^{m-j}\left(k_{i,(m-j-2)}-\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}k_{i,(m-j-3)}\right)t_{i,j+1}-\frac{1}{a_i}\frac{\partial t_{i,m-2}}{\partial\tau}\right],\ m\geq 2.
\end{gathered}
\tag{1.15}
$$

Уведемо такі позначення для температури та її похідних на поверхнях поділу сусідніх шарів:

$$
t_i^+=\lim_{\gamma\to\gamma_i-0}t_i,\quad t_i^-=\lim_{\gamma\to\gamma_{i-1}+0}t_i,\quad \left(\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right)^+=\lim_{\gamma\to\gamma_i-0}\left(\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right),\quad \left(\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right)^-=\lim_{\gamma\to\gamma_{i-1}+0}\left(\frac{\partial t_i}{\partial\gamma}\right). \tag{1.16}
$$

З формул (1.12), (1.15) і контактних умов (1.10) отримуємо подання коефіцієнтів розвинення функції температури i-го шару покриття через граничні значення температури та її похідної на верхній межі (i-1)-го шару

$$
t_{i,m}=c_{i,m}t_{i-1}^{+}+d_{i,m}\left(\frac{\partial t_{i-1}}{\partial\gamma}\right)^+,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.17}
$$

де коефіцієнти $c_{i,m}$, $d_{i,m}$ визначаються рекурентними співвідношеннями

$$
c_{i,0}=1,\ c_{i,1}=0,\ d_{i,0}=0,\ d_{i,1}=\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \tag{1.18}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_{i,m}=-\frac{2k_i}{m}\varphi_{i,m-1}-\frac{1}{m(m-1)}\left[\sum_{j=0}^{m-2}k_{i,(m-j-2)}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{m-l}\varphi_{i.l}\Delta_{i,j-l}+\right.\\
\left.+2k_i\sum_{j=0}^{m-3}(\text{-}1)^{m-j}\left(k_{i,(m-j-2)}-\frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i}k_{i,(m-j-3)}\right)\varphi_{i,j+1}-\frac{\varphi_{i,m-2}}{a_i}\frac{\partial}{\partial\tau}\right],\ \ \varphi=c,d;m\geq 2,
\end{gathered}
\tag{1.19}
$$

і додатково позначено $t_0^+=t_{\mathrm{T}}\Big|_{\gamma=0}$, $\left(\dfrac{\partial t_0}{\partial\gamma}\right)^+=\dfrac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0}$, $\lambda_0=\lambda_{\mathrm{T}}$.

Підставляючи (1.17) у вираз для температури (1.12) та її похідної при $\gamma=\gamma_i$, отримуємо такі рекурентні співвідношення для температур та її похідних на поверхнях поділу шарів

$$
\tilde{\mathbf{t}}_i=\mathbf{D}_i\tilde{\mathbf{t}}_{i-1},\qquad i=\overline{1,n}, \tag{1.20}
$$

де

$$\tilde{\mathbf{t}}_i = \left[t_i^+ \quad \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma} \right)^+ \right]^{\mathsf{T}}, \quad i = \overline{1,n}; \qquad \tilde{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{t}}_{\mathrm{T}} = \left[t_{\mathrm{T}} \Big|_{\gamma=0} \quad \frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} \right]^{\mathsf{T}}, \tag{1.21}$$

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_{i,m} \delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} d_{i,m} \delta_i^m \\ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{i,m+1} \delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) d_{i,m+1} \delta_i^m \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.22}$$

Тут і надалі символ «T» позначає операцію транспонування матриці.

Тепер подамо граничні значення температури та її похідної на поверхні поділу шарів покриття через їх відповідні значення на поверхні поділу тіло–покриття:

$$\tilde{\mathbf{t}}_j = \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{t}}_{\mathrm{T}}, \qquad j = \overline{0,n}, \tag{1.23}$$

де
$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} q_i^{11} & q_i^{12} \\ q_i^{21} & q_i^{22} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

Тоді з (1.20), (1.23) дістанемо такі рекурентні співвідношення:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.25}$$

Формулу (1.25) можна подати і так:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{D}_{i-1} \ldots \mathbf{D}_1 = \prod_{j=1}^{i} \mathbf{D}_{i-j+1}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.26}$$

З (1.23) та (1.21), зокрема, випливає:

$$\mathbf{t}_i^+ = \mathbf{Q}_i^{(1)} \tilde{\mathbf{t}}_{\mathrm{T}}, \tag{1.27}$$

де

$$\mathbf{Q}_i^{(1)} = \left[q_i^{11} \; q_i^{12} \right]. \tag{1.28}$$

Слід зауважити, що викладену процедуру побудови подання граничних значень температури та її похідної на поверхні поділу шарів через відповідні значення на поверхні поділу тіло–покриття можна трактувати як реалізацію методу матриць переносу (transfer matrix method) [134, 332, 333, 401, 403, 561] до процесу теплопровідності в багатошаровому середовищі. Тут матриця $\mathbf{D}_i$ розмірністю 2×2 – так звана матриця переносу (трансляційна [134, 135]) i-го шару покриття, а матриця $\mathbf{Q}_n$ – матриця переносу всього n-шарового покриття.

Підставляючи (1.23) і (1.27) при $i = n$ в граничну умову променево-конвективного теплообміну (1.8), на поверхні поділу основа–покриття S_0 отримуємо:

$$[\mu\ \lambda_n]\mathbf{Q}_n\tilde{\mathbf{t}}_{\text{Т}} + \sigma_0\varepsilon\left(\mathbf{Q}_n^{(1)}\tilde{\mathbf{t}}_{\text{Т}}\right)^4 - \mu t_{\text{С}} - \sigma_0\varepsilon t_{\text{С}}^4 = 0. \tag{1.29}$$

Оскільки співвідношення (1.29) пов'язує граничні значення температури $t_{\text{Т}}$ та її похідної $\partial t_{\text{Т}} / \partial\gamma$ у тілі зі значенням температури $t_{\text{С}}$ у середовищі, то його можна трактувати як *узагальнену граничну умову* (УГУ) для визначення температури в тілі, яка враховує вплив багатошарового покриття на перебіг теплоперенесення в тілі.

З іншого боку, УГУ (1.29) можна подати у явному вигляді через температуру та її похідну:

$$c_1 t_{\text{Т}} + c_2\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma} + \mu\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \sigma_0\varepsilon\left[t_{\text{С}}^4 - \sum_{j=0}^{4} c_{j+3} t_{\text{Т}}^{4-j}\left(\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma}\right)^j\right] = 0, \tag{1.30}$$

де коефіцієнти c_l визначають співвідношення

$$[c_1\ c_2] = [\mu\ 0] - [\mu\ \lambda_n]\mathbf{Q}_n, \tag{1.31}$$

$$c_{j+3} = C_4^j\left(q_n^{11}\right)^{4-j}\left(q_n^{12}\right)^j, \quad j = \overline{0,4}, \tag{1.32}$$

а $C_4^j = \dfrac{4!}{j!(4-j)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

1.1.4. Розрахункові варіанти узагальнених граничних умов променево-конвективного теплообміну тіл через тонкі багатошарові покриття

Уведемо безрозмірну змінну $\gamma^* = \gamma / \delta$. Перепишемо тоді (1.30) у вигляді

$$c_1^* t_{\text{T}} + c_2^* \frac{\partial t_{\text{T}}}{\partial \gamma^*} + \mu\left(t_{\text{C}} - t_{\text{T}}\right) + \sigma_0 \varepsilon \left[t_{\text{C}}^4 - \sum_{j=0}^{4} c_{j+3}^* t_{\text{T}}^{4-j} \left(\frac{\partial t_{\text{T}}}{\partial \gamma^*} \right)^j \right] = 0, \tag{1.33}$$

де
$$c_1^* = c_1, \quad c_2^* = c_2 / \delta, \quad c_{j+3}^* = c_j / \delta^j, \quad j = \overline{0,4}. \tag{1.34}$$

Вираз (1.33) слугує загальним вихідним співвідношенням для отримання розрахункових варіантів УГУ з різною точністю.

Для тонких покрить умову (1.33) можна суттєво спростити, розвинувши в ряд за степенями малих товщин δ_i відповідні доданки та нехтуючи члени, які містять $\delta_i^q \delta_l^s$ при $q + s > 2$ за умови $\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \Big/ \frac{\delta}{\lambda_{\text{T}}} \le 1$. Тоді

$$c_1^* = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2(K - \tilde{K}_{i-1}) + \mu\left(H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1}\right)\right)\tilde{\Delta}_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Delta}_{i,1} - \\ - \left[\left(1 - 2K + \mu H^{-1}\right)\Omega + \sum_{i=1}^{n} \left(2\tilde{K}_{i-1/2} - \mu H_{i-1/2}^{-1}\right)\Omega_i \right] \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$c_2^* = -\lambda_{\text{T}} \delta^{-1} \left[1 - 2K + \sum_{i=1}^{n} \left(4K_i \tilde{K}_i - K_{1i} K_{2i}\right) + \mu \left(H^{-1} - 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{K}_{i-1/2} h_i^{-1} \right) - \sum_{i=1}^{n} H_{i-1/2}^{-1} \left(\tilde{\Delta}_i - \Omega_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right],$$

$$c_{j+3}^* = C_4^j \left(\lambda_{\text{T}} H^{-1} \delta^{-1}\right)^j \left[1 - (4-j) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1}\right)\tilde{\Delta}_i - \left(\Omega H^{-1} - \Omega_i H_{i-1/2}^{-1}\right) \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right], \tag{1.35}$$
$$j = \overline{0,4}.$$

Тут уведено такі позначення:

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{\Lambda_i}{A_{1i} A_{2i}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]; \quad \tilde{\Delta}_{i,1} = \frac{\lambda_i \delta_i^2}{2} \Delta_{i,1};$$

$\Lambda_i = \lambda_i \delta_i$, $\Omega_i = \omega_i \delta_i$, $h_i = \lambda_i / \delta_i$, $K_i = k_i \delta_i$, $K_{1i} = k_{1i} \delta_i$, $K_{2i} = k_{2i} \delta_i$ – приведені теплопровідність, теплоємність, теплопроникливість і кривини i-го шару; $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{-1}$, $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ – приведені теплоємність, термічний опір та кривина усього покриття; $H_i^{-1} = \sum_{j=1}^{i} h_j^{-1}$; $H_0^{-1} = 0$; $H_{i-1/2}^{-1} = H_{i-1}^{-1} + \left(2h_i\right)^{-1}$; $\tilde{K}_i = \sum_{j=1}^{i} k_j \delta_j$; $\tilde{K}_{i-1/2} = \tilde{K}_i - \frac{k_i \delta_i}{2}$.

Якщо у (1.33) залишити лише лінійні члени за товщинами шарів δ_i, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&c_1^* = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Delta}_i - \Omega \frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad c_2^* = -\lambda_{\text{Т}} \delta^{-1} \left(1 - 2K + \mu H^{-1}\right), \\
&c_{j+3}^* = C_4^j \left(\lambda_{\text{Т}} H^{-1} \delta^{-1}\right)^j, \quad j = \overline{0,4},
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

і, відповідно, за врахування співвідношень (1.34) УГУ можна записати так

$$
\sum_{i=1}^{n} \tilde{\Delta}_i t_{\text{Т}} - \lambda_{\text{Т}} \left(1 - 2K + \mu H^{-1}\right) \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma} + \mu \left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \Phi\left(t_{\text{Т}}, \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma}\right) = \Omega \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \tag{1.37}
$$

де
$$
\Phi\left(t_{\text{Т}}, \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma}\right) = \sigma_0 \varepsilon \left[t_{\text{С}}^4 - \sum_{j=0}^{4} C_4^j \left(\lambda_{\text{Т}} H^{-1}\right)^j t_{\text{Т}}^{4-j} \left(\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma}\right)^j \right]. \tag{1.38}
$$

У цьому випадку, коли головні кривини і коефіцієнти першої квадратичної форми поверхонь поділу шарів наближено прийняти рівними відповідним величинам поверхні поділу тіло–покриття ($k_i = k^*$, $A_{1i} = A_1$, $A_{2i} = A_2$, $i = \overline{1,n}$),, то УГУ (1.37) може бути подана у вигляді

$$
\tilde{\Delta} t_{\text{Т}} - \lambda_{\text{Т}} \left(1 - 2K + \mu H^{-1}\right) \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma} + \mu \left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \Phi\left(t_{\text{Т}}, \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \gamma}\right) = \Omega \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \tag{1.39}
$$

$$
\tilde{\Delta} = \frac{\Lambda}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right],
$$

де $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i$ – приведена теплопровідність усього покриття, $K = k^* \delta$.

Якщо обмежитись у (1.33) лише лінійними доданками за товщинами δ_i при температурі $t_{\text{Т}}$ у конвективній складовій, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Delta}_i t_{\text{Т}} - \lambda_{\text{Т}}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma} + \mu\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \Phi\left(t_{\text{Т}}, \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma}\right) = \Omega\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\tau}, \tag{1.40}$$

а якщо – при похідній температури, то

$$-\lambda_{\text{Т}}\left(1 - 2K + \mu H^{-1}\right)\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma} + \mu\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \Phi\left(t_{\text{Т}}, \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma}\right) = 0. \tag{1.41}$$

Відкидаючи доданки в умові (1.33), які містять товщину шарів покриття, отримуємо умову променево-конвективного теплообміну

$$-\lambda_{\text{Т}}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma} + \mu\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) + \sigma_0\varepsilon\left(t_{\text{С}}^4 - t_{\text{Т}}^4\right) = 0\,. \tag{1.42}$$

Цікавим частковим випадком УГУ (1.37) є ситуація при $\mu \to \infty$. Тоді має місце

$$-\lambda_{\text{Т}}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma} = H\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right). \tag{1.43}$$

Слід зауважити, що УГУ (1.37), (1.39), (1.40) містять похідні за часом від граничної температури $t_{\text{Т}}$, а УГУ (1.30) з коефіцієнтами (1.34), (1.35) – ще й від її похідної $\partial t_{\text{Т}} / \partial\gamma$. З контактних умов (1.10) і початкової умови (1.11) отримаємо

$$t_{\text{Т}}\Big|_{\gamma=0,\tau=0} = t_{10}(\alpha_1, \alpha_2, 0)\ , \ \ \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0,\tau=0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{Т}}}\frac{\partial t_{10}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0}\,. \tag{1.44}$$

Як альтернативний варіант можна використати також вираз через усереднене значення початкової температури за товщиною багатошарового покриття:

$$t_{\text{Т}}\Big|_{\gamma=0,\tau=0} = \frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{i0}\left(\varsigma\right)d\varsigma\right). \tag{1.45}$$

Формули (1.44) та (1.45) можна застосувати для відповідних УГУ (1.30), (1.37), (1.39), (1.40).

Задовольняючи умови (1.9) на торцевій поверхні краю Σ інтегрально

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \mathrm{L}_i+\mu_i)\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i d\gamma+\sigma_0\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i^4 d\gamma-\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{\Sigma i}d\gamma+\sigma_0\varepsilon_i\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{\Sigma i}^4 d\gamma\right]=0, \quad (1.46)$$

використовуючи розвинення (1.12), формули (1.17), (1.23), (1.21), отримаємо

$$c_{\Sigma,1}t_{\mathrm{T}}+c_{\Sigma,2}\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}+\sigma_0\sum_{j=0}^{4}c_{\Sigma,j+3}t_{\mathrm{T}}^{4-j}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\right)^j-\delta T_{\Sigma}^{\mu}-\delta T_{\Sigma}^{\varepsilon}=0 \text{ на } G, \quad (1.47)$$

де

$$\left[c_{\Sigma,1}\ \ \mathrm{c}_{\Sigma,2}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \mathrm{L}_i+\mu_i\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta_i^{m+1}}{(m+1)}\left[c_{i,m},d_{i,m}\right]\mathbf{Q}_{i-1}, \quad (1.48)$$

$$c_{\Sigma,j+3}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta_i^{4m+1}}{4m+1}C_4^j b_{i,m,1}^{4-j}b_{i,m,2}^{j}, \quad j=\overline{0,4}, \quad (1.49)$$

$$\mathbf{b}_{i,m}=\left[b_{i,m,1}\ \ b_{i,m,2}\right]=\left[c_{i,m}\ \ d_{i,m}\right]\mathbf{Q}_{i-1}, \quad (1.50)$$

$$T_{\Sigma}^{\mu}=\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_{\Sigma i}d\gamma,\ \ T_{\Sigma}^{\varepsilon}=\frac{1}{\delta}\sigma_0\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_{\Sigma i}^4 d\gamma. \quad (1.51)$$

Отже, з (1.47) можна дістати відповідні розрахункові варіанти УГУ. Зокрема, якщо обмежитись лінійними членами за товщиною при температурі та квадратичними при похідній, одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \mathrm{L}_i+\mu_i)\left(t_{\mathrm{T}}+\frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{H_{i-1}}\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\right)\delta_i+\sigma_0\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sum_{j=0}^{4}C_4^j\left(\frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{H_{i-1}}\right)^j t_{\mathrm{T}}^{4-j}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\right)^j\delta_i- \quad (1.52)$$
$$-\delta T_{\Sigma}^{\mu}-\delta T_{\Sigma}^{\varepsilon}=0.$$

Можна зауважити, що загалом умову (1.52) можна наближено замінити лінійною, оскільки вплив торцевої поверхні покриття–оболонки в загальному теплообміні є незначним [266].

1.1.5. Порівняльний аналіз отриманих узагальнених граничних умов теплообміну

Порівняємо наведені розрахункові варіанти УГУ з наявними в літературі. Зазначимо, що переважна більшість праць стосується випадку конвективного теплообміну для однорідних покрить без урахування променевої складової.

Найпростіший з розрахункових варіантів УГУ (1.41) (що містить лише лінійні доданки за товщиною при похідній $\partial t_{\text{Т}} / \partial \gamma$ та враховує тільки вплив термоопору та кривини покриття) без урахування кривини ($K = 0$) рівносильний за точністю граничній умові [95, с. 28] теплообміну тіла зі середовищем через тонку плівку з слабкопровідного матеріалу, а з урахуванням кривини – ефективній граничній умові з еквівалентним коефіцієнтом тепловіддачі, наведеній у [57].

Варіант УГУ (1.40), що містить лише лінійні члени за товщиною при температурі $t_{\text{Т}}$ та враховує тільки вплив теплоємності покриття та повздовжні теплові потоки, для одношарового покриття співпадає з відповідною умовою в [325] та для одновимірного ($\tilde{\Delta} = 0$) випадку – з умовою в [5, 8, 9], отриманою за схемою «зосередженої ємності» [77, 221].

Більш загальний вираз (1.39) з лінійними членами як при температурі, так і при її похідній, враховує всі ефективні характеристики покриття – приведені теплоємність, термоопір, теплопровідність та кривину. Для одношарових покрить без урахування променевої складової він співпадає (або еквівалентний за точністю) з відповідними УГУ конвективного теплообміну тіл з покриттями, які були отримані у роботах [78, 86, 260] та у [48, 312] за нехтування теплообміном випроміненням. Для пластинчатих ($K = 0$) покрить УГУ (1.39) збігається з умовою в [189], а за одновимірної ($\tilde{\Delta} = 0$) стаціонарної ($\Omega = 0$) теплопровідності – з ефективною граничною умовою в праці [222].

Відзначимо, що для часткового випадку одношарового покриття варіант УГУ (1.30) з коефіцієнтами, визначеними з формул (1.34), (1.35), який враховує лінійні і квадратичні члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, співпадає з УГУ в [296] та не співпадає з відповідними УГУ з праць [48, 114, 312], оскільки за вихідне там взято наближене рівняння теплопровідності (1.6), хоча для часткового випадку плоских покрить результати збігаються [112, 187, 195].

Можна зауважити, що варіант УГУ (1.39), який враховує лінійні члени при температурі та її похідній, для випадку одношарового покриття за урахування нагрівання випроміненням, співпадає з відповідною УГУ, наведеною в публікаціях [48, 312] за відсутності розподілених у покритті джерел тепла та теплових потоків, які враховують приховану теплоту кристалізації (плавлення), теплоту екзотермічних (ендотермічних) процесів, хімічних реакцій. Простіший вираз (1.40), який не враховує вплив термоопору та кривини покриття, з променевою складовою теплообміну за найпростішого варіанта (1.38) – відсутності похідної $\partial t_{\mathrm{T}} / \partial \gamma$, збігається з «імпедансною крайовою умовою», наведеною в працях [19, 20] для випадку ідеального теплового контакту між тілом і покриттям за відсутності сторонніх теплових потоків та потоків, спричинених перевипроміненням тепла.

Для випадку одношарового покриття умова (1.43) збігається з варіантом граничної умови, наведеним в [95, с. 27; 370].

Щодо багатошарових покрить, то УГУ конвективного теплообміну, отримані в роботах [55, 140-142, 348] операторним методом з використанням граничного переходу, збігаються з варіантом УГУ (1.39), що містить лінійні члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, без урахування кривини та променевої складової, а УГУ конвективного теплообміну для пластинчатих покрить, отримані в роботі [162, с. 93] з використанням зведеного коефіцієнта тепловіддачі без урахування неідеальності теплового контакту та УГУ, виведені в [557], збігаються з варіантом УГУ (1.41) з лінійними членами за товщиною при похідній від температури, без урахування променевої складової при $K = 0$.

Узагальнені граничні умови, отримані в працях [284, 288], які враховують лінійні і *квадратичні* члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, не співпадають з варіантом УГУ (1.30) з коефіцієнтами, визначеними з формул (1.34), (1.35), оскільки в цих роботах за вихідне співвідношення приймали наближене рівняння теплопровідності (1.6), хоча УГУ, побудовані в [284, 285, 288, 505, 507], які враховують лише відповідні *лінійні* члени, збігаються з УГУ (1.37).

1.1.6. Визначення теплового стану в покритті

Після визначення температурного поля в тілі на основі розв’язування відповідної крайової задачі з УГУ, можемо знайти температуру за товщиною покриття за допомогою формул відновлення.

Підставляючи з цією метою вирази (1.17), (1.21) і (1.23) з урахуванням позначення (1.50) у розвинення (1.12), подамо температуру в покритті так:

$$t_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}(\gamma-\gamma_{i-1})^m\,\mathbf{b}_{i,m}\tilde{t}_{\mathrm{T}}\,,\qquad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i\,,\qquad i=\overline{1,n}\,. \tag{1.53}$$

Формула (1.53) використовується для відновлення температурного поля в покритті після розв’язуванні відповідної крайової задачі теплопровідності в області тіла з УГУ.

Обмежуючись лінійними членами розвинення в (1.53), отримуємо

$$t_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\tau)=t_{\mathrm{T}}\big|_{\gamma=0}+\lambda_{\mathrm{T}}\left(H_{i-1}^{-1}+\frac{\gamma-\gamma_{i-1}}{\lambda_i}\right)\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0}\,,\quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{1.54}$$

а врахувавши квадратичні –

$$\begin{aligned}t_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\tau)={}&\left[1+\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(-\tilde{\Delta}_j+\Omega_j\frac{\partial}{\partial\tau}\right)(\gamma-\gamma_{i-1})+\left(-\Delta_i+\frac{1}{a_i}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{(\gamma-\gamma_{i-1})^2}{2}\right]t_{\mathrm{T}}\big|_{\gamma=0}+\\&+\frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{\lambda_i}\left[\lambda_iH_{i-1}^{-1}+\left(1-2\tilde{K}_{i-1}\right)(\gamma-\gamma_{i-1})-k_i(\gamma-\gamma_{i-1})^2\right]\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0},\quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i,\quad i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{1.55}$$

Таким чином, методика визначення теплового стану в тілах з багатошаровими покриттями реалізується у два етапи:

1) розв’язування некласичної крайової задачі теплопровідності в тілі з УГУ;
2) знаходження температурного поля в покритті за формулами відновлення.

1.1.7. Тестова задача теплопровідності для циліндра з покриттям

Як тестову розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для суцільного циліндра радіуса R з одношаровим покриттям товщиною δ за конвективного нагріву зовнішнім середовищем.

Рівняння теплопровідності та початкові умови у цьому випадку мають вигляд

$$\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau} = a_{\text{Т}} \left(\frac{\partial^2 t_{\text{Т}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} \right), \qquad \frac{\partial t_{\text{П}}}{\partial \tau} = a_{\text{П}} \left(\frac{\partial^2 t_{\text{П}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\text{П}}}{\partial r} \right), \tag{1.56}$$

$$t_{\text{Т}|\tau=0} = t_0, \qquad t_{\text{П}|\tau=0} = t_0. \tag{1.57}$$

Приймаємо, що циліндр нагрівається середовищем за законом Ньютона

$$\lambda_{\text{П}} \frac{\partial t_{\text{П}}}{\partial r} = \mu \left(t_{\text{П}} - t_{\text{С}} \right) \quad \text{при} \quad r = R + \delta, \tag{1.58}$$

на поверхні поділу покриття з тілом мають місце умови ідеального теплового контакту

$$t_{\text{П}} = t_{\text{Т}}, \quad \lambda_{\text{П}} \frac{\partial t_{\text{П}}}{\partial r} = \lambda_{\text{Т}} \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} \quad \text{при} \ r = R, \tag{1.59}$$

а на осі циліндра виконується умова симетрії

$$\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{1.60}$$

Індекси «Т» і «П» відносяться до циліндра (тіла) і покриття, відповідно.

Точний розв’язок цієї задачі наведено в [29]. Наближений же розв’язок для циліндра ґрунтується на розв’язуванні рівняння (1.56) в області тіла за початкової умови (1.57), умови симетрії (1.60) і УГУ, яка у цьому випадку випливає з (1.30), (1.34), (1.35):

$$-\lambda_{\text{Т}}\left[1-\frac{\delta}{R}+\boxed{\frac{\delta^2}{R^2}}+\frac{\mu\left(1-\boxed{\frac{\delta}{2R}}\right)}{H}\right]\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r}+\mu(t_{\text{С}}-t_{\text{Т}})=$$
$$=\left(1\boxed{-\frac{\delta}{2R}+\frac{\mu}{2H}}\right)\Omega\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial\tau}+\boxed{\frac{\Omega}{2H}\lambda_{\text{Т}}\frac{\partial^2 t_{\text{Т}}}{\partial\tau\partial r}}, \tag{1.61}$$

де $H=\lambda_{\text{П}}/\delta$, $\Omega=\omega_{\text{П}}\delta$.

Умова (1.61) записана для одношарового покриття для суто конвективного нагрівання. Застосовуватимемо її для двох випадків – при збереженні лише *лінійних* доданків при температурі та похідній і тоді, коли залишатимемо також *квадратичні* члени. У цьому записі (1.61) і надалі у рамках позначено доданки, які відповідають квадратичним членам при температурі та її похідній.

Використовуючи перетворення Лапласа, знаходимо розв’язок розглянутої задачі для циліндра у вигляді

$$\vartheta_{\text{Т}}(\rho,\text{Fo})=1-2\text{Bi}_*\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\rho\kappa_j\right)\exp(-\kappa_j^2\text{Fo})}{Z(\kappa_j)}\,,\quad 0\le\rho\le 1, \tag{1.62}$$

$$Z(\kappa_j)=J_0(\kappa_j)\left[\left(1+2p\upsilon-\boxed{0.5\upsilon\xi\kappa_j^2}\right)\kappa_j^2+\left(\text{Bi}_*-\left(p+\boxed{\xi}\right)\upsilon\kappa_j^2\right)\frac{\left(\text{Bi}_*-\boxed{p\upsilon\kappa_j^2}\right)}{\left(1-\boxed{0.5\upsilon\xi\kappa_j^2}\right)}\right], \tag{1.63}$$

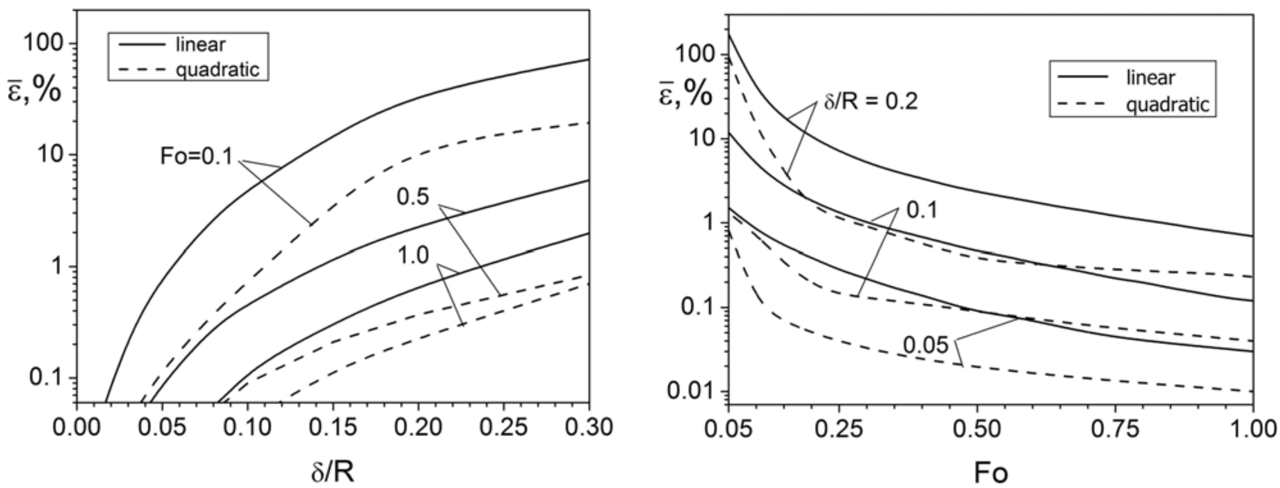
де κ_j – корені рівняння $\left(\text{Bi}_*-p\varepsilon\kappa^2\right)J_0\left(\kappa\right)-\left(1-\boxed{0.5\xi\upsilon\kappa^2}\right)\kappa J_1\left(\kappa\right)=0$, (1.64)

$$\vartheta_{\text{Т}}=\frac{t_{\text{Т}}-t_0}{t_{\text{С}}-t_0},\quad \rho=\frac{r}{R},\quad \text{Fo}=\frac{a_{\text{Т}}\tau}{R^2},\quad p=1\boxed{-\frac{\delta}{2R}+\frac{\xi\text{Bi}}{2}},\quad \xi=H^{-1}\big/\left(R/\lambda_{\text{Т}}\right)=\frac{\lambda_{\text{Т}}}{\lambda_{\text{П}}}\frac{\delta}{R},$$

$$\text{Bi}_*=\frac{\text{Bi}}{1-\frac{\delta}{R}+\boxed{\frac{\delta^2}{R^2}}+\frac{\mu\left(1-\boxed{\frac{\delta}{2R}}\right)}{H}},\quad \text{Bi}=\frac{\mu R}{\lambda_{\text{Т}}},\quad \upsilon=\frac{\Omega}{\omega_{\text{Т}}R\left(1-\frac{\delta}{R}+\boxed{\frac{\delta^2}{R^2}}+\frac{\mu\left(1-\boxed{\frac{\delta}{2R}}\right)}{H}\right)},$$

J_0, J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

На основі отриманого розв'язку виконано дослідження його точності на прикладі задачі конвективного нагрівання циліндра з покриттям за таких співвідношень коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності покриття і основи та умов нагріву: $\lambda_{\Pi}/\lambda_{T} = 0.5$, $\omega_{\Pi}/\omega_{T} = 1$, $\mathrm{Bi} = 1$. На рис. 1.2 показано похибку розрахунку контактної температури $\vartheta_{T}(1,\mathrm{Fo})$ залежно від відносної товщини покриття та часу. Можна зауважити, що тут по осі абсцис використовується звичайна лінійна шкала, то по осі ординат – логарифмічна. Суцільні криви описують результати розрахунків за УГУ зі збереженням лише *лінійних* членів, а штрихові криви – зі збереженням *лінійних* та *квадратичних*.



а) б)

Рис. 1.2. Похибка розрахунку контактної температури залежно
а) від відносної товщини покриття для різних моментів часу
б) від часу для деяких значень товщини покриття

З рисунку видно, що похибка розрахунку за квадратичним наближенням завжди менша, ніж за лінійним. Для товщин $\delta / R \leq 0.05$ цілком прийнятним є застосування УГУ за *лінійного* наближення, причому для дуже малих товщин $\delta / R \leq 0.01$ отримується практично ідеальна точність. Для товщин $\delta / R \geq 0.2$ при розрахунку перехідних режимів похибка як за лінійним, так і квадратичним наближенням є *неприйнятною*, бо перевищує десятки відсотків. Для товщин $0.05 < \delta / R < 0.2$ похибка за лінійним наближенням *суттєво більша* (в декілька разів), ніж за квадратичним, і, очевидно, в цьому інтервалі товщин квадратичне наближення є суттєво кращим за лінійне.

1.2. Методика визначення термонапруженого стану тіл з багатошаровими покриттями

У цьому підрозділі виведено УГУ механічного спряження з урахуванням температурних деформацій для двох випадків: ізотропного та трансверсально ізотропного покриття з використанням рівнянь теорії термопружності тонких оболонок [4, 31, 58, 192] для багатошарового покриття. Записано формули відновлення напружень в покритті через граничні значення переміщень та напружень в тілі.

1.2.1. Граничні та контактні умови задачі термопружності для покриття

Приймаємо, що на границі покриття–середовище задано вектор напружень

$$\boldsymbol{\sigma}_3^n = \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{C}} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \delta \,, \tag{1.65}$$

а на поверхнях контакту шарів покриття і покриття з тілом виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i = \overline{2,n}, \qquad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0, \tag{1.66}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3^i = \boldsymbol{\sigma}_3^{i-1} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = \overline{2,n}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_3^1 = \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0. \tag{1.67}$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}_3$ – вектор напружень, який діє на поверхні $\gamma = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{\sigma}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – орти координатного тріедра на базисній поверхні S_0 оболонки; $\mathbf{U}_i$ – вектор переміщень точок i-го шару ($i = \overline{1,n}$); $\mathbf{U}_{\mathrm{T}} = u_{\mathrm{T}}\mathbf{e}_1 + \mathrm{v}_{\mathrm{T}}\mathbf{e}_2 + w_{\mathrm{T}}\mathbf{e}_3$ – значення вектора переміщень точок тіла (підкладки) на поверхні контакту з покриттям.

Розподіл температури $t_i(\gamma)$ в кожному шарі покриття вважається заданим (визначеним за методикою, викладеною в підрозділі 1.1).

1.2.2. Узагальнені граничні умови термомеханічного спряження тіл зі середовищем через тонкі багатошарові покриття

1.2.2.1. Узагальнені граничні умови для ізотропних покрить

Рівняння рівноваги шаруватої ізотропної оболонки при відсутності масових сил з урахуванням умов контакту (1.67) і умови (1.65) записуються у вигляді [4, 58]:

$$\mathbf{C}\xi = \mathbf{B}, \tag{1.68}$$

$$\mathbf{B} = [q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, 0]^{\mathrm{T}}, \tag{1.69}$$

$$q_j = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}}(1+\delta k_1)(1+\delta k_2) - \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} \quad j = 1,2,3,$$

$$m_j = \delta\sigma_{j3}^{\mathrm{C}}(1+\delta k_1)(1+\delta k_2) \quad j = 1,2,$$

де **C** – матриця диференціальних операторів [4, 58]:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{A_1A_2}\left|\begin{matrix}
-\partial_1\left(A_2(\ )\right) & A_{1,2} & k_1A_1A_2 & 0 & 0 & 0 \\
A_{2,1} & -\partial_2\left(A_1(\ )\right) & k_2A_1A_2 & 0 & 0 & 0 \\
-A_{1,2} & -\partial_1\left(A_2(\ )\right) & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-\partial_2\left(A_1(\ )\right) & -A_{2,1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-k_1A_1A_2 & 0 & -\partial_1\left(A_2(\ )\right) & A_1A_2 & 0 & 0 \\
0 & -k_2A_1A_2 & -\partial_2\left(A_1(\ )\right) & 0 & A_1A_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\partial_1\left(A_2(\ )\right) & A_{1,2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & A_{2,1} & -\partial_2\left(A_1(\ )\right) & 0 \\
0 & 0 & 0 & -A_{1,2} & -\partial_1\left(A_2(\ )\right) & k_1 \\
0 & 0 & 0 & -\partial_2\left(A_1(\ )\right) & -A_{2,1} & -k_2
\end{matrix}\right|^{\mathrm{T}},$$

$\xi = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}]^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпець зусиль і моментів у покритті:

$$\begin{Bmatrix} N_j, N_{jl}, Q_j \\ M_j, M_{jl} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}\left\{\sigma_{jj}^i, \sigma_{jl}^i, \sigma_{j3}^i\right\}(1+k_l\gamma)\begin{Bmatrix}1\\ \gamma\end{Bmatrix}d\gamma,\ j=1,2;\ \ l=3-j, \tag{1.70}$$

$A_{j,l} = \partial A_j / \partial\alpha_l$, $\partial_j = \partial/\partial\alpha_j$, $j,l = 1,2$, дужки ( ) означають розташування операнда в відповідних виразах, тут і надалі для кривин координатних ліній базисної поверхні S_0 будемо використовувати позначення k_1 замість k_{11} та k_2 замість k_{21}.

Після виключення у рівняннях (1.68) перерізуючих сил Q_1 і Q_2, та нехтування доданками вищого порядку малості (враховуючи $k_1\delta, k_2\delta << 1$), подамо їх у трансформованому вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_j \Theta = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}}, & j = 1,2, \\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_3 \Theta = \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}], \end{cases} \tag{1.71}$$

де вектор-стовпець зусиль і моментів у покритті

$$\Theta = [N_1, N_2, S, M_1, M_2, \widetilde{M}_{12}]^{\mathrm{T}}, \tag{1.72}$$

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}, \quad \widetilde{M}_{12} = M_{12} = M_{21},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = A_1^{-1} A_2^{-1} \Big[&\partial_1 \big(A_2(\ ) \big),\ -A_{2,1},\ \partial_2 (A_1(\ )) + A_{1,2},\ k_1 \partial_1 \big(A_2(\ ) \big), \\ &-k_1 A_{2,1},\ 2k_1 \partial_2 (A_1(\ )) + 2k_2 A_{1,2} \Big], \end{aligned} \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = A_1^{-1} A_2^{-1} \Big[&-A_{1,2}, \partial_2 \big(A_1(\ ) \big),\ \partial_1 (A_2(\ )) + A_{2,1},\ -k_2 A_{1,2}, \\ &k_2 \partial_2 \big(A_1(\ ) \big),\ 2k_2 \partial_1 (A_2(\ )) + 2k_1 A_{2,1} \Big], \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} \Big[&-A_1 A_2 k_1,\ -A_1 A_2 k_2,\ 0,\ \partial_1 \Big(A_1^{-1} \partial_1 \big(A_2(\ ) \big) \Big) - \partial_2 \Big(A_2^{-1} A_{1,2}(\ ) \Big), \\ &\partial_2 \Big(A_2^{-1} \partial_2 \big(A_1(\ ) \big) \Big) - \partial_1 \Big(A_1^{-1} A_{2,1}(\ ) \Big), 2\partial_1 \partial_2 (\ ) + 2\partial_1 \Big(A_1^{-1} A_{1,2}(\ ) \Big) + 2\partial_2 \Big(A_2^{-1} A_{2,1}(\ ) \Big) \Big], \end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\mathrm{V}[\phi_1, \phi_2] = A_1^{-1} A_2^{-1} \big(\partial_1 (A_2 \phi_1) + \partial_2 (A_1 \phi_2) \big).$$

Приймаючи кінематичну гіпотезу недеформованих нормалей для всього пакету n-шарової оболонки [4], що забезпечує, зокрема, автоматичне виконання умов контакту для переміщень (1.66), запишемо співвідношення термопружності, тобто співвідношення між зусиллями, моментами і компонентами деформації базисної поверхні, з урахуванням нормальних поперечних напружень у вигляді

$$\Theta = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon} - \Theta_t + \Theta_q, \tag{1.76}$$

$$\Theta_t = [N_t, N_t, 0, M_t, M_t, 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \Theta_q = [N_q, N_q, 0, M_q, M_q, 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^{\mathrm{T}}, \tag{1.77}$$

$$N_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \beta_i}{1-\nu_i} T_i, \qquad M_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \beta_i}{1-\nu_i} T_i^*, \qquad T_i = \int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i d\gamma, \qquad T_i^* = \int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i \gamma d\gamma,$$

$$N_q = C_1 \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + C_2 \sigma_{33}^{\mathrm{T}}, \qquad\qquad M_q = D_1 \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + D_2 \sigma_{33}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & G_{21} & G_{22} & 0 \\ G_{12} & G_{11} & 0 & G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} & 0 & 0 & 2G_{23} \\ G_{21} & G_{22} & 0 & G_{31} & G_{32} & 0 \\ G_{22} & G_{21} & 0 & G_{32} & G_{31} & 2G_{23} \\ 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 & 2G_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} G_{j1} \\ G_{j2} \\ G_{j3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu_i \\ \dfrac{1-\nu_i}{2} \end{Bmatrix} (\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j), \quad j = 1,2,3, \tag{1.78}$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{\gamma_i^3 - \gamma_{i-1}^3}{\delta^2} - \frac{\gamma_i^4 - \gamma_{i-1}^4}{2\delta^3} \right), \; C_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \delta_i - C_1,$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{3}{4} \frac{\gamma_i^4 - \gamma_{i-1}^4}{\delta^2} - \frac{2}{5} \frac{\gamma_i^5 - \gamma_{i-1}^5}{\delta^3} \right), \; D_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\gamma_i^2 - \gamma_{i-1}^2}{2} - D_1.$$

Тут $\mathbf{K}$ – жорсткістна матриця пружних констант; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор-стовпець компонент деформації базисної поверхні; $\boldsymbol{\Theta}_q$ – вектор-стовпець величин (зусиль і моментів), що враховують нормальні поперечні напруження в оболонці покриття; $\boldsymbol{\Theta}_t$ – вектор-стовпець величин, які враховують теплові деформації в покритті; E_i, ν_i, β_i – модуль Юнга, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення *i*-го шару покриття ($i = \overline{1,n}$) відповідно.

Зауважимо, що врахування поперечних нормальних напружень у співвідношеннях (1.76) тут здійснено відповідно до підходу в [58, с.428], де були отримані вирази для цих напружень у вигляді полінома третього степеня.

Можливою альтернативою є застосування підходу [56], який ґрунтується на лінійному наближенні за товщиною поперечних напружень.

Підставляючи вираз (1.76) і геометричні співвідношення між компонентами деформації відлікової поверхні підкладка–покриття і переміщеннями цієї поверхні [58, с. 55; 192, с. 71]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{\Pi}[u_1, \mathrm{v}_1, w_1]^{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0, \tag{1.79}$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial_1(\,)}{A_1} & \dfrac{A_{1,2}}{A_1 A_2} & k_1 \\ \dfrac{A_{2,1}}{A_1 A_2} & \dfrac{\partial_2(\,)}{A_2} & k_2 \\ \dfrac{A_1}{A_2}\partial_2\dfrac{(\,)}{A_1} & \dfrac{A_2}{A_1}\partial_1\dfrac{(\,)}{A_2} & 0 \\ \dfrac{\partial_1\left(k_1(\,)\right)}{A_1} & \dfrac{k_2 A_{1,2}}{A_1 A_2} & -\dfrac{1}{A_1}\partial_1\left(\dfrac{\partial_1(\,)}{A_1}\right) - \dfrac{A_{1,2}}{A_1 A_2^2}\partial_2(\,) \\ \dfrac{k_1 A_{2,1}}{A_1 A_2} & \dfrac{\partial_2\left(k_2(\,)\right)}{A_2} & -\dfrac{1}{A_2}\partial_2\left(\dfrac{\partial_2(\,)}{A_2}\right) - \dfrac{A_{2,1}}{A_1^2 A_2}\partial_1(\,) \\ k_1\dfrac{A_1}{A_2}\partial_2\dfrac{(\,)}{A_1} & k_2\dfrac{A_2}{A_1}\partial_1\dfrac{(\,)}{A_2} & -\dfrac{1}{A_1 A_2}\left(\partial_1\partial_2(\,) - \dfrac{A_{1,2}}{A_1}\partial_1(\,) - \dfrac{A_{2,1}}{A_2}\partial_2(\,)\right) \end{bmatrix} \tag{1.80}$$

в рівняння рівноваги (1.71) і враховуючи неперервність переміщень на поверхні тіло–покриття (1.66), отримаємо співвідношення

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} - C_2 A_j^{-1}\partial_j \sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}_j[u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} + C_1 A_j^{-1}\partial_j \sigma_{33}^{\mathrm{C}} - A_j^{-1}\partial_j N_t, \quad j = 1,2, \\ (1 - D_2\Delta)\sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}_3[u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = (1 + D_1\Delta)\sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + \left(k_1 + k_2\right) N_t - \Delta M_t, \end{cases} \tag{1.81}$$

де
$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2}\left(\partial_1\left(\frac{A_2}{A_1}\partial_1\right) + \partial_2\left(\frac{A_1}{A_2}\partial_2\right)\right),$$

$$\mathbf{L}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K}\mathbf{\Pi}, \quad m = 1,2,3. \tag{1.82}$$

Оскільки співвідношення (1.81) пов'язують компоненти тензора напружень і вектора переміщень на границі тіла з компонентами заданого поверхневого навантаження, то їх можна трактувати як узагальнені граничні умови на механічні змінні тіла, які враховують вплив теплових деформацій у багатошаровому покритті.

1.2.2.2. Випадок відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло–ізотропне покриття

Для часткового випадку напружено-деформованого стану, при якому відсутні згинні деформації і кручення поверхні поділу тіло–покриття ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$), можна отримати спрощений варіант узагальнених граничних умов, у якому будуть присутні лише компоненти тензора напружень.

У цьому випадку в силу неперервності тангенціальних деформацій вздовж поверхні поділу тіло–покриття

$$\varepsilon_1 = e_{11}^{\mathrm{T}},\ \varepsilon_2 = e_{22}^{\mathrm{T}},\ \varepsilon_{12} = 2e_{12}^{\mathrm{T}}, \tag{1.83}$$

використовуючи співвідношення Дюгамеля–Неймана для ізотропного матеріалу підкладки

$$e_{jl}^{\mathrm{T}} = \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{jl}^{\mathrm{T}} - \frac{\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{ll}^{\mathrm{T}}\delta_{jl} + \beta_{\mathrm{T}} t_{\mathrm{T}}\delta_{jl},\ j,l = 1,2,3, \tag{1.84}$$

(де δ_{jl} – символ Кронекера, E_{T}, ν_{T}, β_{T} – модуль Юнга, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення тіла) компоненти деформації базисної поверхні оболонки покриття можна виразити лише через граничні значення напружень тіла, враховуючи позначення (1.77)),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Pi}_{\sigma}[\sigma_{11}^{\mathrm{T}}, \sigma_{22}^{\mathrm{T}}, \sigma_{33}^{\mathrm{T}}, \sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} + \left[1,1,0,0,0,0\right]^{\mathsf{T}} \beta_{\mathrm{T}} t_{\mathrm{T}} \quad \text{при } \gamma = 0, \tag{1.85}$$

де

$$\boldsymbol{\Pi}_{\sigma} = E_{\mathrm{T}}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -\nu_{\mathrm{T}} & -\nu_{\mathrm{T}} & 0 \\ -\nu_{\mathrm{T}} & 1 & -\nu_{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.86}$$

Підстановка співвідношень (1.76), (1.85) у трансформовані рівняння рівноваги (1.71) при нехтуванні членами вищого порядку малості призводить до

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} + \mathbf{p}_j[\sigma_{11}^{\mathrm{T}}, \sigma_{22}^{\mathrm{T}}, \sigma_{33}^{\mathrm{T}}, \sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} - C_2 A_j^{-1} \partial_j \sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \beta_{\mathrm{T}} A_j^{-1} \left(G_{11} + G_{12} \right) \partial_j t_{\mathrm{T}} = \\ \qquad = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} + C_1 A_j^{-1} \partial_j \sigma_{33}^{\mathrm{C}} - A_j^{-1} \partial_j N_t, \qquad j = 1,2, \\ \left(1 - D_2 \Delta\right) \sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \mathbf{p}_3[\sigma_{11}^{\mathrm{T}}, \sigma_{22}^{\mathrm{T}}, \sigma_{33}^{\mathrm{T}}, \sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} + \left(G_{11} + G_{12} \right)\left(k_1 + k_2 \right) \beta_{\mathrm{T}} t_{\mathrm{T}} - \\ \qquad - \left(G_{21} + G_{22} \right) \beta_{\mathrm{T}} \Delta t_{\mathrm{T}} = \left(1 + D_1 \Delta\right) \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + \left(k_1 + k_2 \right) N_t. \end{cases} \tag{1.87}$$

Тут використано позначення

$$\mathbf{p}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \Pi_\sigma, \quad m = 1,2,3, \tag{1.88}$$

де диференціальні оператори $\mathbf{F}_m$ визначаються формулами (1.73)-(1.75).

1.2.2.3. Узагальнені граничні умови для трансверсально ізотропних покрить

Виведення УГУ механічного спряження тіла з середовищем через тонке трансверсально ізотропне покриття здійснено на основі теорії анізотропних оболонок [4, 58, 60].

Для цього використовуємо гіпотезу Кірхгофа–Лява, однак, через відмінність між модулями Юнга трансверсально ізотропного покриття, приймаємо до уваги поперечну деформацію ε_3^i кожного шару оболонки як додатковий ступінь свободи [29, с. 67; 31, 60, с. 56; 270, 520, 586]. Тоді геометричні співвідношення мають такий вигляд ($\gamma \in [\gamma_{i-1}, \gamma_i], \;\; i = \overline{1,n}$):

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma) &= (1 + k_1\gamma) u_1(\alpha_1,\alpha_2,0) - \frac{\gamma}{A_1} \frac{\partial w_1(\alpha_1,\alpha_2,0)}{\partial \alpha_1}, \\ \mathrm{v}_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma) &= (1 + k_2\gamma) \mathrm{v}_1(\alpha_1,\alpha_2,0) - \frac{\gamma}{A_2} \frac{\partial w_1(\alpha_1,\alpha_2,0)}{\partial \alpha_2}, \\ w_i(\alpha_1,\alpha_2,\gamma) &= w_1(\alpha_1,\alpha_2,0) + \overline{\varepsilon_3 \gamma}^{\,i}(\alpha_1,\alpha_2,\gamma), \end{aligned} \tag{1.89}$$

де

$$\overline{\varepsilon_3 \gamma}^{\,i}(\alpha_1,\alpha_2,\gamma) = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \varepsilon_3^j(\alpha_1,\alpha_2) + (\gamma - \gamma_{i-1}) \varepsilon_3^i(\alpha_1,\alpha_2), \tag{1.90}$$

а відповідні співвідношення для деформацій у випадку тонкостінної оболонки

$$\begin{aligned} e_{11}^i &= \varepsilon_1 + \kappa_1\gamma + k_1\overline{\varepsilon_3\gamma}^{\,i} , \\ e_{22}^i &= \varepsilon_2 + \kappa_2\gamma + k_2\overline{\varepsilon_3\gamma}^{\,i} , \\ e_{33}^i &= \varepsilon_3^i , \\ e_{12}^i &= 2\varepsilon_{12} + 2\kappa_{12}\gamma. \end{aligned} \tag{1.91}$$

де компоненти деформації $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_{12},\ \kappa_1,\ \kappa_2\ ,\kappa_{12}$ віднесені до базисної поверхні S_0.

Рівняння рівноваги шаруватої анізотропної оболонки в такому випадку узагальнюють рівняння (1.68) так [31, 270, 520]:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{B}}, \tag{1.92}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = [N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{23}]^{\mathsf{T}}$ – вектор-стовпець зусиль і моментів в оболонці. Порівняно з випадком ізотропного покриття, тут додатково враховано нормальне поперечне зусилля N_3 і моменти першого порядку напружень поперечного зсуву M_{j3}, що виникають у покритті:

$$N_3 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \sigma_{33}^i (1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma) d\gamma , \tag{1.93}$$

$$M_{j3} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \sigma_{j3}^i \gamma (1 + k_{3-j}\gamma) d\gamma ,\ j = 1,2 . \tag{1.94}$$

Матриця диференціальних операторів $\tilde{\mathbf{C}}$ має вигляд [31, 270, 520]:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{A_1A_2}\begin{vmatrix} -\partial_1\left(A_2(\,)\right) & A_{1,2} & k_1A_1A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & -\partial_2\left(A_1(\,)\right) & k_2A_1A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1A_2 \\ -A_{1,2} & -\partial_1\left(A_2(\,)\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_2\left(A_1(\,)\right) & -A_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1A_1A_2 & 0 & -\partial_1\left(A_2(\,)\right) & A_1A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2A_1A_2 & -\partial_2\left(A_1(\,)\right) & 0 & A_1A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1\left(A_2(\,)\right) & A_{1,2} & A_1A_2k_1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,1} & -\partial_2\left(A_1(\,)\right) & A_1A_2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{1,2} & -\partial_1\left(A_2(\,)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_2\left(A_1(\,)\right) & -A_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1\left(A_2(\,)\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2\left(A_1(\,)\right) \end{vmatrix}^{\mathsf{T}} . \tag{1.95}$$

Вектор-стовпець $\tilde{\mathbf{B}}$ визначається формулою

$$\tilde{\mathbf{B}} = [q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, m_3]^{\mathrm{T}}, \tag{1.96}$$

де

$$m_3 = \delta\sigma_{33}^{\mathrm{C}}(1+\delta k_1)(1+\delta k_2). \tag{1.97}$$

Для переходу до трансформованих рівнянь рівноваги попередньо приймемо квадратичний розподіл для зсувних напружень σ_{j3}^{i} за товщиною оболонки [4, 58]:

$$\sigma_{j3}^{i}(\gamma) = B_0^i + B_1^i\gamma + B_2^i\gamma^2, \ \ 0 \le \gamma \le \delta, \ \ j = 1,\ 2.$$

Задовольнивши граничні умови для зсувних напружень на межі із середовищем (1.65), умови контакту для цих напружень (1.67), означення для перерізуючої сили Q_j (1.70) (з точністю до малих доданків), отримаємо подання

$$\sigma_{j3}^{i}(\gamma) = Q_j\frac{6\gamma(\delta-\gamma)}{\delta^3} + \sigma_{j3}^{\mathrm{C}}\left(-\frac{2\gamma}{\delta} + \frac{3\gamma^2}{\delta^2}\right) + \sigma_{j3}^{\mathrm{T}}\left(1 - \frac{4\gamma}{\delta} + \frac{3\gamma^2}{\delta^2}\right), \ j = 1,\ 2. \tag{1.98}$$

Це представлення зсувних напружень (1.98) дає можливість виразити моменти M_{j3} з формули (1.94) через перерізуючі зусилля і значення напружень на поверхнях покриття–середовище і покриття–тіло (приймаючи до уваги $k_1\delta,\ k_2\delta << 1$):

$$M_{j3} = Q_j\frac{\delta}{2} + \left(\sigma_{j3}^{\mathrm{C}} - \sigma_{j3}^{\mathrm{T}}\right)\frac{\delta^2}{12}. \tag{1.99}$$

Підставляючи (1.99) в рівняння рівноваги (1.92), виключаючи перерізуючі сили Q_1 і Q_2, та нехтуючи доданками вищого порядку малості (враховуючи $k_1\delta,\ k_2\delta << 1$), подамо їх у трансформованому вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_j\mathbf{\Theta} = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}}, \qquad j = 1,2, \\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}_3\mathbf{\Theta} = \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}], \\ \dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}}, \sigma_{23}^{\mathrm{T}}] - \mathbf{F}_4\mathbf{\Theta} - \mathrm{N}_3 = -\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{C}} - \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}], \end{cases} \tag{1.100}$$

де
$$\mathbf{F}_4 = \left[-\frac{k_1\delta}{2},\ -\frac{k_2\delta}{2},\ 0,\ k_1,\ k_2,\ 0 \right]. \tag{1.101}$$

Співвідношення Дюгамеля–Неймана для трансверсально ізотропних шарів покриття–оболонки з урахуванням температурної залежності коефіцієнтів лінійного температурного розширення (КЛТР) запишемо так [31, с. 86]

$$\begin{gathered} \sigma_{jj}^i = \sum_{l=1}^{3} B_{jl}^i \left(e_{ll}^i - \Phi_l^i \left(t^i \right) \right), \quad j = 1,2,3, \\ \sigma_{12}^i = B_{66}^i e_{12}^i, \end{gathered} \tag{1.102}$$

де $B_{jl} = B_{lj}$ – пружні коефіцієнти трансверсально ізотропного матеріалу, $\Phi_l^i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \beta_l^i(t')dt'$, $l = 1,2,3$; $i = \overline{1,n}$; $\beta_1 = \beta_2$ і β_3 – КЛТР у площині ізотропії та вздовж нормалі до неї відповідно.

Вирази для пружних коефіцієнтів B_{jl}^i для випадку трансверсально ізотропного матеріалу випливають із загальних формул для анізотропного матеріалу [60, с. 54, 231, с. 87]

$$B_{11}^i = \bar{\Omega}_i^{-1} \left(a_{11}^i a_{33}^i - \left(a_{13}^i \right)^2 \right), \quad B_{12}^i = \bar{\Omega}_i^{-1} \left(\left(a_{13}^i \right)^2 - a_{12}^i a_{33}^i \right), \quad B_{13}^i = \bar{\Omega}_i^{-1} \left(a_{12}^i - a_{11}^i \right) a_{13}^i,$$

$$B_{33}^i = \bar{\Omega}_i^{-1} \left(\left(a_{11}^i \right)^2 - \left(a_{12}^i \right)^2 \right),\ B_{66}^i = \left(a_{66}^i \right)^{-1},\ \Omega_i = \left(a_{11}^i - a_{12}^i \right) \left(\left(a_{11}^i + a_{12}^i \right) a_{33}^i - 2 \left(a_{13}^i \right)^2 \right),$$

де пружні константи a_{jl}^i виражаються через інженерні константи (модулі Юнга, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона):

$$a_{11}^i = 1 / E_1^i,\ a_{33}^i = 1 / E_3^i,\ a_{12}^i = -\nu_{21}^i / E_1^i,\ a_{13}^i = -\nu_{31}^i / E_1^i = -\nu_{13}^i / E_3^i,\ a_{66}^i = 1 / G_{12}^i .$$

Тут E_1^i та E_3^i – модулі Юнга в площині ізотропії і в напрямку, нормальному до неї, ν_{21}^i – коефіцієнт Пуассона, який характеризує поперечний стиск у площині ізотропії, коли навантаження прикладено в площині ізотропії, ν_{13}^i – коефіцієнт Пуассона, який характеризує поперечний стиск у площині ізотропії, коли навантаження прикладено нормально до площини ізотропії.

Використовуючи означення (1.70), співвідношення Дюгамеля–Неймана (1.102), формули для деформації (1.90), (1.91) і нехтуючи доданками вищого порядку малості, отримаємо співвідношення термопружності у вигляді

$$\boldsymbol{\Theta} = \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_3^i \varepsilon_3^i - \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_t, \tag{1.103}$$

$$N_3 = \left[G_{13}^{(0)}, G_{13}^{(0)}, 0, G_{13}^{(1)}, G_{13}^{(1)}, 0 \right] \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} \left[G_{33}^{i(0)} + \left(k_1 + k_2\right) \tilde{G}_{13}^{i(1)} \right] \varepsilon_3^i - N_{3t}. \tag{1.104}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_t = [N_{1t}, N_{1t}, 0, M_t, M_t, 0]^{\mathsf{T}}, \tag{1.105}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1t}, M_t \\ N_{3t} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \begin{Bmatrix} (B_{11}^i + B_{12}^i)\Phi_1^i + B_{13}^i \Phi_3^j \\ 2B_{11}^i \Phi_1^i + B_{33}^i \Phi_3^j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1, \gamma \\ 1 \end{Bmatrix} d\gamma, \tag{1.106}$$

де

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} G_{11}^{(0)} & G_{12}^{(0)} & 0 & G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} & 0 \\ G_{12}^{(0)} & G_{11}^{(0)} & 0 & G_{12}^{(1)} & G_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66}^{(0)} - k_2 G_{66}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} & 0 & G_{11}^{(2)} & G_{12}^{(2)} & 0 \\ G_{12}^{(1)} & G_{11}^{(1)} & 0 & G_{12}^{(2)} & G_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66}^{(1)} & 0 & 0 & G_{66}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{1.107}$$

$$\mathbf{K}_3^i = \begin{bmatrix} G_{13}^{i(0)} + k_1 \tilde{G}_{11}^{i(1)} + k_2 \tilde{G}_{12}^{i(1)} + \delta_i \sum\limits_{j=i+1}^{n} \left(k_1 G_{11}^{j(0)} + k_2 G_{12}^{j(0)} \right) \\ G_{13}^{i(0)} + k_1 \tilde{G}_{12}^{i(1)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(1)} + \delta_i \sum\limits_{j=i+1}^{n} \left(k_1 G_{12}^{j(0)} + k_2 G_{11}^{j(0)} \right) \\ 0 \\ G_{13}^{i(1)} + k_1 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + \delta_i \sum\limits_{j=i+1}^{n} \left(k_1 G_{11}^{j(1)} + k_2 G_{12}^{j(1)} \right) \\ G_{13}^{i(1)} + k_1 \tilde{G}_{12}^{i(2)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + \delta_i \sum\limits_{j=i+1}^{n} \left(k_1 G_{12}^{j(1)} + k_2 G_{11}^{j(1)} \right) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.108}$$

$$G_{jl}^{i(m)} = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{jl}^i \gamma^m d\gamma, \quad G_{jl}^{(m)} = \int_0^{\delta} B_{jl} \gamma^m d\gamma,$$
$$i = \overline{1,n}, \quad m = 0,1,2, \quad jl = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 66, \tag{1.109}$$

$$\tilde{G}_{1q}^{i(m)} = G_{1q}^{i(m)} - \gamma_{i-1} G_{1q}^{i(m-1)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad m = 1,2, \quad q = 1,2,3. \tag{1.110}$$

Підставимо співвідношення термопружності (1.103), (1.104) і геометричні співвідношення (1.79) між компонентами деформації відлікової поверхні підкладка–покриття і переміщеннями цієї поверхні в трансформовані рівняння рівноваги (1.100), враховуючи неперервність переміщень на поверхні тіло–покриття (1.66) та заміну позначення $\mathbf{\Theta}_t$ на $\tilde{\mathbf{\Theta}}_t$:

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{L}}_j [u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{j\varepsilon}^i \varepsilon_3^i = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} - \mathbf{F}_j \tilde{\mathbf{\Theta}}_t , \qquad j = 1,2, \\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{L}}_3 [u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{3\varepsilon}^i \varepsilon_3^i = \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] - \mathbf{F}_3 \tilde{\mathbf{\Theta}}_t, \\ -\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \dfrac{\delta^2}{12} \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}}, \sigma_{23}^{\mathrm{T}}] + \tilde{\mathbf{L}}_4 [u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{4\varepsilon}^i \varepsilon_3^i = \\ \qquad = \dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \dfrac{\delta^2}{12} \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \tilde{\mathbf{\Theta}}_t. \end{cases} \tag{1.111}$$

Тут

$$\tilde{\mathbf{L}}_m = -\mathbf{F}_m \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{\Pi}, \tag{1.112}$$

$$\mathrm{p}_{m\varepsilon}^i = -\mathbf{F}_m \mathbf{K}_3^i, \quad m = 1,2,3, \tag{1.113}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_4 = \left[\mathbf{F}_4 \tilde{\mathbf{K}} + \left[G_{13}^{(0)}, G_{13}^{(0)}, 0, G_{13}^{(1)}, G_{13}^{(1)}, 0 \right] \right] \mathbf{\Pi}, \tag{1.114}$$

$$\mathrm{p}_{4\varepsilon}^i = \mathbf{F}_4 \mathbf{K}_3^i + G_{33}^{i(0)} + \left(k_1 + k_2 \right) \tilde{G}_{13}^{i(1)}, \tag{1.115}$$

де диференціальні оператори $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{\Pi}$ визначаються формулами (1.73)-(1.75) та (1.80) відповідно.

Використовуючи контактні умови (1.67), співвідношення (1.102) для σ_{33}^{i} і формули (1.91), отримуємо вирази для поперечних деформацій i-го шару через поперечну деформацію першого шару та компоненти деформації базисної оболонки покриття:

$$\varepsilon_3^i = \mathrm{D}^i\,\varepsilon_3^1 + \mathrm{F}_1^i\,\varepsilon_1 + \mathrm{F}_2^i\,\varepsilon_2 + \mathrm{G}_1^i\,\kappa_1 + \mathrm{G}_2^i\,\kappa_2 + \eta^i\,,\quad i = \overline{2,n}\,; \tag{1.116}$$

де коефіцієнти $\mathrm{Y}^i = \left[\mathrm{D}^i, \mathrm{F}_1^i, \mathrm{F}_2^i, \mathrm{G}_1^i, \mathrm{G}_2^i, \eta^i\right]$ визначаються так:

$$\mathrm{Y}^i = \frac{1}{B_{33}^i}\left\{B_{33}^{i-1}\mathrm{Y}^{i-1} - \overline{B}_{13}^i\left(k_1 + k_2\right)\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\mathrm{Y}^j - \overline{B}_{13}^i\left[0,1,1,\gamma_{i-1},\gamma_{i-1},-\frac{\overline{B\Phi}_{13}^{\,i}}{\overline{B}_{13}^i}\right]\right\}, \tag{1.117}$$

а

$$\mathrm{Y}^1 = \left[1,0,0,0,0,0\right], \tag{1.118}$$

$$\overline{B}_{13}^i = B_{13}^i - B_{13}^{i-1}, \tag{1.119}$$

$$\begin{gathered}\overline{B\Phi}_{13}^{\,i} = 2B_{13}^i\Phi_1^i\left(t^i\Big|_{\gamma=\gamma_{i-1}}\right) + B_{33}^i\Phi_3^i\left(t^i\Big|_{\gamma=\gamma_{i-1}}\right) - \\ - 2B_{13}^{i-1}\Phi_1^{i-1}\left(t^{i-1}\Big|_{\gamma=\gamma_{i-1}}\right) - B_{33}^{i-1}\Phi_3^{i-1}\left(t^{i-1}\Big|_{\gamma=\gamma_{i-1}}\right).\end{gathered} \tag{1.120}$$

Підставимо формули (1.116) в рівняння (1.111), використовуючи позначення (1.77), співвідношення (1.79) та умову неперервності (1.66):

$$\begin{cases}\sigma_{j3}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}_j'[u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}\,\varepsilon_3^1 = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} - \mathbf{F}_j\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_t - \tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}^{\eta}\,, \qquad j = 1,2, \\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}_3'[u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}\,\varepsilon_3^1 = \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{c}}, \sigma_{23}^{\mathrm{c}}] - \mathbf{F}_3\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_t - \tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\eta}, \\ -\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}}, \sigma_{23}^{\mathrm{T}}] + \mathbf{L}_4'[u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}\,\varepsilon_3^1 = \\ \qquad = \dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_t - \tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}\,.\end{cases} \tag{1.121}$$

де

$$\mathbf{L}_m' = \tilde{\mathbf{L}}_m + \left[\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_1},\ \tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_2},\ 0,\ \tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{G}_1},\ \tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{G}_2},\ 0\right]\boldsymbol{\Pi}, \tag{1.122}$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{X} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{p}_{m\varepsilon}^{i}\,X^i\,,\ \ m = 1,2,3,4\,,\ X = \mathrm{D},\ \eta,\ \mathrm{F}_l,\ \mathrm{G}_l,\ \ l = 1,2\,. \tag{1.123}$$

Виключаючи ε_3^1 зі співвідношень (1.121), остаточно отримуємо

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} + \dfrac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \dfrac{\delta^2}{12} d_j \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}}, \sigma_{23}^{\mathrm{T}}] + \tilde{\tilde{\mathbf{L}}}_j [u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ \qquad = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} - \dfrac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathrm{C}} - \dfrac{\delta^2}{12} d_j \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + f_{jt}, \quad j = 1,2, \\ \left(1 + \dfrac{\delta}{2} d_3\right) \sigma_{33}^{\mathrm{T}} - \dfrac{\delta^2}{12} d_3 \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}}, \sigma_{23}^{\mathrm{T}}] + \tilde{\tilde{\mathbf{L}}}_3 [u_{\mathrm{T}}, \mathrm{v}_{\mathrm{T}}, w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ \qquad = \left(1 - \dfrac{\delta}{2} d_3\right) \sigma_{33}^{\mathrm{C}} - \dfrac{\delta^2}{12} d_3 \, \mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}, \sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + f_{3t}. \end{cases} \tag{1.124}$$

де

$$d_j = \frac{\tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}^{\mathrm{D}}}{\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}}, \tag{1.125}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{L}}}_j = \mathbf{L}'_j - d_j \mathbf{L}'_4, \quad j = 1,2,3, \tag{1.126}$$

$$\begin{aligned} f_{jt} = \left(\frac{\delta}{2} d_j \left(k_1 + k_2\right) - A_j^{-1} \partial_j\right) N_{1t} - d_j N_{3t} - \left(d_j \left(k_1 + k_2\right) + A_j^{-1} k_j \partial_j\right) M_t - \\ - \tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}^{\eta} + d_j \, \tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}, \quad j = 1,2, \end{aligned} \tag{1.127}$$

$$f_{3t} = \left(1 + \frac{\delta}{2} d_3\right) \left(k_1 + k_2\right) N_{1t} - d_3 N_{3t} - \left(d_3 \left(k_1 + k_2\right) + \Delta\right) M_t - \tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\eta} + d_3 \, \tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}. \tag{1.128}$$

Отримані співвідношення (1.124) слугують УГУ на механічні змінні тіла для випадку трансверсально ізотропного покриття.

1.2.2.4. Випадок відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло–трансверсально ізотропне покриття

Як і у параграфі 1.2.2.2, для часткового випадку напружено-деформованого стану, при якому відсутні згинні деформації і кручення поверхні поділу тіло–покриття ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$), можна отримати спрощений варіант УГУ, у якому будуть присутні лише компоненти тензора напружень.

У цьому випадку в силу неперервності тангенціальних деформацій вздовж поверхні поділу тіло–покриття (1.83) компоненти деформації базисної поверхні оболонки покриття можна виразити лише через граничні значення напружень тіла за формулами (1.85). Підстановка співвідношень (1.103), (1.104), (1.85) у трансформовані рівняння рівноваги (1.100) приводить до

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{p}}_j[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} + p_{jt}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{p}_{j\varepsilon}^{i}\varepsilon_3^i = \sigma_{j3}^{\mathrm{C}} - \mathbf{F}_j\tilde{\mathbf{\Theta}}_t, \quad j=1,2, \\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \tilde{\mathbf{p}}_3[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} + p_{3t}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{p}_{3\varepsilon}^{i}\varepsilon_3^i = \sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \delta\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}] - \mathbf{F}_3\tilde{\mathbf{\Theta}}_t, \\ -\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{T}} + \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{T}}] + \tilde{\mathbf{p}}_4[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}} + p_{4t}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{p}_{4\varepsilon}^{i}\varepsilon_3^i = \\ \qquad\qquad = \dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{C}} + \dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4\tilde{\mathbf{\Theta}}_t. \end{cases}$$

(1.129)

Тут використано позначення

$$\tilde{\mathbf{p}}_m = -\mathbf{F}_m\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{\Pi}_\sigma, \quad m=1,2,3, \quad \tilde{\mathbf{p}}_4 = \left[\mathbf{F}_4\tilde{\mathbf{K}} + \left[G_{13}^{(0)},G_{13}^{(0)},0,G_{13}^{(1)},G_{13}^{(1)},0\right]\right]\mathbf{\Pi}_\sigma, \tag{1.130}$$

$$\mathbf{p}_{jt} = -A_j^{-1}\left[G_{11}^{(0)} + G_{12}^{(0)} + k_j\left(G_{11}^{(1)} + G_{12}^{(1)}\right)\right]\partial_j \quad j=1,2, \tag{1.131}$$

$$\mathbf{p}_{3t} = \left(k_1+k_2\right)\left(G_{11}^{(0)} + G_{12}^{(0)}\right) - \left(G_{11}^{(1)} + G_{12}^{(1)}\right)\Delta, \tag{1.132}$$

$$\mathbf{p}_{4t} = 2G_{13}^{(0)} + \left(k_1+k_2\right)\left(\tilde{G}_{11}^{(1)} + \tilde{G}_{12}^{(1)}\right), \tag{1.133}$$

$$\tilde{G}_{1q}^{(m)} = G_{1q}^{(m)} - 0.5\delta G_{1q}^{(m-1)}, \quad m=1,2, \quad q=1,2. \tag{1.134}$$

а $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{\Pi}_\sigma$, $\mathrm{p}_{m\varepsilon}^{i}$, $G_{1l}^{(m)}$, $\tilde{G}_{1l}^{(m)}$ визначаються формулами (1.73)-(1.75), (1.101), (1.86), (1.113), (1.115), (1.109), (1.110) відповідно.

Рекурентні співвідношення (1.116) для поперечних деформацій i-го шару для розглядуваної ситуації $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$ приймуть вигляд

$$\varepsilon_3^i = \mathrm{D}^i\,\varepsilon_3^1 + \mathrm{F}_1^i\,\varepsilon_1 + \mathrm{F}_2^i\,\varepsilon_2 + \eta^i, \quad i = \overline{2,n}, \tag{1.135}$$

де коефіцієнти $\tilde{\mathrm{Y}}^i = \left[\mathrm{D}^i,\mathrm{F}_1^i,\mathrm{F}_2^i,\eta^i\right]$ визначаються так:

$$\tilde{\mathrm{Y}}^{i}=\frac{1}{B_{33}^{i}}\left\{B_{33}^{i-1}\tilde{\mathrm{Y}}^{i-1}-\overline{B}_{13}^{i}\left(k_1+k_2\right)\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\tilde{\mathrm{Y}}^{j}-\overline{B}_{13}^{i}\left[0,1,1,-\frac{\overline{B\Phi}_{13}^{i}}{\overline{B}_{13}^{i}}\right]\right\},\qquad(1.136)$$

$$\tilde{\mathrm{Y}}^{1}=\left[1,0,0,0\right],\qquad(1.137)$$

а $\overline{B}_{13}^{i}$, $\overline{B\Phi}_{13}^{i}$ знаходяться за формулами (1.119) і (1.120).

Підставимо формули (1.135) в рівняння (1.129), використовуючи позначення (1.77) та формулу (1.85). Тоді отримаємо

$$\begin{cases}\sigma_{j3}^{\mathrm{T}}+\mathbf{p}'_j[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}}+p'_{jt}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}+\tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}^{\mathrm{D}}\,\varepsilon_3^1=\sigma_{j3}^{\mathrm{C}}-\mathbf{F}_j\tilde{\mathbf{\Theta}}_t-\tilde{\mathrm{p}}_{j\varepsilon}^{\eta}, \qquad j=1,2,\\ \sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\mathbf{p}'_3[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}}+p'_{3t}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}+\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{D}}\,\varepsilon_3^1=\sigma_{33}^{\mathrm{C}}+\delta\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}]-\mathbf{F}_3\tilde{\mathbf{\Theta}}_t-\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\eta},\\ -\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{T}}]+\mathbf{p}'_4[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}}+p'_{4t}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}+\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}\,\varepsilon_3^1=\\ \qquad=\dfrac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathrm{C}}+\dfrac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}]+N_{3t}+\mathbf{F}_4\tilde{\mathbf{\Theta}}_t-\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta},\end{cases}\qquad(1.138)$$

де
$$\mathbf{p}'_m=\tilde{\mathbf{p}}_m+\left[\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_1},\ \tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right]\mathbf{\Pi}_{\sigma},\qquad(1.139)$$

$$p'_{mt}=p_{mt}+\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_1}+\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_2},\ \ m=1,2,3,4.\qquad(1.140)$$

Виключаючи ε_3^1 зі співвідношень (1.138), остаточно одержимо

$$\begin{cases}\sigma_{j3}^{\mathrm{T}}+\dfrac{\delta}{2}d_j\sigma_{33}^{\mathrm{T}}-\dfrac{\delta^2}{12}d_j\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{T}}]+\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_j[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}}+\overline{p}_{jt}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}=\\ \qquad=\sigma_{j3}^{\mathrm{C}}-\dfrac{\delta}{2}d_j\sigma_{33}^{\mathrm{C}}-\dfrac{\delta^2}{12}d_j\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}]+f_{jt},\ \ j=1,2,\\ \left(1+\dfrac{\delta}{2}d_3\right)\sigma_{33}^{\mathrm{T}}-\dfrac{\delta^2}{12}d_3\,\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{T}}]+\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_3[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathsf{T}}+\overline{p}_{3t}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}=\\ \qquad=\left(1-\dfrac{\delta}{2}d_3\right)\sigma_{33}^{\mathrm{C}}-\delta\left(1+\dfrac{\delta d_3}{12}\right)\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}]+f_{3t},\end{cases}\qquad(1.141)$$

де
$$\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_j=\mathbf{p}'_j-d_j\mathbf{p}'_4,\ \ j=1,2,3,\qquad(1.142)$$

$$\overline{p}_{jt}=p'_{jt}-d_jp'_{4t},\qquad(1.143)$$

1.2.2.5. Порівняльний аналіз отриманих узагальнених граничних умов термомеханічного спряження

Зауважимо, що здійснена вище побудова УГУ узагальнює підхід, започаткований в роботах Я.С. Підстригача та П.Р. Шевчука [194-196] для одношарового ізотропного покриття на випадок багатошарових ізотропних та трансверсально ізотропних покрить.

Відзначимо, що для цього виведення на відміну від [194-196, 112, 187, 150] характерне врахування нормальних поперечних напружень у співвідношеннях термопружності (1.76). Пояснюється це тим, що специфічною особливістю більшості реальних задач про навантаження елементів конструкцій з тонкими покриттями є близькість значень нормальних поперечних напружень на границі тіла з покриттям і з середовищем саме завдяки малості товщини покриття порівняно з відповідним розміром тіла [63]. Тому через співмірність значень трьох головних компонент тензора напружень необхідно відмовитися від статичної гіпотези Кірхгофа–Лява.

Крім того, можна зауважити, що у цих роботах УГУ були сформульовані як сукупність 1) співвідношень для стрибка напружень через область покриття, що включають вирази для моментів і зусиль у покритті, 2) співвідношень для моментів і зусиль через деформації серединної поверхні оболонки покриття, 3) умови рівності переміщень на поверхнях поділу покриття–середовище, покриття–тіло та серединній поверхні оболонки, що моделює покриття. Явні вирази УГУ через граничні значення шуканих функцій у тілі, а саме напружень та переміщень, записуються лише у випадках конкретних задач. Зокрема, для центральносиметричних навантаження і нагріву кулі з одношаровим однорідним покриттям, УГУ (1.81) з відповідним конкретизованим виразом операторів в (1.82), з точністю до урахування поперечних навантажень, співпадає з УГУ, наведеною в [195]. Хоча для випадків задач для циліндричного [86, 150, 198] та пластинчатого покрить [187, 189, 315] вирази для УГУ (1.81) не співпадають з відповідними УГУ у цих роботах, що пов’язано з вибором координатної базисної поверхні: при розгляді однорідних оболонок в якості базисної звичайно вибирається серединна поверхня, що дає можливість у співвідношеннях (1.76) між зусиллями та моментами в оболонці роз’єднати тангенціальні та згинні деформації [4, 58], а при дослідженні шаруватих оболонок координатну поверхню вибирають з інших міркувань, в даній роботі як поверхню поділу тіло–покриття. Це ж стосується і порівняння з УГУ для одношарових однорідних покрить в [3, 262].

1.2.3. Визначення термонапруженого стану покрить

1.2.3.1. Випадок ізотропних покрить

Після визначення напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії пружності з використанням одного з варіантів УГУ (1.81) чи (1.87) можна знайти напружений стан у покритті за допомогою формул відновлення через граничні значення компонентів тензора напружень і вектора переміщень.

Зі співвідношень Дюгамеля–Неймана для ізотропного покриття [24, с. 215; 190, с. 17, 19]

$$\sigma_{jl}^{i} = \frac{E_i}{1+\nu_i} e_{jl}^{i} + \left(\frac{E_i \nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left(e_{11}^{i} + e_{22}^{i} + e_{33}^{i} \right) - \frac{\beta_i E_i}{1-2\nu_i} t_i \right) \delta_{jl}, \; j,l = 1,2,3 \quad (1.144)$$

(де δ_{jl} – символ Кронекера) і виразів для деформації у випадку тонкостінних оболонок

$$e_{11}^{i} = \varepsilon_1 + \kappa_1 \gamma, \;\; e_{22}^{i} = \varepsilon_2 + \kappa_2 \gamma, \;\; e_{12}^{i} = 2\left(\varepsilon_{12} + \kappa_{12} \gamma \right) \quad (1.145)$$

отримуємо вирази для нормальних і дотичних тангенціальних напружень через компоненти тангенціальної деформації та поперечні напруження (аналогічно [4, с. 112; 58, с. 426])

$$\sigma_{mm}^{i}(\gamma)=\frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\varepsilon_m+\nu_i\varepsilon_{3-m}+\left(\kappa_m+\nu_i\kappa_{3-m}\right)\gamma\right)+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{33}^{i}(\gamma)-$$
$$-\frac{E_i}{1-\nu_i}\beta_i\left(t_i(\gamma)-t_{i0}(\gamma)\right),\quad m=1,2, \tag{1.146}$$

$$\sigma_{12}^{i}(\gamma)=\frac{2E_i}{1+\nu_i}\left(\varepsilon_{12}+\kappa_{12}\gamma\right),\qquad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{1.147}$$

Постулюючи квадратичний розподіл поперечних напружень за товщиною покриття [58, с. 428], записуємо формулу для їх визначення:

$$\sigma_{33}^{i}(\gamma)=\frac{\sigma_{33}^{\mathrm{C}}+\sigma_{33}^{\mathrm{T}}}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\left(3-\left(1-\frac{2\gamma}{\delta}\right)^{2}\right)\frac{\sigma_{33}^{\mathrm{C}}-\sigma_{33}^{\mathrm{T}}}{2}. \tag{1.148}$$

В силу неперервності переміщень на поверхні поділу тіло–покриття (1.66) з (1.79) випливає

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{\Pi}[u_{\mathrm{T}},\mathrm{v}_{\mathrm{T}},w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\quad \text{при}\quad \gamma=0. \tag{1.149}$$

Отже, поперечні нормальні напруження в покритті знаходяться за формулою (1.148), тангенціальні напруження – за формулами (1.146), (1.147), де компоненти деформації відлікової поверхні поділу тіло–покриття пов’язані з переміщеннями цієї поверхні співвідношеннями (1.149).

У випадку відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло–покриття $(\kappa_1=\kappa_2=\kappa_{12}=0)$ з (1.146) та (1.147), використовуючи неперервність тангенціальних деформацій вздовж поверхні поділу покриття–тіло (1.83) та співвідношення Дюгамеля–Неймана для тіла (1.84), отримаємо наступні формули для визначення тангенціальних напружень у покритті:

$$\sigma_{mm}^{i}(\gamma)=\frac{E_i}{E_{\mathrm{T}}(1-\nu_i^2)}\left[(1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}})\sigma_{mm}^{\mathrm{T}}+(\nu_i-\nu_{\mathrm{T}})\sigma_{ll}^{\mathrm{T}}-\nu_{\mathrm{T}}(1+\nu_i)\sigma_{33}^{\mathrm{T}}\right]+$$
$$+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{33}^{i}(\gamma)+\frac{E_i}{1-\nu_i}\left(\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}-\beta_i t_i(\gamma)\right), \tag{1.150}$$

$$\sigma_{12}^{i}(\gamma)=\frac{E_i(1+\nu_{\mathrm{T}})}{E_{\mathrm{T}}(1+\nu_i)}\sigma_{12}^{\mathrm{T}},\quad m=1,2,\ \ l=3-m,\quad i=\overline{1,n},\quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i. \tag{1.151}$$

Поперечні напруження у цьому випадку знаходимо за формулою (1.148).

1.2.3.2. Випадок трансверсально ізотропних покрить

Після знаходження напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії пружності і використанні одного з варіантів УГУ (1.124) чи (1.141) знаходимо напружений стан у покритті за допомогою формул відновлення.

У цьому випадку, підставляючи вирази для деформацій (1.91) та (1.90) у співвідношення Дюгамеля–Неймана (1.102), отримуємо такі вирази для нормальних і дотичних тангенціальних та поперечних нормальних напружень через компоненти тангенціальної деформації поверхні поділу покриття–тіло та поперечну деформацію шарів покриття

$$\sigma^i_{mm}(\gamma) = B^i_{11}\varepsilon_m + B^i_{12}\varepsilon_{3-m} + B^i_{13}\varepsilon^i_3 + \left(B^i_{11}\kappa_m + B^i_{12}\kappa_{3-m}\right)\gamma + \\ + \left(B^i_{11}k_m + B^i_{12}k_{3-m}\right)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\varepsilon^j_3(\alpha_1,\alpha_2) + (\gamma-\gamma_{i-1})\varepsilon^i_3(\alpha_1,\alpha_2)\right) - \sum_{l=1}^{3} B^i_{ml}\Phi^i_l\left(t^i\right), \tag{1.152}$$

$$\sigma^i_{33}(\gamma) = B^i_{13}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) + B^i_{13}\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\gamma + B^i_{33}\varepsilon^i_3 + \\ + B^i_{13}\left(k_1+k_2\right)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\varepsilon^j_3(\alpha_1,\alpha_2) + (\gamma-\gamma_{i-1})\varepsilon^i_3(\alpha_1,\alpha_2)\right) - \sum_{l=1}^{3} B^i_{3l}\Phi^i_l\left(t^i\right), \tag{1.153}$$

$$\sigma^i_{12}(\gamma) = 2B^i_{66}\left(\varepsilon_{12} + \kappa_{12}\gamma\right), \quad m=1,2, \quad i=\overline{1,n}, \quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i. \tag{1.154}$$

Підставимо вираз (1.116) для поперечної деформації в (1.152), (1.153):

$$\sigma^i_{mm}(\gamma) = B^i_{11}\varepsilon_m + B^i_{12}\varepsilon_{3-m} + \left(B^i_{11}\kappa_m + B^i_{12}\kappa_{3-m}\right)\gamma + \\ .+\sum_{s=1}^{2}\left\{\left[B^i_{13}\,\mathrm{F}^i_s + \left(B^i_{11}k_m + B^i_{12}k_{3-m}\right)\overline{\mathrm{F}}_s(\gamma)\right]\varepsilon_s + \left[B^i_{13}\mathrm{G}^i_s + \left(B^i_{11}k_m + B^i_{12}k_{3-m}\right)\overline{\mathrm{G}}_s(\gamma)\right]\kappa_s\right\} + \quad . \\ + \left[B^i_{13}\,\mathrm{D}^i + \left(B^i_{11}k_m + B^i_{12}k_{3-m}\right)\overline{\mathrm{D}}(\gamma)\right]\varepsilon^1_3 + B^i_{13}\eta^i + \left(B^i_{11}k_m + B^i_{12}k_{3-m}\right)\overline{\eta}(\gamma) - \sum_{l=1}^{3}B^i_{1l}\Phi^i_l\left(t^i\right), \; m=1,2. \tag{1.155}$$

$$\sigma^i_{33}(\gamma) = \sum_{s=1}^{2}\left\{\left[B^i_{13} + B^i_{33}\,\mathrm{F}^i_s + B^i_{13}\left(k_1+k_2\right)\overline{\mathrm{F}}_s(\gamma)\right]\varepsilon_s + \left[B^i_{13}\gamma + B^i_{33}\mathrm{G}^i_s + B^i_{13}\left(k_1+k_2\right)\overline{\mathrm{G}}_s(\gamma)\right]\kappa_s\right\} + \\ + \left[B^i_{33}\,\mathrm{D}^i + B^i_{13}\left(k_1+k_2\right)\overline{\mathrm{D}}(\gamma)\right]\varepsilon^1_3 + B^i_{33}\eta^i + B^i_{13}\left(k_1+k_2\right)\overline{\eta}(\gamma) - \sum_{l=1}^{3}B^i_{3l}\Phi^i_l\left(t^i\right). \tag{1.156}$$

Тут використано позначення

$$\overline{g}(\gamma)=\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j g^j+(\gamma-\gamma_{i-1})g^i,\quad g=\mathrm{D},\mathrm{F},\mathrm{G},\eta;\quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.157}$$

З останньої формули (1.121) випливає вираз

$$\varepsilon_3^1=\frac{1}{\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}}\left\{\frac{\delta}{2}\left(\sigma_{33}^{\mathrm{C}}+\sigma_{33}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{\delta^2}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}-\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}-\sigma_{23}^{\mathrm{T}}]-\right.$$
$$\left.-\mathbf{L}_4'[u_{\mathrm{T}},\mathrm{v}_{\mathrm{T}},w_{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}+N_{3t}+\mathbf{F}_4\tilde{\mathbf{\Theta}}_t-\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}\right\}. \tag{1.158}$$

Таким чином, напруження в покритті визначатимуться формулами (1.154)-(1.156), де тангенціальні компоненти деформації відлікової поверхні поділу покриття–тіло пов’язані з граничними значеннями переміщень тіла співвідношенням (1.149). а поперечна деформація першого шару покриття знаходиться за формулою (1.158).

Для цього випадку за відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло–покриття $(\kappa_1=\kappa_2=\kappa_{12}=0)$ з (1.154)-(1.156), використовуючи неперервність тангенціальних деформацій вздовж поверхні поділу покриття–тіло (1.83) та співвідношення Дюгамеля–Неймана для тіла (1.84), отримаємо наступні формули для визначення тангенціальних напружень в покритті:

$$\sigma_{mm}^i(\gamma)=\frac{B_{11}^i-\nu_{\mathrm{T}}B_{12}^i+B_{13}^i\left(\mathrm{F}_m^i-\nu_{\mathrm{T}}\,\mathrm{F}_j^i\right)+\left(B_{11}^ik_m+B_{12}^ik_j\right)\left(\overline{\mathrm{F}}_m(\gamma)-\nu_{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{F}}_j(\gamma)\right)}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{mm}^{\mathrm{T}}+$$
$$+\frac{B_{12}^i-\nu_{\mathrm{T}}B_{11}^i+\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)B_{13}^i\left(\mathrm{F}_1^i+\mathrm{F}_2^i\right)+\left(B_{11}^ik_m+B_{12}^ik_j\right)\left(\overline{\mathrm{F}}_l(\gamma)-\nu_{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{F}}_j(\gamma)\right)}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{jj}^{\mathrm{T}}+$$
$$+\left[B_{11}^i+B_{12}^i-B_{13}^i\left(\mathrm{F}_1^i+\mathrm{F}_2^i\right)-\left(B_{11}^ik_m+B_{12}^ik_l\right)\left(\overline{\mathrm{F}}_1(\gamma)+\overline{\mathrm{F}}_2(\gamma)\right)\right]\left(-\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}\right)-$$
$$+\left[B_{13}^i\,\mathrm{D}^i+\left(B_{11}^ik_m+B_{12}^ik_j\right)\overline{\mathrm{D}}(\gamma)\right]\varepsilon_3^1+B_{13}^i\eta^i+\left(B_{11}^ik_m+B_{12}^ik_j\right)\overline{\eta}(\gamma)-\sum_{l=1}^{3}B_{ml}^i\Phi_j^i\left(t^i\right),$$
$$m=1,2,\quad j=3-m. \tag{1.159}$$

$$\sigma_{33}^{i}(\gamma)=\sum_{s=1}^{2}\frac{B_{33}^{i}\left(\mathrm{F}_{s}^{i}-\nu_{\mathrm{T}}\,\mathrm{F}_{3-s}^{i}\right)+B_{13}^{i}\left[1-\nu_{\mathrm{T}}+\left(k_{1}+k_{2}\right)\left(\overline{\mathrm{F}}_{s}\left(\gamma\right)-\nu_{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{F}}_{3-s}\left(\gamma\right)\right)\right]}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{ss}^{\mathrm{T}}+$$

$$+\left[B_{33}^{i}\left(\mathrm{F}_{1}^{i}+\mathrm{F}_{2}^{i}\right)+B_{13}^{i}\left[2+\left(k_{1}+k_{2}\right)\left(\overline{\mathrm{F}}_{1}\left(\gamma\right)+\overline{\mathrm{F}}_{2}\left(\gamma\right)\right)\right]\right]\left(-\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}\right)+ \quad (1.160)$$

$$+\left[B_{33}^{i}\,\mathrm{D}^{i}+B_{13}^{i}\left(k_{1}+k_{2}\right)\overline{\mathrm{D}}(\gamma)\right]\varepsilon_{3}^{1}+B_{33}^{i}\eta^{i}+B_{13}^{i}\left(k_{1}+k_{2}\right)\overline{\eta}(\gamma)-\sum_{l=1}^{3}B_{3l}^{i}\Phi_{l}^{i}\left(t^{i}\right).$$

$$\sigma_{12}^{i}(\gamma)=B_{66}^{i}\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{12}^{\mathrm{T}}, \qquad (1.161)$$

де поперечна деформація першого шару ε_3^1 знаходиться з останньої формули (1.138)

$$\varepsilon_{3}^{1}=\frac{1}{\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}}\left\{\frac{\delta}{2}\left(\sigma_{33}^{\mathrm{C}}+\sigma_{33}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{\delta^{2}}{12}\mathrm{V}[\sigma_{13}^{\mathrm{C}}-\sigma_{13}^{\mathrm{T}},\sigma_{23}^{\mathrm{C}}-\sigma_{23}^{\mathrm{T}}]-\right.$$
$$\left.-\mathbf{p}_{4}^{\prime}[\sigma_{11}^{\mathrm{T}},\sigma_{22}^{\mathrm{T}},\sigma_{33}^{\mathrm{T}},\sigma_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}-p_{4t}^{\prime}\beta_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}+N_{3t}+\mathbf{F}_{4}\tilde{\mathbf{\Theta}}_{t}-\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}\right\}. \qquad (1.162)$$

Таким чином, методика визначення термонапруженого стану системи тіло–покриття складається з двох етапів:

1) розв’язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням узагальнених граничних умов;

2) знаходження температурних напружень в покритті за формулами відновлення.

Висновки до розділу 1

В цьому розділі розвинуто методологію розв’язування задач термомеханіки тіл з тонкими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні таких покрить оболонками з відповідними термомеханічними властивостями. Тоді вплив покрить на тепловий і механічний стан всієї системи описується спеціальними узагальненими граничними умовами.

Для задачі теплопровідності наведено підхід до побудови УГУ променево-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через тонкі неплоскі покриття, який базується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті та розвиненні функції температури за товщиною покриття в степеневий ряд. Цей підхід дає можливість отримати розрахункові варіанти УГУ з різною точністю. Також виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничні значення температури та її похідної в тілі.

Показано, що викладену процедуру побудови подання граничних значень температури та її похідної на поверхні поділу шарів через відповідні значення температури та її похідної на поверхні поділу покриття–тіло можна трактувати як реалізацію методу матриць переносу (transfer matrix method) до процесу теплопровідності в багатошаровому середовищі.

Порівняння з відомими в літературі УГУ показало, що вони є частковими випадками виведених у роботі розрахункових варіантів.

На прикладі задачі конвективного нагріву циліндра з покриттям проілюстровано випадки, коли є важливою наявність додаткових членів вищого порядку в розрахункових варіантах УГУ.

Виведення УГУ механічного спряження тіла із середовищем через тонке покриття здійснено для двох випадків – ізотропного та трансверсально анізотропного покриття з використанням рівнянь теорії термопружності тонких оболонок для випадку багатошарового покриття.

Подано також спрощений варіант УГУ для випадку відсутності деформацій згину та кручення поверхні поділу тіло–покриття, який містить лише компоненти тензора напружень.

Записано формули відновлення напружень у покритті через граничні значення переміщень та напружень у тілі.

Отже, методика розв’язування задачі теплопровідності в тілах з тонкими покриттями складається з двох етапів:

1) розв’язування некласичної крайової задачі теплопровідності з узагальненою граничною умовою;

2) знаходження температурного поля в покритті за формулою відновлення через граничні значення температури та її похідної в тілі.

Відповідно, подальше визначення термонапруженого стану системи тіло–покриття також складається з двох етапів:

1) розв’язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням узагальнених граничних умов;

2) знаходження температурних напружень в покритті за формулами відновлення через граничні значення компонент тензора напружень і вектора переміщень (у випадку відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло–покриття – тільки напружень).

Результати цього розділу відображено у 26 публікаціях автора [49, 276, 277, 284, 285, 288-293, 295, 296, 298, 305, 500, 501, 503-507, 510, 513, 514, 516].

РОЗДІЛ 2

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ПІВПРОСТОРУ ТА ПЛАСТИНИ З ТОНКИМИ БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ

У даному розділі сформульовано нестаціонарні задачі теплопровідності та відповідні задачі термопружності для півпростору з одностороннім та пластини з двостороннім багатошаровим покриттям. На основі запропонованої у першому розділі математичної моделі з використанням узагальнених граничних умов отримано аналітичні розв’язки задач теплопровідності за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем для півпростору та пластини. Наведено вирази для визначення термонапружень. Проаналізовано тестову задачу для одностороннього стаціонарного нагріву пластини з багатошаровим покриттям.

Досліджено вплив теплофізичних та термомеханічних характеристик системи та умов взаємодії із зовнішнім середовищем на розподіли температури та напружень.

Основні результати, наведені в розділі, відображено у дванадцяти публікаціях автора [279, 282, 283, 300-303, 306, 309, 502, 504, 505].

2.1. Теплопровідність півпростору з багатошаровим покриттям за конвективного теплообміну при неоднорідній початковій умові

Моделюванню та дослідженню процесу теплопровідності в півпросторі з покриттям присвячено ряд робіт [7-9, 99, 100, 144, 190, 193, 224, 234, 236, 254-257, 337, 360, 363, 381, 487, 490, 564-566, 572, 573]. Аналітичні розв’язки відповідних крайових задач для півпростору з одношаровим покриттям отримано для задач з граничними умовами першого [100, 144, 190, 487, 572], другого [100, 224, 236, 256, 490, 564-566, 573], третього [8, 9] роду, змішаних умов [234, 255] та за дії внутрішніх джерел тепла [381]. Шаруватість (неоднорідність) покрить ускладнює задачі: якщо у випадках стаціонарних задач будують точні аналітичні розв'язки [426-428, 450, 476, 477], то для нестаціонарних використовують сингулярні інтегральні перетворення [337] та числово-аналітичні [360, 422] підходи.

Окрім того, може виникати необхідність урахування неоднорідності початкового розподілу температури. В інженерній практиці серед різноманітних способів зміцнення елементів конструкцій та деталей машин і механізмів з багатошаровими покриттями важливе місце займають термічні методи, які включають в себе певну кількість неперервних циклів нагрівання та охолодження таких об'єктів [200]. Якщо в момент початку нагрівання виробу з покриттям початковий розподіл температури вважається відомим і рівномірним, то після закінчення деякого періоду нагрівання і початку процесу охолодження такий розподіл температури є, здебільшого, нерівномірним. Це спричиняє виникнення певних математичних труднощів при побудові аналітичних розв'язків відповідних нестаціонарних крайових задач теплопровідності з неоднорідною початковою та некласичною граничною умовами.

Для побудови аналітичних розв'язків лінійних задач нестаціонарної теплопровідності широко застосовуються методи функцій Гріна, теплових потенціалів, інтегральних перетворень в скінчених і нескінченних межах та інші. Методи інтегральних перетворень мають низку переваг: стандартність методик застосування, отримання розв'язків у зручному для розрахунків вигляді, наявність таблиць відповідностей між зображеннями та оригіналами функцій [14]. Для випадків, коли тіла є безмежними або напівбезмежними, зручним у застосуванні є методи інтегрального перетворення Лапласа [144]. В [95] цим методом отримано розв'язки нестаціонарних крайових задач теплопровідності для тіл лише зі сталим розподілом початкової температури. В [144] зазначається, що недоліком інтегрального перетворення Лапласа є труднощі, які виникають при розв'язуванні задач, коли початкова умова задається у вигляді функції просторових координат.

Спроба подолати вищезгаданий недолік реалізована в [119], де шляхом відповідної редукції задачу теплопровідності з неоднорідною початковою умовою зведено до задачі з нульовою початковою умовою та в [166], де використовується принцип суперпозиції. Такі підходи дозволяють використовувати вже відомі розв’язки для деяких конкретних заданих функцій потужностей джерел тепла [113] та простіших задач [175], але, однак, не вирішують проблеми для випадку довільної функції початкового розподілу температури.

В [38] для випадку довільної функції розподілу початкової температури саме інтегральним перетворенням Лапласа отримано аналітичні розв’язки задачі теплопровідності для тіл канонічної форми з граничною умовою третього роду.

Для випадку неоднорідного початкового розподілу температури в багатошарових тілах аналітичні розв’язки відповідних одновимірних задач теплопровідності отримано для двох- [97, 457], три- [189, 216, 217], *n*-шарових [458] тіл. Альтернативою застосуванню цих розв’язків для розрахунку температурних полів саме у тілах з тонкими покриттями є використання більш ефективного підходу, пов’язаного з моделюванням впливу таких покрить УГУ, який дозволяє отримувати простіші та зручніші для практичного використання аналітичні розв’язки.

З урахуванням низки переваг застосування інтегрального перетворення Лапласа до розв’язання нестаціонарних задач теплопровідності в цьому підрозділі з використанням УГУ та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичний розв’язок нестаціонарної одновимірної задачі теплопровідності для півпростору з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну зі зовнішнім середовищем через тонке багатошарове покриття.

2.1.1. Постановка задачі

Розглядається процес конвективного теплообміну півпростору з середовищем через n-шарове покриття товщиною $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$. Початок координати $z = 0$ розміщено на контактній поверхні покриття з півпростором, а додатний відлік такої координати спрямовано вглиб основи (рис. 2.1).

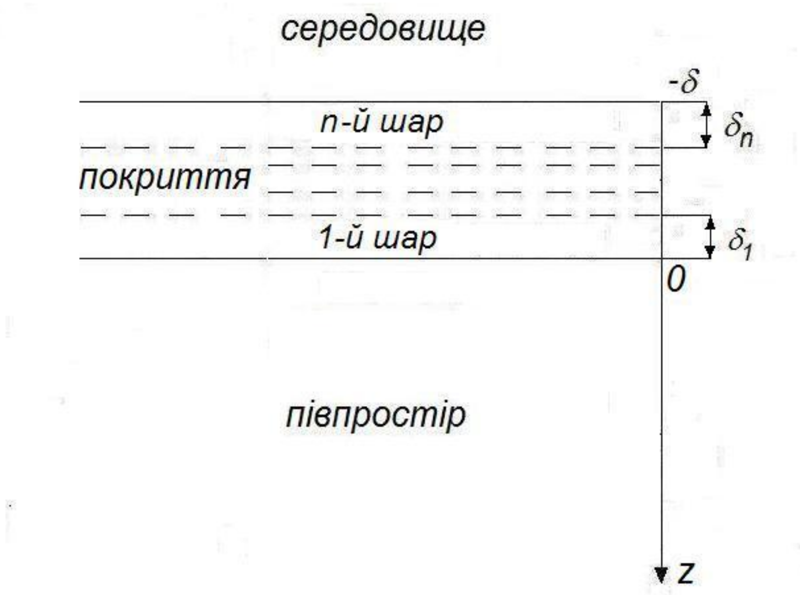


Рис. 2.1. Схема півпростору з багатошаровим покриттям

Рівняння теплопровідності має наступний вигляд

$$\frac{\partial t_j}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2}, \quad j = \mathrm{T}, 1, 2, 3, ..., n. \tag{2.1}$$

Задано початкову умову

$$t_{\mathrm{T}|\tau=0} = t_{\mathrm{T}0}(z), \quad 0 \le z < \infty; \quad t_{i|\tau=0} = t_{i0}(z), \ -\delta \le z \le 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.2}$$

граничну умову конвективного теплообміну між покриттям і середовищем

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \mu \left(t_n - t_{\mathrm{C}} \right) \quad \text{при} \quad z = z_n = -\delta, \tag{2.3}$$

умови ідеального теплового контакту на поверхнях поділу шарів покриття та покриття з тілом

$$
\begin{aligned}
& t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial z} \quad \text{при } z = z_{i-1} = -\sum_{m=1}^{i-1} \delta_m, \qquad i = \overline{2,n}; \\
& t_1 = t_{\text{Т}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_{\text{Т}} \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z} \qquad \text{при } z = z_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

та умову на безмежності

$$
\lim_{z\to\infty} t_{\text{Т}} = \lim_{z\to\infty} t_{\text{Т}0}(z). \tag{2.5}
$$

2.1.2. Розв’язок задачі з узагальненою граничною умовою

Узагальнену граничну умову теплопровідності на основі (1.39) та (1.45) для даного випадку запишемо з урахуванням неоднорідності початкового розподілу температури в шарах покриття у вигляді

$$
\lambda_{\text{Т}} \left(1 + \frac{\mu}{H}\right) \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z} + \mu\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) = \Omega \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \;\; t_{\text{Т}|\tau=0} = t_0 \quad \text{при } z = 0, \tag{2.6}
$$

де $t_0 = \dfrac{1}{\delta}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} t_{i0}(\varsigma) d\varsigma\right)$ – усереднене значення початкової температури за товщиною багатошарового покриття.

Для розв’язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$
t_{\text{Т}}^{L}(z,s) = \mathrm{L}\left[t_{\text{Т}}(z,\tau)\right] = \int_0^\infty t_{\text{Т}}(z,\tau) e^{-s\tau} d\tau, \tag{2.7}
$$

де s – параметр перетворення.

Розв’язок рівняння (2.1) у півпросторі в трансформантах з урахуванням умов (2.2), (2.5), (2.6) має вигляд

$$
t_{\text{Т}}^{L}(z,s) = \frac{q}{2s} \int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma) e^{-q|z-\varsigma|} d\varsigma + \frac{e^{-qz}\left[t_{\text{С}} + \psi s t_{\text{Т}0}(0) - \dfrac{q}{2}\left(\psi s - \bar{h}^{-1} q + 1\right) \displaystyle\int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma) e^{-q\varsigma} d\varsigma\right]}{s\left(\psi s + \bar{h}^{-1} q + 1\right)}, \tag{2.8}
$$

де $q=\sqrt{s/a_{\text{Т}}}$; $\overline{h}^{-1}=\dfrac{\lambda_{\text{Т}}}{\mu}\left(1+\dfrac{\mu}{H}\right)$, $\psi=\dfrac{\Omega}{\mu}$.

Залежно від значень коренів характеристичного рівняння

$$\psi a_{\text{Т}}q^2+\overline{h}^{-1}q+1=0 \tag{2.9}$$

можливі наступні варіанти подання оригіналу зображення (2.8).

1) При $\Omega\neq 0$ і $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\text{Т}}\neq 0$ рівняння (2.9) має два різні корені

$$\tilde{q}_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\psi a_{\text{Т}}\overline{h}^2}}{2\psi a_{\text{Т}}\overline{h}}. \tag{2.10}$$

Відповідно, трансформанта (2.8) матиме такий вигляд

$$\begin{gathered} t_{\text{Т}}^L(z,s)=\frac{q}{2s}\int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma+\left(\frac{1}{\sqrt{s}-\sqrt{a_{\text{Т}}}\tilde{q}_1}-\frac{1}{\sqrt{s}-\sqrt{a_{\text{Т}}}\tilde{q}_2}\right)\times \\ \times\frac{e^{-qz}\left(t_{\text{С}}+\psi st_{\text{Т}0}(0)\right)-\dfrac{q}{2}\left(\psi s-\overline{h}^{-1}q+1\right)\int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma)e^{-q(z+\varsigma)}d\varsigma}{\psi\sqrt{a_{\text{Т}}}\left(\tilde{q}_1-\tilde{q}_2\right)s}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Для знаходження оригіналу зображення (2.11) використаємо формули обернення [144, с. 586, 587]

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\overline{b}\mathrm{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{s\left(\overline{b}+\sqrt{s}\right)}\right]=\operatorname{erfc}\frac{\overline{k}}{2\sqrt{\tau}}-\mathrm{e}^{\overline{b}\overline{k}+\overline{b}^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\overline{b}\sqrt{\tau}+\frac{\overline{k}}{2\sqrt{\tau}}\right), \tag{2.12}$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{\overline{k}^2}{4\tau}},\quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(\overline{b}+\sqrt{s}\right)}\right]=\mathrm{e}^{\overline{b}\overline{k}+\overline{b}^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\overline{b}\sqrt{\tau}+\frac{\overline{k}}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{1+\sqrt{s/\overline{b}}}\right]=\sqrt{\frac{\overline{b}}{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{\overline{k}^2}{4\tau}}-\overline{b}\mathrm{e}^{\overline{k}\sqrt{\overline{b}}+\overline{b}\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\overline{k}}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{\overline{b}\tau}\right).$$

Після їх застосування отримаємо вираз для визначення розподілу температури в півпросторі у безрозмірних величинах

$$\begin{gathered} \theta_{\text{Т}}(\overline{z},\text{Fo})=\operatorname{erfc}\overline{\varphi}-\frac{1}{2\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}\overline{\alpha}_mF\left(x,\text{Fo},\overline{q}_m\right)+ \\ +\int_0^\infty\theta_0(\gamma)\left\{\chi_-\left(\overline{z},\gamma,\text{Fo}\right)+\frac{1}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\overline{q}_mF\left(\overline{z}+\gamma,\text{Fo},\overline{q}_m\right)\right\}d\gamma. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Тут $$\theta_{\text{Т}} = \frac{t_{\text{Т}}}{t_{\text{С}}}, \tag{2.14}$$

$\theta_0 = \dfrac{t_{\text{Т}}\big|_{\tau=0}}{t_{\text{С}}}$ – безрозмірні температури; $\overline{z} = z / z_*$, $\gamma = \varsigma / z_*$ – безрозмірні координати; z_* – масштабний параметр; $\text{Fo} = a_{\text{Т}}\tau / z_*^2$ – число Фур'є; $\overline{\varphi} = \overline{z}\big/(2\sqrt{\text{Fo}})$; $\Upsilon = \sqrt{1 - 4\psi a_{\text{Т}} h^2} = \sqrt{1 - 4\eta \text{Bi} / \left(1 + \xi \text{Bi}\right)^2}$; $\kappa = (1 + \xi \text{Bi}) / (2\eta)$; $\text{Bi} = \mu z_* / \lambda_{\text{Т}}$ – критерій Біо; $\xi = H^{-1}\big/(z_* / \lambda_{\text{Т}})$ – відносний ефективний термічний опір покриття; $\eta = \Omega\big/(\omega_{\text{Т}} z_*)$ – відносна ефективна теплоємність покриття;

$$F(\overline{z}, \text{Fo}, p) = \exp\left(p\overline{z} + p^2 \text{Fo}\right) \text{erfc}\left(\overline{\varphi} + p\sqrt{\text{Fo}}\right); \tag{2.15}$$

$$\overline{\alpha}_m = (-1)^{m+1} + \Upsilon + \theta_0(0)\left((-1)^{m+1} - \Upsilon\right);$$

$$\overline{q}_1 = -\tilde{q}_1 z_* = (1 - \Upsilon)\kappa, \ \overline{q}_2 = -\tilde{q}_2 z_* = (1 + \Upsilon)\kappa;$$

$$\chi_\pm\left(\overline{z}, \gamma, \text{Fo}\right) = \frac{e^{-\frac{(\overline{z}-\gamma)^2}{4\text{Fo}}} \pm e^{-\frac{(\overline{z}+\gamma)^2}{4\text{Fo}}}}{2\sqrt{\pi \text{Fo}}}; \tag{2.16}$$

де $\text{erfc}\,\zeta = 1 - \text{erf}\,\zeta$; $\text{erf}\,\zeta$ – функція помилок Гаусса [144, с. 575].

2) При $\Omega \neq 0$ і $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\text{Т}} = 0$ рівняння (2.9) має один дійсний двократний корінь

$$\tilde{q}_3 = -\frac{1}{2\psi a_{\text{Т}} \overline{h}}. \tag{2.17}$$

Для цього випадку трансформанту (2.8) подамо наступним чином

$$t_{\text{Т}}^L(z, s) = \frac{q}{2s}\int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma) e^{-q|z-\varsigma|} d\varsigma + \\ + \frac{e^{-qz}\left(t_{\text{С}} + \psi s t_{\text{Т}0}(0)\right) - \dfrac{q}{2}\left(\psi s - \overline{h}^{-1} q + 1\right)\displaystyle\int_0^\infty t_{\text{Т}0}(\varsigma) e^{-q(z+\varsigma)} d\varsigma}{\psi s\left(\sqrt{s} - \sqrt{a_{\text{Т}}}\tilde{q}_3\right)^2}. \tag{2.18}$$

Для знаходження оригіналу трансформанти (2.18) використаємо додатково формули обернення [144, с. 586; 65, с. 253]

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{\left(\sqrt{s}+\bar{b}\right)^2}\right]=\left(2\bar{b}^2\tau+\overline{bk}+1\right)\mathrm{e}^{bk+b^2t}\mathrm{erfc}\left(\bar{b}\sqrt{\tau}+\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right)-2\bar{b}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{k}^2}{4\tau}},$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\bar{b}\right)^2}\right]=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{k}^2}{4\tau}}-\left(2\bar{b}\tau+\bar{k}\right)\mathrm{e}^{\overline{bk}+\bar{b}^2\tau}\mathrm{erfc}\left(\bar{b}\sqrt{\tau}+\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{s\left(\sqrt{s}+\bar{b}\right)^{22}}\right]&=\frac{1}{\bar{b}^2}\mathrm{erfc}\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}-\frac{2}{\bar{b}}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\bar{k}^2}{4\tau}}+\\&+\left(2\tau+\frac{\bar{k}}{\bar{b}}-\frac{1}{\bar{b}^2}\right)\mathrm{e}^{\overline{bk}+\bar{b}^2\tau}\mathrm{erfc}\left(\bar{b}\sqrt{\tau}+\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Остаточно отримаємо вираз для температури в півпросторі для даного випадку в такому вигляді

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{T}}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)&=\mathrm{erfc}\bar{\varphi}-2\left(1+\theta_0(0)\right)\frac{\beta_*}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\varphi}^2}-\\&-\left[1-\theta_0(0)-\left(2\beta_*^2+\kappa\bar{z}\right)\left(1+\theta_0(0)\right)\right]F\left(\bar{z},\mathrm{Fo},\kappa\right)+\\&+\int_0^\infty\theta_0(\gamma)\left[\chi_-\left(\bar{z},\gamma,\mathrm{Fo}\right)-\frac{4\kappa\beta_*}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(\bar{z}+\gamma)^2}{4\mathrm{Fo}}}+\right.\\&\left.+2\kappa\left(1+2\beta_*^2+\kappa(\bar{z}+\gamma)\right)F\left(\bar{z}+\gamma,\mathrm{Fo},\kappa\right)\right]d\gamma,\end{aligned} \tag{2.20}$$

де $\beta_*=\kappa\sqrt{\mathrm{Fo}}$, а функція $F\left(\bar{z},\mathrm{Fo},\kappa\right)$ визначається формулою (2.15).

3) При $\Omega=0$ рівняння (2.9) має один дійсний корінь

$$\tilde{q}_4=-\bar{h}\,. \tag{2.21}$$

Тоді трансформанту (2.8) представимо так:

$$t_{\mathrm{T}}^L(z,s)=\frac{q}{2s}\int_0^\infty t_{\mathrm{T}0}(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma-\sqrt{a_{\mathrm{T}}}\tilde{q}_4\frac{e^{-qz}t_{\mathrm{C}}-\frac{q}{2}\left(1-\bar{h}^{-1}q\right)\int_0^\infty t_{\mathrm{T}0}(\varsigma)e^{-q(z+\varsigma)}d\varsigma}{s\left(\sqrt{s}-\sqrt{a_{\mathrm{T}}}\tilde{q}_4\right)}, \tag{2.22}$$

а оригінал зображення (2.22) буде мати наступний вигляд:

$$\theta_{\text{T}}\left(\overline{z},\text{Fo}\right)=\text{erfc}\,\overline{\varphi}-F\left(\overline{z},\text{Fo},\text{Bi}_*\right)+ \\ +\int_0^\infty \theta_0\left(\gamma\right)\left[\chi_+\left(\overline{z},\gamma,\text{Fo}\right)-\text{Bi}_*F\left(\overline{z}+\gamma,\text{Fo},\text{Bi}_*\right)\right]d\gamma, \tag{2.23}$$

де $\text{Bi}_*=\text{Bi}/(1+\xi\text{Bi})$.

Формули відновлення (1.54) для розрахунку температури в довільному шарі багатошарового покриття через граничні значення температури та її похідної в півпросторі у безрозмірному вигляді запишемо так:

$$\theta_i(\overline{z},\text{Fo})=\theta_{\text{T}}(0,\text{Fo})+\tilde{r}_i(\overline{z})\frac{\partial\theta_{\text{T}}}{\partial\overline{z}}(0,\text{Fo}),\quad \overline{z}_i\le\overline{z}\le\overline{z}_{i-1},\quad i=\overline{1,n}\,. \tag{2.24}$$

Тут $$\tilde{r}_i(\overline{z})=\lambda_{\text{T}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j/\left(z_*\lambda_j\right)+\left(\overline{z}-\overline{z}_{i-1}\right)/\lambda_i\right),\quad \overline{z}_i=z_i/z_*,$$

$$\theta_i=t_i/t_{\text{C}}. \tag{2.25}$$

Підставляючи (2.13), (2.20) та (2.23) в формулу відновлення (2.24), отримуємо вирази для температури в i-му шарі покриття.

1) При $\Omega\ne0$ і $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\text{T}}\ne0$:

$$\theta_i(\overline{z},\text{Fo})=1-\frac{\tilde{r}_i(\overline{z})}{\sqrt{\pi\text{Fo}}}\left[\theta_0(0)-\int_0^\infty\theta_0\left(\gamma\right)\left(\frac{\gamma}{2\text{Fo}}-2\kappa\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\text{Fo}}}d\gamma\right]- \\ -\frac{1}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}b_{im}(\overline{z})\left[\frac{\overline{\alpha}_m}{2}F\left(0,\text{Fo},\overline{q}_m\right)-(-1)^m\overline{q}_m\int_0^\infty\theta_0\left(\gamma\right)F\left(\gamma,\text{Fo},\overline{q}_m\right)d\gamma\right], \tag{2.26}$$

де $b_{im}(\overline{z})=1+\tilde{r}_i(\overline{z})\overline{q}_m$, $m=1,2$.

2) При $\Omega\ne0$ і $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\text{T}}=0$:

$$\theta_i(\overline{z},\text{Fo})=1-2\left(1+\theta_0(0)\right)b_{i3}(\overline{z})\frac{\beta_*}{\sqrt{\pi}}- \\ -\left[1-\left(1+2\kappa\tilde{r}_i(\overline{z})\right)\theta_0(0)-2\beta_*^2\left(1+\theta_0(0)\right)b_{i3}(\overline{z})\right]F\left(0,\text{Fo},\kappa\right)- \\ -\frac{\tilde{r}_i(\overline{z})}{\sqrt{\pi\text{Fo}}}\left[\theta_0(0)-\int_0^\infty\theta_0\left(\gamma\right)\left(\gamma\left(\frac{1}{2\text{Fo}}-2\kappa^2\right)-2\kappa\left(1+2\beta_*^2\right)\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\text{Fo}}}d\gamma\right]- \\ -2\kappa\int_0^\infty\theta_0\left(\gamma\right)\left[\frac{\beta_*}{\sqrt{\pi}}\left(2-\frac{\tilde{r}_i(\overline{z})\gamma}{\text{Fo}}\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\text{Fo}}}+\left(1-\left(2\left(1+\beta_*^2\right)+\kappa\gamma\right)b_{i3}(\overline{z})\right)F\left(\gamma,\text{Fo},\kappa\right)\right]d\gamma, \tag{2.27}$$

де
$$b_{i3}(\overline{z}) = 1 + \tilde{r}_i(\overline{z})\overline{q}_3,$$
$$\overline{q}_3 = -\tilde{q}_3 z_* = \kappa. \quad (2.28)$$

3) При $\Omega = 0$:

$$\theta_i(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = 1 - \left(1 + \mathrm{Bi}^* \tilde{r}_i(\overline{z})\right)\Big\{F\left(0, \mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}^*\right) -$$
$$. \qquad -\int_0^\infty \theta_0(\gamma)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} e^{-\frac{\gamma^2}{4\mathrm{Fo}}} - \mathrm{Bi}_* F\left(\gamma, \mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}_*\right)\right] d\gamma\Big\}. \quad (2.29)$$

2.1.3. Випадок експоненціального початкового розподілу температури

В якості прикладу отримання розрахункових формул для визначення розподілу температури в системі півпростір–багатошарове покриття розглянемо випадок, коли початковий розподіл температури задано у вигляді

$$\theta_0(\overline{z}) = \theta_\infty + \left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\exp(-l\overline{z}),\ \theta_\infty = \lim_{\overline{z}\to\infty} \theta_0(\overline{z}),\ \theta_0 = \theta_0(0),\ l = \mathrm{const}. \quad (2.30)$$

Тоді формули (2.13), (2.26), (2.20), (2.27), (2.23), (2.29) набувають наступний вигляд.

1) При $\Omega \neq 0$ і $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_\mathrm{T} \neq 0$

температура в півпросторі:

$$\theta_\mathrm{T}\left(\overline{z}, \mathrm{Fo}\right) = \theta_\infty + \left(1 - \theta_\infty\right)\mathrm{erfc}\,\overline{\varphi} - \frac{1}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\overline{\alpha}_m}{2} + (-1)^m\left(\theta_\infty + \frac{\overline{q}_m\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)}{\overline{q}_m - l}\right)\right] F\left(\overline{z}, \mathrm{Fo}, \overline{q}_m\right) +$$
$$+\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\left\{\frac{F\left(-\overline{z}, \mathrm{Fo}, l\right) - F\left(\overline{z}, \mathrm{Fo}, l\right)}{2} + \frac{F(\overline{z}, \mathrm{Fo}, l)}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m \frac{\overline{q}_m}{\overline{q}_m - l}\right\}, \quad (2.31)$$

температура в i-му шарі покриття:

$$\theta_i(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\overline{\alpha}_m}{2} + (-1)^m\left(\theta_\infty + \frac{\overline{q}_m\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)}{\overline{q}_m - l}\right)\right] b_{im}(\overline{z}) F\left(0, \mathrm{Fo}, \overline{q}_m\right) +$$
$$+\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\left[\frac{1}{\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m b_{im}(\overline{z})\frac{\overline{q}_m}{\overline{q}_m - l} + \left(l + 2\kappa\right)\tilde{r}_i(\overline{z})\right] F(\overline{z}, \mathrm{Fo}, l). \quad (2.32)$$

2) При $\Omega \neq 0$ і $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\mathrm{T}} = 0$

температура в півпросторі:

$$\theta_{\mathrm{T}}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right) = \theta_{\infty} + \left(1-\theta_{\infty}\right)\mathrm{erfc}\overline{\varphi} - \left[1-\theta_0 - 2\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\frac{l}{\kappa-l}\right]\frac{2\beta_*}{\sqrt{\pi}}e^{-\overline{\varphi}^2} -$$
$$-\left[\left(1-\theta_0\right)\left(1-\kappa\overline{z}-2\beta_*^2\right) + \frac{2\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)l}{\kappa-l}\left(2\beta_*^2+\kappa\overline{z}-\frac{\kappa}{\kappa-l}\right)\right]F\left(\overline{z},\mathrm{Fo},\kappa\right) +$$
$$+\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\left[\frac{F\left(-\overline{z},\mathrm{Fo},l\right)-F\left(\overline{z},\mathrm{Fo},l\right)}{2} - \right. \tag{2.33}$$
$$\left. -2\left(2\beta_*^2 - \frac{\left(1+2\beta_*^2+\kappa\overline{z}\right)\kappa}{\kappa-l} + \frac{\left[1+\left(\overline{z}+2l\mathrm{Fo}\right)\left(\kappa-l\right)\right]\kappa^2}{\left(\kappa-l\right)^2}\right)F(\overline{z},\mathrm{Fo},l))\right],$$

температура в i –му шарі покриття:

$$\theta_i(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \left[1-\theta_0 - \frac{2\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)l}{\kappa-l}\right]\frac{2b_{i3}(\overline{z})\beta_*}{\sqrt{\pi}} - \left[\left(1-\theta_0\right)\left(1-2\beta_*^2 b_{i3}(\overline{z})\right) - \right.$$
$$\left. -2\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\frac{l}{\kappa-l}\left[1-b_{i3}(\overline{z})\left(2\beta_*^2-\frac{l}{\kappa-l}\right)\right]\right]F\left(0,\mathrm{Fo},\kappa\right) - \tag{2.34}$$
$$-\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\left[\left(2\kappa+l\right)\tilde{r}_i(\overline{z}) + \frac{2\kappa}{\kappa-l}\left(1-b_{i3}(\overline{z})\frac{\kappa-2l}{\kappa-l}\right)\right]F(0,\mathrm{Fo},l).$$

3) При $\Omega = 0$ температура в півпросторі:

$$\theta_{\mathrm{T}}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right) = \theta_{\infty} + \left(1-\theta_{\infty}\right)\mathrm{erfc}\overline{\varphi} - \left(1-\theta_{\infty} - \left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\frac{\mathrm{Bi}_*}{\mathrm{Bi}_*-l}\right)F\left(\overline{z},\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}_*\right) +$$
$$+\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\left[\frac{F\left(-\overline{z},\mathrm{Fo},l\right)+F\left(\overline{z},\mathrm{Fo},l\right)}{2} - \frac{\mathrm{Bi}_*}{\mathrm{Bi}_*-l}F\left(\overline{z},\mathrm{Fo},l\right)\right], \tag{2.35}$$

температура в i–му шарі покриття:

$$\theta_i(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \left(1+\mathrm{Bi}_*\tilde{r}_i(\overline{z})\right)\left[\left(1-\theta_{\infty}\right)F\left(0,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}_*\right) - \right.$$
$$. \qquad \left. -\left(\theta_0-\theta_{\infty}\right)\frac{\mathrm{Bi}_* F\left(0,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}_*\right) - lF\left(0,\mathrm{Fo},l\right)}{\mathrm{Bi}^*-l}\right]. \tag{2.36}$$

2.1.4. Випадок сталого початкового розподілу температури

Розглянемо практично важливий частковий випадок сталої початкової температури

$$\theta_0(\bar{z}) = \theta_0(0) = \text{const}\,. \qquad (2.37)$$

Тоді можна увести безрозмірну температуру, пов'язану як з температурою середовища, так і з початковою температурою:

$$\vartheta_j = \left(t_j - t_0\right)/\left(t_\text{C} - t_0\right), \quad j = \text{T}, 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (2.38)$$

Зв'язок між уведеними безрозмірними температурами (2.14) і (2.25) та (2.38) дається співвідношенням

$$\theta_j = \vartheta_j + \theta_0(0)\left(1 - \vartheta_j\right), \quad j = \text{T}, 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (2.39)$$

У цьому випадку (2.37) формули (2.13), (2.26), (2.20), (2.27), (2.23), (2.29) при врахуванні (2.39) матимуть вигляд.

1) При $\Omega \neq 0$ і $\bar{h}^{-2} - 4\psi a_\text{T} \neq 0$

температура в півпросторі:

$$\vartheta_\text{T}(\bar{z}, \text{Fo}) = \operatorname{erfc}\bar{\varphi} - \frac{1}{2\Upsilon}\left[(1+\Upsilon)F_1(\bar{z}, \text{Fo}) - (1-\Upsilon)F_2(\bar{z}, \text{Fo})\right], \qquad (2.40)$$

температура в i-му шарі покриття:

$$\vartheta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = 1 - \frac{1}{2\Upsilon}\sum_{m=1}^{2}\left((-1)^{m+1} + \Upsilon\right)\left(1 + \tilde{r}_i(\bar{z})\bar{q}_m\right)F_m(0, \text{Fo})\,. \qquad (2.41)$$

2) При $\Omega \neq 0$ і $\bar{h}^{-2} - 4\psi a_\text{T} = 0$

температура в півпросторі:

$$\vartheta_\text{T}(\bar{z}, \text{Fo}) = \operatorname{erfc}\bar{\varphi} - \frac{2\beta_*}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\varphi}^2} + \left(\kappa\bar{z} + 2\beta_*^2 - 1\right)F_3(\bar{z}, \text{Fo}), \qquad (2.42)$$

температура в i–му шарі покриття:

$$\vartheta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = 1 - 2\left(1 + \kappa r_i(\bar{z})\right)\frac{\beta_*}{\sqrt{\pi}} - \left(1 - 2\beta_*^2\left(1 + \kappa\tilde{r}_i(\bar{z})\right)\right)F_3(0, \text{Fo})\,. \qquad (2.43)$$

3) При $\Omega = 0$ температура в півпросторі:

$$\vartheta_{\text{T}}(\overline{z}, \text{Fo}) = \operatorname{erfc} \overline{\varphi} - F_4(\overline{z}, \text{Fo}), \tag{2.44}$$

температура в *i*–му шарі покриття:

$$\vartheta_i(\overline{z}, \text{Fo}) = 1 - \left(1 + \text{Bi}_* \tilde{r}_i(\overline{z})\right) F_4(0, \text{Fo}). \tag{2.45}$$

Тут використовуються такі додаткові позначення

$$F_m(\overline{z}, \text{Fo}) = \exp\left(\overline{q}_m \overline{z} + \overline{q}_m^2 \text{Fo}\right) \operatorname{erfc}\left(\overline{\varphi} + \overline{q}_m \sqrt{\text{Fo}}\right), \quad m = 1, 2, 3, 4; \tag{2.46}$$

$$\overline{q}_4 = -\tilde{q}_4 z_* = \text{Bi}_* = \frac{\text{Bi}}{1 + \xi \text{Bi}}. \tag{2.47}$$

Можна відзначити, що в разі відсутності покриття ($\delta = 0$) формула (2.44) збігається з відповідним розв'язком задачі теплопровідності для напівобмеженого тіла при граничній умові третього роду [144, с. 183], а у випадку одношарового покриття ($n = 1$) одержана формула (2.40) збігається з розв'язком, наведеним у [258] при відповідному зіставленні параметрів задачі (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) і дифузійної крайової задачі в [258].

2.1.4.1. Асимптотичні формули для великих і малих значень часу

У цьому випадку (2.37) сталої початкової температури для малих значень параметра перетворення Лапласа *s* можна записати таке подання трансформанти (2.7):

$$t_{\text{T}}^L(z, s) \approx \left(t_{\text{C}} - t_0\right) e^{-z\sqrt{s/a_{\text{T}}}} \left(\frac{\overline{h}^{-2}}{a_{\text{T}}} - \psi + \frac{1}{s} - \frac{\overline{h}^{-1}}{\sqrt{a_{\text{T}}}} \frac{1}{\sqrt{s}} \right) + \frac{t_0}{s}. \tag{2.48}$$

Використовуючи формули обернення перетворення Лапласа [144, с. 585]

$$\text{L}^{-1}\left[\text{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}} \right] = \frac{\overline{k}}{2\sqrt{\pi \tau^3}} \text{e}^{-\frac{\overline{k}^2}{4\tau}}, \quad \text{L}^{-1}\left[\frac{\text{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{s} \right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad \text{L}^{-1}\left[\frac{\text{e}^{-\overline{k}\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \text{e}^{-\frac{\overline{k}^2}{4\tau}},$$

отримуємо асимптотичну формулу для великих значень часу $\mathrm{Fo} >> 1$ для безрозмірної температури в півпросторі ($0 \le \bar{z} < \infty$):

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(\bar{z}, \mathrm{Fo}) \approx \mathrm{erfc}\,\bar{\varphi} - \left[1 + \left(\eta\left(1 - \xi \mathrm{Bi}_*\right) - \frac{1}{\mathrm{Bi}_*}\right)\frac{\bar{z}}{2\mathrm{Fo}}\right]\frac{e^{-\bar{\varphi}^2}}{\mathrm{Bi}_*\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}. \qquad (2.49)$$

Підставляючи вираз (2.49) у формулу відновлення (2.24) з урахуванням співвідношення (2.39), отримаємо асимптотичний вираз для температури в покритті:

$$\vartheta_i(\bar{z}, \mathrm{Fo}) \approx$$

$$1 - \frac{1 + \left[\mathrm{Bi}_* + \left(\eta\left(1 - \xi \mathrm{Bi}_*\right) - \frac{1}{\mathrm{Bi}_*}\right)\frac{1}{2\mathrm{Fo}}\right]\tilde{r}_i(\bar{z})}{\mathrm{Bi}_*\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}, \quad \bar{z}_i \le \bar{z} \le \bar{z}_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}; \ \mathrm{Fo} >> 1. \qquad (2.50)$$

Для великих значень параметра перетворення Лапласа s справедливі такі подання трансформанти (2.48):

при $\Omega \ne 0$

$$t_{\mathrm{T}}^L(z,s) \approx \left(t_{\mathrm{C}} - t_0\right)e^{-z\sqrt{s/a_{\mathrm{T}}}}\left[\psi^{-1}s^{-2} - \frac{\psi^{-2}\bar{h}^{-1}}{\sqrt{a_{\mathrm{T}}}}s^{-5/2}\right] + \frac{t_0}{s}; \qquad (2.51)$$

при $\Omega = 0$

$$t_{\mathrm{T}}^L(z,s) \approx \left(t_{\mathrm{C}} - t_0\right)e^{-z\sqrt{s/a_{\mathrm{T}}}}\left[\bar{h}\sqrt{a_{\mathrm{T}}}s^{-3/2} - \bar{h}^2 a_{\mathrm{T}} s^{-2}\right] + \frac{t_0}{s}. \qquad (2.52)$$

Для трансформанти (2.51) при $\Omega \ne 0$, використовуючи формули обернення перетворення Лапласа [144, с. 585]

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{s^2}\right] = 4\tau\,\mathrm{i}^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{s^{5/2}}\right] = 8\tau^{3/2}\,\mathrm{i}^3\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right), \qquad (2.53)$$

отримуємо асимптотичну формулу для малих значень часу $\mathrm{Fo} << 1$ для безрозмірної температури в півпросторі ($0 \le \bar{z} < \infty$):

$$\vartheta_{\text{T}}(\bar{z},\text{Fo}) \approx \frac{4\text{Bi}}{\eta}\text{Fo}\left[\text{i}^2\,\text{erfc}\,\bar{\varphi} - \frac{2\left(1+\xi\text{Bi}\right)}{\eta}\left(\text{i}^3\,\text{erfc}\,\bar{\varphi}\right)\sqrt{\text{Fo}}\right], \qquad (2.54)$$

де
$$\text{i}^m\,\text{erfc}\,u = \int_u^{\infty} \text{i}^{m-1}\,\text{erfc}\,y dy, \quad m = 1,2,3,\ldots .$$

Підставляючи вираз (2.54) у формулу відновлення (2.24) з врахуванням співвідношення (2.39), знайдемо асимптотичний вираз для температури в покритті:

$$\vartheta_i(\bar{z},\text{Fo}) \approx \frac{\text{Bi}}{\eta}\text{Fo}\left[1 - \frac{4\left(1+\xi\text{Bi}\right)}{3\sqrt{\pi}\eta}\sqrt{\text{Fo}} + r_i(\bar{z})\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi\text{Fo}}} + \frac{1+\xi\text{Bi}}{\eta}\right)\right],$$
$$\bar{z}_i \le \bar{z} \le \bar{z}_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}; \;\; \text{Fo} << 1. \qquad (2.55)$$

При $\Omega = 0$ для трансформанти (2.52), використовуючи формули обернення перетворення Лапласа (2.53) і [144, с. 585]

$$\text{L}^{-1}\left[\frac{\text{e}^{-\bar{k}\sqrt{s}}}{s^{3/2}}\right] = 2\sqrt{\tau}\,\text{i}\,\text{erfc}\left(\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

отримуємо наступний асимптотичний вираз для малих значень часу $\text{Fo} << 1$ для безрозмірної температури в півпросторі ($0 \le \bar{z} < \infty$):

$$\vartheta_{\text{T}}(\bar{z},\text{Fo}) \approx 2\text{Bi}_*\sqrt{\text{Fo}}\left[\text{i}\,\text{erfc}\,\bar{\varphi} - 2\text{Bi}_*\sqrt{\text{Fo}}\,\text{i}^2\,\text{erfc}\,\bar{\varphi}\right]. \qquad (2.56)$$

Підставляючи вираз (2.56) у формулу відновлення (2.24) та враховуючи (2.39), знайдемо асимптотичну формулу для температури в покритті:

$$\vartheta_i(\bar{z},\text{Fo}) \approx \text{Bi}_*\left[-r_i(\bar{z}) + 2\left(1+\text{Bi}_*\tilde{r}_i(\bar{z})\right)\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} - \text{Bi}_*\text{Fo}\right],$$
$$\bar{z}_i \le \bar{z} \le \bar{z}_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}; \;\; \text{Fo} << 1. \qquad (2.57)$$

Можна відзначити, що розподіл температури при малих значеннях часу згідно з асимптотичними формулами (2.54), (2.55) залежить як від параметра Bi, так і від ефективних термоопору і теплоємності покриття.

2.1.4.2. Формули для контактної температури

Для практики велике значення має дослідження контактної температури на поверхні поділу тіло–покриття, де може досягатися максимально можлива температура тіла при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем. З формул (2.40), (2.42), (2.44) отримуємо:

для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\mathrm{T}} \neq 0$:

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{2\Upsilon}\left[(1+\Upsilon)F_1(0,\mathrm{Fo}) - (1-\Upsilon)F_2(0,\mathrm{Fo})\right], \qquad (2.58)$$

для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\mathrm{T}} = 0$:

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{2\beta_*}{\sqrt{\pi}} + \left(2\beta_*^2 - 1\right)F_3(0,\mathrm{Fo}), \qquad (2.59)$$

для $\Omega = 0$:

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) = 1 - F_4(0,\mathrm{Fo}). \qquad (2.60)$$

Відповідно, з формули (2.49) випливає вираз для контактної температури для великих часів

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) \approx 1 - \frac{1}{\mathrm{Bi}_*\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}, \quad \mathrm{Fo} >> 1, \qquad (2.61)$$

з формули (2.54) – для малих часів при $\Omega \neq 0$

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) \approx \frac{\mathrm{Bi}}{\eta}\mathrm{Fo}\left[1 - \frac{4\left(1+\xi\mathrm{Bi}\right)}{3\sqrt{\pi}\eta}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right], \quad \mathrm{Fo} << 1, \qquad (2.62)$$

з формули (2.56) – для малих часів при $\Omega = 0$

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) \approx \mathrm{Bi}_*\sqrt{\mathrm{Fo}}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \mathrm{Bi}_*\sqrt{\mathrm{Fo}}\right], \quad \mathrm{Fo} << 1. \qquad (2.63)$$

Зазначимо, що вираз (2.61) для великих значень часу можна отримати, якщо підставити асимптотичне подання [144, с. 575]

$$\operatorname{erfc} u \approx \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi} u}\left(1-\frac{1}{2u^2}\right),\ u >> 1$$

у формули (2.40), (2.42), (2.44) при $\bar{z} = 0$.

Для малих значень часу підстановка наближеного співвідношення [144, с. 575] $\operatorname{erfc} u \approx 1 - 2u/\sqrt{\pi} + 2u^3/\left(3\sqrt{\pi}\right),\ u << 1$ у випадку $\Omega \neq 0$ у формули (2.40), (2.42) при $\bar{z} = 0$ призводить до виразу (2.62), а для випадку $\Omega = 0$ у формулу (2.44) при $\bar{z} = 0$ – до виразу (2.63).

Можна також зауважити, що у разі відсутності покриття вираз (2.61) переходить у відому формулу [8, 144] $\vartheta_{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo}) \approx 1 - \dfrac{1}{\mathrm{Bi}\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}$ при великих Fo.

У випадку неврахування термоопору покриття ($H^{-1} = \xi = 0$) формула (2.58) збігається з виразом, отриманим в [8, с. 84] для випадку постійного в часі коефіцієнта тепловіддачі.

Слід підкреслити, що зміна температури при великих значеннях часу згідно з асимптотичною формулою (2.61) обумовлюється лише ефективною характеристикою $\mathrm{Bi}_* = \dfrac{\mathrm{Bi}}{1+\xi \mathrm{Bi}}$, яка визначається інтенсивністю тепловіддачі на поверхні покриття і ефективним термоопором покриття, і не залежить від теплоємності покриття.

2.1.4.3. Числові результати дослідження процесу теплопровідності в півпросторі з багатошаровим покриттям

Можна відзначити, що запис розв’язку в критеріальній формі (2.40), (2.42), (2.44) дає можливість здійснити параметричний аналіз впливу властивостей покриття на перебіг теплового процесу в тілі.

Безрозмірними вихідними параметрами задачі є: просторова координата $\bar{z}$, час – число Фур'є Fo, ефективний термоопір покриття ξ, ефективна теплоємність покриття η, критерій Біо Bi.

На основі отриманого розв’язку досліджено закономірності процесу теплопровідності в системі тіло – багатошарове покриття.

На рис. 2.2 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \vartheta_{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$ на поверхні півпростір – покриття залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності покриття η, а на рис. 2.3 – в залежності від параметра Bi. Розрахунки для рис. 2.2 проведено при $\mathrm{Bi} = 1$, для рис. 2.3 – при $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$.

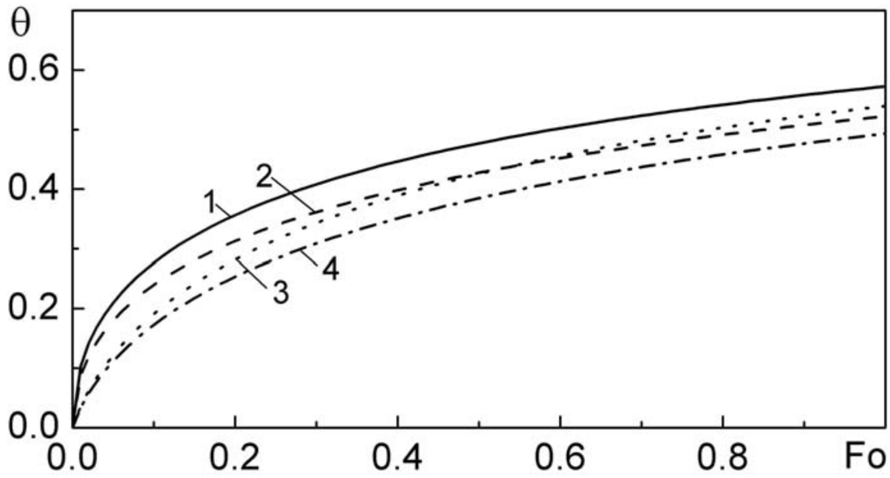


Рис 2.2. Зміна в часі контактної температури на поверхні поділу півпростір–покриття залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття: $\xi = 0, \eta = 0$ (1); $\xi = 0.2, \eta = 0$ (2); $\xi = 0, \eta = 0.2$ (3); $\xi = 0.2, \eta = 0.2$ (4)

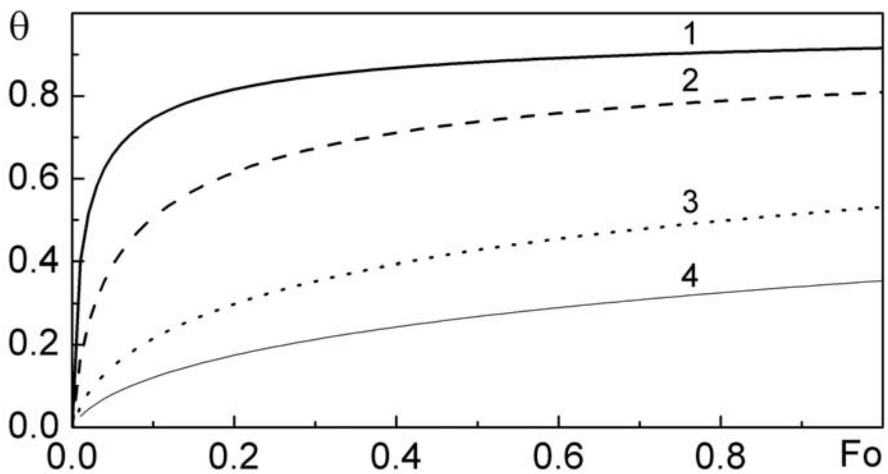


Рис. 2.3. Зміна в часі контактної температури на поверхні поділу півпростір–покриття при різних значеннях критерію Bi: $\mathrm{Bi} = 20$ (1); $\mathrm{Bi} = 4$ (2); $\mathrm{Bi} = 1$ (3); $\mathrm{Bi} = 0.5$ (4)

Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури тіла при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем. Як і слід було очікувати, наявність покриття знижує температуру поверхні (крива 1 на рис. 2.2 – покриття відсутнє).

Зі співвідношень для відносного ефективного термоопору $\xi = \dfrac{H^{-1}}{z_* / \lambda_\text{T}}$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i / \lambda_i$ і відносної ефективної теплоємності покриття $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_\text{T} z_*}$, $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta_i$ випливає, що зі збільшенням товщини покриття, зменшенням теплопровідності і збільшенням теплоємності матеріалу його шарів зростає термоізолююча здатність покриття (рис. 2.2). Збільшення коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покриття інтенсифікує процес теплопереносу (рис. 2.3).

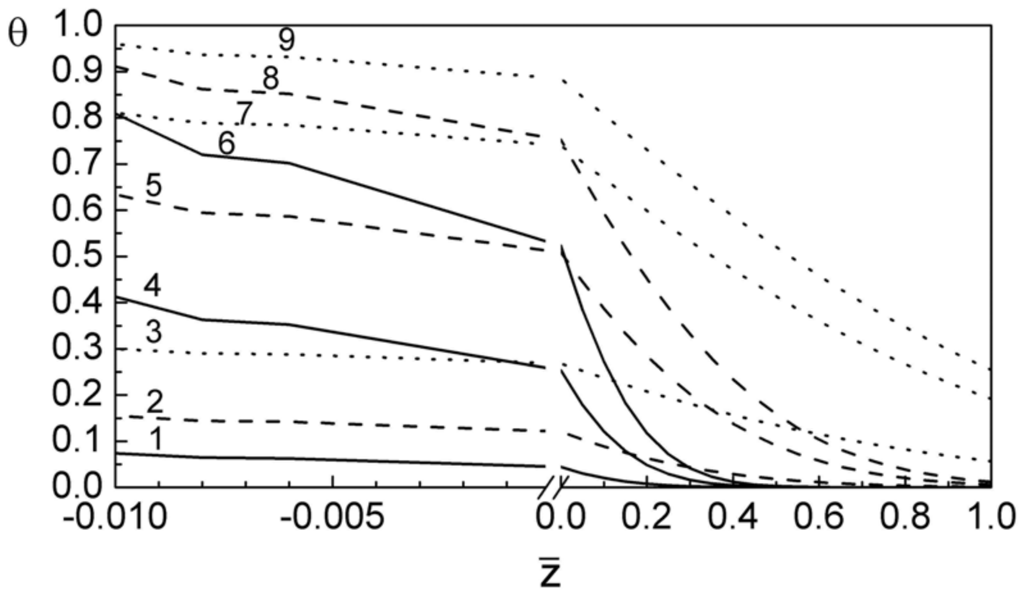


Рис. 2.4. Температурний профіль в системі півпростір – тришарове покриття для значень часу $\text{Fo} = 0.02$ (суцільні криві 1, 4, 6), $\text{Fo} = 0.1$ (штрихові криві 2, 5, 8), $\text{Fo} = 0.5$ (пунктирні криві 3, 7, 9) для значень критерію $\text{Bi} = 1$ (криві 1, 2, 3), $\text{Bi} = 4$ (криві 4, 5, 6), $\text{Bi} = 20$ (криві 7, 8, 9)

На рис. 2.4 показано розподіл температури за товщиною в системі півпростір–тришарове покриття для деяких моментів часу для різних значень Bi при таких співвідношеннях геометричних і теплофізичних параметрів різних шарів покриття:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3:1:1,\ \delta / z_* = 0.01, \tag{2.64}$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_\text{Т} = 3:10:2:30,\ \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_\text{Т} = 3{:}6{:}1{:}3. \tag{2.65}$$

Як видно з рис. 2.4, при великих значеннях Bi розподіл температури за товщиною покриття більше відхиляється від рівномірного. Слід відзначити, що такий характер розподілу температури за товщиною покриття неможливо отримати за схемою «зосередженої ємності» [5, 9].

2.2. Теплопровідність півпростору з багатошаровим покриттям за циклічного конвективного нагріву

Одним із сучасних та широко застосовуваних в промисловості технологічних способів зміцнення металів, сплавів, деталей машин і механізмів (включаючи вироби з багатошаровими покриттями різноманітного функціонального призначення) є термічна обробка, в якій використовується циклічна багаторазова зміна температури. Зокрема, таким методом зміцнення є термоциклічна обробка за певної кількості циклів з періодами нагрівання та охолодження [246].

Аналітичному та чисельному розв’язуванню задач нестаціонарної теплопровідності в умовах залежності від часу температури зовнішнього середовища присвячені роботи [83, 87, 122, 130, 158, 190, 440, 441, 471, 521, 525] для багатошарових тіл і [6, 8, 9, 36, 81, 101, 148, 231, 234, 337, 363, 413, 414, 449, 487, 543] для тіл з одно- і багатошаровими покриттями.

В [250] розглянуто циклічне навантаження тіл простої форми під впливом температури навколишнього середовища, яка є лінійною, експоненціальною, косинусоїдальною і гармонічною функцією часу.

Аналітичні розв’язки крайових задач теплопровідності з неоднорідними циклічними граничними умовами третього роду для періодів однакової і різної тривалості нагрівання та охолодження в межах одного циклу для тіл простої форми і тіл з покриттям за допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур'є–Ханкеля наведено в [97, 98].

У цьому підрозділі з використанням узагальненої граничної умови на основі інтегрального перетворення Лапласа із застосуванням теореми запізнювання отримано аналітичний розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям за кусково-однорідної зміни температури зовнішнього середовища і досліджено закономірності теплопереносу в такій системі при конвективному теплообміні в процесі термоциклювання.

2.2.1. Постановка задачі

Розглядається процес конвективної взаємодії з довкіллям півпростору через n-шарове покриття товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$. Початок координати $z = 0$ розміщено на контактній поверхні покриття з основою, а її додатний відлік спрямовано вглиб півпростору (рис. 2.1). Процес термоциклювання розділено на K циклів, кожен з яких складається з двох періодів (нагрівання та охолодження) [98]. Тривалість k-го циклу становить $\tau_k - \tau_{k-1}$, а $\tau_{k-1\leftrightarrow k}$ ($\tau_{k-1} < \tau_{k-1\leftrightarrow k} < \tau_k$) – момент миттєвого перемикання періодів у межах одного циклу. В момент часу $\tau_0 = 0$ початковий розподіл температури вздовж координати z вважаємо відомим і постійним.

Одновимірна нестаціонарна крайова задача теплопровідності формулюється так само, як в параграфі 2.1.1 – записується рівняннями та співвідношеннями (2.1)–(2.5), де у початковій умові (2.2)

$$t_{\mathrm{T}0}(z) = t_0, \quad 0 \le z < \infty; \quad t_{i0}(z) = t_0, \ -\delta \le z \le 0, \ i = \overline{1,n}; \qquad (2.66)$$

а температура довкілля у граничній умові (2.3) конвективного теплообміну між покриттям і середовищем задається кусково-однорідною функцією часу

$$t_{\mathrm{C}}(\tau)=\sum_{k=1}^{K}\Big[t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}S_{-}\left(\tau-\tau_{k-1}\right)+\left(t_{\mathrm{C}}^{(k,2)}-t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}\right)S_{-}\left(\tau-\tau_{k-1\leftrightarrow k}\right)\Big]\times \times\Big[S_{-}\left(\tau-\tau_{k-1}\right)-S_{-}\left(\tau-\tau_{k}\right)\Big]. \tag{2.67}$$

Тут $t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}$, $t_{\mathrm{C}}^{(k,2)}$ – температура середовища в першому і другому періодах k-го циклу; $S_{-}(\varsigma)=\begin{cases}1 & \text{при } \varsigma\ge 0\\ 0 & \text{при } \varsigma<0\end{cases}$ – одинична функція Гевісайда.

2.2.2. Розв’язок задачі з узагальненою граничною умовою

Узагальнену граничну умову теплопровідності (2.6) для даного випадку запишемо так:

$$\lambda_{\mathrm{T}}\left(1+\frac{\mu}{H}\right)\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial z}+\mu\left(t_{C}(\tau)-t_{\mathrm{T}}\right)=\Omega\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial\tau},\ \ t_{\mathrm{T}|\tau=0}=t_{0}\ \text{при}\ z=0. \tag{2.68}$$

Розв’язок рівняння (2.1) у півпросторі в трансформантах Лапласа (2.7) з урахуванням умов (2.2), (2.66), (2.5), (2.68) отримуємо у вигляді

$$t_{\mathrm{T}}^{L}(z,s)=\frac{t_{0}}{s}+\frac{\left(st_{\mathrm{C}}^{L}(s)-t_{0}\right)\exp(-qz)}{s\left(1+\psi s+\overline{h}^{-1}q\right)}, \tag{2.69}$$

де трансформанта температури середовища (2.67)

$$t_{C}^{L}(s)=\sum_{k=1}^{K}\frac{t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}}{s}\exp\left(-s\tau_{k-1}\right)+\sum_{k=1}^{K}\frac{t_{\mathrm{C}}^{(k,2)}-t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}}{s}\exp\left(-s\tau_{k-1\leftrightarrow k}\right)-\sum_{k=1}^{K}\frac{t_{\mathrm{C}}^{(k,2)}}{s}\exp\left(-s\tau_{k}\right), \tag{2.70}$$

а величини q, $\overline{h}^{-1}$, ψ визначено в 2.1.2.

Підставляючи (2.70) в формулу (2.69), подамо зображення так:

$$t_{\mathrm{T}}^{L}(z,s)= =\frac{t_{0}}{s}+\frac{\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}t_{\mathrm{C}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left[\exp\left(-s\tau_{k+l-2}\right)-\exp\left(-s\tau_{k-1\leftrightarrow k}\right)\right]-t_{0}\right]\exp(-qz)}{s\left(1+\psi s+\overline{h}^{-1}q\right)}. \tag{2.71}$$

Залежно від значень коренів характеристичного рівняння (2.9) для отримання оригінала від зображення (2.71) можливі наступні варіанти.

1) Для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\text{Т}} \neq 0$ рівняння (2.9) має два різні корені (2.10). Тоді трансформанту (2.71) подамо через ці корені так

$$t_{\text{Т}}^{L}(z,s) = \frac{t_0}{s} + \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} t_{\text{С}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left[\exp\left(-s\tau_{k+l-2}\right) - \exp\left(-s\tau_{k-1\leftrightarrow,k}\right)\right] - t_0}{\psi\sqrt{a_{\text{Т}}}\left(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\right)s} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{a_{\text{Т}}}}\sqrt{s}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{s} - \sqrt{a_{\text{Т}}}\tilde{q}_1} - \frac{1}{\sqrt{s} - \sqrt{a_{\text{Т}}}\tilde{q}_2}\right). \quad (2.72)$$

Для знаходження оригіналу зображення (2.72) використаємо формулу обернення (2.12) і $L^{-1}\left[1/s\right] = 1$ та теорему запізнення [144, с. 480]

$$\mathrm{L}\left[f_b(\tau)\right] = \exp(-sb)\,\mathrm{L}\left[f(\tau)\right], \text{ де } f_b(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \tau < b \\ f(\tau - b) & \text{при } \tau > b. \end{cases} \quad (2.73)$$

Оригінал зображення (2.72) має вигляд:

$$\theta_{\text{Т}}\left(\overline{z},\text{Fo}\right) = 1 - Z_0^{(1)}\left(\overline{z},\text{Fo}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\text{С}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(1)}\left(\overline{z},\text{Fo}\right) - Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(1)}\left(\overline{z},\text{Fo}\right)\right), \quad 0 \leq \overline{z} < \infty, \quad (2.74)$$

де

$$Z_p^{(1)}\left(\overline{z},\text{Fo}\right) = \left[\text{erfc}\left(\overline{\varphi}_p\right) - G\left(\overline{z},\text{Fo} - \text{Fo}_p\right)\right]S_{-}\left(\text{Fo} - \text{Fo}_p\right),$$

$$p = 0, 0 \leftrightarrow 1, 1, 1 \leftrightarrow 2, 2, \ldots, K-1, K-1 \leftrightarrow K, K;$$

$$G\left(x,y\right) = \frac{1}{2\Upsilon}\left[(1+\Upsilon)F_1\left(x,y\right) - (1-\Upsilon)F_2\left(x,y\right)\right],$$

величини $\overline{z}$, Fo, κ, Υ визначені в параграфі 2.1.2, функція $F_l\left(\overline{z},\text{Fo}\right)$ – за формулою (2.46),

$$\theta_{\text{Т}} = \frac{t_{\text{Т}}}{t_0},\ \theta_{\text{С}}^{(k,1)} = \frac{t_{\text{С}}^{(k,1)}}{t_0},\ \theta_{\text{С}}^{(k,2)} = \frac{t_{\text{С}}^{(k,2)}}{t_0},\ \text{Fo}_p = \frac{a_{\text{Т}}\tau_p}{z_*^2},\ \overline{\varphi}_p = \frac{\overline{z}}{2\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_p}}.$$

2) При $\Omega \neq 0$ і $\overline{h}^{-2} - 4\psi a_{\text{T}} = 0$ рівняння (2.9) має один дійсний двократний корінь (2.17). У цьому випадку трансформанта (2.71) буде мати такий вигляд:

$$t_{\text{T}}^{L}(z,s) = \frac{t_0}{s} + \\ + \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} t_{\text{C}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left[\exp\left(-s\tau_{k+l-2}\right) - \exp\left(-s\tau_{k-1\leftrightarrow k}\right)\right] - t_0}{\psi s\left(\sqrt{s} - \sqrt{a_{\text{T}}}\tilde{q}_3\right)^2}\exp\left(-\frac{z\sqrt{s}}{\sqrt{a_{\text{T}}}}\right). \tag{2.75}$$

Використовуючи формулу обернення перетворення Лапласа (2.19) і теорему запізнення (2.73), отримаємо

$$\theta_{\text{T}}(\overline{z},\text{Fo}) = 1 - Z_0^{(2)}(\overline{z},\text{Fo}) + \\ + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\text{C}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(2)}(\overline{z},\text{Fo}) - Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(2)}(\overline{z},\text{Fo})\right),\ 0 \le \overline{z} < \infty, \tag{2.76}$$

де

$$Z_p^{(2)}(\overline{z},\text{Fo}) = \left[\text{erfc}\left(\varphi_p\right) - 2\kappa\sqrt{\frac{\text{Fo}-\text{Fo}_p}{\pi}}\exp\left(-\varphi_p^2\right) + \right. \\ \left. + \left(\kappa\overline{z} + 2\kappa^2\left(\text{Fo}-\text{Fo}_p\right) - 1\right)F_3\left(\overline{z},\text{Fo}-\text{Fo}_p\right)\right]S_-\left(\text{Fo}-\text{Fo}_p\right).$$

3) Для $\Omega = 0$ рівняння (2.9) має один корінь (2.21). Тоді трансформанту (2.71) подамо таким чином

$$t_{\text{T}}^{L}(z,s) = \frac{t_0}{s} - \left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} t_{\text{C}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left[\exp\left(-s\tau_{k+l-2}\right) - \exp\left(-s\tau_{k-1\leftrightarrow k}\right)\right] - t_0\right] \times \\ \times \frac{\tilde{q}_4\sqrt{a_{\text{T}}}\exp\left(-\frac{z}{\sqrt{a_{\text{T}}}}\sqrt{s}\right)}{s\left(\sqrt{s} - \tilde{q}_4\sqrt{a_{\text{T}}}\right)}. \tag{2.77}$$

Використовуючи формулу (2.12) і теорему запізнення (2.73), запишемо оригінал для (2.77) у вигляді

$$\theta_{\text{T}}(\overline{z},\text{Fo}) = 1 - Z_0^{(3)}(\overline{z},\text{Fo}) + \\ + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\text{C}}^{(k,l)}(-1)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(3)}(\overline{z},\text{Fo}) - Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(3)}(\overline{z},\text{Fo})\right),\ \ 0 \le \overline{z} < \infty, \tag{2.78}$$

де $Z_p^{(3)}(\overline{z},\text{Fo}) = \left[\text{erfc}\left(\varphi_p\right) - F_4\left(\overline{z},\text{Fo}-\text{Fo}_p\right)\right]S_-\left(\text{Fo}-\text{Fo}_p\right)$.

При $\overline{z}=0$ з (2.74), (2.76) і (2.78) отримаємо формули для розрахунку контактної температури на поверхні поділу тіло–покриття.

1) Для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\mathrm{T}} \neq 0$

$$\theta_{\mathrm{T}}\left(0,\mathrm{Fo}\right)=G\left(0,\mathrm{Fo}\right)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(1)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)-Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(1)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)\right). \quad (2.79)$$

2) Для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\mathrm{T}} = 0$

$$\begin{gathered}\theta_{\mathrm{T}}\left(0,\mathrm{Fo}\right)=2\kappa\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}}+\left(1-2\kappa^{2}\mathrm{Fo}\right)F_{3}\left(0,\mathrm{Fo}\right)+\\ +\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(2)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)-Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(2)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)\right).\end{gathered} \quad (2.80)$$

3) Для $\Omega = 0$

$$\theta_{\mathrm{T}}\left(0,\mathrm{Fo}\right)=F_{4}\left(0,\mathrm{Fo}\right)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(Z_{k+l-2}^{(3)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)-Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(3)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)\right). \quad (2.81)$$

Підставляючи (2.74), (2.76) і (2.78) в формулу відновлення (2.24), отримуємо вирази для температури в i-му шарі покриття.

1) Для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\mathrm{T}} \neq 0$

$$\theta_{i}(\overline{z},\mathrm{Fo})=1-\chi_{0}^{(1,i)}\left(x,\mathrm{Fo}\right)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(\chi_{k+l-2}^{(1,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)-\chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(1,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)\right), \quad (2.82)$$

де

$$\begin{gathered}\chi_{p}^{(1,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)=Z_{p}^{(1)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)+\\ +\frac{r_{i}(\overline{z})}{2\Upsilon}\left[(1-\Upsilon)\overline{q}_{2}F_{2}\left(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right)-(1+\Upsilon)\overline{q}_{1}F_{1}\left(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right)\right]S_{-}\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right).\end{gathered}$$

2) Для $\Omega \neq 0$ при $\overline{h}^{-2}-4\psi a_{\mathrm{T}} = 0$

$$\theta_{i}(\overline{z},\mathrm{Fo})=1-\chi_{0}^{(2,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(\chi_{k+l-2}^{(2,i)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)-\chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(2,i)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)\right), \quad (2.83)$$

де

$$\begin{gathered}\chi_{p}^{(2,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)=Z_{p}^{(2)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)+\\ +2\kappa^{2}r_{i}(\overline{z})\left[\kappa\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right)F_{3}\left(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right)-\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}}{\pi}}\right]S_{-}\left(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_{p}\right).\end{gathered}$$

3) Для $\Omega = 0$

$$\theta_i(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \chi_0^{(3,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2}\theta_{\mathrm{C}}^{(k,l)}\left(-1\right)^{l+1}\left(\chi_{k+l-2}^{(3,i)}\left(0,\mathrm{Fo}\right) - \chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(3,i)}\left(0,\mathrm{Fo}\right)\right), \quad (2.84)$$

де $\chi_p^{(3,i)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right) = \left[1 - \left(1 + \mathrm{Bi}_* r_i(\overline{z})\right) F_4\left(0,\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_p\right)\right] S_-\left(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_p\right)$.

Тут вирази для величин $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, Bi_* та функції $r_i(\overline{z})$ наведено в параграфі 2.1.2.

2.2.3. Числові результати дослідження процесу теплопровідності в півпросторі з багатошаровим покриттям за циклічного теплообміну

Для здійснення параметричного аналізу стану системи півпростір–багатошарове покриття при термоциклічній обробці вибрано наступні вихідні параметри: просторова координата $\overline{z}$, час – число Фур'є Fo, критерій Біо Bi, ефективний термоопір покриття ξ, ефективна теплоємність покриття η. Розрахунки виконано при температурі нагрівання $t_{\mathrm{C}}^{(k,1)} = 1073\ \mathrm{K}$, температурі охолодження $t_{\mathrm{C}}^{(k,2)} = 293\ \mathrm{K}$, $k = 1,2,...,K$; початковій температурі системи $t_0 = 293\ \mathrm{K}$; тривалості циклу $\mathrm{Fo}_1 = 3$; для рис. 2.5, 2.6, 2.9 – при $\xi = 0.2$, $\eta = 0.2$, для рис. 2.6-2.8 – при значенні моменту перемикання періодів $\mathrm{Fo}_{0,1} = 1.5$. Для побудови графіків обезрозмірювання температури здійснюється так: $\overline{\theta}_{\mathrm{T}} = \dfrac{t_{\mathrm{T}} - t_0}{t_{\mathrm{C}}^{(1,1)} - t_0}$.

На рис. 2.5 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \overline{\theta}_{\mathrm{T}}\left(0,\mathrm{Fo}\right)$ на поверхні півпростір – покриття залежно від значення моменту перемикання в циклі. Розрахунки проведено при $\mathrm{Bi} = 4$. З рисунка видно, що при збільшенні моменту перемикання контактна температура зростає. Варіюванням тривалості періоду нагрівання можна домогтися заданого або необхідного рівня контактної температури.

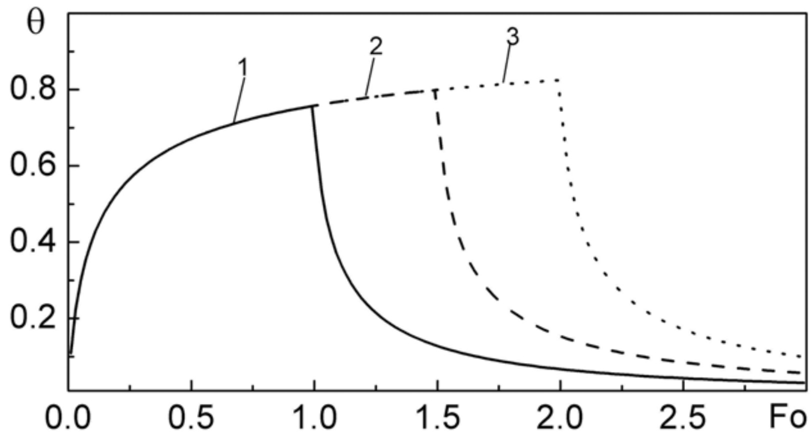


Рис. 2.5. Зміна з часом контактної температури на поверхні півпростір–покриття для різних значень моменту перемикання періодів $\mathrm{Fo}_{0,1}$: 1 – $\mathrm{Fo}_{0,1} = 1$; 2 – $\mathrm{Fo}_{0,1} = 1.5$; 3 – $\mathrm{Fo}_{0,1} = 2$

Рис. 2.6 ілюструє вплив інтенсивності теплообміну на контактну температуру $\theta = \bar{\theta}_{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$. Зростання значення Bi викликає збільшення швидкості нагрівання в першому періоді і швидкості охолодження в другому періоді зони контакту покриття з півпростором. Необхідна швидкість термообробки може бути досягнута вибором певної інтенсивності теплообміну.

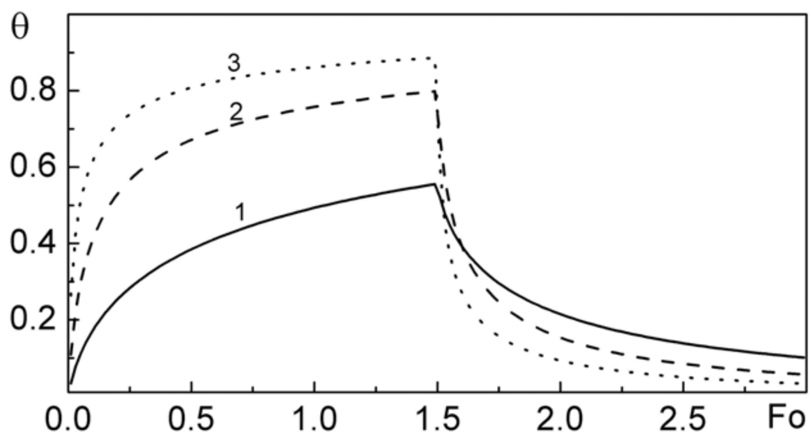


Рис. 2.6. Зміна з часом контактної температури на поверхні півпростір–покриття для різних значень критерію Bi: 1 – $\mathrm{Bi} = 1$; 2 – $\mathrm{Bi} = 4$; 3 – $\mathrm{Bi} = 20$

На рис. 2.7 наведено зміну в часі контактної температури залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття при $\mathrm{Bi}=1$. У періоді нагрівання максимально можлива температура досягається на поверхні півпростору без покриття ($\xi=0$, $\eta=0$), а наявність покриття викликає зниження контактної температури поверхні поділу основи і покриття. У момент завершення циклу при $\mathrm{Fo}=3$ значення контактних температур в розглянутих розрахункових варіантах стають майже однаковими.

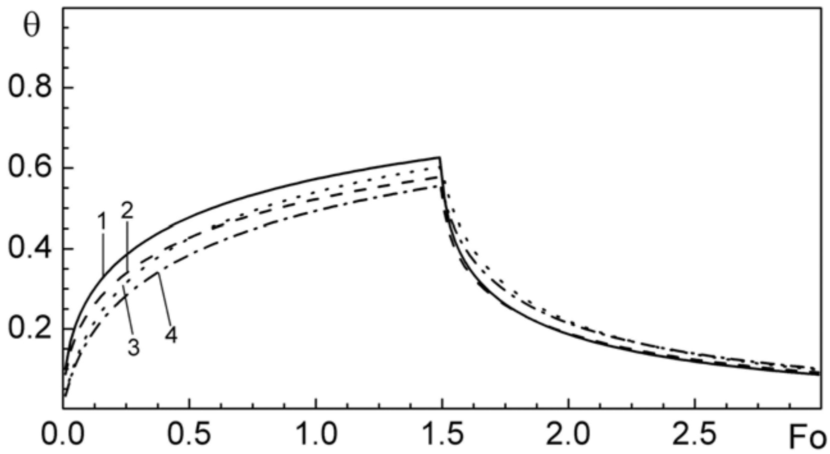


Рис. 2.7. Зміна з часом контактної температури на поверхні півпростір–покриття залежно від ефективного термоопору ξ та теплоємності η покриття:
$1 - \xi=0,\ \eta=0$; $2 - \xi=0.2,\ \eta=0$; $3 - \xi=0,\ \eta=0.2$; $4 - \xi=0.2,\ \eta=0.2$

На рис. 2.8 показано розподіл температури $\theta=\overline{\theta}_{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})$ уздовж координати $\overline{z}$ в системі півпростір – тришарове покриття для моментів часу $\mathrm{Fo}=0.75$ в першому періоді нагрівання і $\mathrm{Fo}=2.25$ в другому періоді охолодження, а також в момент перемикання періодів $\mathrm{Fo}=1.5$ для різних значень Bi при геометричних (2.64) і теплофізичних (2.65) співвідношеннях параметрів шарів покриття та тіла. Як видно з рисунка, при збільшенні значення Bi перепад температури за товщиною покриття і глибиною півпростору зростає.

Рисунок 2.9 ілюструє циклічну зміну в часі контактної температури $\theta=\overline{\theta}_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ при термічній циклічній обробці основи з багатошаровим покриттям для чотирьох двоперіодних циклів ($K=4$) при $\mathrm{Bi}=1$. З проведених розрахунків випливає, що зміною тривалості кожного з циклів, моментів перемикання періодів, температури зовнішнього середовища, інтенсивності конвективного теплообміну можна регулювати необхідний рівень контактної температури.

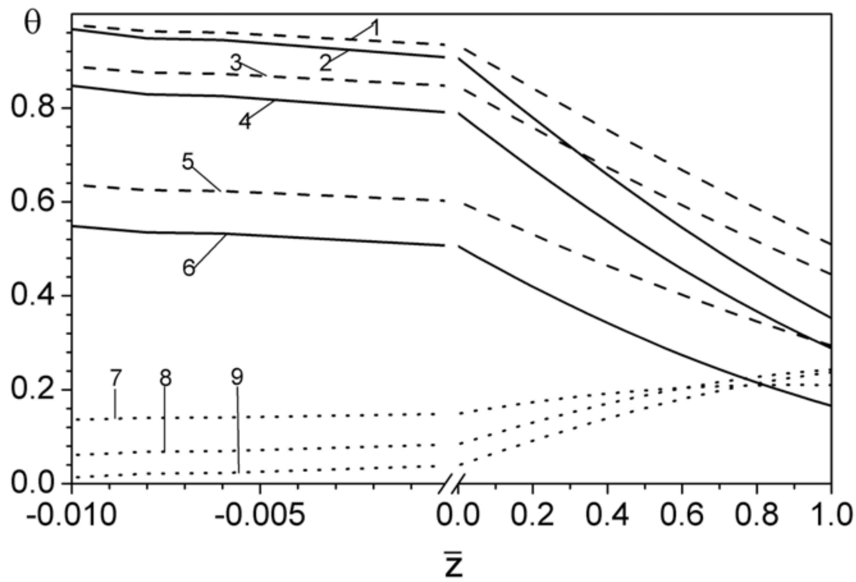


Рис 2.8. Температурний профіль в системі півпростір – тришарове покриття для значень часу $\mathrm{Fo} = 0.75$ (суцільні криві 2, 4, 6), $\mathrm{Fo} = 1.5$ (штрихові криві 1, 3, 5), $\mathrm{Fo} = 2.25$ (пунктирні криві 7-9) при $\mathrm{Bi} = 1$ (криві 5-7), $\mathrm{Bi} = 4$ (криві 3, 4, 8), $\mathrm{Bi} = 20$ (криві 1, 2, 9)

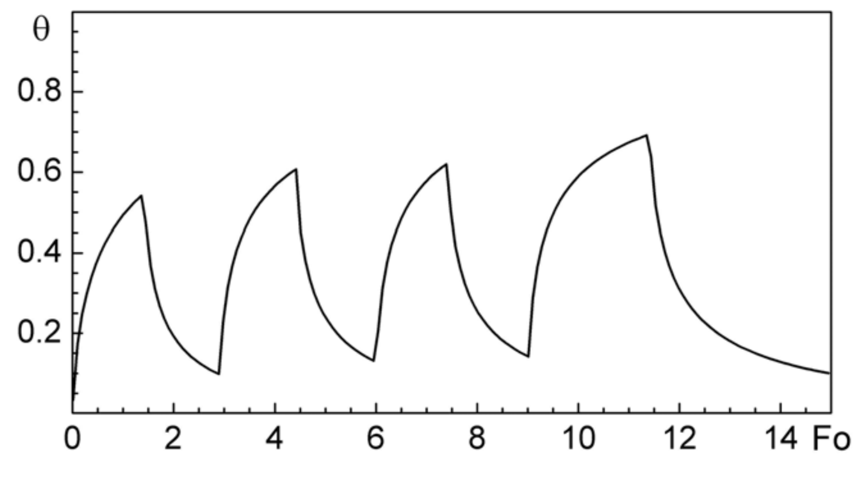


Рис 2.9. Циклічна зміна з часом контактної температури на поверхні півпростір–покриття

($\mathrm{Fo}_{0,1} = 1.4$, $\mathrm{Fo}_2 = 6$, $\mathrm{Fo}_{1,2} = 4.4$, $\mathrm{Fo}_3 = 9$, $\mathrm{Fo}_{2,3} = 7.4$, $\mathrm{Fo}_4 = 15$, $\mathrm{Fo}_{3,4} = 11.4$)

2.3. Термопружність півпростору з багатошаровим покриттям за конвективного нагріву

Задачі про визначення напруженого стану півпростору з покриттям за дії різних типів механічного навантаження досліджували в працях [2, 3, 179, 336, 425, 481, 482, 538, 539]. Нестаціонарні задачі термопружності для півпростору з одношаровим однорідним покриттям за дії сталої температури зовнішнього середовища розглядали в [100, 190, 193, 257, 396, 455, 487, 569], за термоциклічного навантаження – в [363], а стаціонарні для неоднорідного покриття – в [426, 427]. Лише в [360] розв’язано нестаціонарну термопружну задачу для півпростору з двошаровим покриттям.

На основі отриманих в підрозділах 2.1.4 та 2.2.2 розв’язках задач теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям за сталої та кусково-змінної температури довкілля для випадку постійної початкової температури знайдено розв’язок відповідної задачі термопружності та досліджено термонапружений стан системи тіло – багатошарове покриття при стаціонарному та циклічному конвективному нагріві зовнішнім середовищем.

2.3.1. Розв’язування задачі термопружності

Для випадку вільної від зовнішнього навантаження поверхні покриття зі зміною температури за формулами (2.40)-(2.45) напруження в системі описуються формулами [130, 156]

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}^{j}=\sigma_{yy}^{j}=\sigma^{j}(\bar{z},\mathrm{Fo})=\frac{E_j}{1-\nu_j}\Big[B_1(\mathrm{Fo})+B_2(\mathrm{Fo})\bar{z}-(t_{\mathrm{C}}-t_0)\beta_j(\bar{z})\vartheta_j(\bar{z},\mathrm{Fo})\Big],\\ \sigma_{zz}^{j}=\sigma_{xz}^{j}=\sigma_{yz}^{j}=\sigma_{xy}^{j}=0, \qquad j=\mathrm{T},1,2,3,\ldots,n;\end{gathered} \tag{2.85}$$

де $B_1(\mathrm{Fo})$, $B_2(\mathrm{Fo})$ – невідомі функції, $\bar{z}\in[-\delta/z_*,\infty)$.

Задовольняючи умову відсутності напружень на нескінченності

$$\sigma^{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})=0 \quad \text{при} \quad \overline{z}\to\infty, \tag{2.86}$$

остаточно отримуємо вирази для ненульових напружень

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})&=-\frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\left(t_{\mathrm{C}}-t_0\right)\beta_{\mathrm{T}}\vartheta_{\mathrm{T}}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right), \qquad 0\le\overline{z}<\infty,\\ \sigma^{i}(\overline{z},\mathrm{Fo})&=-\frac{E_{i}}{1-\nu_{i}}\left(t_{\mathrm{C}}-t_0\right)\beta_{i}\vartheta_{i}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right), \qquad i=\overline{1,n},\ \ \overline{z}_i\le\overline{z}\le\overline{z}_{i-1}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Ці формули для випадку півпростору з одношаровим покриттям співпадають з наведеними в [100, 363, 487].

2.3.2. Числові результати дослідження термонапруженого стану півпростору з тришаровим покриттям за конвективного нагріву

Таким чином, формулами (2.40)-(2.45), (2.87) дається розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності та термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям. На основі цього розв’язку здійснимо дослідження термонапруженого стану у системі тіло – багатошарове покриття при конвективному нагріванні.

Рисунки 2.10 і 2.11 ілюструють вплив теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну з середовищем на характер зміни напружень у підкладці. Розрахунки для рис. 2.10 проведено при $\mathrm{Bi}=1$, для рис. 2.11 – при $\varsigma=0.1$, $\eta=0.1$. Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливих напружень в півпросторі при нагріванні (або охолодженні) зовнішнім середовищем. Наявність покриття зменшує рівень напружень за абсолютною величиною на граничній поверхні тіла (крива $\xi=0$, $\eta=0$ на рис. 2.10 – покриття відсутнє). Збільшення коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покриття приводить до інтенсифікації процесу теплопереносу і відповідно до збільшення за абсолютною величиною напружень на поверхні тіла (рис. 2.11).

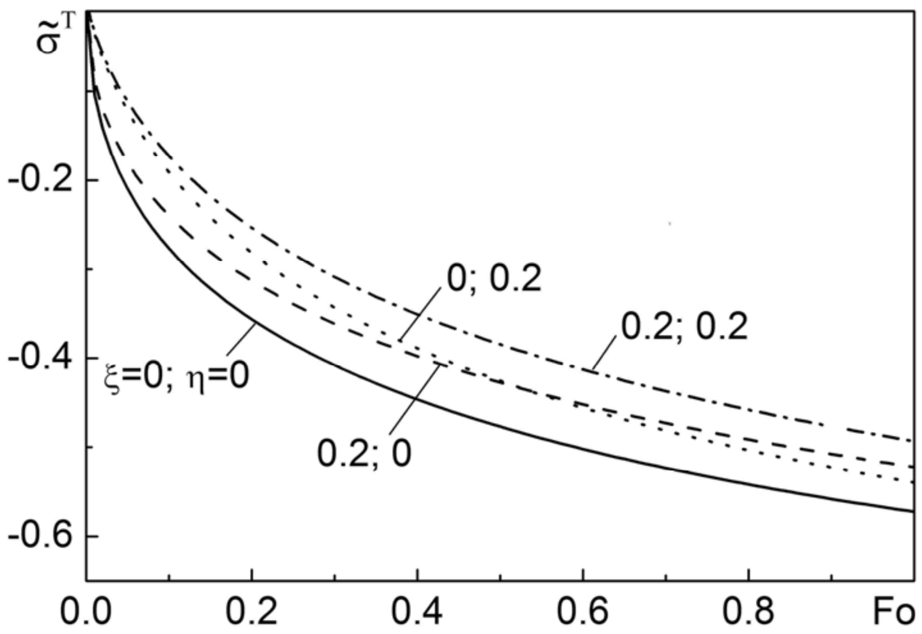


Рис. 2.10. Зміна в часі безрозмірного напруження $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}} = \sigma^{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) \Big/ \dfrac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{C}}-t_0)}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$ на поверхні поділу півпростір–покриття залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття

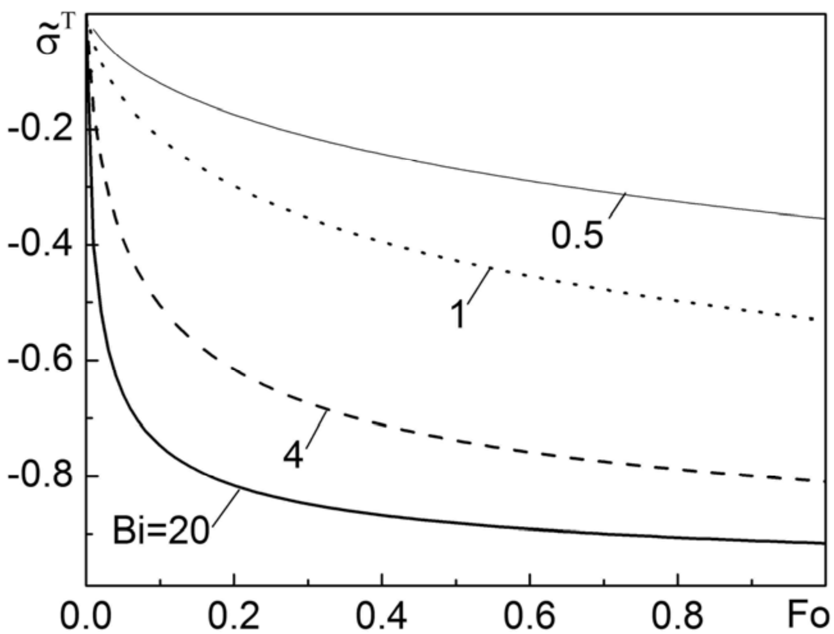


Рис. 2.11. Зміна в часі безрозмірного напруження $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}$ на поверхні поділу півпростір–покриття залежно від параметра Bi

На рис. 2.12 і 2.13 показано розподіли безрозмірних напружень $\tilde{\sigma} = \sigma^{j}(\bar{z}, \mathrm{Fo}) \Big/ \dfrac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}(t_C - t_0)}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$ ($j = \mathrm{T}, 1, 2, 3$) за просторовою координатою у системі півпростір – тришарове покриття за геометричних (2.64), теплофізичних (2.65) та термомеханічних співвідношень

$$\frac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} : \frac{E_2\beta_2}{1-\nu_2} : \frac{E_3\beta_3}{1-\nu_3} : \frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} = 10:2:4:5 \qquad (2.88)$$

параметрів шарів покриття і тіла.

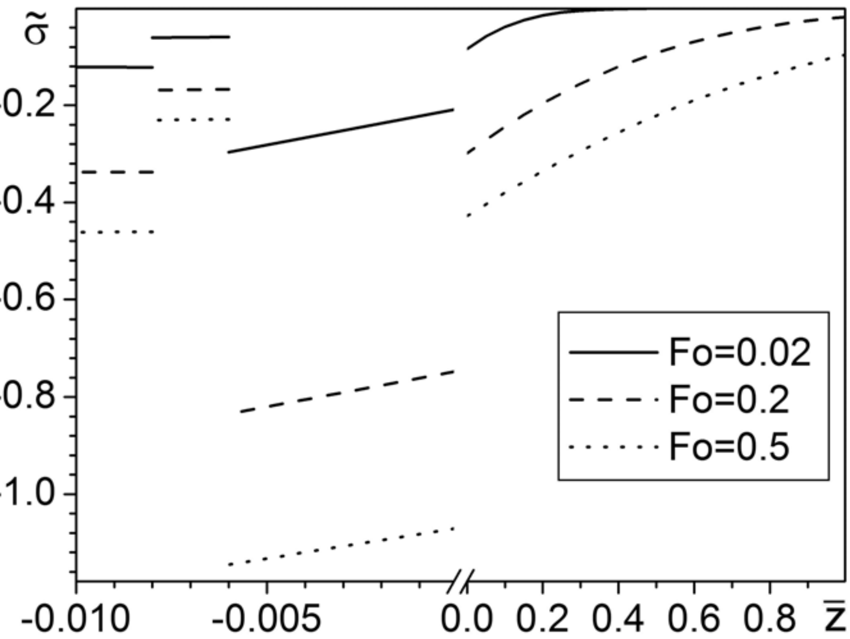


Рис. 2.12. Розподіл напружень за просторовою координатою
у системі півпростір – тришарове покриття
для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi} = 1$

Бачимо, що напруження в покритті мають розривний характер, зростаючи з часом за абсолютною величиною. Згідно з формулами (2.87) їх стрибок на поверхнях поділу шарів покриття залежить від величини $\dfrac{E_i\beta_i}{1-\nu_i} \Big/ \dfrac{E_{i-1}\beta_{i-1}}{1-\nu_{i-1}}$ ($i = \overline{2, n}$), а на поверхні контакту покриття з тілом – від $\dfrac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} \Big/ \dfrac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$ [487].

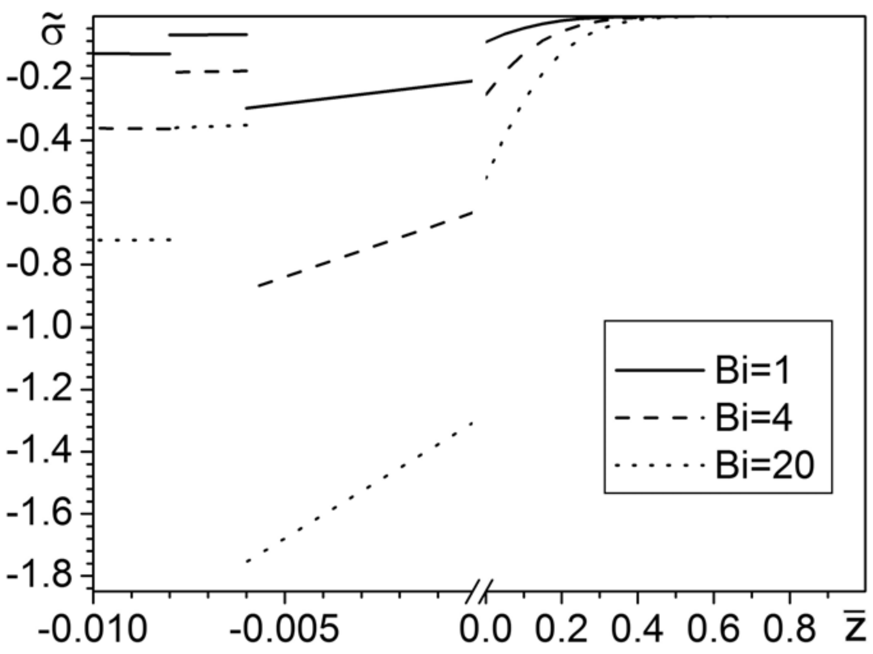


Рис. 2.13. Розподіл напружень за просторовою координатою у системі півпростір – тришарове покриття для різних значень Bi при $\mathrm{Fo} = 0.02$

Рисунок 2.14 ілюструє, що рівень напружень $\tilde{\sigma} = \sigma^i(\bar{z}, \mathrm{Fo}) \Big/ \dfrac{E_\mathrm{T}\beta_\mathrm{T}(t_\mathrm{C} - t_0)}{1-\nu_\mathrm{T}}$ ($i = 1,2,3$) в покритті у будь який момент часу пропорційний величині $\dfrac{E_i\beta_i}{1-\nu_i}$.

Зауважимо, що розрахунок температурного поля за моделлю із узагальненою граничною умовою (2.6) дає можливість отримати розподіл напружень за товщиною у шарах покриття, відмінний від рівномірного (рис. 2.12, 2.13), що є неможливим при використанні моделі з УГУ [5, 9], побудованою з використанням концепції «зосередженої ємності» [77, 221]. Причому при більших значеннях Bi це відхилення від рівномірного за товщиною у шарах покриття зростає (рис. 2.13).

Слід відзначити, що при нагріванні півпростору з покриттям в системі розвиваються стискальні напруження, які можуть приводити до відшарування покрить внаслідок втрати стійкості [146], а при охолодженні – розтягальні напруження, які можуть спричиняти розтріскування покрить [419].

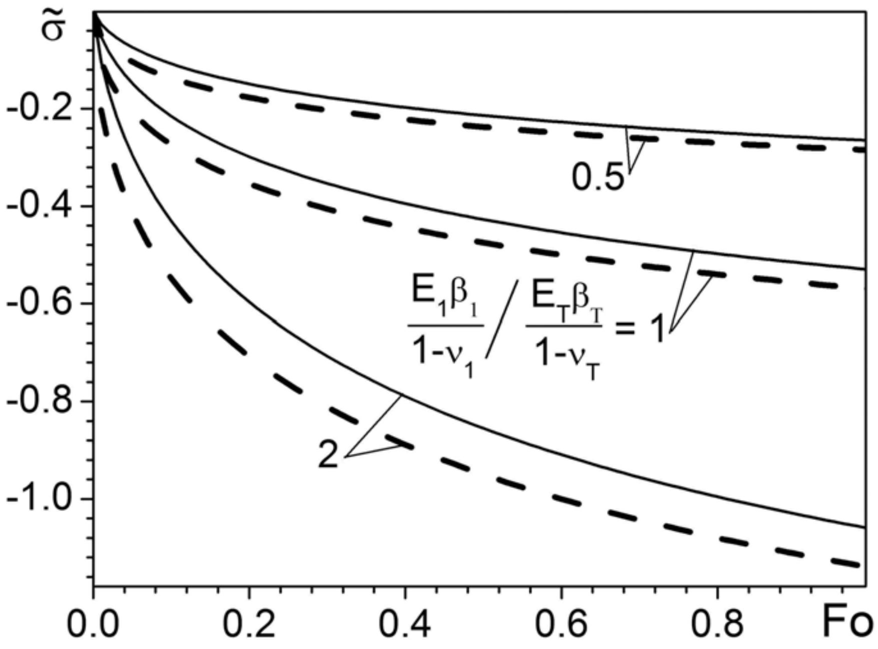


Рис. 2.14. Зміна з часом напружень в покритті
на поверхні поділу з тілом при $\overline{z}=0$ (суцільні криві) та на
зовнішній поверхні покриття при $\overline{z}=-0.01$ (штрихові криві)
для різних значень відношення $\dfrac{E_i\beta_i}{1-\nu_i}\Big/\dfrac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$

2.3.3. Числові результати дослідження термонапруженого стану півпростору з тришаровим покриттям за циклічного конвективного нагріву

Дослідження термонапруженого стану системи півпростір–багатошарове покриття за термоциклічного навантаження проводили за наступних значень вхідних параметрів: температура нагрівання $t_{\mathrm{C}}^{(k,1)}=1073\ \mathrm{K}$, температура охолодження $t_{\mathrm{C}}^{(k,2)}=293\ \mathrm{K}$, $k=1,2,...,K$; початкова температура системи $t_0=293\ \mathrm{K}$; для рис. 2.15, 2.16, 2.19 – при $\xi=0.2$, $\eta=0.2$; для рис. 2.16-2.18 значення моменту перемикання періодів $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow1}=1.5$; для рис. 2.15 – $\mathrm{Bi}=4$, для рис. 2.17, 2.19 $-\mathrm{Bi}=1$.

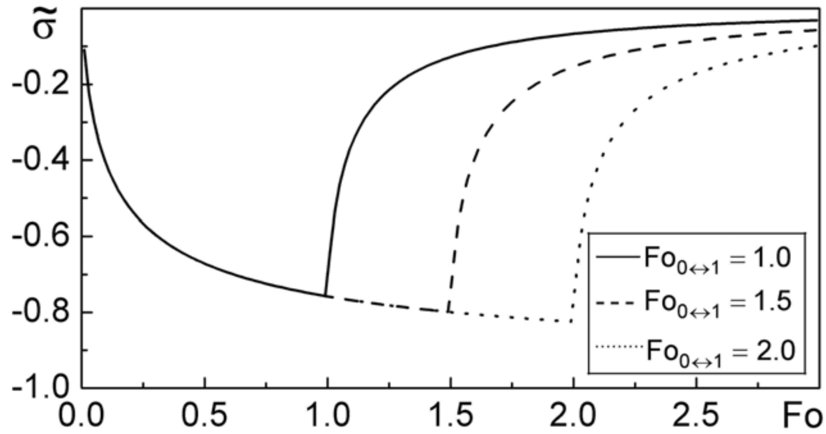


Рис. 2.15. Вплив зміни моменту перемикання
на безрозмірні напруження $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$

На рис. 2.15 показано зміну з часом безрозмірних стискальних напружень $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$ в півпросторі на поверхні контакту з покриттям для різних значень моментів перемикання періодів у межах одного циклу тривалістю $\mathrm{Fo}_1 = 3$. Бачимо, що в першому періоді при збільшенні $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1}$ напруження за абсолютною величиною збільшуються. Зростання моменту перемикання спричиняє певну різницю в значеннях напружень у момент завершення циклу. Зміною моментів перемикання можна досягти їх необхідного рівня.

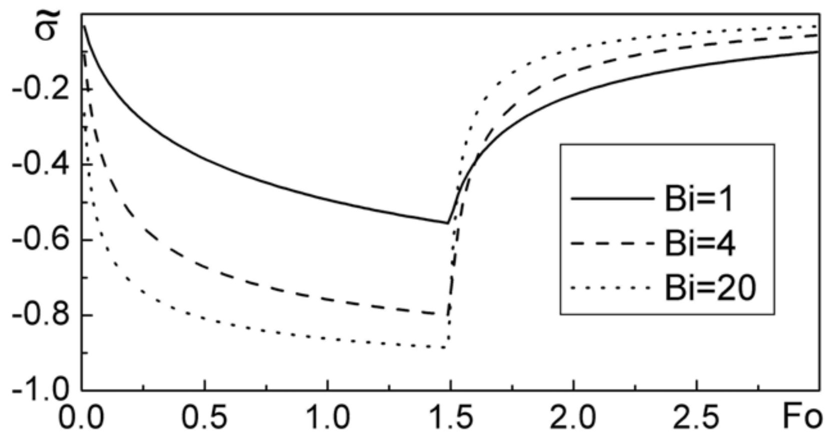


Рис. 2.16. Вплив інтенсивності конвективного теплообміну
на безрозмірні напруження $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$

Рисунок 2.16 ілюструє поведінку з часом напружень $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ в основі на поверхні її контакту з покриттям для різних значень критерію Bi. В періоді нагрівання збільшення величини Bi викликає зростання напружень за абсолютною величиною на поверхні півпростору, а в періоді охолодження – їх зменшення. Потрібний рівень таких напружень може бути теоретично прогнозований шляхом підбору рівня інтенсивності термообробки.

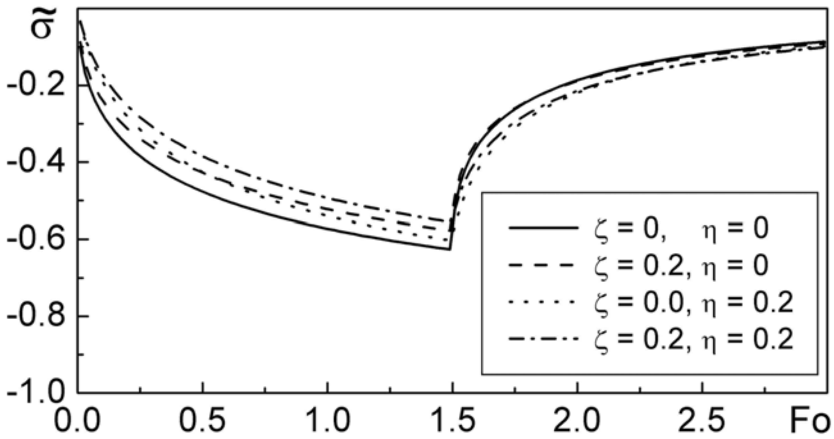
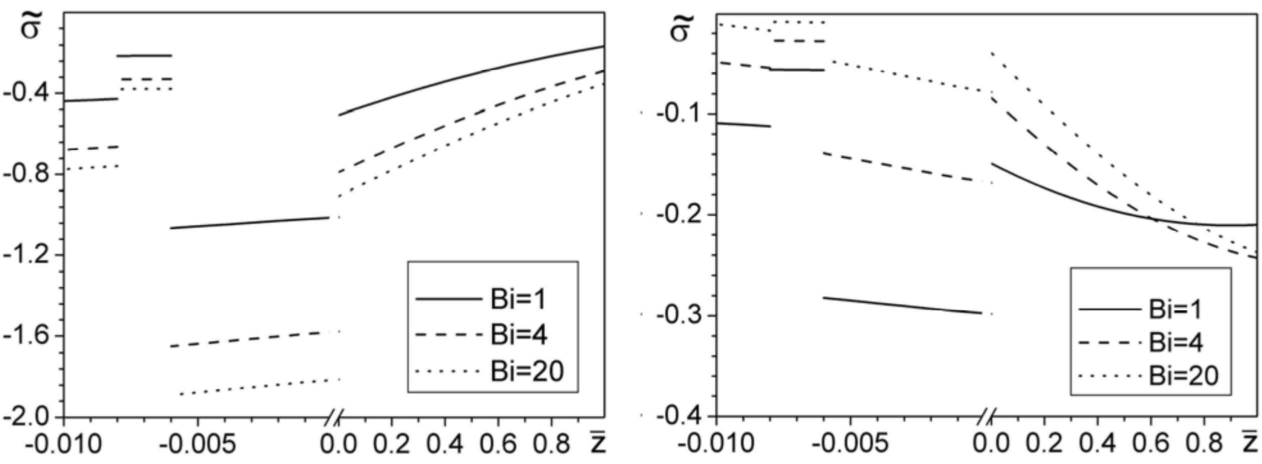


Рис. 2.17. Зміна з часом напружень $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ залежно від ефективних характеристик покриття ξ та η

На рис. 2.17 наведено зміну з часом безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ на поверхні півпростору за відсутності покриття ($\xi=0\,,\eta=0$) та у півпросторі на поверхні поділу з покриттям залежно від ефективних характеристик останнього. В періоді нагрівання такі напруження досягають найбільшого значення за абсолютною величиною на поверхні основи без покриття. Наявність покриття спричиняє зменшення напружень у півпросторі на поверхні контакту з покриттям. В момент завершення циклу $\mathrm{Fo}_1=3$ безрозмірні стискальні напруження $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ стають майже однаковими.



а б

Рис. 2.18. Розподіл напружень $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^j\left(\bar{z}, \mathrm{Fo}\right)$ в системі основа–тришарове покриття для фіксованих моментів часу
а – $\mathrm{Fo} = 0.75$; б – $\mathrm{Fo} = 2.25$

На рис. 2.18 показано розподіл напружень за просторовою координатою $\bar{z}$ в системі півпростір–тришарове покриття для моментів часу $\mathrm{Fo} = 0.75$ в періоді нагрівання та $\mathrm{Fo} = 2.25$ в періоді охолодження для різних значень Bi за геометричних (2.64), теплофізичних (2.65) та термомеханічних (2.88) параметрів шарів покриття та тіла. В обох періодах циклу напруження в покритті мають розривний характер, зростають за абсолютним значенням у періоді нагрівання і спадають у періоді охолодження при збільшенні Bi. Величину стрибка на поверхні контакту шарів покриття визначає співвідношення $\dfrac{E_i\beta_i}{1-\nu_i} : \dfrac{E_{i-1}\beta_{i-1}}{1-\nu_{i-1}}$, $i = \overline{2, n}$, а на поверхні поділу покриття і півпростору – $\dfrac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} : \dfrac{E_\mathrm{T}\beta_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}}$.

Рисунок 2.19 ілюструє циклічну зміну з часом напружень в основі на поверхні поділу з покриттям за чотирициклової ($K = 4$) двоперіодної термообробки системи для наступних тривалостей циклів та моментів перемикання періодів: $\mathrm{Fo}_0 = 0$, $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1} = 1.4$, $\mathrm{Fo}_1 = 3$, $\mathrm{Fo}_{1\leftrightarrow 2} = 4.4$, $\mathrm{Fo}_2 = 6$, $\mathrm{Fo}_{2\leftrightarrow 3} = 7.4$,

$\mathrm{Fo}_3 = 9$, $\mathrm{Fo}_{3\leftrightarrow 4} = 11.4$, $\mathrm{Fo}_4 = 15$. Отже, зміною числа циклів та їх тривалості, моментів перемикання періодів у кожному з циклів, інтенсивності конвективного теплообміну можна досягти необхідного рівня напружень на поверхні контакту півпростору з покриттям.

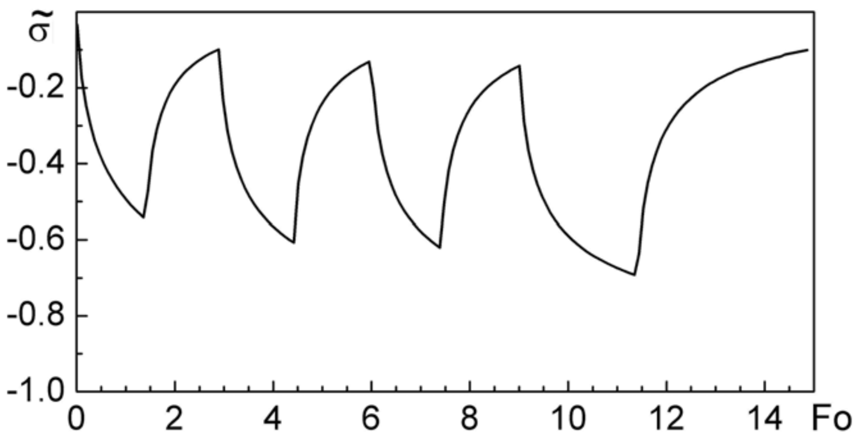


Рис. 2.19. Циклічна поведінка напружень $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$

в півпросторі на поверхні поділу з покриттям

2.4. Теплопровідність пластини з двостороннім тонким багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного конвективного нагріву

Моделюванню та дослідженню процесів теплопровідності та дифузії у пластинах з покриттями присвячено багато робіт [10, 15, 36, 37, 47, 54, 73, 74, 76, 77, 81, 84, 87, 96, 97, 107, 130, 140, 141, 145, 148, 190, 193, 212, 225, 231, 243, 249; 251, с.102; 272, 325, 326, 350, 370, 376-379, 382, 392, 402, 410, 413, 414, 435, 449, 453, 454, 459, 492, 579, 580]. При врахуванні часової залежності температури зовнішнього середовища для пластин з одношаровим покриттям аналітичні розв’язки задач теплопровідності наведено в роботах [87, 96, 97, 148, 212, 382, 449], для багатошарових пластин – в [122, 440, 471]. Для таких пластин в [130] запропоновано відповідну наближену аналітично-числову процедуру. Загалом для пластин з багатошаровими покриттями розв’язування обмежується випадками незмінної в часі температури зовнішнього середовища. Лише в [36] записано наближений аналітичний розв'язок, що ґрунтується на підході методу послідовних інтервалів [35, 37], а в [231, 582] застосовано чисельні методи. Для розв'язування задач теплопровідності для тіл з тонкими покриттями підхід з використанням узагальнених граничних умов у випадку постійної в часі температури зовнішнього середовища застосовувався у [47, 54, 77, 197, 459], а змінної в часі температури зовнішнього середовища – лише в [81]. Проте підхід, використаний у [81], не є достатньо загальним і може бути застосований тільки до обмеженого класу неоднорідних покрить.

У цьому підрозділі отримано аналітичний розв'язок одновимірної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного конвективного нагріву та проведено дослідження закономірностей процесу теплоперенесення у пластині з ідентичними покриттями при нагріванні за експоненціальним законом у часі.

2.4.1. Постановка задачі

Розглянемо одновимірну крайову задачу теплопровідності для пластини товщини h з двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного конвективного нагріву (рис. 2.20).

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial \tau} = a_{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 t_{\mathrm{T}}}{\partial z^2}, \qquad 0 < z < h, \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \tau} = a_i^{(1)} \frac{\partial^2 t_i^{(1)}}{\partial z^2}, \quad z_i^{(1)} < z < z_{i-1}^{(1)}, \;\; i = \overline{1, n^{(1)}}, \tag{2.90.1}$$

$$\frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial \tau} = a_i^{(2)} \frac{\partial^2 t_i^{(2)}}{\partial z^2}, \quad z_{i-1}^{(2)} < z < z_i^{(2)}, \;\; i = \overline{1, n^{(2)}}, \tag{2.90.2}$$

$$t_{\mathrm{T}} \big|_{\tau=0} = t_i^{(k)} \big|_{\tau=0} = t_0 = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1, n^{(k)}}, \;\; k = 1, 2. \tag{2.91}$$

Рис. 2.20. Схема пластини з двостороннім покриттям

Приймаємо, що на межі покриття – середовище відбувається теплообмін згідно з законом Ньютона:

$$-\lambda^{(2)}_{n^{(2)}}\frac{\partial t^{(2)}_{n^{(2)}}}{\partial z}=\mu^{(2)}\left(t^{(2)}_{n^{(2)}}-t^{(2)}_C\right),\qquad z=z^{(2)}_{n^{(2)}}=h+\delta^{(2)}, \tag{2.92.1}$$

$$\lambda^{(1)}_{n^{(1)}}\frac{\partial t^{(1)}_{n^{(1)}}}{\partial z}=\mu^{(1)}\left(t^{(1)}_{n^{(1)}}-t^{(1)}_C\right),\qquad z=z^{(1)}_{n^{(1)}}=-\delta^{(1)}, \tag{2.92.2}$$

а на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$\begin{gathered} t^{(1)}_i=t^{(1)}_{i-1}\,,\;\; \lambda^{(1)}_i\frac{\partial t^{(1)}_i}{\partial z}=\lambda^{(1)}_{i-1}\frac{\partial t^{(1)}_{i-1}}{\partial z},\;\; z=z^{(1)}_{i-1}=-\sum_{j=1}^{i-1}\delta^{(1)}_j,\;\; i=\overline{2,n^{(1)}}, \\ t^{(1)}_1=t_{\text{Т}}\,,\quad \lambda^{(1)}_1\frac{\partial t^{(1)}_1}{\partial z}=\lambda_{\text{Т}}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z},\qquad z=z^{(1)}_0=0, \end{gathered} \tag{2.93.1}$$

$$\begin{gathered} t^{(2)}_i=t^{(2)}_{i-1},\quad \lambda^{(2)}_i\frac{\partial t^{(2)}_i}{\partial z}=\lambda^{(2)}_{i-1}\frac{\partial t^{(1)}_{i-1}}{\partial z},\quad z=z^{(2)}_{i-1}=h+\sum_{j=1}^{i-1}\delta^{(2)}_j,\;\; i=\overline{2,n^{(2)}}, \\ t^{(2)}_1=t_{\text{Т}},\quad \lambda^{(2)}_1\frac{\partial t^{(2)}_1}{\partial z}=\lambda_{\text{Т}}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z},\qquad z=z^{(2)}_0=h. \end{gathered} \tag{2.93.2}$$

Тут $t_i^{(k)}$, $t_{\text{Т}}$, $t_{\text{С}}^{(1)}$, $t_{\text{С}}^{(2)}$ – температури i-го шару k-го покриття, тіла (пластини) і середовищ відповідно; $\delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \delta_j^{(k)}$ – товщина k-го покриття; $\delta_i^{(k)}$ – товщина i-го шару k-го покриття; $\lambda_{\text{Т}}$, $\lambda_i^{(k)}$ і $\omega_{\text{Т}}$, $\omega_i^{(k)}$ – коефіцієнти теплопровідності і теплоємності; $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покриття; $a_{\text{Т}} = \lambda_{\text{Т}} / \omega_{\text{Т}}$ – температуропровідність тіла; $n^{(k)}$ – кількість шарів k-го покриття. Індекс $k=1$ стосується покриття, нанесеного на поверхню $z=0$ пластини, а $k=2$ – покриття, нанесеного на поверхню $z=h$.

2.4.2. Розв’язок задачі теплопровідності з узагальненими граничними умовами

Узагальнені граничні умови теплопровідності на основі виразів (1.39) і (1.44) для даного випадку запишемо у вигляді

$$-\lambda_{\text{Т}}\left(1+\frac{\mu^{(2)}}{H^{(2)}}\right)\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z} + \mu^{(2)}(t_{\text{С}}^{(2)} - t_{\text{Т}}) = \Omega^{(2)}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \quad t_{\text{Т}}\big|_{\tau=0} = t_0, \quad z=h, \tag{2.94.1}$$

$$\lambda_{\text{Т}}\left(1+\frac{\mu^{(1)}}{H^{(1)}}\right)\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial z} + \mu^{(1)}(t_{\text{С}}^{(1)} - t_{\text{Т}}) = \Omega^{(1)}\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \quad t_{\text{Т}}\big|_{\tau=0} = t_0, \quad z=0, \tag{2.94.2}$$

де $\Omega^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \omega_i^{(k)} \delta_i^{(k)}$, $\frac{1}{H^{(k)}} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\delta_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}$ – зведені теплоємності та термоопори покрить, $k=1,2$.

Для розв’язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа (2.7). Розв’язок рівняння (2.89) у пластині в трансформантах з урахуванням умов (2.91), (2.94) має вигляд

$$t_{\text{Т}}^L(z,s) = \mathrm{Bi}_*^{(1)}\left(t_C^{(1)L} - \frac{t_0}{s}\right)\frac{\Phi_2(h,s)\,\mathrm{ch}(qz) - \Phi_3(h,s)\,\mathrm{sh}(qz)}{\Psi(s)} +$$

$$+\mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(t_C^{(2)L} - \frac{t_0}{s}\right)\frac{\Phi_1(z,s)}{\Psi(s)} + \frac{t_0}{s}, \qquad 0 \le z \le h, \tag{2.95}$$

де

$$\Phi_k(z,s) = \mathrm{ch}(qz) + \mathrm{Bi}_*^{(k)}\left(1+\psi^{(k)}s\right)\frac{\mathrm{sh}(qz)}{qh}, \quad k=1,2,$$

$$\Phi_3(z,s) = \mathrm{sh}(qh) + \mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(1+\psi^{(2)}s\right)\frac{\mathrm{ch}(qz)}{qh},$$

$$\Psi(s) = \left[qh + \frac{\mathrm{Bi}_*^{(1)}\mathrm{Bi}_*^{(2)}}{qh}\left(1+\psi^{(1)}s\right)\left(1+\psi^{(2)}s\right)\right]\mathrm{sh}(qh) + \\ + \left[\mathrm{Bi}_*^{(1)}\left(1+\psi^{(1)}s\right) + \mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(1+\psi^{(2)}s\right)\right]\mathrm{ch}(qh).$$

Тут $q = \sqrt{s/a_\mathrm{T}}$; $\mathrm{Bi}_*^{(k)} = \dfrac{\mathrm{Bi}^{(k)}}{1+\xi^{(k)}\mathrm{Bi}^{(k)}}$, $\mathrm{Bi}^{(k)} = \dfrac{\mu^{(k)}h}{\lambda_\mathrm{T}}$ – критерії Біо; $\xi^{(k)} = \dfrac{1/H^{(k)}}{h/\lambda_\mathrm{T}}$ – ефективні термоопори покрить; $\psi^{(k)} = \dfrac{\Omega^{(k)}}{\mu^{(k)}}$; $t_C^{(k)L}(s) = \int\limits_0^\infty t_C^{(k)}(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$ – трансформанти функцій температури середовищ, $k=1,2$.

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (2.95) і використовуючи теорему розкладу та інтегральні співвідношення Дюгамеля [15, 144], отримуємо розв’язок задачі для пластини в безрозмірних координатах у вигляді

$$t_\mathrm{T}(\bar{z},\mathrm{Fo}) = t_0 + \mathrm{Bi}_*^{(1)}\left(t_C^{(1)}(\mathrm{Fo}) - t_0\right)\frac{1+\mathrm{Bi}_*^{(2)} - \mathrm{Bi}_*^{(2)}\bar{z}}{\overline{\mathrm{Bi}}} + \mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(t_C^{(2)}(\mathrm{Fo}) - t_0\right)\frac{1+\mathrm{Bi}_*^{(1)}\bar{z}}{\overline{\mathrm{Bi}}} - \\ -2\mathrm{Bi}_*^{(1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{U_2(1,\kappa_j)\cos\left(\kappa_j\bar{z}\right) + U_3(1,\kappa_j)\sin\left(\kappa_j\bar{z}\right)}{Z(\kappa_j)}\left[\left(t_C^{(1)}(0) - t_0\right)e^{-\kappa_j^2\mathrm{Fo}} + N^{(1)}\left(\mathrm{Fo}, -\kappa_j^2\right)\right] - \\ -2\mathrm{Bi}_*^{(2)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{U_1(\bar{z},\kappa_j)}{Z(\kappa_j)}\left[\left(t_\mathrm{C}^{(2)}(0) - t_0\right)e^{-\kappa_j^2\mathrm{Fo}} + N^{(2)}\left(\mathrm{Fo}, -\kappa_j^2\right)\right], \quad 0 \le \bar{z} \le 1. \tag{2.96}$$

Тут $\bar{z} = z/h$, $\mathrm{Fo} = a_\mathrm{T}\tau/h^2$ – критерій Фур’є, $\overline{\mathrm{Bi}} = \mathrm{Bi}_*^{(1)} + \mathrm{Bi}_*^{(2)} + \mathrm{Bi}_*^{(1)}\mathrm{Bi}_*^{(2)}$, κ_j – корені трансцендентного рівняння

$$\mathrm{ctg}\,\kappa = \frac{\kappa^2 - \left(\mathrm{Bi}_*^{(1)} - \upsilon^{(1)}\kappa^2\right)\left(\mathrm{Bi}_*^{(2)} - \upsilon^{(2)}\kappa^2\right)}{\kappa\left(\mathrm{Bi}_*^{(1)} + \mathrm{Bi}_*^{(2)} - \left(\upsilon^{(1)} + \upsilon^{(2)}\right)\kappa^2\right)}, \tag{2.97}$$

$$N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma)=\int_0^{\mathrm{Fo}}\frac{dt_C^{(k)}(\zeta)}{d\zeta}e^{\gamma(\mathrm{Fo}-\zeta)}d\zeta\,,\quad k=1,2\,, \tag{2.98}$$

$$\upsilon^{(k)}=\frac{\eta^{(k)}}{1+\xi^{(k)}\mathrm{Bi}^{(k)}}\,,\quad \eta^{(k)}=\frac{\Omega^{(k)}}{\omega_{\mathrm{T}}h}$$ – ефективні теплоємності покрить,

$$U_k(\overline{z},\kappa_j)=\kappa_j\cos\left(\kappa_j\overline{z}\right)+\left(\mathrm{Bi}_*^{(k)}-\upsilon^{(k)}\kappa_j^2\right)\sin\left(\kappa_j\overline{z}\right),\quad k=1,2\,,$$

$$U_3(\overline{z},\kappa_j)=\kappa_j\sin\left(\kappa_j\overline{z}\right)-\left(\mathrm{Bi}_*^{(2)}-\upsilon^{(2)}\kappa_j^2\right)\cos\left(\kappa_j\overline{z}\right),$$

$$Z(\kappa_j)=\left[\left(1+2\left(\upsilon^{(1)}+\upsilon^{(2)}\right)\right)\kappa_j^2-\left(\mathrm{Bi}_*^{(1)}-\upsilon^{(1)}\kappa_j^2\right)\left(\mathrm{Bi}_*^{(2)}-\upsilon^{(2)}\kappa_j^2\right)\right]\kappa_j\cos\kappa_j+$$
$$+\left[\kappa_j^2\left(1+\mathrm{Bi}_*^{(1)}(1+\upsilon^{(2)})+\mathrm{Bi}_*^{(2)}(1+\upsilon^{(1)})-(\upsilon^{(1)}+\upsilon^{(2)}+3\upsilon^{(1)}\upsilon^{(2)})\kappa_j^2\right)+\mathrm{Bi}_*^{(1)}\mathrm{Bi}_*^{(1)}\right]\sin\kappa_j.$$

Розглянемо випадок узгодженності крайових умов [81, с. 110; 96, с. 63, 69] $t_C^{(1)}(0)=t_C^{(2)}(0)=t_0$. Тоді формула (2.96) набуде вигляду

$$t_{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})=\frac{t_C^{(1)}(\mathrm{Fo})\mathrm{Bi}_*^{(1)}\left(1+\mathrm{Bi}_*^{(2)}-\mathrm{Bi}_*^{(2)}\overline{z}\right)+t_C^{(2)}(\mathrm{Fo})\mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(1+\mathrm{Bi}_*^{(1)}\overline{z}\right)}{\overline{\overline{\mathrm{Bi}}}}-$$
$$-2\mathrm{Bi}_*^{(1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left[U_2(1,\kappa_j)\cos\left(\kappa_j\overline{z}\right)+U_3(1,\kappa_j)\sin\left(\kappa_j\overline{z}\right)\right]N^{(1)}\left(\mathrm{Fo},-\kappa_j^2\right)}{Z(\kappa_j)}- \tag{2.99}$$
$$-2\mathrm{Bi}_*^{(2)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{U_1(\kappa_j,\overline{z})N^{(2)}\left(\mathrm{Fo},-\kappa_j^2\right)}{Z(\kappa_j)}.$$

Підставляючи (2.99) у формули відновлення (1.54), які у безрозмірних координатах запишемо як

$$t_i^{(1)}(\overline{z},\mathrm{Fo})=t_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})+\lambda_{\mathrm{T}}\left(-\sum_{l=1}^{i-1}\frac{\delta_l^{(1)}}{h\lambda_l^{(1)}}+\frac{\overline{z}-\overline{z}_{i-1}^{(1)}}{\lambda_i^{(1)}}\right)\frac{\partial t_{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=0}\,,$$
$$\overline{z}_i^{(1)}\le\overline{z}\le\overline{z}_{i-1}^{(1)},\quad i=\overline{1,n^{(1)}}, \tag{2.100.1}$$

$$t_i^{(2)}(\overline{z},\mathrm{Fo})=t_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})+\lambda_{\mathrm{T}}\left(\sum_{l=1}^{i-1}\frac{\delta_l^{(2)}}{h\lambda_l^{(2)}}+\frac{\overline{z}-\overline{z}_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i^{(2)}}\right)\frac{\partial t_{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=1}\,,$$
$$\overline{z}_{i-1}^{(2)}\le\overline{z}\le\overline{z}_i^{(2)},\quad i=\overline{1,n^{(2)}}, \tag{2.100.2}$$

отримуємо вирази для температури в i-му шарі k-го покриття:

$$t_i^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})=\frac{1}{\overline{\mathrm{Bi}}}\Big[t_C^{(1)}(\mathrm{Fo})\mathrm{Bi}_*^{(1)}\left(1-\mathrm{Bi}_*^{(2)}\tilde{r}_i^{(k)}(\bar{z})\right)+$$

$$+t_C^{(2)}(\mathrm{Fo})\mathrm{Bi}_*^{(2)}\left(1+\mathrm{Bi}_*^{(1)}\tilde{r}_i^{(k)}(\bar{z})\right)-t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})\mathrm{Bi}_*^{(1)}\mathrm{Bi}_*^{(2)}\Big]-$$

$$-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Bi}_*^{(k)}V_i^{(k)}(\bar{z},\kappa_j)N^{(k)}\left(\mathrm{Fo},-\kappa_j^2\right)+\mathrm{Bi}_*^{(3-k)}W_i^{(k)}(\bar{z},\kappa_j)N^{(3-k)}\left(\mathrm{Fo},-\kappa_j^2\right)}{Z(\kappa_j)}, \qquad (2.101)$$

$$\bar{z}_i^{(1)}\le\bar{z}\le\bar{z}_{i-1}^{(1)},\qquad \bar{z}_{i-1}^{(2)}\le\bar{z}\le\bar{z}_i^{(2)},$$

$$V_i^{(k)}(\bar{z},\kappa_j)=\kappa_j\cos\kappa_j+\left(\mathrm{Bi}_*^{(3-k)}-\upsilon^{(3-k)}\kappa_j^2\right)\sin\kappa_j+$$

$$+(-1)^{k+1}\tilde{r}_i^{(k)}(\bar{z})\kappa_j\left(\kappa_j\sin\kappa_j-\left(\mathrm{Bi}_*^{(3-k)}-\upsilon^{(3-k)}\kappa_j^2\right)\cos\kappa_j\right),$$

$$W_i^{(k)}(\bar{z},\kappa_j)=\kappa_j\left[1+(-1)^{k+1}\tilde{r}_i^{(k)}(\bar{z})\left(\mathrm{Bi}_*^{(k)}-\upsilon^{(k)}\kappa_j^2\right)\right],$$

$$\tilde{r}_i^{(k)}(\bar{z})=\lambda_{\mathrm{T}}\left((-1)^k\sum_{l=1}^{i-1}\frac{\delta_l^{(k)}}{h\lambda_l^{(k)}}+\frac{\bar{z}-\bar{z}_{i-1}^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}\right),\qquad \bar{z}_j^{(k)}=\frac{z_j^{(k)}}{h}, \qquad (2.102)$$

$$j=\overline{0,n^{(k)}},\qquad k=1,2.$$

Слід зауважити, що у випадку відсутності покрить (коли $n^{(1)}=n^{(2)}=0$, $\delta^{(1)}=\delta^{(2)}=0$, $\mathrm{Bi}_*^{(1)}=\mathrm{Bi}^{(1)}$, $\mathrm{Bi}_*^{(2)}=\mathrm{Bi}^{(2)}$, $\upsilon^{(1)}=\upsilon^{(2)}=0$) формули (2.99), (2.97), (2.98) рівносильні наведеним у [38, с. 27].

Формули (2.99), (2.101) надають розв’язок задачі для довільних законів зміни температур зовнішніх середовищ. Конкретизуємо вирази для $N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma)$ для деяких таких закономірностей.

Лінійна функція зміни температур зовнішніх середовищ.

Тоді
$$t_{\mathrm{C}}^{(k)}(\mathrm{Fo})=t_0\left(1+\mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}\right), \qquad (2.103)$$

де
$$\mathrm{Pd}^{(k)}=\left(\frac{d}{d\mathrm{Fo}}\left(\frac{t_{\mathrm{C}}^{(k)}(\mathrm{Fo})}{t_0}\right)\right)_{\max} \qquad (2.104)$$

– критерій Предводителєва [144], що характеризує інтенсивність підвищення температури середовища, яке контактує з k-м покриттям.

Підставляючи (2.103) в (2.98), отримуємо

$$N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma)=\frac{t_0\mathrm{Pd}^{(k)}}{\gamma}\left(e^{\gamma\mathrm{Fo}}-1\right),\ \ k=1,2\,. \qquad (2.105)$$

Експоненціальна функція зміни температур зовнішніх середовищ.

Тоді
$$t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})=t_C^{(k)\mathrm{m}}-\left(t_C^{(k)\mathrm{m}}-t_0\right)e^{-\mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}}, \qquad (2.106)$$

де $t_C^{(k)\mathrm{m}}$ – максимальна температура середовища, яке контактує з k-м покриттям, а критерій Предводителєва в даному випадку визначаємо як $\mathrm{Pd}^{(k)}=\left(\dfrac{d}{d\mathrm{Fo}}\left(\dfrac{t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})-t_0}{t_C^{(k)\mathrm{m}}-t_0}\right)\right)_{\max}$.

Підставляючи (2.106) в (2.98), отримуємо

$$N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma)=\frac{t_C^{(k)\mathrm{m}}-t_0}{1+\gamma/\mathrm{Pd}^{(k)}}\left(e^{\gamma\mathrm{Fo}}-e^{-\mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}}\right),\ \ k=1,2. \qquad (2.107)$$

Логарифмічна функція зміни температур зовнішніх середовищ.

Тоді
$$t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})=t_0+\ln\left(t_0\mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}+1\right), \qquad (2.108)$$

де критерій $\mathrm{Pd}^{(k)}$ визначається за формулою (2.104).

Підставляючи (2.108) в (2.98), отримуємо

$$N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma)=e^{\gamma\left(\mathrm{Fo}+\frac{1}{t_0\mathrm{Pd}^{(k)}}\right)}\left[\mathrm{Ei}\left(-\gamma\left(\mathrm{Fo}+\frac{1}{t_0\mathrm{Pd}^{(k)}}\right)\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{\gamma}{t_0\mathrm{Pd}^{(k)}}\right)\right],\ k=1,2\,, \qquad (2.109)$$

де $\mathrm{Ei}\left(\bar{\zeta}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\bar{\zeta}}\dfrac{e^{\zeta}}{\zeta}d\zeta$ – інтегральна показникова функція [1, с. 56].

Періодична функція зміни температур зовнішніх середовищ за законом

$$t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})=t_0+t_C^{(k)\mathrm{m}}\sin\mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}\,. \qquad (2.110)$$

Тут $t_C^{(k)\mathrm{m}}$ – амплітуда коливання температури середовища, яке контактує з k-м покриттям, а критерій Предводителєва $\mathrm{Pd}^{(k)} = \left(\dfrac{d}{d\mathrm{Fo}} \left(\dfrac{t_C^{(k)}(\mathrm{Fo})}{t_C^{(k)\mathrm{m}}} \right) \right)_{\max}$ прямо пропорційний частоті коливань.

Підставляючи (2.110) в (2.98), отримуємо

$$N^{(k)}(\mathrm{Fo},\gamma) = t_C^{(k)\mathrm{m}} \mathrm{Pd}_k \frac{\gamma\left(e^{\gamma \mathrm{Fo}} - \cos \mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}\right) + \mathrm{Pd}^{(k)} \sin \mathrm{Pd}^{(k)}\mathrm{Fo}}{\gamma^2 + \left(\mathrm{Pd}^{(k)}\right)^2}, \; k = 1,2. \qquad (2.111)$$

2.4.3. Симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями

При симетричному нагріві пластини з ідентичними покриттями маємо $t_{\mathrm{C}}^{(1)}(\mathrm{Fo}) = t_{\mathrm{C}}^{(2)}(\mathrm{Fo}) = t_{\mathrm{C}}(\mathrm{Fo})$, $n^{(1)} = n^{(2)} = n$, $\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(2)} = \delta_i$, $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i$, $\omega_i^{(1)} = \omega_i^{(2)} = \omega_i$ для $i = \overline{1,n}$, $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \delta$, $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \xi$, $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta$, $\mathrm{Bi}^{(1)} = \mathrm{Bi}^{(2)} = \mathrm{Bi}$, $\mathrm{Bi}_*^{(1)} = \mathrm{Bi}_*^{(2)} = \mathrm{Bi}_*$, $\upsilon^{(1)} = \upsilon^{(2)} = \upsilon$.

2.4.3.1. Випадок стаціонарного нагріву. Тестова задача теплопровідності для пластини з тришаровим покриттям

Розглянемо стаціонарний симетричний нагрів зовнішнім середовищем постійної температури $t_C(\mathrm{Fo}) = t_C = \mathrm{const}$. На підставі формул (2.96)-(2.98), (2.100) розв’язок можна подати у вигляді

$$\vartheta = \frac{t(\bar{z},\mathrm{Fo}) - t_0}{t_{\mathrm{C}} - t_0} = 1 - 2\mathrm{Bi}_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\bar{z},\kappa_j) e^{-\kappa_j^2 \mathrm{Fo}}}{Z(\kappa_j)}, \quad -\frac{\delta}{h} \le \bar{z} \le 1 + \frac{\delta}{h}, \qquad (2.112)$$

$$X(\bar{z},\kappa_j) = \begin{cases} Y_1(\kappa_j)\cos(\kappa_j \bar{z}) + Y_2(\kappa_j)\sin(\kappa_j \bar{z}), & 0 \le \bar{z} \le 1, \\ Y_1(\kappa_j) - \tilde{r}(\bar{z})\kappa_j Y_2(\kappa_j), & 1 \le \bar{z} \le 1 + \dfrac{\delta}{h}, \\ X(1 - \bar{z},\kappa_j), & -\dfrac{\delta}{h} \le \bar{z} \le 0, \end{cases} \qquad (2.113)$$

$$Y_1(\kappa_j)=\kappa_j\left(\cos\kappa_j+1\right)+\left(\mathrm{Bi}_*-\upsilon\kappa_j^2\right)\sin\kappa_j\,, \tag{2.114.1}$$

$$Y_2(\kappa_j)=\kappa_j\sin\kappa_j+\left(\mathrm{Bi}_*-\upsilon\kappa_j^2\right)\left(1-\cos\kappa_j\right), \tag{2.114.2}$$

$$\begin{aligned}Z(\kappa_j)=&\left[(1+4\upsilon)\kappa_j^2-\left(\mathrm{Bi}_*-\upsilon\kappa_j^2\right)^2\right]\kappa_j\cos\kappa_j+\\&+\left[\kappa_j^2\left((1+2\mathrm{Bi}_*(1+\upsilon)-\upsilon(2+3\upsilon)\kappa_j^2\right)+(\mathrm{Bi}_*)^2\right]\sin\kappa_j,\end{aligned} \tag{2.115}$$

κ_j – корені трансцендентного рівняння $\quad \mathrm{ctg}\,\kappa=\dfrac{\kappa^2-\left(\mathrm{Bi}_*-\upsilon\kappa^2\right)^2}{2\kappa\left(\mathrm{Bi}_*-\upsilon\kappa^2\right)},$ (2.116)

$$\tilde{r}(\bar{z})=\lambda_{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{i-1}\frac{\delta_\ell}{h\lambda_\ell}+\frac{\bar{z}-\bar{z}_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i}\right)\left[S_+\left(\bar{z}-\bar{z}_{i-1}^{(2)}\right)-S_+\left(\bar{z}-\bar{z}_{i}^{(2)}\right)\right], \tag{2.117}$$

де $S_+(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$ – функція Гевісайда.

Цей наближений розв’язок задачі теплопровідності симетричного нагріву пластини з двостороннім покриттям порівнюється з точним розв’язком задачі одностороннього нагріву пластини з одностороннім покриттям з термоізольованою протилежною стороною (рис. 2.21) згідно з [32] при $t_{\mathrm{C}}-t_0=100$ K, $\mu=10^4$ Вт/(м$^2\cdot$K) для деяких моментів часу для чотиришарової пластини, що характеризується наступними значеннями геометричних і фізичних параметрів:

$\delta_1=5\cdot10^{-5}$м, $\delta_2=5\cdot10^{-5}$м, $\delta_3=10^{-4}$м, $h=2\cdot10^{-2}$м, $\lambda_1=2$ Вт/(м$^2\cdot$K),

$\lambda_2=4$Вт/(м$^2\cdot$K), $\lambda_3=6$Вт/(м$^2\cdot$K), $\lambda_{\mathrm{T}}=4$Вт/(м$^2\cdot$K), $a_1=5\cdot10^{-6}$м^2/с,

$a_2=6.4\cdot10^{-6}$м^2/с, $a_3=8\cdot10^{-6}$м^2/с, $a_{\mathrm{T}}=1.2\cdot10^{-5}$м^2/с.

Аналіз результатів, отриманих для деяких моментів часу (табл. 2.1) показує, що значення температури по точному (нижні значення в рядках) та наближеному розв’язку (верхні значення в рядках) відрізняються неістотно.

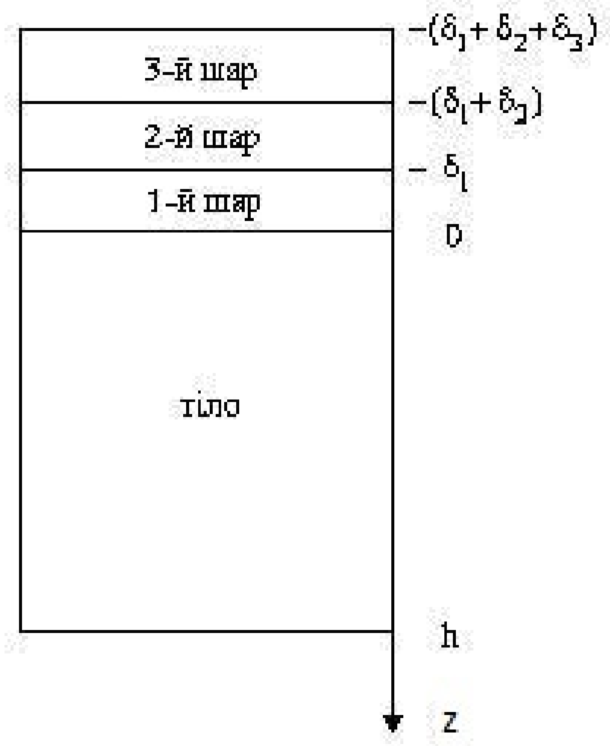


Рис. 2.21. Схема пластини
з тришаровим покриттям

Таблиця 2.1

Порівняння точних результатів і наближеного розв’язку

τ, сек	ϑ							
	$\bar{z}=-\bar{z}_3^{(2)}$	$\bar{z}=-\bar{z}_2^{(2)}$	$\bar{z}=-\bar{z}_1^{(2)}$	$\bar{z}=0$	$\bar{z}=0.25$	$\bar{z}=0.5$	$\bar{z}=0.75$	$\bar{z}=1$
2	0.12040 0.12047	0.11901 0.11830	0.11796 0.11722	0.11587 0.11581	0.03991 0.03987	0.00955 0.00953	0.00153 0.00152	0.00031 0.00032
10	0.24455 0.24458	0.24333 0.24271	0.24241 0.24178	0.24057 0.24055	0.16015 0.16013	0.10320 0.10319	0.06959 0.06960	0.05852 0.05856
40	0.48287 0.48294	0.48203 0.48166	0.48140 0.48102	0.48014 0.48018	0.42417 0.42422	0.38312 0.38318	0.35806 0.36813	0.34963 0.34972
100	0.75522 0.75531	0.75483 0.75470	0.75453 0.75440	0.75393 0.75400	0.72744 0.72752	0.70801 0.70810	0.69615 0.69624	0.69216 0.69226
500	0.99833 0.99833	0.99833 0.99833	0.99832 0.99832	0.99832 0.99832	0.99814 0.99814	0.99801 0.99801	0.99792 0.99793	0.99790 0.99790

2.4.3.2. Числові результати для нестаціонарного нагрівання за експоненціальним законом пластини з двостороннім тришаровим покриттям

У випадку симетричного нестаціонарного нагрівання пластини з ідентичними покриттями на підставі формул (2.99), (2.97), (2.98), (2.101), (2.102) розв'язок можна подати у вигляді

$$t(\bar{z},\mathrm{Fo}) = t_C(\mathrm{Fo}) - 2\mathrm{Bi}_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\bar{z},\kappa_j) N(\mathrm{Fo},-\kappa_j^2)}{Z(\kappa_j)}, \quad -\frac{\delta}{h} \le \bar{z} \le 1+\frac{\delta}{h}, \quad (2.118)$$

де

$$N(\mathrm{Fo},\gamma) = \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{dt_{\mathrm{C}}(\zeta)}{d\zeta} e^{\gamma(\mathrm{Fo}-\zeta)}\, d\zeta\,, \quad (2.119)$$

а κ_j – корені трансцендентного рівняння (2.116).

Розглянемо нагрівання пластини з ідентичними покриттями за *експоненціальним* законом (2.106), який у цьому випадку матиме вигляд

$$t_{\mathrm{C}}(\mathrm{Fo}) = t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}} - \left(t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}} - t_0\right) e^{-\mathrm{PdFo}}, \quad (2.120)$$

де $t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}}$ – максимальна температура середовища, а критерій Предводителєва визначається як $\mathrm{Pd} = \left(\frac{d}{d\mathrm{Fo}} \left(\frac{t_{\mathrm{C}}(\mathrm{Fo}) - t_0}{t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}} - t_0} \right) \right)_{\max}$.

Тоді, підставляючи (2.119) за врахування (2.120) в (2.118), отримуємо розв'язок задачі теплопровідності у безрозмірному вигляді

$$\vartheta(\bar{z},\mathrm{Fo}) = 1 - e^{-\mathrm{PdFo}} - \sum_{j=1}^{\infty} X(\bar{z},\kappa_j) B(\kappa_j,\mathrm{Fo}), \quad -\frac{\delta}{h} \le \bar{z} \le 1+\frac{\delta}{h}, \quad (2.121)$$

де

$$B(\kappa_j,\mathrm{Fo}) = 2\mathrm{Bi}_* \frac{e^{-\kappa_j^2 \mathrm{Fo}} - e^{-\mathrm{PdFo}}}{\left(1 - \kappa_j^2/\mathrm{Pd}\right) Z(\kappa_j)}, \quad (2.122)$$

а $\vartheta(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \frac{t(\rho,\mathrm{Fo}) - t_0}{t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}} - t_0}$, $\vartheta_{\mathrm{C}}(\mathrm{Fo}) = \frac{t_{\mathrm{C}}(\mathrm{Fo}) - t_0}{t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}} - t_0}$ – безрозмірні температури системи та середовища відповідно, $\mathrm{Pd} = \left(\frac{d\vartheta_{\mathrm{C}}}{d\mathrm{Fo}} \right)_{\max}$.

Безрозмірними вихідними параметрами задачі теплопровідності є: просторова координата $\bar{z}$, час – число Фур'є Fo, ефективний термоопір покриття ξ, ефективна теплоємність покриття η, критерій Біо Bi, критерій Предводителєва Pd.

На рис. 2.22-2.24 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \vartheta(1, \mathrm{Fo})$ на поверхні пластина–покриття залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття (рис. 2.22), параметра Bi (рис. 2.23) і параметра Pd (рис. 2.24). Розрахунки для рис. 2.22 проведено при $\mathrm{Bi} = 1$, $\mathrm{Pd} = 1$; для рис. 2.23 – при $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$, $\mathrm{Pd} = 1$; для рис. 2.24 – при $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$, $\mathrm{Bi} = 1$. На рис. 2.23-2.24 штриховими кривими також показано зміну в часі температури середовища. Ці рисунки ілюструють вплив теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальної температури в пластині на поверхні контакту з покриттям.

Як і слід було очікувати, наявність покриття призводить до зменшення контактної температури (крива $\xi = 0$, $\eta = 0$ на рис. 2.22 – покриття відсутнє).

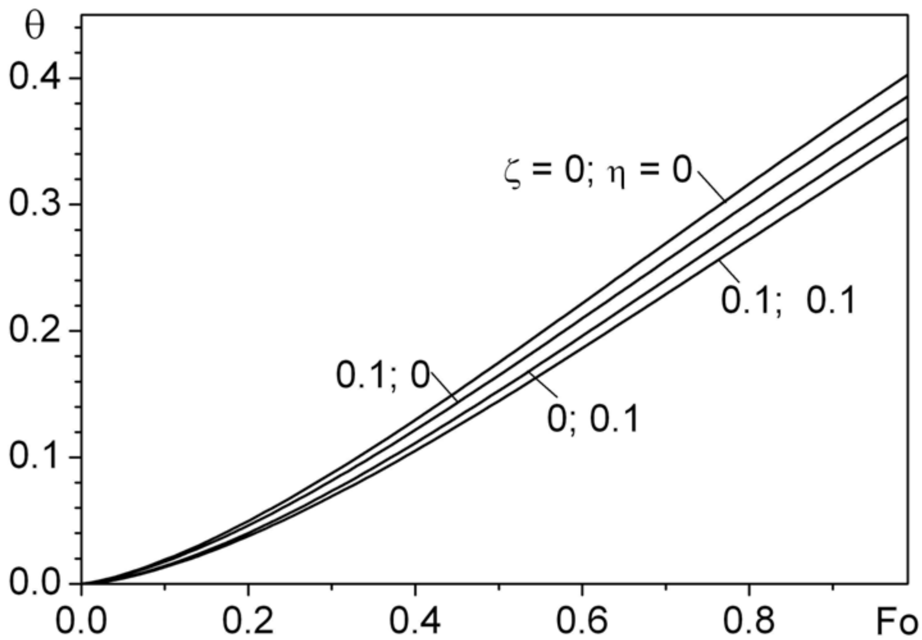


Рис. 2.22. Зміна в часі контактної температури залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття

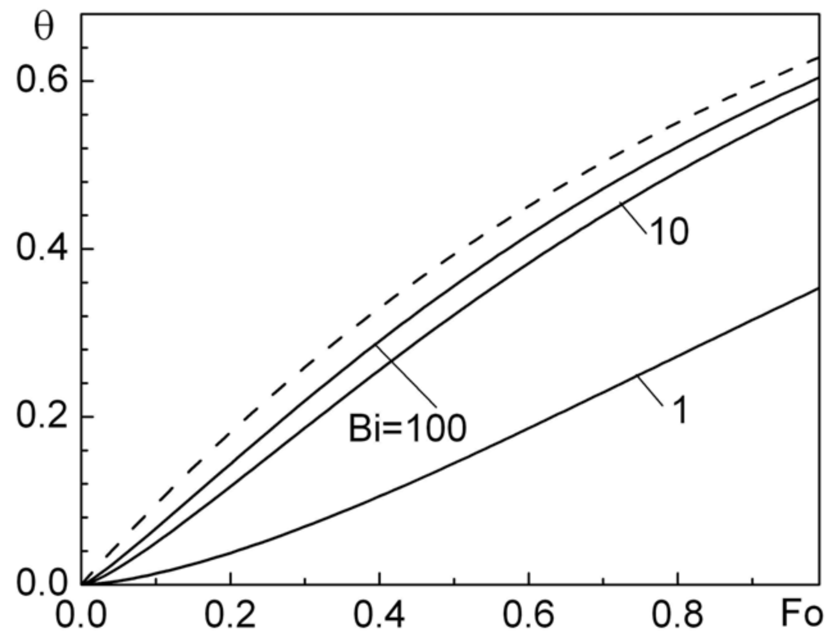


Рис. 2.23. Зміна в часі контактної температури при різних значеннях критерію Bi

Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо Bi) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителєва Pd) спричиняє зростання контактної температури (рис. 2.23 та 2.24 відповідно).

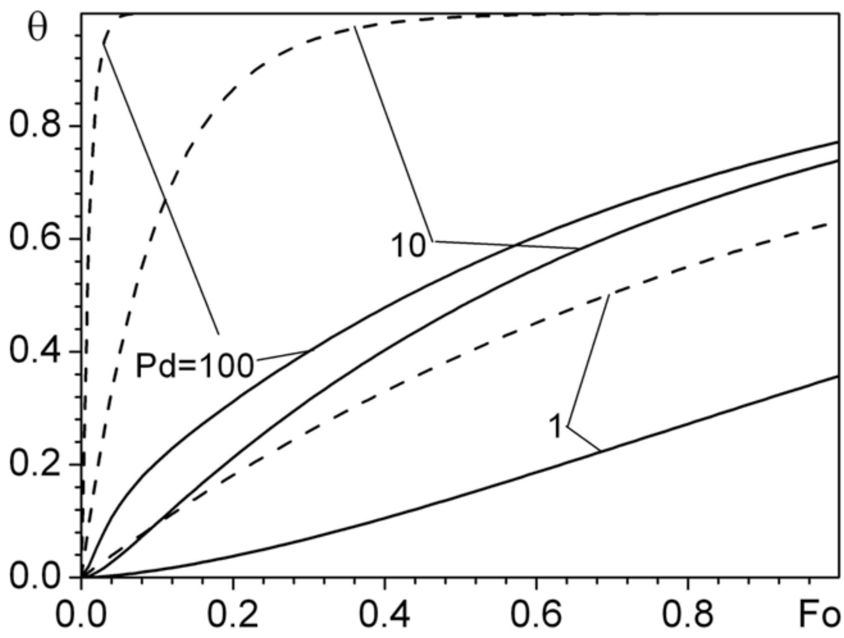


Рис. 2.24. Зміна в часі контактної температури залежно від параметра Pd

На рис. 2.25 показано розподіл температури $\theta = \vartheta(\bar{z}, \mathrm{Fo})$ за просторовою координатою $\bar{z}$ у системі пластина–двостороннє тришарове покриття для моменту часу $\mathrm{Fo} = 0.2$ при різних значеннях Bi та Pd за геометричних (2.64) при $z_* = h$ і теплофізичних (2.65) співвідношень параметрів шарів покриття та підкладки.

Зважаючи на симетрію задачі, результати наведено для півпластини $0 \le \bar{z} \le 0.5$ з покриттям $-0.01 \le \bar{z} \le 0$.

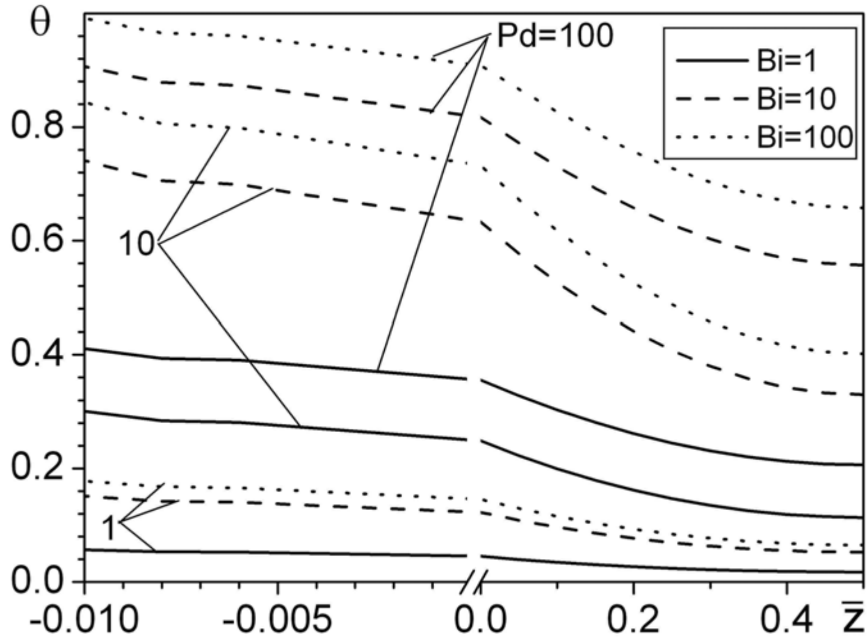


Рис. 2.25. Розподіл температури за просторовою координатою у системі пластина–двостороннє тришарове покриття для моменту часу $\mathrm{Fo} = 0.2$ при різних значеннях Bi та Pd

Як бачимо на рис. 2.25, зі збільшенням критеріїв Bi та Pd зростають як значення температури, так і температурні перепади в системі пластина–тришарове покриття.

2.5. Термопружність пластини з двостороннім тонким багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного конвективного нагріву

Конструкційні елементи із захисними багатошаровими покриттями можуть експлуатуватись за нестаціонарного теплового навантаження [81, 144, 250, 251, 274]. Однак дослідження термонапруженого стану пластинчатих елементів конструкцій з урахуванням нестаціонарності зовнішньої теплової дії в основному обмежуються однорідними тілами [186, 188, 209, 250, 274]. Лише в деяких працях проаналізовано окремі випадки неоднорідності: зокрема, розглянуто [186] задачі для пластин з підкріпленим краєм і спряжених у стик, розв’язано [190] задачу для двоскладової смуги–пластини та враховано [128] неоднорідність тільки коефіцієнта лінійного температурного розширення. Дослідження термонапруженого стану пластин з покриттями здебільш обмежуються незмінною за часом температурою довкілля [28, 47, 52, 54, 107, 120, 145, 146, 166, 190, 197, 249, 251, 330, 349, 356-358, 385, 388, 404, 419, 431, 495, 499, 527, 570, 576, 579, 580, 582]. Лише в [434, 449, 543] розглянуто випадок зі змінною температурою середовища, а в праці [130] для загальнішого випадку багатошарових пластин з урахуванням часової залежності температури зовнішнього середовища розроблено аналітико-числову наближену процедуру розрахунку температурних напружень.

На основі отриманого в підрозділі 2.2 розв’язку задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатошаровим покриттям за нестаціонарного конвективного теплообміну з довкіллям знайдено розв’язок відповідної задачі термопружності та досліджено термонапружений стан пластини з ідентичними тришаровими покриттями для експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища.

2.5.1. Розв’язування задачі термопружності

За вільних від зовнішнього навантаження поверхонь покриття зі зміною температури за товщиною напруження в системі описують співвідношення [130, 156]

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{T}} = \sigma_{yy}^{\mathrm{T}} = \sigma^{\mathrm{T}}(\overline{z},\mathrm{Fo}) = \frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\Big[B_1\left(\mathrm{Fo}\right)+B_2\left(\mathrm{Fo}\right)\overline{z}-\beta_{\mathrm{T}}(\overline{z})\left(t_{\mathrm{T}}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)-t_0\right)\Big],$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = \sigma_{xz}^{\mathrm{T}} = \sigma_{yz}^{\mathrm{T}} = \sigma_{xy}^{\mathrm{T}} = 0, \qquad 0\le\overline{z}\le 1,$$

$$\sigma_{i,xx}^{(k)} = \sigma_{i,yy}^{(k)} = \sigma_i^{(k)}(\overline{z},\mathrm{Fo}) = \frac{E_i^{(k)}}{1-\nu_i^{(k)}}\Big[B_1\left(\mathrm{Fo}\right)+B_2\left(\mathrm{Fo}\right)\overline{z}-\beta_i^{(k)}(\overline{z})\left(t_i^{(k)}\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)-t_0\right)\Big],$$

$$\sigma_{i,zz}^{(k)} = \sigma_{i,xz}^{(k)} = \sigma_{i,yz}^{(k)} = \sigma_{i,xy}^{(k)} = 0, \qquad \overline{z}_{i-k+1}^{(k)}\le\overline{z}\le\overline{z}_{i+k-2}^{(k)}, \qquad k=1,2, \quad i=\overline{1,n^{(k)}}, \tag{2.123}$$

де $B_1\left(\mathrm{Fo}\right)$, $B_2\left(\mathrm{Fo}\right)$ – невідомі функції, які визначають з умов рівноваги поперечного перерізу пластини з покриттям

$$\int\limits_{\overline{z}_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\overline{z}_{n^{(2)}}^{(2)}} \sigma d\overline{z} = 0, \qquad \int\limits_{\overline{z}_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\overline{z}_{n^{(2)}}^{(2)}} \sigma\overline{z}d\overline{z} = 0. \tag{2.124}$$

Після підставляння (2.123) в умови рівноваги (2.124) одержимо такі вирази для невідомих величин:

$$B_1 = \frac{N_t G_3 - M_t G_2}{G_1 G_3 - G_2^2}, \qquad B_2 = \frac{M_t G_1 - N_t G_2}{G_1 G_3 - G_2^2}, \tag{2.125}$$

де

$$\begin{aligned} N_t &= \int\limits_{\overline{z}_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\overline{z}_{n^{(2)}}^{(2)}} \frac{\beta E\left(t-t_0\right)}{1-\nu} d\overline{z} = \\ &= \frac{\beta_{\mathrm{T}} E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\int\limits_0^1 \left(t_{\mathrm{T}}-t_0\right)d\overline{z} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k\sum_{i=1}^{n^{(k)}}\frac{\beta_i^{(k)}E_i^{(k)}}{1-\nu_i^{(k)}}\int\limits_{\overline{z}_{i-1}^{(k)}}^{\overline{z}_i^{(k)}}\left(t_i^{(k)}-t_0\right)d\overline{z}, \end{aligned} \tag{2.126}$$

$$M_t = \int\limits_{\overline{z}_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\overline{z}_{n^{(2)}}^{(2)}} \frac{\beta E\left(t-t_0\right)}{1-\nu}\overline{z}d\overline{z} =$$

$$= \frac{\beta_{\mathrm{T}} E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\int\limits_0^1 \left(t_{\mathrm{T}} - t_0\right)\overline{z}d\overline{z} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\beta_i^{(k)} E_i^{(k)}}{1-\nu_i^{(k)}} \int\limits_{\overline{z}_{i-1}^{(k)}}^{\overline{z}_i^{(k)}} \left(t_i^{(k)} - t_0\right)\overline{z}d\overline{z}, \qquad (2.127)$$

$$\overline{G}_m = \frac{1}{m}\int\limits_{\overline{z}_{n^{(1)}}^{(1)}}^{\overline{z}_{n^{(2)}}^{(2)}} \frac{E}{1-\nu}\overline{z}^{m-1}d\overline{z} =$$

$$= \frac{E_{\mathrm{T}}}{m(1-\nu_{\mathrm{T}})} + \sum_{k=1}^{2}(-1)^k \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{E_i^{(k)}\left(\left(\overline{z}_i^{(k)}\right)^m - \left(\overline{z}_{i-1}^{(k)}\right)^m\right)}{m\left(1-\nu_i^{(k)}\right)}, \quad m = 1,2,3. \qquad (2.128)$$

Для випадку симетричного нагріву пластини з ідентичними покриттями формули (2.126)-(2.128) приймуть вигляд

$$N_t = \frac{\beta_{\mathrm{T}} E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\int\limits_0^1 \left(t(\overline{z},\mathrm{Fo}) - t_0\right)d\overline{z} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i E_i}{1-\nu_i}\int\limits_{\overline{z}_{i-1}^{(2)}}^{\overline{z}_i^{(2)}} \left(t(\overline{z},\mathrm{Fo}) - t_0\right)d\overline{z}\,, \qquad (2.129)$$

$$M_t = \frac{\beta_{\mathrm{T}} E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\int\limits_0^1 \left(t(\overline{z},\mathrm{Fo}) - t_0\right)\overline{z}d\overline{z} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i E_i}{1-\nu_i}\left[\int\limits_{\overline{z}_i^{(1)}}^{\overline{z}_{i-1}^{(1)}} \left(t(\overline{z},\mathrm{Fo}) - t_0\right)\overline{z}d\overline{z} + \int\limits_{\overline{z}_{i-1}^{(2)}}^{\overline{z}_i^{(2)}} \left(t(\overline{z},\mathrm{Fo}) - t_0\right)\overline{z}d\overline{z}\right], \qquad (2.130)$$

$$\overline{G}_1 = \frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \delta_i}{1-\nu_i}\,, \qquad (2.131)$$

$$\overline{G}_2 = \frac{E_{\mathrm{T}}}{2\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{2\left(1-\nu_i\right)}\left(\left(\overline{z}_{i-1}^{(1)}\right)^2 - \left(\overline{z}_i^{(1)}\right)^2 + \left(\overline{z}_i^{(2)}\right)^2 - \left(\overline{z}_{i-1}^{(2)}\right)^2\right), \qquad (2.132)$$

$$\overline{G}_3 = \frac{E_{\mathrm{T}}}{3(1-\nu_{\mathrm{T}})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{3\left(1-\nu_i\right)}\left(\left(\overline{z}_{i-1}^{(1)}\right)^3 - \left(\overline{z}_i^{(1)}\right)^3 + \left(\overline{z}_i^{(2)}\right)^3 - \left(\overline{z}_{i-1}^{(2)}\right)^3\right). \qquad (2.133)$$

2.5.2. Симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями за експоненціальним законом

Розглянемо симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями для випадку нагрівання за експоненціальним законом (2.120).

Враховуючи симетричність задачі ($\vartheta(\bar{z},\mathrm{Fo})=\vartheta(1-\bar{z},\mathrm{Fo})$), запишемо для цього випадку ненульові напруження у вигляді

$$\tilde{\sigma}(\bar{z},\mathrm{Fo})=\chi\left(\bar{z}\right)\left[\frac{\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(\mathrm{Fo})+2\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}}\chi_j\tilde{\vartheta}_j(\mathrm{Fo})}{1+2\sum\limits_{j=1}^{n}\chi_j\dfrac{\delta_j}{h}}-\frac{\beta(\bar{z})}{\beta_{\mathrm{T}}}\vartheta(\bar{z},\mathrm{Fo})\right], \qquad (2.134)$$

де $\tilde{\sigma}(\bar{z},\mathrm{Fo})=\sigma(\bar{z},\mathrm{Fo})\Big/\dfrac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}}-t_0)}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$ – безрозмірні напруження,

$$\chi\left(\bar{z}\right)=\frac{E(\bar{z})}{1-\nu(\bar{z})}\Big/\frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}},$$

$$\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(\mathrm{Fo})=\int\limits_0^1\vartheta\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)d\bar{z}=$$
$$=1-e^{-\mathrm{PdFo}}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B(\kappa_j,\mathrm{Fo})\Big(Y_1(\kappa_j)\sin\kappa_j+Y_2(\kappa_j)(1-\cos\kappa_j)\Big)}{\kappa_j}, \qquad (2.135)$$

$$\tilde{\vartheta}_i(\mathrm{Fo})=\int\limits_{\bar{z}_{i-1}^{(2)}}^{\bar{z}_i^{(2)}}\vartheta(\bar{z},\mathrm{Fo})d\rho=$$
$$=\frac{\delta_i}{h}\left[1-e^{-\mathrm{PdFo}}-\sum_{j=1}^{\infty}B(\kappa_j,\mathrm{Fo})\left(Y_1(\kappa_j)-\tilde{r}\left(\bar{z}_{i-1}^{(2)}+\frac{\delta_i}{2h}\right)\kappa_jY_2(\kappa_j)\right)\right], \qquad (2.136)$$

$B(\kappa_j,\mathrm{Fo})$, $Y_l(\kappa_j)$ ($l=1,2$), $\tilde{r}\left(\bar{z}\right)$ визначаються за формулами (2.122), (2.114), (2.117), κ_j – корені трансцендентного рівняння (2.116).

В усталеному режимі, коли пластина з ідентичними покриттями рівномірно прогрівається до температури середовища $t_{\mathrm{C}}^{\mathrm{m}}$, формула (2.134) матиме вигляд

$$\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}} = \frac{2\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j - \beta_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}{1 + 2\sum_{j=1}^{n} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}, \tag{2.137.1}$$

$$\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \chi_i \frac{1 - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_i - \beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}{1 + 2\sum_{j=1}^{n} \chi_j \frac{\delta_j}{h}}, \quad k = 1,2; \;\; i = \overline{1,n}\,. \tag{2.137.2}$$

У цьому випадку для покриття з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла (зокрема, для тонких покрить з модулями Юнга, що не перевищують суттєво модуль Юнга підкладки) зі співвідношення (2.137.1) отримуємо наближену формулу для усталених напружень у тілі:

$$\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j - \beta_{\mathrm{T}}}{\beta_{\mathrm{T}}} \chi_j \frac{\delta_j}{h}. \tag{2.138.1}$$

Окрім того, для усталених напружень в i-му шарі покриття з малою жорсткістю, коли КЛТР інших шарів несуттєво перевищує КЛТР пластини, з (2.137.2) слідує наближена формула

$$\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \chi_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} \right), \quad k = 1,2; \;\; i = \overline{1,n}\,. \tag{2.138.2}$$

2.5.3. Числові результати дослідження термонапруженого стану пластини з двостороннім тришаровим покриттям при нагріві за експоненціальним законом

Дослідимо термонапружений стан системи тіло–двостороннє тришарове покриття на основі розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності (2.121) та термопружності (2.134) для пластини з ідентичними багатошаровими покриттями за симетричного нагріву згідно з експоненціальним законом у часі (2.120).

На рис. 2.26 показано зміну з часом безрозмірного напруження $\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}(\bar{z},\mathrm{Fo})$ в підкладці на поверхні поділу з покриттям ($\bar{z}=0$), на поверхні $\bar{z}=0.25$ та серединній поверхні ($\bar{z}=0.5$) для випадків, коли 1) всі КЛТР шарів покриття рівні КЛТР підкладки (суцільні криві); 2) всі КЛТР шарів покриття більші, ніж підкладки (штрихові криві) та 3) всі КЛТР шарів покриття менші, ніж підкладки (пунктирні криві).

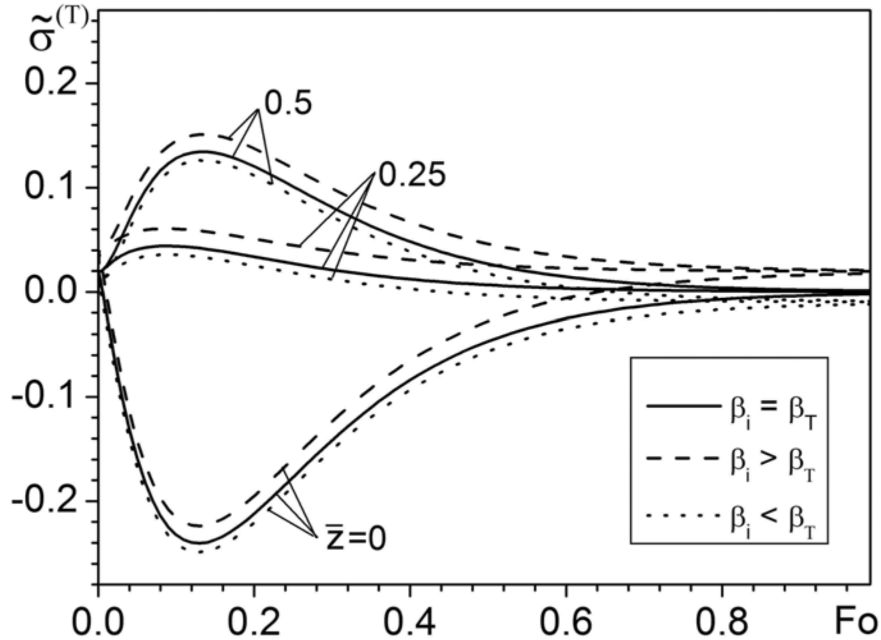


Рис. 2.26. Зміна напружень з часом в підкладці
на поверхні поділу з покриттям $\bar{z}=0$,
на поверхні $\bar{z}=0.25$ та серединній поверхні $\bar{z}=0.5$
для різних співвідношень між КЛТР шарів покриття та підкладки

Розрахунки для рис. 2.26 проведено при $\mathrm{Bi}=10$, $\mathrm{Pd}=10$, $\xi=0$, $\eta=0$ та $\beta_1=\beta_2=\beta_3$; $\beta_1=\beta_\mathrm{T}$, $\beta_1=2\beta_\mathrm{T}$, $\beta_1=0.5\beta_\mathrm{T}$ за геометричних співвідношень (2.64) при $z_*=h$ і таких механічних співвідношень між параметрами шарів покриття та підкладки (тіла):

$$\frac{E_1}{1-\nu_1}:\frac{E_2}{1-\nu_2}:\frac{E_3}{1-\nu_3}=5:2:8, \tag{2.139}$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1}:\frac{E_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}}=1. \tag{2.140}$$

Як бачимо, знак усталених напружень визначає різниця КЛТР підкладки і шарів покриття у всіх розглянутих точках пластини, хоча під час самого процесу нагрівання в різних точках підкладки знак напружень може бути відмінним. З іншого боку, за будь-яких співвідношень КЛТР у початковий період нагрівання на межі пластина–покриття розвиваються стискальні напруження, а на серединній поверхні пластини – розтягальні, найбільші з яких досягаються при $\beta_i>\beta_\mathrm{T}$. Оскільки розтягальні напруження в підкладці найнебезпечніші, то дослідимо їх зміну з часом залежно від теплофізичних параметрів – ефективних термоопору ξ і теплоємності η (рис. 2.27), критеріїв Біо Bi та Предводителєва Pd (рис. 2.28) та величини $\dfrac{E_1}{1-\nu_1}\Big/\dfrac{E_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}}$ (рис. 2.29) саме на серединній поверхні пластини ($\bar{z}=0.5$) для випадку $\beta_i>\beta_\mathrm{T}$.

Рисунки 2.27-2.29 ілюструють вплив теплофізичних і механічних характеристик покриття та умов теплообміну зі середовищем на характер зміни максимальних значень розтягальних напружень на серединній поверхні пластини.

При розрахунках для рис. 2.27-2.29 приймали $\beta_i=2\beta_\mathrm{T}$, $i=1,2,3$; співвідношення (2.64) при $z_*=h$, (2.139); окрім того, для рис. 2.27 і 2.29 – $\mathrm{Bi}=10$, $\mathrm{Pd}=10$, для рис. 2.27 і 2.28 – ще умова (2.140), а для рис. 2.28 і 2.29 – співвідношення (2.65).

.

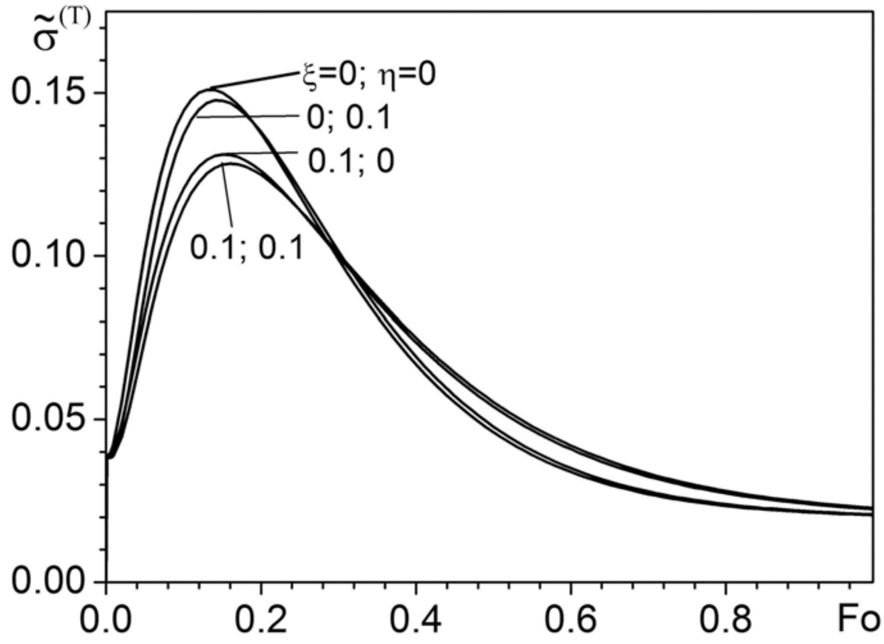


Рис. 2.27. Зміна напружень з часом
на серединній поверхні пластини залежно
від ефективних термоопору ξ і теплоємності η

Наявність покриття призводить до зменшення рівня розтягальних напружень (крива $\xi = 0$, $\eta = 0$ на рис. 2.27 – термоопір та теплоємність покриття відсутні).

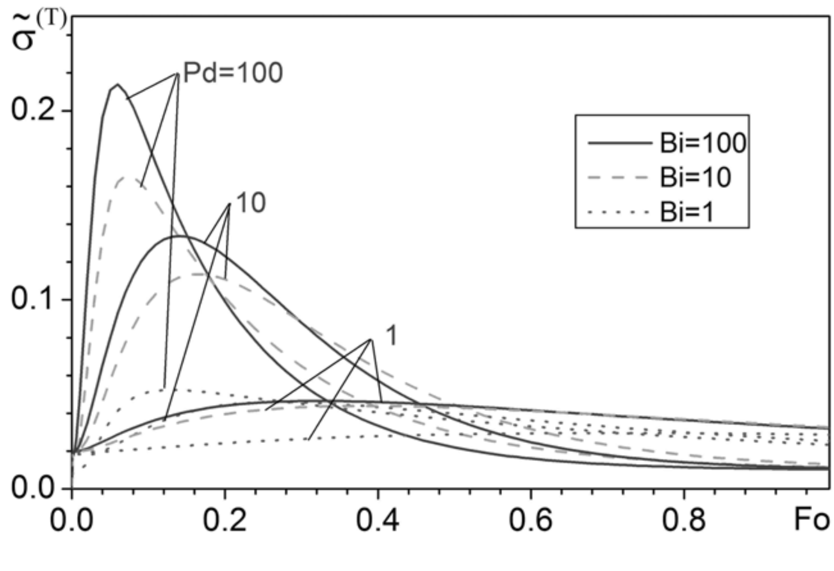


Рис. 2.28. Зміна напружень з часом
на серединній поверхні пластини залежно
від критеріїв Біо Bi та Предводителєва Pd

Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає росту критерію Біо) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає росту критерію Предводителєва) спричиняє зростання максимального значення розтягальних напружень на серединній поверхні пластини (рис. 2.28), причому, як було і слід очікувати, найбільше значення напружень досягається за відповідних максимальних значень Bi та Pd.

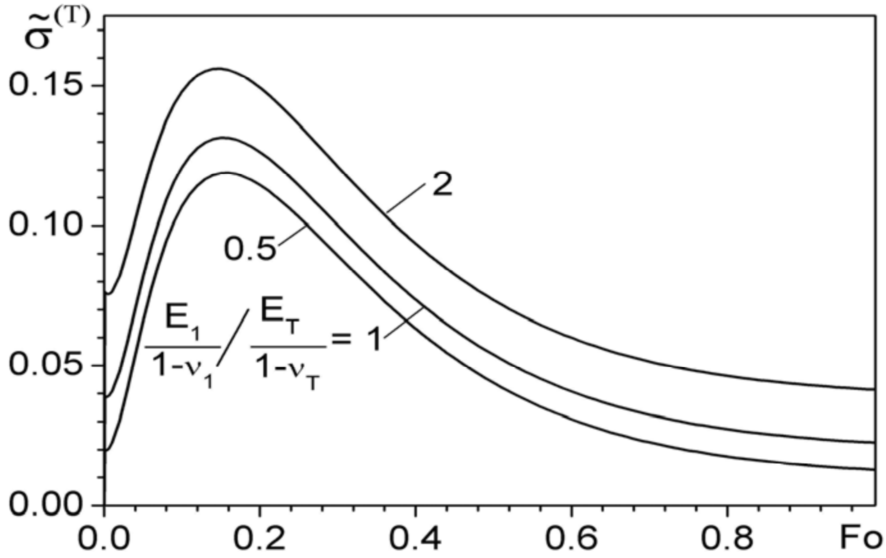


Рис. 2.29. Зміна напружень з часом
на серединній поверхні пластини залежно
від величини $\dfrac{E_1}{1-\nu_1} \Big/ \dfrac{E_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}}$

Якщо рівень усталених напружень в пластині (рис. 2.29 при $\mathrm{Fo}=1$) пропорційний величині $\dfrac{E_i}{1-\nu_i}\left(\beta_i-\beta_\mathrm{T}\right)$, що відповідає в даному випадку формулі (2.138.1), то у перехідному інтервалі часу, коли досягаються максимальні розтягальні напруження (рис. 2.29 при $\mathrm{Fo}\approx 0.15$), вплив модуля Юнга покриття значно менший.

Показано розподіл напружень за товщиною у системі пластина–тришарове покриття для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi}=10$, $\mathrm{Pd}=10$ (рис. 2.30), різних значень Bi при $\mathrm{Fo}=0.02$, $\mathrm{Pd}=10$ (рис. 2.31), різних значень Pd при $\mathrm{Fo}=0.02$, $\mathrm{Bi}=10$ (рис. 2.32), різних значень $\chi_1=\dfrac{E_1}{1-\nu_1} \Big/ \dfrac{E_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}}$ при $\mathrm{Fo}=0.02$, $\mathrm{Bi}=10$, $\mathrm{Pd}=10$ (рис. 2.33) за співвідношень (2.64) при $z_*=h$, (2.65), (2.139), (2.140) для рис. 2.30-2.32, співвідношень (2.64) при $z_* = h$, (2.65), (2.139) для рис. 2.33 при $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_{\mathrm{T}} = 4:2:1:2$.

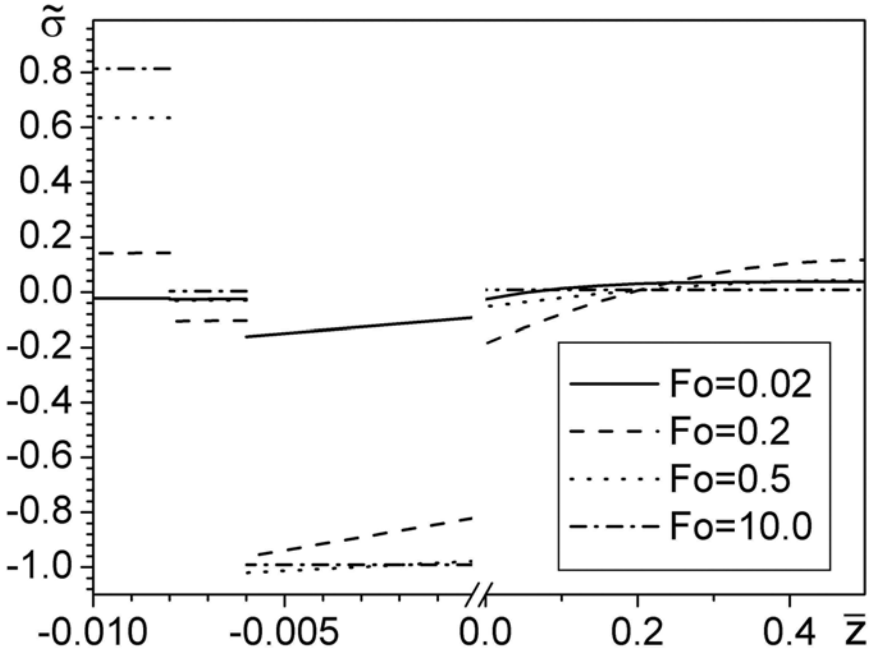


Рис. 2.30. Розподіл напружень за товщиною
у системі пластина–двостороннє тришарове покриття
для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi} = 10$, $\mathrm{Pd} = 10$

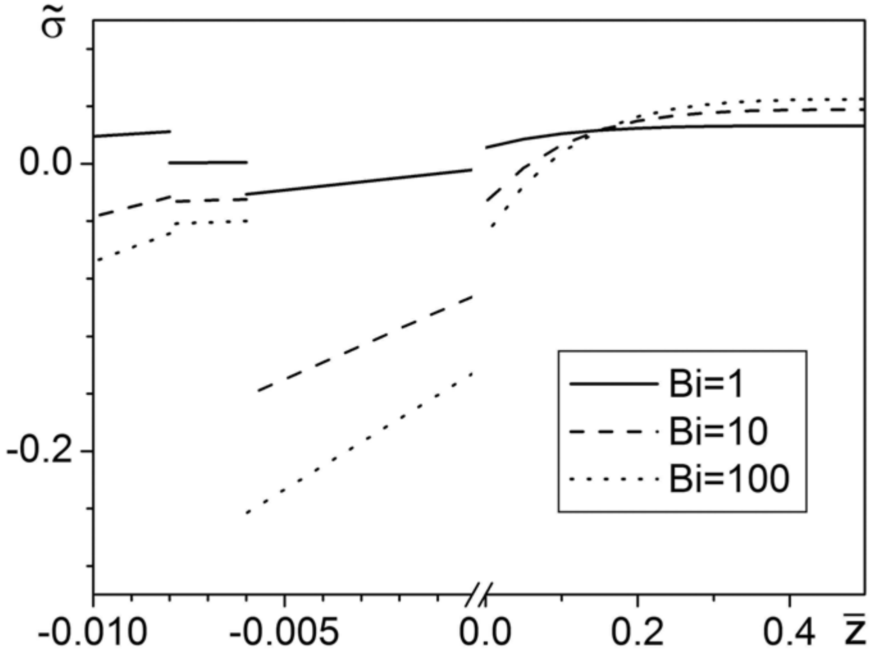


Рис. 2.31. Розподіл напружень за товщиною
у системі пластина–двостороннє тришарове покриття
для різних значень Bi при $\mathrm{Fo} = 0.02$, $\mathrm{Pd} = 10$

Рисунки 2.30-2.33 ілюструють вплив термомеханічних характеристик покриття та умов теплообміну зі середовищем на характер зміни напружень у шарах покриття і пластині.

Бачимо, що напруження в покритті мають розривний характер, зростаючи з часом за абсолютним значенням у шарах покриття, КЛТР яких відмінний від КЛТР підкладки. Знак усталених напружень у шарі покриття (штрихпунктирні криві при $\mathrm{Fo} = 10$ на рис. 2.30) визначає різниця КЛТР цього шару і підкладки, а їх рівень пропорційний величині $\dfrac{E_i}{1-\nu_i}\left(\beta_i - \beta_{\mathrm{T}}\right)$, що узгоджується з формулою (2.138.2). Також з рис. 2.30 видно, що для тонких ($\delta / h \le 0.01$) покрить з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла усталені напруження в покритті суттєво більші за абсолютним значенням, ніж у пластині в тих шарах, КЛТР яких відмінні від КЛТР тіла, що відповідає формулам (2.138).

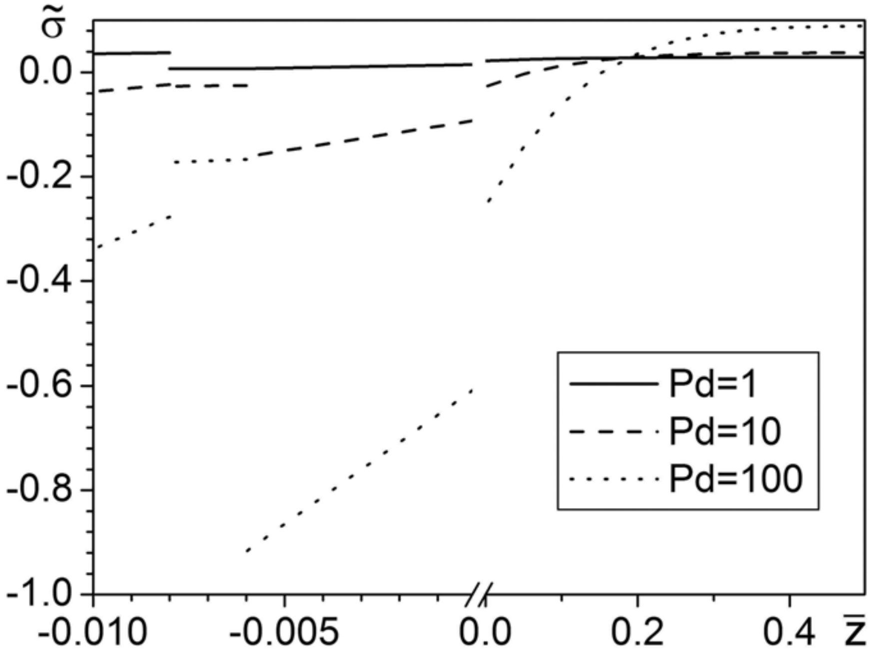


Рис. 2.32. Розподіл напружень за товщиною у системі пластина–двостороннє тришарове покриття для різних значень Pd при $\mathrm{Fo} = 0.02$, $\mathrm{Bi} = 10$

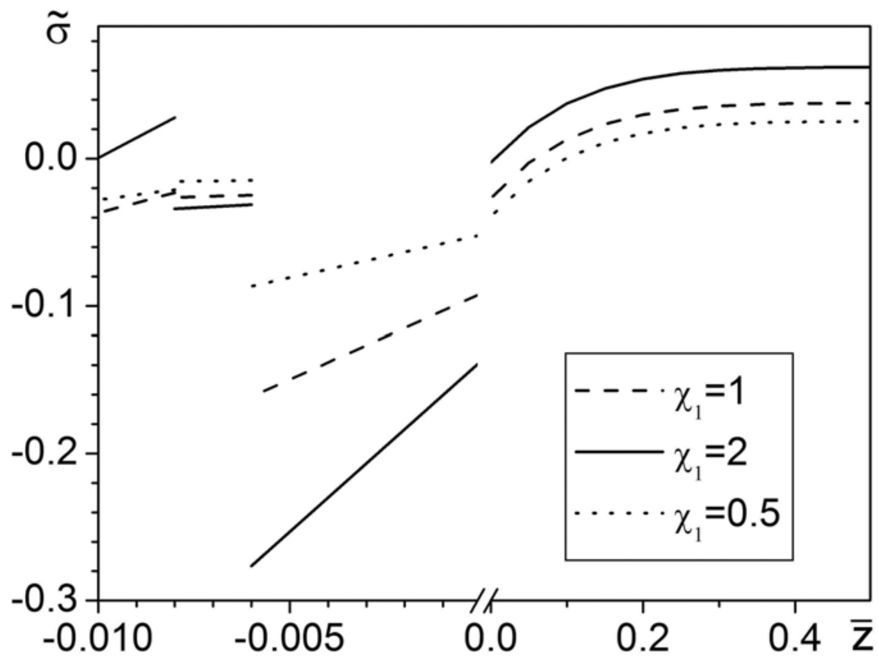


Рис. 2.33. Розподіл напружень за товщиною
у системі пластина–двостороннє тришарове покриття
для різних значень $\chi_1 = \dfrac{E_1}{1-\nu_1} \Big/ \dfrac{E_{\text{T}}}{1-\nu_{\text{T}}}$ при $\text{Fo} = 0.02$, $\text{Bi} = 10$

На початковому етапі нагрівання знак температурних напружень також залежить від інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (рис. 2.31), швидкості підвищення температури середовища (рис. 2.32), відносної жорсткості покриття (рис. 2.33). Хоча у першому та другому шарах покриття напруження є недодатними для всіх розглядуваних значень Bi та Pd, то у третьому зовнішньому шарі покриття напруження для менших значень Bi та Pd і більших значень χ_1 є розтягальні (суцільні криві для $-0.01 \le \bar{z} < -0.008$ на рис. 2.31-2.33). Зростання інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителєва) призводить до суттєвого зростання значень і перепаду стискальних напружень у шарах покриття та значень і перепаду напружень у пластині (штрихові та пунктирні криві на рис. 2.31, 2.32).

Висновки до розділу 2

На основі застосування запропонованої у першому розділі математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну тіл із середовищем через тонкі багатошарові покриття та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичні розв’язки низки задач теплопровідності за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем для півпростору та пластини.

Для випадку півпростору розв’язано задачі з неоднорідною початковою умовою за стаціонарної зовнішньої теплової дії та з однорідною початковою умовою за циклічного теплового навантаження, а для випадку пластини – зі змінною з часом температурою довкілля.

Отримано розрахункові формули для визначення температури в підкладці та в довільному шарі покриття. Для півпростору такі співвідношення наведено для випадків експоненціального та сталого розподілу початкової температури. Для сталого початкового розподілу знайдені також асимптотики розв’язку для великих та малих значень часу. Для пластини записано конкретні вирази розв’язків для випадків лінійної, експоненціальної, логарифмічної і періодичної зміни функцій температур зовнішнього середовища.

На прикладі тестової задачі для симетричного стаціонарного нагріву пластини з двостороннім тришаровим покриттям верифіковано застосовану методику та показано її ефективність.

Детально розглянуто задачу про симетричний нагрів пластини з ідентичними тришаровими покриттями для випадку експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища.

Показано, що розрахунок температурного поля за моделлю із запропонованою узагальненою граничною умовою дозволяє отримати відмінний від рівномірного розподіл напружень за товщиною у шарах покриття, на противагу моделі, що використовує концепцію «зосередженої ємності».

Оскільки одержані формули враховують перепад температури за товщиною покриття, то це дало можливість отримати розв’язки відповідних задач термопружності, за якими можна точніше розраховувати термонапруження, які є однією з можливих причин утворення тріщин у захисних шарах покриття за різних режимів нагрівання за довільної функції температури довкілля.

На основі отриманих розв’язків проаналізовано вплив геометричних і теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на процес теплопереносу і термопружний стан в системі тіло–багатошарове покриття.

Встановлено, що визначальними параметрами впливу на розподіл температури та напружень є ефективні теплофізичні характеристики покриття – приведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття та швидкість зміни температури зовнішнього середовища, а у випадку термоциклічного навантаження – зміни тривалості циклу та моментів перемикання періодів у межах одного циклу. Напружений стан в системі залежить і від термомеханічних параметрів – модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та коефіцієнта лінійного температурного розширення матеріалу.

РОЗДІЛ 3

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ПІВПРОСТОРУ З ТОНКИМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ПРОМЕНЕВО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

В даному розділі на основі математичної моделі теплових процесів у тілах з тонкими шаруватими покриттями наведено постановку нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності та відповідної задачі термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем.

Методом квазілінеаризації побудовано ітераційну схему розв’язання сформульованої нелінійної крайової задачі теплопровідності. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано наближений розв’язок лінеаризованої задачі для кожної ітерації.

Проведено порівняльний аналіз ефективності застосування методів Пікара, зведення до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри, послідовних наближень та квазілінеаризації для розв’язання тестової нелінійної нестаціонарної задачі радіаційної взаємодії півпростору без покриття з довкіллям.

На основі розробленої ітераційної процедури досліджено вплив геометричних та теплофізичних характеристик покриття та параметрів променево-конвективного теплообміну з довкіллям на теплові процеси та напружений стан у півпросторі з багатошаровим покриттям.

Положення цього розділу відображено у семи публікаціях автора [49, 281, 286, 287, 307, 308, 310].

3.1. Теплопровідність півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну

Однією з проблем, що виникають при дослідженні та розрахунку температурних полів елементів конструкцій, що працюють за умов променевого та конвективного нагрівання чи охолодження, є вибір ефективного методу розв'язування відповідних нелінійних нестаціонарних крайових задач теплопровідності та побудови їх наближених розв'язків.

Основними способами розв'язування нелінійних крайових задач є їх лінеаризація, використання числових методів, побудова ітераційних схем, застосування варіаційного чи інтегрального методів, методу збурень [15, 103, 128, 211].

Серед підходів, що застосовуються до розв'язання задач теплопровідності з нелінійною граничною умовою, є зведення до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри за допомогою функцій Ґріна [18, 130, 218], інтегрального перетворення Лапласа [230, 364, 550], методу теплових потенціалів [30]. Для розв'язування цього нелінійного інтегрального рівняння у [18, 364] використано метод послідовних наближень, у [130, 218] – лінійні сплайни, у [319] – неявний метод Рунге-Кутта. У [230] при розв'язуванні інтегрального рівняння застосовано спрощуючу процедуру для отримання асимптотичних розв'язків для великих і малих часів. У [30, 550] нелінійні інтегральні рівняння зводяться до нелінійних алгебричних рівнянь.

Різні варіанти методу послідовних наближень розв'язування задач променево-конвективної взаємодії тіл з довкіллям були розглянуті у [40, 103, 128, 203, 204], застосування методу збурень – у [103, 367].

У роботах [62, 429, 531] для визначення температурного поля в тілах при радіаційно-конвективному теплообміні з довкіллям застосовано спрощуючі моделі із зосередженими параметрами (lumped models).

У роботі [132] для розрахунку температурного поля опромінюваної оболонки з покриттям систему нелінійних диференціальних рівнянь зведено до системи нелінійних алгебричних рівнянь, для розв'язування якої використано чисельний метод нелінійної релаксації.

Для розв'язання нелінійних задач тепловипромінюючого тіла з тонким покриттям у роботах [19, 21] запропоновано зведення до еквівалентних систем нелінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма за просторовою координатою і Вольтерри за часом.

Одним з ефективних підходів до побудови наближених розв’язків нелінійних задач такого класу є метод квазілінеаризації [12, 163, 342, 343], який, порівняно з іншими методами, має вищу швидкість збіжності до розв’язку вихідного рівняння.

Для побудови розв’язку нелінійної контактно–крайової задачі нестаціонарної теплопровідності у [252] та дослідження впливу випромінення на теплоперенос у пластинах з тонкими покриттями в [243] застосовано процедуру квазілінеаризації та метод скінчених різниць. Цю ж процедуру квазілінеаризації (ітераційний процес по Ньютону) використано у методиці розв’язування прямих нелінійних задач теплопровідності радіаційно-конвективного теплообміну в [157].

У цьому підрозділі з використанням нелінійної граничної умови (1.39) проведено узагальнення результатів розрахунку температурного поля в півпросторі за конвективної взаємодії з довкіллям через багатошарове покриття, проведене в підрозділі 2.1.4, на випадок променево-конвективного нагрівання чи охолодження такої системи. Методом квазілінеаризації [12] побудовано ітераційну схему для визначення температури в півпросторі, а методом інтегрального перетворення Лапласа [144] отримано наближений аналітичний розв’язок лінеаризованої задачі для кожної ітерації.

3.1.1. Постановка задачі

Розглянемо променево-конвективний теплообмін півпростору з довкіллям через n-шарове покриття товщиною $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ (рис. 2.1).

Одновимірну нелінійну крайову задачу теплопровідності сформулюємо так: рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t_j}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2}, \; j = \mathrm{T}, 1, 2, ..., n, \qquad (3.1)$$

початкова умова

$$t_{j|\tau=0} = t_0 = \text{const}, \tag{3.2}$$

гранична умова променево-конвективного теплообміну між покриттям і середовищем

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \sigma_0 \varepsilon \left(t_n^4 - t_\text{C}^4 \right) + \mu \left(t_n - t_\text{C} \right) \quad \text{при} \quad z = z_n = -\delta, \tag{3.3}$$

умови ідеального теплового контакту на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом

$$\begin{aligned} & t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial z} \quad \text{при } z = z_{i-1} = -\sum_{m=1}^{i-1} \delta_m, \quad i = 2, ..., n, \\ & t_1 = t_\text{T}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_\text{T} \frac{\partial t_\text{T}}{\partial z} \quad \text{при } z = z_0 = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

умова на безмежності

$$t_\text{T} \to t_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3.5}$$

3.1.2. Розв'язування задачі з узагальненою граничною умовою

Узагальнену граничну умову теплопровідності на основі виразів (1.39), (1.38) і (1.44) для даного випадку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \lambda_\text{T} \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_\text{T}}{\partial z} + \mu \left(t_\text{C} - t_\text{T} \right) - \Omega \frac{\partial t_\text{T}}{\partial \tau} + \sigma_0 \varepsilon t_\text{C}^4 - \\ & - \sigma_0 \varepsilon \sum_{m=0}^{4} (-1)^m C_4^m \left(\frac{\lambda_\text{T}}{H} \right)^m t_\text{T}^{4-m} \left(\frac{\partial t_\text{T}}{\partial z} \right)^m = 0, \quad t_{\text{T}|\tau=0} = t_0 \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Уведемо безрозмірні величини:

$$\theta_\text{T} = t_\text{T} / t_*, \quad \theta_0 = t_0 / t_*, \quad \theta_\text{C} = t_C / t_*, \tag{3.7}$$

де відлікова температура

$$t_* = \begin{cases} t_\text{C} & \text{під час нагрівання системи} \\ t_0 & \text{під час охолодження.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Безрозмірні координату $\bar{z}$, час Fo, критерій Біо Bi, відносні ефективний термоопір ξ і ефективну теплоємність η покриття визначаємо як у параграфі 2.1.2. Окрім того, уводимо критерій Старка $\mathrm{Sk} = \sigma_0 \varepsilon t_*^3 z_* / \lambda_\mathrm{T}$. Тут z_* – масштабний параметр.

Тоді нелінійна крайова задача теплопровідності (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) для півпростору в безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \theta_\mathrm{T}(\bar{z},\mathrm{Fo})}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_\mathrm{T}(\bar{z},\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}, \qquad \bar{z} > 0,\ \mathrm{Fo} > 0, \tag{3.9}$$

$$\theta_\mathrm{T}\left(\bar{z},0\right) = \theta_0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{\bar{z}\to\infty} \theta_\mathrm{T}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right) = \theta_0, \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\left(1+\xi \mathrm{Bi}\right)\frac{\partial \theta_\mathrm{T}}{\partial \bar{z}} + \mathrm{Bi}\left(\theta_\mathrm{C} - \theta_\mathrm{T}\right) - \eta \frac{\partial \theta_\mathrm{T}}{\partial \mathrm{Fo}} - \\ - \mathrm{Sk}\left[\sum_{m=0}^{4} (-1)^m C_4^m \xi^m \theta_\mathrm{T}^{4-m} \left(\frac{\partial \theta_\mathrm{T}}{\partial \bar{z}}\right)^m - \theta_\mathrm{C}^4\right] = 0, \quad \theta_{\mathrm{T}|\mathrm{Fo}=0} = \theta_0 \ \text{ при } \bar{z} = 0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Зауважимо, що введення, як і в праці [343], безрозмірної температури θ_T за допомогою формул (3.7) і (3.8) дає можливість сформулювати нелінійну задачу теплопровідності променево-конвективного нагрівання чи охолодження, включаючи охолодження в середовищі з нульовою температурою, однією системою співвідношень.

3.1.2.1. Схема методу квазілінеаризації

Застосуємо ітераційну процедуру на основі методу квазілінеаризації [12] до розв’язання крайової задачі (3.9)–(3.12). Крайову задачу для *k*-го наближення подамо так:

$$\frac{\partial^2 \theta_\mathrm{T}^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_\mathrm{T}^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}, \qquad \bar{z} > 0,\ \mathrm{Fo} > 0, \tag{3.13}$$

$$\theta_\mathrm{T}^{(k)}\left(\bar{z},0\right) = \theta_0, \tag{3.14}$$

$$\lim_{\bar{z}\to\infty} \theta_{\text{T}}^{(k)}\left(\bar{z}, \text{Fo}\right) = \theta_0, \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\left(1+\xi\text{Bi}\right)\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}}{\partial\bar{z}} + \text{Bi}\left(\theta_{\text{C}} - \theta_{\text{T}}^{(k)}\right) - \eta\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}}{\partial\text{Fo}} - \\ -\text{Sk}\left[\sum_{m=0}^{4}(-1)^m C_4^m \xi^m \left(\theta_{\text{T}}^{(k)}\right)^{4-m}\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}}{\partial\bar{z}}\right)^m - \theta_{\text{C}}^4\right] = 0 \ \text{при}\ \bar{z}=0, \quad \theta_{\text{T}}^{(k)}(0,0) = \theta_0.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Для лінеаризації нелінійного члена в граничній умові (3.16) використаємо формулу [12, 342]

$$\begin{gathered} f\left(\theta_{\text{T}}^{(k)}, \frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}}{\partial\bar{z}}\right) = f\left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}, \frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right) + f'_{\theta_{\text{T}}}\left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}, \frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right)\left(\theta_{\text{T}}^{(k)} - \theta_{\text{T}}^{(k-1)}\right) + \\ + f'_{\frac{\partial\theta_{\text{T}}}{\partial\bar{z}}}\left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}, \frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right)\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right),\end{gathered} \tag{3.17}$$

де $f\left(\theta_{\text{T}}, \frac{\partial\theta_{\text{T}}}{\partial\bar{z}}\right) = \sum_{J=0}^{4}(-1)^J C_4^J \xi^J \left(\theta_{\text{T}}\right)^{4-J}\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}}{\partial\bar{z}}\right)^J$.

Тоді лінеаризована умова (3.16) матиме наступний вигляд

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}\left(0,\text{Fo}\right)}{\partial\bar{z}} - \text{M}^{(k)}(\text{Fo})\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k)}\left(0,\text{Fo}\right)}{\partial\text{Fo}} = \\ = \text{Bi}_{**}^{(k)}(\text{Fo})\theta_{\text{T}}^{(k)}\left(0,\text{Fo}\right) + Q^{(k)}(\text{Fo}), \quad \theta_{\text{T}}^{(k)}(0,0) = \theta_0.\end{gathered} \tag{3.18}$$

де $\text{Bi}_{**}^{(k)}(\text{Fo}) = \dfrac{\text{Bi} + \text{Sk}\alpha_2^{(k-1)}(\text{Fo})}{1+\xi\text{Bi} - \text{Sk}\alpha_1^{(k-1)}(\text{Fo})}$, $\text{M}^{(k)}(\text{Fo}) = \dfrac{\eta}{1+\xi\text{Bi} - \text{Sk}\alpha_1^{(k-1)}(\text{Fo})}$,

$$Q^{(k)}(\text{Fo}) = -\frac{\text{Bi}\theta_{\text{C}} + \left(\theta_{\text{C}}^4 + \alpha_3^{(k-1)}(\text{Fo})\right)\text{Sk}}{1+\xi\text{Bi} - \text{Sk}\alpha_1^{(k-1)}(\text{Fo})}, \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1^{(k-1)} = \sum_{m=1}^{4}(-1)^m mC_4^m \xi^m \left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}\right)^{4-m}\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right)^{m-1}, \\ \alpha_2^{(k-1)} = \sum_{m=1}^{4}(-1)^{m-1}(5-m)C_4^{m-1}\xi^{m-1}\left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}\right)^{4-m}\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right)^{m-1}, \\ \alpha_3^{(k-1)} = 3\sum_{m=0}^{4}(-1)^m C_4^m \xi^m \left(\theta_{\text{T}}^{(k-1)}\right)^{4-m}\left(\frac{\partial\theta_{\text{T}}^{(k-1)}}{\partial\bar{z}}\right)^m.\end{gathered} \tag{3.20}$$

3.1.2.2. Побудова наближеного розв'язку лінеаризованої задачі для *k*-го наближення

Для розв'язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа [144]

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)L}(\overline{z},s)=\mathrm{L}\left[\theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\overline{z},\mathrm{Fo})\right]=\int\limits_{0}^{\infty}\theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\overline{z},\mathrm{Fo})\exp(-s\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}, \qquad (3.21)$$

де s – параметр перетворення.

Для отримання аналітичного розв'язку, аналогічно до підходу [40, 103], вважаємо величини $\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}$, $Q^{(k)}$ та $\mathrm{M}^{(k)}$ на кожній ітерації сталими. Тоді розв'язок рівняння (3.13) у півпросторі в трансформантах з урахуванням умов (3.14), (3.15), (3.18) матиме вигляд

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)L}(\overline{z},s)=\frac{\theta_0}{s}-\frac{g^{(k)}\exp\left(-q\overline{z}\right)}{s\left(\psi_*^{(k)}q^2+\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\right)^{-1}q+1\right)}, \qquad (3.22)$$

де $q=\sqrt{s}$, $\psi_*^{(k)}=\mathrm{M}^{(k)}/\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}$, $g^{(k)}=\theta_0+Q^{(k)}/\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}$.

Під час отримання оригіналу для зображення (3.22) можливі такі варіанти подання залежно від значень коренів рівняння

$$\psi_*^{(k)}q^2+\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\right)^{-1}q+1=0. \qquad (3.23)$$

1) Для $\eta\neq 0$ при $\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\right)^{-2}-4\psi_*^{(k)}\neq 0$ рівняння (3.23) має два різних корені $q_{1,2}^{(k)}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\psi_*^{(k)}\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\right)^2}}{2\psi_*^{(k)}\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}}$. Відповідно, трансформанту (3.22) можна подати так:

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)L}(\overline{z},s)=\frac{\theta_0}{s}-\frac{g^{(k)}\exp\left(-\overline{z}\sqrt{s}\right)}{\psi_*^{(k)}\left(q_1^{(k)}-q_2^{(k)}\right)s}\left(\frac{1}{\sqrt{s}-q_1^{(k)}}-\frac{1}{\sqrt{s}-q_2^{(k)}}\right). \qquad (3.24)$$

Використовуючи формулу обернення перетворення Лапласа (2.12), остаточно отримаємо вираз для визначення k-го наближення температури:

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \theta_0 - g^{(k)}\Big\{\mathrm{erfc}\,\bar{\varphi} + \\ + \frac{1}{2\Upsilon^{(k)}}\Big[\big(1+\Upsilon^{(k)}\big)F_1^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo}) - \big(1-\Upsilon^{(k)}\big)F_2^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})\Big]\Big\},\ 0 \le \bar{z} < \infty. \tag{3.25}$$

Тут $$\bar{\varphi} = \frac{\bar{z}}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}},\quad \Upsilon^{(k)} = \sqrt{1-4\mathrm{M}^{(k)}\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}},$$

$$F_m^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \exp\Big(-q_m^{(k)}\bar{z} + \big(q_m^{(k)}\big)^2\,\mathrm{Fo}\Big)\mathrm{erfc}\Big(\bar{\varphi} - q_m^{(k)}\sqrt{\mathrm{Fo}}\Big),\ m = 1,2,3,4. \tag{3.26}$$

2) Для $\eta \ne 0$ при $\big(\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\big)^{-2} - 4\psi_*^{(k)} = 0$ рівняння (3.23) має один дійсний двократний корінь $q_3^{(k)} = -0.5/\mathrm{M}^{(k)}$. Тоді трансформанта (3.22) матиме вигляд

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)L}(\bar{z},s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{g^{(k)}\exp\big(-\bar{z}\sqrt{s}\big)}{s\psi_*^{(k)}\big(\sqrt{s}-q_3^{(k)}\big)^2}. \tag{3.27}$$

Використовуючи формулу обернення перетворення Лапласа (2.19), отримаємо оригінал на k-ій ітерації знаходження температури

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \theta_0 - g^{(k)}\Big\{\mathrm{erfc}\,\bar{\varphi} + \\ + 2q_3^{(k)}\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}}\exp\big(-\bar{\varphi}^2\big) + \Big[2\big(q_3^{(k)}\big)^2\,\mathrm{Fo} - q_3^{(k)}\bar{z} - 1\Big]F_3^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})\Big\},\ 0 \le \bar{z} < \infty. \tag{3.28}$$

3) Для $\eta = 0$ рівняння (3.23) має один дійсний корінь $q_4^{(k)} = -\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}$ і трансформанту (3.22) можна подати таким чином

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)L}(\bar{z},s) = \frac{\theta_0}{s} - \frac{\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\theta_0 + Q^{(k)}}{s\big(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}_{**}^{(k)}\big)}\exp\big(-\bar{z}\sqrt{s}\big). \tag{3.29}$$

Використовуючи формулу знаходження оригіналу (2.12), запишемо вираз для k-го наближення температури:

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \theta_0 - g^{(k)}\Big[\mathrm{erfc}\,\bar{\varphi} - F_4^{(k)}(\bar{z},\mathrm{Fo})\Big],\quad 0 \le \bar{z} < \infty. \tag{3.30}$$

3.1.2.3. Ітераційна схема для визначення температури в півпросторі

Розрахунковий алгоритм подамо таким чином:

$$\theta_{\mathrm{T}}^{(0)} = \theta_0, \quad \theta_{\mathrm{T}}^{(k)}(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = \mathfrak{M}\left(\theta_{\mathrm{T}}^{(k-1)}, \partial\theta_{\mathrm{T}}^{(k-1)} / \partial\overline{z}\right), \; k = 1,2,3,.., \tag{3.31}$$

де вигляд оператора $\mathfrak{M}$ залежно від характеру коренів рівняння (3.23) задається формулами (3.25), (3.28) або (3.30).

3.1.3. Співвідношення для визначення температури покриття

Для розрахунку температури в багатошаровому покритті через граничні значення температури і її похідної у півпросторі застосуємо формулу відновлення (2.24), у якій використовуємо позначення $\theta_i = t_i / t_*$, де t_* визначається співвідношенням (3.8).

Підставляючи наближення (3.25), (3.28) та (3.30) на останній ітерації при $k = \tilde{k}$ у цю формулу відновлення (2.24), отримаємо вирази для температури в i-му шарі покриття ($\overline{z}_i \le \overline{z} \le \overline{z}_{i-1}, \; i = 1,...,n$).

1) Для $\eta \ne 0$ при $\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(\tilde{k})}\right)^{-2} - 4\psi_*^{(\tilde{k})} \ne 0$:

$$\theta_i(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = \theta_0 + g^{(\tilde{k})}\left\{1 - \frac{1}{2\Upsilon^{(\tilde{k})}} \sum_{m=1}^{2} \left((-1)^{m+1} + \Upsilon^{(\tilde{k})}\right)\left(1 + \tilde{r}_i(\overline{z}) q_m^{(\tilde{k})}\right) F_m^{(\tilde{k})}(0, \mathrm{Fo})\right\}. \tag{3.32}$$

2) Для $\eta \ne 0$ при $\left(\mathrm{Bi}_{**}^{(\tilde{k})}\right)^{-2} - 4\psi_*^{(\tilde{k})} = 0$:

$$\begin{aligned} \theta_i(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = \theta_0 - g^{(\tilde{k})} \Big\{ & 1 + 2\left(1 + q_3^{(\tilde{k})} \tilde{r}_j(\overline{z})\right) q_3^{(\tilde{k})} \sqrt{\mathrm{Fo}/\pi} - \\ & - \left[1 - 2q_3^{(\tilde{k})}\left(1 + q_3^{(\tilde{k})} \tilde{r}_j(\overline{z})\right)\mathrm{Fo}\right] F_3^{(\tilde{k})}(0, \mathrm{Fo}) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

3) Для $\eta = 0$:

$$\theta_i(\overline{z}, \mathrm{Fo}) = \theta_0 - g^{(\tilde{k})}\left[1 - \left(1 + \mathrm{Bi}_{**}^{(\tilde{k})} \tilde{r}_i(\overline{z})\right) F_4^{(\tilde{k})}(0, \mathrm{Fo})\right]. \tag{3.34}$$

Тут $\tilde{k}$ – число ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності розрахунків.

3.2. Порівняльний аналіз різних підходів до розв’язування тестової задачі радіаційного охолодження півпростору

В даному підрозділі розглянемо частковий випадок розв’язаної в 3.1 задачі про радіаційне випромінення півпростору в середовище нульової температури за відсутності покриття. Буде проведено порівняльний аналіз результатів розрахунків нестаціонарного температурного поля в півпросторі з використанням методів Пікара, зведення вихідної задачі до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри, послідовних наближень та квазілінеаризації, на підставі якого буде показано кращу збіжність підходу на основі методу квазілінеаризації.

3.2.1. Постановка задачі

Розглядаємо однорідний півпростір $0 \le z < \infty$, в якому в початковий момент часу $\tau = 0$ задано деякий рівномірний розподіл абсолютної температури t_0. З поверхні півпростору $z = 0$ відбувається променева тепловіддача в довкілля нульової температури $t_C = 0$.

Розподіл температури $t(z,\tau)$ у півпросторі описується розв’язком рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{3.35}$$

де $a = \lambda / \omega$ – температуропровідність матеріалу півпростору, λ і ω – його коефіцієнти теплопровідності та теплоємності. Цей розв’язок задовольняє початкову умову

$$t(z,0) = t_0, \tag{3.36}$$

нелінійну граничну умову радіаційного охолодження на поверхні півпростору

$$\lambda \frac{\partial t(0,\tau)}{\partial z} = \sigma_0 \varepsilon t^4(0,\tau) \tag{3.37}$$

та умову на безмежності

$$\lim_{z\to\infty} t(z,\tau) = t_0 . \qquad (3.38)$$

Тут ε – ступінь чорноти поверхні півпростору.

3.2.2. Побудова наближених розв'язків задачі

3.2.2.1. Зведення до інтегрального рівняння типу Вольтерри

У [18] цю задачу розв'язано шляхом зведення її до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри за допомогою функції Ґріна.

Для визначення температури поверхні $z=0$ півпростору отримано таке інтегральне рівняння:

$$t(0,\tau) = t_0 - \frac{\sigma_0\varepsilon}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{t^4(0,\tau_0)}{\sqrt{\tau-\tau_0}}d\tau_0 , \qquad (3.39)$$

Після введення нових змінних $\overline{\tau} = \tau/\overline{\gamma}^2$, $\varsigma = \tau_0/\overline{\gamma}^2$, де $\overline{\gamma} = \lambda\big/\left(\sigma_0\varepsilon t_0^3\right)\sqrt{\pi/a}$, та нової функції $\varphi(\overline{\tau}) = t^4\left(0,\overline{\gamma}^2\overline{\tau}\right)\big/t_0^4$ отримано рівняння

$$\varphi(\overline{\tau}) = \left[1 - \int_0^{\overline{\tau}}\frac{\varphi(\varsigma)}{\sqrt{\overline{\tau}-\varsigma}}d\varsigma\right]^4 . \qquad (3.40)$$

Якщо рівняння (3.40) буде розв'язане, тоді $t(0,\tau) = t_0\sqrt[4]{\varphi\left(\tau/\overline{\gamma}^2\right)}$, а розподіл температури в півпросторі визначатиметься співвідношенням

$$t(z,\tau) = t_0\left[1 - \frac{1}{\overline{\gamma}}\int_0^{\tau}\frac{\varphi\left(\frac{\tau_0}{\overline{\gamma}^2}\right)}{\sqrt{\tau-\tau_0}}\exp\left(-\frac{z^2}{4a\left(\tau-\tau_0\right)}\right)d\tau_0\right]. \qquad (3.41)$$

Доведено, що розв'язок рівняння (3.40) існує, єдиний і він може бути отриманий методом послідовних наближень

$$\varphi_k\left(\overline{\tau}\right)=\left[1-\int\limits_0^{\overline{\tau}}\frac{\varphi_{k-1}\left(\varsigma\right)}{\sqrt{\overline{\tau}-\varsigma}}d\varsigma\right]^4,\ k=1,2,3,\dots . \tag{3.42}$$

Показано, що при відомій функції $\varphi_0(\overline{\tau})$, меншій від розв'язку, $\varphi_0(\overline{\tau})\le\varphi(\overline{\tau})$, послідовні наближення $\varphi_k\left(\overline{\tau}\right)$ наближаються до розв'язку рівняння (3.40) з різних сторін.

3.2.2.2. Метод Пікара

До розв'язання крайової задачі (3.35)-(3.38) застосуємо метод Пікара [12, 13]. Сформулюємо задачу в безрозмірних величинах:

$$\frac{\partial^2\theta(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\overline{z}^2}=\frac{\partial\theta(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}, \tag{3.43}$$

$$\theta\left(\overline{z},0\right)=1, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial\theta\left(0,\mathrm{Fo}\right)}{\partial\overline{z}}=\mathrm{Sk}\theta^4\left(0,\mathrm{Fo}\right), \tag{3.45}$$

$$\lim_{\overline{z}\to\infty}\theta\left(\overline{z},\mathrm{Fo}\right)=1, \tag{3.46}$$

де згідно з позначеннями параграфів 2.12 і 3.1.2 $\overline{z}=z/z_*$ – безрозмірна координата, $\mathrm{Fo}=a\tau/z_*^2$ – число Фур'є, $\mathrm{Sk}=\sigma_0\varepsilon t_*^3z_*/\lambda$ – критерій Старка, $\theta(\overline{z},\mathrm{Fo})=t/t_0$ – безрозмірна температура (тут $t_*=t_0$ відповідно до формули (3.8)), z_* – вибрана одиниця масштабу.

Граничну умову (3.45) подамо у вигляді

$$\frac{\partial\theta\left(0,\mathrm{Fo}\right)}{\partial\overline{z}}=q^*\left(\mathrm{Fo}\right), \tag{3.47}$$

де $q^*(\mathrm{Fo})=\mathrm{Sk}\theta^4(0,\mathrm{Fo})$.

Таким чином, задача (3.43)-(3.46) звелась до задачі про охолодження півпростору зі змінним у часі тепловим потоком.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримаємо наближений аналітичний розв'язок задачі (3.43), (3.44), (3.46), (3.47):

$$\theta(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - q^* \left[2\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}} \exp\left(-\overline{\varphi}^2\right) - \overline{z}\,\mathrm{erfc}\,\overline{\varphi} \right], \qquad (3.48)$$

де $\overline{\varphi} = \overline{z} / \left(2\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)$.

Вираз (3.48) строго задовольняє граничні умови (3.46), (3.47), початкову умову (3.44), а при $q^* = \mathrm{const}$ співпадає з точним розв'язком.

За заданим початковим наближенням θ_0 ітераційну схему для визначення температури у півпросторі запишемо так:

$$q_k^*(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Sk}\,\theta_{k-1}^4\left(0,\mathrm{Fo}\right),$$

$$\theta_k(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - q_k^* \left[2\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}} \exp\left(-\overline{\varphi}^2\right) - \overline{z}\,\mathrm{erfc}\,\overline{\varphi} \right], \; k = 1,2,3,\ldots . \qquad (3.49)$$

3.2.2.3. Метод послідовних наближень

Застосуємо варіант методу послідовних наближень до розв'язання крайової задачі (3.43)-(3.46). Для цього подамо нелінійну граничну умову (3.45) у лінеаризованому вигляді [40]

$$\frac{\partial \theta\left(0,\mathrm{Fo}\right)}{\partial \overline{z}} = \mathrm{Bi}^*(\mathrm{Fo})\,\theta\left(0,\mathrm{Fo}\right), \qquad (3.50)$$

де $\mathrm{Bi}^*(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Sk}\,\theta^3(0,\mathrm{Fo})$.

Таким чином, задача (3.43)-(3.46) звелась до задачі про охолодження півпростору зі змінним коефіцієнтом теплообміну. За наближений аналітичний розв'язок задачі (3.43), (3.44), (3.46), (3.50) візьмемо співвідношення [144]

$$\theta(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \mathrm{erfc}\,\overline{\varphi} + \exp\left(\mathrm{Bi}^*\overline{z} + \mathrm{Bi}^{*2}\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\left(\overline{\varphi} + \mathrm{Bi}^*\sqrt{\mathrm{Fo}}\right). \qquad (3.51)$$

Вираз (3.51) строго задовольняє граничні умови (3.46), (3.50), початкову умову (3.44), а при $\mathrm{Bi}^* = \mathrm{const}$ співпадає з точним розв’язком [144].

При заданому початковому наближенні θ_0 ітераційна схема для визначення температури у півпросторі матиме вигляд

$$\mathrm{Bi}_k^*(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Sk}\theta_{k-1}^3(0,\mathrm{Fo}),$$
$$\theta_k(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \mathrm{erfc}\overline{\varphi} + \exp\left(\mathrm{Bi}_k^*\overline{z} + \mathrm{Bi}_k^{*2}\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\left(\overline{\varphi} + \mathrm{Bi}_k^*\sqrt{\mathrm{Fo}}\right),$$
$$k = 1,2,3,\ldots. \tag{3.52}$$

3.2.2.4. Квазілінеаризація

Ідея квазілінеаризації ґрунтується на узагальненні відомого методу Ньютона-Рафсона [12]. Метод квазілінеаризації дозволяє не лише лінеаризувати нелінійну крайову задачу, але й отримати послідовність функцій, які квадратично збігаються до розв’язку вихідного рівняння [163].

Крайову задачу для *k*-го наближення подамо так:

$$\frac{\partial^2\theta_k(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\overline{z}^2} = \frac{\partial\theta_k(\overline{z},\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}, \tag{3.53}$$

$$\theta_k(\overline{z},0) = 1, \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial\theta_k(0,\mathrm{Fo})}{\partial\overline{z}} = f\left(\theta_k(0,\mathrm{Fo})\right),\ f(\theta) = \mathrm{Sk}\theta^4, \tag{3.55}$$

$$\lim_{\overline{z}\to\infty}\theta_k(\overline{z},\mathrm{Fo}) = 1. \tag{3.56}$$

Для квазілінеаризації нелінійної граничної умови (3.55) використаємо співвідношення [12, 342]

$$\mathbb{Z}(\theta_k) = \mathbb{Z}(\theta_{k-1}) + \mathbb{Z}'(\theta_{k-1})\left(\theta_k - \theta_{k-1}\right),\ k = 1,2,3,\ldots. \tag{3.57}$$

Тоді ця гранична умова матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial \theta_k(0,\mathrm{Fo})}{\partial X} = \mathrm{Bi}_k^*(\mathrm{Fo})\theta_k(0,\mathrm{Fo}) + q_k^*(\mathrm{Fo}), \tag{3.58}$$

де $$\mathrm{Bi}_k^*(\mathrm{Fo}) = 4\mathrm{Sk}\theta_{k-1}^3(0,\mathrm{Fo});\ q_k^*(\mathrm{Fo}) = -3\mathrm{Sk}\theta_{k-1}^4(0,\mathrm{Fo}).$$

Використовуючи отриманий за допомогою інтегрального перетворення Лапласа наближений аналітичний розв'язок задачі (3.53), (3.54), (3.56), (3.58) і задаючи початкове наближення θ_0, ітераційну схему для визначення температури у півпросторі запишемо наступним чином:

$$\mathrm{Bi}_k^*(\mathrm{Fo}) = 4\mathrm{Sk}\theta_{k-1}^3(0,\mathrm{Fo}), \qquad q_k^*(\mathrm{Fo}) = -3\mathrm{Sk}\theta_{k-1}^4(0,\mathrm{Fo}),$$

$$\theta_k(\bar{z},\mathrm{Fo}) = 1 - \left(1 + \frac{q_k^*}{\mathrm{Bi}_k^*}\right)\left[\mathrm{erfc}\bar{\varphi} - \exp\left(\mathrm{Bi}_k^*\bar{z} + \mathrm{Bi}_k^{*2}\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\left(\bar{\varphi} + \mathrm{Bi}_k^*\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\right], \tag{3.59}$$

$$k = 1,2,3,...$$

3.2.3. Числові результати

Для проведення порівняльного аналізу результатів розрахунків зміни з часом температури поверхні півпростору за променевого охолодження в довкілля, наведених у [18], з результатами розрахунків такої ж температури, отриманими за допомогою методів Пікара, послідовних наближень і квазілінеаризації, було встановлено взаємозв'язок між значеннями функції $\varphi(\bar{\tau})$ і температури $\theta(0,\mathrm{Fo})$

$$\varphi_k(\bar{\tau}) = \theta_k^4(0,\mathrm{Fo}),\ k = 1,2,3,...,\ \bar{\tau} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Sk}^2\mathrm{Fo}. \tag{3.60}$$

Зауважимо, що у табл. 3.1 подано уточнені значення наближень φ_2, φ_3, φ_4 та φ_5, визначених за співвідношенням (3.42), порівняно з такими ж наближеннями з [18]. У розрахунках за нульове наближення вибрано $\varphi_0 = 0$ для ітераційної схеми (3.42) і $\theta_0 = 0$ – для ітераційних схем (3.49), (3.52) та (3.59).

Таблиця 3.1

Результати розрахунку тестової задачі за різними підходами

$\overline{\tau}$	φ_k	Зведення до інтегрального рівняння	Метод Пікара	Послідовні наближення	Квазілі-неаризація
0.00005	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.9446	0.9446	0.9452	0.9469
	φ_3	0.9470	0.9454	0.9474	0.9469
	φ_4	0.9469	0.9476	0.9473	0.9469
	φ_5	0.9469	0.9475	0.9473	0.9469
0.0005	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.8328	0.8328	0.8381	0.8525
	φ_3	0.8536	0.8398	0.8565	0.8517
	φ_4	0.8514	0.8580	0.8543	0.8517
	φ_5	0.8516	0.8551	0.8546	0.8517
0.001	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.7700	0.7700	0.7800	0.8059
	φ_3	0.8088	0.7833	0.8131	0.8040
	φ_4	0.8031	0.8161	0.8079	0.8040
	φ_5	0.8039	0.8090	0.8087	0.8040
0.005	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.5434	0.5434	0.5806	0.6671
	φ_3	0.6888	0.5958	0.6932	0.6554
	φ_4	0.6457	0.7032	0.6591	0.6556
	φ_5	0.6569	0.6577	0.6691	0.6556
0.01	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.4096	0.4096	0.4693	0.6014
	φ_3	0.6482	0.4979	0.6445	0.5790
	φ_4	0.5539	0.6573	0.5754	0.5794
	φ_5	0.5857	0.5690	0.6009	0.5793
0.03	φ_1	1	1	1	1
	φ_2	0.1825	0.1825	0.2837	0.5053
	φ_3	0.6433	0.3581	0.5953	0.4535
	φ_4	0.3596	0.5887	0.4149	0.4543
	φ_5	0.4987	0.4016	0.5060	0.4542

Як бачимо з табл. 3.1, при $\overline{\tau} = 0.00005$ значення φ_5, обчислені за методами зведення до інтегрального рівняння та квазілінеаризації, співпадають, (причому за методом квазілінеаризації це значення досягається на другій ітерації, а при зведенні до інтегрального рівняння – на четвертій), а значення, обчислені за методами Пікара та послідовних наближень відрізняються незначно.

Зі збільшенням параметра $\overline{\tau}$ швидкість самозбіжності методу квазілінеаризації залишається високою порівняно зі значним сповільненням самозбіжності методів Пікара та послідовних наближень. Останній факт проілюстровано даними розрахунку швидкості самозбіжності (кількість ітерацій, необхідних для досягнення точності до чотирьох значущих цифр) залежно від значення параметра $\overline{\tau}$ (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Кількість ітерацій
для досягнення необхідної точності за різними підходами

$\overline{\tau}$	k		
	Метод Пікара	Послідовні наближення	Квазілінеаризація
0.00005	5	4	2
0.0005	7	6	3
0.001	9	6	3
0.005	12	9	4
0.01	16	10	5
0.03	54	18	5

Отже, на підставі отриманих числових результатів і проведеного порівняльного аналізу швидкості збіжності розглянутих методів показано переваги застосування методу квазілінеаризації до розв'язання нелінійної задачі теплопровідності для півпростору з променевою тепловіддачею. Встановлено високу швидкість збіжності методу квазілінеаризації в широкому діапазоні зміни часового параметра $\overline{\tau}$.

3.3. Параметричний аналіз процесу променево-конвективного нагрівання півпростору з багатошаровим покриттям

З метою дослідження впливу характеристик багатошарового покриття та зміни інтенсивності конвективного і променево–конвективного нагрівання на перебіг теплових процесів у півпросторі (рис. 2.1) проведено параметричний аналіз зміни з часом контактної температури між покриттям та основою, а також розподілу температури за просторовою координатою. Вихідними безрозмірними параметрами є: координата $\overline{z}$, ефективні термоопір та теплоємність покриття ξ і η відповідно, час Fo (число Фур'є), критерії Біо Bi та Старка Sk, початкова температура θ_0 (приймаємо $\theta_0 = 0.2$).

На рис. 3.1а показано зміну з часом температури поверхні півпростору $\theta_{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$ без покриття ($\xi = 0,\ \eta = 0$) і в зоні контакту покриття з основою за лише конвективного $(\mathrm{Bi} = 1,\ \mathrm{Sk} = 0)$ та променево–конвективного нагрівання $(\mathrm{Bi} = 1,\ \mathrm{Sk} = 0.5)$. Як видно з графіка, променево–конвективне нагрівання спричиняє суттєве зростання температури на зазначених поверхнях порівняно з температурою за лише конвективного нагрівання. Наявність покриття на поверхні півпростору викликає зниження контактної температури за обох режимів нагрівання (конвективного та променево–конвективного). Зі збільшенням ефективних теплоємності та термічного опору покриття зростає його теплоізолююча функція.

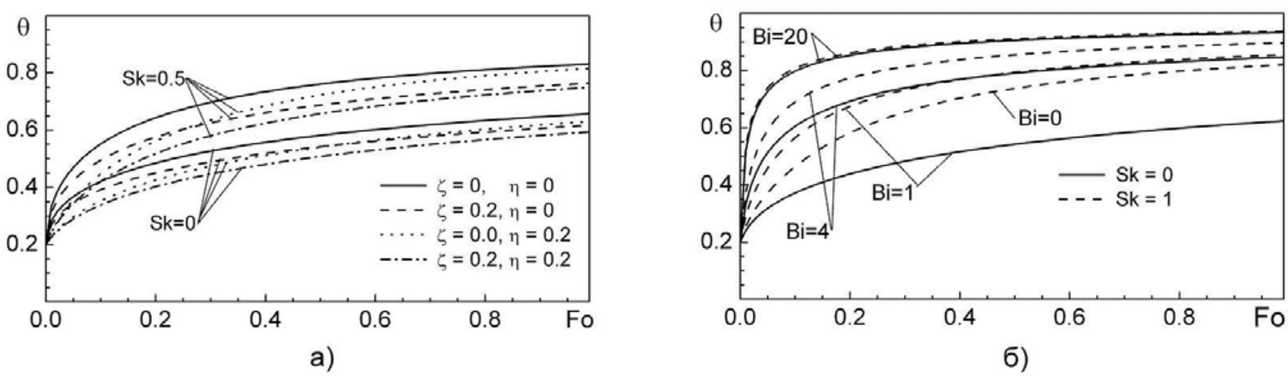


Рис. 3.1. Зміна з часом контактної температури $\theta = \theta_{\mathrm{T}}(0, \mathrm{Fo})$
на поверхні півпростір–покриття залежно від:
а) ефективних характеристик покриття; б) інтенсивності нагрівання

На рис. 3.1б подано зміну з часом температури в зоні контакту покриття з основою у разі зростання інтенсивності конвективного ($\mathrm{Sk}=0,\ \mathrm{Bi}=1;\ 4;\ 20$) та променево–конвективного ($\mathrm{Sk}=1,\ \mathrm{Bi}=0;\ 1;\ 4;\ 20$) нагрівання системи. Зі збільшенням критеріїв Біо і Старка відбувається зростання контактної температури. За значень $\mathrm{Sk}=0,\ \mathrm{Bi}=20$ і $\mathrm{Sk}=1,\ \mathrm{Bi}=20$ температури в зоні контакту покриття з основою з ростом Fo стають майже однаковими.

Для такого випадку залежно від реальних умов з метою досягнення потрібного рівня контактної температури можна застосувати конвективне нагрівання системи замість складного променево–конвективного.

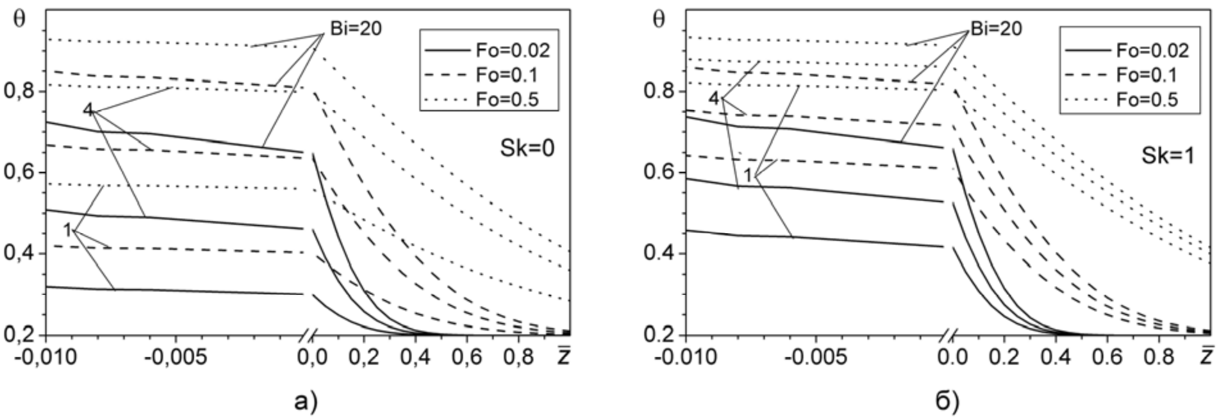


Рис. 3.2. Розподіл температури в системі основа–багатошарове покриття для деяких моментів часу:
а) конвективне нагрівання; б) променево–конвективне нагрівання

На рис. 3.2 показано зміну температури у системі півпростір–тришарове покриття вздовж координати $\bar{z}$ для деяких моментів часу залежно від зростання інтенсивності конвективного (рис. 3.2а) та променево–конвективного (рис. 3.2б) нагрівання за геометричних (2.64) і теплофізичних (2.65) співвідношень параметрів шарів покриття і тіла.

Як видно з графіків, зі збільшенням інтенсивності конвективного та променево–конвективного нагрівання перепад температури за товщиною покриття і глибиною півпростору зростає, причому для великого значення $\mathrm{Bi}=20$ внесок радіаційної складової в нагрівання системи при $\mathrm{Sk}=1$ зі збільшенням часу Fo суттєво зменшується.

Слід зауважити, що результати, наведені на рис. 3.1, 3.2а для випадку конвективного нагрівання ($\mathrm{Sk}=0$), співпадають з відповідними результатами на рис. 2.2-2.4 за врахування співвідношення (2.39) між безрозмірними температурами.

3.4. Числові результати дослідження теплового і напруженого стану півпростору з двошаровим зносостійким покриттям за променево-конвективного нагрівання

Задачі про визначення термонапруженого стану багатошарових структур за променево-конвективного теплообміну з довкіллям розглядали в працях [50, 127, 129, 130, 219, 220, 223, 242, 252, 253, 495], використовуючи наявні математичні моделі та розв'язуючи відповідні крайові задачі теплопровідності та термопружності з допомогою аналітично–числових та різноманітних числових методів.

У цьому підрозділі узагальнено дослідження задачі термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям лише за конвективного теплообміну, розглянутого у 2.2, на випадок врахування променевої складової.

Для визначення температурних напружень, зумовлених нерівномірним розподілом температури в системі, використовуючи формули (2.87) і (2.38), запишемо

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{\mathrm{T}}=\sigma_{yy}^{\mathrm{T}}=\sigma^{\mathrm{T}}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)=-\frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\left(t_{\mathrm{T}}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)-t_0\right), \quad -\delta\le z<\infty;\\
&\sigma_{xx}^{i}=\sigma_{yy}^{i}=\sigma^{i}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)=-\frac{E_i\beta_i}{1-\nu_i}\left(t_i\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)-t_0\right),\ i=\overline{1,n}, \quad z_i\le z<z_{i-1}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Увівши безрозмірні напруження за формулою

$$\tilde{\sigma}^{j}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)=\sigma^{j}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)\Big/\frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\left(t_C-t_0\right)}{1-\nu_{\mathrm{T}}},\ j=\mathrm{T},1,2,\ldots,n, \tag{3.62}$$

отримаємо співвідношення для визначення температурних напружень у системі:

$$\tilde{\sigma}^{j}\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)=-\left(\frac{E_j\beta_j}{1-\nu_j}\bigg/\frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\right)\frac{\theta_j\left(\bar{z},\mathrm{Fo}\right)-\theta_0}{\theta_C-\theta_0}, \tag{3.63}$$

де
$$\theta_l=\frac{t_l}{t_*},\quad l=\mathrm{T,C},0,1,...,n, \tag{3.64}$$

а t_* визначається співвідношенням (3.8).

Розглянемо променево-конвективне нагрівання півпростору з нержавкої сталі 316L з двошаровим зносостійким покриттям із ніхрому Cr–Ni (внутрішній шар) товщиною $\delta_1 = 0.1$ мм та сплаву WC-Co (зовнішній шар) товщиною $\delta_2 = 0.3$ мм. Розраховували при $t_{\mathrm{C}} = 1073$ K, $t_0 = 293$ K, $\varepsilon = 0.5$, $z_* = 1$ м. Вхідні параметри задачі вибрали як деякі середні значення в розглянутому діапазоні температури [495] і подали в табл. 3.3 (за таких параметрів $\mathrm{Sk} = 2.06$). Теплоємність визначали за співвідношенням із питомою теплоємністю та густиною: $\omega = \omega^* \rho^*$.

Таблиця 3.3

Термомеханічні властивості підкладки та шарів покриття, що використовуються в чисельних розрахунках

Термомеханічні параметри	Сталь 316L	Cr–Ni	WC–Co
Теплопровідність λ, Вт/(м·K)	17	13	24
Питома теплоємність ω^*, Дж/(кг·K)	535	530	166
Густина ρ^*, кг/м^3	8031	8050	13900
Модуль Юнга E, Гпа	170	200	367
Коефіцієнт Пуассона ν	0.29	0.29	0.29
Коефіцієнт лінійного температурного розширення β, $\mathrm{K}^{-1}\times 10^{-6}$.	18	14	6.5

Рисунок 3.3 ілюструє вплив зростання інтенсивності конвективного (суцільні криві) та променево-конвективного (штрихові) нагрівання на зміну з часом контактної температури $\theta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$. Як бачимо, якщо при $\mu = 20$ Вт/(м$^2\cdot$K) ($\mathrm{Bi} \approx 1.18$) та $\mu = 100$ Вт/(м$^2\cdot$K) ($\mathrm{Bi} \approx 5.88$) променева складова ($\mathrm{Sk} = 2.06$) суттєво підвищує контактну температуру, то при $\mu \geq 500$ Вт/(м$^2\cdot$K) (відповідно $\mathrm{Bi} \geq 29.41$) її вплив на нагрівання системи незначний (верхні штрихова і суцільна криві практично зливаються).

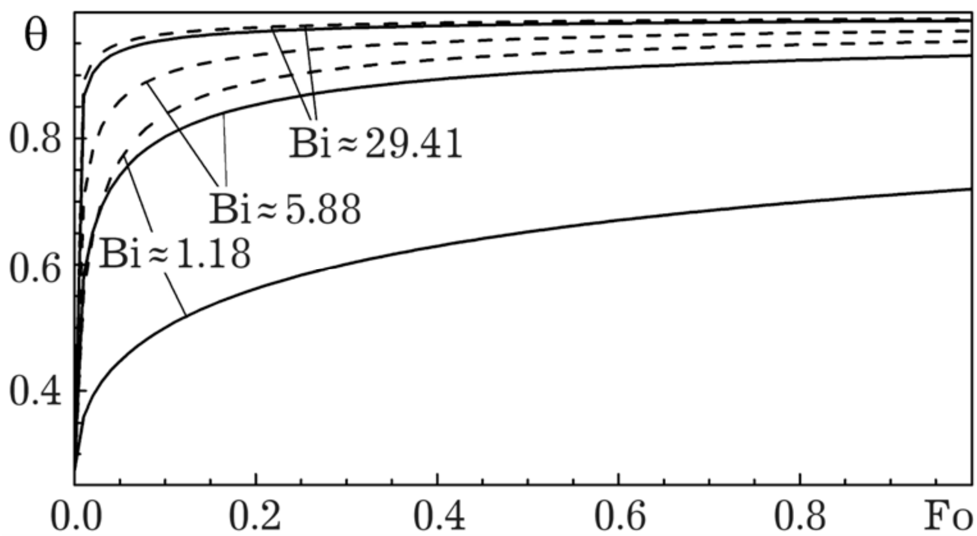
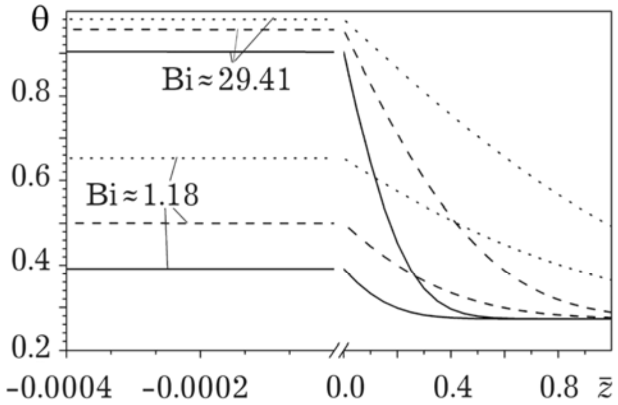


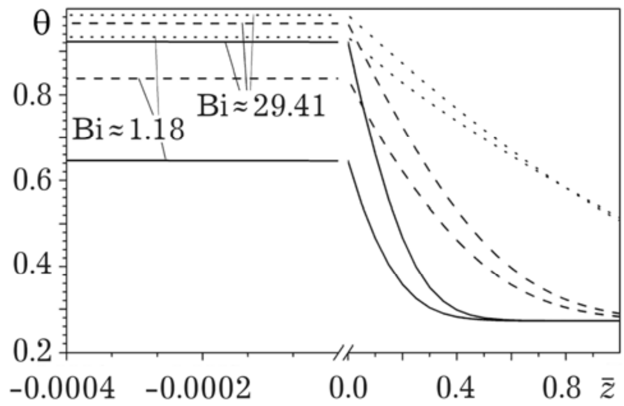
Рис. 3.3 Вплив інтенсивності нагрівання на зміну контактної температури $\theta = \theta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$: суцільні криві – $\mathrm{Sk} = 0$; штрихові – 2.06

Зміну температури в системі півпростір–двошарове покриття уздовж координати $\overline{z}$ для деяких моментів часу залежно від інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання зображено на рис. 3.4.

Інтенсифікація нагрівання викликає суттєве зростання перепаду температури за глибиною основи. Зауважимо, що як і за контактної температури (рис. 3.3), вплив променевої складової на розподіл температури в системі зі збільшенням коефіцієнта теплообміну μ до 500 Вт/(м$^2\cdot$K) ($\mathrm{Bi} \approx 29.41$) виявляється несуттєвим. Слід зазначити, що за цього співвідношення характеристик покриття і основи практично відсутній перепад температури за товщиною шарів покриття в розглядуваному діапазоні зміни μ. Однак для іншої системи півпростір–багатошарове покриття інтенсивність теплообміну може спричинити помітний перепад температури за товщиною шарів покриття (рис. 3.2).



а)



б)

Рис. 3.4. Розподіл температури $\theta = \theta_j\left(\bar{z}, \mathrm{Fo}\right)$ у системі основа–двошарове покриття для деяких моментів часу:
а – конвективне нагрівання $(\mathrm{Sk} = 0)$; *б* – променево-конвективне $(\mathrm{Sk} = 2.06)$; суцільні криві – $\mathrm{Fo} = 0.02$; штрихові – 0.1; пунктирні – 0.5

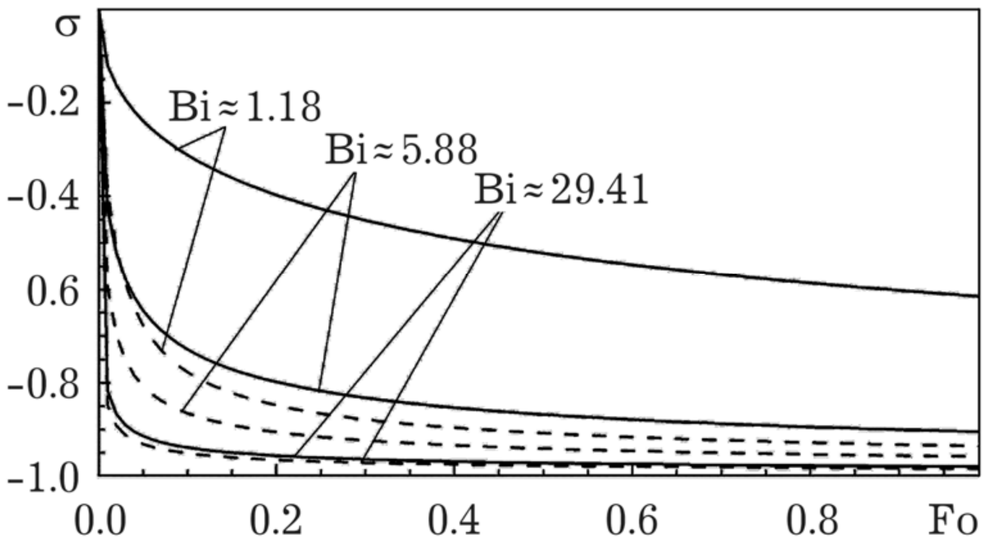


Рис. 3.5. Вплив інтенсивності нагрівання на контактні напруження $\sigma = \tilde{\sigma}_{\mathrm{T}}\left(0, \mathrm{Fo}\right)$: суцільні криві – $\mathrm{Sk} = 0$; штрихові – 2.06

Рисунок 3.5 ілюструє зміну з часом безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo})$ у півпросторі на поверхні контакту з покриттям залежно від інтенсивності нагрівання. Як і раніше для рис. 3.3, це викликає зростання стискальних напружень на поверхні основи, а якщо $\mathrm{Bi} \geq 29.41$ $\left(\mu \geq 500\,\text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}\right)$ вплив променевої складової на контактні напруження незначний.

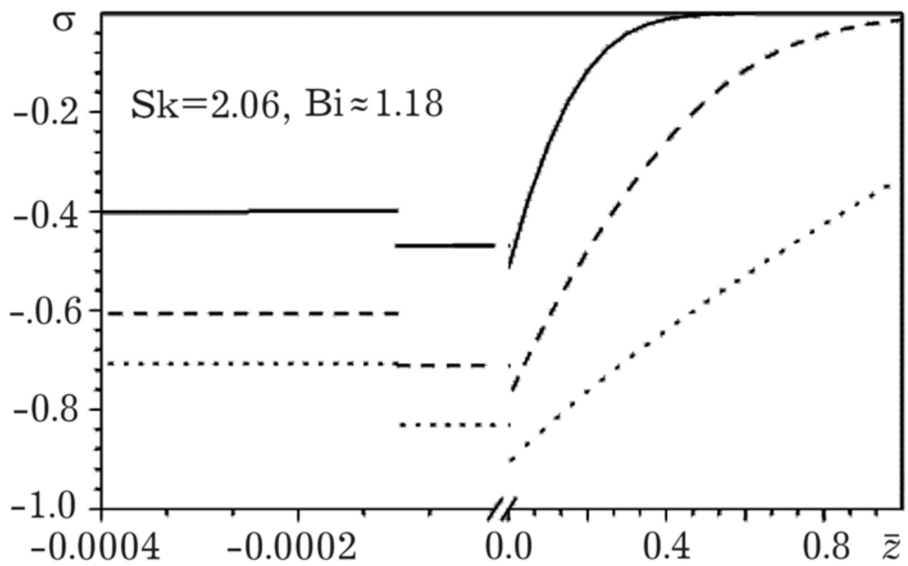


Рис. 3.6. Розподіл напружень $\sigma = \tilde{\sigma}^j(\overline{z},\mathrm{Fo})$ у системі основа–двошарове покриття для деяких моментів часу:
суцільна крива – $\mathrm{Fo} = 0.02$; штрихова – 0.1; пунктирна – 0.5

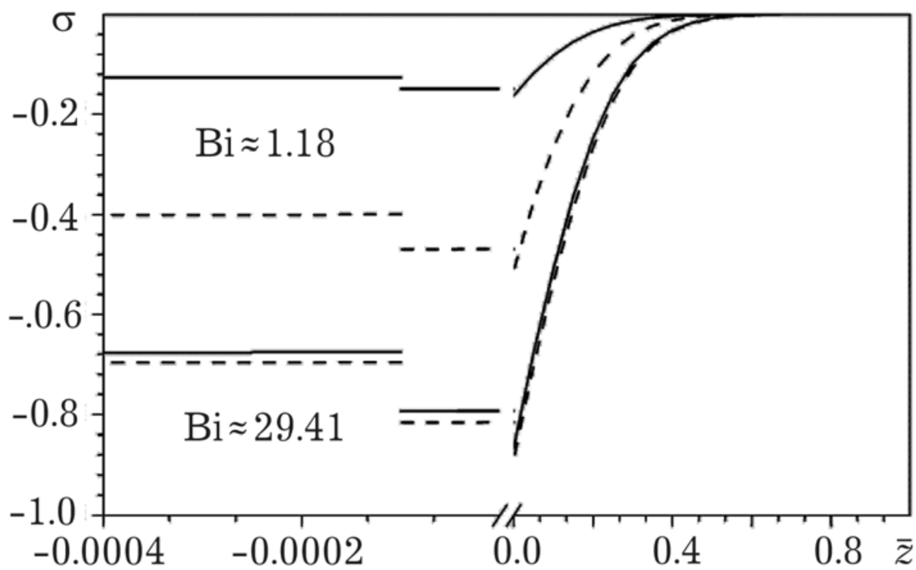


Рис. 3.7. Розподіл напружень $\sigma = \tilde{\sigma}^j(\overline{z},\mathrm{Fo})$ у системі основа–двошарове покриття у фіксованому моменті часу:
суцільні криві – $\mathrm{Sk} = 0$; штрихові – 2.06

На рис. 3.6 і 3.7 подано розподіл напружень за просторовою координатою в системі півпростір–двошарове покриття для деяких моментів часу за променево-конвективного нагрівання при $\mathrm{Bi} \approx 1.18$, $\mathrm{Sk} = 2.06$ (рис. 3,6) та для різних значень Bi та Sk при $\mathrm{Fo} = 0.02$ (рис. 3.7).

Отже, стискальні напруження в покритті мають розривний характер і зростають з часом. Їх стрибок на поверхні поділу шарів залежить від величини $\frac{E_2\beta_2}{1-\nu_2} \Big/ \frac{E_1\beta_1}{1-\nu_1}$, а на поверхні контакту покриття з півпростором – від $\frac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} \Big/ \frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}$.

Як і для температурного поля, якщо $\mu \geq 500$ Вт/(м$^2 \cdot$K) $(\mathrm{Bi} \geq 29.41)$, променева складова незначно впливає на термонапружений стан системи, що особливо помітно проявляється у характері розподілу стискальних напружень вглиб півпростору та дещо менше – на їх значення в шарах покриття (рис. 3.7).

Висновки до розділу 3

В цьому розділі із застосуванням узагальнених нелінійних граничних умов, методу квазілінеаризації та інтегрального перетворення Лапласа побудовано ітераційну схему розв’язування нелінійної нестаціонарної крайової задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну з довкіллям.

На підставі проведеного порівняльного аналізу швидкості збіжності методів Пікара, зведення до нелінійного інтегрального рівняння типу Вольтерри, послідовних наближень та квазілінеаризації для розв’язання тестової нелінійної нестаціонарної задачі радіаційної взаємодії півпростору без покриття з довкіллям показано кращу збіжність підходу на основі методу квазілінеаризації.

Здійснено параметричний аналіз впливу геометричних і теплофізичних характеристик покриття, зміни інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання на поведінку в часі температури в зоні контакту покриття й основи. Для півпростору з тришаровим покриттям досліджено особливості розподілу температури в системі для деяких моментів часу у разі зростання інтенсивності конвективного та променево-конвективного нагрівання.

Для системи півпростір–двошарове зносостійке покриття досліджено вплив параметрів променево-конвективного теплообміну на нестаціонарне температурне поле та зумовлений ним термонапружений стан. Виявлено область зміни коефіцієнта теплообміну, в якій вплив променевої складової на термонапружений стан системи є несуттєвим.

РОЗДІЛ 4

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З ТОНКИМИ БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ

В даному розділі сформульовано постановки та отримано аналітичні розв'язки статичної задачі пружності та нестаціонарних задач теплопровідності і термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям на основі використання узагальнених граничних умов.

Розглянуто низку тестових задач пружності, теплопровідності та термопружності для циліндра з тришаровим покриттям.

Досліджено вплив фізико-механічних характеристик системи тіло–багатошарове покриття і параметрів теплообміну із зовнішнім середовищем на розподіли температури та напружень, а також умов закріплення торців циліндра на напруження.

Основні результати, наведені в розділі, відображено у шістнадцяти публікаціях автора [88, 89, 277, 290, 293, 295, 297-299, 304, 311, 501, 506, 507, 509, 510].

4.1. Статична задача пружності та термопружності для суцільного циліндра з багатошаровим покриттям

Залишкові напруження, які виникають у покриттях при їх нанесенні, суттєво впливають на міцність і надійність елементів конструкцій з покриттями. Тому для оцінки цього фактора необхідно визначити рівень, знак і характер їх розподілу.

Температурні залишкові напруження в тілах з багатошаровими покриттями переважно досліджували для тіл плоскої геометрії, де з використанням гіпотези плоских перерізів вдалося отримати відносно прості аналітичні вирази, зручні у практичному використанні [156, 388, 404, 424, 499, 570, 576].

Для неплоских зразків кількість досліджень значно менша, що пов'язано з ускладненням відповідних задач. Переважно автори обмежувались системами з одно-, дво- та тришаровими покриттями [363, 384, 423, 448, 460].

У [423, 465, 560, 571, 575] наведено алгоритм розрахунку відповідної задачі для циліндра з багатошаровим покриттям, який зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь і не дає можливості апріорно оцінити вплив вхідних параметрів на рівень і знак залишкових напружень. Записано [33, 39, 43, 109, 190, 324, 526, 546, 551, 563] розв'язки статичної задачі термопружності для багатошарового циліндра у загальному випадку, застосовні для конкретних числових розрахунків.

Нижче на основі отриманих у підрозділі 1.2 узагальнених граничних умов механічного спряження тіл з багатошаровими покриттями записано аналітичний розв'язок статичної задачі пружності для циліндра з багатошаровим покриттям і досліджено залишковий напружений стан покриття залежно від умов закріплення торців циліндра.

4.1.1. Формулювання і розв'язування задачі пружності з узагальненою граничною умовою

Розглянемо напружено-деформований стан довгого суцільного кругового циліндра радіуса R з n-шаровим покриттям товщиною $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ під дією поля дисторсій e_{pq}^0, несумісність якого призводить до виникнення залишкових напружень, та зовнішнього навантаження P.

Подамо компоненти e_{pq} тензора повної деформації у циліндричній системі координат (r, φ, z) у вигляді [165]

$$e_{pq} = e_{pq}^0 + e_{pq}^s, \qquad p, q = r, \varphi, z, \tag{4.1}$$

де e^{s}_{pq} – компоненти тензора пружних деформацій, що пов'язані з компонентами тензора залишкових напружень співвідношеннями закону Гука

$$e^{s}_{pq} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{pq} - \nu\delta_{km}\sigma_{ll}\right]. \tag{4.2}$$

Тут E – модуль Юнґа; ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{km} – символ Кронекера; σ_{ll} – сума нормальних напружень.

Вважаємо, що поле дисторсій описується кульовим тензором

$$e^{0}_{rr} = e^{0}_{\varphi\varphi} = e^{0}_{zz} = e^{0}(r)\,,\ e^{0}_{r\varphi} = e^{0}_{rz} = e^{0}_{\varphi z} = 0\,. \tag{4.3}$$

Тоді третя узагальнена гранична умова механічного спряження тіла з середовищем (1.87) набуде вигляд (перші дві задовольняються тотожно), якщо у відповідних виразах замінити температурну деформацію на e^{0}

$$\begin{gathered}\left(1-\frac{\nu_{\mathrm{T}}(G_{11}+G_{12})}{RE_{\mathrm{T}}}\right)\sigma^{\mathrm{T}}_{rr}(R) + \frac{G_{11}-\nu_{\mathrm{T}}G_{12}}{RE_{\mathrm{T}}}\sigma^{\mathrm{T}}_{\varphi\varphi}(R) + \frac{G_{12}-\nu_{\mathrm{T}}G_{11}}{RE_{\mathrm{T}}}\sigma^{\mathrm{T}}_{zz}(R) = \\ = P + \frac{N_e - (G_{11}+G_{12})e^{0}_{\mathrm{T}}(R)}{R},\end{gathered} \tag{4.4}$$

де згідно з формулою (1.78) $\{G_{11}, G_{12}\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{E_i\delta_i}{1-\nu_i^2}\{1, \nu_i\}$; $N_e = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{E_i}{1-\nu_i}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} e^{0}_i dr$;

$r_0 = R$, $r_i = R + \sum\limits_{j=1}^{i}\delta_j \quad i = \overline{1,n}$.

Розв'язок для напружень в циліндрі $0 \le r \le R$ можна подати у вигляді [244]

$$\sigma^{\mathrm{T}}_{rr}(r) = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{E_{\mathrm{T}}}{(1-\nu_{\mathrm{T}})r^2}\int\limits_{0}^{r} e^{0}_{\mathrm{T}}(\zeta)\zeta\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{4.5}$$

$$\sigma^{\mathrm{T}}_{\varphi\varphi}(r) = B_1 - \frac{B_2}{r^2} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{(1-\nu_{\mathrm{T}})r^2}\int\limits_{0}^{r} e^{0}_{\mathrm{T}}(\zeta)\zeta\,\mathrm{d}\zeta - \frac{E_{\mathrm{T}}e^{0}_{\mathrm{T}}(r)}{1-\nu_{\mathrm{T}}}. \tag{4.6}$$

Розглядатимемо два випадки:

(і) вільні торці циліндра:

$$\int_0^R \sigma_{zz} r dr + RN_1 = 0, \tag{4.7.1}$$

(іі) закріплені торці циліндра:

$$e_{zz} \equiv 0. \tag{4.7.2}$$

На основі співвідношень термопружності (1.76), коли відсутні згинні деформації і кручення поверхні поділу тіло–покриття $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$ та з урахуванням неперервності тангенціальних деформацій на цій поверхні (1.83), осьове зусилля N_1 в оболонці покриття можна подати у вигляді

$$N_1 = G_{11} e_{zz}^{\mathrm{T}}(R) + G_{12} e_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}}(R) - N_e + C_2 \sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(R), \tag{4.8}$$

де згідно з формулою з параграфа 1.2.2.1

$$C_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\delta_i - \frac{\gamma_i^3 - \gamma_{i-1}^3}{\delta^2} + \frac{\gamma_i^4 - \gamma_{i-1}^4}{2\delta^3} \right), \quad \gamma_i = r_i - R. \tag{4.9}$$

Враховуючи умову $\left.\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}\right|_{r=0} \neq \infty$, співвідношення (4.1)–(4.3) для тіла, узагальнену граничну умову (4.4), умову (4.7.1) та співвідношення (4.8) для випадку (і), умову (4.7.2) для випадку (іі), з подань (4.5), (4.6) знаходимо наближений розв'язок задачі для циліндра $0 \le r \le R$:

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(r) = Z_1 \tilde{G}_1 e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{2\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)} \left(Z_1 X_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(r) \right) + Z_1 \left(\tilde{N}_e + P \right), \tag{4.10}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}}(r) = Z_1 \tilde{G}_1 e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})} \left(Z_1 X_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) + \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(r) - 2 e_{\mathrm{T}}^0(r) \right) + Z_1 \left(\tilde{N}_e + P \right), \tag{4.11}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}}(r) = \left(2\nu_{\mathrm{T}} Z_1 \tilde{G}_1 + E_{\mathrm{T}} \right) e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} \left(\nu_{\mathrm{T}} Z_1 X_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - e_{\mathrm{T}}^0(r) \right) + 2\nu_{\mathrm{T}} Z_1 \left(\tilde{N}_e + P \right), \tag{4.12}$$

де для випадку (i)

$$e_{zz}=\frac{X_2-Z_2X_1+\tilde{C}_2}{Z_2\tilde{G}_1-\tilde{G}_2+0.5E_{\mathrm{T}}}\frac{E_{\mathrm{T}}\tilde{e}^0_{\mathrm{T}}(R)}{2\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)}+\frac{1-Z_2}{Z_2\tilde{G}_1-\tilde{G}_2+0.5E_{\mathrm{T}}}\left(\tilde{N}_e+P\right). \tag{4.13}$$

Тут

$$\tilde{e}^0_{\mathrm{T}}(r)=\frac{2}{r^2}\int_0^r e^0_{\mathrm{T}}\left(\xi\right)\xi\,\mathrm{d}\,\xi\,,\ \ Z_1=\frac{1}{1+\dfrac{G_{11}}{R\bar{E}_{\mathrm{T}}}},\ \ Z_2=\left(\nu_{\mathrm{T}}+\frac{G_{12}}{RG_{\mathrm{T}}}+\tilde{C}_2\right)Z_1\,, \tag{4.14}$$

$$\bar{E}_{\mathrm{T}}=\frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2},\quad \tilde{C}_2=\frac{C_2}{R},\quad \tilde{N}_e=\frac{N_e}{R}, \tag{4.15}$$

$$\tilde{G}_j=\frac{\nu_{\mathrm{T}}G_{1j}-G_{1l}}{R},\ \ X_j=1-\frac{\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)G_{1j}}{RE_{\mathrm{T}}},\ \ j=1,2\,,\ l=3-j\,. \tag{4.16}$$

Підставляючи вирази (4.10)–(4.12) у формули відновлення (1.144) і (1.146), знаходимо напруження в i-му шарі покриття $r_{i-1}\le r\le r_i$:

$$\sigma^i_{rr}(r)=\frac{P+\sigma^{\mathrm{T}}_{rr}(R)}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{r-R}{\delta}\right)\left(3-\left(1-2\frac{r-R}{\delta}\right)^2\right)\frac{P-\sigma^{\mathrm{T}}_{rr}(R)}{2}, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\sigma^i_{\varphi\varphi}(r)=\frac{E_i}{1-\nu_i^2}\Bigg\{&\left[\nu_i-\nu_{\mathrm{T}}+\frac{Z_1\tilde{G}_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}\right]e_{zz}+\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)Z_1\tilde{e}^0_{\mathrm{T}}(R)-\\&-\left(1+\nu_i\right)e^0_i(r)+\frac{Z_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}\left(\tilde{N}_e+P\right)\Bigg\}+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma^i_{rr}(r),\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma^i_{zz}(r)=\frac{E_i}{1-\nu_i^2}\Bigg\{&\left[1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}}+\nu_i\frac{Z_1\tilde{G}_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}\right]e_{zz}+\nu_i\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)Z_1\tilde{e}^0_{\mathrm{T}}(R)-\\&-\left(1+\nu_i\right)e^0_i(r)+\nu_i\frac{Z_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}\left(\tilde{N}_e+P\right)\Bigg\}+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma^i_{rr}(r).\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.1.2. Тестова задача Ляме для випадку неоднорідного покриття

Як приклад, розглянемо задачу визначення напружень у суцільному циліндрі з багатошаровим покриттям, закріпленого на торцях від осьових переміщень, під дією рівномірно розподіленого тиску P по поверхні. Вважаємо, що модулі пружності у кожному шарі покриття мають степеневу залежність від радіальної змінної $E_i(\rho) = E_{i0}\rho^{\bar{m}_i}$ (E_{i0} – задані сталі, $\bar{m}_i \neq 1,\ 2$), а коефіцієнти Пуассона ν_i – сталі у кожному шарі.

Узагальнивши вирази (1.78) для коефіцієнтів жорсткості на випадок врахування неперервних властивостей покриття вздовж радіальної координати, на основі формул (4.10)-(4.12), (4.17)-(4.19) отримаємо

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{\sigma_{zz}^{\mathrm{T}}}{2\nu_{\mathrm{T}}} = Z_1 P\,, \tag{4.20}$$

$$\sigma_{rr}^{i}(\rho) = \frac{P + \sigma_{rr}^{\mathrm{T}}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{R(\rho-1)}{\delta}\right)\left(3 - \left(1 - 2\frac{R(\rho-1)}{\delta}\right)^2\right)\frac{P - \sigma_{rr}^{\mathrm{T}}}{2}\,, \tag{4.21}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{i}(\rho) = \frac{E_i(\rho)}{1-\nu_i^2}\frac{Z_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}P + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^{i}(\rho), \tag{4.22}$$

$$\sigma_{zz}^{i}(\rho) = \frac{E_i(\rho)\nu_i}{1-\nu_i^2}\frac{Z_1}{\bar{E}_{\mathrm{T}}}P + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^{i}(\rho), \qquad \rho_{i-1} \le \rho \le \rho_i\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{4.23}$$

де $\rho = \dfrac{r}{R}$, $\rho_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $\rho_j = 1 + \sum\limits_{l=1}^{j-1}\dfrac{\delta_l}{R}$, $j = \overline{2,n+1}$, $G_{11} = R\displaystyle\int_1^{1+\delta./R}\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}d\rho$.

Точний розв’язок цієї задачі має вигляд:

$$\sigma_{rr}^{j}(\rho) = C_1^{(j)}\rho^{\lambda_1^{(j)}} + C_2^{(j)}\rho^{\lambda_2^{(j)}}\,, \tag{4.24}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{j}(\rho) = C_1^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}+1\right)\rho^{\lambda_1^{(j)}} + C_2^{(j)}\left(\lambda_2^{(j)}+1\right)\rho^{\lambda_2^{(j)}}\,, \tag{4.25}$$

$$\sigma_{zz}^{j}(\rho) = \nu_j\left[C_1^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}+2\right)\rho^{\lambda_1^{(j)}} + C_2^{(j)}\left(\lambda_2^{(j)}+2\right)\rho^{\lambda_2^{(j)}}\right], \quad j = \mathrm{T},1,2,\ldots,n\,, \tag{4.26}$$

де $\lambda_{1,2}^{(j)} = \dfrac{(\bar{m}_j - 2) \pm \sqrt{(\bar{m}_j - 2)^2 + 4\bar{m}_j \dfrac{1-2\nu_j}{1-\nu_j}}}{2}$, а константи $C_1^{(j)}$ і $C_2^{(j)}$ визначають зі системи алгебричних рівнянь, отриманої з граничних умов, які враховують ідеальний механічний контакт між шарами та зовнішнє навантаження.

Для кількісного порівняння наближеного і точного розв'язків у табл. 4.2 подано результати розрахунків колових безрозмірних напружень $\sigma_{\varphi\varphi} / P$ за наближеною (4.22) ($\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$) та точною формулами (4.25) ($\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{ex}$) на межі шарів у циліндрі з 10-шаровим покриттям залежно від відносної товщини покриття $\tilde{\delta} = \delta / R$ та показника $\bar{m}_j$, що характеризує неоднорідність покриття, за однакових товщин шарів і значень E_{j0} та ν_j, наведених у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Пружні характеристики циліндра та шарів покриття

j	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_{j0}	4.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.0	16	12	0.8
ν_j	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Для дуже тонких покрить ($\delta / R = 0.0002$) вплив неоднорідності практично відсутній, а максимальна похибка обчислень менша за 0.1%. Для товщин $\delta / R \le 0.02$ у випадку кусково-однорідних покрить ($\bar{m}_j = 0$) похибка обчислень не перевищує 3.6%, а за врахування неоднорідності в межах неоднорідності шарів ($\bar{m}_j \ne 0$) – 6.1%.

Таблиця 4.2

Розрахунок напружень за точною (4.25) і наближеною (4.22) формулами залежно від відносної товщини покриття $\tilde{\delta}$ та показника неоднорідності модуля Юнга шарів покриття $\overline{m}_j$

$\overline{m}_j$	ρ	$\tilde{\delta}=0.0002$		$\tilde{\delta}=0.002$		$\tilde{\delta}=0.02$	
		$\tilde{\sigma}^{ex}_{\varphi\varphi}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho)$	$\tilde{\sigma}^{ex}_{\varphi\varphi}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho)$	$\tilde{\sigma}^{ex}_{\varphi\varphi}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho)$
0	1.0	0.3042	0.3042	0.3045	0.3045	0.3075	0.3075
	$1+0.1\tilde{\delta}$	0.3584	0.3584	0.3590	0.3587	0.3654	0.3622
	$1+0.2\tilde{\delta}$	0.4126	0.4125	0.4137	0.4129	0.4240	0.4168
	$1+0.3\tilde{\delta}$	0.4668	0.4667	0.4683	0.4671	0.4829	0.4713
	$1+0.4\tilde{\delta}$	0.5210	0.5209	0.5230	0.5213	0.5421	0.5256
	$1+0.5\tilde{\delta}$	0.5773	0.5751	0.5777	0.5755	0.6014	0.5800
	$1+0.6\tilde{\delta}$	0.5211	0.5209	0.5231	0.5212	0.5436	0.5248
	$1+0.7\tilde{\delta}$	0.4669	0.4667	0.4686	0.4670	0.4858	0.4697
	$1+0.8\tilde{\delta}$	0.4127	0.4125	0.4140	0.4127	0.4278	0.4146
	$1+0.9\tilde{\delta}$	0.3584	0.3583	0.3595	0.3585	0.3694	0.3596
3	1.0	0.3042	0.3042	0.3045	0.3045	0.3074	0.3050
	$1+0.1\tilde{\delta}$	0.3584	0.3584	0.3591	0.3588	0.3660	0.3595
	$1+0.2\tilde{\delta}$	0.4126	0.4126	0.4139	0.4130	0.4260	0.4138
	$1+0.3\tilde{\delta}$	0.4669	0.4667	0.4687	0.4673	0.4870	0.4681
	$1+0.4\tilde{\delta}$	0.5211	0.5209	0.5236	0.5215	0.5489	0.5224
	$1+0.5\tilde{\delta}$	0.5774	0.5751	0.5786	0.5757	0.6116	0.5767
	$1+0.6\tilde{\delta}$	0.5212	0.5209	0.5241	0.5214	0.5540	0.5222
	$1+0.7\tilde{\delta}$	0.4670	0.4667	0.4695	0.4671	0.4955	0.4677
	$1+0.8\tilde{\delta}$	0.4127	0.4125	0.4148	0.4128	0.4361	0.4133
	$1+0.9\tilde{\delta}$	0.3585	0.3584	0.3600	0.3585	0.3756	0.3588
5	1.0	0.3042	0.3042	0.3045	0.3045	0.3074	0.3075
	$1+0.1\tilde{\delta}$	0.3584	0.3584	0.3592	0.3588	0.3664	0.3633
	$1+0.2\tilde{\delta}$	0.4126	0.4126	0.4140	0.4131	0.4273	0.4184
	$1+0.3\tilde{\delta}$	0.4669	0.4667	0.4690	0.4673	0.4897	0.4734
	$1+0.4\tilde{\delta}$	0.5212	0.5209	0.5241	0.5216	0.5535	0.5283
	$1+0.5\tilde{\delta}$	0.5774	0.5751	0.5793	0.5758	0.6187	0.5832
	$1+0.6\tilde{\delta}$	0.5212	0.5209	0.5248	0.5215	0.5611	0.5275
	$1+0.7\tilde{\delta}$	0.4670	0.4667	0.4701	0.4672	0.5022	0.4718
	$1+0.8\tilde{\delta}$	0.4128	0.4125	0.4154	0.4129	0.4419	0.4162
	$1+0.9\tilde{\delta}$	0.3585	0.3584	0.3604	0.3586	0.3800	0.3607

4.1.3. Залишкові напруження при охолодженні покриття

Проаналізуємо ситуацію, коли підкладка з нанесеним покриттям остигає. Тоді $e_j^0 = \beta_j \overline{t}$, де β_j – КЛТР матеріалу ($j = \mathrm{T}, 1, 2, ..., n$), $\overline{t}$ – зміна температури за рівномірного охолодження системи тіло – багатошарове покриття.

4.1.3.1. Розв'язок для загального випадку. Вільні торці циліндра

Тоді формули (4.10)–(4.13), (4.18), (4.19) матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{Z_1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i\delta_i}{1-\nu_i}\left[\frac{\nu_{\mathrm{T}}-\nu_i}{1+\nu_i}e_{zz} + \left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right)\overline{t}\right], \tag{4.27}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{T}}\left(e_{zz} - Z_1\alpha_{\mathrm{T}}\overline{t}\right) + \frac{Z_1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i\delta_i}{1-\nu_i}\left[2\nu_{\mathrm{T}}\frac{\nu_{\mathrm{T}}-\nu_i}{1+\nu_i}e_{zz} + \left(2\nu_{\mathrm{T}}\beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right)\overline{t}\right], \tag{4.28}$$

де для вільних торців (i)

$$\begin{gathered} e_{zz} = \left[\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i\delta_i}{1-\nu_i^2}\left[1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}} + \left(\nu_{\mathrm{T}}-\nu_i\right)Z_2\right] + 0.5E_{\mathrm{T}}\right]^{-1} \times \\ \times\left[\left(1 - Z_2 - \frac{\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)}{RE_{\mathrm{T}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i\delta_i}{1-\nu_i^2}\left(\nu_i - Z_2\right) + \tilde{C}_2\right)\frac{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\overline{t}}{2\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)} + \frac{1-Z_2}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i\beta_i\delta_i}{1-\nu_i}\overline{t}\right], \end{gathered} \tag{4.29}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{\varphi\varphi}^{i}(r) = \frac{E_i Z_1}{\left(1-\nu_i^2\right)\overline{E}_{\mathrm{T}}R}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j\left(\nu_{\mathrm{T}}-\nu_j\right)}{1-\nu_j^2}e_{zz} + \sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\beta_j\delta_j}{1-\nu_j}\overline{t}\right] + \\ + \frac{E_i(\nu_i-\nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2}e_{zz} - \left(\beta_i - Z_1\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right)\frac{E_i\overline{t}}{1-\nu_i} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^{i}(r), \end{gathered} \tag{4.30}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}^{i}(r) = \frac{E_i\nu_i Z_1}{(1-\nu_i^2)\overline{E}_{\mathrm{T}}R}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j\left(\nu_{\mathrm{T}}-\nu_j\right)}{1-\nu_j^2}e_{zz} + \sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\beta_j\delta_j}{1-\nu_j}\overline{t}\right\} + \\ . \\ + \frac{E_i(1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2}e_{zz} - \left(\beta_i - Z_1\nu_i\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right)\frac{E_i\overline{t}}{1-\nu_i} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^{i}(r). \end{gathered} \tag{4.31}$$

Врахувавши (4.17), подамо формули (4.30) і (4.31) у вигляді

$$\sigma^i_{\varphi\varphi}(r) = -\frac{E_i\bar{t}}{1-\nu_i}\left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right) + \frac{Z_1\bar{t}\,\mu_i^{\varphi}(r)}{R}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j}{1-\nu_j}\left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j}\beta_{\mathrm{T}}\right) + \left[\frac{Z_1\mu_i^{\varphi}(r)}{R}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j\left(\nu_{\mathrm{T}}-\nu_j\right)}{1-\nu_j^2} + \frac{E_i(\nu_i-\nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2}\right]e_{zz}, \tag{4.32}$$

$$\sigma^i_{zz}(r) = -\frac{E_i\bar{t}}{1-\nu_i}\left(\beta_i - \nu_i\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}\right) + \frac{Z_1\bar{t}\,\mu_i^{z}(r)}{R}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j}{1-\nu_j}\left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j}\beta_{\mathrm{T}}\right) + \left[\frac{Z_1\mu_i^{z}(r)}{R}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j\delta_j\left(\nu_{\mathrm{T}}-\nu_j\right)}{1-\nu_k^2} + \frac{E_i(1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2}\right]e_{zz}, \tag{4.33}$$

де

$$\mu_i^{\varphi}(r) = \frac{E_i}{(1-\nu_i^2)\bar{E}_{\mathrm{T}}} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\kappa(r), \quad \mu_i^{z}(r) = \frac{E_i\nu_i}{(1-\nu_i^2)\bar{E}_{\mathrm{T}}} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\kappa(r), \tag{4.34}$$

$$\kappa(r) = 1 - \frac{3\left(r-R\right)^2}{\delta^2} + \frac{2\left(r-R\right)^3}{\delta^3}.$$

У випадку вільних торців циліндра знак і рівень радіальних напружень на поверхні поділу циліндр–покриття (формули (4.27) і (4.29)), колових та осьових напружень в i-му шарі покриття (формули (4.32) і (4.33)) залежать від усього комплексу геометричних і термомеханічних параметрів підкладки і шарів покриття.

Зі збільшенням температурної зміни $\left|\bar{t}\right|$, модуля Юнга підкладки E_{T}, зменшенням радіуса циліндра R залишкові радіальні напруження на поверхні поділу циліндр–покриття $\sigma^*_{rr} = \sigma^{\mathrm{T}}_{rr}(R) = \sigma^1_{rr}(R)$ зростають за абсолютним значенням.

Зі зменшенням товщини покриття колові і осьові напруження прямують до граничного значення $\sigma^{*i} = \dfrac{E_i\bar{t}}{1-\nu_i}\left(\beta_{\mathrm{T}} - \beta_i\right)$.

4.1.3.2. Закріплені торці циліндра. Тестовий приклад

У випадку закріплених торців формули (4.27), (4.28), (4.32), (4.33) матимуть вигляд:

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{Z_1 \overline{t}}{R} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \delta_i}{1-\nu_i} \left(\beta_i - \frac{1+\nu_T}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right), \tag{4.35}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = -Z_1 E_{\mathrm{T}} \beta_{\mathrm{T}} \overline{t} + \frac{Z_1 \overline{t}}{R} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \delta_i}{1-\nu_i} \left(2\nu_{\mathrm{T}} \beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right), \tag{4.36}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{i}(r) = -\frac{E_i \overline{t}}{1-\nu_i} \left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right) + \frac{Z_1 \overline{t}}{R} \beta_i^{\varphi}(r) \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j \delta_j}{1-\nu_j} \left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j} \beta_{\mathrm{T}} \right), \tag{4.37}$$

$$\sigma_{zz}^{i}(r) = -\frac{E_i \overline{t}}{1-\nu_i} \left(\beta_i - \nu_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right) + \frac{Z_1 \overline{t}}{R} \beta_i^{z}(r) \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j \delta_j}{1-\nu_j} \left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j} \beta_{\mathrm{T}} \right). \tag{4.38}$$

З (4.35) випливає, що при

$$\beta_i > \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \quad \text{для} \quad i = \overline{1,n} \tag{4.39}$$

напруження $\tilde{\sigma}_{rr}$ стискальні, а при

$$\beta_i < \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \quad \text{для} \quad i = \overline{1,n} \tag{4.40}$$

– розтягальні.

Якщо не для всіх шарів покриття виконується одна з умов (4.39) або (4.40), знак напружень σ_{rr}^{*} визначатиме ефективна величина $\sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i \left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right)$.

Як і у випадку вільних торців, зі збільшенням температурної зміни $\left|\overline{t}\right|$, модуля Юнга підкладки E_{T}, зменшенням радіуса циліндра R напруження σ_{rr}^{*} збільшуються за абсолютним значенням. За виконання однієї з умов (4.39) або (4.40) зі збільшенням різниці $\left| \beta_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \beta_{\mathrm{T}} \right|$ вони також зростають за абсолютним значенням.

З формул (4.37), (4.38) випливає, що колові та осьові напруження в i-му шарі покриття збільшуються із підвищенням температурної зміни $\left|\overline{t}\right|$. Знак колових напружень, в основному, визначає знак величини $\beta_i - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}$, а осьових – знак $\beta_i - \nu_i \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}$.

За виконання умови

$$\left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_j}\beta_{\text{Т}}\right)\left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right) < 0 \quad j = \overline{1,n},\ j \neq i \tag{4.41}$$

зі збільшенням модуля Юнга i-го шару E_i, різниці $\left|\beta_i - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right|$, зменшенням товщини i-го шару δ_i колові напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^i$ збільшуються за абсолютним значенням.

Виконання умови

$$\left(\beta_j - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_j}\beta_{\text{Т}}\right)\left(\beta_i - \nu_i\frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right) < 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{4.42}$$

забезпечує збільшення осьових напружень σ_{zz}^i за абсолютним значенням з ростом модуля Юнга i-го шару E_i та різниці $\left|\beta_i - \nu_i\frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right|$.

Якщо виконується умова (4.42) для $j = \overline{1,...,i-1,i+1,...,n}$ та

$$\left(\beta_i - \frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right)\left(\beta_i - \nu_i\frac{1+\nu_{\text{Т}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{Т}}\right) > 0, \tag{4.43}$$

то зі зменшенням товщини i-го шару δ_i осьові напруження збільшуватимуться за абсолютним значенням.

З (4.37) і (4.38) випливає, що пружні властивості інших шарів слабше впливають на колові та осьові напруження в цьому шарі.

Зі зменшенням товщини покриття колові напруження прямують до граничного значення $\sigma_{\varphi\varphi}^{*i} = \frac{E_i \overline{t}}{1-\nu_i}\left(\frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{T}} - \beta_i\right)$, а осьові – до $\sigma_{zz}^{*i} = \frac{E_i \overline{t}}{1-\nu_i}\left(\nu_i \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\beta_{\text{T}} - \beta_i\right)$.

Для цього варіанту закріплення торців запишемо точний аналітичний розв'язок даної задачі (отриманий аналогічно [39]) для $0 \le \rho \le 1$

$$\sigma_{rr}(\overline{\rho}) = \frac{\nu_{\text{T}}}{2\overline{\lambda}_{\text{T}}(1-\nu_{\text{T}})}\left[\overline{X}_1(\overline{\rho})\overline{X\Phi} + \overline{X}_2(\overline{\rho})\overline{\Phi}_1(\overline{\rho}) - \overline{X}_1(\overline{\rho})\overline{\Phi}_2(\overline{\rho})\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\overline{\rho}) = \frac{\nu_{\text{T}}}{2\overline{\lambda}_{\text{T}}(1-\nu_{\text{T}})}\left[\overline{Y}_1(\rho)\overline{X\Phi} + \overline{Y}_2(\overline{\rho})\overline{\Phi}_1(\overline{\rho}) - \overline{Y}_1(\overline{\rho})\overline{\Phi}_2(\overline{\rho})\right] - \frac{E(\overline{\rho})\beta(\overline{\rho})\overline{t}(\overline{\rho})}{1-\nu(\overline{\rho})}, \quad (4.44)$$

$$\sigma_{zz}(\overline{\rho}) = \frac{\nu_{\text{T}}}{2\overline{\lambda}_{\text{T}}(1-\nu_{\text{T}})}\left[\overline{Z}_1(\overline{\rho})\overline{X\Phi} + \overline{Z}_2(\overline{\rho})\overline{\Phi}_1(\overline{\rho}) - \overline{Z}_1(\overline{\rho})\overline{\Phi}_2(\overline{\rho})\right] - \frac{E(\overline{\rho})\beta(\overline{\rho})\overline{t}(\overline{\rho})}{1-\nu(\overline{\rho})},$$

$$\overline{X}_1(\overline{\rho}) = \frac{\overline{\lambda}(\overline{\rho})}{\nu(\overline{\rho})}\left\{1 + \sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\left[1 + \left(1 - 2\nu(\overline{\rho})\right)\frac{\overline{\rho}_{i-1}^2}{\overline{\rho}^2}\right]\overline{a}_i\right\},$$

$$\overline{X}_2(\overline{\rho}) = \frac{\overline{\lambda}(\overline{\rho})}{\nu(\overline{\rho})}\left\{\frac{2\nu(\overline{\rho}) - 1}{\overline{\rho}^2} + \sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\left[1 + \left(1 - 2\nu(\overline{\rho})\right)\frac{\overline{\rho}_{i-1}^2}{\overline{\rho}^2}\right]\overline{b}_i\right\},$$

$$\overline{Y}_1(\overline{\rho}) = \frac{\overline{\lambda}(\overline{\rho})}{\nu(\overline{\rho})}\left\{1 - \sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\left[1 - \left(1 - 2\nu(\overline{\rho})\right)\frac{\overline{\rho}_{i-1}^2}{\overline{\rho}^2}\right]\overline{a}_i\right\},$$

$$\overline{Y}_2(\overline{\rho}) = \frac{\overline{\lambda}(\overline{\rho})}{\nu(\overline{\rho})}\left\{\frac{1 - 2\nu(\overline{\rho})}{\overline{\rho}^2} + \sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\left[1 - \left(1 - 2\nu(\overline{\rho})\right)\frac{\overline{\rho}_{i-1}^2}{\overline{\rho}^2}\right]\overline{b}_i\right\},$$

$$\overline{Z}_1(\overline{\rho}) = 2\overline{\lambda}(\overline{\rho})\left\{1 - \sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\overline{a}_i\right\}, \quad \overline{Z}_2(\overline{\rho}) = 2\overline{\lambda}(\overline{\rho})\sum_{i=1}^{n} S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1})\overline{b}_i,$$

$$\overline{\Phi}_1(\overline{\rho}) = \overline{t}\sum_{i=0}^{n}\left[S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_{i-1}) - S_+(\overline{\rho} - \overline{\rho}_i)\right]\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\frac{E_j\beta_j}{1-2\nu_j}(\overline{\rho}_j^2 - \overline{\rho}_{j-1}^2)\left(1 - \sum_{l=1}^{j}\overline{a}_l\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{E_i\beta_i}{1-2\nu_i}(\overline{\rho}^2 - \overline{\rho}_{i-1}^2)\left(1 - \sum_{j=1}^{i}\overline{a}_j\right)\right\},$$

$$\overline{\Phi}_2(\overline{\rho}) = \overline{t}\sum_{i=0}^{n}\left[S_+(\overline{\rho}-\overline{\rho}_{i-1}) - S_+(\overline{\rho}-\overline{\rho}_i)\right]\left\{\sum_{j=0}^{i-1}\frac{E_j\beta_j}{1-2\nu_j}(\rho_j^2-\rho_{j-1}^2)\sum_{l=1}^{j}\overline{b}_l + \right.$$

$$\left. + \frac{E_i\beta_i}{1-2\nu_i}(\overline{\rho}^2-\overline{\rho}_{i-1}^2)\sum_{j=1}^{i}\overline{b}_j\right\},$$

$$\overline{X\Phi} = \overline{\Phi}_2(1) - \overline{\Phi}_1(1)\frac{\overline{X}_2(1)}{\overline{X}_1(1)},\ \overline{\lambda}(\overline{\rho}) = \frac{E(\overline{\rho})\nu(\overline{\rho})}{(1+\nu(\overline{\rho}))(1-2\nu(\overline{\rho}))},\ S_+(\overline{\rho}-\overline{\rho}_i) = \begin{cases}1, & \overline{\rho} > \overline{\rho}_i, \\ 0, & \overline{\rho} \le \overline{\rho}_i,\end{cases}$$

$$\overline{\rho} = \frac{r}{R+\delta},\quad r_{-1}=0,\quad r_0 = R,\quad r_i = R + \sum_{j=1}^{i}\delta_j \quad i=\overline{1,n},\quad \overline{\rho}_j = \frac{r_j}{R+\delta} \quad j = \overline{0,n},$$

$$E_0 = E_{\mathrm{T}},\ \beta_0 = \beta_{\mathrm{T}},\ \nu_0 = \nu_{\mathrm{T}},$$

$$\overline{a}_i = \overline{c}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\overline{a}_j(\overline{c}_i + \overline{d}_i\rho_{j-1}^2), \qquad \overline{b}_i = \overline{d}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\overline{b}_j(\overline{c}_i + \overline{d}_i\rho_{j-1}^2),$$

$$\overline{c}_i = \frac{1}{2(1-\nu_i)}\left(1 - \frac{E_{i-1}(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{E_i(1+\nu_{i-1})(1-2\nu_{i-1})}\right),\ \overline{d}_i = \frac{1-2\nu_i}{2(1-\nu_i)\rho_{i-1}^2}\left(1-\frac{E_{i-1}(1+\nu_i)}{E_i(1+\nu_{i-1})}\right),\quad i=\overline{1,n}.$$

Для кількісного порівняння наближеного і точного розв'язків у табл. 4.3-4.5 наведено значення безрозмірних міжшарових колових напружень $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} / \left(E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\overline{t}\right)$, розрахованих за наближеними формулами (4.37) (у верхніх рядках) і за точними формулами (4.44) (у нижніх рядках) залежно від відносної товщини покриття δ / R (табл. 4.3), від відносної пружності матеріалу покриття E_1 / E_{T} (табл. 4.4), від відносного коефіцієнта температурного розширення матеріалу покриття $\beta_1 / \beta_{\mathrm{T}}$ (табл. 4.5). У перших стовпцях подано значення напружень у тілі $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \lim\limits_{r\to R-0}\sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} / \left(E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\overline{t}\right)$, а в наступних – граничні значення $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i} = \lim\limits_{r\to R+\delta_i-\delta_1+0}\sigma_{\varphi\varphi}^{i} / \left(E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\overline{t}\right)$. у i-му шарі покриття. Під час обчислення приймали такі значення параметрів: $n=3$, $E_1 : E_2 : E_3 = 4:15:2$, $\nu_{\mathrm{T}} = 0.3$, $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_3 = 0.4$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5\delta_3 = 0.25\delta$, $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 1:2:4$.

Таблиця 4.3

Залежність контактних напружень від відносної товщини покриття при $E_1 / E_\text{Т} = 0.4$, $\beta_1 / \beta_\text{Т} = 0.2$

δ / R	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^\text{Т}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^1$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^2$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^3$
0.001	$0.45648 \cdot 10^{-3}$ $0.45612 \cdot 10^{-3}$	-0.44145 -0.44145	-0.129853 -0.129799	-0.042648 -0.042638
0.010	$0.45509 \cdot 10^{-2}$ $0.45155 \cdot 10^{-2}$	-0.43954 -0.43956	-0.129303 -0.128762	-0.040777 -0.040686
0.020	$0.90713 \cdot 10^{-2}$ $0.89309 \cdot 10^{-2}$	-0.43743 -0.43750	-0.128696 -0.127623	-0.038710 -0.038558
0.030	$0.13561 \cdot 10^{-1}$ $0.13255 \cdot 10^{-1}$	-0.43534 -0.43548	-0.128093 -0.126496	-0.036658 -0.036472
0.050	$0.22452 \cdot 10^{-1}$ $0.21599 \cdot 10^{-1}$	-0.43119 -0.43158	-0.126899 -0.124825	-0.032593 -0.032421

Таблиця 4.4

Залежність контактних напружень від відносної пружності матеріалу покриття для $\delta / R = 0.01$, $\beta_1 / \beta_\text{Т} = 0.2$

$E_1 / E_\text{Т}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^\text{Т}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^1$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^2$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^3$
0.01	$0.11415 \cdot 10^{-2}$ $0.11316 \cdot 10^{-2}$	$-0.11012 \cdot 10^{-1}$ $-0.11013 \cdot 10^{-1}$	$-0.32424 \cdot 10^{-1}$ $-0.32288 \cdot 10^{-1}$	$-0.10330 \cdot 10^{-2}$ $-0.10306 \cdot 10^{-2}$
0.1	$0.11406 \cdot 10^{-2}$ $0.11317 \cdot 10^{-2}$	-0.11007 -0.11007	-0.32401 -0.32260	$-0.10299 \cdot 10^{-1}$ $-0.10275 \cdot 10^{-1}$
1	$0.11320 \cdot 10^{-1}$ $0.11232 \cdot 10^{-1}$	$-0.10952 \cdot 10^{1}$ $-0.10953 \cdot 10^{1}$	$-0.32176 \cdot 10^{1}$ $-0.32042 \cdot 10^{1}$	$-0.99866 \cdot 10^{-1}$ $-0.99657 \cdot 10^{-1}$
10	0.10526 0.10449	$-0.10445 \cdot 10^{2}$ $-0.10450 \cdot 10^{2}$	$-0.3092 \cdot 10^{2}$ $-0.29980 \cdot 10^{2}$	-0.71055 -0.71087
100	0.61850 0.61568	$-0.76760 \cdot 10^{3}$ $-0.76913 \cdot 10^{3}$	$-0.18706 \cdot 10^{3}$ $-0.18675 \cdot 10^{3}$	$0.86358 \cdot 10^{1}$ $0.85518 \cdot 10^{1}$

Таблиця 4.5

Залежність контактних напружень
від відносного коефіцієнта температурного розширення матеріалу покриття
для $\delta / R = 0.01$, $E_1 / E_{\mathrm{T}} = 0.4$

$\beta_1 / \beta_{\mathrm{T}}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{1}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{2}$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{3}$
0.01	$0.82349\cdot10^{-2}$ $0.81761\cdot10^{-2}$	-0.53283 -0.53285	$-0.21650\cdot10^{1}$ $-0.21582\cdot10^{1}$	-0.29243 -0.29210
0.1	$0.64899\cdot10^{-2}$ $0.64421\cdot10^{-2}$	-0.48864 -0.48866	$-0.17520\cdot10^{1}$ $-0.17458\cdot10^{1}$	-0.17322 -0.17301
1	$-0.10961\cdot10^{-1}$ $-0.10897\cdot10^{-1}$	$-0.46781\cdot10^{-1}$ $-0.46752\cdot10^{-1}$	$0.23784\cdot10^{1}$ $0.23780\cdot10^{1}$	$0.10188\cdot10^{1}$ $0.10179\cdot10^{1}$
10	-0.18547 -0.18429	$0.43718\cdot10^{1}$ $0.43723\cdot10^{1}$	$0.43683\cdot10^{2}$ $0.43617\cdot10^{2}$	$0.12939\cdot10^{2}$ $0.12927\cdot10^{2}$
100	$-.019305\cdot10^{1}$ $-.019183\cdot10^{1}$	$0.48557\cdot10^{2}$ $0.48563\cdot10^{2}$	$0.45672\cdot10^{3}$ $0.4560\cdot10^{3}$	$0.13214\cdot10^{3}$ $0.13202\cdot10^{3}$

На основі порівняння наближеного і точного розв’язків цієї задачі встановлено, що незалежно від співвідношення пружних і теплофізичних властивостей покриття і підкладки за відносної товщини покриття $\delta / R \le 0.03$ наближений розв’язок відрізняється від точного не більше, ніж на 2.5%.

4.1.3.3. Сталий коефіцієнт Пуассона

Розглянемо випадок, коли

$$\nu_i = \nu_{\mathrm{T}} = \nu \quad \text{при } i = \overline{1,n}. \tag{4.45}$$

Тоді формули (4.27)–(4.29), (4.32)–(4.34), (4.14) матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{\tilde{Z}_1 \overline{t}}{R(1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i \left(\beta_i - \beta_{\mathrm{T}}\right), \tag{4.46}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{T}} \left(e_{zz} - \tilde{Z}_1 \beta_{\mathrm{T}} \overline{t}\right) + \frac{\tilde{Z}_1 \overline{t}}{R(1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i \left(2\nu\beta_i - \beta_{\mathrm{T}}\right), \tag{4.47}$$

$$e_{zz} = \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i + 0.5 E_{\text{T}} \right]^{-1} \times \left[\left(1 - \tilde{Z}_2 - \frac{\nu - \tilde{Z}_2}{R E_{\text{T}} (1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\delta}{R} \right) \times \right.$$
$$\left. \times 0.5 E_{\text{T}} \beta_{\text{T}} + \frac{1 - \tilde{Z}_2}{R} \sum_{i=1}^{n} E_i \beta_i \delta_i \right] \frac{\overline{t}}{1-\nu}, \tag{4.48}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{i}(r) = \frac{\overline{t}}{1-\nu} \left[-E_i \left(\beta_i - \beta_{\text{T}} \right) + \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{\mu}_i^{\varphi}(r)}{R} \sum_{j=1}^{n} E_j \delta_j \left(\beta_j - \beta_{\text{T}} \right) \right], \tag{4.49}$$

$$\sigma_{zz}^{i}(r) = \frac{\overline{t}}{1-\nu} \left[-E_i \left(\beta_i - \nu \beta_{\text{T}} \right) + \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{\mu}_i^{z}(r)}{R} \sum_{j=1}^{n} E_j \delta_j \left(\beta_j - \beta_{\text{T}} \right) \right] + E_i e_{zz}, \tag{4.50}$$

$$\tilde{\mu}_i^{\varphi}(r) = \frac{E_i (1-2\nu)}{E_{\text{T}}(1-\nu)} + \frac{\nu}{1-\nu} \kappa(r), \quad \tilde{\mu}_i^{z}(r) = \frac{E_i \nu (1-2\nu)}{E_{\text{T}}(1-\nu)} + \frac{\nu}{1-\nu} \kappa(r),$$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{(1-2\nu)}{(1-\nu) R E_{\text{T}}} \sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i}, \quad \tilde{Z}_2 = \nu + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\delta}{R} \tilde{Z}_1 . \tag{4.51}$$

З формули (4.46) випливає, що знак залишкових радіальних напружень на поверхні поділу циліндр–покриття $\sigma_{rr}^{*} = \sigma_{rr}^{\text{T}}(R) = \sigma_{rr}^{1}(R)$ не залежить від коефіцієнта Пуассона і способу закріплення торців циліндра.

Причому, коли КЛТР кожного з шарів покриття більший, ніж КЛТР підкладки

$$\beta_i > \beta_{\text{T}} \text{ для } i = \overline{1,n}, \tag{4.52}$$

ці напруження завжди стискальні, а коли менший –

$$\beta_i < \beta_{\text{T}} \text{ для } i = \overline{1,n} \tag{4.53}$$

– завжди розтягальні.

Слід зауважити, що коли не для всіх шарів покриття виконується одна з умов (4.52) або (4.53), то знак цих напружень визначатиме ефективна величина $\sum_{i=1}^{n} E_i \delta_i \left(\beta_i - \beta_{\text{T}} \right)$, тобто на нього впливатиме і жорсткість кожного окремого шару покриття.

Зі збільшенням температурної зміни $|t|$, модуля Юнґа підкладки $E_{\text{Т}}$, зменшенням радіуса циліндра R напруження σ_{rr}^{*} зростають за абсолютним значенням. Те саме відбувається за виконання однієї з умов (4.52) або (4.53) зі збільшенням різниці КЛТР $|\beta_i - \beta_{\text{Т}}|$.

Можна зауважити, що збільшення модуля Юнґа E_j і товщини δ_j шару покриття з найбільшим КЛТР за виконання умови (4.52) і шару покриття з найменшим КЛТР за виконання умови (4.53) призводить також до зростання за абсолютним значенням радіальних напружень σ_{rr}^{*}.

Так само для цього випадку з формули (4.49) випливає, що знак колових напружень в i-му шарі покриття $\sigma_{\varphi\varphi}^{i}$ не залежить від способу закріплення торців циліндра і в основному визначається знаком величини $\beta_i - \beta_{\text{Т}}$. Зі збільшенням температурної зміни $|t|$ ці напруження зростають за абсолютним значенням.

Слід зазначити, що через відмінність знаку величини $\beta_j - \beta_{\text{Т}}$ у відхиленні КЛТР в j-му шарі покриття від знаку відхилення КЛТР в i-му шарі $\beta_i - \beta_{\text{Т}}$ колові напруження в i-му шарі збільшуються за абсолютним значенням.

За виконання умови

$$\left(\beta_j - \beta_{\text{Т}}\right)\left(\beta_i - \beta_{\text{Т}}\right) < 0 \quad j = \overline{1,n};\ j \neq i \tag{4.54}$$

зі збільшенням модуля Юнга i-го шару E_i, різниці КЛТР $|\beta_i - \beta_{\text{Т}}|$, зменшенням товщини i-го шару δ_i ці напруження збільшуються за абсолютним значенням.

З цієї ж формули (4.49) випливає, що пружні властивості інших шарів покриття мають менший вплив на напруження в цьому шарі. Зі зменшенням товщини покриття колові напруження прямують до граничного значення $\sigma_{\varphi\varphi}^{*i} = \dfrac{E_i \overline{t}}{1-\nu}\left(\beta_{\text{Т}} - \beta_i\right)$.

4.2. Теплопровідність суцільного циліндра з багатошаровим покриттям

Аналітичні розв’язки крайових задач нестаціонарної теплопровідності для циліндра обмежуються в основному випадком одношарового покриття [11, 57, 78, 79, 97, 98, 128, 170, 198, 205, 237, 268, 269, 271, 273, 317, 318, 344, 391, 439, 463, 479, 533]. З іншого боку розроблені методики розрахунку температурного поля для шаруватих циліндричних тіл з довільною кількістю шарів [32, 39, 110, 131, 353, 433, 458, 465, 469, 525], які можуть бути використані для розрахунку та дослідження температурних розподілів в циліндричних тілах з багатошаровими покриттями. Проте вони є відносно складними і не враховують можливу малість товщини покриття.

У цьому підрозділі з використанням узагальненої граничної умови та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичний розв’язок нестаціонарної одновимірної задачі теплопровідності для циліндра за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем через тонке багатошарове покриття.

4.2.1. Постановка задачі

Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для довгого суцільного кругового циліндра радіуса R $(0 \le r \le R)$ з n-шаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$.

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_i}{\partial \tau} = a_i \left(\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r} \right), \tag{4.55}$$

$$t_{i|\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad i = \text{Т}, 1, 2, 3, \ldots n. \tag{4.56}$$

Приймаємо, що на межі покриття–середовище виконується теплообмін відповідно до закону Ньютона:

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial r} = \mu\left(t_C - t_n\right) \quad \text{при} \quad r = r_n = R + \delta\,, \tag{4.57}$$

на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом мають місце умови ідеального теплового контакту

$$\begin{aligned} &t_i = t_{i-1}\,, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial r} \quad \text{при} \;\; r = r_{i-1} = R + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j\,, \quad i = \overline{2,n}, \\ &t_1 = t_{\text{Т}}\,, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_{\text{Т}} \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} \quad \text{при} \;\; r = r_0 = R, \end{aligned} \tag{4.58}$$

а на осі циліндра виконується умова симетрії

$$\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0\,. \tag{4.59}$$

4.2.2. Розв’язок задачі з узагальненою граничною умовою

Узагальнена гранична умова теплопровідності для даного випадку слідує з (1.39) та (1.44):

$$-\lambda_{\text{Т}}\left(1 - \frac{\delta}{R} + \frac{\mu}{H}\right)\frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial r} + \mu\left(t_C - t_{\text{Т}}\right) = \Omega \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial \tau}, \quad t_{\text{Т}|\tau=0} = t_0 \;\; \text{при} \; r = R\,. \tag{4.60}$$

Розв’язок рівняння (4.55) у циліндрі з урахуванням умов (4.56), (4.59), (4.60) в трансформантах Лапласа $t_{\text{Т}}^L\left(z,s\right) = \mathrm{L}\left[t_{\text{Т}}\left(z,\tau\right)\right] = \int\limits_0^\infty t_{\text{Т}}\left(z,\tau\right) e^{-s\tau} d\tau$ має наступний вигляд:

$$t_{\text{Т}}^L(r,s) = \frac{t_C I_0\left(qr\right)}{s\left[\left(1+\psi s\right) I_0\left(qR\right) + \overline{h}^{-1} q I_1\left(qR\right)\right]}, \qquad 0 \le r \le R\,, \tag{4.61}$$

де $q = \sqrt{s / a_{\text{т}}}$; $\overline{h}^{-1} = \dfrac{\lambda_{\text{Т}}}{\mu}\left(1 - \dfrac{\delta}{R} + \dfrac{\mu}{H}\right)$; $\psi = \dfrac{\Omega}{\mu}$; I_0, I_1 – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (4.61), отримуємо розв'язок задачі для циліндра у вигляді

$$\vartheta_{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) = 1 - 2\mathrm{Bi}_{*}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\rho\kappa_j\right)\exp(-\kappa_j^2\mathrm{Fo})}{Z(\kappa_j)}\;, \quad 0 \le \rho \le 1\,, \tag{4.62}$$

$$Z(\kappa_j) = J_0(\kappa_j)\left[(1+2\upsilon)\kappa_j^2 + \left(\mathrm{Bi}_{*} - \upsilon\kappa_j^2\right)^2\right], \tag{4.63}$$

де κ_j – корені рівняння $$\left(\mathrm{Bi}_{*} - \upsilon\kappa^2\right)J_0(\kappa) - \kappa J_1(\kappa) = 0\,, \tag{4.64}$$

$\vartheta_{\mathrm{T}} = \dfrac{t_{\mathrm{T}} - t_0}{t_C - t_0}$; $\rho = \dfrac{r}{R}$; $\mathrm{Fo} = \dfrac{a_{\mathrm{T}}\tau}{R^2}$; $\mathrm{Bi}_{*} = \dfrac{\mathrm{Bi}}{1 - \delta/R + \xi\mathrm{Bi}}$; $\mathrm{Bi} = \dfrac{\mu R}{\lambda_{\mathrm{T}}}$; $\xi = H^{-1}\big/\left(R/\lambda_{\mathrm{T}}\right)$;

$\upsilon = \dfrac{\eta}{1 - \delta/R + \xi\mathrm{Bi}}$; $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_{\mathrm{T}}R}$; J_0, J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Можна зауважити, що за відсутності покриття ($\delta = 0$) формули (4.62)-(4.64) збігаються із розв'язком задачі теплопровідності для однорідного циліндра [144, с. 244], а для одношарового покриття ($n = 1$) – з формулами (1.62)-(1.64) в 1.1.7 за збереження лише лінійних доданків при температурі та її похідній і розв'язком, наведеним у [198] для випадку циліндра із однорідним покриттям.

Підставляючи (4.62) у формули відтворення (1.54)

$$t_i(r) = t_{\mathrm{T}}(R) + \lambda_{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{r - r_{i-1}}{\lambda_i}\right)\frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial r}(R)\,, \quad r_{i-1} \le r \le r_i\,, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.65}$$

отримуємо вирази для температури в i-му шарі покриття:

$$\vartheta_i(\rho,\mathrm{Fo}) = 1 - 2\mathrm{Bi}_{*}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{V_i(\rho,\kappa_j)\exp(-\kappa_j^2\mathrm{Fo})}{Z(\kappa_j)}, \quad \frac{r_{i-1}}{R} \le \rho \le \frac{r_i}{R}, \tag{4.66}$$

$$V_i(\rho,\kappa_j) = J_0(\kappa_j) + \frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{R}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{\rho R - r_{i-1}}{\lambda_i}\right)\kappa_j J_1(\kappa_j),\;\; \vartheta_i = \frac{t_i - t_0}{t_C - t_0}\,.$$

Розвиваючи функції Бесселя в асимптотичні ряди [144, с. 579] у виразі для зображення (4.61), отримуємо наступний вираз для трансформанти контактної температури при великих s

$$t_{\mathrm{T}}^{L}(R,s)\approx t_C\bar{h}s^{-1}\left[\sqrt{\frac{s}{a_{\mathrm{T}}}}+\bar{h}\left(1+\psi s\right)-\frac{1}{2R}\right]^{-1}. \qquad (4.67)$$

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до (4.67), отримуємо вирази для контактної температури при малих часах

$$\text{для } \Omega\neq 0,\ \mathrm{Bi}_*\neq 1/2:\quad \vartheta_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\approx\frac{\mathrm{Bi}_*}{\mathrm{Bi}_*-1/2}\left\{1-\frac{1}{2\bar{\Upsilon}}\left[(1+\bar{\Upsilon})e^{\mathrm{Fo}_2^*}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\operatorname{erfc}\left(\operatorname{sgn}(1-\bar{\Upsilon})\sqrt{\mathrm{Fo}_2^*}\right)-(1-\bar{\Upsilon})e^{\mathrm{Fo}_1^*}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\mathrm{Fo}_1^*}\right)\right]\right\};$$

$$\text{для } \Omega\neq 0,\ \mathrm{Bi}_*=1/2:\quad \vartheta_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\approx\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}}-\frac{\upsilon}{2}\left[1-\exp\left(\frac{\mathrm{Fo}}{\upsilon^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Fo}}}{\upsilon}\right)\right];$$

$$\text{для } \Omega=0,\ \mathrm{Bi}_*\neq 1/2:\quad \vartheta_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\approx\frac{\mathrm{Bi}_*}{\mathrm{Bi}_*-1/2}\left\{1-\exp\left[(\mathrm{Bi}_*-1/2)^2\,\mathrm{Fo}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{erfc}\left(\mathrm{Bi}_*-1/2\right)\sqrt{\mathrm{Fo}}\right\}; \qquad (4.68)$$

$$\text{для } \Omega=0,\ \mathrm{Bi}_*=1/2:\quad \vartheta_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\approx\sqrt{\mathrm{Fo}/\pi}\,.$$

Тут

$$\bar{\Upsilon}=\sqrt{1-4\upsilon\left(\mathrm{Bi}_*-1/2\right)},\quad \mathrm{Fo}_{1,2}^*=\frac{(1\pm\bar{\Upsilon})^2}{4\upsilon^2}\mathrm{Fo}\,.$$

Слід зазначити, що формула (4.68) для випадку $\Omega=0,\ \mathrm{Bi}_*\neq 1/2$ за відсутності покриття ($\delta=0$) співпадає із відповідною формулою для однорідного циліндра [144, с. 252].

4.2.3. Тестова задача теплопровідності для суцільного циліндра з тришаровим покриттям

Ефективність запропонованого підходу проілюструємо порівнянням результатів, отриманих при його застосуванні, з результатами точного розв’язку тестової одномірної задачі нестаціонарної теплопровідності при конвективному нагріві суцільного циліндра радіуса R із тришаровим ізотропним покриттям.

Цей наближений розв’язок порівнюється з точним згідно з [32] для деяких моментів часу для чотиришарового циліндра, що характеризується такими значеннями геометричних і фізичних параметрів: $R = 0.05$м, $\delta_1 = 3 \cdot 10^{-4}$м, $\delta_2 = 10^{-4}$м, $\delta_3 = 10^{-4}$м, $\lambda_\text{Т} = 4$ Вт/(м$\cdot$К), $\lambda_1 = 2$ Вт/(м$\cdot$К), $\lambda_2 = 4$ Вт/(м$\cdot$К), $\lambda_3 = 6$ Вт/(м$\cdot$К), $a_\text{Т} = 1.2$ м^2/с, $a_1 = 5 \cdot 10^{-6}$м^2/с, $a_2 = 6.4 \cdot 10^{-6}$м^2/с, $a_3 = 8 \cdot 10^{-6}$м^2/с, $\mu = 120$ Вт/(м$^2 \cdot$К).

Аналіз результатів, отриманих для деяких моментів часу (табл. 4.6), показує, що значення температури по точному (нижні значення в рядках) та наближеному (верхні значення в рядках) розв’язках відрізняються неістотно.

Таблиця 4.6

Порівняння точного [32] і наближеного розв’язків (4.62), (4.66)

<table>
<tr><td rowspan="2">Fo</td><td colspan="8">ϑ</td></tr>
<tr><td>$\rho = 0$</td><td>$\rho = 0.25$</td><td>$\rho = 0.5$</td><td>$\rho = 0.75$</td><td>$\rho = 1.0$</td><td>$\rho = 1 + \frac{r_1}{R}$</td><td>$\rho = 1 + \frac{r_2}{R}$</td><td>$\rho = 1 + \frac{r_3}{R}$</td></tr>
<tr><td>0.1</td><td>0.0298
0.0291</td><td>0.0458
0.0452</td><td>0.1026
0.1023</td><td>0.2188
0.2188</td><td>0.4032
0.4032</td><td>0.4135
0.4084</td><td>0.4152
0.4101</td><td>0.4163
0.4119</td></tr>
<tr><td>0.2</td><td>0.1661
0.1659</td><td>0.1900
0.1898</td><td>0.2616
0.2614</td><td>0.3785
0.3784</td><td>0.5330
0.5330</td><td>0.5411
0.5370</td><td>0.5425
0.5384</td><td>0.5434
0.5398</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>0.5452
0.5451</td><td>0.5598
0.5597</td><td>0.6022
0.6021</td><td>0.6683
0.6683</td><td>0.7520
0.7520</td><td>0.7563
0.7541</td><td>0.7570
0.7548</td><td>0.7575
0.7556</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>0.8386
0.8386</td><td>0.8438
0.8438</td><td>0.8589
0.8589</td><td>0.8823
0.8824</td><td>0.9120
0.9120</td><td>0.9136
0.9128</td><td>0.9138
0.9131</td><td>0.9140
0.9133</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>0.9797
0.9797</td><td>0.9803
0.9804</td><td>0.9822
0.9822</td><td>0.9852
0.9852</td><td>0.9889
0.9889</td><td>0.9891
0.9890</td><td>0.9892
0.9891</td><td>0.9892
0.9891</td></tr>
</table>

4.2.4. Числові результати та аналіз конвективного нагріву суцільного циліндра з тришаровим покриттям

На основі отриманого розв'язку (4.62), (4.66) проведемо дослідження закономірностей процесу теплопровідності у системі тіло – багатошарове покриття. На рис. 4.1-4.2 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \vartheta_T(1, \mathrm{Fo})$ на поверхні циліндр – покриття в залежності від ефективного термоопору ξ та ефективної теплоємності покриття η (рис. 4.1), а також в залежності від параметра Bi (рис. 4.2).

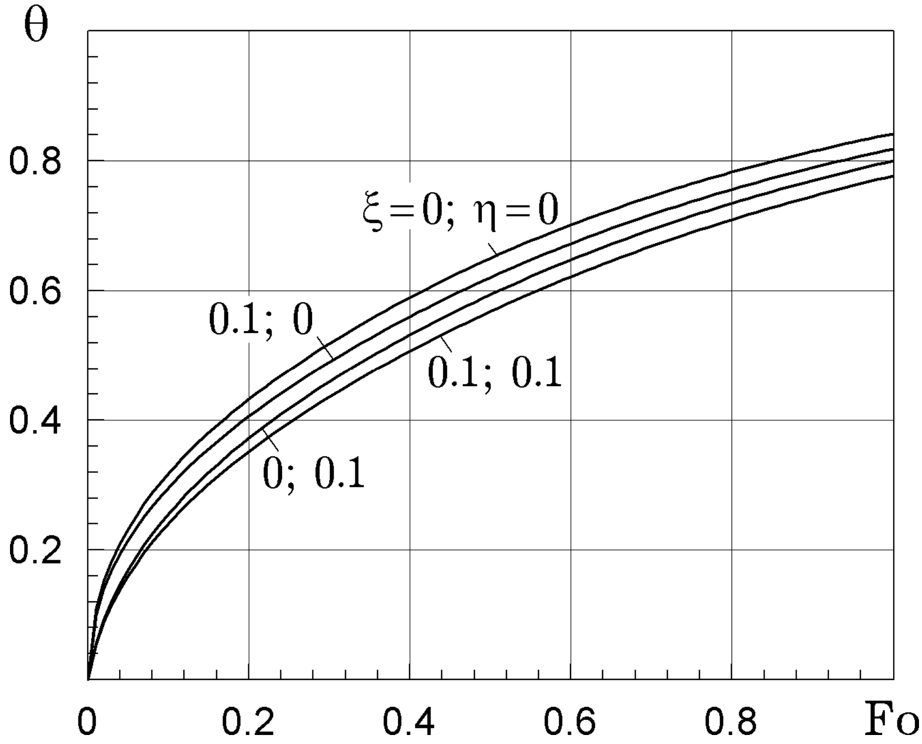


Рис. 4.1. Зміна в часі контактної температури
на поверхні поділу циліндр–покриття залежно
від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття

Аналогічно випадкам нагрівання півпростору (рис. 2.2, 2.3) та пластини (рис. 2.22, 2.23) ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури циліндра при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем. Наявність покриття знижує температуру поверхні тіла (крива

$\xi = 0$, $\eta = 0$ на рис. 4.1 – покриття відсутнє). Зі збільшенням товщини покриття, зі зменшенням його теплопровідності та збільшенням теплоємності зростає його термоізолююча здатність. Збільшення коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покриття приводить до інтенсифікації процесу теплопереносу (рис. 4.2).

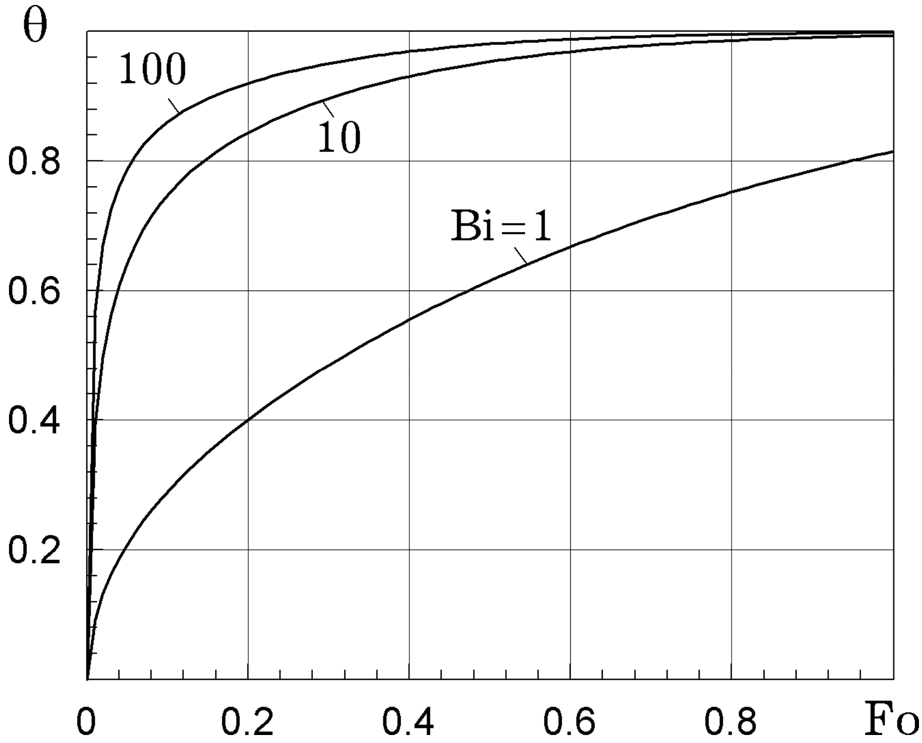


Рис. 4.2. Зміна в часі контактної температури
на поверхні поділу циліндр–покриття залежно від Bi

Для дослідження закономірностей зміни температури за просторовою координатою розглянемо модельну задачу для циліндра із тришаровим покриттям при таких співвідношеннях геометричних і теплофізичних параметрів різних шарів покриття та тіла:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3:1:1, \quad \delta / R = 0.01,$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_\mathrm{T} = 3:10:2:30, \quad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_\mathrm{T} = 3:6:1:3.$$

На рис. 4.3 показано розподіл температури $\theta = \vartheta_\mathrm{T}(\rho, \mathrm{Fo})$ за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для моментів часу $\mathrm{Fo} = 0.02, 0.1, 0.4$ при значеннях $\mathrm{Bi} = 1, 10, 100$. Як і у випадку нагрівання півпростору (рис. 2.4), при більших значеннях Bi розподіл температури вздовж товщини покриття більше відхиляється від рівномірного, що неможливо отримати на основі моделі «зосередженої ємності» [77, 221].

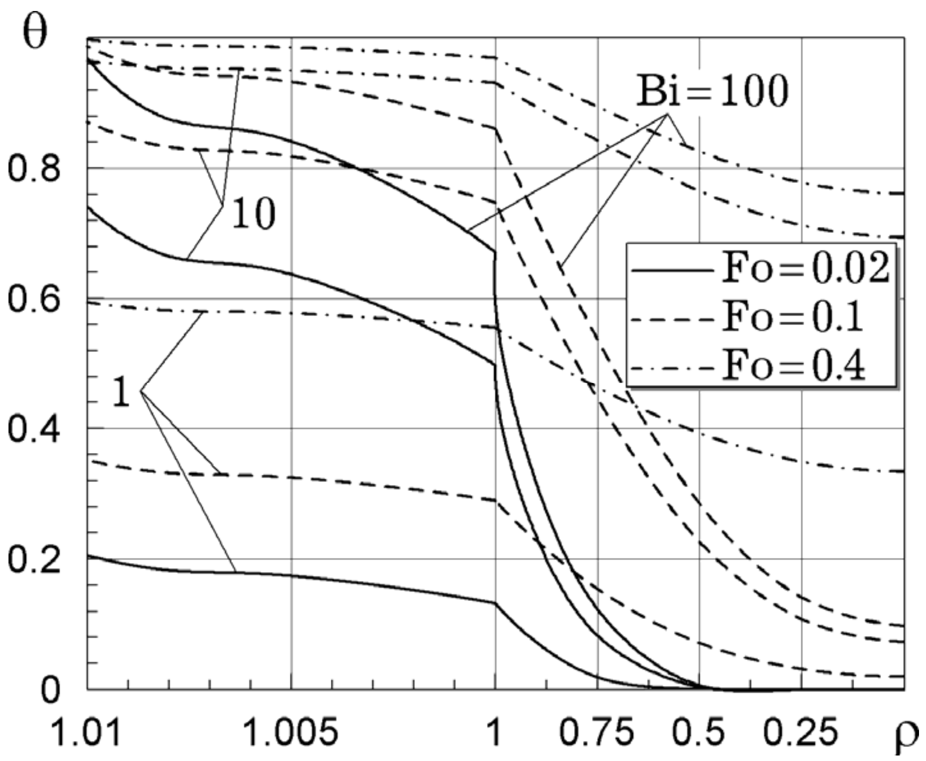


Рис. 4.3. Розподіл температури за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для деяких моментів часу при різних Bi

4.3. Нестаціонарна задача термопружності для суцільного циліндра з багатошаровим покриттям

Як і в підрозділі 4.2, аналітичні розв'язки крайових задач статичної та нестаціонарної термопружності для циліндра обмежуються переважно випадком одношарового покриття [11, 80, 126, 128, 170, 198, 201, 206, 213, 268, 271, 273, 316-318, 344, 363, 391, 423, 451, 463, 533, 547]. Водночас запропоновані підходи до визначення температурних напружень у багатошарових циліндричних тілах [33, 39, 43, 93, 104, 106, 123-125, 131, 208, 214, 215, 323, 423, 433, 465, 469, 494, 526, 546, 563, 571], які можуть бути застосовані для розрахунку та дослідження термонапруженого стану циліндричних тіл з багатошаровими покриттями. Однак вони є відносно складними і не враховують можливу малість товщини покриття (за винятком праці [208]).

Нижче на основі отриманого у підрозділі 4.2 розв'язку задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям знайдено розв'язок відповідної задачі термопружності за конвективного нагрівання зовнішнім середовищем.

Дослідимо термонапружений стан суцільного циліндра з багатошаровим покриттям за конвективного теплообміну з довкіллям. Тоді у формулах (4.10)-(4.19) замінимо e_j^0 на $\beta_j\left(t-t_0\right)$ ($j=\mathrm{T},1,2,...,n$), де t є розв'язком задачі теплопровідності (4.55)-(4.59).

4.3.1. Розв'язок для загального випадку

Формули для напружень в підкладці циліндра (4.10)–(4.13) матимуть вигляд

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) = Z_1\tilde{\tilde{G}}_1\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo}) + \frac{1}{2}\Big(Z_1X_1\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(1,\mathrm{Fo}\right) - \tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)\Big) + Z_1N_\theta(\mathrm{Fo}), \tag{4.69}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) = Z_1\tilde{\tilde{G}}_1\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo}) + \frac{1}{2}\Big(Z_1X_1\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(1,\mathrm{Fo}\right) + \tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(\rho,\mathrm{Fo}\right) - 2\vartheta_{\mathrm{T}}\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)\Big) + Z_1N_\theta(\mathrm{Fo}), \tag{4.70}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) = \Big(1-\nu_{\mathrm{T}}+2\nu_{\mathrm{T}}Z_1\tilde{\tilde{G}}_1\Big)\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo}) + \nu_{\mathrm{T}}Z_1X_1\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(1,\mathrm{Fo}\right) - \tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(\rho,\mathrm{Fo}\right) + 2\nu_{\mathrm{T}}Z_1N_\theta(\mathrm{Fo}), \tag{4.71}$$

де для вільних торців (4.7.1)

$$\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo}) = \frac{e_{zz}\left(1-\nu_{\mathrm{T}}\right)}{\beta_{\mathrm{T}}\left(t_C-t_0\right)} = \frac{\left(X_2-Z_2X_1+\tilde{C}_2\right)\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}\left(1,\mathrm{Fo}\right)+2\left(1-Z_2\right)N_\theta(\mathrm{Fo})}{1-\nu_{\mathrm{T}}+2\Big(Z_2\tilde{\tilde{G}}_1-\tilde{\tilde{G}}_2\Big)}, \tag{4.72.1}$$

для закріплених торців (4.7.2)

$$\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo}) = 0, \tag{4.72.2}$$

а формули для напружень в покритті (4.17)–(4.19) набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{i}(\rho,\mathrm{Fo})=\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\left[1-\frac{3(\rho-1)^2}{(\delta/R)^2}+\frac{2(\rho-1)^3}{(\delta/R)^3}\right], \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i}(\rho,\mathrm{Fo})=\chi_i\left\{\frac{\nu_i-\nu_{\mathrm{T}}+\left(1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2\right)Z_1\tilde{G}_1}{(1+\nu_i)(1-\nu_{\mathrm{T}})}\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo})+\right.\\ \left.+\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}Z_1\left[\frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}N_\theta(\mathrm{Fo})+\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\right]-\frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}}\vartheta_i(\rho,\mathrm{Fo})\right\}+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\tilde{\sigma}_{rr}^{i}(\rho,\mathrm{Fo}),\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{zz}^{i}(\rho,\mathrm{Fo})=\chi_i\left\{\frac{1-\nu_i\nu_{\mathrm{T}}+\left(1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2\right)\nu_i Z_1\tilde{G}_1}{(1+\nu_i)(1-\nu_{\mathrm{T}})}\tilde{e}_{zz}(\mathrm{Fo})+\right.\\ \left.+\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\nu_i Z_1\left[\frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}N_\theta(\mathrm{Fo})+\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})\right]-\frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}}\vartheta_i(\rho,\mathrm{Fo})\right\}+\frac{\nu_i}{1-\nu_i}\tilde{\sigma}_{rr}^{i}(\rho,\mathrm{Fo}).\end{aligned} \tag{4.75}$$

Тут $\tilde{\sigma}_{ll}^{j}$ – безрозмірні напруження:

$$\tilde{\sigma}_{ll}^{j}=\sigma_{ll}^{j}\frac{1-\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}(t_C-t_0)}\quad j=\mathrm{T},1,...,n,\quad l=r,\varphi,z, \tag{4.76}$$

$\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo})$ – безрозмірна середня температура циліндра:

$$\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo})=\frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho\tilde{\vartheta}_{\mathrm{T}}(\zeta,\mathrm{Fo})\zeta\,\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}1-\dfrac{4\mathrm{Bi}_*}{\rho}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\exp(-\kappa_j^2\,\mathrm{Fo})J_1(\rho\kappa_j)}{\kappa_j Z(\kappa_j)}, & 0<\rho\le 1,\\ 1-2\mathrm{Bi}_*\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\exp(-\kappa_j^2\,\mathrm{Fo})}{Z(\kappa_j)}, & \rho=0,\end{cases} \tag{4.77}$$

$N_\theta(\mathrm{Fo})$ – безрозмірний температурний момент в оболонці покриття:

$$N_\theta(\mathrm{Fo})=\frac{1-\nu_{\mathrm{T}}}{RE_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}(t_C-t_0)}N_t=\sum_{i=1}^{n}\chi_i\frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}}\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i}\vartheta_i(\rho,\mathrm{Fo})d\rho, \tag{4.78}$$

$$\chi_i=\frac{E_i}{1-\nu_i}\bigg/\frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}},\ i=1,\ldots,n;\qquad \tilde{\tilde{G}}_j=\tilde{G}_j/R,\quad j=1,2, \tag{4.79}$$

Z_j, X_j, $\tilde{G}_j$ ($j=1,2$), $\tilde{C}_2$ визначаються за формулами (4.14)-(4.16).

4.3.2. Формули для усталеного стану

В усталеному стані, коли циліндр з багатошаровим покриттям рівномірно прогрівається до температури середовища t_C, формули (4.69)–(4.75) матимуть вигляд:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}\infty} = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) =$$
$$= Z_1 \sum_{i=1}^{n} \chi_i \left(\frac{\nu_\mathrm{T} - \nu_i}{\left(1-\nu_\mathrm{T}\right)\left(1+\nu_i\right)} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} - \frac{1+\nu_\mathrm{T}}{1+\nu_i} \right) \frac{\delta_i}{R}, \tag{4.80}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathrm{T}\infty} = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{zz}^{\mathrm{T}}(\rho,\mathrm{Fo}) =$$
$$= \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \nu_\mathrm{T} Z_1 - 1 + \frac{Z_1 \nu_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{n} \chi_i \left(2\frac{\nu_\mathrm{T} - \nu_i}{1+\nu_i} \tilde{e}_{zz} + 2\frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} - \frac{1+\nu_\mathrm{T}}{1+\nu_i} \right) \frac{\delta_i}{R}, \tag{4.81}$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho) = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{rr}^{i}(\rho,\mathrm{Fo}) = \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty} \left[1 - \frac{3\left(\rho-1\right)^2}{\left(\delta/R\right)^2} + \frac{2\left(\rho-1\right)^3}{\left(\delta/R\right)^3} \right], \tag{4.82}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i}(\rho,\mathrm{Fo}) = \chi_i \left\{ \frac{\nu_i - \nu_\mathrm{T} + \left(1-\nu_\mathrm{T} - 2\nu_\mathrm{T}^2\right) Z_1 \tilde{\tilde{G}}_1}{\left(1+\nu_i\right)\left(1-\nu_\mathrm{I}\right)} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\nu_\mathrm{T}}{1+\nu_i} Z_1 \left[\frac{1-2\nu_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{n} \chi_i \frac{\beta_{ii}}{\beta_\mathrm{T}} \frac{\delta_i}{R} + 1 \right] - \frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} \right\} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho), \tag{4.83}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{\sigma}_{zz}^{i}(\rho,\mathrm{Fo}) = \chi_i \left\{ \frac{1 - \nu_i \nu_\mathrm{T} + \left(1-\nu_\mathrm{T} - 2\nu_\mathrm{T}^2\right) \nu_i Z_1 \tilde{G}_1}{\left(1+\nu_i\right)\left(1-\nu_\mathrm{T}\right)} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\nu_\mathrm{T}}{1+\nu_i} \nu_i Z_1 \left[\frac{1-2\nu_\mathrm{T}}{1-\nu_\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{n} \chi_i \frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} \frac{\delta_i}{R} + 1 \right] - \frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} \right\} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho), \tag{4.84}$$

де для випадку (4.7.2) $$\tilde{e}_{zz}^{\infty} = 0, \tag{4.85.1}$$

а для випадку (4.7.1)

$$\tilde{e}_{zz}^{\infty} = \lim_{\mathrm{Fo}\to\infty} \tilde{e}_{zz}\left(\mathrm{Fo}\right) = \frac{Y_2 - Z_2 X_1 + \tilde{C}_2 + 2\left(1-Z_2\right) \sum_{i=1}^{n} \chi_i \frac{\beta_i}{\beta_\mathrm{T}} \frac{\delta_i}{R}}{1 + 2\left(Z_2 \tilde{\tilde{G}}_1 - \tilde{\tilde{G}}_2\right)}. \tag{4.85.2}$$

Для покриття з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла (це має місце, зокрема, для тонких покрить з модулями Юнга, що не перевищують істотно модуль Юнга підкладки) з формул (4.80)–(4.85) отримуємо наближені формули для усталених напружень у тілі:

– для закріплених торців:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}\infty} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \right) \chi_i \frac{\delta_i}{R}, \tag{4.86}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathrm{T}\infty} = \nu_{\mathrm{T}} - 1, \tag{4.87}$$

– для вільних торців:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}\infty} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} - 1 \right) \chi_i \frac{\delta_i}{R}, \tag{4.88}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathrm{T}\infty} \approx 2\sum_{i=1}^{n} \chi_i \left[\left(1 + \frac{\nu_{\mathrm{T}}^2}{1-\nu_{\mathrm{T}}} \right) \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} - 1 \right] \frac{\delta_i}{R}. \tag{4.89}$$

Крім того, для усталених напружень в *i*-му шарі покриття з малою жорсткістю для випадку, коли КЛТР інших шарів не є істотно більшими від КЛТР циліндра, з (4.83), (4.84) маємо наближені формули

– для закріплених торців:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) \approx{}& \chi_i \left(\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^{n} \chi_j \left[\chi_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} \left(\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j} - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) \right] \frac{\delta_j}{R}, \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) \approx{}& \chi_i \left(\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \nu_i - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^{n} \chi_j \left[\chi_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} \nu_i \left(\frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_j} - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) \right] \frac{\delta_j}{R}, \end{aligned} \tag{4.91}$$

– для вільних торців:

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) \approx \chi_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) - \sum_{j=1}^{n} \chi_j \left(\chi_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \right) \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) \frac{\delta_j}{R}, \tag{4.92}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) \approx \chi_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) - \nu_i \sum_{j=1}^{n} \chi_j \left(\chi_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \frac{1-2\nu_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}} + \frac{1}{1-\nu_i} \right) \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{\mathrm{T}}} \right) \frac{\delta_j}{R}. \tag{4.93}$$

4.3.3. Числові результати та аналіз термонапружень при конвективному нагріві суцільного циліндра з тришаровим покриттям

Таким чином, формули (4.62), (4.66), (4.69)–(4.71), (4.73)-(4.75) дають розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності та термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Слід зауважити, що ефективність і достатню точність наближеного аналітичного розв'язку (4.62), (4.66) задачі теплопровідності встановлено порівнянням з точним розв'язком цієї задачі для циліндра з тришаровим покриттям в підрозділі 4.2.3, а ефективність і достатню точність наближеного аналітичного розв'язку статичної задачі термопружності для випадку закріплених торців – в параграфі 4.1.3.2.

На основі отриманого розв'язку дослідимо термонапружений стан у системі тіло–багатошарове покриття за конвективного нагрівання.

Рисунок 4.4 ілюструє зміну з часом безрозмірного контактного радіального напруження $\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})$, коли 1) всі КЛТР шарів покриття більші від КЛТР підкладки: $\beta_i > \beta_{\mathrm{T}}$, $i=\overline{1,n}$, та 2) всі КЛТР шарів покриття менші від КЛТР підкладки: $\beta_i < \beta_{\mathrm{T}}$, $i=\overline{1,n}$, залежно від способу закріплення торців циліндра (ЗТ – закріплені торці, ВТ – вільні торці) для різних співвідношень коефіцієнтів Пуассона покриття ν_i та підкладки ν_{T}.

Розрахунки для рис. 4.4 виконано при $\mathrm{Bi}=10$, $\xi=0$, $\eta=0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3$; $\beta_1=2\beta_{\mathrm{T}}$ та $\beta_1=0.5\beta_{\mathrm{T}}$ для таких геометричних і механічних співвідношень між параметрами шарів покриття та тіла:

$$\delta_1:\delta_2:\delta_3=3:1:1,\qquad \delta/R=0.01, \tag{4.94}$$

$$E_1:E_2:E_3=5:2:8, \tag{4.95}$$

$$E_1:E_{\mathrm{T}}=1, \tag{4.96}$$

$$\nu_{\mathrm{T}}=0.3,\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3\ \text{ та }\ \nu_1=\nu_2=\nu_3=0.2.$$

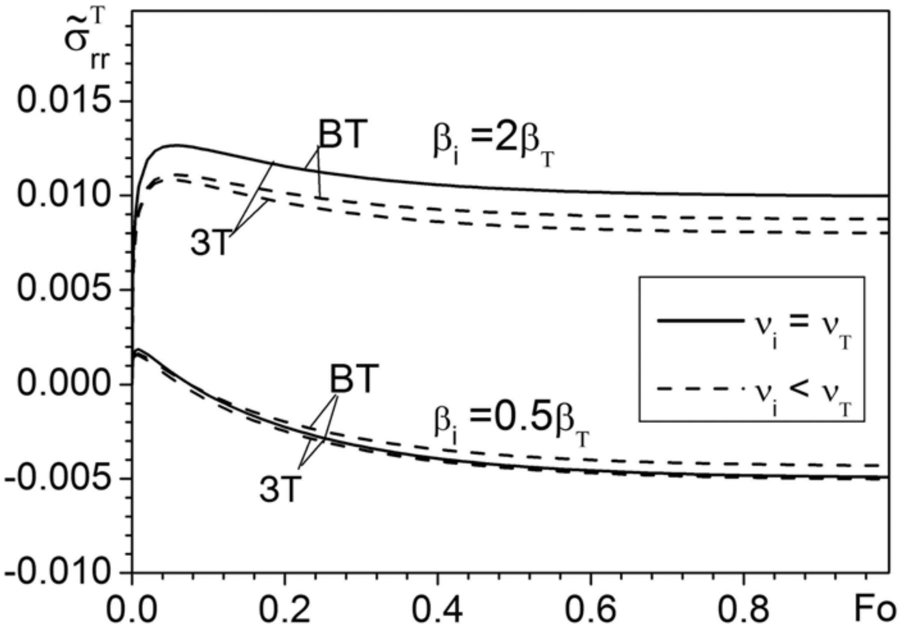


Рис. 4.4. Зміна з часом радіальних контактних напружень у циліндрі для різних співвідношень між КЛТР шарів покриття та підкладки залежно від способу закріплення торців циліндра для різних співвідношень коефіцієнтів Пуассона покриття та підкладки

З рисунку видно, що на початковій стадії нагрівання у всіх випадках радіальні напруження є розтягувальними. При $\beta_i > \dfrac{1+\nu_{\mathrm{I}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}$ ці напруження досягають максимального значення, а потім релаксують до усталеного значення $\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty}$, яке визначається співвідношенням (4.80), а для випадку покрить порівняно малої жорсткості – формулами (4.86) та (4.88). При $\beta_i < \dfrac{1+\nu_{\mathrm{I}}}{1+\nu_i}\beta_{\mathrm{T}}$ ці напруження також досягають максимального додатного значення, а потім зменшуються, міняють знак і прямують до від'ємного в цьому випадку усталеного значення $\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}\infty}$. Ці висновки щодо впливу співвідношення КЛТР підкладки та покриття з точністю до урахування значень коефіцієнта Пуассона якісно узгоджуються з результатами [189].

Слід зауважити, що вплив закріплення торців циліндра проявляється лише у випадку відмінності значень коефіцієнта Пуассона складових покриття та підкладки (суцільні криві на рис. 4.4, що відповідають сталому коефіцієнту Пуассона, співпадають). Це узгоджується з результатами для залишкового напруженого стану в параграфі 4.1.3.3 та усталених термонапружень в [533].

Отже, найбільша небезпека відшарування покриття внаслідок дії розтягувальних радіальних напружень виникає на початковій стадії нагрівання.

Оскільки розтягувальні радіальні напруження на поверхні циліндра $\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathrm{T}}(1,\mathrm{Fo})$ є найбільш небезпечними, то дослідимо їх зміну з часом залежно від теплофізичних параметрів – ефективних термоопору $\xi = H^{-1}/(R/\lambda_{\mathrm{T}})$ і теплоємності $\eta = \Omega/(\omega_{\mathrm{T}} R)$ – на рис. 4.5 для випадку вільних торців при $\beta_i > \beta_{\mathrm{T}}$. Розрахунки для рис. 4.5 виконано при $\mathrm{Bi} = 10$, $\beta_i = 2\beta_{\mathrm{T}}$, $\nu_i = \nu_{\mathrm{T}} = 0.3$, $i = 1,2,3$, та умовах (4.94)–(4.96). Наявність термоізолюючих властивостей покриття призводить до зниження рівня розтягувальних напружень (крива $\xi = 0$, $\eta = 0$ на рис. 4.5 – термоопір та теплоємність покриття відсутні).

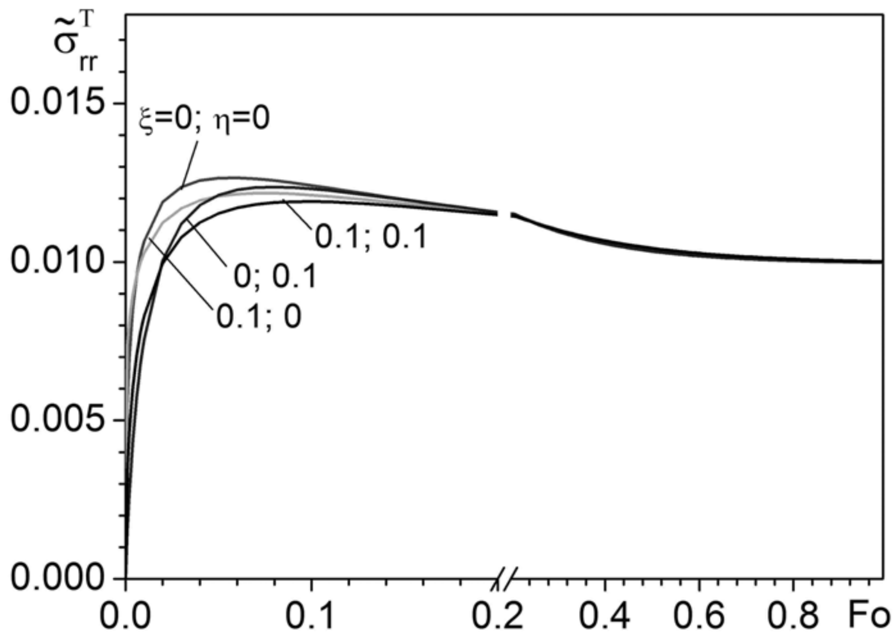
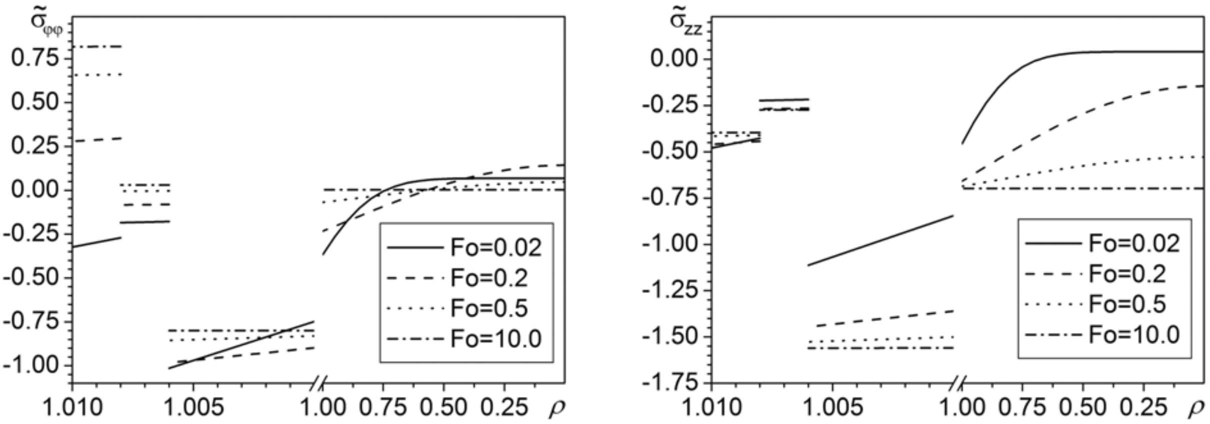


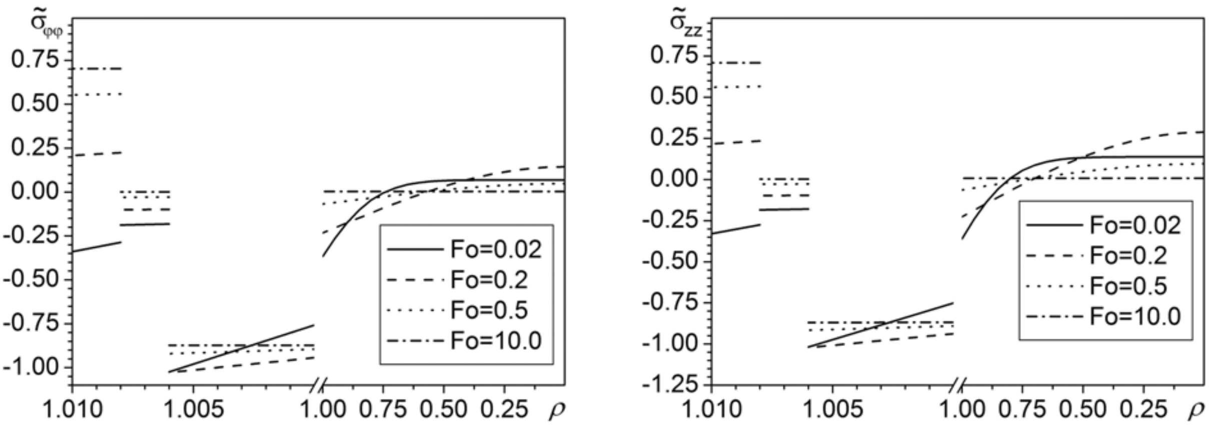
Рис. 4.5. Зміна з часом радіальних контактних напружень у циліндрі залежно від ефективних термоопору ξ і теплоємності η покриття для випадку вільних торців циліндра

На рис. 4.6 і 4.7 показано розподіли безрозмірних колових $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ та осьових $\tilde{\sigma}_{zz}$ напружень за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi}=10$ у випадках закріплених (рис. 4.6) та вільних (рис. 4.7) торців. Обчислення виконано для співвідношень $\beta_1:\beta_2:\beta_3:\beta_{\mathrm{T}}=4:2:1:2$ і значень $\nu_{\mathrm{T}}=0.3$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.2$ при умовах (4.94)–(4.96).



а б

Рис. 4.6. Розподіл а) колових та б) осьових напружень за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi}=10$ для вільних торців циліндра



а б

Рис. 4.7. Розподіл а) колових та б) осьових напружень за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для деяких моментів часу при $\mathrm{Bi}=10$ для закріплених торців циліндра

Напруження у покритті мають розривний характер. На початковій стадії нагрівання напруження у всіх шарах стискувальні. При цьому в зовнішньому шарі (з меншим, ніж у підкладці, КЛТР) та у середньому шарі (з КЛТР, рівним КЛТР підкладки), напруження (колові для обох випадків закріплення торців та осьові для вільних торців) з часом монотонно зростають, прямуючи до усталеного значення. У той же час у шарі з більшим, ніж у підкладці, КЛТР ці напруження міняються немонотонно. Така поведінка напружень залежно від співвідношення значень КЛТР покриття та підкладки якісно узгоджується з результатами в [198]. У випадку вільних торців знак усталених колових та осьових напружень у шарі покриття визначає різниця КЛТР підкладки і цього шару згідно з формулами (4.92) та (4.93), у випадку ж закріплених торців – величина $(1+\nu_{\text{т}})\beta_{\text{т}}-(1+\nu_i)\beta_i$ для колових напружень та величина $(1+\nu_{\text{т}})\nu_i\beta_{\text{т}}-(1+\nu_i)\beta_i$ для осьових напружень, що відповідає формулам (4.90) та (4.91).

Як видно з рис. 4.6а і рис. 4.7а, колові напруження у системі незначно залежать від способу закріплення торців, і ця відмінність визначається лише неоднорідністю коефіцієнта Пуассона (як і в [547]). Можна зауважити, що у випадку вільних торців колові та осьові напруження практично не відрізняються в покритті, що узгоджується з результатами [465]. Для тонких ($\delta / R \le 0.01$) покрить малої жорсткості порівняно з жорсткістю тіла усталені значення цих напружень у покритті значно перевищують за абсолютною величиною усталені напруження у підкладці в тих шарах, КЛТР яких відмінні від КЛТР тіла, що відповідає формулам (4.86), (4.88)–(4.90), (4.92), (4.93). Також слід відзначити особливість поведінки осьових напружень у випадку закріплених торців (рис. 4.6б): на відміну від інших ситуацій, незалежно від співвідношення значень КЛТР складових покриття та підкладки, тут у всіх шарах покриття та основи розвиваються значні стискальні напруження, значення яких для усталеного стану збігаються зі значеннями за формулами (4.87), (4.91).

Вплив умов теплообміну зі середовищем та жорсткості покриття на термонапружений стан системи проілюстровано на прикладі зміни колових напружень за радіальною координатою залежно від параметра Bi (рис. 4.8) і величини $\chi_1 = E_1/E_{\mathrm{T}}$ (рис. 4.9) у випадку закріплених торців циліндра.

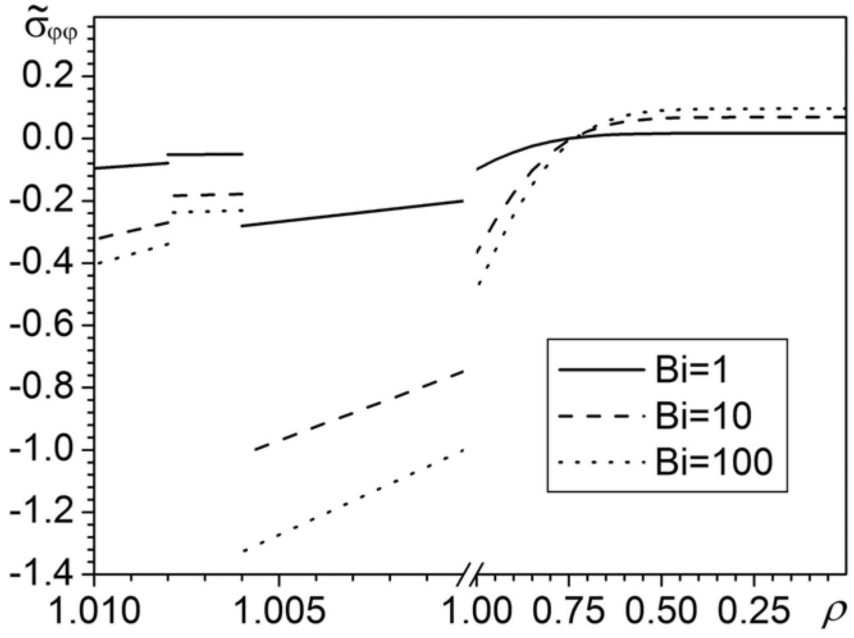


Рис. 4.8. Розподіл колових напружень за радіальною координатою
у системі циліндр – тришарове покриття
залежно від параметра Bi для закріплених торців циліндра

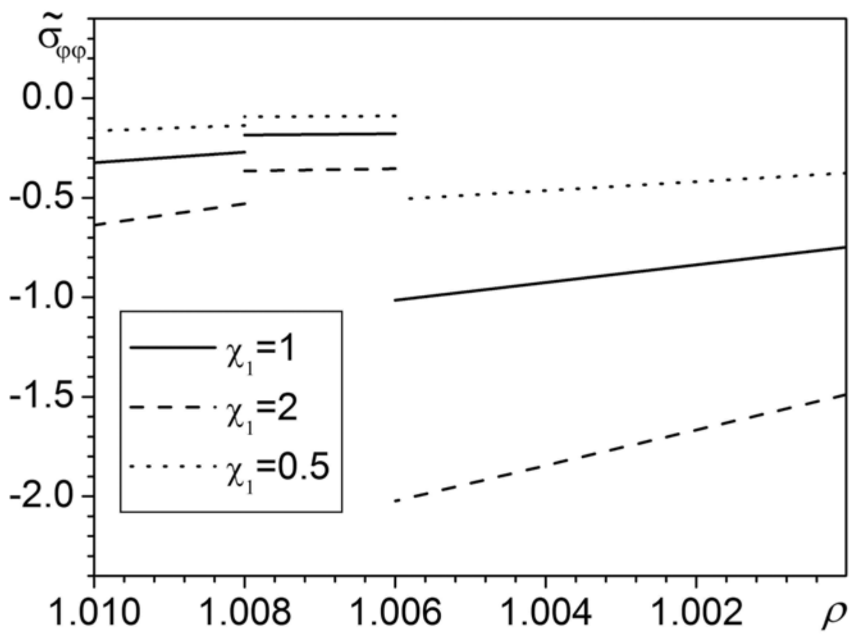


Рис. 4.9. Розподіл колових напружень за радіальною координатою
у системі циліндр – тришарове покриття залежно
від величини $\chi_1 = E_1/E_{\mathrm{T}}$ для закріплених торців циліндра

Розрахунки виконано при $\mathrm{Fo} = 0.02$, $\nu_T = 0.3$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$ за співвідношень (4.94)–(4.96) для рис. 4.9 та $\mathrm{Bi} = 10$ та співвідношень (4.94), (4.95) для рис. 4.9. Як видно з графіків, збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо Bi) та жорсткості покриття (що відповідає збільшенню параметра χ_1) призводить до істотного зростання значень і перепаду стискувальних напружень у шарах покриття (штрихові та пунктирні криві на рис. 4.8, суцільні та штрихові криві на рис. 4.9).

Висновки до розділу 4

На основі аналітичного розв'язку статичної задачі пружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям, отриманого із застосуванням УГУ, проаналізовано вплив геометричних і фізико-механічних характеристик покриття і підкладки, а також умов закріплення торців циліндра на залишковий напружений стан системи тіло–багатошарове покриття. Виявлено умови, за яких можуть виникати небезпечні радіальні, колові та осьові напруження. Отриманий замкнений аналітичний розв'язок є відносно простим і зручним для практичного використання.

Із застосуванням запропонованої у першому розділі математичної моделі з УГУ теплообміну тіл із середовищем через тонкі багатошарові покриття та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям за конвективного теплообміну зі зовнішнім середовищем.

Отримано розрахункові формули для визначення температури в підкладці та в довільному шарі покриття. Знайдено також асимптотики розв'язку для великих та малих значень часу.

Ефективність запропонованого підходу показано порівнянням результатів, одержаними при його застосуванні, з результатами розв'язку тестової задачі нагрівання циліндра з тришаровим покриттям.

На основі використання УГУ термомеханічного спряження тіла із середовищем через тонке покриття отримано аналітичний розв’язок задачі термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Досліджено вплив геометричних і термомеханічних характеристик покриття, умов закріплення торців циліндричної підкладки та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термопружний стан системи тіло–багатошарове покриття за конвективного нагрівання. Виявлено, що визначальними теплофізичними параметрами впливу на напружений стан циліндра є ефективні теплофізичні характеристики покриття – зведені термоопір і теплоємність та інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття, а визначальними термомеханічними параметрами – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення тіла. Для випадку покрить малої жорсткості отримано наближені формули, які є зручними для якісного оцінювання усталених напружень в системі.

РОЗДІЛ 5

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ

В даному розділі розвинуто метод безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги й суцільності в напруженнях одновимірних задач теорії пружності та термопружності для циліндричних тіл з неоднорідними трансверсально ізотропними покриттями. Вихідні задачі зведено до інтегральних рівнянь, які розв’язано методом послідовних наближень. Ефективність підходу проілюстровано на тестових прикладах розв’язування задачі Ляме та задачі рівномірного нагріву для порожнистого ортотропного циліндра з коефіцієнтами деформації та коефіцієнтами температурного розширення, які змінюються за степеневою залежністю уздовж радіальної координати. Проаналізовано вплив анізотропії і вибору початкового наближення на швидкість збіжності ітераційного методу розрахунку.

Основні результати, наведені в розділі, відображено у щести публікаціях автора [278, 294, 508, 512, 515, 517].

5.1. Узагальнення методики розрахунку термонапруженого стану для неоднорідного циліндра на випадок ортотропних властивостей матеріалу

Аналітичні розв’язки задач теорії пружності для неоднорідних анізотропних циліндричних тіл з деякими заданими законами змін пружних характеристик отримані в [105, 136, 137, 180-182, 322, 362, 387, 442, 445, 470, 548], термопружності – в [320, 321, 375, 536, 558, 562]. Аналітично-числові підходи до розв’язування таких задач викладено в [365], для анізотропних циліндрів з довільною неоднорідністю пружних властивостей – в [22, 23, 61], для температурно-залежних властивостей в [59, 399, 532, 537]. Для радіально неоднорідних анізотропних циліндрів у роботі [327] наведено підхід, який базується на розв'язуванні системи рівнянь для переміщень і функцій напружень.

Для випадку радіально-неоднорідних ізотропних циліндричних тіл у роботах Е.О. Леонової та В.М. Панферова [133, 171] застосовано зведення співвідношень вихідної задачі до інтегральних рівнянь. Такий підхід для розв'язування одновимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних ізотропних циліндричних тіл був розвинений та узагальнений в рамках методу прямого інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги та сумісності у роботах В.М. Вігака та Б.М. Калиняка [42, 44, 90, 549]. При цьому отримані інтегральні рівняння Вольтерри ефективно розв'язуються методом послідовних наближень [34, 44, 90, 93, 133, 171, 207, 549], квадратурним [91] та методом резольвентного ядра [247, 540, 542]. У подальшому аналогічний підхід із застосуванням інших ключових функцій зі зведенням до інтегрального рівняння Фредгольма був застосований при розв'язуванні такого класу задач у роботах X.-L. Peng та X.-F. Lee [430, 472-474].

Узагальнимо методику, розроблену у роботах В.М. Вігака та Б.М. Калиняка, на випадок ортотропного тіла.

5.1.1. Постановка задачі

Розглянемо довгий порожнистий круговий циліндр ($R_1 \le r \le R_2$) у циліндричних координатах (r, φ, z). Вважатимемо, що циліндр є ортотропний і неперервно неоднорідний за радіальною координатою. За умови осесиметричної плоскої деформації зсувні деформації та напруження відсутні, два з трьох рівнянь рівноваги тотожно задовольняються, а третє за наявності масових сил F_{**} має такий вигляд:

$$\rho \frac{d\sigma_{rr}}{d\rho} + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\rho F_*, \qquad \rho \in (\rho_1,\ 1). \tag{5.1}$$

Тут $\rho = r / R_2$, $\rho_1 = R_1 / R_2$, σ_{rr} та $\sigma_{\varphi\varphi}$ – радіальна та колова компоненти нормальних напружень у циліндрі, $F_* = R_2 F_{**}$.

Фізичні співвідношення термопружності мають такий вигляд (вважаємо заданою зміну температури $\overline{t}(\rho)$):

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= a_{11}\sigma_{rr} + a_{12}\sigma_{\varphi\varphi} + a_{13}\sigma_{zz} + \beta_r\overline{t}\,,\\
e_{\varphi\varphi} &= a_{12}\sigma_{rr} + a_{22}\sigma_{\varphi\varphi} + a_{23}\sigma_{zz} + \beta_\varphi\overline{t}\,,\\
e_{zz} &= a_{13}\sigma_{rr} + a_{23}\sigma_{\varphi\varphi} + a_{33}\sigma_{zz} + \beta_z\overline{t}\,,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

де σ_{zz} – осьові напруження, e_{ll} – діагональні компоненти тензора деформацій, β_l – коефіцієнти лінійного температурного розширення ($l = r,\varphi,z$), a_{ij} – коефіцієнти деформації, які можуть бути записані через інженерні постійні так:

$$a_{11} = \frac{1}{E_r},\ a_{22} = \frac{1}{E_\varphi},\ a_{33} = \frac{1}{E_z},\ a_{12} = -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_\varphi}\ ,\ a_{13} = -\frac{\nu_{rz}}{E_z}\ ,\ a_{23} = -\frac{\nu_{\varphi z}}{E_z}\ ,$$

де E_z, E_r та E_φ – модулі Юнга вздовж осьового, радіального та колового напрямків відповідно, ν_{lj} – коефіцієнт Пуассона, що характеризує стискання у напрямку *l*-ої координати при розтягуванні в напрямку *j*-ої координати.

Рівняння сумісності для плоского одновимірного випадку має вигляд

$$\rho\frac{de_{\varphi\varphi}}{d\rho} - e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = 0\,. \tag{5.3}$$

Припускаємо, що на внутрішній поверхні $\rho = \rho_1$ і на зовнішній $\rho = 1$ задано рівномірно розподілені нормальні напруження:

$$\sigma_{rr}(\rho_1) = -p_1, \qquad \sigma_{rr}(1) = -p_2\,. \tag{5.4}$$

Будемо розглядати два випадки плоско-деформованого стану:

(i) задані зусилля на торцях циліндра

$$\int_{\rho_1}^{1}\rho\sigma_{zz}d\rho = p\,, \tag{5.5.1}$$

(ii) торці циліндра фіксовані від осьових переміщень

$$e_{zz} \equiv 0\,. \tag{5.5.2}$$

5.1.2. Зведення до системи інтегральних рівнянь

Використовуючи підхід, запропонований у [42, 44, 90, 549], зведемо вихідну систему рівнянь до системи інтегральних рівнянь для радіальної компоненти тензора напружень σ_{rr} і нової ключової функції – сумарного напруження σ

$$\sigma = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}. \tag{5.6}$$

Використовуючи співвідношення (5.2) і рівняння (5.1), подамо рівняння суцільності (5.3) в напруженнях σ і σ_r

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\overline{\beta}_1 \sigma + \frac{a_{23}}{a_{33}} e_{zz} + \overline{\chi}_1 \overline{t} \right) = \sigma_{rr} \left(\overline{\beta}_3 + \rho \frac{d\overline{\beta}_2}{d\rho} \right) + \overline{\beta}_4 e_{zz} + \overline{\chi}_2 \overline{t} - \rho \overline{\beta}_2 F_*, \tag{5.7}$$

де $\overline{\beta}_1 = a_{22} - \dfrac{a_{23}^2}{a_{33}}$, $\overline{\beta}_2 = a_{22} - a_{12} + \dfrac{a_{23}(a_{13} - a_{23})}{a_{33}}$, $\overline{\beta}_3 = a_{11} - a_{22} - \dfrac{a_{13}^2 - a_{23}^2}{a_{33}}$,

$$\overline{\beta}_4 = \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{33}}, \qquad \overline{\chi}_1 = \beta_\varphi - \frac{a_{23}}{a_{33}} \beta_z, \qquad \overline{\chi}_2 = \beta_r - \beta_\varphi - \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{33}} \beta_z.$$

Інтегруючи (5.7), отримаємо вираз для сумарних напружень σ через радіальні напруження σ_{rr}:

$$\sigma = \overline{\beta}_1^{-1} \left(\overline{A} + \xi_1 e_z - \overline{\chi}_1 \overline{t} + \xi_2 + \int_{\rho_1}^{\rho} \left[\sigma_{rr} \left(\overline{\beta}_3 \zeta^{-1} + \frac{d\overline{\beta}_2}{d\zeta} \right) - \overline{\beta}_2 F_* \right] d\zeta \right), \tag{5.8}$$

де $\xi_1 = \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho} \overline{\beta}_4 \zeta^{-1} d\zeta - \frac{a_{23}}{a_{33}}$, $\qquad \xi_2 = \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho} \overline{\chi}_2 \overline{t}\, \zeta^{-1} d\zeta$.

Подамо рівняння рівноваги (5.1), враховуючи (5.6), у вигляді

$$\frac{d\left(\rho^2 \sigma_{rr}\right)}{d\rho} = \rho\sigma - \rho^2 F_*. \tag{5.9}$$

Інтегрування (5.9) з урахуванням першої з граничних умов (5.4) дає

$$\rho^2\sigma_{rr}(\rho) = -\rho_1^2 p_1 + \int_{\rho_1}^{\rho} \zeta(\sigma - \zeta F_*)d\zeta \,, \tag{5.10}$$

звідки при $\rho = 1$ з урахуванням другої з граничних умов (5.4) отримуємо інтегральну умову рівноваги

$$\int_{\rho_1}^{1} \sigma\rho d\rho = \rho_1^2 p_1 - p_2 + \int_{\rho_1}^{1} F_*\rho^2 d\rho \,. \tag{5.11}$$

Таким чином, визначення ключових функцій σ, σ_{rr} і константи $\overline{A}$ зведено до розв'язування системи інтегральних рівнянь (5.8), (5.10) та (5.11).

Якщо в рівнянні (5.8) замінити радіальні напруження σ_{rr} на сумарні σ за допомогою формули (5.10) і використати умову (5.11), то отримаємо таке інтегральне рівняння Вольтерри другого роду тільки для ключової функції σ:

$$\sigma - \overline{\beta}_1^{-1}\int_{\rho_1}^{\rho} \mathrm{K}(\rho,\zeta)\sigma d\zeta = \overline{\beta}_1^{-1}\left(\overline{A} + \xi_1 e_{zz} + \overline{F}\right), \tag{5.12}$$

де $$\mathrm{K}(\rho,\zeta) = \zeta\left(\varphi_*(\rho) - \varphi_*(\zeta)\right), \quad \varphi_*(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\zeta^2}\left(\overline{\beta}_3\zeta^{-1} + \frac{d\overline{\beta}_2}{d\zeta}\right)d\zeta \,,$$

$$\overline{F}(\rho) = -\overline{\chi}_1\overline{t} + \xi_2 - \rho_1^2 p_1\varphi_*(\rho) - \int_{\rho_1}^{\rho}\left[\overline{\beta}_2 F_* + \zeta^2\left(\varphi_*(\rho) - \varphi_*(\zeta)\right)F_*\right]d\zeta \,.$$

Слід зазначити, що рівняння (5.10) не залежить від фізичних співвідношень моделі, а рівняння (5.12) збігається з відповідним інтегральним рівнянням для ключової функції σ, наведеним в [90, 549] для випадку ізотропного матеріалу циліндра.

Сталу інтегрування $\overline{A}$ та осьову деформацію e_{zz} у випадку (і) визначаємо підстановкою (5.8), (5.10) в умову рівноваги (5.11) і в співвідношення

$$e_{zz}\int_{\rho_1}^{1} a_{33}^{-1}\rho d\rho + \int_{\rho_1}^{1} a_{33}^{-1}\left((a_{13} - a_{23})\sigma_{rr} - a_{23}\sigma - \beta_z\overline{t}\right)\rho d\rho = p \,, \tag{5.13}$$

яке отримуємо з умови (5.5.1) і третього зі співвідношень (5.2).

Отже,

$$\overline{A} = \frac{1}{\delta^*}\left(G_{22}^*\tilde{b}_1 - G_{12}^*\tilde{b}_2\right), \qquad e_{zz} = \frac{1}{\delta^*}\left(G_{11}^*\tilde{b}_2 - G_{21}^*\tilde{b}_1\right), \tag{5.14}$$

де $\delta^* = 2(G_{11}^* G_{22}^* - G_{12}^* G_{21}^*)$, $\quad G_{11}^* = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_1^{-1}\rho d\rho$, $\quad G_{12}^* = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_1^{-1}\xi_1\rho d\rho$,

$$G_{21}^* = \frac{1}{2}\int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_5^{-1}\rho d\rho, \quad G_{22}^* = \frac{1}{2}\int_{\rho_1}^{1} a_{33}^{-1}\left(1 - a_{23}\overline{\beta}_1^{-1}\xi_1\right)\rho d\rho,$$

$$\tilde{b}_1 = \tilde{\tilde{b}}_1 - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_1^{-1}\rho \int_{\rho_1}^{\rho} K(\rho,\zeta)\sigma d\zeta d\rho, \ \tilde{\tilde{b}}_1 = \rho_1^2 p_1 - p_2 - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_1^{-1}\rho\overline{F} d\rho + \int_{\rho_1}^{1} \rho^2 F_* d\rho,$$

$$\tilde{b}_2 = \tilde{\tilde{b}}_2 - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_4\rho^{-1}\int_{\rho_1}^{\rho} \zeta\sigma d\zeta d\rho - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_5^{-1}\rho\int_{\rho_1}^{\rho} \mathrm{K}(\rho,\zeta)\sigma d\zeta d\rho, \quad \overline{\beta}_5 = a_{23} - \frac{a_{22}a_{33}}{a_{23}},$$

$$\tilde{\tilde{b}}_2 = p + \rho_1^2 p_1 \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_4\rho^{-1} d\rho + \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_4\rho^{-1}\int_{\rho_1}^{\rho} \zeta^2 F_* d\zeta d\rho - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_5^{-1}\rho\overline{F} d\rho + \int_{\rho_1}^{1} \rho a_{33}^{-1}\beta_z \overline{t} d\rho.$$

Для випадку (ii) константу $\overline{A}$ визначаємо підстановкою (5.8) і (5.10) в умову (5.11):

$$\overline{A} = \frac{\tilde{b}_1}{2G_{11}^*}. \tag{5.15}$$

Слід зазначити, що такий підхід до розв’язування задач теорії пружності та термопружності для ортотропних циліндричних тіл зведенням до відповідних інтегральних рівнянь розвинуто на випадок динамічних задач у роботі Б.М. Калиняка [92] та для дво– та тривимірних задач термопружності – у працях Ю.В. Токового та С.С. Ма [541, 542]. У роботі X.-L. Peng та X.-F. Lee [475] за аналогічного підходу з іншим вибором ключових функцій задачу про обертання неоднорідного ортотропного кругового диску зведено до інтегрального рівняння Фредгольма.

5.1.3. Алгоритм розв’язування

Для розв’язування інтегрального рівняння (5.12) застосовуємо метод простих ітерацій [34, с. 71], побудований на використанні рекурентних співвідношень

$$\sigma_{(k)} = \overline{\beta}_1^{-1} \left(\overline{A}_k + \xi_1 e_{zz}^k + \overline{F} + \int_{\rho_1}^{\rho} \mathrm{K}(\rho,\zeta)\sigma_{(k-1)} d\zeta \right), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.16}$$

з відповідним початковим наближенням.

У випадку (і) сталі $\overline{A}_k$ і e_{zz}^k визначаються формулами

$$\overline{A}_k = \frac{1}{\delta^*}\left(G_{22}^* b_1^k - G_{12}^* b_2^k \right), \quad e_{zz}^k = \frac{1}{\delta^*}\left(G_{11}^* b_2^k - G_{21}^* b_1^k \right),$$

де
$$b_1^k = \tilde{\tilde{b}}_1 - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_1^{-1} \rho \int_{\rho_1}^{\rho} \mathrm{K}(\rho,\zeta)\sigma_{k-1} d\zeta\, d\rho ,$$

$$b_2^k = \tilde{\tilde{b}}_2 - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_4 \rho^{-1} \int_{\rho_1}^{\rho} \zeta \sigma_{(k-1)} d\zeta\, d\rho - \int_{\rho_1}^{1} \overline{\beta}_5^{-1} \rho \int_{\rho_1}^{\rho} \mathrm{K}(\rho,\zeta)\sigma_{(k-1)} d\zeta\, d\rho .$$

Для випадку (іі) зафіксованих торців циліндра $\overline{A}_k = \dfrac{b_1^k}{2G_{11}^*}$, $e_{zz}^k = 0$.

Після визначення напружень σ радіальні напруження σ_{rr} знаходимо за співвідношенням (5.10), колові $\sigma_{\varphi\varphi}$ – з формул (5.6), а осьові σ_{zz} – з третього зі співвідношень (5.2).

Для ізотропного циліндра [44, 90, 549] за нульове наближення при розв’язуванні інтегрального рівняння (5.12) використано значення σ при $\varphi_*(\rho) \equiv 0$. З цього нульового наближення випливають точні аналітичні розв’язки задач теорії пружності та термопружності для однорідних ізотропних і трансверсально ізотропних циліндричних тіл з площиною ізотропії, що співпадає з поперечним перерізом циліндра. На відміну від цих випадків для однорідного ортотропного циліндра $\varphi_*(\rho) \neq 0$. Тому вираз для σ, який випливає з (5.12) при

$\varphi_*(\rho) \equiv 0$, не буде розв'язком відповідних задач для випадку однорідних властивостей матеріалу.

Для побудови альтернативного початкового наближення використаємо розв'язок відповідних задач пружності та термопружності для однорідного ортотропного циліндра.

Цей розв'язок можна отримати з використанням узагальнення подань [23, 104] розв'язку рівнянь рівноваги для цього випадку у вигляді (тут для спрощення запису замінимо індекси «rr», «$\varphi\varphi$», «zz» відповідно індексами «(11)», «(22)», «(33)»)

$$\sigma_{(jj)}(\rho) = \left(\overline{C}_1 + C_1^*\psi_1(\rho)\right)\lambda_{1j}\rho^{d-1} + \left(\overline{C}_2 + C_2^*\psi_2(\rho)\right)\lambda_{2j}\rho^{-d-1} + \\ + \left(\overline{\Lambda}_1 \frac{B_{1j}}{B_{11}} - \overline{\Lambda}_j\right)\overline{t} + \zeta_j e_{zz}^0 + \tilde{F}_{*j}(\rho), \quad j = 1,2,3, \tag{5.17}$$

де $$d = \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}}, \; \psi_1(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \overline{t}\,\zeta^{-d} d\zeta, \; \psi_2(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \overline{t}\,\zeta^{d} d\zeta, \; C_1^* = \frac{\overline{\Lambda}_1 d - \overline{\Lambda}_2}{2B_{11}d},$$

$$C_2^* = \frac{\overline{\Lambda}_1 d + \overline{\Lambda}_2}{2B_{11}d}, \quad \overline{\Lambda}_j = B_{j1}\beta_r + B_{j2}\beta_\varphi + B_{j3}\beta_z,$$

$$\lambda_{1j} = B_{1j}d + B_{2j}, \quad \lambda_{2j} = -B_{1j}d + B_{2j},$$

$$\zeta_j = \begin{cases} B_{13} - \dfrac{\mu_{1j}B}{1-d^2}, & d \neq 1 \\ s_j \ln\rho + s_{j+3}, & d = 1 \end{cases}, \quad s_j = -\frac{B\mu_{1j}}{2}, \quad s_{j+3} = \frac{\mu_{2j}B}{4} + B_{3j},$$

$$\mu_{1j} = B_{1j} + B_{2j}, \quad \mu_{2j} = -B_{1j} + B_{2j}, \quad B = \frac{B_{13} - B_{23}}{B_{11}}, \qquad ,$$

$$\tilde{F}_{*j}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2F_*\rho\mu_{1j}}{B_{11}(d^2-4)}, & d \neq 2 \\ \dfrac{F_*\rho}{B_{11}}\left(-\dfrac{(B_{2j}+2B_{1j})\ln\rho}{4} + \dfrac{B_{2j}-2B_{1j}}{16}\right), & d = 2 \end{cases} \qquad j = 1,2,3,$$

B_{kl} – коефіцієнти пружності для ортотропного циліндра [22]:

$$B_{11}=E_r\left(1-\nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}\right)\mathrm{N}^{-1},\qquad B_{12}=B_{21}=E_r\left(\nu_{r\varphi}+\nu_{rz}\nu_{z\varphi}\right)\mathrm{N}^{-1},$$

$$B_{13}=B_{31}=E_r\left(\nu_{rz}+\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z}\right)\mathrm{N}^{-1},\ B_{23}=B_{32}=E_\varphi\left(\nu_{\varphi z}+\nu_{\varphi r}\nu_{rz}\right)\mathrm{N}^{-1},$$

$$B_{22}=E_\varphi\left(1-\nu_{rz}\nu_{zr}\right)\mathrm{N}^{-1},\qquad B_{33}=E_z\left(1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}\right)\mathrm{N}^{-1},$$

$$\mathrm{N}=1-2\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z}\nu_{zr}-\nu_{rz}\nu_{zr}-\nu_{z\varphi}\nu_{\varphi z}-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}.$$

Невідомі сталі $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ та e_{zz}^0 визначаємо з граничних умов (5.4) та (5.5):

$$\bar{C}_1=\frac{\rho_1^{d+1}\tilde{p}_1-\tilde{p}_2-\Gamma_1 e_{zz}^0}{\lambda_{11}\left(1-\rho_1^{2d}\right)},\tag{5.18}$$

$$\bar{C}_2=\frac{\rho_1^{d+1}\left(-\tilde{p}_1+\rho_1^{d-1}\tilde{p}_2-\Gamma_2 e_{zz}^0\right)}{\lambda_{21}\left(1-\rho_1^{2d}\right)},\tag{5.19}$$

$$\mathrm{e}_{zz}^0=\begin{cases}\bar{\varepsilon}_3^{-1}\left(-\bar{\varepsilon}_1\tilde{p}_1+\bar{\varepsilon}_2\tilde{p}_1+\dfrac{1-\rho_1^{2d}}{1-\rho_1^{d+1}}\tilde{p}\right) & \text{для випадку (i)},\\ 0, & \text{для випадку (ii)},\end{cases}\tag{5.20}$$

де $\qquad \tilde{p}_1=p_1+\tilde{F}_{*1}(\rho_1)$, $\quad \tilde{p}_2=p_2+C_1^*\lambda_{11}\psi_1(1)+C_2^*\lambda_{21}\psi_2(1)+\tilde{F}_{*1}(1)$,

$$\tilde{p}=p-C_1^*\lambda_{13}\int_{\rho_1}^{1}\psi_1(\rho)\rho^d d\rho-C_2^*\lambda_{23}\int_{\rho_1}^{1}\psi_2(\rho)\rho^{-d}d\rho-\left(\bar{\Lambda}_1\frac{B_{13}}{B_{11}}-\bar{\Lambda}_3\right)\int_{\rho_1}^{1}\bar{t}\rho d\rho-\int_{\rho_1}^{1}\tilde{F}_{*3}\rho d\rho,$$

$$\bar{\varepsilon}_1=\tilde{Z}_{1d}\rho_1^{d+1}-\tilde{Z}_2\Gamma_3,\quad \bar{\varepsilon}_2=\tilde{Z}_{1d}-\tilde{Z}_2\Gamma_3\rho_1^{d-1},$$

$$\bar{\varepsilon}_3=-\tilde{Z}_{1d}\Gamma_1-\tilde{Z}_2\Gamma_2\Gamma_3+\frac{(1-\rho_1^2)(1-\rho_1^{2d})}{2(1-\rho_1^{d+1})}\Gamma_4,$$

$$\Gamma_1=\begin{cases}\zeta_1(1-\rho_1^{d+1}), & d\neq 1,\\ (1-\rho_1^2)(s_4-s_1\omega), & d=1,\end{cases}\qquad \Gamma_2=\begin{cases}-\zeta_1(1-\rho_1^{d-1}), & d\neq 1,\\ s_1\ln\rho_1, & d=1,\end{cases}$$

$$\Gamma_3=\begin{cases}\dfrac{1-\rho_1^{-d+1}}{(d-1)(1-\rho_1^{-d-1})}, & d\neq 1,\\ -\omega, & d=1,\end{cases}\qquad \Gamma_4=\begin{cases}\zeta_3, & d\neq 1,\\ s_6-s_3\left(\omega+\dfrac{1}{2}\right), & d=1,\end{cases}$$

$$\tilde{Z}_j = \frac{\lambda_{j3}}{\lambda_{j1}}, \quad j = 1,2, \quad \tilde{Z}_{1d} = \tilde{Z}_1 \big/ (1+d), \quad \omega = \rho_1^2 \ln \rho_1 \big/ \left(1 - \rho_1^2\right).$$

Таким чином, як початкове наближення використовуємо розв'язок

$$\begin{aligned} \sigma_{(0)} = \left(\bar{C}_1 + C_1^* \psi_1\right)\left(\lambda_{11} + \lambda_{12}\right)\rho^{d-1} + \left(\bar{C}_2 + C_2^* \psi_2\right)\left(\lambda_{21} + \lambda_{22}\right)\rho^{-d-1} + \\ + \left(\bar{\Lambda}_1 \frac{B_{12}}{B_{11}} - \bar{\Lambda}_2\right)\bar{t} + (\zeta_1 + \zeta_2) e_{zz}^0 + \tilde{F}_{*1} + \tilde{F}_{*2}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

де деформація e_{zz}^0 та величини $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ визначаються формулами (5.18)-(5.20), в яких механічні і теплові характеристики матеріалу приймаються залежними від радіальної координати.

5.1.4. Тестова задача для силового навантаження

Як тестовий приклад розглянемо задачу Ляме для циліндра з фіксованими торцями під дією внутрішнього тиску $\gamma_m = \dfrac{\gamma_{11} + m\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$ ($\gamma_{ij} = a_{ij}^0 - \dfrac{a_{i3}^0 a_{j3}^0}{a_{33}^0}$, $\bar{t} = 0$, $F_* = 0$), коефіцієнти деформації матеріалу якого змінюються за степеневим законом пропорційно до деякого степеня радіальної змінної ρ: $a_{ij} = a_{ij}^0 \rho^{-m}$, а модулі пружності, є, відповідно, пропорційні ρ^m, де a_{ij}^0 – задані сталі, а m – довільне дійсне число. Точний розв'язок задачі з такими коефіцієнтами деформації наведено у [136, 137]:

$$\sigma_{rr} = -p_1 \rho_1 \frac{\rho^{y_1 - 1} - \rho^{y_2 - 1}}{\rho_1^{y_1} - \rho_1^{y_2}}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1 \rho_1 \frac{y_1 \rho^{y_1 - 1} - y_2 \rho^{y_2 - 1}}{\rho_1^{y_1} - \rho_1^{y_2}},$$

$$\sigma = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1 \rho_1 \frac{(y_1 + 1)\rho^{y_1 - 1} - (y_2 + 1)\rho^{y_2 - 1}}{\rho_1^{y_1} - \rho_1^{y_2}}, \tag{5.22}$$

де

$$y_{1,2} = 0.5\left(m \pm \sqrt{m^2 + 4\frac{\gamma_{11} + m\gamma_{12}}{\gamma_{22}}}\right), \qquad \gamma_{ij} = a_{ij}^0 - \frac{a_{i3}^0 a_{j3}^0}{a_{33}^0}, \qquad i, j = 1,2. \tag{5.23}$$

У табл. 5.1 наведено результати розрахунку для випадку $\rho_1 = 0.5$, $\nu_{r\varphi} = \nu_{\varphi z} = \nu_{rz} = 0.1$, $E_r = E_{r0}\rho^m$, $E_\varphi = E_z = E_{\varphi 0}\rho^m$ для значень $E_\varphi / E_r = 1.0, 0.1, 10$ і $m = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$. У стовпцях подано нульове, перше і друге наближення, розраховані за рекурентними формулами (5.16) значень безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}_{(k)}(\rho) = \sigma_{(k)}(\rho) / \left(p_1\rho_1^2\right)$ ($k = 0,1,2$) на поверхнях циліндра $\rho = \rho_1$ і $\rho = 1$ для початкових наближень за формулою (5.21) і за формулою

$$\sigma_{(0)} = \frac{p_1\rho_1^2}{2G_{11}^*\bar{\beta}_1}, \tag{5.24}$$

яка випливає з (5.16) при $\varphi_*(\rho) \equiv 0$.

На рис. 5.1 наведено залежність відносної похибки обчислень для другого наближення від показника степеня m при виборі нульового наближення за формулами (5.21) та (5.24) у випадку $E_\varphi / E_r = 10$.

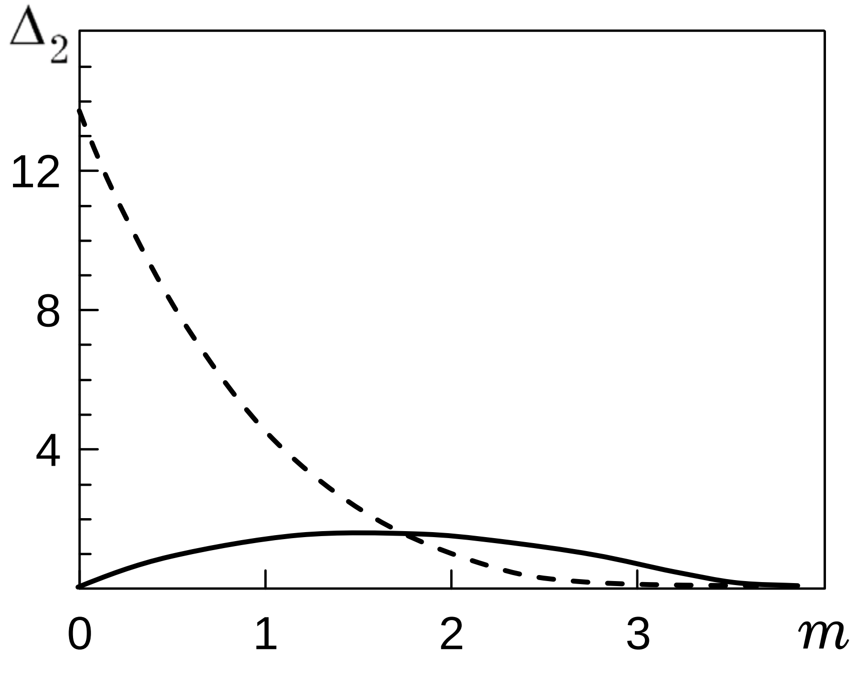


Рис. 5.1. Похибка розрахунку для другого наближення $\Delta_2 = (\sigma_2(1) - \sigma(1)) / \sigma(1) \cdot 100\%$ залежно від показника степеня m для нульових наближень за формулою (5.21) (суцільна крива) та за формулою (5.24) (штрихова крива)

Таблиця 5.1

Порівняння точного і наближеного розв'язків задачі пружності

M	E_{φ}/E_r	точний розв'язок $\tilde{\sigma}(\rho_1)$ – формула (5.22)	$\tilde{\sigma}_{(0)}(\rho_1)$, $\tilde{\sigma}_{(1)}(\rho_1)$, $\tilde{\sigma}_{(2)}(\rho_1)$		точний розв'язок $\tilde{\sigma}(1)$ – формула (5.22)	$\tilde{\sigma}_{(0)}(1)$, $\tilde{\sigma}_{(1)}(1)$, $\tilde{\sigma}_{(2)}(1)$	
			$\tilde{\sigma}_{(0)}(\rho_1)$ – формула (5.21)	$\tilde{\sigma}_{(0)}(\rho_1)$ – формула (5.24)		$\tilde{\sigma}_{(0)}(1)$ – формула (5.21)	$\tilde{\sigma}_{(0)}(1)$ – формула (5.24)
0	1.0	2.667	2.667	2.667	2.667	2.667	2.667
	0.1	1.864	1.864	2.667 1.886 1.865	2.863	2.863	2.667 2.853 2.862
	10	8.435	8.435	2.667 9.696 7.999	1.515	1.515	2.667 0.992 1.723
0.1	1.0	2.459	2.667 2.460 2.459	2.555 2.460 2.459	2.763	2.667 2.762 2.763	2.739 2.762 2.763
	0.1	1.665	1.864 1.673 1.665	2.555 1.691 1.666	2.963	2.862 2.959 2.963	2.739 2.951 2.963
	10	8.170	8.435 8.116 8.188	2.555 9.359 7.772	1.579	1.515 1.603 1.571	2.738 1.069 1.776
0.5	1.0	1.673	2.667 1.692 1.673	2.147 1.680 1.673	3.170	2.667 3.159 3.169	3.037 3.166 3.169
	0.1	0.916	1.864 0.964 0.919	2.147 0.967 0.919	3.388	2.862 3.360 3.387	3.037 3.363 3.387
	10	7.139	8.435 5.910 7.204	2.147 8.062 5.869	1.859	1.515 1.973 1.822	3.037 1.406 2.012
1.0	1.0	0.787	2.667 0.855 0.790	1.714 0.816 0.788	3.731	2.667 3.685 3.729	3.429 3.714 3.730
	0.1	0.082	1.864 0.198 0.091	1.714 0.169 0.088	3.972	2.862 3.891 3.965	3.429 3.919 3.968
	10	5.913	8.435 5.555 5.998	1.714 5.552 5.760	2.264	1.515 2.472 2.207	3.429 1.894 2.367
4.0	1.0	-2.582	2.667 -2.039 -2.461	0.381 -2.279 -2.495	8.204	2.667 7.376 8.075	5.095 7.819 8.142
	0.1	-2.892	1.864 -2.368 -2.810	0.381 -2.577 -2.845	8.499	2.862 7.587 8.342	5.095 8.013 8.412
	10	0.168	8.435 0.215 0.169	0.381 0.169 0.168	5.234	1.515 5.167 5.234	5.095 5.232 5.234

Аналіз отриманих результатів показує, що у випадку ізотропії ($E_\varphi = E_r$) нульове наближення (5.24) завжди є кращим, ніж наближення (5.21). Причому при $0 < m \le 0.5$ другі наближення практично співпадають з точним розв'язком для обох випадків, а при $m > 0.5$ різниця в ефективності стає більш істотною.

Для випадку $E_\varphi < E_r$ при малих $m < 0.5$ збіжність є дещо кращою при використанні нульового наближення (5.21), а при $m > 0.5$ – при використанні нульового наближення (5.24), хоча в цілому вони показують приблизно однакову швидкість збіжності.

Для випадку $E_\varphi > E_r$ (див. рис. 5.1) при $m < 1.65$ збіжність є кращою при використанні формули (5.21) як нульового наближення, а при $m > 1.65$ – при використанні нульового наближення (5.24). Причому зі зменшенням m різниця в ефективності суттєво зростає.

Таким чином, за нульове наближення для слабо неоднорідного матеріалу циліндра слід використовувати формулу (5.21), а для слабо анізотропного ефективнішим є застосування формули (5.24).

5.1.5. Тестова задача для теплового навантаження

Як тестовий приклад розглянемо задачу рівномірного нагріву циліндра $\overline{t} = \text{const}$ з фіксованими торцями з вільними від зовнішніх навантажень бічних поверхонь ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $F_* = 0$), для якого коефіцієнти деформації і коефіцієнти температурного розширення змінюються за степеневим законом пропорційно до деякого степеня радіальної координати ρ: $a_{ij} = a_{ij}^0 \rho^{-m}$, $\beta_l = \beta_l^0 \rho^s$ ($l = r, \varphi, z$), а модулі пружності, відповідно, пропорційні до ρ^m, де a_{ij}^0, β_l^0 – задані постійні, а m, s – довільні дійсні числа. Точний розв'язок задачі з такими коефіцієнтами деформації і температурного розширення, отримано з використанням функції напружень [138, с. 187], має вигляд:

$$\sigma_{rr} = \overline{F}_1 \left(Z_2^* \rho^{y_1 - 1} - Z_1^* \rho^{y_2 - 1} + \rho^{m+s} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \overline{F}_1 \left(Z_2^* y_1 \rho^{y_1 - 1} - Z_1^* y_2 \rho^{y_2 - 1} + (m + s + 1) \rho^{m+s} \right),$$

$$\sigma = \overline{F}_1 \left(Z_2^* (1 + y_1) \rho^{y_1 - 1} - Z_1^* (1 + y_2) \rho^{y_2 - 1} + (m + s + 2) \rho^{m+s} \right), \quad (5.25)$$

$$\text{де}\qquad \overline{F}_1=\frac{\beta_r^0-(1+s)\beta_\varphi^0-\dfrac{a_{13}^0-(1+s)a_{23}^0}{a_{33}^0}\beta_z^0}{\gamma_{22}(1+m+ms+s^2+2s)-\gamma_{12}m-\gamma_{11}}\overline{t}\,,\quad Z_j^*=\frac{\rho_1^{y_j-1}-\rho_1^{m+s}}{\rho_1^{y_1-1}-\rho_1^{y_2-1}},\ j=1,2\,,$$

а $y_{1,2}$ і γ_{ij} визначаються формулами (5.23).

Таблиця 5.2

Порівняння точного і наближеного розв'язків задачі термопружності

S	M	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho_1)$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(1)$	M	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho_1)$	$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(1)$
0	0	-0.2494 -0.2496	0.1576 0.1576	1.0	-0.1414 -0.1421	0.1420 0.1426
0.5		-0.1619 -0.1620	0.1148 0.1148		-0.0924 -0.0929	0.1041 0.1044
1.0		-0.0996 -0.0997	0.0791 0.0792		-0.0573 -0.0576	0.0721 0.0724
5.0		0.0394 0.0394	-0.0693 -0.0693		0.0240 0.0242	-0.0650 -0.0654
0	0.5	-0.1882 -0.1887	0.1499 0.1501	5.0	-0.0122 -0.0128	0.0874 0.0892
0.5		-0.1226 -0.1229	0.1095 0.1097		-0.0081 -0.0085	0.0657 0.0670
1.0		-0.0757 -0.0759	0.0757 0.0758		-0.0051 -0.0054	0.0467 0.0475
5.0		0.0308 0.0309	-0.0673 -0.0674		0.0025 0.0027	-0.0485 -0.0491

У табл. 5.2 подано результати розрахунку для випадку $\rho_1=0.5$, $\nu_{r\varphi}=0.2$, $\nu_{\varphi z}=0.1$, $\nu_{rz}=0.3$, $E_r=E_r^0\rho^m$, $E_\varphi=E_\varphi^0\rho^m$, $E_z=E_z^0\rho^m$, $4E_r^0=2E_\varphi^0=15E_z^0$, $4\beta_r^0=\beta_\varphi^0=8\beta_z^0$ для різних значень m і s.

У стовпцях наведено значення безрозмірних колових напружень $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho)=\sigma_{\varphi\varphi}(\rho)\big/(\beta_r^0E_r^0\overline{t})$ на поверхнях циліндра $\rho=\rho_1$ і $\rho=1$, розраховані за рекурентними формулами для другого наближення (верхній рядок) і за точними формулами (5.25) (нижній рядок). Результати показують добру точність вже для другого наближення.

5.2. Методика розрахунку термонапруженого стану циліндра з трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини

5.2.1. Постановка задачі

Розглянемо довгий круговий циліндр ($0 \le r \le R_{\text{Т}}$) з фіксованими торцями, з шаром покриття постійної товщини ($R_{\text{Т}} \le r \le R_{\text{П}}$) у циліндричних координатах ($r,\ \varphi,\ z$). Індекси т і п відносяться до підкладки (тіла) і покриття, відповідно. Вважаємо, що підкладка є ізотропною з незалежними від температури пружними властивостями (але з температурно залежними коефіцієнтами теплового розширення), а покриття є трансверсально анізотропним і неоднорідним в радіальному напрямі.

За умови осесиметричної плоскої деформації зсувні деформації і напруження відсутні, два з трьох рівнянь рівноваги тотожно задовольняються, а третє за відсутності масових сил має такий вигляд:

$$r\frac{d\sigma_{rr}^{j}}{dr}+\sigma_{rr}^{j}-\sigma_{\varphi\varphi}^{j}=0 \qquad j=\text{Т},\text{П}. \tag{5.26}$$

Фізичні співвідношення термопружності за умови защемленості торців циліндра в осьовому напрямку мають такий вигляд

$$\begin{aligned}
e_{rr}^{j}&=a_{11}^{j}\sigma_{rr}^{j}+a_{12}^{j}\sigma_{\varphi\varphi}^{j}+a_{13}^{j}\sigma_{zz}^{j}+\Phi_{r}^{j}\left(t_{j}\right),\\
e_{\varphi\varphi}^{j}&=a_{12}^{j}\sigma_{rr}^{j}+a_{22}^{j}\sigma_{\varphi\varphi}^{j}+a_{23}^{j}\sigma_{zz}^{j}+\Phi_{\varphi}^{j}\left(t_{j}\right),\\
e_{zz}^{j}&=a_{13}^{j}\sigma_{rr}^{j}+a_{23}^{j}\sigma_{\varphi\varphi}^{j}+a_{33}^{j}\sigma_{zz}^{j}+\Phi_{z}^{j}\left(t_{j}\right)=0, \quad j=\text{Т},\text{П},
\end{aligned} \tag{5.27}$$

де σ_{rr}^{j}, $\sigma_{\varphi\varphi}^{j}$, σ_{zz}^{j} і e_{rr}^{j}, $e_{\varphi\varphi}^{j}$, e_{zz}^{j} позначають діагональні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно, $\Phi_{l}^{j}\left(t\right)=\int_{t_0}^{t}\beta_{l}^{j}\left(t'\right)dt'$ ($l=r,\varphi,z;\ j=\text{Т},\text{П}$) – теплові деформації (тут $\Phi_{l}^{\text{Т}}=\Phi^{\text{Т}}$, $\Phi_{\varphi}^{\text{П}}=\Phi_{z}^{\text{П}}$), β_{l}^{j} – коефіцієнти лінійного теплового розширення як функції абсолютної температури t^{j}), t_0 – початковий температурний розподіл, a_{kl}^{j} – пружні податливості матеріалу підкладки і покриття, які записуються через модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона як

$$a_{11}^{\mathrm{T}} = a_{22}^{\mathrm{T}} = a_{33}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{E_{\mathrm{T}}}, \quad a_{12}^{\mathrm{T}} = a_{13}^{\mathrm{T}} = a_{23}^{\mathrm{T}} = -\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}},$$

$$a_{11}^{\Pi} = \frac{1}{E_{\perp}}, \quad a_{22}^{\Pi} = a_{33}^{\Pi} = \frac{1}{E_{||}}, \quad a_{12}^{\Pi} = a_{13}^{\Pi} = -\frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}}, \quad a_{23}^{\Pi} = -\frac{\nu_{||}}{E_{||}},$$

де E_{T} і ν_{T} – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона тіла, $E_{||}$ і $E_{\perp}$ – модулі Юнга покриття вздовж осьового і радіального напрямку, $\nu_{||}$ і $\nu_{\perp}$ – коефіцієнти Пуассона покриття, які характеризують трансверсальне стискування в поверхні ізотропії $r = \mathrm{const}$, коли тиск прикладений в цій поверхні і в радіальному напрямку, відповідно.

Рівняння суцільності набувають вигляду:

$$r\frac{de_{\varphi\varphi}^{j}}{dr} - e_{rr}^{j} + e_{\varphi\varphi}^{j} = 0 \qquad j = \mathrm{T}, \Pi. \tag{5.28}$$

Припускаємо, що поверхня покриття є вільною від навантажень:

$$\sigma_{rr}^{\Pi}\left(R_{\Pi}\right) = 0. \tag{5.29}$$

Вважаємо, що на поверхні поділу покриття з тілом виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$u_{r}^{\mathrm{T}}\left(R_{\mathrm{T}}\right) = u_{r}^{\Pi}\left(R_{\mathrm{T}}\right), \tag{5.30}$$

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}\left(R_{\mathrm{T}}\right) = \sigma_{rr}^{\Pi}\left(R_{\mathrm{T}}\right), \tag{5.31}$$

де u_{r}^{j} – радіальне переміщення компонента *j*.

5.2.2. Зведення до системи інтегральних рівнянь

Аналогічно до підходу, застосованому у параграфі 5.1.2, зводимо вихідну систему рівнянь рівноваги й суцільності з фізичними співвідношеннями цієї одновимірної задачі для двошарового циліндра до системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду для радіальної компоненти тензора напружень σ_{rr} і сумарного напруження

$$\sigma^j = \sigma_{rr}^j + \sigma_{\varphi\varphi}^j . \tag{5.32}$$

Використовуючи співвідношення (5.27) і рівняння (5.26), подамо рівняння суцільності (5.28) через напруження σ та σ_{rr}

$$\begin{gathered} r\frac{d}{dr}\left(\bar{\beta}_1^j\sigma^j + \left(1-\frac{a_{23}^j}{a_{33}^j}\right)\Phi_z^j\left(t_j\right)\right) = \\ = \sigma_{rr}^j\left(\bar{\beta}_3^j + r\frac{d\bar{\beta}_2^j}{dr}\right) + \Phi_r^j\left(t_j\right) - \left(1+\frac{a_{13}^j - a_{23}^j}{a_{33}^j}\right)\Phi_z^j\left(t_j\right), \quad j = \text{Т}, \text{П}, \end{gathered} \tag{5.33}$$

де

$$\bar{\beta}_1^j = a_{22}^j - \frac{(a_{23}^j)^2}{a_{33}^j}, \ \bar{\beta}_2^j = a_{22}^j - a_{12}^j + \frac{a_{23}^j(a_{13}^j - a_{23}^j)}{a_{33}^j}, \ \bar{\beta}_3^j = a_{11}^j - a_{22}^j - \frac{(a_{13}^j)^2 - (a_{23}^j)^2}{a_{33}^j} .$$

Також, використовуючи співвідношення між коловими деформаціями і радіальними переміщеннями в умовах плоско-деформованого стану $e_{\varphi\varphi}^j = u_r^j / r$ та співвідношення (5.27) і рівняння (5.28), запишемо контактну умову (5.30) через σ і σ_{rr}

$$\begin{gathered} \bar{\beta}_1^{\text{Т}}\sigma^{\text{Т}} - \bar{\beta}_2^{\text{Т}}\sigma_{rr}^{\text{Т}} + \left(1-\frac{a_{23}^{\text{Т}}}{a_{33}^{\text{Т}}}\right)\Phi^{\text{Т}}\left(t_{\text{Т}}\right) = \\ = \bar{\beta}_1^{\text{П}}\sigma^{\text{П}} - \bar{\beta}_2^{\text{П}}\sigma_{rr}^{\text{П}} + \left(1-\frac{a_{23}^{\text{П}}}{a_{33}^{\text{П}}}\right)\Phi_z^{\text{П}}\left(t_{\text{П}}\right) \ \text{при} \ r = R_{\text{Т}}. \end{gathered} \tag{5.34}$$

Інтегруючи (5.33), отримуємо вираз для сумарного напруження σ через радіальні σ_{rr}

$$\sigma^j(r) = \left(\bar{\beta}_1^j\right)^{-1}\left(\bar{A}^j + æ^j(r) + \omega^j(r)\right), \ j = \text{Т},\text{П}, \tag{5.35}$$

де

$$æ^j(r) = \int_{R_q}^{r}\left[\Phi_r^j\left(t_j\right) - \left(1+\frac{a_{13}^j - a_{23}^j}{a_{33}^j}\right)\Phi_z^j\left(t_j\right)\right]\zeta^{-1}d\zeta - \left(1-\frac{a_{23}^j}{a_{33}^j}\right)\Phi_z^j\left(t_j\right),$$

$$\omega^j(r) = \int_{R_q}^{r}\sigma_{rr}^j\left(\bar{\beta}_3^j\zeta^{-1} + \frac{d\bar{\beta}_2^j}{d\zeta}\right)d\zeta , \quad q = \begin{cases} 0, & j = \text{Т}, \\ \text{Т}, & j = \text{П}, \end{cases} \quad R_0 = 0 .$$

Перепишемо рівняння рівноваги (5.26), використовуючи (5.32) у вигляді

$$\frac{d\left(r^2\sigma_{rr}^j\right)}{dr} = r\sigma^j, \quad j = \text{Т},\text{П}. \tag{5.36}$$

Інтегрування (5.36) з урахуванням умови контакту (5.31) дає

$$r^2\sigma_{rr}^j(r) = \int_0^r \sigma\zeta\, d\zeta, \quad j = \text{Т},\text{П}, \tag{5.37}$$

звідки при $r = R_{\text{П}}$, враховуючи граничну умову (5.29), отримаємо інтегральну умову рівноваги

$$\int_0^{R_{\text{П}}} \sigma\zeta\, d\zeta = 0. \tag{5.38}$$

Таким чином, визначення ключових функцій σ та σ_{rr} зведено до розв'язування системи інтегральних рівнянь другого роду (5.35) і (5.37). Невідомі константи $\overline{A}^{\text{Т}}$ і $\overline{A}^{\text{П}}$ визначаються підстановкою (5.35) і (5.37) в умови (5.34) та (5.38):

$$\overline{A}^{\text{Т}} = \frac{D^{\text{Т}} + D^{\text{П}} - \Gamma^{\text{Т}} - \Gamma^{\text{П}} + d^{\text{П}}Q}{d^{\text{Т}} + d^{\text{П}}\left(1 + \overline{\overline{\beta}}_2 d^{\text{Т}}\right)}, \qquad \overline{A}^{\text{П}} = \overline{A}^{\text{Т}}\left(1 + \overline{\overline{\beta}}_2 d^{\text{Т}}\right) - Q, \tag{5.39}$$

де

$$Q = \overline{\overline{\beta}}_2\left(D^{\text{Т}} - \Gamma^{\text{Т}}\right) - \text{æ}^{\text{Т}}(R_{\text{Т}}) - \omega^{\text{Т}}(R_{\text{Т}}), \quad D^j = \int_{R_q}^{R_j} (\overline{\beta}_1^j)^{-1}\left(\left(1 - \frac{a_{23}^j}{a_{33}^j}\right)\Phi_z^j\left(t_j\right) - \text{æ}^j\right) r dr,$$

$$\Gamma^j = \int_{R_m}^{R_j} (\overline{\beta}_1^j)^{-1}\omega^j r dr, \quad d^j = \int_{R_m}^{R_j} \left(\overline{\beta}_1^j\right)^{-1} r dr, \quad \overline{\overline{\beta}}_2 = \left(\overline{\beta}_2^{\text{П}} - \overline{\beta}_2^{\text{Т}}\right) R_{\text{Т}}^{-2}, \quad j = \text{Т},\text{П}.$$

5.2.3. Алгоритм розв'язування

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь (5.35), (5.37) застосовується процедура [34, с. 71], яка ґрунтується на рекурентних співвідношеннях методу простої ітерації

$k = 1, 2, \ldots :$

$$\sigma^j_{(k)} = \left(\overline{\beta}^j_1\right)^{-1}\left[\overline{A}^j_k + æ^j(r) + \omega^j_{k-1}(r)\right], \quad j = \text{Т}, \text{П} \tag{5.40}$$

для сумарних напружень, де константи $\overline{A}^j_k$ визначаємо так:

$$\overline{A}^{\text{Т}}_k = \frac{D^{\text{Т}} + D^{\text{П}} - \Gamma^{\text{Т}}_{k-1} - \Gamma^{\text{П}}_{k-1} + d^{\text{П}}\overline{Q}_{k-1}}{d^{\text{Т}} + d^{\text{П}}\left(1 + \overline{\overline{\beta}}_2 d^{\text{Т}}\right)}, \quad \overline{A}^{\text{П}}_k = \overline{A}^{\text{Т}}_k\left(1 + \overline{\overline{\beta}}_2 d^{\text{Т}}\right) - \overline{Q}_{k-1},$$

$$\overline{Q}_{k-1} = \overline{\overline{\beta}}_2\left(D^{\text{Т}} - \Gamma^{\text{Т}}_{k-1}\right) - æ^{\text{Т}}(R_{\text{Т}}) - \omega^{\text{Т}}_{k-1}(R_{\text{Т}}),$$

$$\Gamma^j_{k-1} = \int\limits_{R_q}^{R_j} (\overline{\beta}^j_1)^{-1}\omega^j_{k-1} r\,dr, \quad \omega^j_{k-1} = \int\limits_{R_q}^{r} \sigma^j_{rr(k-1)}\left(\overline{\beta}^j_3\zeta^{-1} + \frac{d\overline{\beta}^j_2}{d\zeta}\right)d\zeta,$$

і формул для визначення радіальних напружень

$$r^2\sigma^j_{rr(k)}(r) = \int\limits_0^r \sigma^j_{(k)}\zeta\,d\zeta, \quad j = \text{Т}, \text{П}. \tag{5.41}$$

Тоді компоненти тензора напружень $\sigma^j_{\varphi\varphi}$ знаходимо з (5.32), а σ^j_{zz} з останнього зі співвідношень (5.27).

Конструюємо початкову апроксимацію для рівномірного нагрівання ($t_{\text{Т}} = t_{\text{П}} = t$), ґрунтуючись на точному розв'язку відповідної задачі для циліндра з однорідним трансверсально ізотропним покриттям. Його можна отримати підстановкою розв'язків рівнянь рівноваги для ізотропної підкладки і для трансверсально ізотропного покриття в граничну умову (5.29) та контактні умови (5.30), (5.31) з використанням $\sigma^{\text{Т}}_{rr}\big|_{r=0} \ne \infty$ і рівності $e^{\text{Т}}_{zz} \equiv 0$, $e^{\text{П}}_{zz} \equiv 0$

(фіксовані торці). Таким чином, остаточно отримуємо радіальні та колові напруження у циліндрі й покритті у вигляді:

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{1-(R_{\mathrm{T}}/R_{\Pi})^{2d}}{Z_{2d}}\tilde{g} + æ_r\left(1-(R_{\mathrm{T}}/R_{\Pi})^{d-1}\right), \tag{5.42}$$

$$\sigma_{rr}^{\Pi} = \frac{\tilde{g}}{Z_{2d}}\left(\frac{R_{\mathrm{T}}}{r}\right)^{d+1}\left(1-(r/R_{\Pi})^{2d}\right) + æ_r\left(1-(r/R_{\Pi})^{d-1}\right), \tag{5.43}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\Pi} = -\frac{d\tilde{g}}{Z_{2d}}\left(\frac{R_{\mathrm{T}}}{r}\right)^{d+1}\left(1+\left(\frac{r}{R_{\Pi}}\right)^{2d}\right) + æ_r\left(1-d\left(\frac{r}{R_{\Pi}}\right)^{d-1}\right), \tag{5.44}$$

де $æ_r = \dfrac{g_1(d^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}) - g_2(1+\frac{B_{12}}{B_{11}})}{1-d^2}$, $æ_z = (g_1-g_2)\dfrac{B_{12}+B_{23}}{B_{11}(1-d^2)} - g_2$, $d = \sqrt{\dfrac{B_{22}}{B_{11}}}$,

$$g_1 = B_{11}\Phi_{\mathrm{r}}^{\Pi}(t) + 2B_{12}\Phi_{\mathrm{z}}^{\Pi}(t), \quad g_2 = B_{12}\Phi_r^{\Pi}(t) + (B_{22}+B_{23})\Phi_{\mathrm{z}}^{\Pi}(t),$$

$$Z_\zeta = \left(1-\left(\frac{R_{\mathrm{T}}}{R_{\Pi}}\right)^{\zeta}\right)\frac{1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2}{E_{\mathrm{T}}} + \left(\frac{R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{c}}}\right)^{\zeta}\left(\frac{(1-\nu_{\parallel})B_{12}d + B_{22} - \nu_{\parallel}B_{23}}{B_{11}d+B_{12}}\frac{1}{E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}}\right) + \frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}}$$

$$-\left(\frac{(1-\nu_{\parallel})B_{12}d - B_{22} + \nu_{\parallel}B_{23}}{B_{11}d - B_{12}}\right)^{\frac{1-d+\zeta}{1+d}}\frac{1}{E_{\parallel}}, \qquad \zeta = d-1,\ 2d;$$

$$\tilde{g} = \Phi_r^{\Pi}(t) - (1+\nu_{\mathrm{T}})\Phi^{\mathrm{T}}(t) - æ_r Z_{d-1} - \frac{\nu_{\parallel}}{E_{\parallel}}æ_z,$$

B_{kl} – пружні коефіцієнти для трансверсально ізотропного покриття [31, с. 87; 60, с. 54]

$$B_{11} = \bar{\Omega}^{-1}\left(\left(a_{33}^{\Pi}\right)^2 - \left(a_{23}^{\Pi}\right)^2\right), \quad B_{22} = \bar{\Omega}^{-1}\left(a_{11}^{\Pi}a_{33}^{\Pi} - \left(a_{13}^{\Pi}\right)^2\right),$$

$$B_{23} = \bar{\Omega}^{-1}\left(\left(a_{13}^{\Pi}\right)^2 - a_{11}^{\Pi}a_{23}^{\Pi}\right), \quad B_{12} = \bar{\Omega}^{-1}\left(a_{23}^{\Pi} - a_{33}^{\Pi}\right)a_{13}^{\Pi},$$

$$\bar{\Omega} = \left(a_{33}^{\Pi} - a_{23}^{\Pi}\right)\left((a_{23}^{\Pi} + a_{33}^{\Pi)})a_{11}^{\Pi} - 2\left(a_{13}^{\Pi}\right)^2\right).$$

Отже, вибираємо наближені вирази (5.42), (5.43) для $\sigma_{rr,0}^{j}$ ($j = \text{Т}, \text{П}$) як початкові наближення в ітераційному алгоритмі (5.40)-(5.41), приймаючи пружні властивості покриття як функції радіальної координати. Компоненти тензора напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^{j}$ знаходяться як $\sigma_{\varphi\varphi}^{j} = \sigma^{j} - \sigma_{rr}^{j}$, осьові компоненти σ_{zz}^{j} та компоненти тензора деформацій – зі співвідношень Дюгамеля–Неймана (5.27).

Цей підхід до визначення напружено-деформованого стану циліндра з неоднорідним трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини буде використано під час розрахунку процесу накопичення пошкоджень при нагріві підкладки з керамічним покриттям у 6-му розділі.

Висновки до розділу 5

Розвинуто методику розв’язування одновимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів на випадок ортотропних властивостей матеріалу циліндра. Ця методика ґрунтується на безпосередньому інтегруванні вихідних диференціальних рівнянь задачі та відповідному зведенні до інтегральних рівнянь, які розв’язуються методом простої ітерації. Ефективність підходу показано на прикладах розв’язання тестових задач для силового та теплового навантажень циліндра зі степеневою залежністю термомеханічних властивостей. Встановлено вплив неоднорідності та анізотропії на швидкість збіжності ітераційного процесу розв’язування інтегральних рівнянь для різних варіантів початкового наближення. Побудовано алгоритм розв’язування задачі нагріву суцільного ізотропного циліндра з неоднорідним трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини.

РОЗДІЛ 6

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ У КЕРАМІЧНИХ ПОКРИТТЯХ

У даному розділі розвинуто ефективний напіваналітичний підхід для дослідження процесу накопичення пошкоджень у крихких тонких багатошарових і товстих одношарових покриттях під впливом теплових навантажень. Підхід ґрунтується на загальній обчислювальній схемі для визначення параметрів процесу накопичення пошкоджуваності, що включає аналітичний розв'язок відповідної проміжної крайової задачі термопружності. Для тонких багатошарових покрить спрощення в аналізі досягнуто застосуванням математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження підкладки із середовищем через покриття, а для покрить довільної товщини дослідження ґрунтується на застосуванні підходу зі зведенням вихідної задачі термопружності до системи еквівалентних інтегральних рівнянь. Підхід апробовано на прикладах рівномірного нагрівання тонкого тришарового покриття на підкладці з титанового сплаву та одношарового покриття з оксиду алюмінію на основах з титанового сплаву і вольфраму.

Положення цього розділу відображено у шести публікаціях автора [280, 513-517].

6.1. Загальна розрахункова схема

Процес нанесення керамічних покрить на металеві підкладки приводить до формування специфічних мікроструктур у таких крихких покриттях. Характерні риси цих покрить включають технологічно зумовлені пористість, мікротріщини та анізотропію термомеханічних властивостей. Ці чинники разом з істотною різницею коефіцієнтів теплового розширення покрить і підкладок можуть привести до ініціювання процесу накопичення пошкоджень і тріщин лише за теплового навантаження при відсутності механічного.

Адекватний аналіз термічно викликаного накопичення пошкоджень, таким чином, повинен включати додаткову змінну, яка характеризує стан пошкоджень. Це може бути здійснено в термінах континуальної механіки руйнування (КМР). Модель КМР для еволюції пошкоджень у крихких середовищах була запропонована у [461]. Ця модель була модифікована в [523, 524], де була запропонована обчислювальна схема для оцінки накопичення пошкоджень у кераміці з різними типами випадкової мікроструктури

Параметр пошкоджуваності, уведений в континуально-механічну модель, характеризує макроскопічний розвиток руйнування у керамічних покриттях, пов'язаний із накопиченням дефектів на мікроскопічному рівні. Поточне значення параметра пошкодження D визначається локальним рівнем деформацій і початковим пошкодженням D_0 відповідно до наступного співвідношення для анізотропного випадку [516]:

$$D = D_0 \exp\left(\frac{E_j \left\langle e_{jj}^* \right\rangle^2}{2W} \right) \tag{6.1}$$

з підсумовуванням по всіх невід’ємних головних пружних деформаціях e_{jj}^*.

Тут кутові дужки є дужками Маколея (Macaulay brackets), тобто

$$\left\langle x \right\rangle = \begin{cases} x & \text{при} \quad x > 0 \\ 0 & \text{при} \quad x \le 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

W – питома енергія, пов'язана з накопиченням пошкоджень, E_j – модулі Юнга непошкодженого трансверсально ізотропного матеріалу.

Рівняння (6.1) узагальнює закон накопичення пошкоджень, спочатку представленого для ізотропного випадку [462, 522]. Загальний варіант цієї моделі КМР повністю описує деформаційну поведінку і накопичення пошкоджуваності у крихких матеріалах для умов навантаження і розвантаження (див. більш детально [461, 462]). Тут наявне лише монотонне навантаження завдяки рівномірному нагріву. Отже, виключаються з розгляду ефекти деформаційної історії.

Досягнення граничного значення пошкодження D_{m} через збільшення у зовнішньому навантаженні (деформації) відповідає локальному випадку руйнування, тобто передачі від розсіяного нагромадження пошкоджень до локалізації руйнування та ініціювання мікроскопічного розтріскування. Для суто теплового навантаження системи покриття–підкладка, зв’язаного зі збільшенням температури t, основна причина руйнування – невідповідність у коефіцієнтах теплового розширення його компонентів.

Вплив пошкоджень на поведінку матеріалу уведено в модель через лінійне зменшення модулів Юнга з ростом пошкоджень $E_j \to E_j(1-D)$, що ґрунтується на одному з основних принципів КМР. При $D_{\mathrm{m}} < 1$ перехід від розсіяного акумулювання пошкоджень до макроскопічного руйнування характеризується ненульовою залишковою жорсткістю. Також береться до уваги температурна залежність термомеханічних і фізичних параметрів.

Суто аналітичний спосіб оцінки критичного рівня змін температури, пов’язаних з ініціюванням локального руйнування у покритті, неможливий через взаємозв’язок процесів деформації і накопичення пошкоджень; тому задача розв’язується як ітераційна послідовність кроків, здійснюваних до досягнення критичного рівня пошкоджуваності D_{m}. Таким чином, при рівномірному нагріванні використовується така ітераційна процедура для визначення зміни параметра пошкоджуваності:

$$D(t+\overline{t}) = D_0 \exp\left(\frac{E_j \left\langle e_{jj}^{*}\left(t, B_{pq}(D(t))\right)\right\rangle^2}{2W(t)} \right), \tag{6.3}$$

де B_{pq} – пружні коефіцієнти трансверсально ізотропного тіла.

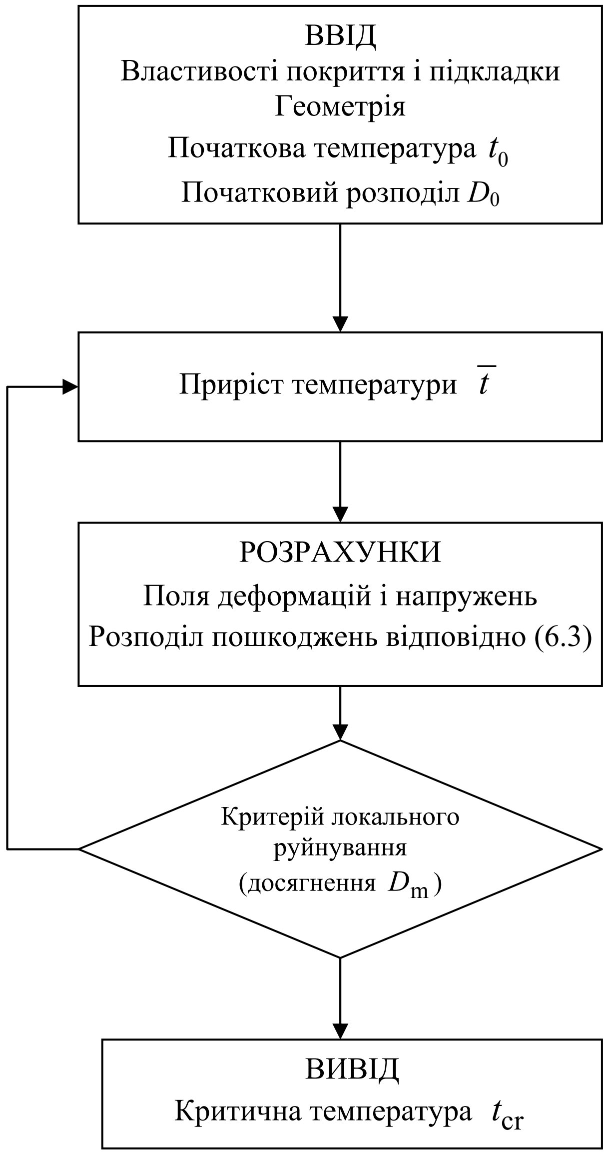


Рис. 6.1. Обчислювальна блок-схема

Загальна блок-схема обчислень, яка використовується для дослідження накопичення пошкоджень у покритті, показана на рис. 6.1. Вона починається з уведення початкового стану. На кожному кроці нагріву, пов'язаного з температурним приростом $\overline{t}$, обчислюються напруження і деформації та відповідний розподіл пошкоджень згідно з рівнянням (6.3). Ця схема включає послідовність проміжних крайових задач термопружності для середовища з пошкодженнями. Обчислювальна реалізація може бути здійснена за допомогою модифікованих скінченно-елементних процедур із урахуванням накопичення пошкоджень. Такий підхід є доволі громіздким і має базуватись на моделях, що враховують параметр пошкоджуваності або в параметричній формі, або з використанням спеціальних скінченних елементів з додатковим ступенем свободи (див. моделі і відповідне обговорення в [522, 581]). Щоб уникнути цю складність і одержати ефективний алгоритм розв’язування, застосуємо альтернативний підхід, що ґрунтується на заміні скінченно-елементного розв’язку аналітичним розв’язком проміжної задачі термопружності для системи покриття–тіло на кожному кроці загальної обчислювальної ітераційної процедури, таким чином отримуючи аналітично-чисельний підхід до дослідження еволюції пошкоджень в покриттях при тепловому навантаженні.

Для випадку тонких покрить будемо використовувати підхід, що ґрунтується на використанні математичної моделі з УГУ термомеханічного спряження підкладки з середовищем через покриття, викладений в параграфі 1.2.2.4. Хоча при такому підході в обчислювальній схемі використовуються значно простіші формули, його застосування обмежується випадками малої товщини покриття.

Для випадку покрить довільної товщини доцільно використати підхід, викладений у підрозділі 5.2 для розрахунку напружено-деформованого стану в таких покриттях у тілах циліндричної форми.

6.2. Задача для циліндра з тонким багатошаровим покриттям

Розглянемо задачу для суцільного циліндра радіуса R з нанесеним керамічним тонким n-шаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ при рівномірному нагріві. Кінці циліндра зафіксовані в осьовому напрямку, і всі напруження на границі покриття–середовище відсутні.

Співвідношення Дюгамеля–Неймана для ізотропної підкладки при врахуванні температурної залежності КЛТР мають вигляд

$$e_{km}^{\mathrm{T}} = \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{km}^{\mathrm{T}} - \frac{\nu_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{T}}}\sigma_{ll}^{\mathrm{T}}\delta_{km} + \Phi^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{T}})\delta_{km}, \quad k,m = 1,2,3, \tag{6.4}$$

де
$$\Phi^{\mathrm{T}}(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\beta_{\mathrm{T}}(t')dt', \tag{6.5}$$

E_{T}, ν_{T}, β_{T} – модуль Юнга, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення матеріалу циліндра, t_0 – початковий, вільний від напружень, температурний розподіл.

Оскільки керамічні покриття виявляють суттєву трансверсальну анізотропію, розглянемо варіант УГУ (1.141) для трансверсально ізотропних покрить. Через осьову симетрію задачі зсувні напруження відсутні

$$\sigma_{12}^{\mathrm{T}}=\ \sigma_{13}^{\mathrm{T}}=\ \sigma_{23}^{\mathrm{T}}=0. \tag{6.6}$$

У цьому випадку перші дві УГУ (1.141) задовольняються тотожно, а третя за врахування температурної залежності КЛТР має такий вигляд при $r=R$

$$(1+\overline{p}_{33})\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\overline{p}_{31}\sigma_{11}^{\mathrm{T}}+\overline{p}_{32}\sigma_{22}^{\mathrm{T}}+\overline{p}_{3t}\Phi^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{т}})=f_{3t}. \tag{6.7}$$

Коефіцієнти в умові (6.7) визначаємо на основі співвідношень (1.142), (1.143), (1.125), (1.139), (1.86), (1.130), (1.107), (1.140), (1.131)-(1.133), (1.113), (1.75), (1.108), (1.115), (1.101), (1.128) підрозділу 1.2:

$$\overline{p}_{3m}=p'_{3m}-d_3\left(p'_{4m}-\frac{\delta}{2}\delta_{3m}\right),\ m=1,\ 2,\ 3,\ t,\quad d_3=\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{D}}\big/\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}},$$

$$p'_{3j}=\frac{G_{1l}^{(0)}-\nu_{\mathrm{T}}G_{1j}^{(0)}}{RE_{\mathrm{T}}}+E_{\mathrm{т}}^{-1}\left(\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{F}_j}-\nu_{\mathrm{T}}\,\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{F}_l}\right),$$

$$p'_{4j}=\frac{\tilde{G}_{1l}^{(1)}-\nu_{\mathrm{T}}\tilde{G}_{1j}^{(1)}}{RE_{\mathrm{T}}}+\frac{(1-\nu_{\mathrm{T}})G_{13}^{(0)}}{E_{\mathrm{T}}}+E_{\mathrm{т}}^{-1}\left(\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{F}_j}-\nu_{\mathrm{T}}\,\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{F}_l}\right),\ j=1,2,\ l=3-j,$$

$$p'_{33}=-\nu_{\mathrm{T}}E_{\mathrm{т}}^{-1}p'_{3t},\qquad p'_{3t}=\frac{G_{11}^{(0)}+G_{12}^{(0)}}{R}+\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{F}_1}+\tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\mathrm{F}_2},$$

$$p'_{43}=-\nu_{\mathrm{T}}E_{\mathrm{т}}^{-1}p'_{4t},\qquad p'_{4t}=2G_{13}^{(0)}+R^{-1}\left(\tilde{G}_{11}^{(1)}+\tilde{G}_{12}^{(1)}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{F}_1}+\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{F}_2},$$

$$\mathrm{p}_{3\varepsilon}^{i}=R^{-1}G_{13}^{i(0)}+R^{-2}\tilde{G}_{11}^{i(1)}+\delta_i R^{-2}\sum_{j=i+1}^{n}G_{11}^{j(0)},$$

$$\mathrm{p}_{4\varepsilon}^{i} = G_{33}^{i(0)} + R^{-1}\left(\tilde{G}_{13}^{i(1)} + G_{13}^{i(1)} - \frac{\delta}{2}G_{13}^{i(0)}\right) + R^{-2}\left(\tilde{G}_{11}^{i(2)} - \frac{\delta}{2}G_{11}^{i(1)}\right) +$$

$$+ R^{-2}\delta_i \sum_{j=i+1}^{n}\left(G_{11}^{j(1)} - \frac{\delta}{2}G_{11}^{j(0)}\right),$$

$$f_{3t} = R^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{2}d_3\right)N_{1t} - d_3N_{3t} - d_3R^{-1}M_t - \tilde{\mathrm{p}}_{3\varepsilon}^{\eta} + d_3\,\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta},$$

$$t_{\mathrm{T}} = t = \mathrm{const}\,.$$

Величини $\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{D}}$, $\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_1}$, $\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\mathrm{F}_2}$, $\tilde{\mathrm{p}}_{m\varepsilon}^{\eta}$ $(m = 3,4)$ визначаються за формулами (1.123), величини N_{1t}, N_{3t}, M_t – за формулами (1.106), коефіцієнти $\tilde{\mathrm{Y}}^i = \left[\mathrm{D}^i, \mathrm{F}_1^i, \mathrm{F}_2^i, \eta^i\right]$ – за рекурентними співвідношеннями (1.136) та (1.137), які у даному випадку набувають вигляду

$$\tilde{\mathrm{Y}}^i = \frac{1}{B_{33}^i}\left\{B_{33}^{i-1}\tilde{\mathrm{Y}}^{i-1} - \frac{\overline{B}_{13}^i}{R}\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\tilde{\mathrm{Y}}^j - \overline{B}_{13}^i\left[0,1,1,-\frac{\overline{B\Phi}_{13}^{\,i}}{\overline{B}_{13}^i}\right]\right\},\ i = \overline{2,n},\ \tilde{\mathrm{Y}}^1 = [1,0,0,0],$$

де $\overline{B}_{13}^i$, $\overline{B\Phi}_{13}^{\,i}$ знаходяться за формулами (1.119) і (1.120)

$$\overline{B}_{13}^i = B_{13}^i - B_{13}^{i-1},$$

$$\overline{B\Phi}_{13}^{\,i} = 2B_{13}^i\Phi_1^i(t) + B_{33}^i\Phi_3^i(t) - 2B_{13}^{i-1}\Phi_1^{i-1}(t) - B_{33}^{i-1}\Phi_3^{i-1}(t).$$

Тут B_{pq}^i – коефіцієнти пружності, $\Phi_j^i(t) = \int_{t_0}^{t}\beta_j^i(t')dt'$, $j = 1,3;$ $i = \overline{1,n}$ – теплові деформації i-го шару трансверсально ізотропного покриття, β_1 і β_3 – КЛТР у площині ізотропії та вздовж нормалі до неї відповідно.

Величини $G_{jl}^{i(m)}$, $G_{jl}^{(m)}$, $\tilde{G}_{1q}^{i(m)}$, $\tilde{G}_{1q}^{(m)}$ визначаються співвідношеннями (1.109), (1.110) та (1.134):

$$G_{jl}^{i(m)} = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{jl}^i\gamma^m d\gamma,\quad G_{jl}^{(m)} = \int_0^{\delta} B_{jl}\gamma^m d\gamma,\ i = \overline{1,n},\quad m = 0,1,2,\quad jl = 11,\ 12,\ 13,\ 33,$$

$$\tilde{G}_{1q}^{i(m)} = G_{1q}^{i(m)} - \gamma_{i-1}G_{1q}^{i(m-1)},\ \ \tilde{G}_{1q}^{(m)} = G_{1q}^{(m)} - 0.5\delta G_{1q}^{(m-1)},\ i = \overline{1,n},\quad m = 1,2,\quad q = 1,2,$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_i = \sum_{j=1}^{i}\delta_j$ $\quad i = \overline{1,n}$.

Скористаємося поданням розв’язку для циліндра в напруженнях у вигляді [244]

$$\sigma_{33}^{\mathrm{T}}(r)=B_1+\frac{B_2}{r^2}-\frac{E_{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t)}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})},\qquad \sigma_{22}^{\mathrm{T}}(r)=B_1-\frac{B_2}{r^2}-\frac{E_{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t)}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})},\tag{6.8}$$

де B_1 і B_2 – невідомі сталі. Знайдемо ці сталі підстановкою (6.8) в УГУ (6.7) із врахуванням умови $\left.\sigma_{33}^{\mathrm{T}}\right|_{r=0}\neq\infty$. Далі, використовуючи умови $e_{11}^{\mathrm{T}}\equiv 0$ і співвідношення Дюгамеля–Неймана (6.4), знайдемо напруження у циліндрі остаточно у вигляді

$$\begin{aligned}&\sigma_{33}^{\mathrm{T}}=\sigma_{22}^{\mathrm{T}}=\frac{f_{3t}-(\overline{p}_{3t}-\overline{p}_{31}E_{\mathrm{T}})\Phi^{\mathrm{T}}(t)}{1+2\nu_{\mathrm{T}}\overline{p}_{31}+\overline{p}_{32}+\overline{p}_{33}},\\&\sigma_{11}^{\mathrm{T}}=2\nu_{\mathrm{T}}\sigma_{33}^{\mathrm{T}}-E_{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t).\end{aligned}\tag{6.9}$$

Підставляючи (6.9) у співвідношення (6.4) Дюгамеля–Неймана для циліндра і формулу (1.162) для ε_3^1, використовуючи умову неперервності на поверхні поділу тіло–покриття (1.83), записану для тангенціальних деформацій, та співвідношення (1.135), (1.91) і (1.90), знаходимо головні невід’ємні пружні деформації в покритті

$$\begin{aligned}e_{33}^{*1}=-\frac{1}{\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\mathrm{D}}}\Big[\big[&(2\nu_{\mathrm{T}}p'_{41}+p'_{42}+p'_{43})\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+(p'_{4t}-p'_{41}E_{\mathrm{T}})\Phi^{\mathrm{T}}(t)+\\&+0.5\delta R^{-1}N_{1t}-N_{3t}-R^{-1}M_t+\tilde{\mathrm{p}}_{4\varepsilon}^{\eta}\big]-\Phi_3^1(t),\end{aligned}\tag{6.10}$$

$$e_{33}^{*i}=\mathrm{D}^i\varepsilon_3^1+E_{\mathrm{T}}^{-1}\left(1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2\right)\mathrm{F}_2^i\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)\mathrm{F}_2^i\Phi^{\mathrm{T}}(t)+\eta^i-\Phi_3^i(t),\ i=\overline{2,n},\tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}e_{22}^{*i}=\frac{1}{1+\gamma/R}\Big[&E_{\mathrm{T}}^{-1}\left(1-\nu_{\mathrm{T}}-2\nu_{\mathrm{T}}^2\right)\sigma_{33}^{\mathrm{T}}+\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)\Phi^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j\left(e_{33}^{*j}+\Phi_3^j(t)\right)+\\&+\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma-\gamma_{i-1})\left(e_{33}^{*i}+\Phi_3^i(t)\right)\Big]-\Phi_1^i(t),\quad \gamma_{i-1}\le\gamma\le\gamma_i,\quad i=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Тут теплові деформації $\Phi_j^i(t)$ ($j=1,3;\ i=\overline{1,n}$), $\Phi^{\mathrm{T}}(t)$ і величини N_{1t}, N_{3t}, M_t відомі, тому що температура t – заданий параметр при рівномірному нагріві.

Таким чином, розв'язок (6.10)-(6.12) проміжної граничної задачі термопружності забезпечує необхідні дані для правої частини формули (6.3) для обчислення розподілу пошкоджень на кожному кроці рівномірного нагріву.

6.3. Числові результати дослідження еволюції пошкоджень при нагріві циліндра з тонким багатошаровим керамічним покриттям

Числові розрахунки виконано для довгого циліндра радіуса 5 см з титанового сплаву Ti-6Al-4V із зафіксованими торцями, з модельним тришаровим керамічним покриттям з товщинами шарів $\delta_2 = \delta_3 = 2\delta_4 = 200$ мкм і проміжним шаром товщиною $\delta_1 = 100$ мкм для трьох типів розподілу за товщиною початкового пошкодження, пов'язаного з технологічно зумовленою пористістю: (1) рівномірного (*uniform*) з величиною $D_0 = (D_{\min} + D_{\max})/2$, (2) лінійно зростаючого від $D_{\min}$ на поверхні поділу покриття–підкладка до $D_{\max}$ на зовнішній вільній поверхні (*Type 1*), (3) лінійно спадаючого з $D_{\max}$ на поверхні поділу до $D_{\min}$ на вільній поверхні (*Type 2*). У чисельних розрахунках приймали $D_{\min} = 0.02$ і $D_{\max} = 0.10$, що приводить до $D_0 = 0.06$. Система розглядається при рівномірному тепловому навантаженні та приймається вільний від напружень початковий стан. Значення параметрів для проміжного шару, шарів покриття і підкладки, використовуваних у числовому моделюванні, наведено у табл. 6.1 і 6.2. При числових розрахунках застосовували кубічну сплайнову апроксимацію для залежних від температури параметрів з табл. 6.1. Вплив рівня пошкодженості матеріалу на стан матеріалу відображено формулою [498]

$$\begin{Bmatrix} E_{\perp(\|)} \\ \nu_{\perp(\|)} \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} E_{\perp(\|)} \\ \nu_{\perp(\|)} \end{Bmatrix} (1 - D), \tag{6.13}$$

де $E_{||}$ і $E_{\perp}$ – модулі Юнга уздовж осьового і радіального напрямів, відповідно, $\nu_{||}$– коефіцієнт Пуассона, який характеризує поперечний стиск у площині ізотропії за розтягу в цій площині, $\nu_{\perp}$ – те саме за розтягу в напрямі, перпендикулярному до цієї площини. Тут, згідно з [498], маємо $\nu_{\perp} = \nu_{||} E_{\perp} / E_{||}$.

Таблиця 6.1

Температурно залежні властивості проміжного шару, шарів покриття і підкладки, використовувані у чисельних розрахунках

T, °C	W, кДж/м^3	Коефіцієнти температурного розширення $\beta_1 = \beta_3$, $\times 10^{-6}$, °C^{-1}				
		Проміж-ний шар	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Ti-6Al-4V
100	51.2	21.5	2.51	6.53	5.02	8.64
200	50.1	21.5	2.77	8.31	5.54	9.14
300	48.8	21.5	3.03	9.09	6.06	9.47

Таблиця 6.2

Пружні властивості проміжного шару, шарів покриття і підкладки, використовувані у чисельних розрахунках

	Проміж-ний шар	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Ti-6Al-4V
$E_{||}$, ГПа	271	180	120	150	114
$E_{\perp}$, ГПа	271	90	120	100	114
$\nu_{||}$	0.17	0.20	0.24	0.24	0.33
$\nu_{\perp}$	0.17	0.10	0.24	0.16	0.33

На рис. 6.2 проілюстровано вплив температури на еволюцію пошкодження в різних шарах покриття для випадків без проміжного шару (суцільна крива) і з ним (штрихова крива) за рівномірного початкового пошкодження.

Оскільки коефіцієнт температурного розширення і модуль Юнга розглядуваного модельного проміжного шару подібні до звичайно використовуваних на практиці, то можливо зробити висновок, що вплив проміжного шару на еволюцію пошкоджень нехтувально малий.

Як видно з рис. 6.2, є істотна різниця в процесах еволюції пошкодження в різних шарах навіть для тонкого багатошарового покриття, хоча в усіх випадках присутні основні етапи процесу еволюції пошкодження: відносно повільна еволюція пошкоджень на початковій стадії і різке збільшення рівня пошкоджень на фінальній стадії.

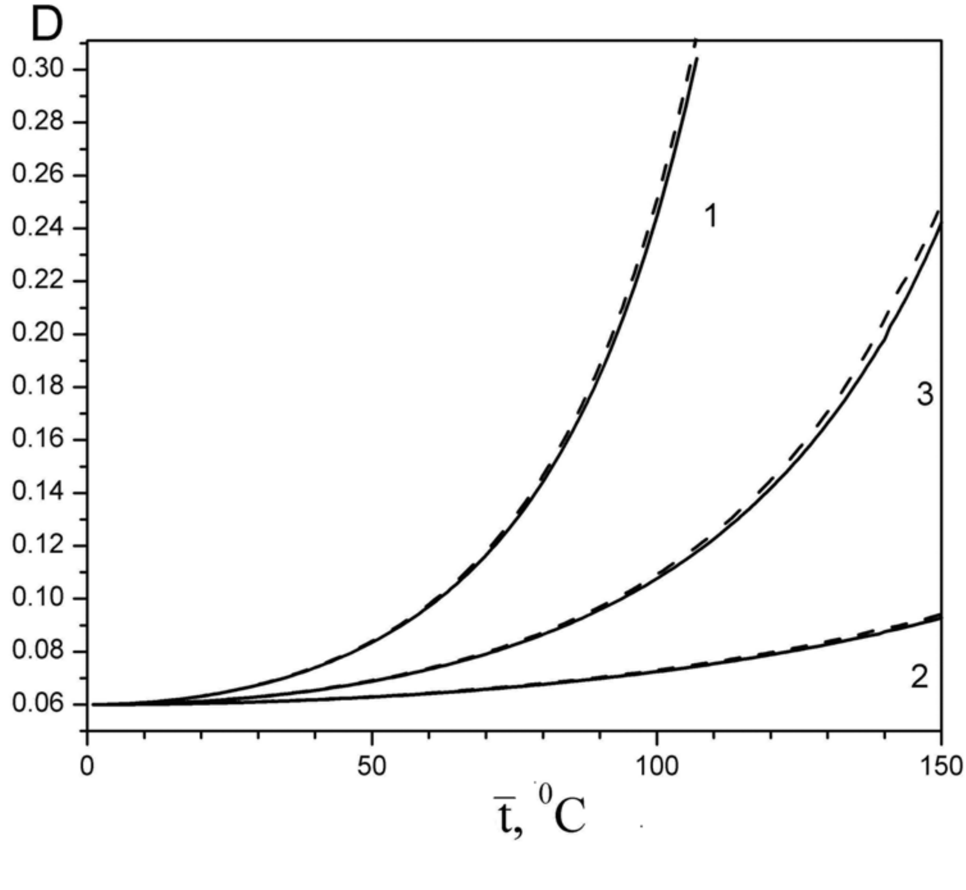


Рис. 6.2. Вплив температури на еволюцію пошкоджень у різних шарах покриття для випадків без проміжного шару (суцільні криві) і з ним (штрихові криві)

На рис. 6.3 показано розподіл пошкодження за координатою $\gamma = r - R$, викликаного зміною температури $\overline{t}$ =100°C для різних типів початкового розподілу пошкоджень. Слід зазначити, що на відміну від одношарового покриття, для випадку багатошарового покриття пошкодження є кусково-неперервною, немонотонною функцією, хоча в межах окремого шару пошкодження є неперервною і монотонною функцією.

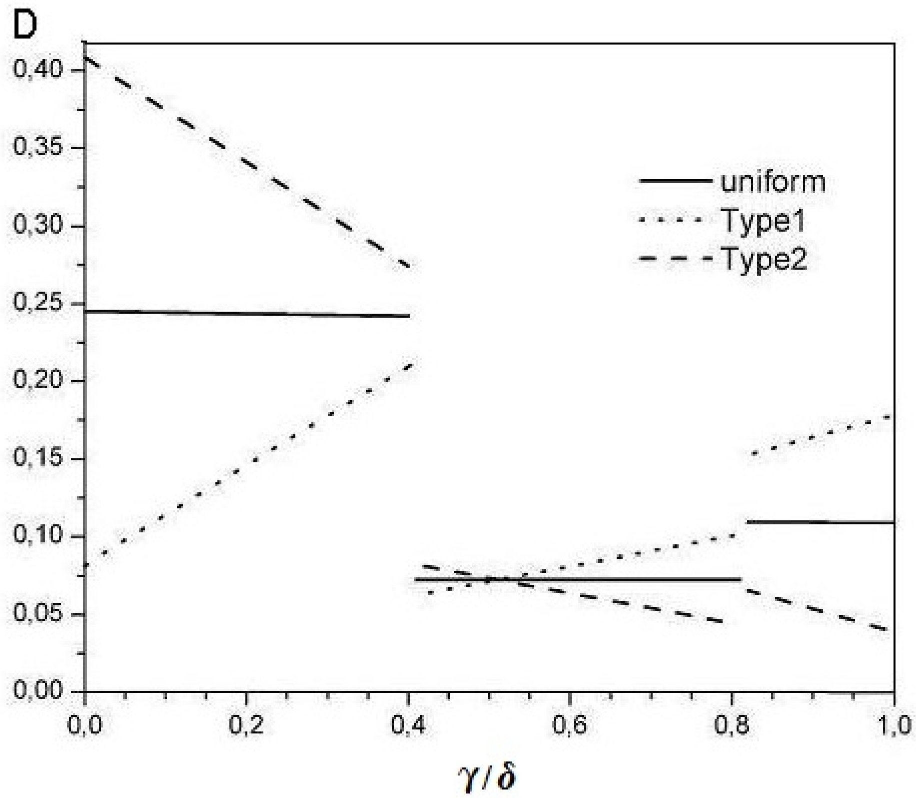


Рис. 6.3. Рівень пошкодження, викликаного зміною температури $\overline{t}$ =100°C для різних типів початкового розподілу пошкоджень

Цікаво проаналізувати такий важливий параметр суто теплового навантаження конструкцій з покриттями як критична температура t_{cr} ініціювання макроскопічного руйнування. Це значення може бути пов'язане з досягненням критичного рівня пошкодження D_{m} у деякій частині покриття; перевищення цього рівня означає перехід від розсіяного нагромадження пошкоджень до локалізації руйнування у формі макроскопічної тріщини (рис. 6.4).

Досліджуємо два випадки: (a) розглядуваний випадок і (b) коли шари 1 і 2 міняються своїми місцями.

Слід зазначити, що перехід до макроскопічного руйнування для випадку багатошарових покрить не визначається переважно найвищим локальним рівнем початкової пористості на відміну від ситуації для одношарового покриття: наприклад, для випадку (a) рівномірний початковий розподіл є більш небезпечним, ніж нерівномірний *Type* 1. З іншого боку, якщо найнебезпечнішим для випадку (a) є *Type* 2, то для випадку (b) – *Type* 1.

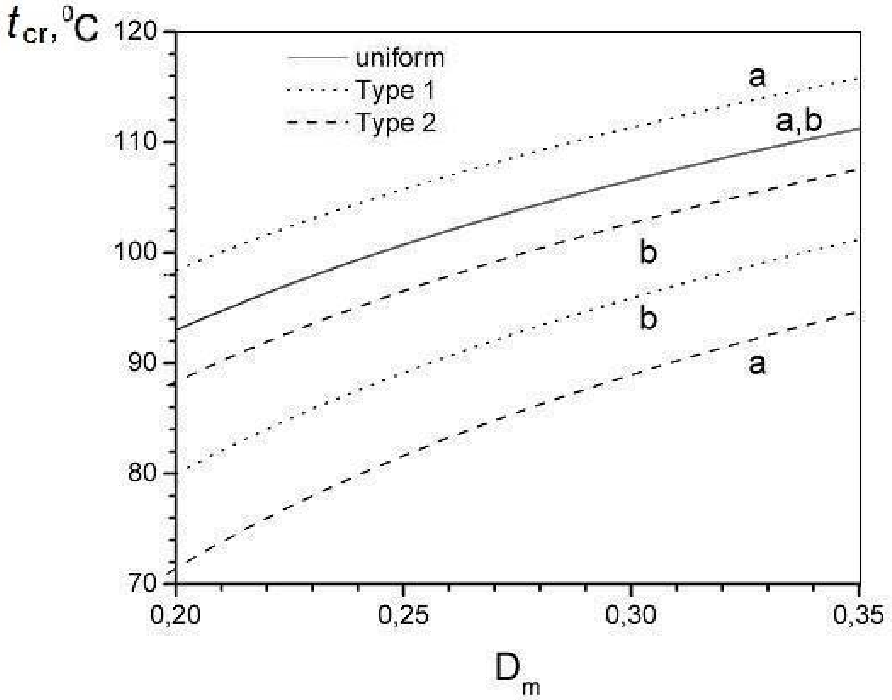


Рис. 6.4. Залежність критичної температури від критичного рівня пошкоджень для різних типів початкового розподілу пошкоджень для випадків (a) і (b)

6.4. Задача для циліндра з трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини

Методика розрахунку процесу накопичення пошкоджень в крихких покриттях під тепловими навантаженнями спрощується імплементацією аналітичного розв’язку відповідної проміжної крайової задачі термопружності у розрахункову схему. Для випадку тонких багатошарових покрить у підрозділі 6.2 це здійснено на основі застосування математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження підкладки зі середовищем через покриття. Для випадку покрить довільної товщини можна використати інший підхід, викладений в підрозділі 5.2 для визначення напружено-деформованого стану в таких покриттях, нанесених на циліндричні тіла.

Як і в підрозділі 5.2, розглядається довгий круговий циліндр ($0 \le r \le R_{\text{Т}}$) з фіксованими торцями, з шаром покриття постійної товщини ($R_{\text{Т}} \le r \le R_{\text{П}}$) у циліндричних координатах r, φ, z. Індекси т і п відносяться до підкладки (тіла) і покриття, відповідно. Вважається, що підкладка є ізотропною з незалежними від температури пружними властивостями (але з температурно залежними коефіцієнтами теплового розширення), а покриття є трансверсально ізотропним і неоднорідним в радіальному напрямі. Приймаємо умову (5.29) ненавантаженості поверхні покриття та умови ідеального механічного контакту (5.30), (5.31).

Тоді компоненти тензорів напружень і деформацій знаходимо за методикою, викладеною у підрозділі 5.2, а головні деформації визначаємо як $e^*_{jj} = e^{\text{П}}_{jj} - \Phi^{\text{П}}_j(t)$ ($j = r, \varphi, z$) для правої частини формули (6.3) на кожному кроці теплового навантаження.

6.5. Числові результати дослідження еволюції пошкоджень при нагріві циліндра з товстим керамічним покриттям

Аналіз еволюції пошкоджень в керамічному покритті на циліндричній металевій підкладці здійснюється для довгого циліндра радіуса 0.5 см, з фіксованими кінцями в осьовому напрямі з нанесеним шаром оксиду алюмінію. Як і в підрозділі 6.3, розглядаються три типи розподілу за товщиною початкового пошкодження, пов'язаного з технологічно зумовленою пористістю: (1) рівномірного (*uniform*) з величиною $D_0 = (D_{\min} + D_{\max})/2$, (2) лінійно зростаючого від $D_{\min}$ на поверхні поділу покриття–підкладка до $D_{\max}$ на зовнішній вільній поверхні (*Type 1*), (3) лінійно спадаючого з $D_{\max}$ на поверхні поділу до $D_{\min}$ на вільній поверхні (*Type 2*). У чисельних розрахунках приймалось $D_{\min} = 0.02$ і $D_{\max} = 0.10$. що приводить до $D_0 = 0.06$. Ці три типи покрить вивчаються для двох випадків матеріалу підкладки: вольфраму і сплаву Ti-6Al-4V. Розглядаємо систему суто під тепловим навантаженням і вважаємо, що є вільний від напружень початковий стан.

Таблиця 6.3

Температурно залежні властивості покриття і підкладки, використовувані у чисельних розрахунках

T, °C	W, кДж/м^3	Коефіцієнти температурного розширення $\beta_1 = \beta_3$, $\times 10^{-6}$, °C^{-1}		
		Оксид алюмінію	Вольфрам	Ti-6Al-4V
100	51.2	5.02	4.4	8.64
200	50.1	5.54	4.4	9.14
300	48.8	6.06	4.4	9.47
400	46.5	6.59	4.4	9.74

Таблиця 6.4

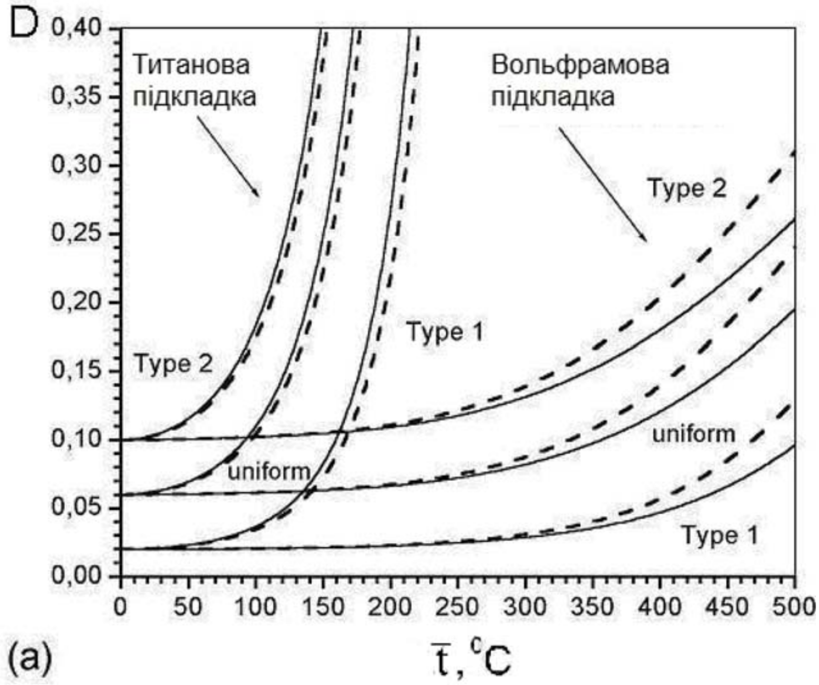
Пружні властивості покриття і підкладки, використовувані у чисельних розрахунках

	Оксид алюмінію	Вольфрам	Ti-6Al-4V
$E_{\|\|}$, ГПа	150	400	114
$E_{\perp}$, ГПа	100	400	114
$\nu_{\|\|}$	0.24	0.28	0.33

Властивості для покриття і підкладки даються в табл. 6.3 і 6.4. У чисельному аналізу використовуємо кубічну сплайнову апроксимацію для залежних для температури параметрів з табл. 6.3. Трансверсальна ізотропія оксиду алюмінію враховується в термінах модулів Юнга $E_{||}/E_{\perp}$ уздовж осьового і радіального напрямів. Вплив пошкоджень на поведінку матеріалу описується формулою (6.13).

Розглянемо характерні риси процесу накопичення пошкоджень, які визначаються товщиною покриття. Слід зазначити, що тип підкладки значно впливає на характер накопичення пошкоджень в кераміці (рис. 6.5-6.9). З рис. 6.5-6.7 випливає, що зі збільшенням товщини покриття на підкладці з титанового сплаву швидкість накопичення пошкоджень зменшується, тоді як для випадку вольфрамової підкладки вона також зменшується в області зовнішньої поверхні, але зростає в області контакту.

Розподіл пошкодження за координатою $\gamma = r - R_{\mathrm{T}}$ (рис. 6.7) для товстішого покриття більше відхиляється від початкового, причому несиметричність розподілів для *Type* 1 і *Type* 2 стає очевиднішою.



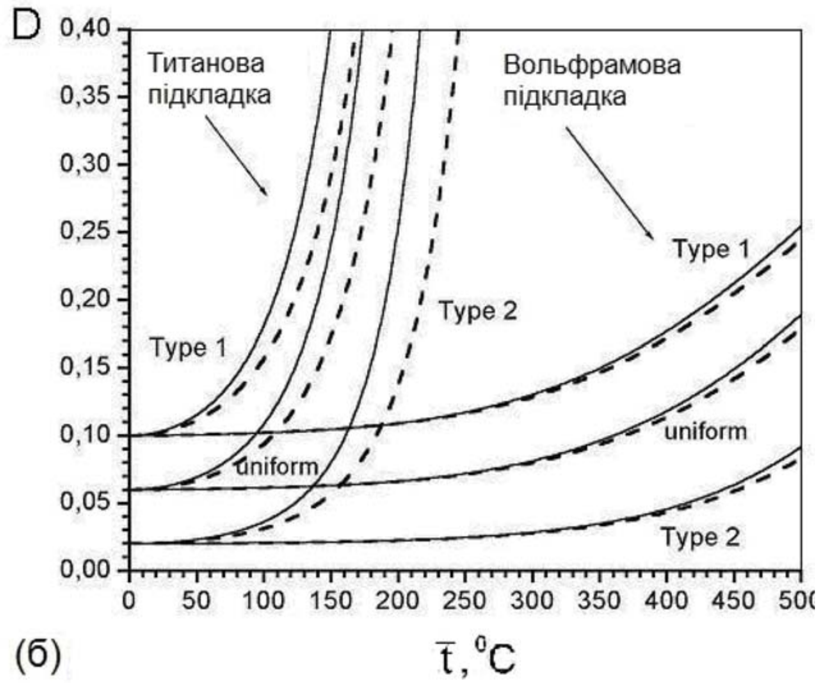


Рис. 6.5. Вплив температури на накопичення пошкоджень в покриттях товщиною 50мкм (суцільні криві) і 500мкм (штрихові криві): (а) біля поверхні поділу та (б) біля зовнішньої поверхні для різних типів початкового розподілу пошкоджень і різних підкладок

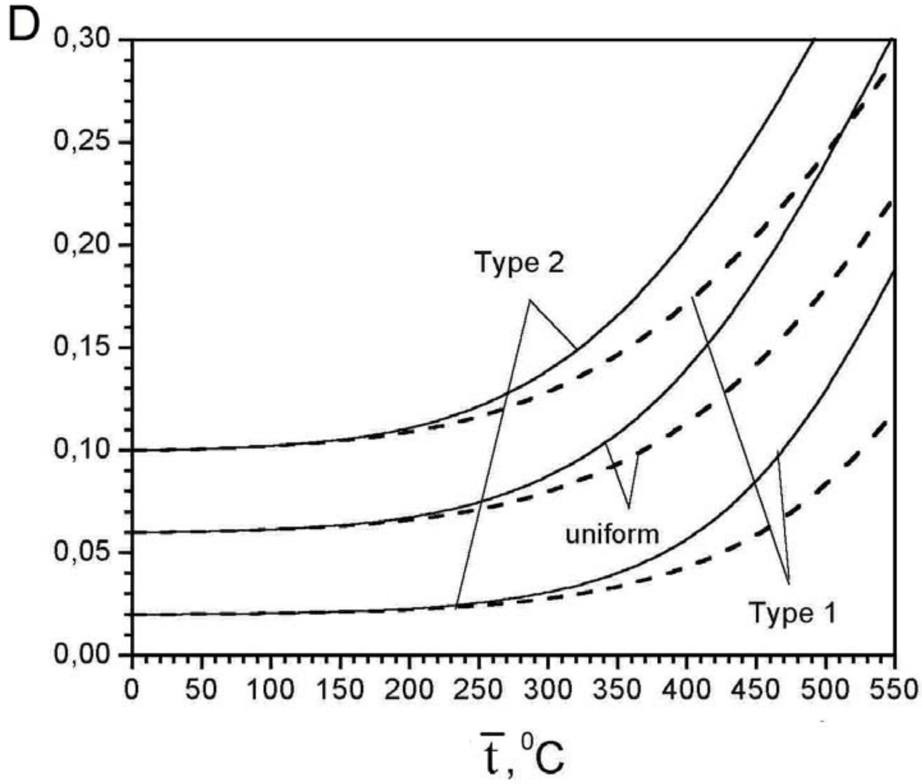


Рис. 6.6. Вплив температури на накопичення пошкоджень біля контактної поверхні (суцільні криві) і біля зовнішньої поверхні (штрихові криві) для різних типів початкового розподілу пошкоджень в покритті товщиною 500мкм на вольфрамовій підкладці

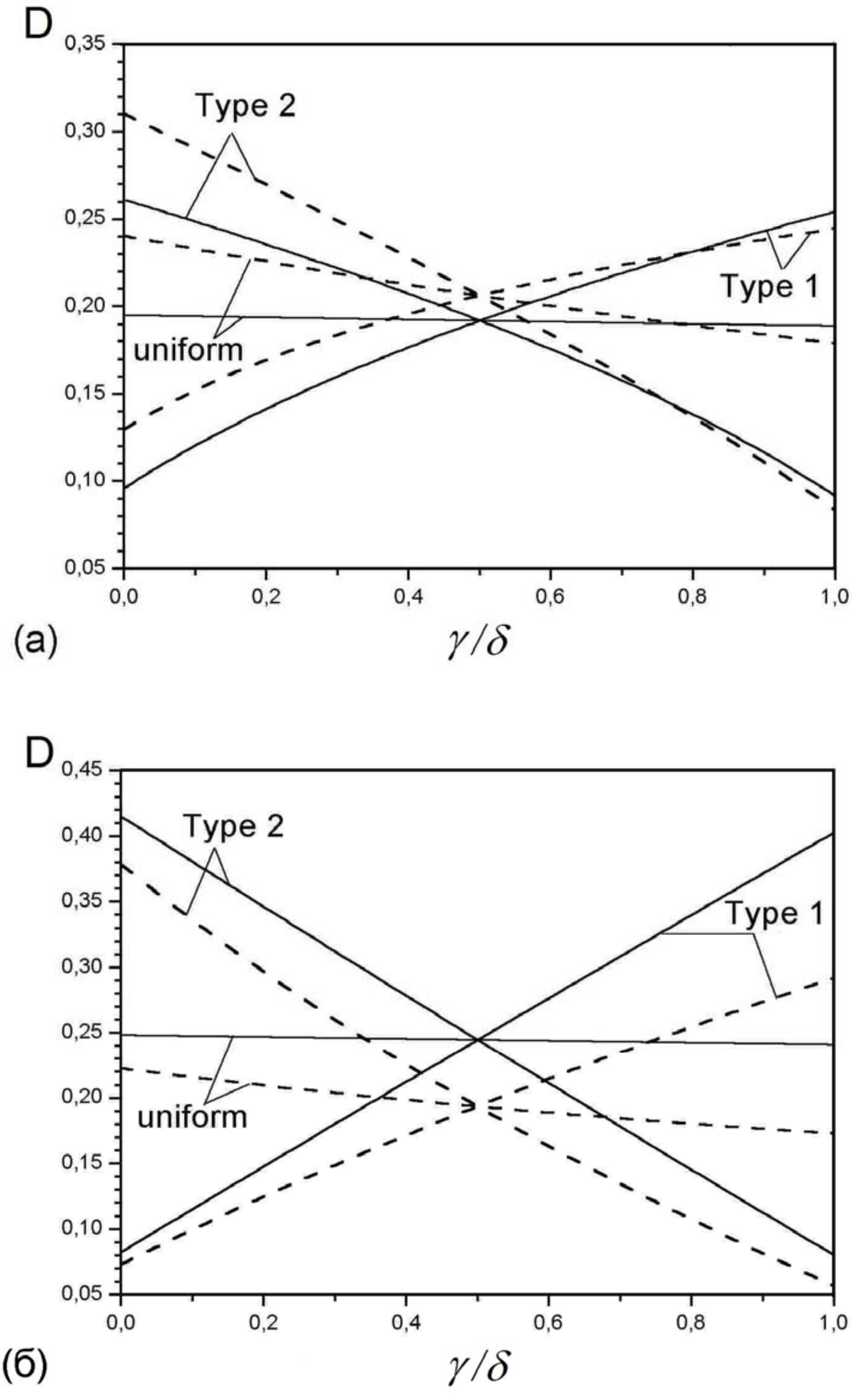


Рис. 6.7. Розподіл пошкоджень, викликаних зміною температури в покриттях товщиною 50мкм (суцільні криві) і 500мкм (штрихові криві) для різних типів початкового розподілу пошкоджень: (а) $\overline{t}$ =500^{o}C, підкладка з вольфраму та (б) $\overline{t}$ =150^{o}C, підкладка з титанового сплаву

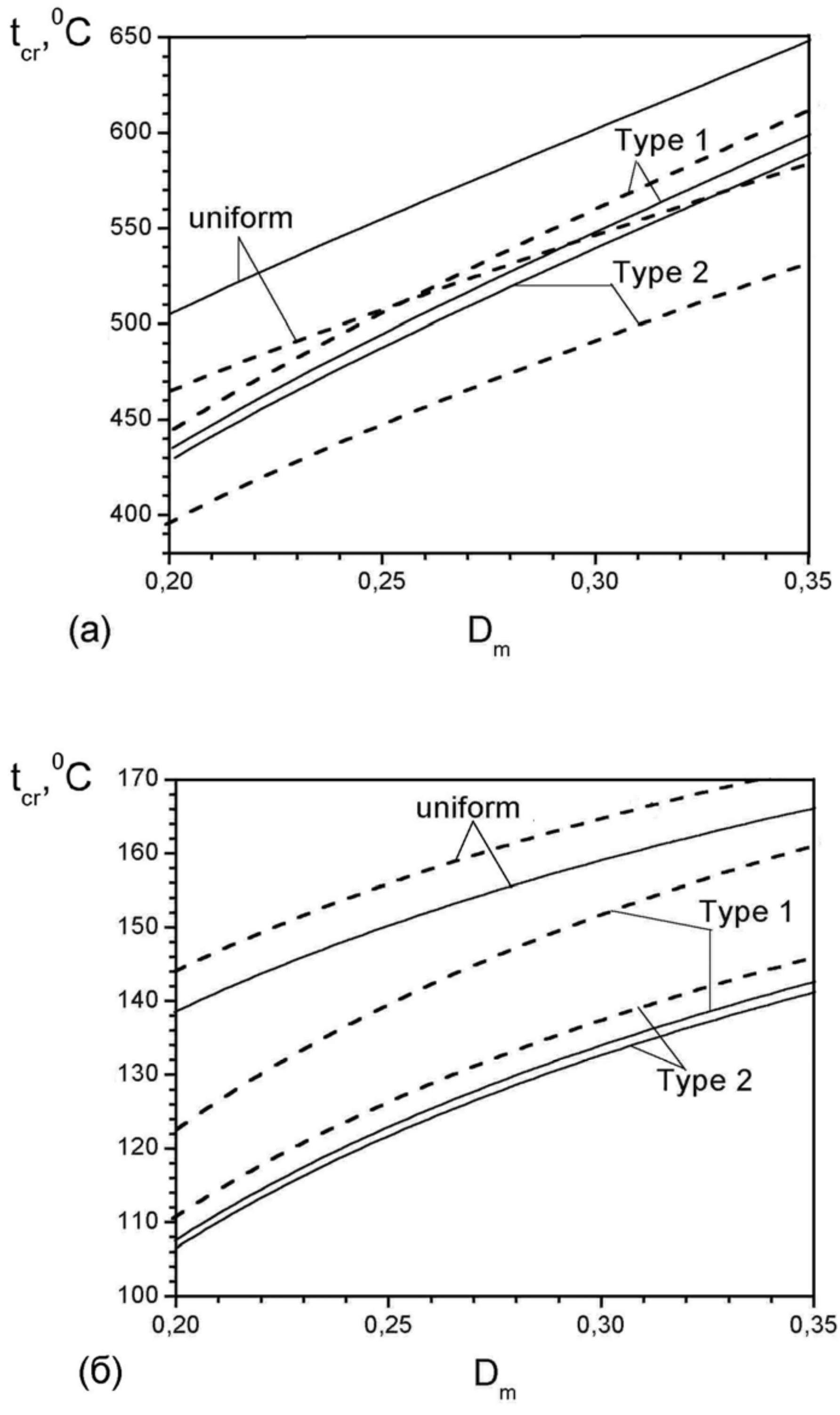


Рис. 6.8. Залежність критичної температури від критичного рівня пошкоджень в покриттях товщиною 50мкм (суцільні криві) і 500мкм (штрихові криві) для різних типів початкового розподілу пошкоджень: (а) підкладка з вольфраму та (б) підкладка з титанового сплаву

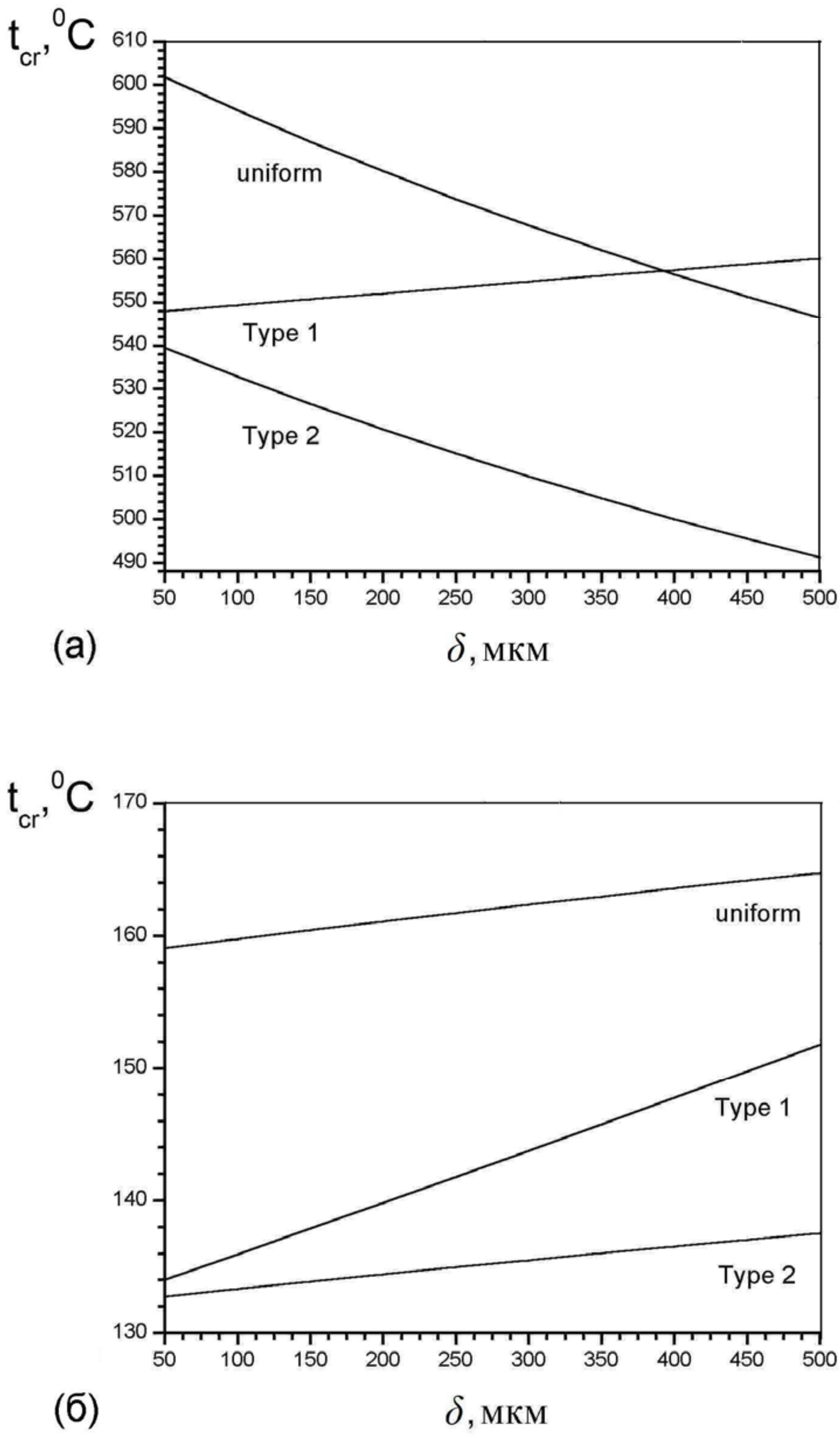


Рис 6.9. Вплив товщини покриття на критичну температуру:
(а) підкладка з вольфраму та (б) підкладка з титанового сплаву для різних типів початкового розподілу пошкоджень $\left(D_{\mathrm{m}} = 0.3\right)$

Рисунок 6.8 ілюструє вплив типу початкового розподілу пористості на критичну температуру t_{cr} ініціювання макроскопічного руйнування, яка відповідає досягненню критичного рівня D_m і, отже, показує, що *Type 2* – найнебезпечніший тип початкової пористості. Можна відмітити, що зі збільшенням товщини *Type 2* стає значно небезпечнішим, ніж *Type 1* (штрихові криві відхиляються більше, ніж суцільні).

З рис. 6.8 випливає, що нерівномірний початковий розподіл не завжди більш небезпечний для ініціювання тріщин, ніж рівномірний. Хоча для тонкого покриття, незалежно від типу підкладки, нерівномірний розподіл небезпечніший, ніж рівномірний: для випадку вольфрамової підкладки для товстого покриття (товщина 500 мкм) температура t_{cr} при $D_m > 0.257$ менша для покриття з рівномірним початковим розподілом, ніж для покриття *Type 1*.

Вплив товщини покриття на процес еволюції пошкодження проілюстровано на рис. 6.9. Як видно з рис. 6.9б, зі збільшенням товщини покриття на титановій підкладці критична температура досягнення критичного рівня D_m зростає для всіх типів початкової пористості завдяки зменшенню інтенсивності накопичення пошкодження (рис. 6.5б). Це особливо важливо для покриття *Type 1*. Для вольфрамової підкладки критична температура зменшується для покрить з рівномірним початковим розподілом і *Type 2*. Однак, вона зростає для *Type 1*, причому відмінність між *Type 2* і *Type 1* стає більшою. Треба зазначити, що відмінність між покриттями *Type 2* і з рівномірним початковим розподілом залишається приблизно такою ж. Відмітимо, що ця залежність температури від товщини в розглядуваному діапазоні товщин є практично лінійною.

Цікаво, що для вольфрамової підкладки при $\delta \approx 400$ мкм початково рівномірний розподіл стає більш небезпечним, ніж покриття *Type 1*.

Ці відмінності в особливостях еволюції пошкодження для двох типів підкладок визначаються різними типами невідповідності в коефіцієнтах теплового розширення підкладки і покриття (див. табл. 6.3) разом зі значеннями пружних властивостей (див. табл. 6.4).

Можна зауважити, що вплив технологічно наведеної анізотропії покриття з оксиду алюмінію на еволюцію пошкоджень також істотно залежить від вибору підкладки [516]: для всіх типів початкової пористості в покритті на підкладці з титанового сплаву при нагріві до 300^0C він нехтувально малий (не перевищує 0.1%). В той же час для випадку вольфрамової підкладки цей вплив доволі відчутний: двократне зменшення рівня анізотропії (яке характеризується відношенням модулів Юнга $E_{||}/E_{\perp}$ уздовж осьового і радіального напрямків) викликає майже дворазове збільшення швидкості накопичення пошкоджень для випадку рівномірної початкової пористості (рис. 7 у [516]). Таку відмінність між результатами для двох типів підкладки можна пояснити різними відмінностями між КЛТР підкладки та покриття. Для випадку одношарового покриття зі співвідношень (6.10), (6.12) і (6.9) можна отримати асимптотичні вирази для пружних складових головних деформацій для дуже тонких покрить ($\delta / R \to 0$):

$$e_{33}^{*i} \approx \frac{E_{||}\nu_{\perp}}{E_{\perp}\left(1-\nu_{||}\right)}\left(2\Phi_1^1(t)-\left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)\Phi^{\mathrm{T}}(t)\right), \tag{6.14}$$

$$e_{22}^{*i} \approx \left(1+\nu_{\mathrm{T}}\right)\Phi^{\mathrm{T}}(t)-\Phi_1^1(t). \tag{6.15}$$

З (6.14), (6.15) за врахування даних таблиць 6.3 та 6.4 випливає, що для підкладки з титанового сплаву лише колові деформації будуть додатними для розглядуваного діапазону теплового навантаження, в той час як для вольфрамової підкладки головним чинником є додатні радіальні деформації.

Висновки до розділу 6

У цьому розділі було розроблено і розвинуто підходи для дослідження процесу накопичення пошкоджень у елементах конструкцій з керамічними тонкими шаруватими і товстими неоднорідними покриттями під впливом теплових навантажень.

Підходи використовують загальну обчислювальну схему як ітераційну процедуру для визначення параметрів еволюції пошкоджень, яка включає аналітичний розв’язок відповідної проміжної граничної задачі термопружності на кожному ітераційному кроці.

Для неоднорідних тонких багатошарових керамічних покрить спрощення в процедурі розв’язування досягнуто за допомогою застосування математичної моделі з узагальненими граничними умовами для термомеханічного спряження підкладки із середовищем через покриття. Ці умови для керамічних покрить враховують такі їх особливості, як трансверсальна ізотропія, просторова неоднорідність (за товщиною) початкової пористості, температурна залежність термомеханічних властивостей покриття і підкладки, так само, як і залежність пружних модулів покриття від ступеня пошкодженості.

Для покрить довільної товщини було узагальнено аналітичний підхід, який базується на зведенні вихідної задачі термопружності до системи інтегральних рівнянь.

Чисельні розрахунки, проведені на основі запропонованих підходів, надали можливість досліджувати істотні особливості процесів накопичення пошкоджень при рівномірному нагріві конструкцій з тонкими багатошаровими і товстими покриттям.

Було встановлено, що у випадку тонких багатошарових покрить

- вплив проміжкового шару на еволюцію пошкоджень нехтувально малий;
- є істотна різниця в процесах еволюції пошкодження в різних шарах навіть для тонких багатошарових покрить;
- на відміну від одношарового покриття, незалежно від типу початкового розподілу пошкоджень, у випадку багатошарового покриття пошкодження є кусково-неперервною, немонотонною функцією, хоча в межах окремого шару пошкодження є неперервною і монотонною функцією;
- перехід до макроскопічного руйнування для випадку багатошарових покрить визначається не лише найвищим локальним рівнем початкової пористості, на відміну від ситуації для одношарового покриття;

а для випадку покрить довільної товщини

- тип підкладки взаємодіє з товщиною покриття у здійсненні впливу на характер і швидкість накопичення пошкоджень в керамічних покриттях;
- для товстих покрить, на відміну від тонких, нерівномірний розподіл початкової пористості не завжди небезпечніший відносно можливості ініціювання тріщин, ніж рівномірний;
- розподіл пошкоджень, викликаний нагрівом, дедалі більше відхиляється від початкового зі збільшенням товщини покриття.

РОЗДІЛ 7

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ З ТРІЩИНОЮ ПІД ПОКРИТТЯМ

У цьому розділі розглянуто нестаціонарну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям, що містить тріщину під покриттям, перпендикулярну до поверхні розділу. Задачу розв’язано на основі принципу суперпозиції та незв’язаної термопружності. Нестаціонарні розподіли температури та відповідні теплові напруження для системи без тріщини отримано в замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі з УГУ теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття. Задачу з тріщиною сформульовано як збурену змішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини рівне та протилежне за знаком термічним напруженням, отриманим для задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв’язується чисельно. Здійснено числові розрахунки для аналізу впливу покриття на температурні напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень.

Положення цього розділу відображено у публікації автора [511].

7.1. Вступ

Моделюванню та дослідженню процесів руйнування в тілах з покриттями за теплового навантаження присвячений ряд робіт [78, 335, 347, 350, 352, 355, 359-361, 368, 373, 374, 382, 389, 394, 396, 406, 408, 410, 411, 418-420, 432, 463, 485-488, 491, 533, 553-555, 567, 568, 578, 582-585]. У більшості випадків розглядались одношарові однорідні або неоднорідні покриття за однорідного або стаціонарного теплового навантаження [335, 347, 394, 406], під дією теплового удару [350, 382, 396, 410, 411, 463, 487, 491, 533, 553-555, 578], під дією теплого потоку [355, 359, 368, 373, 374, 389, 485, 491, 583-585], в умовах конвективного теплообміну з навколишнім середовищем [78, 352, 418, 432, 486, 488, 567]. Лише в [360, 361, 419, 420, 568, 582] досліджувались багатошарові покриття.

При розв'язуванні таких задач внаслідок лінійності застосовуються принцип суперпозиції і незв'язана квазістатична термопружність: спочатку визначається температурне поле у тілі, потім – напруження в середовищі без тріщини і, остаточно, задача з тріщиною формулюється з використанням цих перехідних температурних напружень для середовища без тріщини, які прикладаються до поверхні тріщини з протилежним знаком.

Для випадку теплового навантаження вже на першому етапі використання точних аналітичних розв'язків для визначення температурного поля та відповідних теплових напружень у багатошаровій системі викликає певні труднощі, оскільки вони досить громіздкі і в основному застосовуються до одношарових однорідних покрить в таких задачах [350, 382, 396, 463, 486-488, 491, 533, 553, 555].

Для розв'язування задач теплопровідності та термопружності для багатошарового середовища без тріщини можна використовувати аналітичні точні та наближені підходи, які були запропоновані в [32, 249, 328, 360, 376, 458, 471, 534, 535, 554]. Щоб уникнути труднощів, пов'язаних з чисельним оберненням перетворення Лапласа, як у [360, 361, 554], в [409, 412] використано підхід, який дозволив отримати асимптотичний розв'язок для температури у замкнутому вигляді, однак, тільки для малих часів. В [418-420, 582] для визначення температурного поля використовувалися методи скінченних різниць та скінченних елементів. Для випадку неперервно-неоднорідних покрить та тіл були спроби в [380, 407, 409, 410, 412, 534, 554] вирішити задачу для неоднорідного середовища, використовуючи модель шаруватої композитної пластини з однорідними шарами, щоб моделювати неоднорідність матеріалу. Однак, для розв'язування задач термопружності для тіл з тонким багатошаровим покриттям є ефективнішим підхід, заснований на моделі, яка відображає вплив тонких покрить за допомогою УГУ, оскільки він дає можливість отримати набагато простіший замкнений аналітичний розв'язок таких задач термопружності.

З іншого боку, зацікавленість у розв’язуванні задач з тріщинами для функціонально-градієнтних покрить та функціонально-градієнтних матеріалів для випадків не тільки заданого закону зміни властивостей матеріалу за просторовою координатою (степеневого, експоненціального чи лінійного), але також і для довільного, спонукало розробку підходів для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень для кусково-однорідних середовищ [554, 556].

У цьому розділі зі застосуванням підходу, запропонованого в [556] для функціонально-градієнтної пластини, та розв’язку задачі теплопровідності з параграфа 2.1.4, який ґрунтується на концепції УГУ, отримано розв’язок і проведено дослідження для системи півпростір – багатошарове покриття з перпендикулярною до поверхні поділу тріщиною під покриттям.

7.2. Формулювання задачі

Якщо підкладка є значно товстішою за покриття і розмір тріщини, то система підкладка–покриття може бути наближена як пружне покриття, з’єднане з півскінченною пружною основою (рис. 7.1). Вона складається з півпростору з нанесеним багатошаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ з внутрішньою тріщиною довжини $l = c - b$, розташованою перпендикулярно поверхні з'єднання. Прямокутні координати (x, y, z) вибрані таким чином, що площина $y = 0$ збігається з поверхнею поділу покриття–підкладка, а вісь y вирівняна вздовж поверхні тріщини. Спочатку система перебуває в рівно-мірному температурному полі t_0. Поверхня покриття $y = -\delta$ раптово піддається конвективному обміну з довкіллям температури t_C.

При розв’язуванні задачі вважається, що матеріал як шарів покриття, так і підкладки, є однорідним, ізотропним та лінійно пружним, термомеханічні сталі не залежать від температури, а всі ефекти термопружного взаємозв’язку та інерційні ефекти є незначними.

У цій лінійній задачі з тріщиною використовується метод суперпозиції. Спочатку нестаціонарні температурні напруження для тіла без тріщини отримуються за допомогою розподілу температури, одержаного з розв’язку задачі теплопровідності. Далі задача з тріщиною зводиться до збуреної змішаної крайової задачі, в якій навантаження поверхні тріщини повинне бути рівним і протилежним температурним напруженням.

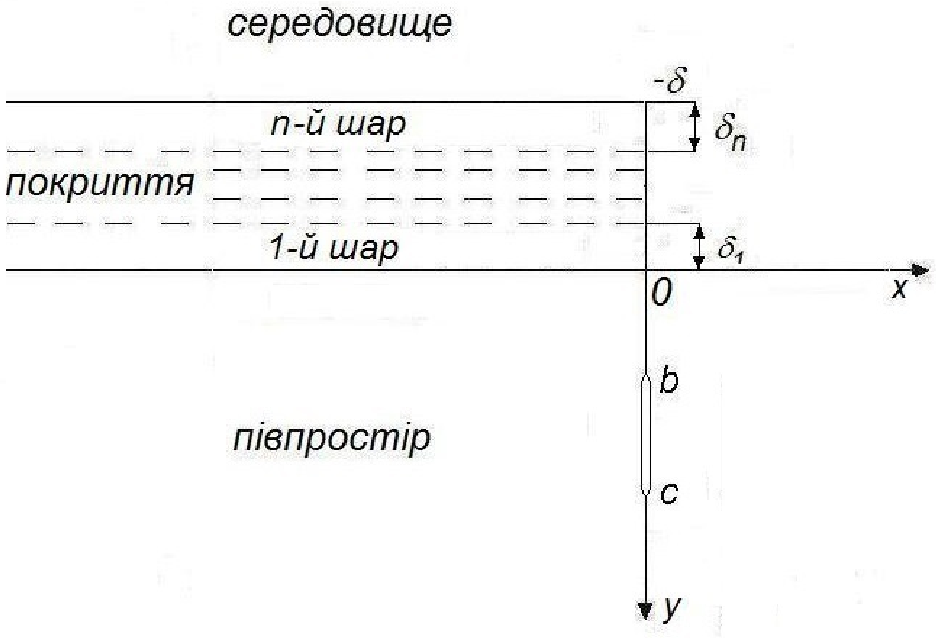


Рис. 7.1. Схема об’єкту

З рис.7.1 випливає, що за врахування симетрії умов навантаження можна досліджувати задачу, розглядаючи лише половину ($x > 0$) середовища. Дотримуючись принципу суперпозиції, зводимо задачу до збуреної, в якій навантаження поверхні тріщини визначаються відповідно до формули (2.87) з протилежним знаком. Тоді квазістатична плоска задача теорії пружності для півпростору з тріщиною включає в себе:

рівняння рівноваги для кожного шару покриття та півпростору

$$\left(\overline{\nu}_j-1\right)\nabla^2 u^j+2\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v^j}{\partial x\partial y}\right)=0, \tag{7.1а}$$

$$\left(\overline{\nu}_j-1\right)\nabla^2 v^j+2\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v^j}{\partial y^2}\right)=0,\ \ j=\mathrm{T},1,\ldots,n, \tag{7.1б}$$

(де u^j, v^j є x, y компоненти вектора переміщень, $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – двовимірний оператор Лапласа);

співвідношення між напруженнями та переміщеннями

$$\sigma_{xx}^j=\frac{G_j}{\overline{\nu}_j-1}\left(\left(1+\overline{\nu}_j\right)\frac{\partial u^j}{\partial x}+\left(3-\overline{\nu}_j\right)\frac{\partial v^j}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{yy}^j=\frac{G_j}{\overline{\nu}_j-1}\left(\left(3-\overline{\nu}_j\right)\frac{\partial u^j}{\partial x}+\left(1+\overline{\nu}_j\right)\frac{\partial v^j}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{xy}^j=G_j\left(\frac{\partial u^j}{\partial y}+\frac{\partial v^j}{\partial x}\right); \tag{7.2}$$

граничні умови на зовнішній поверхні, вільній від навантаження

$$\sigma_{xy}^n(x,-\delta,\tau)=0,\ \sigma_{yy}^n(x,-\delta,\tau)=0,\quad 0\le x<\infty; \tag{7.3}$$

умову симетрії

$$\sigma_{xy}^i(0,y,\tau)=0,\ y_i\le y\le y_{i-1},\ i=\overline{1,n},\ \ \sigma_{xy}^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)=0,\ \ 0\le y<\infty; \tag{7.4}$$

умови регулярності на нескінченності

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\sigma_{pq}^j(x,y,\tau)=0,\ \ p,q=x,y;\ \ j=\mathrm{T},1,\ldots,n; \tag{7.5}$$

умови ідеального контакту неперервності переміщень та напружень між шарами покриття і покриттям та півпростором:

$$\begin{Bmatrix}u^i(x,y_{i-1},\tau)\\ v^i(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{xy}^i(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{yy}^i(x,y_{i-1},\tau)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u^{i-1}(x,y_{i-1},\tau)\\ v^{i-1}(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{xy}^{i-1}(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{yy}^{i-1}(x,y_{i-1},\tau)\end{Bmatrix},\qquad \begin{Bmatrix}u^1(x,y_{i-1},\tau)\\ v^1(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{xy}^1(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{yy}^1(x,y_{i-1},\tau)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u^{\mathrm{T}}(x,y_{i-1},\tau)\\ v^{\mathrm{T}}(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{xy}^{\mathrm{T}}(x,y_{i-1},\tau)\\ \sigma_{yy}^{\mathrm{T}}(x,y_{i-1},\tau)\end{Bmatrix},$$

$$i=\overline{2,n},\qquad 0\le x<\infty; \tag{7.6}$$

змішані граничні умови на берегах тріщини

$$u^i(0,y,\tau)=0\,,\;\; y_i\le y\le y_{i-1}\,,\; i=\overline{1,n}\,,\;\; u^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)=0\,,\; 0\le y<b,\;\; c<y<\infty, \tag{7.7а}$$

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)=-\sigma^{\mathrm{T}}(y,\tau)\,,\quad b<y<c\,, \tag{7.7б}$$

де G_j позначає модуль зсуву, $\overline{\nu}_j=3-4\nu_j$, $y_0=0$, $y_i=-\sum\limits_{m=1}^{i}\delta_m$, $i=\overline{1,n}$, $-\sigma^{\mathrm{T}}$ є нормальні напруження, прикладені на поверхнях тріщини, та, відповідно до принципу суперпозиції, рівні за величиною і протилежні за знаком температурним напруженням, які визначаються із задачі для півпростору без тріщини (параграф 2.3.1). У даному випадку їх можна записати у вигляді

$$\sigma^{\mathrm{T}}(y,\tau)=-\frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\beta_{\mathrm{T}}\left(t_{\mathrm{T}}\left(y,\tau\right)-t_0\right). \tag{7.8}$$

Тут $t_{\mathrm{T}}\left(y,\tau\right)$ – розв’язок задачі теплопровідності у підкладці за конвективного нагріву (охолодження) півпростору з багатошаровим покриттям (підрозділ 2.1). Має місце зв'язок з відповідним безрозмірним розв’язком цієї задачі

$$t_{\mathrm{T}}=t_0+\left(t_{\mathrm{C}}-t_0\right)\vartheta_{\mathrm{T}}\,, \tag{7.9}$$

де для визначення ϑ_{T} можуть бути використані формули (2.40), (2.42) або (2.44) залежно від значень коренів характеристичного рівняння (2.9).

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) I моди деформації біля вершин тріщини $y=b$ і $y=c$ визначаються як

$$k_{\mathrm{I}}(b,\tau)=\lim_{y\to b-0}\sqrt{2(b-y)}\,\sigma_{xx}^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)\,, \tag{7.10а}$$

$$k_{\mathrm{I}}(c,\tau)=\lim_{y\to c+0}\sqrt{2(y-c)}\,\sigma_{xx}^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)\,. \tag{7.10б}$$

7.3. Сингулярне інтегральне рівняння

Визначаючи функцію стрибка переміщень $g(y,\tau)$ вздовж берегів тріщини як $g(y,\tau)=\dfrac{\partial u^{\mathrm{T}}(0,y,\tau)}{\partial y}$, $0\le y<\infty$ і застосовуючи методику, запропоновану в [556], зводимо задачу до результуючого сингулярного інтегрального рівняння для шуканої функції густини $g(y,\tau)$:

$$\frac{1}{\pi}\frac{4G_{\mathrm{T}}}{1+\bar{\nu}_{\mathrm{T}}}\int_b^c \frac{1}{\zeta-y}g(\zeta,\tau)d\zeta+\int_b^c \Pi(y,\zeta)g(\zeta,\tau)d\zeta=-\sigma^{\mathrm{T}}(y,\tau),\ \ b<y<c, \tag{7.11}$$

де ядро $\Pi(y,\zeta)$ визначається як

$$\Pi(y,\zeta)=\frac{2}{\pi}G_{\mathrm{T}}\sum_{j=0}^{n}\Pi_j(y,\zeta), \tag{7.12}$$

$$\Pi_j(y,\zeta)=\int_0^\infty \boldsymbol{\chi}(s,y)\boldsymbol{\Lambda}_j(s)\mathbf{P}_j(s,\zeta)ds,\quad j=\overline{0,n}, \tag{7.13}$$

$$\boldsymbol{\chi}(s,y)=\left[2se^{-sy},\ (2sy+\bar{\nu}_{\mathrm{T}}-3)e^{-sy}\right],$$

$$\mathbf{P}_n=\left[f_{3n},f_{4n}\right]^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{P}_J=\left[f_{1J},f_{2J},f_{3J},f_{4J}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$f_{3n}(s,\zeta)=\frac{2G_n}{1+\bar{\nu}_n}(\zeta s-1)e^{-s\zeta},\ \ f_{4n}(s,\zeta)=-\frac{2G_n}{1+\bar{\nu}_n}\zeta se^{-s\zeta},$$

$$f_{1J}(s,\zeta)=\left(\frac{1}{1+\bar{\nu}_{J+1}}-\frac{1}{1+\bar{\nu}_J}\right)\left(\zeta-\tilde{y}_J\right)e^{-(\zeta-\tilde{y}_J)s},$$

$$f_{2J}(s,\zeta)=\left(\frac{1}{1+\bar{\nu}_{J+1}}-\frac{1}{1+\bar{\nu}_J}\right)\left(\frac{1}{s}+\tilde{y}_J-\zeta\right)e^{-(\zeta-\tilde{y}_J)s},$$

$$f_{3J}(s,\zeta)=2\left(\frac{G_{J+1}}{1+\bar{\nu}_{J+1}}-\frac{G_J}{1+\bar{\nu}_J}\right)\left(s\left(\zeta-\tilde{y}_J\right)-1\right)e^{-(\zeta-\tilde{y}_J)s},$$

$$f_{4J}(s,\zeta)=2\left(\frac{G_{J+1}}{1+\bar{\nu}_{J+1}}-\frac{G_J}{1+\bar{\nu}_J}\right)s\left(\tilde{y}_J-r\right)e^{-(\zeta-\tilde{y}_J)s},$$

$$\tilde{y}_J=y_J+\delta,\ \ J=\overline{0,n-1}.$$

Тут використано позначення $G_0 = G_{\text{T}}$, $\bar{\nu}_0 = \bar{\nu}_{\text{T}}$; а 2×2 матриця $\mathbf{\Lambda}_n(s)$ є підматрицею матриці $\mathbf{Z}(s)^{-1}$, що складається з $(4n+1)$ до $(4n+2)$ рядків та перших двох стовпців цієї матриці $\mathbf{Z}(s)^{-1}$, 2×4 матриця $\mathbf{\Lambda}_J(s)$ (для $J=\overline{0,n-1}$) є підматрицею з $(4n+1)$ до $(4n+2)$ рядків та $(4(n-J)-1)$ до $(4(n-J)+2)$ стовпців матриці $\mathbf{Z}(s)^{-1}$; $(4n+2)\times(4n+2)$ матриця $\mathbf{Z}(s)$ визначається як

$$\mathbf{Z}(s)=\begin{bmatrix}
\Xi_{bn}(s,0) & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0\\
\Xi_{\mathbf{n}}(s,\tilde{y}_{n-1}) & -\Xi_{n-1}(s,\tilde{y}_{n-1}) & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \Xi_{n-1}(s,\tilde{y}_{n-2}) & -\Xi_{n-2}(s,\tilde{y}_{n-2}) & \ldots 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots\Xi_3(s,\tilde{y}_2) & -\Xi_2(s,\tilde{y}_2) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \Xi_2(s,\tilde{y}_1) & -\Xi_1(s,\tilde{y}_1) & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \Xi_1(s,\tilde{y}_0) & -\Xi_0(s,\tilde{y}_0)
\end{bmatrix},$$

де

$$\Xi_{bi}(s,y)=G_i\begin{bmatrix} 2se^{sy} & \left(1-\bar{\nu}_i+2sy\right)e^{sy} & -2se^{-sy} & \left(1-\bar{\nu}_i-2sy\right)e^{-sy}\\ -2se^{sy} & \left(1+\bar{\nu}_i-2sy\right)e^{sy} & -2se^{-sy} & -\left(1+\bar{\nu}_i+2sy\right)e^{-sy}\end{bmatrix},$$

$$\Xi_{ai}(s,y)=\begin{bmatrix} e^{sy} & ye^{sy} & e^{-sy} & ye^{-sy}\\ -e^{sy} & \left(\bar{\nu}_i/s-y\right)e^{sy} & e^{-sy} & \left(\bar{\nu}_i/s+y\right)e^{-sy}\end{bmatrix},\quad i=1,\ldots,n,$$

$$\Xi_{b\text{T}}(s,y)=G_{\text{T}}\begin{bmatrix} -2se^{-sy} & \left(1-\bar{\nu}_{\text{T}}-2sy\right)e^{-sy}\\ -2se^{-sy} & -\left(1+\bar{\nu}_{\text{T}}+2sy\right)e^{-sy}\end{bmatrix},\ \Xi_{a\text{T}}(s,y)=\begin{bmatrix} e^{-sy} & ye^{-sy}\\ e^{-sy} & \left(\bar{\nu}_{\text{T}}/s+y\right)e^{-sy}\end{bmatrix},$$

$$\Xi_j(s,y)=\begin{bmatrix}\Xi_{aj}(s,y)\\ \Xi_{bj}(s,y)\end{bmatrix},\quad j=\text{T},1,\ldots,n.$$

Для випадку внутрішньої тріщини $g(y,\tau)$ повинна задовольняти умову однозначності

$$\int_b^c g(\zeta,\tau)d\zeta=0. \qquad (7.14)$$

Рівняння (7.11), (7.14) нормалізуються так [383, 555]:

$$(y,\zeta)=\frac{c-b}{2}(\bar{y},\bar{\zeta})+\frac{c+b}{2},\ g(y,\tau)=\bar{g}(\bar{y},\tau), \tag{7.15а}$$

$$\Pi(y,\zeta)=\overline{\Pi}(\bar{y},\bar{\zeta}),\ \sigma^{\mathrm{T}}(y,\tau)=\bar{\sigma}^{\mathrm{T}}(\bar{y},\tau), \tag{7.15б}$$

тоді ці рівняння мають вигляд

$$\frac{1}{\pi}\frac{4G_{\mathrm{T}}}{1+\bar{\nu}_{\mathrm{T}}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{y}}\bar{g}\left(\bar{\zeta},\tau\right)d\bar{\zeta}+\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}\overline{\Pi}\left(\bar{y},\bar{\zeta}\right)\bar{g}\left(\bar{\zeta},\tau\right)d\bar{\zeta}=-\bar{\sigma}^{\mathrm{T}}(\bar{y},\tau),\ -1<\bar{y}<1, \tag{7.16}$$

$$\int_{-1}^{1}\bar{g}\left(\bar{\zeta},\tau\right)d\bar{\zeta}=0. \tag{7.17}$$

Слід відзначити, що підхід, запропонований в [556] для багатошарової пластини, тут модифіковано для випадку, коли одна складова – підкладка є півпростір, тріщина лежить у основі, нульове положення для осі y перенесено до поверхні поділу покриття–підкладка, а система індексів переформульована.

7.4. Розв’язування сингулярного інтегрального рівняння і визначення КІН

Інтегральне рівняння (7.16) має сингулярне ядро типу Коші. Поведінка в околі вершин тріщини може бути описана звичайною кореневою особливістю. Для задачі з внутрішньою тріщиною розв’язок рівняння (7.16) може бути записаний як

$$\bar{g}\left(\bar{\zeta},\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}}\sum_{m=1}^{M}B_m(\tau)T_m\left(\bar{\zeta}\right), \tag{7.18}$$

де $B_m(\tau)$ – невідомі сталі для кожного заданого моменту часу τ, M – число членів скінченої суми ряду, T_m – поліном Чебишева першого роду порядку *m*. Потрібно зазначити, що розвинення (7.18) тотожно задовольняє умову однозначності (7.17).

Відповідно до схеми методу колокацій (наприклад, [233, 383]) підставляння (7.18) в (7.16) приводить до системи алгебричних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^{M} B_m(\tau)\left(\frac{4G_{\text{T}}}{1+\bar{\nu}_{\text{T}}} U_{m-1}(\bar{y}_k) + \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} \overline{\Pi}\left(\bar{y}_k, \bar{\zeta}\right) \frac{T_m(\bar{\zeta})}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}} d\bar{\zeta}\right) = -\bar{\sigma}^{\text{T}}(\bar{y}_k, \tau),\ k = \overline{1, M}, \quad (7.19)$$

де U_m – поліном Чебишева другого роду порядку m; корені полінома Чебишева першого роду $\bar{y}_k = \cos\dfrac{\pi(2k-1)}{2M}$ (де M – загальна кількість вузлів колокації) використовуються як точки колокації для шуканої функції $\bar{g}(\bar{y}, \tau)$ в інтервалі $-1 < \bar{y} < 1$.

КІН, які визначені формулами (7.10), виражаються через функцію густини [383]:

$$k_{\text{I}}(b, \tau) = \frac{4G_{\text{T}}}{1+\bar{\nu}_{\text{T}}} \lim_{y \to b+0} \sqrt{2(y-b)}\, g(y, \tau), \quad (7.20\text{а})$$

$$k_{\text{I}}(c, \tau) = -\frac{4G_{\text{T}}}{1+\bar{\nu}_{\text{T}}} \lim_{y \to c-0} \sqrt{2(c-y)}\, g(y, \tau). \quad (7.20\text{б})$$

Підставляння виразу (7.18) в (7.20) з врахуванням (7.15а) дає розрахункові формули для КІН

$$k_{\text{I}}(b, \tau) = \frac{4G_{\text{T}}}{1+\bar{\nu}_{\text{T}}} \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{m=1}^{M} (-1)^m B_m(\tau). \quad (7.21\text{а})$$

$$k_{\text{I}}(c, \tau) = -\frac{4G_{\text{T}}}{1+\bar{\nu}_{\text{T}}} \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{m=1}^{M} B_m(\tau). \quad (7.21\text{б})$$

Тут $B_m(\tau)$ визначаються як розв’язок системи лінійних алгебричних рівнянь (7.19).

Безрозмірний КІН може бути визначений як

$$\tilde{k}_{\text{I}} = \frac{k_{\text{I}}}{\sigma_* \sqrt{y_*}}, \quad (7.22)$$

де y_* є масштабний параметр, який використовується для обезрозмірювання просторової та часової координат, а $\sigma_* = -\dfrac{E_{\text{T}}\beta_{\text{T}}\left(t_C - t_0\right)}{1-\nu_{\text{T}}}$.

7.5. Верифікація підходу

Спочатку рівняння (7.16) застосовується для розв'язання задачі про тріщину для однорідного півпростору без покриття, а результати порівнюються з результатами, наведеними в [489].

Асимптотичні значення при $\tau \to \infty$ нормалізованих КІН залежно від довжини та розташування тріщини наведені в табл. 7.1 у верхньому рядку відповідно до даних на рис. 4-5 у [489] і в нижніх рядках – згідно з розв’язком рівняння (7.16) і формулами (7.21), (7.22). Тут масштабний параметр приймається як $y_* = l/2$. Також показана кількість точок колокації M, при якій отримуються чотири значущих цифри (похибка при обчисленні інтегралів в (7.13), (7.19) приймається як 10^{-6}).

Таблиця 7.1

Асимптотичні значення нормалізованих КІН
залежно від довжини і розташування тріщини

$\frac{c+b}{c-b}$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} \tilde{k}_{\mathrm{I}}(b,\tau)$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} \tilde{k}_{\mathrm{I}}(c,\tau)$
3.0	1.034 1.035 ($M = 3$)	1.024 1.025 ($M = 3$)
1.5	1.203 1.203 ($M = 5$)	1.096 1.097 ($M = 4$)
1.1	1.758 1.757 ($M = 8$)	1.211 1.211 ($M = 8$)
1.01	3.638 3.627 ($M = 20$)	1.329 1.329 ($M = 15$)

Можна помітити, що деяка різниця в результатах (0,3%) у порівнянні з [489] спостерігається лише для лівої вершини тріщини для граничного випадку $(c+b)/(c-b) = 1.01$, тобто для тріщин, дуже близьких до поверхні півпростору.

Наступний приклад продемонструє корисність та універсальність запропонованого підходу до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння та знаходження відповідного КІН у задачі для півпростору з одношаровим покриттям з тріщиною під покриттям за теплового удару, яка була розв'язана та проаналізована в [487]. Там ця задача розглядається для шару з нержавкої сталі, привареної до набагато товстішої основи з феритної сталі, які апроксимують плакіровані резервуари високого тиску дуже великого діаметру. Для усталеного стану ($\tau \to \infty$) термомеханічні властивості, що використовуються при обчисленні для цих матеріалів, відрізняються лише коефіцієнтом теплового розширення $\beta_{\mathrm{T}} / \beta_1 = 0.75$. Асимптотичні значення при $\tau \to \infty$ нормалізованих КІН залежно від співвідношення довжини тріщини та товщини шару покриття наведені в табл. 7.2 у верхніх рядках відповідно до даних на рис. 8-9 в [474], а в нижніх рядках – згідно з розв'язком рівняння (7.16) і формулами (7.21), (7.22). Тут $y_* = l/2$, $b = 0$, але $\sigma_* = -\dfrac{E_1\beta_1(t_{\mathrm{C}} - t_0)}{1-\nu_1}$.

Таблиця 7.2

Асимптотичні значення нормалізованих КІН
залежно від відношення довжини тріщини до товщини шару покриття

l/δ	$\lim\limits_{\tau\to\infty} \tilde{k}_{\mathrm{I}}(b,\tau)$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} \tilde{k}_{\mathrm{I}}(c,\tau)$
14.0	1.205 1.196 ($M = 6$)	0.8964 0.8898 ($M = 8$)
9.0	1.078 1.070 ($M = 5$)	0.8724 0.8661 ($M = 6$)
4.0	0.9090 0.9025 ($M = 5$)	0.8285 0.8225 ($M = 5$)
1.0	0.7813 0.7759 ($M = 3$)	0.7740 0.7684 ($M = 2$)
0.025	0.7553 0.7500 ($M = 1$)	0.7554 0.7500 ($M = 1$)

Обчислення, виконані на основі використовуваного підходу, забезпечили добру відповідність з результатами в [487] (різниця в результатах 0,7%) при заданій точності 10^{-6} при розрахунку інтегралів в (7.13), (7.19).

Остаточно, як тестова, розглядається нестаціонарна задача про охолодження півпростору з покриттям [360]. Ця задачі відповідає частковому випадку граничної умови теплообміну першого роду, коли задається лише розподіл температури на граничній поверхні покриття. Тоді УГУ має вигляд (1.43)

$$\lambda_{\text{Т}} \frac{\partial t_{\text{Т}}}{\partial y} + H\left(t_{\text{С}} - t_{\text{Т}}\right) = 0 \text{ при } y = 0. \tag{7.23}$$

Тобто формально УГУ розглядається як гранична умова конвективного теплообміну третього роду [144, 471] з коефіцієнтом теплообміну, чисельно рівним оберненому тепловому опору покриття H.

Тоді розв'язок задачі теплопровідності в півпросторі можна записати у такому безрозмірному вигляді [144]

$$\vartheta_{\text{Т}}(\overline{\overline{y}}, \text{Fo}) = \text{erfc}\,\overline{\overline{\varphi}} - F_5(\overline{\overline{y}}, \text{Fo}), \quad 0 \le \overline{\overline{y}} < \infty, \tag{7.24}$$

де аналогічно позначенням підрозділу 2.1, зокрема (2.38), (2.46), (2.47)

$$\vartheta_{\text{Т}} = \frac{t_{\text{Т}} - t_0}{t_{\text{С}} - t_0}, \qquad \overline{\overline{y}} = \frac{y}{y_*}, \qquad \text{Fo} = \frac{a_{\text{Т}}\tau}{y_*^2},$$

$$F_5(\overline{\overline{y}}, \text{Fo}) = \exp\left(\overline{\overline{q}}_5\overline{\overline{y}} + \overline{\overline{q}}_5^2\text{Fo}\right)\text{erfc}\left(\overline{\overline{\varphi}} + q_5\sqrt{\text{Fo}}\right), \qquad \overline{\overline{q}}_5 = \frac{Hy_*}{\lambda_{\text{Т}}} = \xi^{-1}, \quad \overline{\overline{\varphi}} = \frac{\overline{\overline{y}}}{2\sqrt{\text{Fo}}}.$$

Підставляючи (7.24) у формулу відновлення (1.54), яка у використовуваних безрозмірних координатах має вигляд

$$\vartheta_i(\overline{\overline{y}}, \text{Fo}) = \vartheta_{\text{Т}}(0, \text{Fo}) + \overline{\overline{r}}_i(\overline{\overline{y}}) \frac{\partial \vartheta_{\text{Т}}}{\partial \overline{\overline{y}}}(0, \text{Fo}), \quad \overline{\overline{y}}_i \le \overline{\overline{y}} \le \overline{\overline{y}}_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{7.25}$$

отримуємо такий вираз для температури в покритті

$$\vartheta_i(\overline{\overline{y}}, \text{Fo}) = 1 - \left(1 + \xi^{-1}\overline{\overline{r}}_i(\overline{\overline{y}})\right) F_5(0, \text{Fo}), \tag{7.26}$$

де $\vartheta_i = \dfrac{t_i - t_0}{t_\mathrm{C} - t_0}$, $\overline{\overline{r}}_i(\tilde{y}) = \lambda_\mathrm{T}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j/\left(y_*\lambda_j\right) + \left(\overline{\overline{y}} - \overline{\overline{y}}_{i-1}\right)/\lambda_i\right)$, $\overline{\overline{y}}_j = y_j \big/ y_*$, $j = \overline{0,n}$.

У [360] розглянуто задачу охолодження півпростору з покриттям, представленим низьколегованою сталевою підкладкою, пластованою аустенітною сталлю та перехідним шаром, відносно властивостей якого вважається, що вони мають середні характеристик матеріалів підкладки та зовнішнього шару покриття.

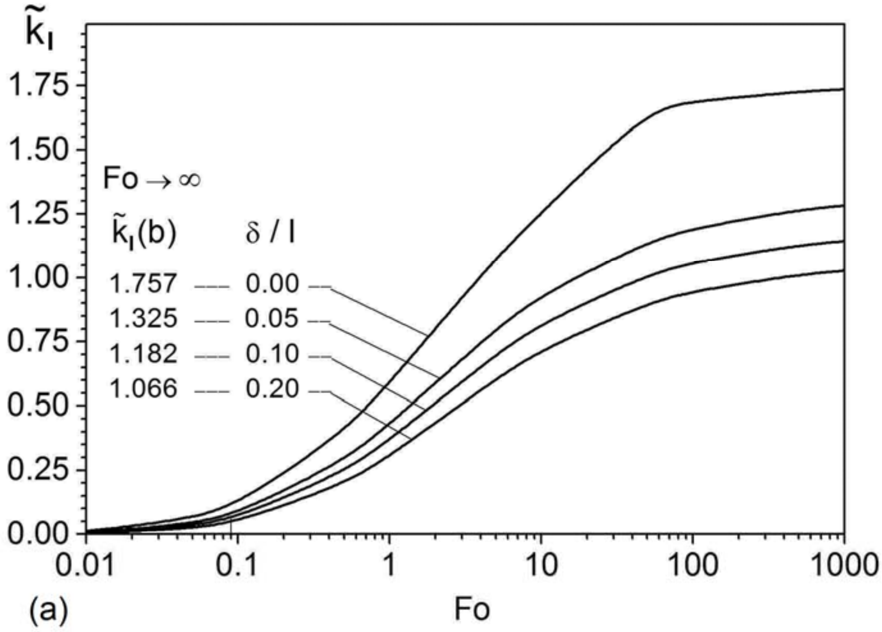
Результати обчислення розподілу нестаціонарних теплових напружень за формулами (2.87) із заміною $\overline{z}$ на $\overline{y}$, (7.24) та (7.26) у півпросторі з покриттям без тріщини ідеально узгоджуються з результатами, наведеними на рис. 2 у [360]. Також є задовільне узгодження (похибка не перевищує 4%) для всіх результатів аналізу КІН для цієї задачі, представлених на рис. 4-10 у [360] для випадку східчастого охолодження (step cooling) системи.

7.6. Числові результати

Проведемо чисельний аналіз КІН для випадку тріщини під покриттям в підкладці з нержавкої сталі 316L з двошаровим покриттям WC-Co/Cr-Ni під час процесу конвективного охолодження. Відношення $\delta_2 : \delta_1$ товщини верхнього шару WC-Co до товщини зв'язуючого шару Cr-Ni приймається як 4:1 (за винятком рис. 7.3). Теплофізичні властивості компонентів системи подано в табл. 3.3. Масштабний параметр y_* береться як половина довжини тріщини $y_* = l/2$ (крім розрахунків для рис. 7.5). Критерій Біо та число Фур'є визначаються за співвідношеннями $\mathrm{Bi} = \mu y_*/\lambda_\mathrm{T}$, $\mathrm{Fo} = a_\mathrm{T}\tau/y_*^2$.

Результати для нормалізованих коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщини під покриттям, розташованої перпендикулярно поверхні поділу півпростору–покриття, наведено на рис. 7.2-7.5. Розрахунки для рис. 7.2, 7.3, 7.5 проведено при $\mathrm{Bi} = 1$, для рис. 7.2-7.4 при $(c+b)/(c-b) = 1.1$.

Результати зміни з часом КІН представлені на рис. 7.2а на краю b та на рис.7.2б на краю c для різних товщин всього покриття. Можна відзначити, що як КІН, так і час нормалізуються відносно половини довжини тріщини ($y_* = l/2$), так само як у [360, 489].



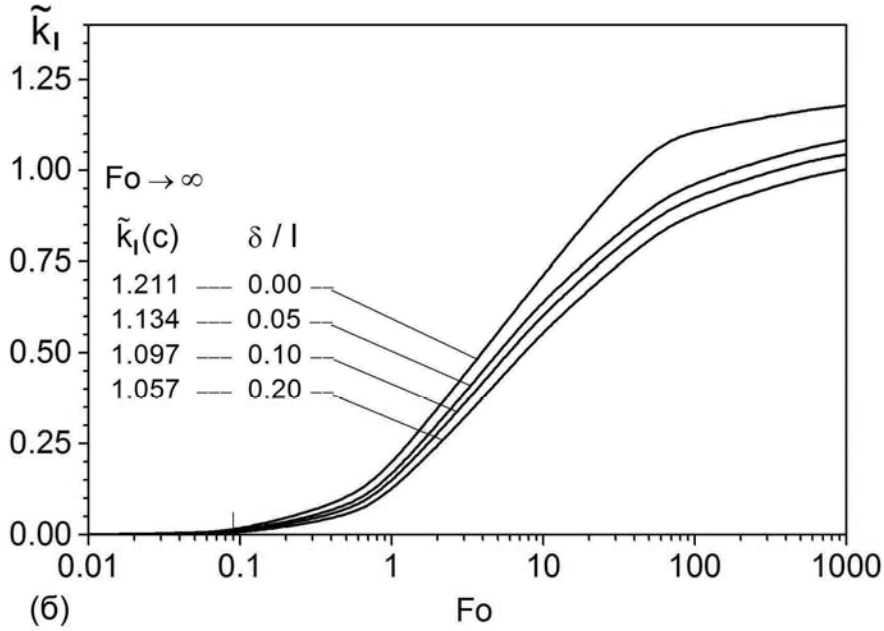
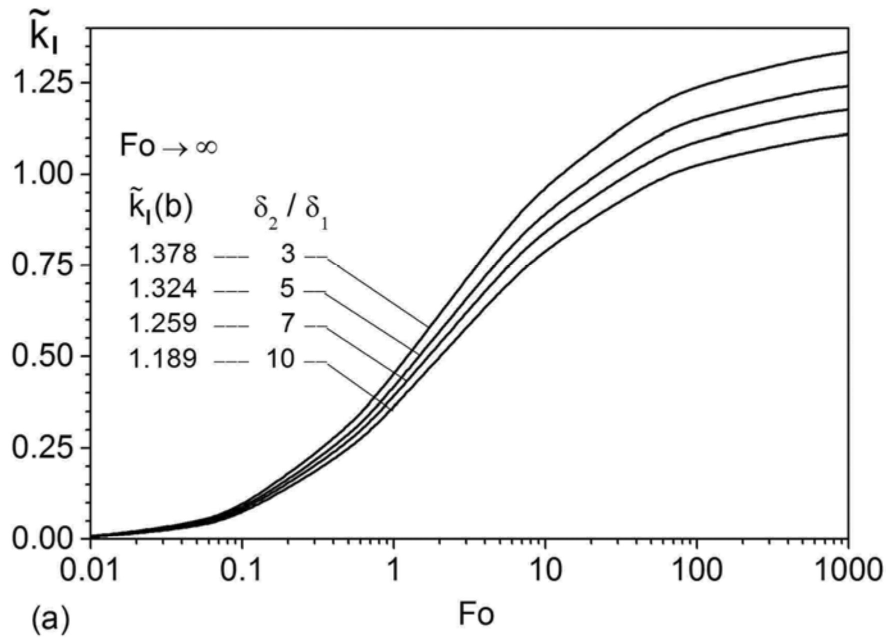


Рис. 7.2. Зміна з часом коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{k}_{\mathrm{I}}$ залежно від параметра δ / l на краях b та c

Як можна було очікувати, наявність покриття та збільшення його товщини призводять до зменшення КІН (оскільки фактичне збільшення відстані між тріщиною та зовнішньою поверхнею, а також термобар'єрні властивості покриття, спричиняють зменшення градієнта і величини температурних напружень). Ці висновки щодо впливу товщини покриття на рівень КІН для внутрішньої тріщини узгоджуються з висновками та результатами у [360, 487]. Також можна зазначити, що вказані значення КІН в усталеному стані для лівої та правої вершин тріщини у випадку півпростору без покриття на рис. 7.2 ($\delta / l = 0$) збігаються з результатами на рис. 4, 5 в [489], так само, як і в табл. 7.1.



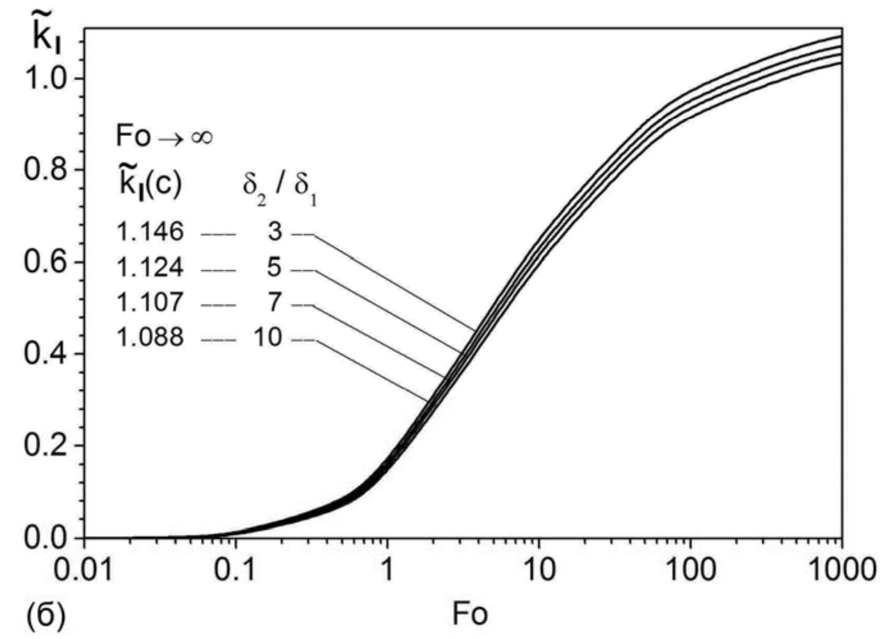


Рис. 7.3. Зміна з часом коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{k}_{\rm I}$ залежно від товщини основного шару покриття на краях b та c

На рис. 7.3 показано вплив товщини основного шару покриття на КІН. Розрахунки проведено для різних відношень товщини верхнього шару WC-Co до товщини зв'язуючого шару Cr-Ni, від 3:1 до 10:1, за фіксованих довжини тріщини і товщини проміжкового шару $\delta_1 / l = 0.01$. Як бачимо, збільшення товщини верхнього шару призводить до зменшення значень КІН. Цей вплив більш відчутний на кінчику тріщини, розташованої ближче до поверхні поділу.

Результати зміни безрозмірного КІН з безрозмірним часом Фур'є подані на рисунку 7.4 на краю b (суцільні криві) та краю c (штрихові криві) для різних значень критерію Ві. Розрахунки для рис. 7.4 проведено при $\delta / l = 0.05$. Як видно з рисунка, зі збільшенням Ві збільшуються КІН на обидвох кінцях тріщини внаслідок інтенсифікації процесу теплообміну, досягаючи максимальні значення при $\mathrm{Bi} = \infty$, які відповідають екстремальному випадку теплового навантаження. Можна зауважити, що такий вплив критерію Ві на поведінку КІН якісно подібний до впливу параметра часу наростання (ramp duration) за умови теплового удару [487, 489, 360].

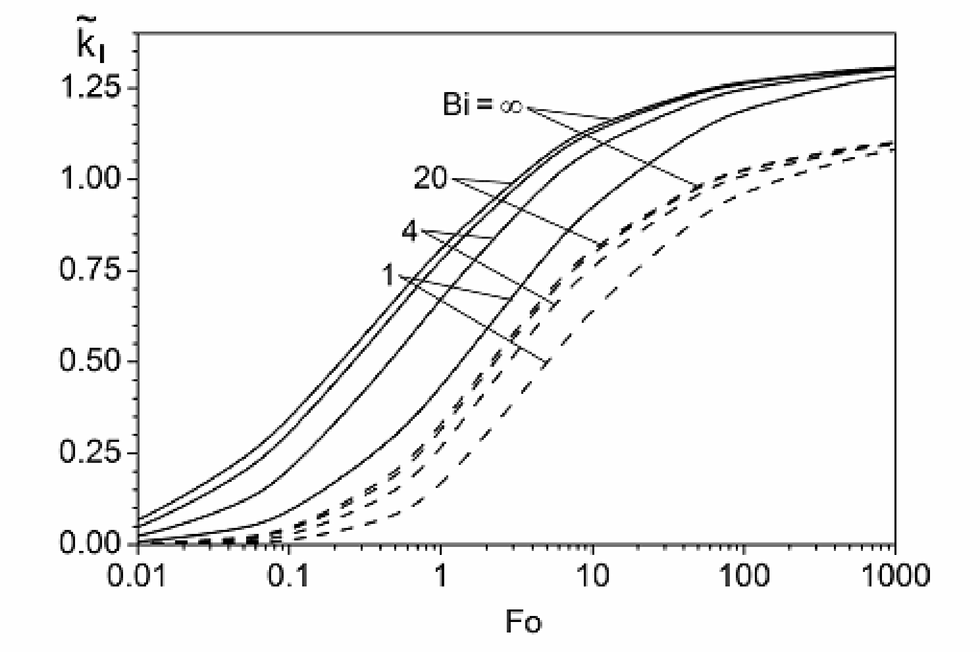


Рис. 7.4. Зміна з часом коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{k}_\mathrm{I}$ залежно від критерію Ві на краю b (суцільні криві) та краю c (штрихові криві)

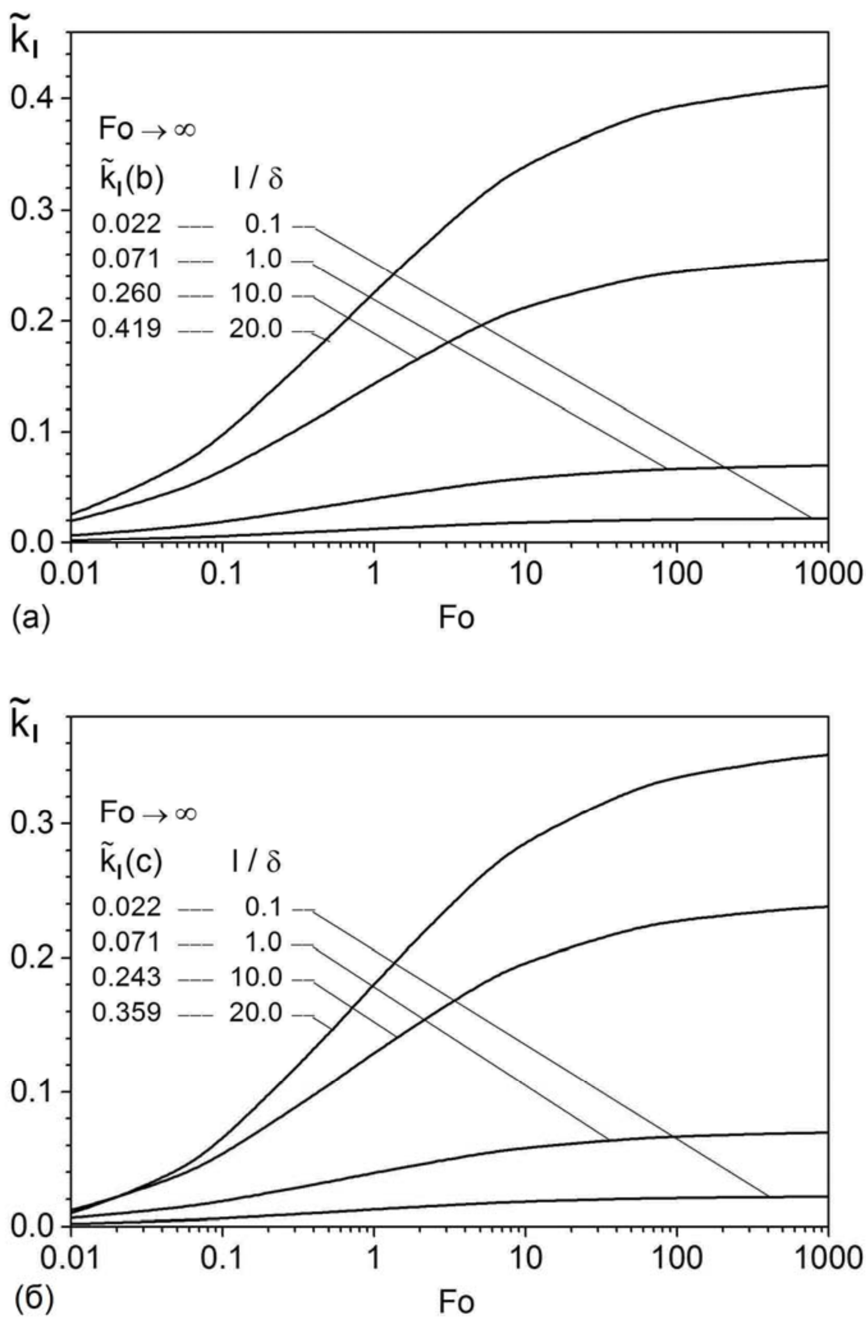


Рис. 7.5. Зміна з часом коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{k}_{\mathrm{I}}$ залежно від довжини тріщини на краях b та c

Для аналізу залежності КІН від довжини тріщини прийнято, що масштабний параметр $y_* = 100\delta$ і проведено розрахунок для фіксованих товщини покриття та відстані краю тріщини від поверхні поділу ($b = \delta$). На рис. 7.5 показано зміну КІН з часом для різних значень довжини тріщини. Як видно з рисунка, відбувається монотонне збільшення КІН зі збільшенням довжини тріщини. Можна відзначити, що значення КІН при більшій величині довжини тріщини більше, ніж значення КІН при меншому значенні довжини в будь-який момент часу, і це не видно з рис. 8-9 в [487], оскільки там використовувалась половина довжини тріщини як масштабний параметр для нормалізації КІН.

Висновки до розділу 7

У цьому розділі було розглянуто нестаціонарну задачу термопружності для системи півпростір – багатошарове покриття з тріщиною під покриттям, перпендикулярною поверхні поділу, при тепловому поверхневому наванта-женні. Застосовано підхід, заснований на принципі суперпозиції та незв'язаної квазістатичної термопружності, що дозволило звести задачу з тріщиною (crack problem) до чисельного розв’язування сингулярного інтегрального рівняння. Спрощення процедури розв’язування задачі без тріщини (uncracked problem) досягається за допомогою використання математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну підкладки з середовищем через багатошарове покриття. Це дало можливість отримати замкнутий аналітичний розв'язок відповідної задачі термопружності для багатошарової системи, що зручно як для аналізу розв’язку задачі для середовища без тріщини, так і для подальшого використання для задачі з тріщиною.

Підхід був верифікований шляхом розв’язування декількох задач, для яких було досягнуто добре узгодження з відповідними розв’язками. Температурні напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень для внутрішньої тріщини в сталевій підкладці 316L були обчислені для багатошарового покриття WC-Co / Cr-Ni під час процесу конвективного охолодження. Проведені числові розрахунки дозволили оцінити вплив різних геометричних і термомеханічних параметрів системи тіло–покриття на характер процесу термічного руйнування.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв’язано актуальну науково-прикладну проблему побудови адекватних математичних моделей та розроблення ефективних методів розрахунку і аналізу термонапруженого стану тіл з багатошаровими тонкими та одношаровими неоднорідними ізотропними та анізотропними покриттями за силового і теплового навантаження.

При цьому отримано такі наукові і практичні результати.

- Розроблено методологію розв’язування задач термомеханіки тіл з тонкими багатошаровими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні впливу покрить на тепловий і механічний стани тіла узагальненими граничними умовами.
- На основі сформульованої математичної моделі поставлено і розв’язано нестаціонарні крайові задачі термопружності для тіл плоскої та циліндричної геометрії з багатошаровими тонкими покриттями за зовнішньої теплової дії.
- Із використанням математичної моделі теплових процесів у тілах з тонкими шаруватими покриттями сформульовано нелінійну нестаціонарну задачу теплопровідності та відповідну задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. На основі методу квазілінеаризації з використанням інтегрального перетворення Лапласа побудовано ітераційну схему розв’язання поставленої нелінійної задачі теплопровідності з аналітичним визначенням розв’язку лінеаризованої задачі для кожної ітерації.
- Розроблено методику розв’язування одновимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів для випадку ортотропних властивостей матеріалу циліндра, яка ґрунтується на використанні методу безпосереднього інтегрування вихідних диференціальних рівнянь з подальшим зведенням до інтегральних рівнянь, розв’язаних методом простої ітерації.

На цій основі побудовано алгоритм розв’язування задачі нагріву суцільного ізотропного циліндра з неоднорідним трансверсально ізотропним покриттям довільної товщини для дослідження еволюції накопичення пошкоджень у керамічних покриттях циліндричних елементів конструкцій.

- Розроблено напіваналітичні підходи для дослідження процесу накопичення пошкоджень у елементах конструкцій з керамічними тонкими шаруватими і товстими неоднорідними покриттями за впливу теплових навантажень із загальною обчислювальною схемою у вигляді ітераційної процедури визначення параметрів еволюції пошкоджень, яка використовує аналітичний розв'язок відповідної проміжної граничної задачі термопружності на кожному ітераційному кроці.

Для випадку неоднорідних тонких багатошарових керамічних покрить процедуру розв'язування спрощено завдяки використанню математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження підкладки зі середовищем через покриття.

Для покрить довільної товщини застосовано підхід, який базується на зведенні вихідної задачі термопружності до системи інтегральних рівнянь.

- На основі принципу суперпозиції розроблено методику дослідження впливу на термонапружений стан системи півпростір–багатошарове покриття трансверсальної тріщини під покриттям за нестаціонарного теплового навантаження. Розподіли температури та відповідних термонапружень для системи без тріщини отримано в замкнутій аналітичній формі за допомогою моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну півпростору з навколишнім середовищем через покриття. Задачу з тріщиною сформульовано як збурену змішану крайову задачу, у якій навантаження на поверхню тріщини компенсує температурні напруження, визначені із задачі без тріщини, і зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язується чисельно.

Із проведеного дослідження можна зробити такі висновки:

- Методологія розв'язування задач термомеханіки тіл з тонкими багатошаровими покриттями, яка ґрунтується на використанні узагальнених граничних умов, має такі переваги:

1) дозволяє суттєво спростити обчислення і зменшити затрати обчислювального часу;

2) уможливлює отримання відносно простих аналітичних розв’язків практично важливих задач, які надають апріорну оцінку термонапруженого стану без громіздких обчислень;
3) підвищує ефективність визначення термомеханічних полів зі зменшенням товщини покриття порівняно з прямими методами, застосування яких у цьому випадку є ускладненим.

- Встановлено, що визначальними параметрами впливу на розподіл температури та напружень в тілі є ефективні теплофізичні характеристики покриття – приведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття, швидкість зміни температури зовнішнього середовища, а у випадку термоциклічного навантаження – зміни тривалості циклу та моментів перемикання періодів у межах одного циклу.
- Виявлено область зміни коефіцієнта теплообміну, в межах якої вплив променевої складової на термонапружений стан системи півпростір–двошарове зносостійке покриття несуттєвий.
- Встановлено, що знак усталених напружень в шарах покриття при тепловому навантаженні визначається різницею коефіцієнтів лінійного температурного розширення підкладки та шарів, а їх абсолютні значення для покрить малої жорсткості суттєво перевищують відповідні напруження в підкладці.
- З’ясовано умови виникнення небезпечних напружень відриву при тепловому навантаженні циліндра з багатошаровим покриттям та визначено їх залежність від ефективних теплофізичних властивостей покриття.
- Виявлено особливості процесу еволюції пошкоджень, які визначаються неоднорідністю властивостей та товщиною керамічних покрить, зокрема:
  — вплив проміжкового шару на еволюцію пошкоджень нехтувально малий;
  — суттєва різниця в процесах еволюції пошкодження спостерігається в різних шарах навіть для тонких багатошарових покрить;
  — на відміну від одношарового, незалежно від типу початкового розподілу пошкоджень, у випадку багатошарового покриття пошкодження є

кусково-неперервною, немонотонною функцією, хоча в межах окремого шару – неперервною і монотонною функцією;

— перехід до макроскопічного руйнування для випадку багатошарових покрить визначається не лише найвищим локальним рівнем початкової пористості, на відміну від ситуації для тонкого одношарового покриття;

— у випадку товстих покрить, на відміну від тонких, нерівномірний розподіл початкової пористості не завжди є небезпечнішим за рівномірний щодо можливості ініціювання тріщин;

— розподіл пошкоджень, викликаний нагрівом, відхиляється від початкового суттєвіше зі збільшенням товщини покриття.

- Для системи тіло–покриття з внутрішньою тріщиною, перпендикулярною до поверхні поділу, оцінено вплив різних геометричних і термомеханічних параметрів системи на термонапруження та коефіцієнти інтенсивності термічних напружень. Зокрема виявлено, що збільшення товщини покриття та довжини тріщини, а також зменшення коефіцієнта теплообміну з поверхні покриття, приводить до зменшення КІН.

Прикладне значення отриманих наукових результатів визначається можливістю використання розробленої методики дослідження задач термомеханіки тіл з покриттями з метою виявлення якісних та кількісних особливостей впливу геометричних, фізико-механічних та теплофізичних характеристик на міцність конструктивних елементів з неоднорідними покриттями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Деформирование полупространства с градиентным упругим покрытием при действии произвольной осесимметричной нагрузки. *Прикл. математика и механика*. 2008. Т. 72. № 4. С. 644–651.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1972. 446 с.
5. Аттетков А.В., Беляков Н.С. Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности. *Теплофизика высоких температур.* 2006. Т. 44. № 1. С. 136–140.
6. Аттетков А.В., Беляков Н.С., Волков И.К. Температурное поле твердого тела, содержащего цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности, в условиях нестационарного теплообмена. *Вестник МГТУ. Машиностроение.* 2006. № 3. С. 37–50.
7. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Формирование температурных полей в полупространстве с теплозащитным покрытием. *Вестник МГТУ. Машиностроение.* 2000. № 3. С. 43–54.
8. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой. *Инж.-физ. журн.* 2001. Т. 74, № 3. С. 81–86.
9. Аттетков А.В., Власова Л.Н., Волков И.К., Загоруйко Е.А. Формирование температурных полей в области, содержащей тонкостенное покрытие. *Вестник МГТУ. Машиностроение*. 1999. № 2. С. 3–10.

10. Барвинок В.А. Управление напряженным состоянием и свойства плазменных покрытий. М.: Машиностроение, 1990. 384 с.
11. Бартенев Г.М., Жорник А.И. Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах. *Физика и химия обработки материалов*. 1972. № 3. С. 100–108.
12. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 223 с.
13. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974. 205 с.
14. Беляев Н.М. Основы теплопередачи. К.: Вища шк., 1989. 344 с.
15. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. шк., 1978. 328 с.
16. Беляев Ю.Н. Методы вычислений матриц переноса упругих деформаций. *Вестник Пермск. нац. исследовательск. политехн. ун-та. Механика.* 2013. № 3. С. 63–109.
17. Березовская Л.М., Демьянченко О.П. Периодическая задача теплопроводности для цилиндра с термическим покрытием. *Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: сб. науч. трудов.* К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. С. 17–20.
18. Березовский А.А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. К.: Наук. думка, 1968. 165 с.
19. Березовский А.А. Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием. *Задачи нестационарной теплопроводности*. Препринт 83.29. К.: Ин-т математики АН УССР. 1983. С. 6–11.
20. Березовский А.А. Нелинейные задачи теплопроводности. *Математические методы исследования фильтрации и массопереноса. Задачи нестационарной теплопроводности*. К.: Ин-т математики АН УССР. 1984. С. 85–97.
21. Березовский А.А., Шувар Р.А. Плоское нестационарное температурное поле кругового цилиндра с термически тонким покрытием. *Задачи нестационарной теплопроводности*. К.: Ин-т математики АН УССР. 1984. С. 97–104.

22. Биргер Б.И. Температурные напряжения в анизотропных телах. *Прикл. механика*. 1971. Т. 7. № 3. С. 71–76.
23. Биргер Б.И., Баранов В.П. Расчет температурных напряжений в ортотропном цилиндре. *Механика полимеров*. 1972. № 2. С. 310–314.
24. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518 с.
25. Бразалук Ю.В., Губин А.И., Давыдова А.В., Евдокимов Д.В., Малая Ю.А., Стояновский М.А. Математическое и численное моделирование систем теплоизоляции тел сложной геомерической формы. *Системні технології.* 2019. Вип. 2. С. 64–76.
26. Бразалук Ю.В., Губин А.И., Евдокимов Д.В., Коваленко О.А. Об одной задаче теории теплоизоляции. *Региональный межвузовский сборник научных работ*. Днепропетровск, 2016. Вып. 3 (104). С. 45–56.
27. Бразалук Ю.В., Губин А.И., Евдокимов Д.В., Стояновский М.А. Асимптотическая математическая модель аблирующих теплозащитных покрытий. *Вісник Херсонськ. нац. техн. ун-ту.* 2017. Т. 2. № 3(62). С. 47–54.
28. Будиновский С.А., Каблов Е.Н., Мубояджян С.А. Применение аналитической модели определения упругих напряжений в многослойной системе при решении задач по созданию высокотемпературных жаростойких покрытий для рабочих лопаток авиационных турбин. *Вестник МГТУ. Машиностроение.* 2011. Спец. выпуск "Перспективные конструкционные материалы и технологии". С. 26–37.
29. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. К.: Наук. думка, 1978. 230с.
30. Бурка А.Л. Несимметричный нагрев радиацией и конвекцией бесконечной пластины. *Журн. прикл. мех. и техн. физ.* 1966. № 2. С. 126–127.
31. Василенко А.Т. Основные соотношения некоторых вариантов уточненных моделей оболочек. В кн: Механика композитов в 12т.: Т8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Статика элементов конструкций. К.: "А.С.К". 1999. 379с. С. 78–91.

32. Вендин С.В. О расчете нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода. *Инж.-физ. журн.* 1993. Т. 65. № 2. С. 249–251.

33. Верещака С.М., Дейнека А.В. Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы с защитным слоем из дюралюминия и углепластика. *Вісник нац. техн. ун-ту «Харківськ. політехн. ін-т». Сер.: Інформатика і моделювання*. 2014. № 57. С. 19–31.

34. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. К.: Наук. думка, 1986. 544с.

35. Веселовский В Б. Контактное термическое сопротивление в многослойных элементах конструкций. *Гидрогазодинамики и процессы теплообмена*. К.: Наук. думка, 1986. С. 120–125.

36. Веселовский В Б. Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий. *Прикладные вопросы аэрогазодинамики*. К.: Наук. думка, 1987. С. 95–100.

37. Веселовский В.Б. Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 2002. 230 с.

38. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. К.: Наук. думка, 1979. 360 с.

39. Вигак В.М., Ригин А.М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1982. Вып. 15. С. 63–67.

40. Видин Ю.В. Неустановившееся температурное поле в плите при совместном действии теплового излучения и конвекции. *Инж.-физ. журн*. 1967. Т. 12. № 5. С. 669–671.

41. Винницька Л., Савула Я. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2008. Вип. 7. С. 21–29.

42. Вігак В.М. Розв’язки задач пружності та термопружності в напруженнях. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*. 1995. Вип. 9. С. 34–122.

43. Вігак В.М. Розв’язки одновимірних задач пружності та термопружності для циліндричних кусково-однорідних тіл. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1997. Т. 40. № 4. С. 139–148.

44. Вігак В.М., Калиняк Б.М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду. *Доп. НАН України*. 1998. № 11. С. 60–67.

45. Воробець Б.С., Лампіка Р.В. Теплопровідність трубчастих елементів з покриттями. *Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка».* 2009. № 642. С. 41–45.

46. Воячек А.И. Расчет упругих тел с поверхностным слоем. *Изв. вузов. Машиностроение*. 1986. № 4. 11–15.

47. Гаврись А.П., Иващук Д.В., Шевчук П.Р. Определение остаточных напряжений в системе слой – покрытие при двустороннем высокотемпературном напылении. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1989. Вып. 29. С. 8–12.

48. Гаврись А.П., Шевчук П.Р. Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1991. Вып. 33. С. 13–18.

49. Гаврись О., Шевчук В., Шевчук П. Математичне моделювання радіаційно–конвективного теплообміну при високотемпературному нанесенні на тіло багатошарових покрить. *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* / Під заг. ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 258–259.

50. Гачкевич О., Терлецький Р., Турій О. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл. *Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки*. 2015. Спецвип. С. 59–64.

51. Гембара В., Гембара Н. Математична модель теплового контакту тіл через тонкий кусково–однорідний шар. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. 2003. С. 228–229.

52. Гембара В., Гембара Н. Моделювання теплопровідності та термопружності тонких плит з багатошаровим покриттям. *6-й Міжнародний симпозіум українських інженерів–механіків у Львові* : тези доп. (Львів, 21–23 травня 2003р.). Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2003. С. 150.
53. Гембара В., Гембара Н. Моделювання теплопровідності та термопружності тонких оболонок з багатошаровим покриттям. *7-й Міжнародний симпозіум українських інженерів–механіків у Львові* : тези доп. (Львів, 18–20 травня 2005р.). Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2005. С. 52.
54. Гембара Н.О. Вплив протикорозійного багатошарового покриття на термопружність круглих пластин. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2013. Т. 49. № 6. С. 50–54.
55. Гембара Н.О., Лучко Й.Й. Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багатошаровим покриттям. *Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту*. 2013. Т. 69. № 1. С. 222–230.
56. Гольденвейзер А.Л. Общая теория упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки). *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1992. № 3. С. 5–17.
57. Горбунов А.Д. Аналитический расчёт нагрева (охлаждения) простых тел, покрытых тонкой оболочкой. *Металлург. теплотехника*. 2010. Вып. 2 (17). С. 56–62.
58. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек в 5т. Т. 4: Теория оболочек переменной жесткости. К.: Наук. думка, 1981. 544 с
59. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Визначення напружено–деформованого стану анізотропних термочутливих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. Т. 41. № 1. С. 73–77.
60. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1987. 216 с.
61. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. К.: Наук. думка, 1991. 216 с.
62. Григорова Т.А., Ляшенко В.П. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками. *Вісник Харківськ. нац. ун-ту. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2010. Вип. 13. № 890. С. 47-52.

63. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Вища школа, 1978. 192 с.

64. Демьянченко О.П., Ляшенко В.П. Теплова умова спряження у двошаровій області. *Вісник Херсонськ. нац. техн. ун-ту*. 2019. № 2 (69). Част. 3. С. 112-117.

65. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.

66. Долгов Н.А. Влияние модуля упругости покрытия на работоспособность системы основа–покрытие. *Пробл. прочности*. 2002. № 2. С. 66–72.

67. Долгов Н.А. Определение напряжений в двухслойном покрытии. *Пробл. прочности*. 2005. № 4. С. 121–132.

68. Долгов Н.А. Сопротивление деформированию и разрушению материалов с функциональными покрытиями. Тернополь: Крок. 2010. 231с.

69. Долгов Н.А., Ляшенко Б.А., Рущицкий Я.Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно–деформированное состояния композиции. Сообщ. 1. К оценке напряжений растяжения в покрытии. *Пробл. прочности*. 1995. № 9. С. 37–43.

70. Долгов Н.А., Ляшенко Б.А., Рущицкий Я.Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно–деформированное состояния композиции. Сообщ. 2. Распределение напряжений растяжения в покрытии. *Пробл. прочности*. 1996. № 5. С. 63–67.

71. Долгов Н.А., Ляшенко Б.А., Рущицкий Я.Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно–деформированное состояния композиции. Сообщ. 3. Распределение касательных и нормальных напряжений в покрытии. *Пробл. прочности*. 1997. № 6. С. 66–70.

72. Дяконюк Л.М. Математичне моделювання дифузійного перенесення тепла і маси у середовищах з тонкими покриттями та включеннями : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2003. 17с.

73. Дяконюк Л.М., Муха І.С., Савула Я.Г. Моделювання і дослідження тепломасоперенесення у багатошарових середовищах з тонкими включеннями. *Доп. НАН України*. 1998. № 12. С. 101–107.

74. Дяконюк Л. М., Савула Я. Г. Комп’ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1998. Вип. 50. С. 93–95.

75. Дяконюк Л. М., Савула Я. Г. Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багатошарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2005. Вип. 1. С. 61–70.

76. Евдокимов Д.В., Ивасишина Д.Н., Кочубей А.А., Поляков Н.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое. Диференціальні рівняння та їх застосування. Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 2006. С. 141–156.

77. Ержанов Р.Ж., Мацевитый Ю.М., Султангазин У.М., Шерышев В.П. Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники К.: Наук. думка, 1992. 296 с.

78. Жорник А.И. Об одной нестационарной задаче термоупругости для заключенного в тонкую оболочку слошного неограниченного цилиндра с дискообразной трещиной. *Прикл. механика.* 1993. Т. 29. № 1. С . 55–60.

79. Жорник А.И., Киричек В.А. Приближённое решение задачи теплопроводности для сплошного цилиндра с тонким покрытием. *Научная дискуссия: вопросы технических наук*. 2015. № 9-10 (28). С. 21-29.

80. Жорник А.И., Киричек В.А. Термоупругость сплошного цилиндра с тонким покрытием на цилиндрической поверхности. *Тепловые процессы в технике*. 2016. Т. 8. .№ 7. С. 301-311.

81. Зарубин В.С. Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991.192 с.

82. Захаров Д.Д. Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов. *Прикл. математика и механика*. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 403–418.

83. Иванов В.В., Карасева Л.В. Радиационно–конвективный нагрев многослойных тел при идеальном и неидеальном тепловых контактах. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки.* 2017. № 4. С. 34–37.

84. Иванык Е.Г. Тепловой удар по поверхности прямоугольной пластины с покрытием. *Вопросы прикладной термомеханики.* К.: Наук. думка, 1979. С. 90–95.

85. Ивашко В.С., Луцко Н.Я. Методика расчета напряженно–деформированного состояния деталей с многослойным покрытием. *Порошковая металлургия*. Минск. 1988. № 12. С. 9–13.

86. Иващук Д.В. Исследование теплодиффузионных процессов и напряженного состояния в телах с покрытиями : дис. … канд. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 / Львовский филиал математической физики института математики АН УССР. Львов, 1978. 121с.

87. Ильченко О.Т. Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена. *Инж.-физ. журн*. 1970. Т. 19. № 6. С. 1094–1099.

88. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку напружено–деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів, 2008. Т. 1, С. 244–245.

89. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку термонапруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22-24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 269–270. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

90. Калиняк Б.М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. Т. 41. № 2. С. 124–131.

91. Калиняк Б.М. Аналітичні вирази для напружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2007. Т. 50. № 2. С. 79–86.

92. Калиняк Б.М. Інтегральні рівняння зі змінною верхньою межею динамічної задачі теорії пружності в напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі. *Доп. НАН України*. 2010. № 8. С.60–69.
93. Калиняк Б.М., Попович В.С. Напружений стан шаруватого термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2005. № 2. С. 161–178.
94. Капустин С.А. Численный анализ нелинейных квазистатических процессов деформирования составных конструкций. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1979. Вып. 10. С.68–80.
95. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
96. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. 3-е изд. М.:Высш. шк., 2001. 550 с.
97. Кирсанов Ю.А. Тепловое состояние твердых тел с покрытием при несимметричном циклическом теплообмене с внешними средами. *Инж.-физ. журн.* 1996. Т. 69. № 1. С. 123–128.
98. Кирсанов Ю.А. Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухонагревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
99. Киселев К.А., Захаров П.А., Пушинкова В.К. Применение метода тепловых потенциалов к решению нестационарных задач теплопроводности для двухслойного полупространства. *Инж.-физ. журн.* 1977. Т. 33. № 1. С. 613.
100. Князева А.Г. О распределении температуры, напряжений и деформации в системе «материал–покрытие» при условии неидеальности теплового контакта между веществами. *Физ. мезомеханика.* 2000. Т. 3. № 1. С. 39–51.
101. Кобельский С. В., Куриат Р. И., Кравченко В. И., Квитка А. Л. Методика и исследование пространственного термонапряженного состояния моделей лопаток турбин с покрытиями при термоциклическом нагружении. *Пробл. прочности*. 1999. № 6. С. 56–64.
102. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К.: Наук. думка, 1970. 309 с.

103. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 228 с.

104. Колесов В.С., Федик И.И., Чуйко Е.Е. Температурные напряжения в составном анизотропном цилиндре. *Прикл. механика.* 1974. Т. 10. № 2. С. 21–26.

105. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. 172с.

106. Коляно Ю.М. Методы теории теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.

107. Коляно Ю.М., Кушнир Р.М. Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями. *Мат. методы и физ.-мех. поля.* 1980. Вып. 11. С. 72–75.

108. Коляно Ю.М., Махоркин И.Н. О приближенном определении температурных полей в сферических телах с тонкими покрытиями. *Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций*. К.: Наук. думка, 1978. С. 117–123.

109. Коляно Ю.М., Процюк Б.В. Термопружність багатошарового циліндра. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1976. № 8. С. 718–721.

110. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М., Шебанов С.М., Шаров С.М. Нестационарное температурное поле в многослойном ортотропном цилиндре. *Инж.-физ. журн.* 1992. Т. 62. № 2. С. 325–330.

111. Коляно Ю.М., Хомякевич Е.П. Условия неидеального контакта для определения обобщенных динамических температурных напряжений разнородных тел. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1975. Вып. 2. С. 81–86.

112. Коляно Ю.М., Хомякевич Е.П. Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями. *Термомеханические процессы в кусочно–однородных элементах конструкций.* К.: Наук. думка, 1978. С. 43–50.

113. Коляно Ю.М., Хомякевич Е.П., Гой И.О. Обобщенная теплопроводность термочувствительных разнородных тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инж.-физ. журн.* 1988. Т. 55. № 4. С. 650–656.

114. Коляно Ю.М., Хомякевич М.Е. Обобщенная теплопроводность в телах с покрытиями, учитывающая кривизну покрытия. *Инж.-физ. журн.* 1993. Т. 65. № 6. С. 745–749.

115. Коляно Ю.М., Хомякевич М.Е. Неклассическая задача теплопроводности для кристаллических тел с покрытиями, нагреваемых радиацией, учитывающая кривизну покрытия. *Инж.-физ. журн.* 1994. Т. 66. № 5. С. 622–626.

116. Комаров Г.М. Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності. *Доп. НАН України*. 1996. № 7. С. 26–31.

117. Костюк Г.И., Белов Н.Л. Температурные напряжения в многослойных и однослойных покрытиях и работоспособность деталей и режущего инструмента. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2003. Вип. 2 (37). С. 23–31.

118. Костюк Г.И., Павленко В.Н., Мелкозерова О.М. Моделирование теплового и напряженного состояния трубы с однослойным и многослойным покрытием при действии переменных во времени давлений и температур среды и расчет ее ресурса. *Вісті Академії інженерних наук України*. 2007. № 3 (33). Машинобудування та прогресивні технології. С. 52–61.

119. Кривобок Э.Н. Об одном решении уравнения нестационарной теплопроводности с неоднородным начальным условием. *Зб. наук. праць Полтавськ. техн. ун-ту. Сер. Галузеве машинобудування, будівництво*. 2010. Вип. 2. С. 171–175.

120. Криштал М.А., Эпштейн Л.Е. Расчет упругих полей в биметаллах и металлах с покрытиями в условиях нагрева. *Мат. методы и физ.-мех. поля.* 1992. Вып. 35. С. 47–52.

121. Криштафович А.А. Умови теплового контакту анізотропних тіл через тонкий анізотропний прошарок. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1994. Т. 30**.** **№** 6. С. 86–88.

122. Кудинов В.А. Аналитические методы решения краевых задач для многослойных конструкций. (Обзор). *Изв. РАН. Энергетика.* 1999. № 5. С. 85–106.

123. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа, 2008. 349 с.

124. Кудинов В. А., Еремин А. В., Котова Е. В. Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных цилиндрических конструкций. *Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2012. № 2 (27). С. 188–191.

125. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Стефанюк Е.В. Температурные напряжения в многослойном полом цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности. *Изв. вузов. Авиац. техника*. 2014. № 1. С. 30–35.

126. Куценко О.Г., Харитонов О.М., Зражевський Г.М. Аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі термопружності, що відповідає термоудару двошарового циліндра. *Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки.* 2009. Вип. 2. С. 65–70.

127. Кушнір Р., Процюк Ю. Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно–променевого теплообміну. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2008. Вип. 8. С. 103–112.

128. Кушнір Р.М., Попович В.С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл. Львів: СПОЛОМ. 2009. 412 с.

129. Кушнір Р.М., Попович В.С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання. *Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки*. 2013. № 3. С. 42–47.

130. Кушнір Р.М., Процюк Б.В., Синюта В.М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2002. Т. 38. № 6. С. 31–38.

131. Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В.М. Квазистатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2004. Т. 40. № 4. С. 7–16.

132. Лампіка Р.В. Температурне поле опромінюваної оболонки з покриттям. *Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка»*. 2002. № 467. С. 171–176.

133. Леонова Э.А. Температурные напряжения в цилиндре с переменными термоупругими характеристиками. *Изв. вузов. Черная металлургия.* 1976. №. 1. С. 161–166.

134. Лерман Л.Б. Слоисто–неоднородные объекты с поверхностями раздела. применение трансляционных матриц в некоторых прикладных задачах. *Хімія, фізика та технологія поверхні*. 2016. Т. 7. № 3. С. 255–284.

135. Лерман Л.Б., Породько Л.В. Построение трансляционных матриц для неоднородных дифференциальных операторов. *Scientific Journal "ScienceRise"*. 2014. Т. 3. № 2(3). С. 63–68.

136. Лехницкий С.Г. Элементарные решения двух частных задач о равновесии анизотропного неоднородного цилиндра. *Исследования по упругости и пластичности*. 1967. № 6. С. 3–9.

137. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.

138. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.

139. Лучко Й., Гембара Н. Стаціонарне температурне поле в оболонках з одностороннім багатошаровим покриттям. *Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту*. 2013. № 4. С.266–275.

140. Лучко Й.Й. Розрахунок теплопровідності бетонних плит з багатошаровими покриттями. *Наук. вісник Мукачівськ. технологічн. ін-ту*. 2006. Вип. 2. С. 40–46.

141. Лучко Й.Й., Гембара В.М., Гембара Н.О. Моделювання теплопровідності тонких плит з багатошаровим покриттям. *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій*. 2004. Вип. 6. С. 65–70.

142. Лучко Й.Й., Гембара В.М., Гембара Н.О. Моделювання теплопровідності тонких оболонок з одностороннім багатошаровим покриттям. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : *збірник наукових праць*. 2005. Вип. 6. С. 60–66.

143. Лучко Й.Й., Гембара В.М., Гембара Н.О. Оптимізація теплопередачі тонких оболонок з одностороннім багатошаровим покриттям. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій* : *збірник наукових праць*. 2012. Вип. 9. С.43–49.

144. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

145. Люкшин П.А., Люкшин Б.А., Матолыгина Н.Ю., Панин С.В. Расчет температуры и температурных напряжений в многослойном покрытии. *Механика комп. материалов и конструкций*. 2010. Т. 16. № 4. С. 563–574.

146. Люкшин П.А., Люкшин Б.А., Матолыгина Н.Ю., Панин С.В. Моделирование напряженно–деформированного состояния и потери устойчивости термобарьерного покрытия при тепловом ударе. *Физ. мезомеханика.* 2011. Т. 14. № 1. С. 33–41.

147. Ляшенко Б.А. О критериях когезионно–адгезионной равнопрочности и термостойкости защитных покрытий. *Пробл. прочности.* 1980. № 10. С. 114–116.

148. Ляшенко Б.А., Терлецкий В.А., Долгов Н.А., Сорока Е.Б. Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве. *Пробл. прочности*. 1998. № 3. С. 128–133.

149. Ляшенко В.П., Кобильська О.Б., Дем’янченко О.П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатошарових областях. *Вісник Кременчуцьк. нац. ун-ту ім. М. Остроградського*. 2017. Вип. 6 (107). Ч. 1. С. 37–43.

150. Максимович Г.Г., Шатинский В.Ф., Копылов В.И. Физико-химичекипе процессы при плазменном напылении и разрушении материалов с покрытиями. К.: Наук. думка, 1983. 264с.

151. Максимук О., Щербина Н. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об’ємів. *Вісник. Львів. ун-ту. Сер.; Прикл. математика та інформатика*. 2002. Вип. 4. С. 126–130.

152. Малкин Я.Ф. К задачам распределения температуры в плоских пластинках. *Прикл. математика и механика*. 1938. Т. 2. № 3. С. 317–330.

153. Малкин Я.Ф. Распределение температуры в нагреваемых по поверхности пластинках и дисках. *Прикл. математика и механика*. 1938. Т. 2. № 4. С. 487–492.

154. Мартиняк Р.М., Швець Р.М. Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки. *Доп. НАН України.* 1996. № 9. С. 74–76.

155. Мартиняк Р.М., Швець Р.М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1997. Т. 40. № 2. С. 107–109.

156. Мартыненко А.А. К исследованию остаточных напряжений в многослойных покрытиях. *Пробл. прочности*. 1980. № 11. С. 109–110.

157. Мацевитый Ю.М., Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Идентификация изменения температуры пламени при воздействии его на строительные конструкции. *Доп. НАН України.* 2008. № 8. С. 80–86.

158. Мельников В.В. Температурное поле трехслойной сферы. *Прикл. механика и техн. физика.* 2009. Т. 50. № 1. С. 78–84.

159. Можаровский В.В., Березовская Е.М. О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов. *Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины*. 2014. № 3(84). С. 86–92.

160. Можаровский В.В., Марьина Н.А. Исследование особенностей распределения полей напряжений в многослойных покрытиях. *Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины*. 2013. № 6(81). С. 34–43.

161. Мотовиловец И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К.: Наук. думка, 1969. 144 с.

162. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5 т. Т. 1: Термоупругость. К.: Наук. думка, 1987. 264 с.

163. На Ц. Вычислительные методы прикладных граничных задач. М.:Высш. шк., 1982. 296 с.

164. Назаров С.А. Тонкие упругие покрытия и поверхностная энтальпия. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2007. № 5. С. 60–74.

165. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

166. Нуштаев Д.В., Астапов А.Н., Расчет напряженно–деформированного состояния в системе "подложка–покрытие" при тепловом нагружении**.** *Механика комп. материалов и конструкций*. 2017. Т. 23. № 1. С. 134–155.

167. Олейников А.И., Кузьмин А.О. Расчет напряженного состояния и оценка прочности режущего инструмента с тонким покрытием. *Пробл. прочности*. 2003. № 1. С. 98–110.

168. Олесяк З.С. Stresses in coated matrices caused by thermodiffusion. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1993. Т. 29. № 6. С. 64–73.

169. Ольшанский В.П. Исследование напряженно–деформированного состояния покрытий при действии локальной нагрузки. *Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов* : тезисы докладов 3-й Всесоюзной конф. (Запорожье, 24-26 октября 1989 г.). Запорожье, 1989. С.140.

170. Панін С.В., Мартиняк Р.М., Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я. Термо-напружений стан циліндра зі змінними теплофізичними властивостями приповерхневого шару за нагріву об'ємними джерелами тепла. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2012. Т. 55. № 3. С. 139–152.

171. Панферов В.М., Леонова Э.А. К решению задач термоупругости с переменными модулями. *Пробл. прочности*. 1975. № 6. С. 22–27.

172. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. К.: Наук. думка, 1988. 280 с.

173. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. К.: Наук. думка, 1980. 460 с.

174. Пелех Б.Л., Флейшман Ф.Н. Приближенный метод решения задач теории упругости для тел с тонкими криволинейными покрытиями. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1988. N 5. С.36–41.

175. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. Ленинград: Энергия, 1976. 352 с.

176. Писаренко Г.С. Некоторые актуальные нерешенные проблемы механики деформируемого твердого тела. *Пробл. прочности*. 1998. № 6. С. 5–8.
177. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл. *Доп. АН УРСР*. *Сер. А.* 1963. № 7. С. 872–874.
178. Підстригач Я.С. Вибрані праці. К.: Наук. думка, 1995. 460 с.
179. Плевако В.П. Напружений стан неоднорідних покриттів. *Машинознавство*. 2001. № 3(45). С. 24–28.
180. Плотников М.М. К расчету толстостенной неоднородной трубы. *Изв. вузов. Машиностроение.* 1960. № 12. С. 104–109.
181. Плотников М.М. Упругие свойства и напряженное состояние анизотропных неоднородных цилиндров. *Изв. вузов. Машиностроение*. 1963. № 5. С. 19–28.
182. Плотников М.М. О напряжениях в одной задаче неоднородно–анизотропного цилиндра. *Изв. вузов. Машиностроение.* 1967. № 8. С. 28–31.
183. Подстригач Я.С. О применении операторного метода к выводу основных соотношений теории теплопроводности тонкостенных элементов. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1965. Вып. 5. С. 24–35.
184. Подстригач Я.С., Воробец Б.С., Чернуха Ю.А. Температурные поля оболочек с покрытиями и заполнителем. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1984. Вып. 19. С. 49–54.
185. Подстригач Я.С., Воробец Б.С., Чернуха Ю.А. Термонапряженное состояние цилиндрической оболочки с покрытием и заполнителем при локальном нагреве и осевом сжатии. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1984. Вып. 19. С. 54–57.
186. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К.: Наук. думка, 1972. 308 с.
187. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, 1976. 311 с.

188. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык П.Р., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К.: Наук. думка, 1977. 160 с.
189. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. К.: Наук. думка, 1981. 344 с.
190. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368с.
191. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1975. Вып. 2. С. 54–59.
192. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К.: Наук. думка. 1978, 344 с.
193. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах. *Физ.-хим. механика материалов*. 1967. Т. 3. № 5. С. 575–583.
194. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О напряженно–деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. *Прикл. механика*. 1967. Т. 3. № 6. С. 8–16.
195. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1967. Вып. 7. С. 227–233.
196. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Исследование напряженного состояния твердых тел с инородными включениями и тонкими покрытиями при изменении температуры. *Пробл. прочности.* 1970. № 11. С. 37–40.
197. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р., Иващук Д.В. Влияние тонких покрытий на напряженно–деформированное состояние слоя с двусторонним покрытием при диффузионном насыщении. *Физ.-хим. механика материалов.* 1974. Т. 10. № 1. С. 74–80.
198. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р., Иващук Д.В. Исследование напряженного состояния материала при диффузионном насыщении цилиндра с тонким покрытием. *Пробл. прочности*. 1974. № 7. С. 3–8.

199. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р., Онуфрик Т.М., Повстенко Ю.З. Поверхностные эффекты в твердых телах с учетом взаимосвязи физико–механических процессов. *Физ.-хим. механика материалов*. 1975. № 11. С. 36–41.
200. Полевой С. Н., Евдокимов В. Д. Упрочнение металлов: Справочник. М.: Машиностроение, 1986. 320 с.
201. Попова А.А. Термоупругое состояние цилиндра с тонкой оболочкой на цилиндрической поверхности. *Вестник Таганрогск. гос. педаг. ин-та*. 2016. Т. 15. № 1. С. 407–412.
202. Попович А.Г., Шевченко В.Г. Методика оптимизации состава покрытий для работы в условиях градиента температур. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.* 2008. № 1. С. 86–93.
203. Попович В.С., Вовк О.М. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченого шару за конвективно–променевого теплообміну з довкіллям. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2013. Вип. 17. С. 146–155.
204. Попович В.С., Вовк О.М., Гарматій Г.Ю. Дослідження статичного термонапруженого стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно–променевого теплообміну з довкіллям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. № 4. С. 151–158.
205. Попович В.С., Гарматій Г.Ю., Іванків К.С. Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого циліндра з покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 1997. Вип. 46. С. 83–88.
206. Попович В.С., Іванків К.С., Гарматій Г.Ю. Осесиметрична квазістатична задача термопружності термочутливого циліндра з тонким покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 1997. Вип. 46. С. 89–96.
207. Попович В.С., Калиняк Б.М. Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2005. Т. 48. № 2. С. 126–136.

208. Попович В.С., Калиняк Б.М. Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. Т. 57. № 2. С. 169–186.

209. Попович В., Янішевський В. Термопружний стан термочутливого шару за конвективного теплообміну з середовищем змінної з часом температури. *Фіз.- мат. моделювання та інформ. технології*. 2011. Вип 14. С. 105–114.

210. Породько Л.В. Взаємодія лазерного випромінювання з багатошаровими об’єктами. *Молодий вчений*. 2014. № 9 (12). С. 6–8.

211. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Нелінійна прикладна термомеханіка. К.: НМЦ ВО МОНУ, 2000. 280 с.

212. Приходько И.М. Теплопроводность двухслойной стенки при изменяющихся во времени коэффициенте теплообмена и температуре окружающей среды. *Инж.-физ. журн*. 1970. Т. 18. № 2. С. 323–327.

213. Прокопенко Ю.А. Математическое моделирование термически нагруженных двухслойных цилиндров. *Вестник Тамбовск. гос. техн. ун-та*. 2009. Т. 15. № 4. С. 806–813.

214. Процюк Б.В. Визначення термопружного стану кусково–неоднорідних термочутливих тід з циліндричними поверхнями поділу. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. Т. 57. № 4. С. 139–153.

215. Процюк Б.В. Визначення термопружного стану кусково–неоднорідного термочутливого циліндру. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2015. Вип. 13. С. 101–110.

216. Процюк Б.В., Верба І.І. Нестаціонарне одновимірне температурне поле трьохшарових тіл з плоскопаралельними границями розділу. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика.* 1999. Вип. 1. С. 200–205.

217. Процюк Б.В., Горун О.П. Термопружний стан кусково–однорідного тіла під час остигання за різних початкових температур складових. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2013. Вип. 11. С. 90–100.

218. Процюк Б., Горун О. Вплив конвективно–променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О.І. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. С. 148–150.
219. Процюк Б.В., Горун О.П. Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно–променевого теплообміну. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 98–108.
220. Процюк Б.В., Горун О.П. Термопружний стан півбезмежного термочутливого трикомпонентного стрижня за конвективно–променевого теплообміну. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2016. Т. 52. № 3. С. 15–22.
221. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1978. 186 с.
222. Равин В.С. Об эффективных граничных условиях в задачах стационарной теплопроводности. *Инж.-физ. журн*. 1967. Т. 12. № 4. С. 540–541.
223. Ракоча І., Валяшек В. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двоскладового термочутливого циліндра за конвективно–променевого нагрівання. *Вісник Тернопільск. нац. техн. ун-ту*. 2015. Т. 77. № 1. С. 87–97.
224. Рыкалин Н.Е, Углов А.А., Кокора А.Н. Лазерная обработка материалов. М.: Машиностроение, 1975. 296 с.
225. Савула Я.Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1995. Вип. 42. С. 3–7.
226. Савула Я., Винницька Л. Числовий аналіз напружено–деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2007. Вип. 6. С. 54–65.

227. Савула Я.Г., Дыяк И.И., Дубовик А.В. Применение комбинированной модели для расчета напряженно–деформированного состояния пространственных конструкций. *Прикл. механика*. 1989. Т. 25. № 9. С. 62–67.

228. Савула Я.Г., Кревс В.В. Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.–мат*. 1996. Вип. 39. С. 30–34.

229. Савула Я.Г., Муха І.С,, Дубовик А.В. Адаптивно чисельне моделювання пружних конструкцій. *Доп. АН УРСР*. 1993. № 1. С. 49–53.

230. Саломатов В.В. К расчету радиационного охлаждения твердых тел. *Инж.-физ. журн*. 1969. Т. 17. № 1. С. 127–134.

231. Самойленко В.М., Петров Ю.В., Ратенко О.А. Распределение температуры в многослойных металлокерамических покрытиях при нестационарном тепловом воздействии. *Научный вестник МГТУ ГА*. 2017. Т. 20. № 04. С. 33–40.

232. Сметанкіна Н.В., Бредихін В.В. Розрахунок міцності багатошарового осклiння спеціальної техніки при нестаціонарних теплових навантаженнях. *Вісник Харківськ. нац. техн. ун-ту сільськ. господарства*. 2019. Вип. 198. С. 267-276.

233. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. 716 с.

234. Сулим Г.Т., Колодій Ю.О., Турчин І.М. Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання. *Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту*. 2015. Т. 77. № 1. С. 71–79.

235. Сулим Г.Т., Опанасович В.К., Турчин І.М., Хома В.В. Перехідний термонапружений стан у півсмузі з покриттям, зумовлений нагрівом її бічної поверхні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. Т. 58. № 1. С. 132–142.

236. Сулим Г.Т., Турчин І.М. Осесиметричний квазістатичний термонапружений стан у півпросторі з покриттям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2012. Т. 55. № 4. С. 85–95.

237. Сулим Г.Т., Турчин І.М., Василько Г.В. Нестаціонарне температурне поле в циліндрі з покриттям при змішаному нагріві. *Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.* 2019. № 1. С. 83–88.
238. Сухорольський М.А. Тонке покриття під локальним навантаженням. *Фіз.-хім механіка матеріалів.* 2000. Т. 36. № 6. С.33–38.
239. Сухорольский М.А., Зашкильняк И.М., Колесник В.М., Мусий Р.С. Расчет упругих цилиндрических тел с многослойными покрытиями при силовом и температурном воздействиях. *Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов* : тезисы докладов 3-й Всесоюзной конференции (Запорожье, 24-26 октября 1989 г.). Запорожье, 1989. С. 198–199.
240. Сухорольський М.А., Тимошенко Н.М., Романюк А.Б. Локальне нагрівання плоского покриття. *Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Прикл. математика*. 1999. Вип. 364. С. 142–147.
241. Терегулов А.Г. К решению задач теплопроводности пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1965. Вып. 3. С. 300–306.
242. Терлецкий Р.Ф., Турий О.П. Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом эффектов излучения и поглощения тепловой энергии. *Теорет. и прикл. механика*. 2009. Вып. 45. С. 19–31.
243. Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2012. Т. 55. № 2. С. 186–201.
244. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
245. Тинчук С. Чисельний аналіз напруженого стану багатошарових покриттів з дефектами на жорсткій основі. *Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту*. 2015. Т. 80. № 4. С. 95–104.
246. Тихонов А.С. Белов В.В., Леушин И.Г., Еременко В.И., Забелин С.Ф. Термоциклическая обработка сталей, сплавов и композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 186 с.

247. Токовий Ю.В. Пружна рівновага однорідних і неоднорідних тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями : автореф. дис. … докт. фіз.-мат. наук : спец. 01.02.04 / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів, 2013. 40с.

248. Трапезон А.Г. Влияние остаточных напряжений на расчетную оценку прочности слоистых систем основа–покрытие. *Пробл. прочности*. 2019. № 5. С.92–102.

249. Третьяченко Г.Н., Барило В.Г. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий. *Пробл. прочности*. 1993. № 1. С.41–43.

250. Третьяченко Г.Н., Карпинос Б.С. Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. К.: Наук. думка, 1990. 256 с.

251. Третьяченко Г.Н., Кравчук Л.В., Куриат Р.И., Карпинос Б.С., Семенов Г.Р. Термическая усталость материалов в условиях неоднородного термонапряженного состояния. К.: Наук. думка, 1985. 280 с.

252. Турій О. Нелінійна контактно–крайова задача термомеханіки для опромінюваної двошарової пластини, з’єднаної проміжковим шаром. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2009. Вип. 9. С. 118–132.

253. Турій О. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл із тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінення теплової енергії. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2013. Вип. 17. С. 195–208.

254. Турчин І., Турчин О. Нестаціонарне температурне поле в півпросторі з неоднорідним покриттям при локальному нагріванні. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 214–215. URL: www.iapmm.lviv.ua/ mpmm2018.

255. Турчин І.М., Колодій Ю.О. Плоска квазістатична задача термопружності для півпростору з покриттям за змішаних умов нагріву. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2015. Т. 58. № 2. С. 118–128.

256. Турчин І.М., Турчин О.Ю. Нестаціонарне температурне поле в півпросторі з покриттям за умови рухомого теплового навантаження. *Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.* 2020. № 1. С. 100–105.
257. Турчин О., Турчин І. Квазистатичні напруження в півпросторі з покриттям при локальному остиганні. *Сучасні проблеми механіки і математики*: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. Львів. Ін–т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 206–208.
258. Федірко В.М., Матичак Я.С., Погрелюк І.М. Притула А.О. Опис дифузійного насичування титану неметалевими домішками з урахуванням їх сегрегації на поверхні. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2005. № 5. С. 39–45.
259. Флейшман Н.П. Нелінійна модель спряження деформівного середовища з тонким прошарком. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 1991. Вип. 35. С. 42–47.
260. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 1993. Вип. 39. С. 30–34.
261. Флейшман Н.П., Койфман Ч.Н. Узагальнені умови спряження середовищ за допомогою тонкого плоского прошарку. *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 1995. Вип. 41. С. 112–114.
262. Флейшман Ф.Н. Деформативность кусочно–однородных тел с тонкими промежуточными прослойками : дис. … канд. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 / Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР. Львов, 1985. 211 с.
263. Чекурін В.Ф., Похмурська Г.В. Математична модель розтріскування лазерно модифікованих металопрошкових покривів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2004. № 2. С. 18–22.
264. Чекурін В.Ф. Процюк Б.В. До ідентифікації параметрів багатошарових покрить за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2004. № 1. С. 7–15.

265. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
266. Чернуха Ю.А. Задача теплопроводности для облучаемых многослойных оболочек. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1975. Вып. 1. С. 104–109.
267. Швець Л.П., Яцків О.І. До побудови розв'язку крайової задачі дифузії із некласичними граничними умовами. *Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Прикл. математика*. 1998. Вип. 346. С. 165–168.
268. Швець Р., Яцків О. Взаємозв’язана осесиметрична задача квазістатичної термопружності для циліндра з тонким приповерхневим шаром. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: В 2-х т. Львів, 2006. Т. 1. С. 257–259.
269. Швець Р., Яцків О., Бобик Б. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестаціонарних умов теплообміну з довкіллям. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2010. Вип. 12. С. 196–205.
270. Швець Р.М., Флячок В.М. Основні рівняння термопружних ортотропних оболонок з урахуванням поперечних зсувних і нормальних деформацій. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1976. № 6. С. 539–543.
271. Швець Р.М., Яцків О.І. Метод власних функцій і побудова розв’язку задачі механотермодифузії для циліндра з покриттям. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: В 2-х т. Львів, 2000. Т. 1. С. 311–314.
272. Швець Ю.І., Прокопов В.Г., Фіалко Н.М., Чебанова В.М., Саріогло В.Г. Тепловий стан деталей з багатошаровими лакофарбовими покриттям. *Вісник АН УРСР*. 1987. № 5. С. 39–44.
273. Шворак М. Аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндра. *Вісник Київськ. ун-ту. Серія: Математика. Механіка.* 2011. Вип. 26. С. 51–55.
274. Шевелев А.А. Температурные напряжения в пластине и цилиндре при их нагреве в условиях изменяющейся температуры среды. *Прикл. механика*. 1965. Т. 11. № 1. С. 119–126.
275. Шевченко В.Г., Попович О.Г. Методика розрахунку складу покриття для мінімізації в ньому температурних напружень. *Вісник двигунобудування.* 2010. № 1. С. 96–98.

276. Шевчук В. Наближений підхід до розв’язування задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжн. наук. конф. (Львів, 25-28 травня 1998 р.). Львів, 1998. С. 137–138.
277. Шевчук В. Визначення термонапруженого стану з тонкими багатошаровими покриттями. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф. Львів, 26-29 травня 2003 р.). Львів, 2003. С. 169–170.
278. Шевчук В. Розв’язування одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних циліндричних тіл. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: зб. доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20-23 вересня 2006 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. Т. 1, С. 121–123.
279. Шевчук В. Вплив нестаціонарного нагрівання на температурне поле пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О.І. Лукомського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 171–173.
280. Шевчук В. Аналітико–числова процедура розрахунку накопичення пошкоджень в керамічних покриттях за теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки:* збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22-24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 284–285. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
281. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження термонапруженого стану системи півпростір–багатошарове покриття за променево–конвективного теплообміну. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22-24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 246–247. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

282. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за циклічної зміни температури довкілля. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. А.М. Самойленка, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 214–215. URL: www.iapmm.lviv.ua/ mpmm2018.
283. Шевчук В., Гаврись О. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за термоциклічної обробки. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Г.С. Кіта. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2019. Вип. 5. С. 129–130.
284. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно–конвективного теплообміну тіл з багатошаровими покриттями. *Машинознавство*. 2010. Т. 46. № 6. С. 35–41.
285. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Узагальнені граничні умови променево–конвективної взаємодії системи тіло–багатошарове покриття з робочим середовищем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під загальною ред. І.О.Луковського, Г.С.Кіта, Р.М.Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. С. 305–307.
286. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Методика розв’язання нелінійної задачі теплопровідності радіаційної взаємодії півпростору з довкіллям. *Сучасні проблеми механіки і математики : В 3-х т* / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б.М. Пташника. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1, С. 185–187.
287. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Визначення температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево–конвективного нагрівання. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О. І. Лукомського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. С. 173–175.

288. Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1995. Вып. 38. С. 116–120.
289. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови механічного спряження тіла із середовищем через тонке багатошарове тонке покриття. *IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур* : тези доповідей. (Тернопіль, 19-22 вересня 1995 р.). Тернопіль, 1995. С. 171.
290. Шевчук В.А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями. *Пробл. прочности*. 2000. № 1. С. 136–150.
291. Шевчук В.А. Застосування узагальнених граничних умов до розв’язку статичних задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Український математичний конгрес–2001. Секція 8: Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* : тези доповідей. (Київ, 21-23 серпня 2001 р.). Київ, 2001. С 53.
292. Шевчук В.А. Розрахунок теплового стану тіл з багатошаровими покриттями. *Наукові читання, присвячені памяті академіка Я.С Підстригача.* (Львів, 23-24 травня 2002 р.). Львів, 2002. С. 18.
293. Шевчук В.А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе тело–многослойное покрытие. *Материалы 5-го Международного форума по тепломассобмену* (Минск, Беларусь, 24-28 мая 2004 г.). Минск: CD–ROM. Статья № 3–36. 10с.
294. Шевчук В.А. Одновимірні задачі пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2007. Т. 50. № 4. С. 104–112.
295. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими покрытиями. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу: матеріали III міжнародної наукової конференції*. Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 93–95.
296. Шевчук В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття. *Доп. НАН України*. 2011. № 7. С.76–82.

297. Шевчук В.А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2011. Т. 54. № 2. С.179–185.

298. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка*. 2011. Т. 19. № 5. Вип. 15, т. 1. С. 129–139.

299. Шевчук В.А. Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багатошаровим покривом. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2012. Вип. 10. С. 159–167.

300. Шевчук В.А. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием. *Инж.-физ. журн.* 2013. Т. 86. № 2. С. 423–431.

301. Шевчук В.А. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покривом. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2013. Вип. 11. С. 157–163.

302. Шевчук В.А. Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного нагріву. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 148–157.

303. Шевчук В.А. Термонапружений стану пластини з тонким двостороннім багатошаровим покривом за умов нестаціонарного теплообміну. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2016. Вип. 14. 113–122.

304. Шевчук В.А. Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покривом. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2017. Т. 60. № 2. С. 117–129.

305. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови радіаційно–конвективного теплообміну тіл із середовищем через багатошарові неплоскі покриття. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2019. Т. 62. № 2. С. 82–97.

306. Шевчук В.А., Гаврись А.П. Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды. *Инж.-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 6. С. 1543-1551.

307. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Вибір ітеративного методу розв’язання нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2014. Т. 57. № 4. С. 179–185.
308. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево–конвективного теплообміну. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2014. Вип. 20. С. 229–240.
309. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Аналітичний розв’язок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір–багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2016. Вип. 24. С. 121–132.
310. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево–конвективного теплообміну. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2017. Вип. 15. С. 171–179.
311. Шевчук В.А., Калиняк Б.М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2010. Т. 46. № 6. С. 35–41.
312. Шевчук П.Р., Гаврись А.П. Влияние лучевого нагрева на температурные режимы и остаточные напряжения при высокотемпературном напылении покрытий. *Мат. методы и физ.-мех. поля.* 1989. Вып. 30. С. 69–73.
313. Шевчук П.Р., Гаврись О.П. Розрахунок залишкових деформацій у покриттях нанесених способом високотемпературного напилення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. Т. 46. № 1. С. 105–113.
314. Юшкевич О.Ю. Вывод операторным методом условий неидеального термомеханического контакта разнородных тел. *Термомеханические процессы в кусочно–однородных элементах конструкций.* К.: Наук. думка, 1978. С. 62–67.
315. Юшкевич О.Ю. Вывод методом начальных функций термомеханических граничных условий для тел с покрытиями. *Вопросы прикладной термомеханики.* К.: Наук. думка, 1979. С. 149–153.

316. Яцків О., Швець Р., Бобик Б. Термонапружений стан циліндра зі змінними властивостями приповерхневого шару за нагріву поверхневими джерелами тепла. *Сучасні проблеми механіки і математики:* збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 208–210.
317. Яцків О.І., Швець Р.М., Бобик Б.Я. Деякі підходи до розв’язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2007. Вип. 5. С. 186–194.
318. Яцків О.І., Швець Р.М., Бобик Б.Я. Термонапружений стан циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні параметри якого змінюються в часі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. № 4. С. 90–105.
319. Abdalkhani J. The nonlinear cooling of a semi-infinite solid – implicit Runge-Kutta (IRK) methods. *Appl. Math. Comput.* 1992. Vol. 52. No. 2-3. P. 233–237.
320. Abd-Alla A.M., Abd-Alla A.N., Zeidan N.A. Transient thermal stresses in a rotation non-homogeneous cylindrically orthotropic composite. *Appl. Math. Comput.* 1999. Vol. 105. No. 2-3. P. 253–269.
321. Abd-Alla A.M., Abd-Alla A.N., Zeidan N.A. Thermal stresses in a nonhomogeneous orthotropic elastic multilayered cylinder. *J. Therm. Stresses*. 2000. Vol. 23. No. 5. P. 413–428.
322. Abd-Alla A.M., Edfawy E., Mahmoud S.R. On problem of the non-homogeneity on an infinite orthotropic elastic cylinder. *J. Comput. Theor. Nanosci*. 2014. Vol. 11. No. 4. P. 945–952.
323. Ainola L., Aben H. On hybrid thermomechanics for multilayered cylinders. *J. Therm. Stresses.* 2004. Vol. 27. No. 3. P. 195–207.
324. Akcay I.H., Kaynak I. Analysis of multilayered composite cylinders under thermal loading. *J. Reinf. Plast. Compos.* 2005. Vol. 24. No. 11. P.1169–1179.
325. Al Nimr M.A, Alcam M.K. A generalized thermal boundary condition. *Heat Mass Transf.* 1997. Vol. 33. No. 1-2. P. 157–161.

326. Al Nimr M.A, Khadrawi A.F., Hammad M. A generalized thermal boundary condition for the hyperbolic heat conduction model. *Heat Mass Transf.* 2002. Vol. 39. No. 1. P. 69–79.

327. Alshits V.I., Kirchner H.O.K. Cylindrically anisotropic, radially inhomogeneous elastic materials. *Proc. R. Soc. Lond*. *Ser. A.* 2001. Vol. 457. P. 671–693.

328. Araki N., Makino A., Ishiguro T., Mihara J. An analytical solution of temperature response in multilayered materials for transient methods. *Int. J. Thermophys.* 1992. Vol. 13. No. 3. P. 515–538.

329. Argatov I., Mishuris G. An asymptotic model for a thin bonded elastic layer coated with an elastic membrane. *Appl. Math. Modelling.* 2016. Vol. 40. No. 4. P. 2541–2548.

330. Astapov A.N., Nushtaev D.V., Rabinskiy L.N. Calculation of thermal stresses in a substrate–coating system. *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An Int. J.* 2017. Vol. 8. No. 4. P. 267–286.

331. Auvray A., Vial G. Asymptotic expansions and effective boundary conditions: a short review for smooth and nonsmooth geometries with thin layers. *ESAIM Proc. Surveys.* September 2018, Vol. 61. P. 38–54.

332. Bahar L.Y. Transfer matrix approach to layered systems. *J. Eng. Mech. Div.* 1972. Vol. 98. No. 5. P. 1159–1172.

333. Bahar L.Y. Transfer matrix approach to elastodynamics of layered media. *J. Acoust. Soc. Am*. 1975. Vol. 57. No. 3. P. 606–609.

334. Bahar L.Y., Hetnarski R.B. Coupled thermoelasticity of a layered medium. *J. Therm. Stresses.* 1980. Vol. 3. No. 1. P. 141–152.

335. Bao G., Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J. Solids Struct*. 1995. Vol. 32. P. 2853–2871.

336. Beevers C.E. Some static problems for elastic bodies with a crust. *Meccanica*. 1985. Vol. 20. No. 1. P.38–42.

337. Belyakov N.S. Singular integral transforms for heat transfer problems in semi-infinite solids with coatings. *Heat Mass Transf.* 2010. Vol. 46, No. 3. P. 355–364.

338. Benveniste Y. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids.* 2006. Vol. 54. No. 4. P. 708–734.
339. Benveniste Y. A $O(h^N)$ interface model of a three-dimensional curved interphase between in conduction phenomena. *Proc. Royal Soc. A* 2006. Vol. 462. No. 2069. P. 1593–1616.
340. Benveniste Y., Baum G. An interface model of a graded three-dimensional anisotropic curved interphase. *Proc Royal Soc. A.* 2007. Vol. 463. No. 2078. P. 419–434.
341. Bufler H. Theory of elasticity of multilayered medium. *J. Elast.* 1971. Vol. 1. No. 2. P. 125–143.
342. Campo A. Fin effectiveness under combined cooling via the quasilinearization method. *Nucl. Eng. Des*. 1975. Vol. 33. No. 3. P. 353–356.
343. Campo A. A quasilinearization approach for the transient response of bodies with surface radiation, *Lett. Heat Mass Transf.* 1977. Vol. 4. No. 4. P. 291–298.
344. Carpinteri A., Lorenzini E. Thermal shock in a nuclear fuel element with cladding. *Nucl. Eng. Des.* 1980. Vol. 61. No. 1. P. 1–12.
345. Chandrashekhara K., Gopalakrishnan P. Analysis of an orthotropic cylindrical shell having a transversely isotropic core subjected to axisymmetric load. *Thin-Walled Struct*. 1986. Vol. 4. No. 3. P. 223–237.
346. Chang G.C., Phucharoen W., Miller R.A. Finite element thermal element solutions for thermal barrier coatings. *Surf. Coat. Technol*. 1987. Vol. 32. Nos. 1-4. P. 307–325.
347. Chen J. Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack in a graded orthotropic coating–substrate structure. *Int. J. Fract.* 2005. Vol. 133. No. 4. P. 303–328.
348. Chen J.-L., Гембара Н.О., Гвоздюк М.М. Нестаціонарна температурна задача для циліндричної оболонки з багатошаровими тонкими покривами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2018. Т. 54. № 3. С. 49–57.

349. Chen X., Liu Q. Thermal stress analysis of multi-layer thin films and coatings by an advanced boundary element method. *Comput. Model. Eng. Sci*. 2001. Vol. 2. No. 3. P. 337–349.

350. Chen X., Liu Q., Ma Q. A parametric investigation on thermally driven edge cracking of a coating–substrate system. *J. Coat. Technol. Res*. 2012. Vol. 9. No. 5. P.541–549.

351. Chen X., Pond C., Wang X. Effective boundary conditions resulting from anisotropic and optimally aligned coatings: the two dimensional case. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 2012. Vol. 206. No. 3. P. 911–951.

352. Chen X., Zhang K., Chen G., Luo G. Multiple axial cracks in a coated hollow cylinder. *Int. J. Solids Struct*. 2006. Vol. 43. No. 21. P. 6424–6435.

353. Chen Y., Wang S., Zuo Z. A procedure for calculating transient load through multilayer cylindrical structures. *Appl. Therm. Eng.* 2003. Vol. 23. No. 16. P. 2133–2145.

354. Chen Y.Z. Study of multiply-layered cylinders made of functionally graded materials using the transfer matrix method. *J. Mech. Mater. Struct.* 2011. Vol. 6. No. 5. P. 641–657.

355. Cheng Z.Q., Meguid S.A., Zhong Z. Thermo-mechanical behavior of a viscoelastic FGMs coating containing an interface crack. *Int. J. Fract*. 2010. Vol. 164. No. 1. P. 15–29.

356. Cherepanov G.P. On the theory of thermal stresses in a thin film on a ceramic substrate. *J. Appl. Phys*. 1994. Vol. 75. No. 2. P. 844–849.

357. Cherepanov G.P. On the theory of thermal stresses in a thin bonding layer. *J. Appl. Phys*. 1995. Vol. 78. No. 11. P. 6826–6832.

358. Cherepanov G.P, Martinez. A computerized model for thermal stresses in thin films. *Comput. Struct*. 1997. Vol. 63. No. 6. P.1095–1100.

359. Choi H.J. The influence of graded coatings on the thermal stress intensity factors of an oblique crack in a semi-infinite substrate subjected to local heating on the boundary. *J. Therm. Stresses.* 2012. Vol. 35. No. 5. P. 393–423.

360. Choi H.J., Jin T.E., Lee K.Y. Transient thermal stresses in a cladded semi-infinite medium containing an underclad crack. *J. Therm. Stresses.* 1995. Vol. 18. No. 3. P. 269–290.

361. Choi H.J., Jin T.E., Lee K.Y. Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone. – Part II: Thermal shock response. *Int. J. Fract.* 1998. Vol. 94. No. 2. P. 123–135.

362. Chung M.Y. Cylindrically anisotropic and radially inhomogeneous elastic tube under surface loadings. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2017. Vol. 70, No. 3. P. 273–288.

363. Ciavarella M, Decuzzi P., Tagarielli V.L., Dermelio G.P. Simple formulas for thermoelastic stresses in TBC coatings. *J. Therm. Stresses.* 2003. Vol. 26**. No**. 5. P. 409–422.

364. Crosbie A.L., Viskanta R. Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1968. Vol. 11. No. 2. P. 305–317.

365. Desai P., Kant T. A mixed semi analytical solution for functionally graded (FG) finite length cylinders of orthotropic materials subjected to thermal load. *Int. J. Mech. Mater. Des*. 2012, Vol. 8. No 1. P. 89–100.

366. Diaconu G., Loulou T., Michrafy A., Rezai-Aria F., Girardin D., Dour G. A normalized approach to optimize the coating/substrate couples with regards to thermal stresses: conditions for thermo-mechanical screening. *Proc. Sixth Inter. Congr. Therm. Stresses.* (TS2005, Vienna, Austria, 26-29 May 2005) Vienna: Vienna University of Technology, 2005. Vol. 1. P. 111–114.

367. Dicker D., Asnani M. A perturbation solution for the nonlinear radiation heat transfer problem. *Proc. 3rd Int. Heat Transf. Conf.,* Chicago. 1966. Vol. 5. P. 164–173.

368. Ding S.H., Li X. Thermal stress intensity factors for an interface crack in a functionally graded layered structures. *Arch. Appl. Mech*. 2011. Vol. 81. No.7. P. 943–955.

369. Dixit S., Kumarappa S. Thermo-mechanical analysis of thermal barrier coating system using finite element method. *Int. J. Eng. Tech. Res.* 2014. Vol.2. No 11. P. 317–324**.**

370. Du F., Lovell M.R., Wu T.W. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools. *Int. J. Solids Struct*. 2001. Vol. 38. No. 26–27. P. 4557–4570.

371. Dyyak I., Savula Ya. D-adaptive mathematical model of solid body with thin coating. *Математичні студії*. 1997. Т. 7. № 1. С. 103–110.

372. Dyyak I.I., Savula Ya., Styahar A. Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition. *J. Numer. Appl. Math.* 2012. № 3 (109). P. 23–33.

373. El-Borgi S, Erdogan F, Ben Hatira F. Stress intensity factors for an interface crack between a functionally graded coating and a homogeneous substrate. *Int. J. Fract*. 2003. Vol. 123. No. 3–4. P. 139–162.

374. El-Borgi S, Hidri L, Abdelmoula R. An embedded crack in a graded coating bonded to a homogeneous substrate under thermo-mechanical loading. *J. Therm. Stresses*. 2006. Vol. 29. No. 5. P. 439–466.

375. El-Naggar A.M., Abd-Alla A.M., Ahmed S.M. On the a rotation of a non-homogeneous composite infinite cylinder of orthotropic material. *Appl. Math. Comput.* 1995. Vol. 69. No. 2–3. P. 47–57.

376. Elperin T., Rudin G. Analytical solution of heat conduction problem for a multilayer assembly arising in photothermal reliability testing. *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 1994. Vol. 21. No. 1. P. 95–104.

377. Elperin T., Rudin G. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1995. Vol. 8, No. 17. P. 3143–3147.

378. Elperin T., Rudin G. Thermoelasticity problem for a multilayer coating–substrate assembly irradiated by a laser beam. *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 1996. Vol. 23. No. 1. P. 133–142.

379. Elperin T., Rudin G. Photothermal reliability testing of a multilayer coating–substrate assembly: a theoretical approach. *J. Electron. Packag*. 1998. Vol. 120. No. 1. P. 82–88.

380. Elperin T, Rudin G. Thermal stresses in functionally graded materials caused by a laser thermal shock. *Heat Mass Transf.* 2002. Vol. 38. No. 7–8. P. 625–630.

381. Elperin T, Rudin G. Thermal stresses in a coating–substrate assembly caused by internal heat source. *J. Therm. Stresses.* 2016. Vol. 39. No. 1. P. 90–102.

382. Erdogan F., Rizk A.A. Fracture of coated plates and shells under thermal shock. *Int. J. Fract.* 1992. Vol. 53. No.2. P. 159–185.

383. Erdogan F, Wu B.H. Crack problem in FGM layers under thermal stresses. *J. Therm. Stresses.* 1996. Vol. 19. No. 3. P. 237–265.

384. Evans A.G., Crumley G.B., Demaray R.E. On the mechanical behavior of brittle coatings and layers. *Oxid. Met.* 1983. Vol. 20. No. 5–6. P. 193–216.

385. Falope F., Lanzoni L., Radi E., Tarantino A.M. Thin film bonded to elastic orthotropic substrate under thermal loading. *J. Strain Anal. Eng. Des*. 2016, Vol. 51. No. 4. P. 256–269.

386. Fan S., Barber J.R. Solution of periodic heating problems by the transfer matrix method. *Int. J. Heat Mass Transf*. 2002. Vol. 45. No. 5. P. 1155–1158.

387. Fraldi M., Cowin S.C. Inhomogeneous elastostatic problem solutions costructed from stress-associated homogeneous solutions. *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. Vol. 52. No. 10. P. 2207–2233.

388. Gao C., Zhao Z., Li X. Modeling of thermal stresses in elastic multilayer coating systems. *J. Appl. Phys*. 2015. Vol. 117. No. 5. 055305. 4p.

389. Gharbi M., El-Borgi S., Chafra M. A surface crack in a graded coating bonded to a homogeneous substrate under transient thermal loading. *J. Therm. Stresses.* 2009. Vol. 32. No. 4. P. 394–413.

390. Givoli D. Finite element modeling of thin layers. *Comput. Model. Eng. Sci.* 2004. Vol. 5. No. 6. P. 497–514.

391. Goshima T., Miyao K. Transient thermal stresses in a composite hollow cylinder subjected to T-ray heating. *Nucl. Eng. Des*. 1991. Vol. 126. No. 3. P. 413–425.

392. Grzesik W., Bartoszuk M., Nieslony P. Finite difference analysis of the thermal behaviour of coated tools in orthogonal cutting of steels. *Int. J. Mach. Tools Manuf*. 2004. Vol. 44. No. 14. P. 1451–1462.

393. Gu Y., Chen W., Zhang C. Stress analysis for thin multilayered coating systems using a sinhtransformed boundary element method. *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50. No. 20–21. P. 3460–3471.

394. Guo L.C., Noda N., Ishihara M. Thermal stress intensity factors for a normal surface crack in a functionally graded coating structure. *J. Therm. Stresses.* 2007. Vol. 31. No. 2. P. 149–164.

395. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids. *Int. J. Solids Struct*. 1978. Vol. 14. No. 6. P.431–440.

396. Han J.C. Thermal shock resistance of ceramic coatings. *Acta Mater.* 2007. Vol. 55. No. 10. P. 3573–3581.

397. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction. *J. Appl. Phys.* 2001. Vol. 89. No. 4. P. 2261–2267.

398. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids.* 2002. Vol. 50. No. 12. P. 2509–2537.

399. Hata T., Atsumi A. Transient thermoelastic problem for a transversely anisotropic hollow cylinder with temperature-dependent properties. *Bull. JSME*. 1968. Vol. 11. No. 45. P. 404–412.

400. Hatta H., Taya M. Thermal stress in a coated short fiber composite. *J. Eng. Mater. Technol*. Vol. 109. No. 1. P. 59–63.

401. He B., Rui X., Zhang H. Transfer matrix method for natural vibration analysis of tree system. *Math. Probl. Eng.* 2012. Vol. 2012. No. 2. P. 125–143.

402. Heijnen L.M., Kuijpers T.W., Klostermann J.A. Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers. *High Temp. High Press*. 1988. Vol. 20. No. 3. P. 305–313.

403. Hou X., Deng Z., Yin G. Application of transfer matrix method in heat transfer performance analysis of multi-re-entrant honeycomb structures. *Heat Mass Transf.* 2014. Vol. 50. No. 12. P. 1765–1782.

404. Hsueh C.H. Thermal stresses in elastic multilayer systems. *Thin Solid Films.* 2002. Vol. 418. No. 2. P. 182–188.

405. Hu S.Y., Li Y.L., Munz D., Yang Y.Y. Thermal stresses in coated structures. *Surf. Coat. Technol*. 1998. Vol. 99. Nos. 1–2. P. 25–131.

406. Huang G.Y., Wang Y.S., Yu S.W. A new model of functionally graded coatings with a crack under thermal loading. *J. Therm. Stresses.* 2004. Vol. 27. No. 6. P. 491–512.

407. Ishiguro T., Makino A., Araki N., Noda N. Transient temperature response in functionally gradient materials. *Int. J. Thermophys*. 1993. Vol. 14. No 1. P. 101–121.

408. Itou S. Thermal stresses around a crack in a non-homogeneous diffusion layer between a coating plate and an elastic half-plane. *J. Therm Stresses* 2005. Vol. 28. No. 11. P. 1161–1178.

409. Jin Z.H. An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material. *Int. Commun. Heat Mass Transf*. 2002. Vol. 29. No. 7. P. 887–895.

410. Jin Z.H. Effect of thermal property gradients on the edge cracking in a functionally graded coating. *Surf. Coat. Technol.* 2004. Vol. 179. No. 2–3. P. 210–214.

411. Jin Z.H., Feng Y.Z. Thermal fracture resistance of a functionally graded coating with periodic edge cracks. *Surf. Coat. Technol*. 2008. Vol. 202. No. 17. P. 4189–4197.

412. Jin Z.H, Paulino G.H Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *Int. J. Fract.* 2001. Vol. 107. No. 1. P. 73–98.

413. Josell D., Cezairliyan A., van Heerden D., Murray B.T. An integral solution for thermal diffusion in periodic multilayer ma285terials: Application to iron/copper multilayers. *Int. J. Thermophys.* 1997. Vol. 18. No. 3. P. 865–885.

414. Josell D., Cezairliyan A., van Heerden D., Murray B.T. Thermal diffusion through multilayer coatings: Theory and experiment. *Nanostruct. Mater.* 1997. Vol. 9. No. 1–8. P. 727–736.

415. Kashtalyan M., Menshykova M. Three-dimensional elastic deformation of a functionally graded coating/substrate system. *Int. J. Solids Struct*. 2007. Vol. 44. No. 16. P. 5272–5288.

416. Kashtalyan M., Menshykova M. Three-dimensional analysis of a functionally graded coating/substrate system of finite thickness. *Phil. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2008. Vol. 366. No. 1871. P. 1821–1826.

417. Kobilskaya E, Lyashenko V.A. method for solving a boundary value problem in a multilayered area. *Вісник Харківськ. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер.: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 46. С. 25-36.

418. Kokini K. Interfacial cracks in ceramic-to-metal bonds under transient thermal loads. *J. Am. Ceram. Soc.* 1987. Vol. 70. No. 12. P. 855–859.

419. Kokini K., Choules B.D. Surface thermal fracture of functionally graded ceramic coatings: effect of architecture and materials. *Compos. Eng.* 1995. Vol. 5. No. 7. P. 865–877.

420. Kokini K., Takeuchi Y.R. Interface cracks in thermally loaded multilayer ceramic coatings. *Fracture Mechanics. ASTM STP 1220. American Society for Testing and Materials* / Ed. F. Erdogan. Philadelphia, 1995. Vol. 25, P. 177–190.

421. Kossak O., Savula Ya. The investigation of the deformations of the elastic bodies with thin coating using D-adaptive finite element model. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2010. Вип. 12. С. 102–111.

422. Krenev L.I., Tokovyy Yu.V., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Gorokhov S.V. A numerical-analytical solution to the mixed boundary-value problem of the heat-conduction theory for arbitrarily inhomogeneous coatings. *Int. J. Therm. Sci.* 2016. Vol. 107. P. 56–65.

423. Kroupa F. Stresses in coatings on cylindrical surfaces. *Acta Techn. CSAV*. 1994. Vol. 39. P. 243–274.

424. Kroupa F., Knesl Z., Valach J. Residual stresses in graded thick coatings. *Acta Techn. CSAV*. 1993. Vol 38, P. 29–74.

425. Kulchytsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space. *Int. J. Mech. Sci*. 2012. Vol. 54. No. 1. P. 105–l12.

426. Kulchytsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Axisymmetrical problem of thermo-elasticity for halfspace with gradient coating. *Int. J. Mech. Sci.* 2016. Vol. 106. P. 62–71.

427. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., Bajkowski A.S. Semi-analytical solution of three-dimensional thermoelastic problem for half-space with gradient coating. *J. Therm. Stresses.* 2018. Vol. 41. No. 9. P. 1–13.

428. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., Perkowski D.S. On the quasi-stationary problem of heat conduction for a homogeneous half-space with composite coating. *Acta Mech.* 2019. Vol. 41. No. 9. P. 1–13.

429. Kupiec K., Komorowicz T. Simplified model of transient radiative cooling of spherical body. *Int. J. Therm. Sci.* 2010. Vol. 49. No. 7. P. 1175–1182.

430. Lee X.-F., Peng X.-L. A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties. *J. Elast.* 2009. Vol. 96. No. 1. P. 81–95.

431. Lee Y.-D., Erdogan F. Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings. *Int. J. Fract*. 1994. Vol. 69. No. 2. P. 145–165.

432. Lee Y.-D., Erdogan F. Interface cracking of FGM coatings under steady-state heat flow. *Eng. Fract. Mech*. 1998. Vol. 59. No. 3. P. 361–380.

433. Lee Z.-Y., Chen C.K., Hung C.-I. Transient thermal stress analysis of multilayered hollow cylinder. *Acta Mech.* 2001. Vol. 151. No. 1–2. P. 75–88.

434. Li B., Fan X., Zhou K., Wang T. A semi-analytical model for predicting stress evolution in multilayer coating systems during thermal cycling. *Int. J. Mech. Sci.* 2017. Vol. 135. P. 31–42.

435. Li H. Effective boundary conditions of the heat equation on a body coated by functionally graded material. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser A.* 2016. Vol. 36. No. 3. P. 1415–1430.

436. Li H., Li J. Asymptotic behavior of Dirichlet eigenvalues on a body coated by functionally graded material. *Commun. Pure Appl. Anal.* 2017. Vol. 16. No. 4. P. 1493–1516.

437. Li J., Wang X., Zhang G., Zhang K. Asymptotic behavior of Robin problem for heat equation on a coated body. *Rocky Mt. J. Math*. 2012. Vol. 42. No. 3. P. 937–958.

438. Liu S., Zhang Y., Liu P. New analytical model for heat transfer efficiency of metallic honeycomb structures. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2008. Vol. 51, No. 25–26. P. 6254–6258.
439. Lorenzini E., Spiga M. Consequences of a step variation in coolant temperature on a fuel rod with cladding. *Nucl. Eng. Des*. 1977. Vol. 44. No. 3. P. 323–330.
440. Lu X., Tervola P. Transient heat conduction in the composite slab-analytical method. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38. No. 1. P. 81–96.
441. Lu X., Viljanen M. An analytical method to solve heat conduction in layered spheres with time-dependent boundary conditions. *Phys. Lett. A*. 2006. Vol. 351. No. 4–5. P. 274–282.
442. Lubarda V.A. On pressurized curvilinearly orthotropic circular disk, cylinder and sphere made of radially nonuniform material. *J. Elast.* 1994. Vol. 109. No. 2. P. 103–133.
443. Lukasiewicz S.A. Thermal stresses in shells. *Thermal Stresses* / Ed. R.B. Hetnarski. North Holland, New York: Elsevier. 1989. Vol. 3. P. 355–553.
444. Lyubimov V.V., Voevodin A.A., Spassky S.E., Yerokhin A.L. Stress analysis and failure possibility assessment of multilayer physically vapour deposited coatings. *Thin Solid Films*. 1992. Vol. 207. No. 1–2. P. 117–125.
445. Maiti M. Stresses in anisotropic nonhomogeneous cylinders. *AIAA J.* 1973. Vol. 11. No. 9. P. 1326–1328.
446. Makar I., Savula Y., Styahar A. Numerical analysis of a multiscale model of the elastic body with the thin cover. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2012. Вип. 15. С. 49–55.
447. Manning A.S., Fuchs S. Finite element analysis of thermal stresses in high-power substrates for hybrid circuits. *Mater. Des.*, Vol. 18. No. 2. P. 61–72.
448. Mao W.G., Jiang J.P., Zhou Y.C., Lu C. Effects of substrate curvature radius, deposition temperature and coating thickness on the residual stress field of cylindrical thermal barrier coatings. *Surf. Coat. Technol.* 2011. Vol. 205. No. 8-9. P. 3093–3102.
449. Marie S. Analytical expression of the thermal stresses in a vessel or pipe with cladding submitted to any thermal transient. *Int. J. Press. Vessels. Pip.* 2004. Vol. 81. No. 4. P. 303–312.

450. Matysiak S., Perkowski D. On heat conduction problems in a composite half-space with a nonhomogeneous coating. *Heat Transf. Res*. 2016. Vol. 47. No. 12. P. 1141–1155.

451. Men X., Tao F., Gan L. Analysis of the coating interfacial stress in thick walled cylinder. *Proc. 3rd Int. Conf. on Machinery, Materials and Information Technology Applications (ICMMITA 2015*) / Eds. W. Du, X. Zhou. Paris: Atlantis Press, 2015. P. 1355–1358.

452. Mencik J. Mechanics of components with treated or coated solids. Dordrecht: Kluwer Academic Publishing. 1996. 360 p.

453. Mezin A., Lepage J., Abel P.B. An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films. *Thin Solid Films*. 1996. Vol. 272, No. 1. P. 124–131.

454. Mikhailov M.D., Ozisik M.N. Unified solutions of heat diffusion in finite region involving a surface film of finite heat capacity. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1985. Vol. 28. No. 5. P. 1039–1045.

455. Mioduchowski A., Plochocki Z. Thermal stresses in a coating layer. I. General theoretical scheme. *Acta Mech.* 2010. Vol. 215. No. 1–4. P. 319–333.

456. Mohammadi M., Saha G.C., Akbarzadeh A.H. Elastic field in composite cylinders made of functionally graded coatings. *Int. J. Eng. Sci*. 2016. Vol. 101. No. 3. P. 156–170.

457. de Monte F. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A `natural' analytic approach. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2000. Vol. 43. No. 19. P. 3607–3619.

458. de Monte F. An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2002. Vol. 45. No. 6. P. 333–1343.

459. Moulton D., Pelesko J.A. Thermal boundary condition: an asymptotic analysis *Heat Mass Transf.* 2007. Vol. 44. No. 7. P. 795–803.

460. Naik R.A. Simplified micromechanical equations for thermal residual stress analysis of coated fiber composites. *J. Compos. Technol. Res*. 1992. Vol. 14. No. 3. P. 182–186.

461. Najar J. Continuous damage of brittle solids. *Continuum Damage Mechanics. Theory and Applications* / Eds. D. Krajcinovic, J. Lemaitre. Wien – New York: Springer. 1987. P. 233–294.
462. Najar J., Silberschmidt V.V. Continuum damage and failure evolution in inhomogeneous ceramic rods. *Arch. Mech.* 1998. Vol. 50. No. 1. P. 21–40.
463. Nied H.F. Thermal shock in a circumferentially cracked hollow cylinder with cladding. *Eng. Fract. Mech*. 1984. Vol. 20. No. 1. P. 113–137.
464. Niklasson A.J., Datta S.K., Dunn M.L. On approximating guided waves in plates with thin anisotropic coatings by means of effective boundary conditions. *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. Vol. 108. No. 3. P. 924–933.
465. Nusier S.Q., Newaz G.M. Transient residual stresses in thermal barrier coatings: analytical and numerical results. *ASME J. Appl. Mech*. 1998. Vol. 65. No. 2. P. 346–353.
466. Obst A.W., Hyer M.W., Vaughn W.L. Thermal stresses in coatings on carbon-carbon composites. *Mech. Compos. Mater. Struct.* 1998. Vol. 5, No. 3. P. 203–225.
467. Olesiak Z.S. Influence of surface heating on coated elastic solids. *J. Therm. Stresses.* 1989. Vol. 12. No. 3. P. 293–303.
468. Onen O., Davis L., Nelson C., Guldiken R. Thermal stresses on membrane based microdevices. *Microsyst. Technol.* 2010. Vol. 16. No. 11. P. 1967–1973.
469. Ootao Y., Tanigawa Y., Fukuda T. Axisymmetric transient thermal stress analysis of a multilayered composite hollow cylinder. *J. Therm. Stresses.* 1991. Vol. 14. No. 2. P. 201–213.
470. Oral A., Anlas G. Effects of radially varying moduli on stress distribution of nonhomogeneous anisotropic cylindrical bodies. *Int. J. Solids Struct*. 2005. Vol. 42. No. 20. P. 5568–5588.
471. Ozisik M.N. Heat conduction. New York, NY: John Wiley, 1993. 692 p.
472. Peng X.-L., Lee X.-F. Thermoelastic analysis of functionally graded annulus with arbitrary gradient. *Appl. Math. Mech.* 2009. Vol. 30. No. 10. P. 1211–1220.
473. Peng X.-L., Lee X.-F. Thermoelastic analysis of a cylindrical vessel of functionally graded materials. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2010. Vol. 87. No. 5. P. 203–210.

474. Peng X.-L., Lee X.–F. Transient response of temperature and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder. *J. Therm. Stresses.* 2010. Vol. 33. No. 5. P. 485–500.

475. Peng X.-L., Lee X.-F. Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks. *Int. J. Mech. Sci*. 2012. Vol. 60. No. 1. P. 84–91.

476. Perkowski D.M. On axisymmetric heat conduction problem for FGM layer in homogeneous substrate. *Int. Commun. Heat Mass Transf*. 2014. Vol 57, P. 157–162.

477. Perkowski D.M., Kulchytsky-Zhyhailo R., Kołodziejczyk W. On axisymmetric heat conduction problem for multilayer graded coated half-space. *J. Theor. Appl. Mech.* 2018. Vol. 56. No. 1. P. 147–156.

478. Pipes L.A. Matrix analysis of heat transfer problems. *J. Franklin Inst.*, 1957. Vol 3. No. 3. P. 195–206.

479. Prasad R., Samria N.K. Transient temperature distribution in an internally and externally insulated cylindrical shell. *Appl. Sci. Res.* 1989. Vol. 46. No. 2. P. 141–157.

480. Prasad R., Samria N.K. A generalized solution for transient temperature distribution in an internally/externally insulated spherical shell. *7th. Eurotherm Seminar"*Thermal Non-Equilibrium in Two-Phase Flow" (Rome, 23-24 March 1989). Rome: Palazzo Baleani, 1989. P. 389–407.

481. Rahman M., Newaz G. Elastostatic surface displacements of a half-space reinforced by a thin film due to an axial ring load. *Int. J. Eng. Sci*. 1997. Vol. 35. No. 6. P. 603–611.

482. Rahman M. Newaz G. Boussinesq type solution for a transversely isotropic half-space coated with a thin film. *Int. J. Eng. Sci.* 2000. Vol. 38, No. 7. P. 807–822.

483. Rahmani L. The effect of a thin layer on a nonlinear thermoelastic plate. *Appl. Math. Sciences.* 2008. Vol. 2. No 50. P. 2489–2499.

484. Rahmani L., Vial G. Reinforcement of a thin plate by a thin layer. *Math. Methods Appl. Sci*. 2008. Vol. 31. No. 3. P. 315–338.

485. Rekik M., Neifar M., El-Borgi S. An axisymmetric problem of a partially insulated crack embedded in a graded layer bonded to a homogeneous half-space under thermal loading. *J. Therm. Stress* 2011. Vol. 34. No. 3. P. 201–227.

486. Rizk A.A. Stress intensity factor for an edge crack in two bonded dissimilar materials under convective cooling. *Theor. Appl. Fract. Mech*. 2008. Vol. 49. No.3. P. 251–267.

487. Rizk A.A., Erdogan F. Cracking of coated materials under transient thermal stresses. *J. Therm. Stresses*. 1989. Vol. 12. No. 2. P. 125–168.

488. Rizk A.E.-F.A, Hrairi M. Edge-cracked bimaterial systems under thermal heating. *Int. J. Solids Struct.* 2009. Vol. 46. No. 7. P. 1648–1658.

489. Rizk A.E.-F.A, Radwan S.F. Transient thermal stress problem for a cracked semi-infinite medium. *J. Therm. Stresses.* 1992. Vol. 15. No. 4. P. 451–468.

490. Rozniakowska M., Yevtushenko A.A. The effect of the time structure of laser pulse on the temperature distribution in homogeneous body with coating. *Heat Mass Transf.* 2007. Vol. 43. No. 5. P. 439–447.

491. Rubinstein A.A., Tang Y. Micromechanical analysis of failure in thin protective coatings. *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. No.21–22. P. 5831–5847.

492. Sarikaya O., Islamoglu Y., Celik E.C. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications. *Mater. Des*. 2005. Vol. 26. No. 4. P. 357–362.

493. Savula Ya.H., Dyyak I.I., Krevs V.V. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures. *Comput. Math. Appl*. 2001. Vol. 42. No. 8–9. P. 1201–1216.

494. Sayman O. Analysis of multi-layered composite cylinders under hygrothermal loading. *Composites: Part A.* 2005. Vol. 36. No. 3. P. 923–933.

495. Sayman O., Sen F., Celik E., Arman Y. Thermal stress analysis of Wc-Co/Cr-Ni multilayer coatings on 316L steel substrate during cooling process. *Mater. Des*. 2009. Vol. 30. № 3. P. 770–774.

496. Sburlati R. Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings. *Compos. Struct*. 2012. Vol. 94. No. 12. P. 3592–3600.

497. Sburlati R. Atashipour S.R., Hosseini-Hashemi Sh. Study on the effect of functionally graded coating layers on elastic deformationof thick circular plates: A closed-form elasticity solution. *Compos. Struct.* 2013. Vol. 99. P. 3592–3600.
498. Sevostianov I., Kachanov M. Plasma-sprayed ceramic coatings: anisotropic elastic and conductive properties in relation to the microstructure; cross-property correlations. *Mater. Sci. Eng. A.* 2001. Vol. 297. No. 1–2. P. 235–243.
499. Shaw L.L. Thermal residual stresses in plates and coatings composed of multi-layered and functionally graded materials. *Compos. Part B-Eng.* 1998. Vol. 29. No. 3. P. 199–210.
500. Shevchuk V. Approximate calculation of stresses in solids with thin multilayer coatings. *The Fourth Inter. Congr. Industrial and Appl. Math.* Book of Abstracts. Edinburgh, 1999. p. 309.
501. Shevchuk V. Approximate calculation of thermal stresses in solids with thin multilayer coatings. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. (Vienna, Austria, 7-12 July 2002). Vienna: Vienna University of Technology, 2002. Book of Abstracts. Volume II. P. 135.
502. Shevchuk V., Havrys O., Tokovyy Yu., Gao C. Thermocyclic loading of a half-space with a multilayer coating under piecewise-uniform variation of the ambient temperature. *Proc. 12th Inter. Congr. Therm. Stresses 2019* (Hangzhou, China,1-5 June 2019). Hangzhou: Zhejiang University, 2019. P. 300–303.
503. Shevchuk V.A. Effective boundary conditions incorporating the influence of a thin multilayer coating upon the mechanical state of bodies. *4th Euromech Solid Mechanics Conference.* Book of Abstracts II. Mets. France June 26-30, 2000. p. 261.
504. Shevchuk V.A. Procedure of calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *VIII Всеукраїнська Наук. конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*": тези доповідей. (Львів, 25-27 вересня 2001 р.). Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. С. 73–74.
505. Shevchuk V.A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *Lect. Notes Comput. Sci*. 2002. Vol. 2330. P. 500–509.

506. Shevchuk V.A. Determining mechanical state of the body – multilayer coating system. *Proc. Appl. Mech. Math*. 2006. Vol. 6. Iss. 1. p. 267–268.
507. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system "body–multilayer coating". *Heat Transf. Res*. 2006. Vol. 37. No. 5. P. 412–423.
508. Shevchuk V.A. Analytical-numerical treatment of elasticity and thermoelasticity problems for nonhomogeneous orthotropic cylindrical bodies. *Proc. Appl. Mech. Math*. 2009. Vol. 9. No. 1. P. 649–650.
509. Shevchuk V.A. Approximate analytical solution to one-dimensional heat conduction problem for cylinder with thin multilayer coating. *Proc. 9th Inter. Congr. Therm. Stresses.* (Budapest, Hungary, 5-9 June 2011). Budapest: Hungary University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences. On CD–ROM. 4p.
510. Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R.B. Hetnarski. Springer. Netherlands, 2014. Vol. 4. P. 1942–1953.
511. Shevchuk V.A. Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading. *J. Therm. Stresses*. 2017. Vol. 40. *No*. 10. P. 1215–1230.
512. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proc. Seventh Inter. Congr. Therm. Stresses* (TS 2007, Taipei, Taiwan, 4-7 June 2007). Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. Vol. 2. P. 549–552.
513. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analytico-numerical approach to evaluation of damage of ceramic coatings under heating. *Proc. 5th Inter. Congr, Therm. Stresses and Related Topics.* (TS2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, Virginia). Blacksburg, 2003. Vol. 1, pp. MA–6–2–1–4.
514. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thin multi-layer coatings under thermal loading. *Proc. Sixth Inter.l Congr. Therm. Stresses.* (TS2005, Vienna, Austria, 26-29 May 2005) Vienna: Vienna University of Technology, 2005. Vol. 1. P. 313–316.

515. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Computational analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *EUROMECH Colloquium 466 Computational and Experimental Mechanics of Materials*. Book of Abstracts. (Loughborough, UK, 7-10 July 2005). Loughborough: Loughborough University, 2005. P. 12.
516. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings. *Int. J. Solids Struct*. 2005. Vol. 42. No. 16–17. P. 4738–4757.
517. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *Mater. Sci. Eng. A*. 2006. Vol. 426. No. 1–2. P. 121–127.
518. Shiah Y.C., Shi Y.-X. Heat conduction across thermal barrier coatings of anisotropic substrates. *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 2006. Vol. 33. No. 7. P. 827–835.
519. Shodja H.M., Haftbaradaran H., Asghari M. A thermoelasticity solution of sandwich structures with functionally graded coating. *Compos. Sci. Technol*. Vol. 67. No. 7. P. 1073–1080.
520. Shvets RM., Flyachok V.M. Thermoelasticity of multilayer highly anisotropic shells. *J. Therm. Stresses.* 1996. Vol. 19. *No*. 1. P. 1–15.
521. Siedlecka U. Radial heat conduction in a multilayered sphere. *J. Appl. Math. Comput. Mech.* 2014. Vol. 13. No. 4. P. 109–116.
522. Silberschmidt V.V. Computational analyses of damage and failure evolution in ceramic coating under thermal loading. *Fifth World Congr. Comput. Mech.* (Vienna, Austria, 7-12 July 2002). Vienna: Vienna University of Technology. 2002. Book of Abstracts. Volume I. P. 195.
523. Silberschmidt V.V. Crack propagation in random materials: Computational analysis. *Comp. Mat. Sci*. 2003. Vol. 26. P. 159–166.
524. Silberschmidt V.V., Najar J. Computational modelling of the size effect of damage inhomogeneity in ceramics. *Comp. Mat. Sci*. 1998. Vol. 13. No. 1–3. P. 160–167.

525. Singh S., Jain P. K., Rizwan-uddin. Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions. *Nucl. Eng. Des*. 2011. Vol. 241. No. 1. P. 144–154.
526. Sollund H. A., Vedeld K., Hellesland J. Efficient analytical solutions for heated and pressurized multi-layer cylinders. *Ocean Eng.* 2014. Vol. 92. P. 285–295.
527. Suhir E. An approximate analysis of stresses in multilayered elastic thin films. Trans. *ASME: J. Appl. Mech*. 1988. Vol 55. No. 1. P.343–348.
528. Suhir E. Predicted thermally induced stresses in, and the bow of, a circular substrate/thin-film structure. *J. Appl. Phys.* 2000. Vol. 88. No. 5. P. 2363–2370.
529. Surana K.S. Transition finite elements for three dimensional stress analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng*. 1980. Vol.15. No. 7. P.991–1000.
530. Sussmann C., Givoli D., Benveniste Y. Combined asymptotic finite-element modeling of thin layers for scalar elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*. 2011. Vol. 200. Iss. 47-48. P. 3255–3269.
531. Tan Z., Su G., Su J. Improved lumped models for combined convective and radiative cooling of a wall. *Appl. Therm. Eng*. 2009. Vol. 29. No. 11–12. P. 2439–2443.
532. Tang S. Thermal stresses in temperature dependent anisotropic hollow cylinders. *CASI Trans*., 1970. Vol. 3. No. 1. P. 72–76.
533. Tang R., Erdogan F. Transient thermal stresses in a reinforced hollow disk or cylinder containing a radial crack. *J. Eng. Gas Turbine Power*, 1987. Vol. 107. No. 1. P. 212–219.
534. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *J. Therm. Stress* 1996. Vol. 19. No. 1. P. 77–102.
535. Tanigawa Y., Murakami H., Ootao Y. Transient thermal stress analysis of a laminated composite beam. *J. Therm. Stresses.* 1989. Vol. 12. No. 1.:P. 25–39.
536. Tarn J-Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. *Int. J. Solids Struct.* 2001. Vol. 38. No. 46–47. P. 8189–8206.

537. Tauchert T.R. Thermal stresses in an orthotropic cylinder with temperature-dependent elastic properties. *Dev. Theor. Appl. Mech*. 1976. Vol 8. P. 201–212.

538. Ting T.C.T. Mechanics of a thin anisotropic elastic layer and a layer that is bonded to an anisotropic elastic body or bodies. *Proc. R. Soc. A*. 2007. Vol. 463. No. 2085. P. 2223–2239.

539. Ting T.C.T Green's functions for half-space and two half-spaces bonded to a thin anisotropic elastic layer. *J. Appl. Mech.* 2008. Vol. 75, No. 5. P. 051103–1–6.

540. Tokovyy Yu.V., Kalynyak B.M., Ma C.-C. Nonhomogeneous solids: integral equation approach. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. by Hetnarski R.B. Springer. 2014. Vol. 7. P. 3350–3356.

541. Tokovyy Yu.V., Ma C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains. *J. Therm. Stresses.* 2008. Vol. 31. No. 9. P. 892–913.

542. Tokovyy Yu.V., Ma C.-C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2021. 329 p.

543. Toparli M., Sen F., Culha O., Celik E. Thermal stress analysis of HVOF sprayed Wc-Co/NiAl multilayer coatings on stainless steel substrate using finite element methods. *J. Mater. Process. Technol.* 2007. Vol. 190. Nos.1–3. P. 26–32.

544. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Int. J. Solids Struct*. 2010. Vol. 47. No. 1. P. 25–33.

545. Tuval I., Givoli D., Behar E. Hybrid asymptotic-numerical modeling of thin layers for dynamic thermal analysis of structures. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. 2016. Vol. 26. No. 3/4. P. 818–853.

546. Vedeld K., Sollund H. A. Stresses in heated pressurized multi-layer cylinders in generalized plane strain conditions. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2014. Vol. 120–121. P. 27–35.

547. Vedeld K., Sollund H.A., Hellesland J. Closed analytical expressions for stress distributions in two-layer cylinders and their application to offshore lined and clad pipes. *Trans. ASME J. Offshore Mech. Arctic Eng*. 2015. Vol. 137. No. 2. P. 021702.1–9.

548. Verijenko V.E, Adali S., Tabakov P.Y. Stress distribution in continuously heterogeneous thick laminated pressure vessels. *Compos. Struct.* 2001. Vol. 54. No. 2–3. P. 371–377.

549. Vihak V.M., Kalynyak B.M. Reduction of one-dimensional elasticity and thermoelasticity problems in inhomogeneous and thermal sensitive solids to the solution of integral equation of Volterra type. *Proc.Third Inter. Congr. Therm. Stresses,* Cracow University of Technology, 1999, *pp*. 457–460.

550. Villasenor R. A comparative study between an integral equation approach and a finite difference formulation for heat diffusion with nonlinear boundary conditions. *Appl. Math. Model.* 1994. Vol. 18. No. 6. P. 321–327.

551. Vilms L., Kerps D. Simple stress formula for multilayered thin films on a thick substrate. *J. Appl. Phys*. 1982. Vol. 53. No. 3. P. 1536–1537.

552. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders. *J. Eur. Ceram. Soc.* 2016. Vol. 36. No. 9. P. 2411–2417.

553. Wang B.L., Han J.C. Multiple cracking of elastic coatings under transient thermal load. *Arch Appl. Mech.* 2006. Vol. 75. No. 6. P. 412–424.

554. Wang B.L, Han J.C, Du S.Y. Crack problems for functionally graded materials under transient thermal loading. *J. Therm. Stresses.* 2000. Vol. 23. No. 2. P. 143–168.

555. Wang B.L, Mai Y.W. On thermal shock behavior of functionally graded materials. *J. Therm. Stresses.* 2007. Vol. 30. No. 6. P. 523–558.

556. Wang B.L., Mai Y.W., Noda N. Fracture mechanics analysis model for functionally graded materials with arbitrarily distributed properties. *Int. J. Fract.* 2002. Vol. 116. No. 2. P. 161–177.

557. Wang H., Qin Q. Thermal analysis of a functionally graded coating/substrate system using the approximated transfer approach. *Coatings.* 2019, Vol. 9. No. 1. Paper No. 51. 17p.

558. Wang X., Sudak L.J. Three-dimensional analysis of multi-layered functionally graded anisotropic cylindrical panel under thermomechanical loading. *Mech. Mater.* 2008. Vol. 40. No.4–5. P. 235–254.

559. Wang Z.W., Zhang Q., Xia L.Z., Wu J.T., Liu P.Q. Thermomechanical analysis of pressure vessels with functionally graded material coating. *J. Press. Vessel Technol.* 2016. Vol. 138. No. 1. P. 0112205-10.

560. Warwick C.M., Clyne T.W. Development of composite coaxial cylinder stress analysis model and its application to SiC monofilament systems. *J. Mat. Sci*. 1991. Vol. 26. No. 14. P. 3817–3827.

561. Wunderlich W, Pilkey W.D. Mechanics of structures: variational and computational methods. 2nd edition. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, 2002. 892 p.

562. Ye G.R., Chen W.Q., Cai J.B. A uniformly heated functionally graded cylindrical shell with transverse isotropy. *Mech. Res. Commun.* Vol. 28. No. 5. P. 535–542.

563. Yeo W.H., Purbolaksono J., Aliabadi M.H., Ramesh S., Liew H.L. Exact solution for stresses/displacements in a multilayered hollow cylinder under thermo-mechanical loading. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2017. Vol. 151. P. 45–53.

564. Yevtushenko A., Rozniakowska-Klosinska M. The effect of the time structure of laser pulse on temperature distribution and thermal stresses in homogeneous body with with coating. *Laser Pulse Phenomena and Applications* / Ed. F.J. Duarte. InTech. 2010. Ch. 3. P. 35–60.

565. Yevtushenko A.A., Rozniakowska M., Kuciej M. Laser-induced thermal splitting in homogeneous body with coating. *Numer. Heat Transf. A.* 2007. Vol. 52. No. 4. P. 357–375.

566. Yevtushenko A.A., Rozniakowska M., Kuciej M. Transient temperature processes in composite strip and homogeneous foundation. *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 2007. Vol. 34. No. 5. P. 1108–1118.

567. Yildirim B., Dag S., Erdogan F. Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading. *Int, J. Fract*. 2005, Vol. 132. No. 4. P. 369–395.

568. Yildirim B., Erdogan F. Edge crack problems in homogenous and functionally graded material thermal barrier coatings under uniform thermal loading. *J. Therm. Stresses*. 2004. Vol. 27. No. 4. P. 311–329.

569. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A. Effect of a thin surface coating layer on thermal stresses within an elastic half-plane. *Acta Mech*. Vol. 185. Iss. 3–4. P. 227–243.

570. Zhang N.-H. Thermoelastic stresses in multilayered beams. *Thin Solid Films.* 2007. Vol. 515. Iss. 23. P. 8402–8406.

571. Zhang Q., Wang Z.W., Tang C.Y., Hu D.P., Liu P.Q., Xia L.Z. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends. *Int. J. Press. Vessels Pip*. 2012. Vol. 98. P. 102–110.

572. Zhang S., Liu Z. An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools. *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 2008. Vol. 35,. No. 10. P. 1311–1315.

573. Zhang S. Liu Z. Analytical and numerical solutions of transient heat conduction in monolayer coated-tools. *J. Mater. Process. Technol.* 2009. Vol. 209. No. 5. P. 2369–2376.

574. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Jiang Y., Wu Y.X. Modeling of thermal residual stresses in multilayer coatings with graded properties and compositions. *Thin Solid Films.* 2006. Vol. 497. No. 1–2. P. 223–231.

575. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Jiang Y., Wu Y.X. Prediction of three-dimensional residual stresses in the multilayer coating-based systems with cylindrical geometry. *Compos. Sci. Technol.* 2006. Vol. 66. No. 13. P. 2249–2256.

576. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X. An analytical model for predicting thermal residual stresses in multilayer coating systems. *Thin Solid Films.* 2005. Vol. 488. No. 1–2. P. 274–282.

577. Zhang Y., Gu Y., Chen J.-T. Boundary element analysis of the thermal behaviour in thin-coated cutting tools. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2010. Vol. 34. No. 9. P. 775–784.

578. Zhang Y., Guo L., Guo F., Zhong S. Fracture analysis of a nonhomogeneous coating/substrate system with an interface under thermal shock. 2014. *Acta Mech.* Vol. 225. No. 9. P. 2485–2500.

579. Zhao J., Li Y., Ai X. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings. *Thin Solid Films*. 2008. Vol. 516. No. 21. P. 7581–7587.

580. Zhao J., Li Y., Ai X. Transient thermal stress analysis of a plate with double–sided FGM coatings. *Key Eng. Mater*. 2008. Vols. 368–372. P. 1807–1810.

581. Zhao J., Silberschmidt V.V. Microstructure-based damage and fracture modelling of alumina coatings. *Comp. Mat. Sci*. 2005. Vol. 32. No. 3–4. P. 620–628.

582. Zhou B., Kokini K. A numerical study on thermal fracture of precracked ceramic coatings in high-heat-flux environment. *J. Therm. Stresses.* 2004. Vol. 27. No. 11. P. 1033–1052.

583. Zhou Y., Li X., Yu D.A partially insulated interface crack between a graded orthotropic coating and a homogeneous orthotropic substrate under heat flux supply. *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. No. 6. P. 768–778.

584. Zhou Y.T., Lee K.Y. Thermal response of a partially insulated interface crack in a graded coating–substrate structure under thermo-mechanical disturbance: Energy release and density. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2011. Vol. 56. No. 1. P. 22–33.

585. Zhuo X.R, Beom H.G. Interface crack between a thin film and an orthotropic substrate under uniform heat flow. *Arch. Appl. Mech*. 2016. Vol. 86. No. 6. P. 1019–1036.

586. Zukas J.A. Effects of transverse normal and shear strains in orthotropic shells. *AIAA J.* Vol. 12. No. 12. P. 1753–1755.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у фахових виданнях України

1. Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие. *Математические методы и физико-механические поля*. 1995. Вып. 38. С. 116-120.

   Те саме: Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin covering. *Journal of Mathematical Sciences.* 1996. Vol. 81. No. 6. P. 3099-3102.

2. Шевчук В.А. Одновимірні задачі пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50. № 4. С. 104-112.

3. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багатошаровими покриттями. *Машинознавство*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35–41.

4. Шевчук В.А., Калиняк Б.М. Напружений стан циліндричних тіл з багато-шаровими неоднорідними покриттями. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 5. С. 35-41.

   Те саме: Shevchuk V.A., Kalynyak B.M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings. *Materials Science*. 2010. Vol. 46. No. 5. P. 746-755.

5. Шевчук В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття. *Доповіді НАН України*. 2011. № 7. С.76–82.

6. Шевчук В.А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54. № 2. С.179–185.

   Те саме: Shevchuk V.A. Nonstationary one-dimensional problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. Vol. 184. No. 2. P. 215-223.

7. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка.* 2011. Т. 19. № 5. Вип. 15, т. 1. С. 129–139.
8. Шевчук В.А. Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багатошаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2012. Вип. 10. С. 159-167.
9. Шевчук В.А. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покривом. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2013. Вип. 11. С. 157-163.
10. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57. № 4. С. 90-97.

    Те саме: Shevchuk V.A., Havrys' O. P. Choice of the iterative method for the solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction for a half space in the course of radiative cooling. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 220. No. 2. P. 226-234.
11. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2014. Вип. 20. С. 229-240.
12. Шевчук В.А. Теплопровідність пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестаціонарного нагріву. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 2. С. 181-190.

    Те саме: Shevchuk V.A. Heat conduction in plates with thin two-sided multilayer coatings under the conditions of nonstationary heating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 223. No. 2. P. 184-197.
13. Шевчук В.А. Термонапружений стан пластини з тонким двостороннім багатошаровим покривом за умов нестаціонарного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2016. Вип. 14. 113-122.

14. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір-багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 130-140.

15. Шевчук В.А. Задача термопружності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2017. Т. 60. № 2. С. 117-129.

Те саме: Shevchuk V.A. Problem of thermoelasticity for a cylinder with thin multilayer coating. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 243. No. 1. P. 145-161.

16. Шевчук В.А., Гаврись О.П. Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево-конвективного теплообміну. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2017. Вип. 15. С. 171-179.

17. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2019. Том 62. № 2. С. 82-97.

Статті у закордонних виданнях

18. Shevchuk V.A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *Lecture Notes in Computer Sciences.* 2002. Vol. 2330. P. 500-509.

19. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. No. 16-17. P. 4738-4757.

20. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system "body-multilayer coating". *Heat Transfer Research*. 2006. Vol. 37. No. 5. P. 412-423.

21. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *Materials Science and Engineering A*. 2006. Vol. 426. No. 1-2. P. 121-127.

22. Шевчук В.А. Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием. *Инженерно-физический журнал*. 2013. Т. 86. № 2. С. 423–431.

Те саме: Shevchuk V.A. Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2013. Vol. 86, No. 2. P. 450–459.

23. Shevchuk V.A. Thermoelasticity problem for a multilayer coating/half-space assembly with undercoat crack subjected to convective thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*. 2017. Vol. 40. No. 10. P. 1215-1230.

24. Шевчук В.А., Гаврись А.П. Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды. *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 6. С. 1543-1551.

Те саме: Shevchuk V.A., Gavrys' A.P. Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020. Vol. 93. No. 6. P. 1489–1457.

Статті, які додатково відображають зміст дисертації

25. Шевчук В.А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями. *Проблемы прочности*. 2000. №1. С. 136-150.

Те саме: Shevchuk V.A. Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings. *Strength of Materials*. 2000. Vol. 32, No 1. P. 92-102.

26. Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R.B. Hetnarski. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer. 2014. Vol. 4. P. 1942–1953.

Праці апробаційного характеру

27. Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови механічного спряження тіла із середовищем через тонке багатошарове тонке покриття. *IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур* : тези доповідей. (Тернопіль, 19-22 вересня 1995 р.). Тернопіль, 1995. С. 171.
28. Шевчук В. Наближений підхід до розв'язування задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-28 травня 1998 р.). Львів, 1998. С. 137-138.
29. Shevchuk V. Approximate calculation of stresses in solids with thin multilayer coatings. *The Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics* : Book of Abstracts (Edinburgh, Scotland, 5-9 July 1999). Edinburgh, 1999. P. 309.
30. Shevchuk V.A. Effective boundary conditions incorporating the influence of a thin multilayer coating upon the mechanical state of bodies. *4th Euromech Solid Mechanics Conference* : Book of Abstracts II (Mets, France, 26-30 June 2000). Mets: University of Mets, 2000. P. 261.
31. Шевчук В.А. Застосування узагальнених граничних умов до розв'язку статичних задач теорії пружності для тіл з багатошаровими покриттями. *Український математичний конгрес-2001. Секція 8: Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* : тези доповідей. (Київ, 21-23 серпня 2001 р.). Київ, 2001. С 53.
32. Shevchuk V.A. Procedure of calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings. *VIII Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*": тези доповідей. (Львів, 25-27 вересня 2001 р.). Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. С. 73-74.
33. Шевчук В.А. Розрахунок теплового стану тіл з багатошаровими покриттями. *Наукові читання, присвячені пам'яті академіка Я.С. Підстригача* (Львів, 23-24 травня 2002 р.). Львів, 2002. С. 18.

34. Shevchuk V. Approximate calculation of thermal stresses in solids with thin multilayer coatings. *Fifth World Congress on Computational Mechanics* : Book of Abstracts (Vienna, Austria, 7-12 July 2002). Vienna: Vienna University of Technology, 2002. Volume II. P. 135.
35. Шевчук В. Визначення термонапруженого стану в тілах з тонкими багатошаровими покриттями. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : матеріали доповідей VI міжнар. наук. конф. (Львів, 26-29 травня 2003 р.). Львів. 2003. С. 169-170.
36. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analytico-numerical approach to evaluation of damage of ceramic coatings under heating. *Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics* (TS2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, Virginia). Blacksburg, 2003. Vol. 1. pp. MA-6-2-1-4.
37. Шевчук В. А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе тело-многослойное покрытие. *Материалы 5-го Международного форума по тепломассобмену* (Минск, Беларусь, 24-28 мая 2004 г.). Минск: CD-ROM. Статья №3-36. 10с.
38. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Analysis of damage evolution in thin multilayer coatings under thermal loading. *Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses* (TS2005, Vienna, Austria, 26-29 May 2005). Vienna: Vienna University of Technology, 2005. Vol. 1. P. 313-316.
39. Shevchuk V.A., Silberschmidt V.V. Computational analysis of damage evolution in thick ceramic coatings. *EUROMECH Colloquium 466 Computational and Experimental Mechanics of Materials* : Book of Abstracts (Loughborough, UK, 20-22 July 2005). Loughborough: Loughborough University, 2005. P. 12.
40. Шевчук В. Розв’язування одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних циліндричних тіл. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник доп. Міжн. наук. конф. у 2-х т. (Львів, 20–23 вересня 2006 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. Т. 1. С. 121-123.

41. Shevchuk V.A. Determining mechanical state of the body – multilayer coating system. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2006. Vol. 6. No. 1. P. 267-268.
42. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M., Tokovyy Yu.V. An effective approach to determination of thermal stresses in the orthotropic radially inhomogeneous long hollow cylinder. *Proceedings of the Seventh International Congress on Thermal Stresses* (TS 2007, Taipei, Taiwan, 4–7 June 2007). Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. Vol. 2. P. 549–552.
43. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми механіки і математики* : матеріали доповідей міжнар. наук. конф. (Львів, 25-29 травня 2008 р.). Львів, 2008. Т. 1. С. 244-245.
44. Гаврись О., Шевчук В., Шевчук П. Математичне моделювання радіаційно-конвективного теплообміну при високотемпературному нанесенні на тіло багатошарових покрить. *Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки* / Під заг. ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. С. 258-259.
45. Shevchuk V.A. Analytical-numerical treatment of elasticity and thermoelasticity problems for nonhomogeneous orthotropic cylindrical bodies. *Proceedings of Applied Mechanics and Mathematics*. 2009. Vol. 9. No. 1. P. 649-650.
46. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Узагальнені граничні умови променево-конвективної взаємодії системи тіло-багатошарове покриття з робочим середовищем. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. С. 305–307.
47. Шевчук В.А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими покрытиями. *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу:* матеріали III міжнародної наукової конференції (Дніпропетровськ, 4-6 листопада 2010 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. С. 93–95.

48. Shevchuk V.A. Approximate analytical solution to one-dimensional heat conduction problem for cylinder with thin multilayer coating. *Proceedings of The 9th International Congress on Thermal Stresses* (Budapest, Hungary, 5-9 June 2011). Budapest: Hungary University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences. On CD-ROM. 4p.

49. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Методика розв’язання нелінійної задачі теплопровідності радіаційної взаємодії півпростору з довкіллям. *Сучасні проблеми механіки і математики:* збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.М. Пташника. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 185-187.

50. Шевчук В. Вплив нестаціонарного нагрівання на температурне поле пластини з тонким двостороннім багатошаровим покриттям. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* / Під заг. ред. О.І. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 171-173.

51. Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П. Визначення температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур* : наукові праці IX міжнар. наук. конф. (Львів, 15–19 вересня 2014 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 173-175.

52. Калиняк Б., Шевчук В. Методика розрахунку термонапруженого стану циліндричних тіл з неоднорідними покриттями. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 269-270. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

53. Шевчук В. Аналітико-числова процедура розрахунку накопичення пошкоджень в керамічних покриттях за теплового навантаження. *Сучасні проблеми термомеханіки:* збірник наукових праць міжнар. наук. конф.

(Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 284-285. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.

54. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження термонапруженого стану системи півпростір-багатошарове покриття за променево-конвективного тепло-обміну. *Сучасні проблеми термомеханіки* : збірник наукових праць міжнар. наук. конф. (Львів, 22–24 вересня 2016 р.). Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. С. 246-247. URL: www.iapmm.lviv.ua/MPT2016.
55. Шевчук В., Гаврись О. Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за циклічної зміни температури довкілля. *Сучасні проблеми механіки і математики*: збірник наукових праць у 3-х т. / Під заг. ред. А.М. Самойленка, Р.М. Кушніра. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 214-215. URL: www.iapmm.lviv.ua/ mpmm2018.
56. Шевчук В., Гаврись О. Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за термоциклічної обробки. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наукових праць 10-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Г.С. Кіта. Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2019. Вип. 5. С. 129-130.
57. Shevchuk V., Havrys O., Tokovyy Yu., Gao C.-F. Thermocyclic loading of a half-space with a multilayer coating under piecewise-uniform variation of the ambient temperature. *Proceedings of 12th International Congress on Thermal Stresses* (TS 2019, Hangzhou, China, 1–5 June 2019). Hangzhou: Zhejiang University, 2019. P. 300–303.

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Основні результати досліджень доповідались і обговорювались на

- 4-й та 6-й-10-й Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Тернопіль, 1995; Львів, 2003, 2006, 2010, 2014, 2019);
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 1998, 2008, 2013, 2018);
- 4-му Міжнародному конгресі з індустріальної та прикладної математики (Единбург, Велика Британія, 1999);
- 4-й Європейській конференції з механіки деформівного твердого тіла (Метц, Франція, 2000);
- Українському математичному конгресі-2001 (Київ, 2001);
- 8-ій Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2001);
- конференції «Наукові читання, присвячені пам’яті академіка Я.С Підстригача» (Львів, 2002 р.);
- 5-му Світовому конгресі з обчислювальної математики (Відень, Австрія, 2002);
- 5-7-му, 9-му та 12-ому Міжнародних конгресах з температурних напружень (TS-2003, Блексбург, США, 2003; TS-2005, Відень, Австрія, 2005; TS-2007, Тайпей, Тайвань, 2007; TS-2011, Будапешт, Угорщина, 2011; TS-2019, Ханчжоу, Китай, 2019);
- 5-му Міжнародному форумі з тепломасообміну (Мінськ, Білорусь, 2004);
- Колоквіумі EUROMECH 466 з обчислювальної та експериментальної механіки матеріалів (Лафборо, Велика Британія, 2005);
- 78-му та 80-му симпозіумах GAMM (Берлін, Німеччина, 2006; Гданськ, Польща, 2009);
- 3-й Міжнародній науковій конференції «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу» (Дніпропетровськ, 2010);
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016).

У повному обсязі робота доповідалася на

- науковому семінарі відділу механіки деформівного твердого тіла Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М.М. Николишина;
- загальноінститутському семінарі «Механіка взаємозв'язаних полів» Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., професора О.Р. Гачкевича;
- науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, д.т.н., професора О.Є. Андрейківа та д.ф.-м.н., проф. В.К. Опанасовича;
- науковому семінарі «Сучасні проблеми механіки» кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., професора Я.О. Жука;
- науковому семінарі "Математичні проблеми механіки" кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., професора Н.Д. Вайсфельд.