

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СТАСЮК БОГДАН МИРОСЛАВОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
ТРИВИМІРНИХ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З НЕКАНОНІЧНИМИ
ВКЛЮЧЕННЯМИ ТА ДЕФЕКТАМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

 Б. М. Стасюк

Науковий консультант

Михаськів Віктор Володимирович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

*Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради*



/Андрійчук М. І./

Львів 2024

АНОТАЦІЯ

Стасюк Б. М. Гранично-елементний аналіз пружних властивостей тривимірних композитних структур з неканонічними включеннями та дефектами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 2024.

У дисертації розроблено узагальнені моделі та високопродуктивні алгоритми методу граничних елементів для аналітично-числового визначення тривимірного напружено-деформованого стану необмежених і обмежених композитних тіл та ефективних пружних властивостей композитних середовищ з включеннями неканонічної форми за ідеального і неідеального їх контакту з матрицею з урахуванням взаємодії включень між собою та з внутрішніми і матричними тріщинами.

Із застосуванням методу підобластей, який полягає у розділенні композитного тіла на дві підобласті по міжфазній поверхні із заміною дії вилученої фази контактними зусиллями та переміщеннями, побудовано адаптовані до різнотипних контактних умов гранично-інтегральні формулювання тривимірних статичних задач пружної рівноваги необмежених композитних тіл з об'ємистими включеннями неканонічної форми. Застосовано двоетапну регуляризацію систем сингулярних інтегральних рівнянь з додискретизаційним аналітичним поданням їх в слабосингулярній формі та постдискретизаційною ліквідацією особливостей на основі апроксимації міжфазної поверхні сіткою суперпараметричних або ізопараметричних граничних елементів та неафінними регуляризуючими відображеннями їх областей.

Досліджено механізми передачі навантажень у композитних системах з включенням у формі скінченного прямолінійного та викривленого циліндричного волокон з сферичними або плоскими із заокругленням граней торцями.

Комбінованим поданням невідомих міжфазних переміщень та зусиль в

глобальній та локальній (прив'язаній до топології міжфазної поверхні) системах координат, умови спряження недосконалого контакту складових композитного тіла неявно враховано у системах граничних інтегральних рівнянь тривимірних задач про ковзну або пружинну модель з'єднання об'ємистого включення неканонічної форми з матричним середовищем. Алгоритм ансамблювання матриці дискретного аналогу системи граничних інтегральних рівнянь модифіковано з врахуванням перетворення дотичних ортів в опорних вузлах сітки граничних елементів відповідно до їх локальної орієнтації в межах граничного елемента.

Запропоновані аналітично-числові схеми дискретизації та регуляризації поширено на розв'язок дуальних інтегральних формулювань тривимірних задач пружної взаємодії об'ємистих включень неканонічної форми з тонкостінними неоднорідностями та плоскими тріщинами, що послаблюють як матричну так і наповнювальну фази композитного тіла. Введено в аналіз ефективні поля напружень та алгоритм ітераційного їх уточнення через механізм врахування одностороннього впливу для наближеного моделювання граничноелементними розв'язками взаємодії у множинних системах різнотипних включень і тріщин. Загальність отриманих гранично-елементних алгоритмів дозволяє вивчення взаємодії тріщин з внутрішньо навантаженими порожнинами неканонічної форми. Проведено числове дослідження впливу на тріщиноподібні дефекти композитного тіла його різнотипних за формою, жорсткістю та розташуванням наповнювачів.

Через введення у суперпозиційні співвідношення складової напружено-деформованого стану від комбінованих крайових умов на зовнішній поверхні обмеженого композитного тіла та граничний перехід до точок цієї поверхні з урахуванням граничних властивостей пружних потенціалів числові дослідження перенесено на тривимірні задачі для тонких податливих включень і тріщин у обмежених пружних тілах. Проаналізовано вплив поверхневих факторів на КІН в околі внутрішніх поодиноких і множинних тонких концентраторів напружень у композитних тілах.

Граничноелементні розв'язки задач для безмежних композитних тіл залучено до визначення ефективних властивостей композитних середовищ з наповнювачем неканонічної форми за його досконалого та недосконалого контакту з матричним середовищем та впорядкованою або хаотичною орієнтацією через гомогенізаційні схеми Морі-Танаки, які узагальнено на присутність у структурі розривів міжфазних переміщень або напружень. Такі узагальнення побудовані на основі концепції Бенвеністе «зовнішнього спостерігача» з включенням у розрахункові співвідношення ефективних модулів пружності додаткових кореляційних тензора деформацій у випадку наявності на міжфазній поверхні стрибків переміщень та тензора напружень у випадку розривів зусиль на поверхні контакту. За умови дії однорідного поля деформацій в першому випадку та поля напружень в другому на межі репрезентативного об'ємного елемента (РОЕ), компоненти вказаних тензорів виражаються лише через стрибки відповідних межових значень напружено-деформованого стану цього елемента, що дозволяє їх розрахунок інтегруванням граничноелементних розв'язків задач для безмежного РОЕ з поодиноким включенням заданої конфігурації. Тоді у випадку композиту з односпрямованими волокнами як макроскопічно трансверсально-ізотропного середовища визначення компонент кореляційних тензорів впливу недосконалих контактних умов забезпечується розв'язанням задач з шістьма варіантами однорідної деформації розтягу та зсуву в першому випадку або однорідного поля напружень в другому на безмежності в поздовжньому та поперечному щодо волокна напрямках.

Для розрахунку ефективних модулів пружності макроскопічно ізотропного композитного середовища з хаотично орієнтованими рівномірно випадково розташованими короткими волокнами застосовано додаткове усереднення тензора ефективних модулів пружності композиту з впорядковано орієнтованими аналогічними волокнами по просторових кутах Ейлера шляхом дискретної зміни положення волокна відносно напрямків деформаційного або силового навантаження РОЕ.

Запропонований підхід верифіковано порівнянням з відомими в літературі розв'язком методом скінчених елементів та асимптотичним розв'язком за «сполучною» моделлю у випадку макроскопічної трансверсальної ізотропії волокнистого композиту та виконаним в роботі натурним експериментом для макроскопічно ізотропного волокнистого композиту, а також з аналітичними методами визначення ефективних модулів пружності композитів армованих кульовими включеннями за ідеального або неідеального їх контакту з матричним середовищем.

Для визначення нанорівневих локальних і ефективних пружних властивостей тривимірних композитних тіл запропоновано гібридний граничноелементно-скінченнорізницевий алгоритм з урахуванням власної пружності і натягу міжфазних поверхонь із залученням мембранної їх моделі Гуртіна-Мердока-Підстригача-Повстенка. Отримано диференціальні рівняння деформування циліндричної частини матеріальної поверхні сфероциліндричної форми із забезпеченням узгодження невідомих та умов деформаційної сумісності у вузлах на стику з її сферичною частиною. Приведено результати апробації такого підходу на прикладах поодиноких та розподілених нановключень і нанопорожнин неканонічної форми.

Проаналізовано тривимірні поля переміщень, напружень і ефективні модулі пружності для композитних тіл і середовищ з поодинокими, множинними і розподіленими включеннями неканонічної форми, тонкими прошарками і матеріалізованими поверхнями поділу складових, внутрішніми і інтерфейсними структурними дефектами та виявлено ефекти концентрації пружних полів, макромеханічної ізотропії і анізотропії та нанорівневі ефекти розмірозалежності.

Ключові слова: композитна структура, включення, тріщина, тонкий міжфазний прошарок, матеріалізована поверхня, нановключення, гомогенізація, метод граничних інтегральних рівнянь, метод граничних елементів, ефективні модулі пружності, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Abstract

Stasyuk B. M. Three-dimensional boundary element analysis of elastic properties of composite structures with non-canonical inclusions and defects. – Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences specialty 01.02.04 “Mechanics of Deformable Solids”. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2024.

The dissertation developed generalized models and high-performance algorithms of the boundary element method for analytically and numerically determining the three-dimensional stress-strain state of unbounded and bounded composite bodies, as well as effective elastic properties of composite media with non-canonical-shaped inclusions considering their ideal and non-ideal contact with the matrix, including interactions among inclusions and internal or interfacial cracks.

By applying the subdomain method, which involves dividing the composite body into two subdomains along the interphase surface and replacing the action of the removed phase with contact forces and displacements, boundary integral formulations of three-dimensional static problems of elastic equilibrium for unbounded composite bodies with volumetric inclusions of non-canonical shape adapted to different types of contact conditions were constructed. A two-stage regularization of singular integral equations system was employed, with pre-discretization analytical representation in weakly singular form and post-discretization singularity removal based on mesh approximation of the interphase surface using superparametric or isoparametric boundary elements and non-affine regularizing mappings of their regions.

The load transfer mechanisms in composite systems with inclusions in the form of finite straight and curved cylindrical fibers with spherical or flat-rounded end faces were investigated.

A combined representation of unknown interfacial displacements and stresses in global and local (tied to the topology of the interphase surface) coordinate systems

implicitly accounted for the conditions of imperfect contact between composite body components in boundary integral equation systems of three-dimensional sliding or spring connection models of a volumetric inclusion of non-canonical shape with the matrix medium. The algorithm for assembling the matrix of the discrete analogue of the boundary integral equation system was modified to consider the transformation of tangent vectors at support nodes of the boundary element mesh according to their local orientation within the boundary element.

The proposed analytical-numerical schemes of discretization and regularization have been extended to solve dual integral formulations of three-dimensional elastic interaction problems involving volumetric inclusions of non-canonical shape with thin-walled inhomogeneities and flat cracks, weakening both the matrix and filler phases of the composite body. The analysis introduced effective stress fields and an iterative refinement algorithm incorporating a unilateral influence mechanism for approximate modeling using boundary element solutions of interactions in multiple systems of heterogeneous inclusions and cracks. The generality of the obtained boundary element algorithms allows for the study of crack interactions with internally pressurized cavities of non-canonical shape. Numerical investigation has been conducted to study the influence of crack-like defects of varying shapes, stiffnesses, and filler locations within the composite body.

By introducing component stress-strain superposition relations from combined boundary conditions on the external surface of a bounded composite body and boundary transitions to points on this surface considering the boundary properties of elastic potentials, numerical investigations have been extended to three-dimensional problems involving thin compliant inclusions and cracks within bounded elastic bodies. The impact of surface factors on stress intensity factors (SIF) around internal single and multiple thin stress concentrators in composite bodies has been analyzed.

Boundary element solutions of problems for unbounded composite bodies have been utilized to determine the effective properties of composite media with non-canonical filler shapes considering both perfect and imperfect contact with the ma-

trix medium, as well as ordered or chaotic orientation through Mori-Tanaka homogenization schemes, generalized to account for the presence of interfacial displacements or stresses. These extensions are based on the Benveniste concept of an "external observer," incorporating additional correlation tensor deformation into the effective modulus relations in cases involving interfacial displacement jumps or stress tensor discontinuities at contact surfaces. Under the assumption of a uniform deformation field in the first case and stress field in the second at the boundary of a representative volume element (RVE), the components of these tensors are expressed solely through jumps from respective boundary values of the stress-strain state of this element, allowing their computation through integration of boundary element solutions of problems for infinite RVEs with a single inclusion of specified configuration.

In the case of composites with aligned fibers as a macroscopically transversely isotropic medium, determining the components of the correlation tensors influenced by imperfect contact conditions is achieved by solving problems with six variants of homogeneous tensile and shear deformation in the first case or a homogeneous stress field in the second along the infinity in longitudinal and transverse directions relative to the fiber axis.

For calculating the effective moduli of a macroscopically isotropic composite medium with randomly oriented uniformly distributed short fibers, additional averaging of the effective modulus tensor of the composite with orderly oriented analogous fibers over Euler spatial angles is applied by discretely changing the fiber position relative to the directions of deformation or applied load of the RVE.

The proposed approach has been validated through comparison with known in the literature finite element method solutions and asymptotic solutions by the "bridging" model in the case of macroscopic transverse isotropy of fibrous composites, along with experimental work for macroscopically isotropic fibrous composites, and analytical methods for determining effective moduli of composites reinforced with spherical inclusions under ideal or non-ideal contact with the matrix medium.

To determine nanoscale local and effective elastic properties of three-dimensional composite bodies, a hybrid boundary element – finite difference algorithm has been proposed, accounting for the inherent elasticity and tension of interfacial surfaces with the incorporation of the Gurtin-Murdoch-Pidstryhach-Povstenko membrane model. Differential deformation equations of cylindrical parts of materialized surface of spherocylindrical shape have been obtained ensuring compatibility of unknowns and deformation conditions at nodes at the junction with its spherical part. Results of applying this approach to examples of individual and distributed non-canonical nanoinclusions and nanocavities have been presented.

Three-dimensional fields of displacements, stresses, and effective moduli of elasticity for composite bodies and media with singular, multiple, and distributed inclusions of non-canonical shape, thin layers, and materialized dividing surfaces of components, internal and interface structural defects have been analyzed revealing effects of concentration of elastic fields, macroscopic isotropy and anisotropy, and nanoscale size-dependent effects.

Key words: composite structure, inclusion, crack, thin interfacial layer, materialized surface, nanoinclusion, homogenization, boundary integral equation method, boundary element method, effective elastic moduli, stress intensity factors.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації, які опубліковані у наукових працях:

1. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Stress intensification due to the crack outside/inside a finite fiber in 3-D elastic matrix. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 80. P. 133–142. (10.1016/j.tafmec.2015.10.002).
2. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 452–455. (10.4028/www.scientific.net/SSP.258. 452).
3. Stasyuk B.M. Interacting cracks 3D analysis using boundary integral equation method. *AIMS Materials Science*. 2016. 3(4). P. 1796–1810. (10.3934/materialsci.2016.4.1796).
4. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы. *Прикладна механіка*. 2007. 43 (4). С. 27–35. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Numerical solution of three-dimensional static problems of elasticity for a body with a noncanonical inclusion. *International Applied Mechanics*. 2007. 43 (4). P. 380–387. (10.1007/s10778-007-0033-7).
5. Стасюк Б.М. Метод ефективного поля напружень в тривимірних задачах про взаємодію плоских тріщин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2009. 45 (1). С. 33–42. Те саме: Stasyuk B.M. Method of effective stress field in three-dimensional problems of interaction of plane cracks. *Materials Science*. 2009. 45(1). P. 28–40. (10.1007/ s11003-009-9157-8).
6. Стасюк Б.М. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на напруження в околі сусідньої тріщини. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. 49 (6). С. 28–35. Те саме: Stasyuk B.M. Influence of a Gas-Filled Cavity of Complex Shape on Stresses in the Vicinity of a Neighboring Crack. *Materials Science*. 2014. 49 (6). P. 734–742 (10.1007/s11003-014-9668-9).
7. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Упругое состояние включения неканонической формы при условии скользящего контакта с трехмерной матрицей.

- Прикладна механіка*. 2015. 51 (6). С. 42–51. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix. *International Applied Mechanics*. 2015. 51 (6). P. 640–647. (10.1007/s10778-015-0720-8).
8. Стасюк Б.М., Крет Н.В., Звірко О.І., Штойко І.П. Аналіз напруженого стану труби газопроводу з макродефектом, ініційованим воднем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2019. 55 (1). С. 113–118. Те саме: Stasyuk B. M., Kret N.V., Zvirko O.I., Shtoiko I.P. Analysis of the Stressed State of a Pipe of Gas Pipeline with Hydrogen-Induced Macrodefect. *Materials Science*. 2019. 55 (1). P. 1–6. (10.1007/s11003-019-00259-2).
 9. Стасюк Б.М. Ефекти від поверхневого натягу сфероциліндричної нанопори у пружному середовищі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. 62 (3). С. 48–56. Те саме: Stasyuk B.M. Effects of the surface tension of a spherical-cylindrical nanopore in the elastic medium. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. 263 (1). P. 52–61. (10.1007/s10958-022-05906-9).
 10. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Эффективные модули упругости коротковолокнистого композита при скользящем контакте на межфазных поверхностях. *Механика композитных материалов*. 2021. 57 (5). С. 901–916. Те саме: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic moduli of short-fiber composite with sliding contact conditions at interfaces. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. 57 (5), P. 635–646. (10.1007/s11029-021-09985-8).
 11. Хай М.В., Станкевич В.З., Стасюк Б.М. До теорії механіки руйнування. *Машинознавство*. 2002. № 11. С. 3–19.
 12. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *Машинознавство*. 2005. № 2. С. 17–21.
 13. Стасюк Б.М. Напружений стан гранульованих композитів у випадку рівності коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці і включення. *Машинознавство*. 2006. № 5. С. 14–22.
 14. Стасюк Б.М. Приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии компланарных дискообразных трещин в упругом пространстве.

Научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». 2008. Вып. 44. С. 48–54.

15. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. *Машинознавство*. 2009. № 10. С. 9–14.
16. Стасюк Б.М. Напруження у порожнистому циліндрі, послабленому множинними тріщиноподібними дефектами. *Допов. НАН України. Механіка*. 2021. № 3. С. 33–39.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

17. Хай М.В., Стасюк Б.М. Про спрощення розрахунку на міцність пружних тіл, що містять плоскі тріщини. *5-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 16-18 травня 2001)*. Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2001. С. 16–17.
18. Хай М.В., Стасюк Б.М. Модифікований метод граничних інтегральних рівнянь при розрахунку на міцність тіл, послаблених великою кількістю взаємодіючих тріщин. *6-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (21-23 травня 2003)*. Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2003. С. 44.
19. Стасюк Б.М. Про міцність тіла, послабленого плоскою неоднорозв'язною тріщиною з коловими контурами. *Вісник НУ "Львівська політехніка". Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*. 2003. № 483. С. 90–97.
20. Стасюк Б.М. Визначення концентрації напружень в околі багатов'язної плоскої тріщини з внутрішніми контурами змінної кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: Матеріали 3-ї міжнародної конференції під редакцією В.В. Панасюка*. (Львів, 2004). Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка. 2004. С. 333–340.
21. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *7-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 18-20 травня 2005)*. Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2005. С. 44.
22. Стасюк Б.М. Вплив наявності тріщин на напружений стан гранульованого композита. *8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у*

- Львові: тези доп. (23-25 травня 2007). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2007. С. 53.
23. Стасюк Б.М. Взаємодія тріщин та порожнин складної форми у безмежному пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 2-ї міжнар. конф. (22-24 жовтня, 2008). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2008. С. 77–78.
 24. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. 9-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 20-22 травня 2009). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2009. С. 100–102.
 25. Стасюк Б.М., Кіндрацький Б.І. Взаємодія в безмежному тілі плоских тріщин та тонких пружних включень малої жорсткості. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Матеріали 4-ї міжнародної конференції під ред. З. Назарчука, Б.І. Кіндрацького. (Львів, 11-13 листопада, 2010). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2010. – С. 485–490.
 26. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Децик Т.Б. Гранично-рівноважний стан бруса круглого попереччя з внутрішньою тріщиною під поперечним згином. *Вісник НУ „Львівська політехніка”, фізико-математичні науки*. 2011. № 718. С. 81–85.
 27. Kindratsky B. I., Stasiuk B. M. Three-dimensional elastic problem for a limited bodies with crack. *Fracture Mechanics of Materials*. proc. Second Ukrainian-Greek Symposium (Lviv, October 3–7 2011). Lviv: SPOLOM. 2011. P. 39–42.
 28. Стасюк Б. М. Пружна рівновага об'ємного включення довільної форми, що містить плоску тріщину. 10-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (25-27 травня 2011). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2011. С. 114–116.
 29. Стасюк Б. М. Взаємодія газонаповнених об'ємних порожнин у пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 3-ї міжнародної конференції. (7-9 листопада, 2012). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2012. С. 56–57.

30. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Концентрація напружень в околі плоскої тріщини та об'ємного пружного включення за умови їх взаємодії. *Сучасні проблеми механіки і математики*. Збірник наукових праць т. 2. Під ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. Львів. 2013. С. 74–76.
31. Стасюк Б.М. Модель гладкого контакту об'ємного пружного включення довільної форми з безмежним тілом. 11-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (15-17 травня 2013). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2013. С. 54–55.
32. Стасюк Б.М. Напружено-деформований стан магістрального трубопроводу, послабленого приповерхневою осьовою тріщиною. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 4-ї міжнародної конференції. (30-31 жовтня, 2014). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2014. С. 91–92.
33. Стасюк Б.М. Експериментальне та теоретичне визначення ефективних модулів пружності фібробетону. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: збірник наук. праць IX Міжнародної наукової конференції за ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 156–158.
34. Myk'as'kiv V. V., Stasyuk B. M. Effective elastic properties of 3D nanocomposites reinforced by short-fiber with Gurtin-Murdoch model of interphase. *Nanotechnology and nanomaterials*. Abstract Book of participants of the international research and practice conference. (August 27-30). Kyiv: Burlaka. 2018. P. 243.
35. Стасюк Б.М. Моделювання поверхневого натягу в тривимірних нанокompозитах за умови змінної кривини міжфазної поверхні. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Зб. наук праць X Міжнародної наукової конференції за ред. Р.М. Кушніра, Г.С. Кіта. Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2019. С. 144–145.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	18
Розділ 1. Огляд літератури	28
Розділ 2. Гранично-інтегральне формулювання та дискретизація тривимірних задач з включенням довільної гладкої форми у безмежній пружній матриці	54
2.1. Математична постановка задач теорії пружності для тіл з об'ємними пружними включеннями неканонічної форми.....	54
2.2. Загальна схема методу граничних елементів дискретизації граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу	60
2.2.1. Застосування сітки із суперпараметричних граничних елементів.....	64
2.2.2. Застосування сітки із ізопараметричних граничних елементів.....	77
2.3. Апробація граничноелементного алгоритму на задачах зі сферичним включенням у безмежному пружному тілі.....	92
2.4. Числовий аналіз напруженого стану безмежного тіла, що містить пружне квазіциліндричне прямолінійне і викривлене включення	98
2.5. Висновки до другого розділу.....	110
Розділ 3. Тривимірні задачі взаємодії неканонічних включень та тріщин у безмежній пружній матриці.....	112
3.1. Гранично-інтегральне формулювання і дискретизація тривимірних задач взаємодії неканонічних включень та тріщин у безмежній пружній матриці	112
3.2. Числовий аналіз взаємодії плоскої тріщини зі скінченним волокном у безмежній пружній матриці	125
3.3. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на концентрацію напружень в околі сусідньої плоскої тріщини.....	139
3.4. Метод ефективних (односторонніх) впливів у тривимірних задачах взаємодії у великих системах тонких та об'ємних концентраторів	

напружень	148
3.5. Замкнутий розв’язок задачі про взаємодію двох кругових тріщин в одній площині методом поля ефективних напружень	167
3.6. Висновки до третього розділу	175
Розділ 4. Тривимірні задачі взаємодії тонкостінних включень та тріщин у обмеженому тілі.....	178
4.1. Зведення задач взаємодії плоских тріщин та тонких податливих включень із зовнішньою поверхнею пружного тіла до систем інтегральних рівнянь та побудова їх дискретних аналогів.....	178
4.2. Напружений стан порожнистого циліндра із системою взаємодіючих внутрішніх тонких податливих включень	187
4.3. Числове дослідження задачі про приповерхневу тріщину у порожнистому циліндрі за дії внутрішнього тиску.....	194
4.4. Напружений стан порожнистого циліндра, послабленого газонаповненою тріщиною	206
4.5. Концентрація напружень в околі тонкого податливого включення, що знаходиться в обмеженому призматичному тілі	211
4.6 Висновки до четвертого розділу.....	224
Розділ 5. Вплив контактних недосконалостей та міжфазних прошарків на напружено-деформований стан композитних тіл ..	226
5.1. Модифікація граничноелементних алгоритмів для врахування ковзного контакту об’ємного включення з матрицею	226
5.2. Поширення граничноелементних схем аналізу на модель тонкого міжфазного прошарку між об’ємним включенням і матрицею	237
5.3. Вплив недосконалого міжфазного контакту на взаємодію скінченного волокна із тріщиною	247
5.4 Висновки до п’ятого розділу	255
Розділ 6. Ефективні пружні властивості композиту з розподіленими неканонічними включеннями за ідеального та неідеального контакту його компонент	257

6.1.	Використання граничноелементних розв'язків у моделях гомогенізації композитів з неканонічними включеннями та узагальнених моделях зі стрибками переміщень на міжфазних поверхнях	257
6.2.	Задачі гомогенізації двофазного пружного композиту з впорядкованою орієнтацією скінчених волокон	268
6.3.	Ефективні пружні характеристики композиту, армованого хаотично розташованими скінченими волокнами.....	277
6.4.	Верифікація числових моделей на експерименті з визначення ефективних модулів пружності фібробетону	286
6.5.	Висновки до шостого розділу	292

Розділ 7. Врахування матеріалізації поверхонь та нанорозмірних ефектів у композитних і пористих тілах з наповнювачами неканонічної форми		294
7.1.	Побудова системи з диференціальних та інтегральних рівнянь для тривимірних нанорівневих задач контакту пружних безмежної матриці та включення через матеріальну поверхню	295
7.2.	Поєднання та верифікація скінченнорізницевого та граничноелементного алгоритмів числового розв'язання задач зі сферичними нановключенням та нанопорожниною	301
7.2.1.	Апробація числового алгоритму на задачах з натягом поверхні сферичного нановключення та нанопорожнини	311
7.2.2.	Задачі комбінованого просторово-поверхневого навантаження безмежної матриці зі сферичними нановключенням та нанопорожниною	314
7.3.	Узагальнення гібридної скінченнорізницево-граничноелементної схеми числового розв'язку на задачі із сфероциліндричним нановключенням та нанопорожниною	317
7.3.1.	Результати обчислень за натягу поверхні сфероциліндричної нанопорожнини	328
7.3.2.	Результати обчислень за комбінованого навантаження простору	

зі сфероциліндричною нанопорожниною	332
7.4. Використання граничноелементних розв’язків в узагальненій схемі Морі-Танаки з визначення ефективних пружних властивостей тривимірних нанокомпозитів та нанопористих середовищ	334
7.5. Висновки до сьомого розділу	344
Основні результати та висновки	346
Список використаних джерел.....	353
Додатки.....	402

ВСТУП

Актуальність теми. Прогрес у авіа-, ракето- та автомобілебудуванні, цивільному будівництві, медичній інженерії, електронній техніці, комунікаційному та енергетичному обладнанні зараз здебільшого забезпечується застосуванням у них композитних матеріалів, зокрема пружних з волокнистою і зернистою структурою від наповнення включеннями відповідної просторової конфігурації. Широке впровадження у цих галузях внаслідок порівняної легкості виготовлення технологіями тривимірного друку набули коротковолокнисті композити, окремий інтерес у ролі скріплювальних покриттів та плівок становлять також композити з нанорозмірними включеннями. Стосовно механічних властивостей, то такі матеріали вирізняються високою міцністю за збереження легкості конструкцій, деформаційною адаптацією до різнотипних навантажень, опірністю до руйнування і корозії. Це досягається перенесенням та перерозподілом переміщень і напружень через поверхні поділу матеріалів у неоднорідній системі, а також взаємодією включень як її елементів. До основних факторів впливу на механічну поведінку композитів належать матеріальний контраст їх складових, форма, взаємне розташування та концентрація у них включень, а також якість міжфазних поверхонь. Важливим також є врахування у композитах можливих на стадіях їх виготовлення, обробки та експлуатації дефектів структури у вигляді внутрішніх тріщин та недосконалого контакту компонент. Тому злובоденною є розробка фундаментальних теорій і ефективних методів такого дослідження у всій різноманітності та для маніпуляції цих проявів як на рівні локальних пружних полів, так і макромеханічних характеристик. До пріоритетів слід віднести придатність інструментарію до аналізу тривимірних задач з об'ємистими включеннями складної форми та за різних умов їх з'єднання з матричним середовищем, залучення в розрахунок моделей тонкостінних включень і тріщин, також матеріалізованих поверхонь нановключень.

Більшість відомих теоретичних результатів щодо реакції композитних

матеріалів на силові навантаження та їх ефективних властивостей отримано аналітично за припущення присутності в них тунельних (двовимірні задачі) і еліпсоїдальних (тривимірні задачі) включень. Сучасна зацікавленість у числових методах розв'язання відповідних задач диктується можливістю їх застосування для тривимірних конфігурацій у випадку включень загальної форми та розгляду композитів нового класу, армованих скінченними прямолінійними та викривленими циліндричними волокнами, та композитів з тонкостінними включеннями (тріщинами у граничному випадку нульової жорсткості). Ці методи пристосовані також до передбачення стрибків міжфазних переміщень і напружень у композитах для моделювання контактних недосконалостей, наприклад внаслідок проковзування, тонких міжфазних прошарків адгезивного походження та характерних для нанорівня міжфазних поверхонь з власною пружністю. У цьому відношенні метод граничних елементів займає особливе місце завдяки визначенню пружних полів через межові величини, прямому розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тонкостінних неоднорідностей та тріщин, та введенню у гомогенізаційні співвідношення для ефективних параметрів композиту репрезентативних елементів на основі розв'язків для безмежної пружної матриці з включенням.

Для практики важливо забезпечити комплексність числового дослідження з виявленням механізмів трансферу переміщень і зусиль у тривимірних композитних тілах з неканонічними як за формою, так і контактом з оточенням включеннями, зон концентрації у них напружень, ефектів взаємодії множинних включень та тріщин, розмірних наноефектів, зумовлених спрямуванням розподілених включень властивостей макроскопічної анізотропії-ізотропії композитів на широкому спектрі вхідних даних щодо їх геометричних, матеріальних та структурних особливостей.

З точки зору внутрішнього розвитку методу граничних елементів для механіки композитів важливе його забезпечення алгоритмами високої ефективності та точності. Це передбачає зменшення розмірностей та розщеплення систем розрахункових рівнянь через безпосереднє врахування у них контактних

співвідношень та наближення взаємодії включень в окремих випадках їх одностороннім впливом, регуляризацію сингулярних ядер інтегральних рівнянь для можливості числового інтегрування квадратурами та отримання добре обумовлених дискретних аналогів у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь з домінуючими діагональними елементами, використання адаптованих до геометрії включень граничноелементних сіток та функцій форми для топологічної інтерполяції. В аспекті верифікації результатів доцільний вибір прикладів, які уможливили б перевірку не тільки засобами числового, а й проведенням натурного експериментів.

Метою дисертаційної роботи є розробка високопродуктивних моделей та алгоритмів методу граничних елементів (включно з вдосконаленими гранично-інтегральними формулюваннями задач) для числової симуляції тривимірного напружено-деформованого стану необмежених і обмежених композитних тіл та ефективних пружних властивостей композитних середовищ з включеннями загальної форми за ідеального і неідеального їх контакту з матрицею з урахуванням взаємодії включень між собою та впливу на внутрішні та матричні тріщини; реалізація гранично-елементних схем розрахунку стосовно включень у вигляді скінченних прямолінійних і викривлених волокон, моделей тонкостінних дискових включень, за вміщення у них або сусідства кругових та еліптичних тріщин, інтерфейсних умов ковзного, через проміжковий тонкий шар та наділену на нанорівні власною пружністю та натягом поверхню контакту; визначення розподілів і концентрації пружних полів та ефективних модулів пружності для неklasичних за формою наповнювачів та присутністю дефектів композитних структур.

Досягнення мети роботи передбачає:

- використання методу підобластей з неявним врахуванням умов спряження для інтегральних подань розв'язків та отримання граничних інтегральних рівнянь стосовно міжфазних переміщень та зусиль тривимірних задач теорії пружності для безмежної матриці з ідеально сконтактованим об'ємистим включенням;

- розробку адаптованих до числового розрахунку алгоритмів дискретизації отриманих інтегральних рівнянь на сітках ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів на основі додискретизаційної регуляризації сингулярних ядер та післядискретизаційної регуляризації слабосингулярних ядер рівнянь;
- впровадження техніки граничних елементів щодо тривимірних задач взаємодії об'ємистих та тонкостінних включень і тріщин у пружній матриці, які характеризуються системами граничних інтегральних рівнянь дуального типу (у переміщеннях і напруженнях);
- залучення методу ефективного поля для спрощеного гранично-елементного аналізу задач з множинними дисковими включеннями і тріщинами;
- модифікацію граничноелементних дискретних аналогів стосовно задач з тонкостінними включеннями і тріщинами у обмежених тілах зі складною топологією поверхні;
- граничноелементну апроксимацію розв'язків рівнянь у локальних системах координат для опису неідеального контакту між об'ємистим включенням і матрицею внаслідок проковзування, присутності тонкого прошарку чи нанорівневої матеріалізації міжфазної поверхні;
- введення граничноелементних розв'язків у моделі гомогенізації середовищ з розподіленими об'ємистими включеннями (скінченними волокнами) та порожнинами, зокрема в узагальнені моделі, які допускають існування стрибків переміщень або напружень на міжфазних поверхнях композиту;
- числовий розрахунок, верифікацію (шляхом співставлення з окремими відомими аналітичними та скінченноелементними розв'язками, а також даними проведеного натурного експерименту), та аналіз переміщень, напружень і ефективних модулів пружності тривимірних композитних тіл та середовищ у залежності від геометричної форми та розміру включень (нано-включень), комбінації матеріалів у системі, взаємного розташування включень, тріщин та зовнішніх поверхонь, умов контакту включень з матрицею, показника об'ємної фракції розподілених включень у композиті.

Об'єкт дослідження: пружні матричні композити з включеннями неканонічної форми та тонкими неоднорідностями за ідеальних та неідеальних умов контакту матеріалів на міжфазних поверхнях.

Предмет дослідження: локальні поля переміщень і напружень у обмежених та необмежених композитних тілах з об'ємними і тонкостінними неоднорідностями, тріщинами та ефективні механічні характеристики композитних середовищ з впорядкованою і стохастичною структурою матеріалу наповнювача.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано загальні положення теорії потенціалів. Для отримання граничних інтегральних рівнянь тривимірних задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл використано метод підобластей. Метод регуляризуючих відображень Лохата-Вотсона застосовано для регуляризації сингулярних інтегралів. Дискретизація граничних інтегральних рівнянь отриманих на міжфазних поверхнях та серединних поверхнях тонких неоднорідностей відбувалася в рамках методу граничних елементів та методу колокацій. Врахування розмірних ефектів під час дослідження локальних полів напружень в околі нанорозмірних неоднорідностей здійснювалося в рамках теорії матеріалізованої поверхні Підстригача–Повстенка–Гуртіна–Мердока. Опис цілісних механічних характеристик композитних середовищ забезпечено методами гомогенізації Морі-Танаки та в рамках квазікристалінової моделі розрідженого композиту.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України: «Дослідження методом інтегральних рівнянь статичного і динамічного напруженого стану композитних структур з тріщинами та контактними неоднорідностями» (№ держреєстрації 0106U000449, 2006–2009 рр.), «Дослідження локальних та глобальних (ефективних) динамічних і термічних параметрів пружних матричних композитів методами граничних інтегральних рівнянь і нульового поля» (№ держреєстрації 0109U008763, 2010–2013

пр.), «Розвиток методів граничних інтегральних рівнянь та нульового поля стосовно статичної і динамічної взаємодії включень у пружних, термо- та електропружних тілах» (№ держреєстрації 0113U007683, 2014–2018 рр.), «Аналітично-числові методи для дослідження статичних і хвильових пружних полів у періодично- та наноструктурованих композитних середовищах» (№ держреєстрації 0119U100668, 2019–2023 рр.), та тем Національного університету «Львівська політехніка»: «Розроблення методів статичного і динамічного розрахунку елементів конструкцій з концентраторами напружень» (ДБ/СДР) (№ держреєстрації 0109U001158, 2009–2011 рр.), «Розроблення методів аналізу пружно-пластичного деформування і оцінки міцності магістральних трубопроводів з урахуванням наявності дефектів матеріалу» (ДБ/ІДЕЯ) (№ держреєстрації 0113U001349, 2013–2014 рр.), «Розроблення методик визначення несучої здатності та деформативності з/б конструкцій зміцнених новітніми матеріалами за дії навантаження» (ДБ/ЛКП) (№ держреєстрації 00115U000436, 2015–2016 рр.). Автор – виконавець та відповідальний виконавець тем.

Частину наукових результатів отримано під час реалізації Міжнародних наукових проектів "Мікромеханіка підкріплених волокнами обмежених та необмежених твердих тіл: ефективні локальні та нелокальні термопружні властивості, концентрація напружень та крайові ефекти" (№ Р 110, 2003-2005 рр.) за програмою партнерських досліджень Українського науково-технологічного центру (УНТЦ) та "Об'єктно-орієнтовані розрахункові моделі і програмні засоби для ефективного прогнозування пружних і фононних властивостей тривимірних нанокомпозитів і метаматеріалів" (№ 6247, 2017–2019) за спільною програмою розвиваючих ініціатив НАН України та УНТЦ, в яких автор був відповідальним виконавцем..

Наукова новизна одержаних результатів полягає у:

- отриманні граничних інтегральних рівнянь із повним задоволенням у них умов досконалого (у глобальній системі координат), ковзного та адгезивного (у локальній системі координат) механічного контакту складових для тривимірних пружних систем «об'ємисте включення – безмежна матриця»,

«об’ємисте включення – тонкий податливий прошарок – безмежна матриця»;

- отриманні граничних інтегральних рівнянь із задоволенням у них умов неперервної передачі зусиль через матеріалізовану міжфазну поверхню та їх замиканні диференціальними рівняннями рівноваги цієї поверхні (у рамках нанорівневої мембранної моделі та різномасштабного континуального підходу) для тривимірної пружної системи «нанорозмірне об’ємисте включення – матриця»;
- розробці граничноелементних схем регуляризації та дискретизації рівнянь через використання спеціальних відображень просторових ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів покриття міжфазної поверхні композитного тіла;
- поширенні граничноелементної дискретизації на системи дуальних граничних інтегральних рівнянь (у переміщеннях і напруженнях), якими описано тривимірну взаємодію об’ємистих та тонкостінних включень і тріщин у пружній матриці, а також з просторовою поверхнею композитного тіла;
- залученні ефективних полів для наближеного врахування граничноелементними розв’язками взаємодії у множинних системах включень і тріщин;
- поєднанні методів граничних елементів та гомогенізації за алгоритмом Морі-Танаки у числовому дослідженні ефективних пружних властивостей композитів з розподіленими скінченними волокнами однакової та випадкової орієнтацій за їх ідеального контакту з матричним середовищем;
- поєднанні методів граничних елементів та узагальненої гомогенізації (з допущенням розривів міжфазних переміщень або зусиль) у числовому дослідженні ефективних пружних властивостей композитів з розподіленими скінченними волокнами у випадках ковзного контакту з матричним середовищем та матеріалізованих на нанорівні міжфазних поверхонь;
- граничноелементному аналізі тривимірних переміщень, напружень і ефективних модулів пружності для композитних тіл і середовищ з поодино-

кими, множинними і розподіленими включеннями неканонічної форми, тонкими прошарками і матеріалізованими поверхнями поділу складових, внутрішніми (тріщини) і інтерфейсними (контактні недосконалості) структурними дефектами та виявленні ефектів концентрації пружних полів, макромеханічної ізотропії і анізотропії та нанорівневих ефектів розмірозалежності.

Достовірність основних наукових положень та результатів дисертаційної роботи забезпечується застосуванням обґрунтованих моделей механіки деформівного твердого тіла; коректною математичною постановкою задач та використання класичних методів їх розв'язання; оперуванням класом функцій, фізичне трактування і властивості яких забезпечують математичні умови обґрунтування інтегральних рівнянь; зведенням отриманих моделей до опису відомих часткових випадків розглядуваних задач як стосовно жорсткісних характеристик компонент композиту так і стосовно контактних умов міжфазної взаємодії; збігом аналітико-числових результатів, отриманих в роботі різними методами в області їх спільної ефективності (зокрема, за значної віддалі від зовнішніх поверхонь пружного тіла) із відомими в літературі; підтвердженням результатів числового моделювання натурним експериментом; відповідністю результатів моделювання фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне значення отриманих результатів полягає у забезпеченні оптимізації технологій проектування та виготовлення, покращення експлуатаційних характеристик, подовження ресурсу виробів та конструкцій виготовлених з матричних композитних матеріалів шляхом врахування у їх розрахункових моделях складної неканонічної форми включень наповнювача, геометрії наповнення ними матричного середовища, наявності міжфазних недосконалостей структури та тонких внутрішніх концентраторів напружень з можливістю врахування їх множинної взаємодії. Запропоновані методи числової симуляції придатні до прогнозування ефективних механічних характеристик композитів виходячи з топології та контактних умов міжфазних поверхонь, що дозволяє

спростити створення композитних матеріалів з наперед заданими механічними властивостями.

Практичний потенціал прогнозування таких характеристик закладений у нових можливостях неруйнівного контролю якості міжфазних поверхонь матричних композитів в процесі їх експлуатації в агресивних середовищах та під дією значних навантажень, а також для прогнозування сейсмічних та геофізичних процесів та явищ. Отримані розрахункові дані стосовно впливу натягу та характеристик матеріалізованих міжфазних поверхонь на пружні поля напружень та деформацій наноструктурованих композитів слугуватимуть оптимізації технологій наномеханіки, біоінженерії, кристалофізики.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались і обговорювались на: Міжнародній науковій школі «13th Summer School on Fracture Mechanics» (Вроцлав, 2013); Міжнародних симпозіумах українських інженерів-механіків у Львові (2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013); міжнародних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (2008, 2010, 2012, 2014); «Second Ukrainian-Greek Symposium on Fracture Mechanics of Materials» (2011); «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (2014, 2019); «International Conference on Materials Structure & Micromechanics of Fracture» (Брно, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції «Нанотехнології та наноматеріали» (Київ, 2018).

У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.В. Матуса; на загальноінститутському науковому семінарі “Математичні проблеми механіки деформівного твердого тіла” Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом академіка НАН України Р.М. Кушніра; на спільному науковому семінарі відділів динаміки та стійкості суцільних середовищ,

обчислювальної механіки та техніки, механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка В.Л. Богданова; на об'єднаному науковому семінарі кафедр обчислювальної математики та прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом проф. Р.С. Хапка.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації опубліковані у 35 наукових роботах (див. Список публікацій здобувача у додатку), в тому числі у 16 статтях [1-16] у журналах і збірниках, які відповідають вимогам ДАК України до фахових видань. Десять статей [1-10] прореферовані у міжнародних науко-метричних базах Scopus і Web of Science. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank ([1] входить до квартилю Q1, [4, 10] входить до квартилю Q2, [2, 3, 5-9] входять до квартилю Q3) кількість наукових публікацій, які розкривають основний зміст дисертації, становить 29.

Основні результати роботи отримані автором самостійно. Результати, опубліковані у роботах [3, 5, 6, 9, 12-16, 19-24, 28, 29, 31-33, 35], отримані самостійно. У всіх працях, опублікованих у співавторстві, автору належать розвиток і реалізація підходів до розв'язання поставлених задач, інтерпретація отриманих результатів. Зокрема, у роботах [1, 2, 4, 8, 10, 26] автор брав участь у математичному моделюванні об'єкту досліджень та розробці методики числового моделювання. У статтях [7, 11, 17] автору належить числова реалізація моделювання та участь в інтерпретації отриманих результатів. В роботах [18, 25, 27, 30, 34] автору належить ідея дослідження і її числова реалізація.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, які містять 144 рисунків та 15 таблиць (у тому числі на окремих аркушах), висновків, списку використаних джерел із 505 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 413 сторінок. Обсяг основного тексту – 336 сторінок.

РОЗДІЛ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Створення ефективного аналітично-числового інструментарію для опису механічної поведінки сучасних композитних матеріалів з метою вдосконалення технологій їх проектування є важливою проблемою сьогодення. Високотехнологічні галузі промисловості потребують нових інженерних рішень, базованих на нових матеріалах з широким спектром наперед заданих властивостей від міцності та деформативності до зносостійкості і корозійної витривалості з низькою вагою та високими тепло- або звукоізоляційними властивостями чи навпаки високою теплопровідністю. Зрозуміло, що не всі ці властивості можуть бути покращені одночасно, і зазвичай немає необхідності у цьому. Переважно метою є створення матеріалу, який має лише ті характеристики, які потрібні для виконання конкретного завдання. Отримання потрібних механічних характеристик композитних матеріалів забезпечується комбінуванням матеріального контрасту їх складових, концентрацією наповнювача та якістю міжфазних поверхонь [195, 223, 235, 241, 310, 321, 374]. Волокнисті композити володіють перевагою в цьому відношенні серед інших типів композитних матеріалів через додатковий інструмент гнучкого контролю їх макрохарактеристик за рахунок керування взаємною орієнтацією волокон. Це дає можливість створювати матеріали з направленою анізотропією, що дозволяє оптимізувати їхню міцність та стійкість для конкретних навантажень та умов експлуатації [190, 208, 234, 241, 333].

Композитні матеріали, як і весь спектр конструкційних матеріалів, часто можуть бути послаблені дефектами типу тріщин, тонких неоднорідностей, порожнин, які можуть виступати значними концентраторами напружень. Експериментальні дослідження свідчать, що у випадку ін'єкційного заліковування тріщин [80, 109] або заповнення порожнин чужорідними матеріалом [194, 382, 383], наявність таких тонких або об'ємистих концентраторів напружень є суттєвим чинником впливу на міцність елементів конструкцій, що їх містять.

Більшість відомих результатів досліджень пружних тіл з включеннями стосуються двовимірних задач з тунельними наповнювачами із застосуванням апарату функцій комплексної змінної, створеного науковими школами Г.В. Колосова, Н.І. Мусхелішвілі, І.Н. Векуа, Г.Н. Савіна. Зокрема, слід відзначити у цьому напрямку метод лінійного розвинення комплексних потенціалів [102, 103]. У випадку тонкостінних наповнювачів результативним виявився метод функцій стрибка [171, 463], що ґрунтується на принципі спряження континуумів різної розмірності [41, 57, 121, 129, 171, 188] та моделювання умов спряження включення з оточенням. Огляд моделей тонких включень у пружних тілах, напрацьованих у львівській та одеській наукових школах механіки, а також зарубіжними науковцями, здійснено в роботах Д.В. Гриліцького, Г.Т. Сулима, Й.З. Піскозуба, Г.Я. Попова, Т. Мура [42, 132, 170, 173, 382].

На тлі менш поширених математично складних асимптотичних методів та специфічних молекулярно-континуумних теорій [205, 209] опису напружено-деформованого стану у включенні та поза ним, продуктивним виявився підхід, що використовує малу товщину неоднорідності, порівняно з характерними розмірами її серединної поверхні (серединної лінії) та полягає у заміні неоднорідності певними умовами, заданими на берегах її серединного математичного розрізу. Цей підхід набув широкого розвитку для моделювання тонких абсолютно жорстких та податливих включень, тонких пружних прошарків, плівок, підкріплень, у роботах В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Л.Т. Бережницького, В.В. Божидарніка, Н.Д. Вайсфельд, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, Д.В. Гриліцького, В.Т. Грінченка, В.С. Гудрамовича, О.М. Гузя, І.І. Дияка, А.П. Зіньковського, О.О. Євтушенка, С.О. Калоєрова, Г.С. Кіта, В.І. Кир'яна, Я.І. Кунця, Р.М. Кушніра, В.В. Лободи, В.М. Максимовича, Р.М. Мартиняка, В.В. Матуса, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, О.Б. Мовчана, В.В. Можаровського, М.Ф. Морозова, Р.С. Мусія, М.М. Николишина, В.К. Опанасовича, В.А. Осадчука, В.І. Острика, В.В. Панасюка, Я.М. Пастернака, Й.З. Піскозуба, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, В.П. Силованюк, Я.Г. Савули, В.С. Саркісяна, М.М. Стадника, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, А.О.

Сяського, Л.А. Фільштинського, А.С. Хачикяна, Г.П. Черепанова, К.С. Чобаняна, П.В. Яснія, Е.Е. Gdoutos, G.C. Sih та ін. (див. наприклад [4, 5, 10, 14, 21, 25, 26, 38, 40, 43, 47, 52, 66, 70, 78, 79, 95, 99, 102, 106, 122, 130, 131, 137, 139, 142, 170, 174, 179, 190, 191, 194, 367, 419, 425, 453])). У роботі [169] було отримано асимптотичний розподіл поля напружень та переміщень в околі вершини тонкостінного лінійного включення в однорідному тілі, а у роботі [122] – для такого ж включення на міжфазній поверхні розділу матеріалів у гетерогенному пружному тілі.

Узагальнення двовимірних задач для тіл з включеннями на дослідження широкого класу полів різної фізичної природи та їх взаємовпливу напрацьовані в роботах Я.Й. Бурака, Б.Д. Дробенка, О.Р. Гачкевича, Б.М. Калиняка, В.З. Партона, Я.М. Пастернака, Я.С. Підстригача, Г.Т. Сулима, Р.Ф. Терлецького, Ю.В. Токового, В.Ф. Чекуріна [17, 18, 31, 111, 113, 117, 121, 175, 420, 421, 469].

Складна топологія включень (переважно абсолютно жорстких) у двовимірних задачах теорії пружності, зокрема, негладкі багатоланкові включення [22, 62, 63, 192, 363], а також включення хрестоподібної [7, 39], гіллястої [105, 461] та дугоподібної форми [12, 180] була предметом досліджень В.К. Опанасовича, Г.Я. Попова, В.Г. Попова, Г.Т. Сулима, І.П. Шацького та їх учнів, а також розглядалася Е.Х. Григоряном для моделей гнучких податливих неоднорідностей.

Метод моделювання тріщин та тонких щілин математичним розрізом із заданими крайовими умовами на ньому з успіхом застосовувався у механіці руйнування О.Є. Андрейківим, О.П. Дацишиним, Р.М. Кушніром, З.Т. Назарчуком, М.М. Николишиним, В.А. Осадчуком, В.В. Панасюком, М.П. Савруком, Г.П. Черепановим та ін. [6, 100, 104, 107, 133, 134, 189].

Помітно менше результатів отримано при розгляді просторових задач теорії пружності для тіл із тонкими включеннями. Так моделювання тонких дискових абсолютно жорстких включень стрибками напружень на їх серединних поверхнях дозволило описати напружено-деформований стан в

околі її контуру [9, 11] та звести задачу до граничних інтегральних рівнянь відносно цих стрибків та переміщень включення в просторі. Випадок розташування такого включення у півпросторі послабленому тріщинами та у площині розділу біматеріального пружного тіла досліджувався в працях [443, 444]. Варто відзначити також монографії [53, 317], в яких автори будують асимптотичні залежності компонент поля напружень в пружному просторі, викликаному наявністю неоднорідностей, зокрема жорсткого прямого або викривленого стрижня або тонкого жорсткого пластинчастого включення. В роботі [331] В.С. Кирилюка та О.І. Левчука отримано точні розв'язки задач переміщення та обертання жорсткого кругового включення в п'єзоелектричному трансверсально-ізотропному матеріалі та знайдено аналітичні вирази для розподілу напружень в околі кругового включення в електропружному тілі.

Задачу про взаємодію скінченної кількості довільно орієнтованих тонких жорстких включень та тріщин в пружному просторі розв'язано В.В. Михайським та О.І. Степанюком [391] зведенням її до розв'язування системи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. В роботі запропоновано процедуру дискретизації інтегральних рівнянь через виділення особливості шуканих функцій на контурі областей інтегрування та аналітико-числову регуляризацію інтегралів з різним ступенем сингулярності. Через визначені колокаційним методом функції стрибків переміщень та напружень в точках серединних поверхонь тонкостінних неоднорідностей розраховано коефіцієнти інтенсивності напружень як функції кутових координат фронтальних точок цих областей для взаємодіючих пар кругових включень і тріщин, які мають різну взаємну орієнтацію, відстань і розміри.

Широкого розповсюдження набули умови заміни тонкого податливого включення в просторових задачах теорії пружності стрибками переміщень та напружень у безмежному просторі, зокрема на основі відомої пружинної моделі Вінклера [127], які отримані шляхом усереднення по товщині вклю-

чення вихідних рівнянь тривимірної теорії пружності. Для цієї моделі тонкого податливого включення Г.С. Кітом та М.В. Хаєм були отримані граничні інтегральні формулювання задачі термопружності [59] та розв'язана задача розтягу безмежного тіла з тонким пружним полосовидним включенням. Аналогічні задачі для податливих включень дископодібної форми розглядалися в роботах М.М. Стадника [141]. Питання тривимірної концентрації напружень в пружних тілах з тонкостінними податними включеннями досліджувалися в роботах О.Є. Андрейківа, М.М. Стадника, В.П. Силованюка [110, 139, 140, 143].

Взаємодія тонких концентраторів напружень з поверхнею пружного тіла, що їх містить, досліджувалася переважно у випадку, коли топологія цієї поверхні дозволяє записати зручні для подальших обчислень інтегральні рівняння [170], тобто тіл у формі півпросторів, смуг або безмежних циліндричних шарів. Дослідження впливу кривини поверхні більш складної форми на концентрацію напружень в околі приповерхневих тонких включень автору невідомі.

Вперше проблему концентрації напружень довкола об'ємистого сферичного та циліндричного включення в пружному середовищі з характеристиками сталі або бетону розглянув Дж. Гуд'єр в роботі [280].

Базовим для побудови аналітичних розв'язків тривимірних задач пружної рівноваги об'ємистого включення у безмежному середовищі став розв'язок Ешелбі для безмежної пружної матриці з еліпсоїдальною неоднорідністю [270]. За умови однорідного навантаження матриці на безмежності, рівномірне поле напружень всередині еліпсоїдального включення пропонувалося визначати шляхом згортки побудованого в роботі тензора Ешелбі з тензором матричних деформацій та тензором модулів пружності матеріалу включення. Пізніше було отримано напруження поза межами еліпсоїдального включення методом бігармонічних потенціалів [271] та доведено теорему про поліноміальну консервативність [272], згідно з якою, якщо зовнішнє поле деформацій (напружень) є поліномом степеню m по координатах точки області,

то поле деформацій (напружень) всередині пружного еліпсоїда також є поліномом степеню не вище m . Ці результати в оглядовій праці М. Качанова та І. Севостьянова [312] охарактеризовані як такі, що привели до «революційних змін у механіці матеріалів, створивши основу для кількісного моделювання ефективних властивостей композитів та концентрації напружень на неоднорідностях» і названі «наріжним каменем мікромеханіки матеріалів».

Напружено-деформований стан пружних тіл зі сферичними, сфероїдальними та еліпсоїдальними порожнинами або включеннями методом еквівалентного включення Ешелбі досліджувався А.Я. Александровим, В.Т. Головчаном, В.С. Кирилюком, О.І. Левчуком, Л.В. Назаренко, А.Г. Ніколаєвим, Ю.Н. Подільчуком та представниками його наукової школи, В.С. Проценком, А.Ф. Улітком, Л.П. Хорошуном, Т. Мура (див. наприклад [2, 34, 54–56, 101, 125, 177, 323, 327, 381, 426–428]). Випадок параболоїдальної порожнини у п'єзокерамічному пружному тілі розглянуто В.С. Кирилюком та О.І. Левчуком [329]. Розв'язок задачі про періодичне розташування сферичних [338] та сфероїдальних [339] включень у пружному ізотропному середовищі побудований В.І. Кущем.

С.К. Канауном та В.М. Левіном в роботі [53] результати узагальнено на випадок сферичного неоднорідного шаруватого включення та розглянуто осесиметричну задачу для циліндричного включення. Включення канонічної форми, розміщені у трансверсально ізотропному або ортотропному середовищі, досліджувалися А.Я. Александровим та його учнями, Ю.Н. Подільчуком [2, 3, 125, 126], проте, з важливим обмеженням орієнтації півосей еліпсоїдальної неоднорідності лише вздовж осей трансверсальної ізотропії або ортотропії середовища. Пізніше такі обмеження для випадків поодиноких, множинних та розподілених періодично сфероциліндричних включень були подолані в роботах В.С. Кирилюка, В.І. Куща, О.І. Левчука, І. Севостьянова [55, 204, 330, 342, 346]. Деформований стан композитного тіла з довільною орієнтацією ортотропного еліпсоїдального включення в матриці з стохастично розподіленими мікропошкодженнями розраховано Л.В. Назаренко [407]. В роботі [352]

розглянуто найбільш загальний випадок довільної орієнтації еліпсоїдального анізотропного включення в анізотропній матриці.

У статті [340] В.І. Куцем запропонований метод мультипольних розвинень, що полягає у представленні поля переміщень у багатозв'язній області у вигляді суми відповідних розв'язків задачі теорії пружності для однозв'язних областей та додаткового розвинення кожного доданка в ряд по частинних векторних розв'язках рівнянь Ляме, записаних у системах координат прив'язаних до геометрії неоднорідності, що дало змогу описувати пружну взаємодію скінченої кількості включень канонічної форми у безмежному середовищі безмежною множиною лінійних алгебраїчних рівнянь. Застосуванням поворотів локальних систем координат розв'язок вдалося узагальнити на довільну взаємну орієнтацію сфероїдальних включень [71, 348]. Згодом цей метод був застосований до розв'язування тривимірних задач про взаємодію сфероїдальних включень або порожнин з плоскими круговими тріщинами [341, 349], а в роботі [485] до випадку взаємодії еліптичних тріщин зі сферичними включеннями. Подібну задачу про взаємодію кругових тріщин з еліпсоїдальними включеннями розв'язали Н.М. Shodja, І.З. Rad, Р. Soheilifard [449] із застосуванням методу еквівалентного включення та теореми Хілла та В.С. Кирилюк [328] поєднанням методу еквівалентного еліпсоїдального включення Ешелбі із застосуванням гармонійних функцій для еліптичної тріщини. Задача про взаємодію довільно розташованої кругової тріщини з двома включеннями з різною відносно матриці жорсткістю (і як частковий випадок з порожнинами) розв'язана в роботі [353] методом поєднання еквівалентного включення Ешелбі та апроксимації за принципом Сен-Венана.

У монографії [351] В.І. Куц поширив метод мультипольних розвинень на випадки обмежених і півбезмежних пружних тіл, що містять включення, нанорозмірні неоднорідності, а також включення, частково відшаровані або неідеально спряжені з навколишнім середовищем. У цій же монографії строго доведено збіжність рядів розв'язків відповідних задач. Для півбезме-

жного пружного тіла що містить сферичне включення, О.Г. Ніколаєвим побудовано аналітичний розв'язок [409] методом узагальнених відображень Фур'є у вигляді безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь та наближено його обчислено методом малого параметра.

М. Качановим та Б. Шафіро отримані розв'язки задач про концентрацію напружень у статично навантажених тривимірних безмежних тілах з еліпсоїдальними порожнинами, наповненими стисливою рідиною та довільно орієнтованими відносно навантаження тіла [446]. Вважається, що тиск в порожнинах змінюється залежно від їх деформування, внесок якого в загальну деформацію тіла пропонувалося описувати спеціальним чотириранговим Н-тензором. Ці результати в роботі [445] були узагальнені до випадку еліпсоїдальних включень, матеріал яких характеризується довільними пружними константами.

На основі принципу взаємності робіт та залучення фундаментальних розв'язків задачі теорії пружності для композитних тіл з включеннями та дефектами зводять до граничних інтегральних рівнянь стосовно поверхневих переміщень і напружень у випадку об'ємистих включень або їх стрибків у випадку тонкостінних включень і тріщин. Цей метод в літературі отримав назву методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [94, 108, 112] або методу потенціалу [19, 59, 68, 69]. Основна перевага такого підходу у зниженні на одиницю розмірності вихідної задачі.

Вперше зведення статичних задач теорії пружності для однорідних тіл із заданими на межі переміщеннями до інтегральних рівнянь застосував І. Фредгольм [273, 274]. Можливості методу розвинули В.Д. Купрадзе з учнями поширивши його на розв'язування статичних і динамічних задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл та довівши теореми існування розв'язків цих задач [68, 69]. У працях Н.І. Мусхелішвілі [97, 98], С.Г. Міхліна [89–94] та роботах наукової школи В.Д. Купрадзе [19, 68, 69] цей метод застосовувався як аналітичний для розв'язування класичних крайових задач теорії пружності, хоча на цей час вже були відомі спроби чисельного

розв'язування інтегральних рівнянь із застосуванням дискретизації області інтегрування, апроксимації невідомих функцій їх дискретними значеннями у точках цієї області та зведення задач до систем лінійних алгебраїчних рівнянь [36, 96]. Слід відзначити праці І.Ю. Чудиновича, в яких він досліджував існування та єдиність розв'язку задач теорії пружності з крайовими умовами змішаного типу на замкнутих і розімкнутих областях у статичній і динамічній постановці та запропонував подання розв'язків у вигляді комбінацій потенціалів простого та подвійного шару [243, 244].

Двовимірні задачі про пружну рівновагу тонких включень у безмежному середовищі зводяться до одновимірних інтегральних рівнянь, ядра яких є сингулярними (тобто мають особливість, що співпадає з розмірністю області інтегрування). Методи їх розв'язування викладені в роботах Н.І. Мусхелішвілі [98], С.Г. Міхліна [89, 92], Ф.Д. Гахова [29], Н.П. Векуа [23] та інших численних дослідників (див. наприклад [8, 27, 77, 136, 269, 325, 334, 468]). У монографії А.М. Лінькова [75] запропоновано теорію комплексних граничних інтегральних рівнянь для кусково-однорідних тіл з тріщинами, розрізами та включеннями.

Зведення тривимірних крайових задач теорії пружності до інтегральних рівнянь найчастіше здійснювалося на базі фундаментальних розв'язків з ядром типу ньютонівського потенціалу. Вперше формулу обернення такого сингулярного рівняння з кругової області інтегрування та постійною правою частиною отримав М.Я. Леонов [74]. Для розв'язування рівнянь з поліноміальними правими частинами застосовували теорему Дайсона [267]. Г.Я. Попов отримав спектральні співвідношення, що дозволяють зводити сингулярні інтегральні рівняння типу ньютонівського потенціалу до безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь [131]. У монографії Ф.Д. Гахова та Ю.І. Черського [30] розв'язок таких рівнянь з областю інтегрування у вигляді півплощини вдалося звести до задачі Рімана-Гільберта теорії аналітичних функцій на прямій. Завдяки цьому та застосовуючи прийом відображення кругової області інтегрування на півплощину, М.В. Хай довів існування розв'язку

інтегро-диференціальних рівнянь тривимірних задач термопружності для тіл з круговими тріщинами та побудував їх розв'язки [181].

Тривимірні задачі про концентрацію напружень в околі тонких неоднорідностей або тріщин зводяться до гіперсингулярних інтегральних рівнянь, вперше описаних Ж. Адамаром у роботі [1], що стосувалася розв'язування задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу. Ним же було запропоновано спосіб регуляризації цих рівнянь методом виділення їх скінченної частини.

В літературі відомі наближені асимптотичні розв'язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу [16, 337], що ґрунтуються на виборі допоміжних контурів інтегрування на деякій малій відстані від точки сингулярності. Однак, відсутність чіткого критерію вибору такого допоміжного контуру та значний вплив його положення на точність обчислення інтеграла робить такий метод трудомістким для застосування на практиці. Більш ефективним є метод аналітико-числової регуляризації гіперсингулярних інтегралів, який був запропонований М.В. Хаєм [183] для розв'язування статичних задач теорії тріщин і узагальнений В.В. Михаськів [86] на регуляризацію гіперсингулярних інтегралів типу потенціалу Гельмгольца та дискретизацію відповідних інтегральних рівнянь задач механіки руйнування у динамічній постановці. Крім того, вагомий внесок у розв'язок задач для тіл з включеннями і тріщинами шляхом зведення їх до граничних інтегральних рівнянь та їх числового розв'язування зробили Р.В. Гольдштейн, І.О. Гузь, В.В. Зозуля, С. Крауч, В.В. Михаськів, В.З. Партон, П.І. Перлін, О.О. Стрельнікова, А. Старфілд, А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянський, В.А. Щербина, Р.К. Banerjee, К. Brebbia, Т.А. Cruse, Q. Huang, Rizzo F.J. та інші [35, 60, 119, 120, 165, 176, 193, 229, 248–250, 292, 336, 362, 434, 504]. Зокрема, в роботах В.В. Михаськіва, В.З. Станкевича та ін. побудовані інтегральні формулювання динамічних задач для тіл з тонкими включеннями і тріщинами в просторі за розсіяння пружних хвиль [332, 388, 392, 454]. У роботах О.І. Гузя та В.О. Меншикова [292, 369, 370] арсенал методу граничних інтегральних рівнянь застосовано до розв'язання динамічних задач

для кусково-однорідних тіл з тріщинами на міжфазній поверхні з урахуванням можливості контакту їх берегів. О.М. Гузем задачу про взаємодію неканонічних порожнин з тріщинами зведено до парних інтегральних рівнянь з подальшим їх числовим розв'язуванням [288].

Найефективнішим методом числового розв'язування сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь став метод граничних елементів, що полягає у дискретизації границі області інтегрування неперервною сіткою граничних елементів з апроксимацією невідомих функцій їх дискретними значеннями у вузлах цієї сітки та числовій або аналітико-числовій регуляризації інтегралів у випадку, коли точка джерела співпадає з точкою інтегрування [305]. Існує дві групи методів регуляризації таких інтегралів: предискретизаційні та постдискретизаційні. До перших можна віднести метод Адамара виділення скінченої частини інтеграла або аналітико-числову регуляризцію Хая-Михаськіва з попереднім аналітичним обчисленням допоміжних гіперсингулярних інтегралів по області інтегрування з врахуванням поведінки невідомих функцій на її краю. До других – метод зведення гіперсингулярних інтегралів тривимірних задач теорії пружності для тіл з тріщинами та тонкими включеннями з використанням теорем Гауса та Гріна до звичайних контурних інтегралів з подальшим їх аналітичним або числовим обчисленням, що запропонований В.В. Зозулею [502, 503]. Часто у випадку високого ступеня сингулярності інтегралів пре- і постдискретизаційна регуляризація застосовуються послідовно.

Детальне викладення дискретизаційних та регуляризаційних процедур методу граничних елементів щодо сингулярних та слабосингулярних інтегралів можна знайти у фундаментальних монографіях [60, 176, 206, 227, 228, 466] та оглядовій праці [467].

Цей метод широко застосовувався у двовимірних задачах пружної рівноваги включень та тріщин у ізотропних та анізотропних середовищах [318]. Зокрема, Г.Т. Сулимом, Я.М. Пастернаком, із залученням методу стрибка

розв'язано широкий клас задач [15, 115, 172, 226, 417, 463], для тіл із тонкими непрямолінійними включеннями з визначення полів різного механічного та фізичного походження. Відомий також підхід, коли замість методу стрибка застосовують метод масових сил, замінюючи тонке включення розподіленими з певною густиною силами, прикладеними до його серединної поверхні [433, 437], проте за такого підходу не враховується поперечне деформування включення.

Застосування методу граничних елементів для розв'язування тривимірних задач для неоднорідних тіл переважно стосується тонкостінних наповнювачів та плоских тріщин, наприклад, див. роботи [166, 309, 357, 358, 411, 489]. Щодо розв'язування задач для тіл з об'ємистими включеннями, то метод граничних елементів застосовувався в нечисленних відомих автору роботах, наприклад [236, 360].

Ефективність методу граничних елементів, як і кожного числового методу, значно залежить від оптимізації дискретизаційних процедур, серед яких можна виділити розроблений Н. Нішімурою швидкий мультипольний метод (fast multipole method) [359, 410, 411, 489], метод адаптивної перехресної апроксимації, метод попередньо скоригованого перетворення Фур'є [358].

Альтернативою до методу граничних елементів можна вважати безсіткові числові методи розв'язування граничних інтегральних рівнянь [283]. В роботах Ч. Жанга та його співавторів цей метод застосовується для розрахунку композитних тіл з функціонально градієнтними механічними властивостями [275, 491, 492]. Ще однією модифікацією методу граничних елементів є метод Гальоркіна розкладу шуканих функцій в ряди по наперед заданих базисних функціях [198], які однак непросто підібрати у випадку складної форми областей інтегрування.

Числове дослідження локальних та ефективних пружних властивостей тривимірних зернистих і коротковолокнистих композитів за ідеального контакту їх складових часто здійснюють методом скінченних елементів, запро-

понованим Р. Курантом ще у 1943 р. Пізніше метод був розвинутий у роботах І. Альтенбаха, Дж. Аргіріса, Л. Галлагера, О. Зенкевича, Р. Клаффа, Г. Стренга, М. Тернера, Л. Топпа, Дж. Фікса та ін. [28, 51, 138, 167, 203, 470]. До переваг цього методу слід віднести його універсальність щодо фізичних моделей матеріалу твердого тіла та легкість врахування крайових умов на його поверхнях. Зокрема, у роботах [24, 25] Я. Савулою метод скінчених елементів застосовано у двовимірній задачі теорії пружності для моделювання тонкого податного включення. Щодо тривимірних задач, то його застосування пов'язане з необхідністю побудови громіздких просторових сіток розбиттів тривимірної гетерогенної області з трудностю забезпечення точності розрахунків та складністю врахування у розрахункових моделях умов спряження на поверхнях поділу матеріалів. Крім того, розгляд обмежених репрезентативних елементів у композитному середовищі приводить до необхідності моделювання періодичних розподілів включень у композиті, що значно звужує клас розглядуваних задач.

О.Я. Григоренком та В.Л. Богдановим пряме застосування методу скінчених елементів використано для розрахунку тривимірних неоднорідних біомеханічних систем [13]. В.А. Декрет зі співавторами застосовують дещо модифікований сітковий варіаційно-різницевий підхід для оцінки стійкості композитних структур [233]. Динамічні задачі для елементів конструкцій з композиційних матеріалів розв'язані Я.О. Жуком [393]. Проблеми пружно-пластичного деформування обмежених тіл з тріщинними дефектами розглянуті Б.Д. Дробенком [49]. Перспективним видається застосування змішаного методу скінчених елементів у переміщеннях-напруженнях або вдосконалення схем апроксимації невідомих функцій ермітовими сплайнами, запропонованим в роботах Марчука М.В. (див. наприклад [81, 82]).

Гібридне поєднання методів скінчених та граничних елементів з використанням їх сильних сторін у статичних задачах теорії пружності було запропоноване І.І. Дияком [33, 48, 135]. Пізніше цей підхід застосовувався для мо-

делювання періодичної системи включень у безмежному тілі [246] та у динамічних задачах для неоднорідних пружних тіл [415]. З іншого боку, все частіше в літературі зустрічаються роботи з паралельного використання методу скінчених і граничних елементів з метою верифікації отриманих результатів [32].

Огляд робіт з скінченноелементного аналізу тривимірного напруженого стану коротковолокнистих композитів подано в роботі [279]. Вплив форми скінченого волокна на локальні та глобальні властивості коротковолокнистих композитів досліджувався в роботах К. Го [277, 278].

У роботі [488] залучено інструментарій модифікованих функцій Гріна щодо опису множинної взаємодії сферичних включень на мікрорівні для оцінки макроскопічної поведінки функціонально-градієнтних матеріалів. Інтегральне формулювання тривимірної задачі взаємодії кругової тріщини зі сферичним або призматичним включенням побудовано в роботі [257], запропоновано її числове розв'язування із застосуванням регуляризації сингулярних інтегралів та дискретизації областей інтегрування скінченими елементами.

У монографії [230] В. Буряченком поєднано метод об'ємних та граничних інтегральних рівнянь для вирішення мультимасштабної тривимірної проблеми множинної взаємодії скінченного числа включень різного розміру у обмежених та необмежених пружних тілах з можливістю узагальнення методу на випадок анізотропії матеріалу включень.

Окремо слід відзначити складні в реалізації задачі спряження континуумів суттєво різної розмірності, зокрема поєднання тривимірної моделі пружного середовища з одновимірними моделями абсолютно жорстких або деформівних неоднорідностей. Вперше така тривимірна задача з пониженням її розмірності на два порядки була розглянута в роботі Р.К. Banerjee та D.P. Henry [207] за умови рівності коефіцієнтів Пуассона матриці та включень. Такий підхід призводить до появи сингулярності, яку в одновимірних інтегральних рівняннях вздовж просторової кривої досить складно усунути. З іншого боку,

для уникнення проблем з регуляризацією, такого роду включення В.Т. Грінченком та А.Ф. Улітком пропонувалося моделювати тонкими витягнутими еліпсоїдами [281]. Я.М. Пастернаком та Г.Т. Сулимом запропоновано зведення задач про пружну рівновагу ниткоподібних включень у тривимірному необмеженому середовищі до граничних інтегральних рівнянь та розроблено механізм їх регуляризації та дискретизації у випадку абсолютно жорстких [422] та гнучких або деформівних включень [418, 423, 424].

Значний внесок у проблематику композитів волоконного типу з тріщинними дефектами зроблено вченими Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка. Зокрема В.Л. Богдановим, О.М. Гузем та В.М. Назаренком [289] запропоновано новий підхід, який дозволяє уніфіковано розглядати проблеми руйнування композитних матеріалів з урахуванням залишкових напружень, що діють вздовж тріщин, і руйнування шаруватих і волокнистих композитів, що містять періодичні масиви тріщин при стисненні вздовж їх площин. Такі задачі пропонується зводити до дуальних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. У рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл було розглянуто спершу осесиметричні задачі для тріщини у вуглепластиковому композиті зі стохастичним армуванням короткими еліпсоїдними вуглецевими волокнами [213, 214], яку згодом вдалося узагальнити на випадок періодичної системи взаємодіючих тріщин, використовуючи представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та техніку інтегральних перетворень Хенкеля [215].

Через залучення математичного апарату інтегральних перетворень Фур'є-Хенкеля, вищезгадану задачу розв'язано у більш загальній постановці [219]. Тривимірні задачі для попередньо напружених композитів із взаємодіючими круговими приповерхневими тріщинами були розглянуті в роботах [216, 218, 222] аналітико-числовим підходом, де на перший план виходять не-класичні механізми руйнування: руйнування тіл з тріщинами з початковими (залишковими) напруженнями, що діють уздовж площин тріщин, і руйну-

вання твердих тіл при стисненні вздовж паралельних тріщин. Тріщини, розташовані на межі поділу матеріалів, розглядалися в роботі [217]. О.М. Гузем, В.М. Назаренком показано, що за малої відстані між поверхнею тіла та площиною тріщини процес руйнування ініціюється локальним вигинанням частини матеріалу [291]. В.Л. Богдановим та співаторами за методикою, заснованою на методі Бубнова–Гальоркіна для деяких типів вискоеластичних матеріалів і композитів розраховано критичні параметри навантаження, що відповідають локальному прогину матеріалу в околі фронту тріщини [220, 221].

У співавторстві з М.Ф. Селівановим та Г. Альтенбахом підхід узагальнено на випадок когезійного зчеплення берегів тріщини біля її вершини [441] зі зведенням задачі до нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші з врахуванням залежності когезійних зчеплень від розкриття тріщини. Такий підхід було запропоновано М.Ф. Селівановим з співавторами раніш для опису механізмів вязкопружного руйнування однорідних тіл [442] та композитів [316]. А.О. Камінським та М.Ф. Селівановим розглянуто модель поширення кругової плоскої тріщини у композиті з гексагональною симетрією, що складається з пружних ізотропних волокон і вязкопружної ізотропної матриці [314].

Проблеми стійкості композитів, армованих паралельними короткими волокнами, ґрунтовно опрацьовані у роботах В.А. Декрета у двовимірній [252, 253] та у тривимірній [254, 286] постановці. З фундаментальним оглядом робіт з проблематики стійкості коротковолокнистих композитів можна ознайомитися в роботах [287, 290] Крайові ефекти, що виникають від поверхневого навантаження півбезмежних шаруватих композитів та композитів, армованих короткими волокнами, що близько розташовані до поверхні, досліджувалися В.А. Декретом та його учнями в працях [232, 233, 255].

Порушення досконалих умов спряження у композитних середовищах досліджувалися представниками львівської школи механіки Б.Л. Пелехом та І.М. Коровайчуком [118] та Ю.С. Ліпатовим [76], які характеризували їх як

повне чи часткове відшарування фаз композиту або наявність тонкого міжфазного шару з відмінними від складових композиту деформівними характеристиками. В літературі переважають два підходи до розв'язування таких задач. Перший полягає у введенні в розрахункову модель стрибків переміщень, що визначаються через деформаційні характеристики міжфазного шару та зусилля, що передаються через нього або моделюють проковзування включення у матриці. Другий – у впровадженні в розрахунок фіктивного ідеально зконтактowanego з середовищем включення, анізотропні властивості матеріалу якого неявно враховують всі міжфазні дефекти вихідної задачі, що реалізований, наприклад, у двовимірних задачах з тунельними частково відшарованими еліптичними включеннями в роботі [498]. Слід відзначити також спроби прямого застосування числових методів до розрахунку двофазних композитів з тонкими прошарками на міжфазних поверхнях з дискретизацією їх скінченними елементами як третьої фази гетерогенного тіла [473], проте такий підхід не знайшов розвитку через його неефективність.

Виходячи з першого підходу Я. Бенвеністе сформулював [212] сім типів інтерфейсних умов спряження у двовимірній постановці залежно від жорсткісних характеристик міжфазного шару. Ці моделі реалізовані різними авторами для двовимірного дослідження неідеальних умов спряження або відшарування як тунельних [196, 201, 361] так і коротких [471] волокон. Відшарування тонких жорстких включень вздовж однієї з поверхонь досліджувалися в задачах статички В.М. Александровим, Н.М. Кундратом, [5, 64, 131] і в задачах динаміки В.Г. Поповим, О.П. Мойсеєнком, Х. Сато [130, 438]. Порушення ідеального контакту податливого включення з матрицею розглянуто в роботах [114, 116, 168, 378, 462], де зокрема Г.Т. Сулимом та Я.М. Пастернаком для криволінійних включень враховано тертя на відшарованому інтерфейсі та анізотропія матриці. В.В. Матусом зі співавторами вирішено проблему частково відшарованих волокон і включень з кусково-гладким контуром [83, 367] а також наявності тонкого міжфазного шару між пружними включеннями та мат-

рицею [65, 67, 84] за динамічного навантаження композиту методом нульового поля.

У тривимірному випадку переважно задається лінійна залежність між стрибками переміщень та зусиллями на міжфазній поверхні, зокрема, в роботах [499, 500] неідеальне з'єднання сферичного включення з матрицею моделюється полем дислокацій Сомільяно, що дозволяє обчислити напружений стан в тілі як за тангенціального ковзання, так і за нормального відриву матеріалу включення від оточуючого середовища. Для сферичних включень та циліндричних волокон в роботах [259, 297, 436] була запропонована мембранна або оболонкова модель інтерфейсу, що однаково ефективна як для податливих, так і для жорстких міжфазних прошарків. Тривимірний напружений стан в околі частково відшарованого циліндричного абсолютно жорсткого включення розраховано в роботі [237], а в околі сферичного пружного включення з міжфазним шаром в роботі [296]. Вільне ковзання, лінійна пружинна модель та модель поля дислокацій застосована [260] для розрахунку поля напружень всередині та зовні сферичного пружного включення за неідеальних умов спряження його з матрицею. Узагальнення всіх вище перелічених моделей, як часткових випадків, сформульовано у праці [282]. Вплив міжфазних неоднорідностей на нелінійну поведінку композитних матеріалів за поширення пружних хвиль вивчався А. Бустремом, П. Бьовіком, Г. Вікгемом, В. Данішевським, П. Ольсеном, Ю. Каплуновим та ін. [224, 251, 294]. Слід відзначити нечисленні експериментальні роботи з визначення механічних характеристик тонких прошарків композитних структур шляхом механічних випробувань, поєднаних зі скінченноелементним розрахунком [245, 335] та акустичними методами [365, 366].

Окремою проблемою в механіці композитів є врахування різниці між енергією міжатомної взаємодії у безпосередній близькості від поверхонь порожнин чи включень та всередині пружного тіла, що є причиною виникнення спеціальних поверхневих деформацій та залишкових напружень, внесок яких у загальне поле зростає зі зменшенням характерного розміру поверхонь і стає

суттєво відчутним на нанорівні. Наноструктурне армування відкриває широкі можливості для покращення властивостей композитних матеріалів, що зробило нанокompозити та нанопористі матеріали важливими об'єктами досліджень в сучасній механіці матеріалів [44, 480, 483].

Дослідження впливу поверхневих напружень на механічну поведінку нанокompозитів можливе методами дискретної та континуальної механіки. Перший підхід залежно від масштабу вирішуваної проблеми залучає квантово-механічні, атомістичні та мезоскопічні дискретні методи. Однак, дослідники, які використовують ці методи, зазначають, що область їх досліджень містить занадто багато атомів, щоб проблему можна було вирішити з допомогою квантової механіки, а з іншого боку наноструктури не є настільки великими, щоб бути повністю вільними від квантових ефектів [364]. Проте атомістичне моделювання нанорозмірних структур стало важливим джерелом інформації про механічні характеристики матеріалізованих поверхонь, які застосовують в континуальних моделях нанокompозитів (див., наприклад, [373]).

Вперше модель поверхневих напружень у рамках континуальної теорії в твердому тілі запропоновано у роботі Гіббса [276]. Ця модель була розвинута науковцями львівської школи механіки Я.С. Підстригачем, Ю.З. Повстенком [123, 124, 128, 429, 430] та деякими іноземними дослідниками [197, 200, 284, 384, 414, 439, 452, 465, 474], зокрема, через наділення «матеріальної поверхні» нульової товщини власними механічними властивостями. У роботі [384] показано, що натяг матеріальної поверхні може спричиняти значні об'ємні напруження, які залежать від багатьох факторів [464], ключовими з яких є крижина матеріальної поверхні та контраст між її жорсткістними характеристиками та пружними константами твердого тіла. Оскільки поверхневі та об'ємні пружні константи мають різну розмірність, то реалізація моделі матеріалізованої поверхні неминуче приводить до появи масштабного ефекту при визначенні локальних полів напружень, що підтверджується експериментами [197, 225, 355, 474, 476]. При розв'язуванні макрорівневих крайових задач теорії

пружності розмірними ефектами нехтують [44, 293, 355], проте, коли досліджуються наноструктурні матеріали, їх врахування є невід’ємною частиною моделювання з огляду на велику питому частку поверхонь та інтерфаз в одиниці об’єму. Енергія поверхневої деформації у цих структурах може суттєво впливати на їх локальну поведінку [475, 476] і нелінійно змінювати макроскопічні властивості наноструктур [263, 264, 477, 495]. Фундаментальні літературні огляди застосування моделей континуальної механіки на нанорівні зроблено в роботах [44, 265, 293, 476] та монографіях [200, 483], крім того у статті [476] подано огляд експериментальних робіт з визначення як локальних так і глобальних характеристик нанокомпозитів.

На прикладі рівноваги матеріальної поверхні мембранного типу у твердому тілі у роботах М. Е. Gurtin, А. І. Murdoch [284, 285] і Я. С. Підстригача, Ю. З. Повстенка [123, 124, 128, 429, 430] отримано узагальнене рівняння для опису деформування такої поверхні довільної кривини. Такі рівняння отримано також із геометричних міркувань [435], аналізуючи відношення площі деформованої поверхні до її початкової площі. У роботі [199] доведено теорему існування і єдиності розв’язків статичних крайових задач лінійної теорії пружності з поверхневими напруженнями, що відкрило шлях для математично обґрунтованого застосування сучасних чисельних методів і доведення досліджень до числових результатів. Такі числові розрахунки впливу поверхневого натягу і викликаних ним розмірних ефектів набули особливої актуальності у зв’язку із розвитком нанотехнологій і отримали загальну назву – «обчислювальна нанотехнологія» [455].

Більшість відомих результатів у цій області відносяться до двовимірних задач із тунельними нанооб’єктами кругового або еліптичного перерізу і отримані за допомогою методів комплексної змінної [307, 376], методу скінченних елементів [479], методу граничних елементів [258]. У роботі [478] досліджувався двовимірний напружений стан в безмежній матриці з тунельними отворами у формі правильних многокутників різної величини.

Щодо тривимірних конфігурацій, то вони проаналізовані у припущенні

постійності або неперервності кривини поверхонь нанопор або нановключень і реалізовані для сферичної [299, 343, 356, 482, 486, 487], сфероїдальної [345, 347] їх форми із використанням формалізму Ешелбі та залученням підходу мультипольних розвинень. У роботі [259] до аналізу напруженого стану еліпсоїдальних нанонеоднорідностей та їх взаємодії залучено метод граничних елементів. Натомість у праці [262] напружений стан у нанокompозиті з включеннями сферичної форми пропонується описувати з допомогою побудованого авторами тензора концентрації напружень спільно з вже класичним тензором Ешелбі.

Д. Штейманн та Р. Огден узагальнили мембранну модель матеріалізованої поверхні Гуртіна-Мердока-Підстригача-Повстенка на випадок опору цієї поверхні на згин [460]. Для такої моделі у замкнутій формі побудовані рівняння Юнга-Лапласа деформативності поверхні сферичної форми у тривимірній постановці [490] та кругової – у двовимірній [377]. У роботі [405] Л.В. Назаренко зі співавторами досліджено напружений стан короткого циліндричного включення на базі моделі матеріалізованої міжфазної поверхні Штеймана-Огдена методом енергетичного еквівалентного включення, де включення разом з матеріалізованою поверхнею замінено ідеально сконтактованим з матрицею включенням.

Інженерні методи розрахунку елементів конструкцій, вироблених з композитних матеріалів, ґрунтуються переважно на припущенні їх лінійно-пружної поведінки та макроскопічної однорідності, що враховує властивості фаз гетерогенного середовища та їх контактну взаємодію [61]. Вперше ідею опису властивостей композитних тіл усередненими характеристиками подав Максвелл [368], увівши поняття ефективної електропровідності. Наслідуючи його, Фойхт [472], а пізніше Рейсс [431] отримали аналітичні вирази для ефективних модулів пружності за припущення, що включення наповнювача композиту достатньо далеко розташовані один від одного і не взаємодіють.

3. Хашім та С. Штрікман [298] запропонували варіаційний підхід до ана-

лізу ефективних модулів мультифазного композиту з оцінкою верхньої та нижньої їх межі, що не залежить від геометрії наповнювача.

Подальший розвиток аналітичних підходів до аналізу ефективних пружних властивостей зернистих композитів був пов'язаний з розглядом наповнювачів канонічної форми. Для побудови більш складних гомогенізаційних моделей Хілл [300] запропонував розглядати певний репрезентативний об'ємний елемент (РОЕ) композиту, що містить одне або декілька включень, співвідношення об'ємної частки яких до матричного матеріалу таке ж як і у композиті загалом. Ним також була запропонована модель самоузгодження [301], яка дала можливість поширити отримані результати, зокрема на випадок еліпсоїдальних включень.

Вплив взаємодії сферичних включень за їх близького розташування на ефективні модулі пружності зернистого композиту досліджувався у роботі [238], що дало можливість розв'язувати задачі гомогенізації для більших об'ємних часток наповнювача. Однією з найефективніших моделей, що дозволяє неявно врахування взаємодії ідеально сконтакттованих з матрицею включень при обчисленні ефективних модулів пружності, є модель Морі-Танаки [379]. З використанням цієї моделі М. Качановим [313] та Г. Венгом [497] зі співавторами обчислено ефективні модулі пружності пористого матеріалу з врахуванням взаємодії порожнин.

Я. Бенвеністе запропонував концепцію «зовнішнього спостерігача» [210], згідно з якою умовою визначення ефективних модулів пружності композиту є рівність деформації РОЕ на його межі для гомогенізованого середовища та для його гетерогенного варіанту. Таким чином, шляхом задання трансформації постійних деформацій на межі РОЕ можна реалізувати різні моделі гомогенізації композитних структур, зокрема і з неідеальним контактом їх фаз. Так прирівнявши постійні деформації на межі РОЕ до усереднених по матричній фазі, Я. Бенвеністе вдалося реалізувати модель Морі-Танаки [211]. Пізніше у співавторстві з Т. Ченом, Г. Двораком вдалося застосувати цей під-

хід до композитних структур як з односпрямованими, так і хаотично орієнтованими волокнами [240]. Існує чимало робіт з поширення цього підходу на ширший клас двовимірних задач, наприклад, в роботі [354] його узагальнено на отримання ефективних характеристик магнітоелектропружних композитів із тунельними вкладеними одне в одного включеннями, а у роботі [505] – на функціонально градієнтні середовища. Тривимірна задача про макроповедінку середовищ з вкладеними один в одного еліпсоїдальними включеннями довільної орієнтації розв’язана методом Морі-Танаки в роботі [302]. Ефективна податливість анізотропних середовищ, послаблених взаємодіючими тріщинами, досліджувалася в роботі М. Ву [484]. Вплив відшарування включень на ефективні модулі композитів досліджувався в роботі [496].

Н. Shodja поширив концепцію еквівалентного включення на гомогенізацію середовищ з взаємодіючими періодично структурованими неоднорідностями еліпсоїдальної форми на мікро- [450] та нанорівні [448].

Слід відзначити експериментальну роботу Т. Річарда [432], яка стала еталоном верифікації моделей гомогенізації композитів з включеннями канонічної форми.

Одна з перших робіт з дослідження макроповедінки волокнистих композитів виконана Л.П. Хорошуном [324]. Аналітичні підходи до аналізу глобальних властивостей волокнистих композитів можна розділити на дві групи: моделювання коротких волокон як витягнутих сплюснених еліпсоїдів із залученням розв’язку Ешелбі [73, 303] та представлення волокон як безмежних вздовж осі циліндрів [242], в тому числі і з урахуванням розмірних ефектів на нанорівні [239, 375]. В рамках обох підходів відомі роботи із залученням методу граничних елементів до визначення деформаційних характеристик РОЕ з еліпсоїдальним включенням [413] та для тунельних циліндричних нановолокон [268]. У роботі Й. Гуанга запропоновано спосіб визначення ефективних модулів пружності композиту з довільно орієнтованими включеннями через усереднення по кутах Ейлера ефективних модулів пружності впорядкованих

композитних структур і отримано прості замкнуті залежності у випадку осьо-
вої симетрії включень [303].

Г.Т. Сулим та Я.М. Пастернак запропонували метод визначення двовимі-
рних ефективних модулів пружності композиту з впорядкованим розташуван-
ням викривлених та гіллястих включень через розв'язки інтегральних рівнянь
для подвійно періодичних задач їх взаємодії [461]. Задачі визначення макро-
характеристик структур з періодичним розташуванням включень у роботі
[408] запропоновано зводити до безмежних рядів, які залежать виключно від
форми включень. В.В. Михаськівим та співавторами вперше розроблено ме-
тодику визначення ефективних динамічних параметрів композиту з випад-
ково розподіленими тонкими жорсткими включеннями на основі граничне-
лементного аналізу [387].

У випадку неідеального міжфазного контакту процес визначення ефекти-
вних модулів пружності ускладнюється наявністю стрибків переміщень або
напружень при наближенні до інтерфейсу з боку включення та матриці. Для
включень еліпсоїдної форми цю проблему вирішив Ч. Жанг [481]. Вперше для
нанопористого середовища ефективні модулі пружності отримані в роботі
[447] з врахуванням ефекту розмірозалежності для сферичної та циліндричної
форми порожнин. Х. Дуаном та співавторами до обчислення ефективних мо-
дулів нанокомпозитів залучено метод Морі-Танаки та схему самоузгодження
[261, 266].

Л.В. Назаренко та співавтори відмовилися від схеми визначення локаль-
ного напруженого стану у включенні з подальшим його усередненням в гомо-
генізаційних моделях, а запропонували стохастичне усереднення застосову-
вати до інтегрального формулювання відповідної задачі, побудованого з ви-
користанням концепції енергетично еквівалентного включення та методу
умовних моментів з отриманням безмежної системи алгебраїчних рівнянь.
Цей підхід було реалізовано для нанопористого матеріалу (нанопористий
алюміній [397] та нанопористе золото [396]), стохастично розподілених на-

новключень в пружному просторі з врахуванням матеріалізації міжфазних поверхонь за моделлю Гуртіна-Мердока-Підстригача-Повстенка для їх сферичної форми [395] та для впорядковано [400] та хаотично [404] орієнтованих коротких циліндричних волокон. Для сферичної форми нанонеоднорідностей розв'язки представлено у замкнутій формі. Ефективні характеристики композиту з пружинною моделлю тонкого міжфазного шару базовані на точному розв'язку Лур'є для сфери, отримані у замкнутій формі у роботі [398] та поширені методом еквівалентного ідеально зконтактowanego з матрицею включення на випадки однонаправлених [401] та довільно орієнтованих [402] скінчених циліндричних волокон. У статті [399] цей же підхід було узагальнено на випадок матеріалізованих міжфазних поверхонь сферичної форми. Ефективні коефіцієнти теплопровідності нанокомпозиту зі сферичними [403] та еліпсоїдальними [394] наповнювачами досліджувалися Л.В. Назаренко, Л.П. Хорошунюм та ін. Ефективні модулі пружності нанокомпозитів на основі узагальненої оболонкової моделі Штеймана-Огдена міжфазної поверхні розраховані у статті [406].

Ефективні модулі середовищ з наносферичними включеннями із декількома неоднорідностями в одному репрезентативному елементі обчислив В.І. Куш зі співавторами [344]. У роботі [347] розглянуто ефективні модулі нанопористого середовища з сфероїдальними порами з врахуванням поверхневих напружень за різної схеми їх розташування в матричному середовищі залежно від розміру та об'ємної частки з використанням гомогенізаційної схеми Максвелла.

Ідея прямого застосування числових методів до визначення ефективних характеристик композитних середовищ полягає у створенні суперелемента, деформативність якого визначена аналітичними співвідношеннями (у випадку простих форм включень) або числово з подальшою апроксимацією об'єму композитного тіла із сотнями або тисячами включень суцільною сіткою таких суперелементів різного розміру та граничноелементним або скінченоелементним аналізом множинної взаємодії масиву неоднорідностей. Перевага такого

підходу полягає у можливості моделювання композитів з нерівномірним і неперіодичним розташуванням включень. Однак, трудомісткість таких процедур вимагає значних обчислювальних ресурсів та складних заходів для недопущення накопичення похибки в процесі розрахунку. Такий підхід було реалізовано методом скінчених елементів для розв'язування двовимірних задач про взаємодію абсолютно жорстких [493] та пружних [494] тунельних круглих включень різного розміру, а також методом граничних елементів у двовимірних задачах з тунельними включеннями [256] та у тривимірних задачах розрахунку волокнистих композитів армованих вуглецевими нанотрубками методом граничних елементів [202].

У роботах М.Ф. Селіванова [315, 440] запропоновано метод прогнозування ефективних релаксаційних властивостей двокомпонентного композитного матеріалу в залежності від часу, об'ємної частки і типу армування з використанням перетворень Лапласа та дробової раціональної апроксимації релаксаційних функцій. У монографії [295] Я.О. Жука та М. Хашемі досліджується вплив нановолокон на загальну ефективну непружну реакцію нанокомпозитного матеріалу на полімерній основі.

Огляд методів гомогенізації гетерогенних та тріщинуватих середовищ зроблено В. Буряченком [231] та М. Качановим [311], відповідно.

Аналіз літературних джерел свідчить про відсутність системного, базованого на граничноелементній симуляції, числового дослідження тривимірних пружних полів у композитних тілах з взаємодіючими включеннями неканонічної форми, урахуванням різнотипних контактних недосконалостей, нанорівневих матеріалізованих міжфазних поверхонь, а також внутрішніх тріщинних дефектів. Поза увагою дослідників залишилась також розробка схем із залучення граничноелементних розв'язків до визначення ефективних властивостей композитних середовищ з розподіленими неканонічними, зокрема нанорозмірними, включеннями. Результати даної роботи спрямовані на заповнення цієї важливої для розуміння механіки композитів наукової прогалини.

РОЗДІЛ 2

ГРАНИЧНО-ІНТЕРАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ З ВКЛЮЧЕННЯМ ДОВІЛЬНОЇ ГЛАДКОЇ ФОРМИ У БЕЗМЕЖНІЙ ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ

У розділі викладена загальна схема виведення, регуляризації та граничноелементної дискретизації інтегральних рівнянь тривимірних задач пружної рівноваги безмежної матриці з об'ємистим включенням загальної форми. Побудовано моделі напружено-деформованого стану об'ємистих неоднорідностей неklasичної форми у пружній матриці за умови ідеального контакту на міжфазній поверхні. На основі фундаментальних розв'язків отримано інтегральні подання компонент вектора переміщень та тензора напружень у матриці та об'ємному включенні через межові значення зусиль та зміщень. З використанням двох видів граничноелементних сіток – ізо- та суперпараметричних – числово досліджено механізми передачі навантажень у композитних системах з включенням у формі скінченного прямо-лінійного та викривленого циліндричного волокон.

Матеріали розділу викладені в працях [85, 164, 371].

2.1. Математична постановка задач теорії пружності для тіл з об'ємними пружними включеннями неканонічної форми

Розглянемо пружне ізотропне безмежне тіло (матрицю) з механічними пружними характеристиками G_1 (модулем зсуву) та ν_1 (коефіцієнтом Пуассона). Нехай матриця містить тривимірне пружне ізотропне включення Ω_2 довільної форми, обмежене гладкою поверхнею S із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ (рис. 2.1). Модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона включення позначимо відповідно G_2 та ν_2 . Надалі всі величини, що відносяться до матриці,

будемо позначати верхнім індексом "1", а до включення - індексом "2" в круглих дужках. До такого композитного тіла прикладене статичне навантаження, яке задається викликаними ним відомими полями переміщень та напружень $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\{\sigma^0(\mathbf{x})\}$ в однорідному безмежному середовищі з механічними характеристиками матриці, що пов'язані між собою законом Гука.

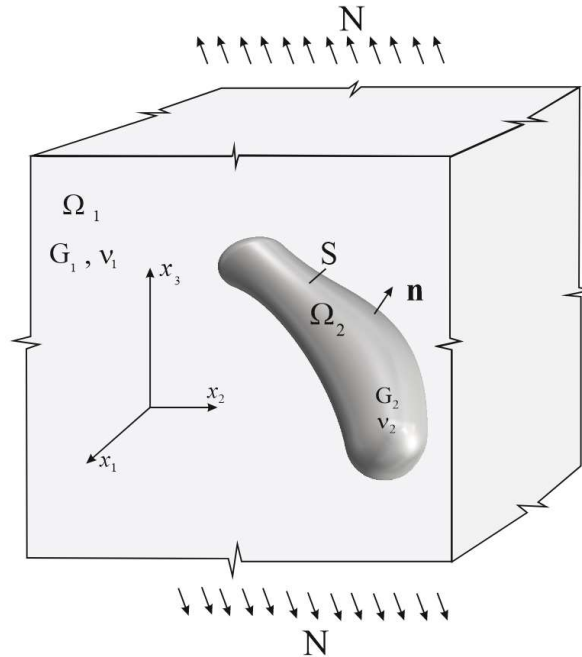


Рис. 2.1. Схема тривимірної задачі про пружну рівновагу об'ємного включення в безмежному середовищі під дією статичного навантаження.

Вважаємо, що між матрицею і включенням існує ідеальний механічний контакт, тобто забезпечено неперервність напружень і переміщень при переході через міжфазну поверхню:

$$\mathbf{u}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{u}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}), \quad \mathbf{t}_n^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{t}_n^{(2)}(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} \in S, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{u}^{(k)}(\boldsymbol{\eta})$ ($k=1,2$) – переміщення у матриці та включенні відповідно;

$\mathbf{t}_n^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{n} \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)} + 2G_k \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial \mathbf{n}} + G_k \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}^{(k)}), (k=1,2)$ – вектори напру-

жень на площинці з нормаллю $\mathbf{n}$, що відповідають переміщенням $\mathbf{u}^{(k)}$, які (за умови відсутності об'ємних сил) задовольняють рівнянням рівноваги Нав'є-Коші

$$\frac{1}{1-2\nu_k} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad k=1,2, \quad (2.2)$$

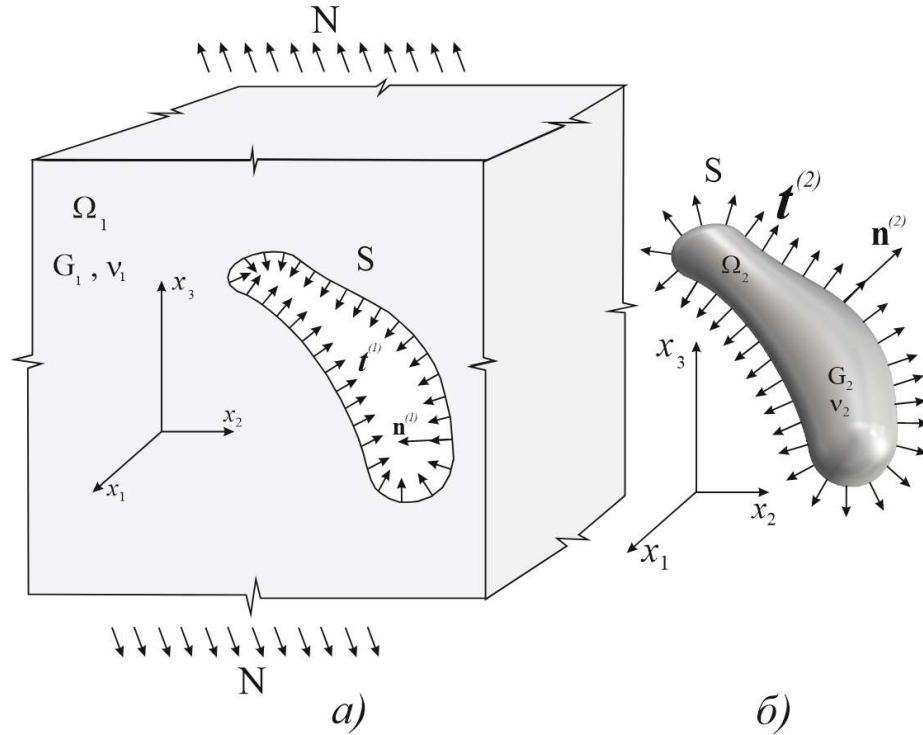


Рис. 2.2. Метод підобластей для задач про пружну рівновагу кусково-однорідних тіл.

Для розв'язування поставленої задачі розглядається рівновага кусково-однорідного тіла окремо для кожної його компоненти (рис. 2.2). При цьому дію іншої компоненти замінюємо розподіленими поверхневими силами $\mathbf{t}^{(k)}$ ($k=1,2$).

В такому випадку інтегральне подання Сомільяно компонент вектора переміщень в точках включення і матриці за вибору зовнішньої щодо включення нормалі буде мати вигляд [206]:

$$u_i^{(k)}(\mathbf{x}) = (-1)^k \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} - \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} \right] + u_{0i}(\mathbf{x}) \delta_{1k},$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_k, k=1,2, i=\overline{1,3}, \quad (2.3)$$

У виразах (2.3) $U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ і $T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ – відомі фундаментальні розв'язки

$$\begin{aligned}
U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{16\pi G_k (1-\nu_k)} \left[(3-4\nu_k) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} + \frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^3} \right]; \\
T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu_k)|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^2} \left\{ \left((1-2\nu_k)\delta_{ij} + 3 \frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^2} \right) \sum_{m=1}^3 \frac{(x_m-\eta_m)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} \times \right. \\
&\quad \left. \times n_m^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) - (1-2\nu_k) \left(\frac{(x_i-\eta_i)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} n_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{(x_j-\eta_j)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} n_i^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) \right) \right\}; \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

де δ_{ij} - символ Кронекера; $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|$ - відстань між точками $\mathbf{x}$ і $\boldsymbol{\eta} \in S$; $n_i^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = -n_i^{(1)}(\boldsymbol{\eta})$ - компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні включення S в точці $\boldsymbol{\eta}$.

Граничні значення потенціалів (2.4) за підходу до міжфазній поверхні є такими [206]:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow S \\ \mathbf{x} \in \Omega_k}} \iint_S U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \iint_S U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}}; \\
\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow S \\ \mathbf{x} \in \Omega_k}} \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= -\frac{1}{2} u_j^{(k)}(\mathbf{x}) + \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Здійснюючи граничний перехід до поверхні S у поданнях (2.3) з урахуванням залежностей (2.5) та беручи до уваги умови ідеального контакту (2.1), приходимо до системи шести скалярних граничних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно компонент векторів зусиль $t_{nj}(\mathbf{x}) = (-1)^k \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow S \\ \mathbf{x} \in \Omega_k}} t_{nj}^{(k)}(\mathbf{x})$ і переміщень

$u_j(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow S \\ \mathbf{x} \in \Omega_k}} u_j^{(k)}(\mathbf{x})$, $k = 1, 2$, $j = \overline{1,3}$ в точках міжфазної поверхні розділу ма-

триці і включення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= u_{0i}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S \\ \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= 0, i = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тут враховано, що при зміні напрямку нормалі на протилежний $n_i(\boldsymbol{\eta}) = n_i^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = -n_i^{(1)}(\boldsymbol{\eta})$ в задачі пружної рівноваги матриці (рис. 2.2 а) знак функції $T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ також змінюється.

Зауважимо, що у рівняннях (2.6) сингулярність інтегралів з ядрами $T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ на одиницю вища, ніж у інтегралів з ядрами $U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$. Тому перед процедурою дискретизації доцільно їх попередньо звести до слабосингулярної форми за схемою:

$$\begin{aligned} \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= u_j(\mathbf{x}) \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} + \iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}}, \\ k &= 1, 2, \mathbf{x} \in S, i, j = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

З урахуванням рівняння (2.7) та беручи до уваги гранично-інтегральне формулювання для тіла як жорсткого цілого [206], звідки

$$\iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad k = 1, 2, \text{ система ГІР (2.6) набуде вигляду:}$$

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}} + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= u_{0i}(\mathbf{x}), \\ \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}} - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= 0, \\ \mathbf{x} \in S, i &= \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Задачі рівноваги порожнини в безмежному пружному середовищі є частковим випадком і їх гранично-інтегральне формулювання отримується з перших трьох рівнянь системи ГІР (2.8) шляхом спрямування $G_2 \rightarrow 0$.

Тоді задача про порожнину в безмежному пружному тілі зводиться до системи трьох скалярних інтегральних рівнянь:

$$u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_i(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}} = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2.9)$$

відносно компонент вектора міжфазних переміщень на поверхні S .

Система рівнянь (2.8) значно спрощується у частковому випадку рівності коефіцієнтів Пуассона включення та матриці $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Тоді $G_1 U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \equiv G_2 U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$; $T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \equiv T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$. Помноживши останніх три рівняння системи (2.8) на G_2/G_1 та додавши до перших трьох рівнянь системи (2.8), отримаємо лише три скалярні інтегральні рівняння відносно компонент вектора міжфазних переміщень як

$$u_i(\mathbf{x}) + \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_i(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\eta}} = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2.10)$$

що суттєво економить машинні ресурси при числовому розв'язуванні задачі теорії пружності для двокомпонентного матричного композиту.

Інтегральні подання переміщень (2.3) в композиті можна використати для інтегральних подань напружень шляхом диференціювання та підстановки результатів у співвідношення закону Гука. Як результат, матимемо

$$\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) \delta_{1k} + (-1)^k \sum_{m=1}^3 \left[\iint_S D_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{mn}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} - \iint_S L_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_m^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} \right],$$

$$\mathbf{x} \in \Omega^{(k)}, \quad k = 1, 2, \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (2.11)$$

Тут функції $D_{ijm}^{(k)}$ з порядком особливості $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^{-2}$ і функції $L_{ijm}^{(k)}$ з порядком особливості $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^{-3}$ є похідними фундаментальних розв'язків і мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 D_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu_k)|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left\{ (1-2\nu_k) \left(\frac{(x_i - \eta_i)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \delta_{jm} + \frac{(x_j - \eta_j)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \delta_{mi} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(x_k - \eta_k)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \delta_{ij} \right) + 3 \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_m - \eta_m)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^3} \right\}, \\
 L_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{G_k}{4\pi(1-\nu_k)|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^3} \left\{ 3 \sum_{r=1}^3 \frac{x_r - \eta_r}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} n_r(\boldsymbol{\eta}) \left[(1-2\nu_k) \delta_{ij} \frac{x_m - \eta_m}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \nu_k \left(\delta_{jk} \frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} + \delta_{im} \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \right) - 5 \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_m - \eta_m)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^3} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \left[\nu_k n_i(\boldsymbol{\eta}) \frac{(x_j - \eta_j)(x_m - \eta_m)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} + \nu_k n_j(\boldsymbol{\eta}) \frac{(x_i - \eta_i)(x_m - \eta_m)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} + (1-2\nu_k) n_m(\boldsymbol{\eta}) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \right] + (1-2\nu_k) [\delta_{jm} n_i(\boldsymbol{\eta}) + \delta_{im} n_j(\boldsymbol{\eta})] - (1-4\nu_k) \delta_{ij} n_m(\boldsymbol{\eta}) \right\}, \\
 k &= 1, 2, \quad i, j, m = \overline{1, 3}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Отже, вихідна задача зводиться до розв'язання систем слабосингулярних граничних інтегральних рівнянь (2.8) стосовно шести скалярних невідомих, а саме компонент міжфазних переміщень і зусиль.

2.2. Загальна схема методу граничних елементів дискретизації граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу

Для числового розв'язування системи ГІР (2.8) міжфазну поверхню S за-

мінюємо неперервною сіткою чотирикутних та трикутних криволінійних граничних елементів S^q ($q = \overline{1, L_1}$) (рис. 2.3). Для передачі топології граничного елемента виберемо варіант квадратичної апроксимації поверхні S . Таким чином, для чотирикутного криволінійного граничного елемента задамо вісім, а для трикутного – шість вузлів, розташованих у вершинах елементів та посередині їх сторін. Для зручності побудови числових алгоритмів будемо

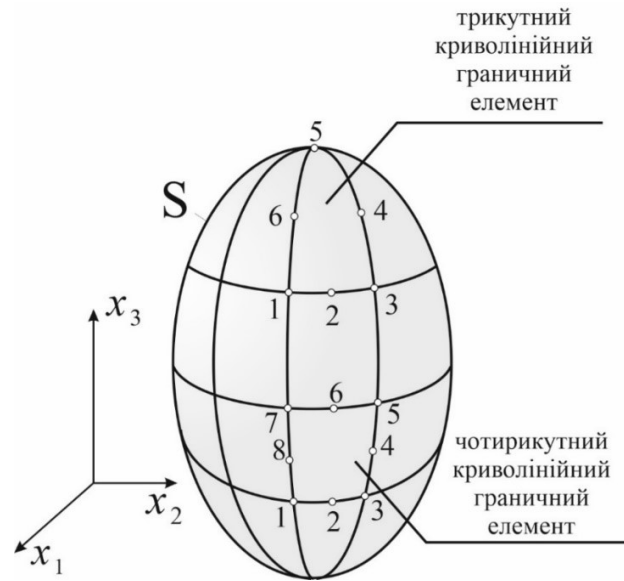


Рис. 2.3. Схема покриття міжфазної поверхні сіткою граничних елементів.

вважати, що трикутні криволінійні граничні елементи є виродженими чотирикутними елементами за умови співпадіння 1, 7 та 8 вузла. Позначимо через N_q ($q = \overline{1, L_1}$) кількість кутів граничного елемента S_q : $N_q = 3$ якщо q -тий граничний елемент є трикутним та $N_q = 4$ якщо q -тий граничний елемент є чотирикутним.

Таким чином, інтеграли по міжфазній поверхні S в системі ГІР (2.8) або її часткових випадках (2.9) – (2.10) замінимо на суму інтегралів по граничних елементах S_q , ($q = \overline{1, L_1}$):

$$\iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{q=1}^{L_1} \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}};$$

$$\iint_S T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{q=1}^{L_1} \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}};$$

$$\iint_S U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{q=1}^{L_1} \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}}, \quad k=1,2, \quad i, j=\overline{1,3}. \quad (2.13)$$

Виберемо глобальну систему координат прив'язану до центра включення. Тоді декартові координати довільної точки $\boldsymbol{\eta}$ на поверхні граничного елемента S^q параметрично можна виразити через координати його вузлів $\mathbf{x}_m^{(q)}$ ($m=\overline{1,2N_q}$ – локальний номер вузла у граничному елементі) з допомогою наступних залежностей:

$$\eta_i \Big|_{S_q} = \sum_{m=1}^{2N_q} x_{im}^{(q)} R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2), \quad i=\overline{1,3}, \quad (2.14)$$

де $R_n^{\langle 4 \rangle}(\xi_1, \xi_2)$, ($m=\overline{1,8}$) – функції форми чотирикутного граничного елемента, задані в квадратній області $\{-1 \leq \xi_1 \leq 1; -1 \leq \xi_2 \leq 1\}$ (рис. 2.4) локальних координат (див. Додаток А.1); $R_n^{\langle 3 \rangle}(\xi_1, \xi_2)$, ($m=\overline{1,6}$) – функції форми трикутного граничного елемента, задані в трикутній області $\{-1 < \xi_1 < 1; 0 < \xi_2 < \sqrt{3}\}$ (рис. 2.5) локальних координат (див. Додаток А.2).

Глобальні координати дотичних взаємно перпендикулярних векторів до поверхні криволінійного елемента мають вигляд:

$$h_i^{(q)}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{S_q} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_1} \Big|_{S_q} = \sum_{m=1}^{2N_q} x_{im}^{(q)} \frac{\partial R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1};$$

$$k_i^{(q)}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{S_q} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_2} \Big|_{S_q} = \sum_{m=1}^{2N_q} x_{im}^{(q)} \frac{\partial R_m^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}, \quad (2.15)$$

де похідні від функцій форми подані в Додатку А.3 для чотирикутного граничного елемента та в Додатку А.4 для трикутного граничного елемента.

Вектор нормалі до поверхні граничного елемента $\mathbf{n}^{(q)}(\xi) = \mathbf{k}^{(q)}(\xi) \times \mathbf{h}^{(q)}(\xi)$ є векторним добутком одиничних дотичних векторів. Таким чином, якобіан перетворення від глобальної до локальної системи координат має вигляд:

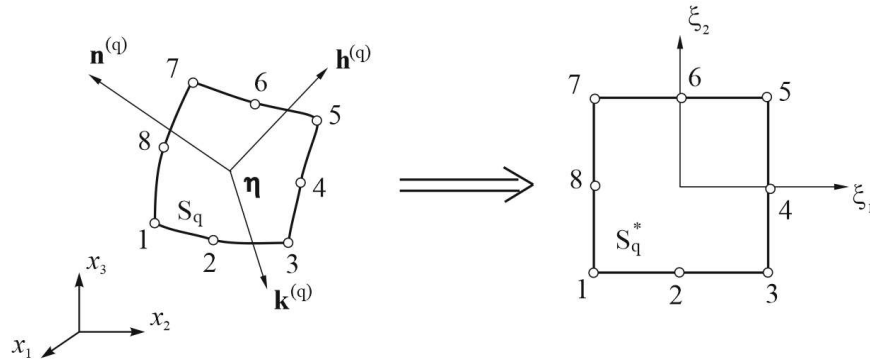


Рис. 2.4. Конформне відображення криволінійної поверхні чотирикутного граничного елемента на одиничний квадрат за допомогою функцій форми.

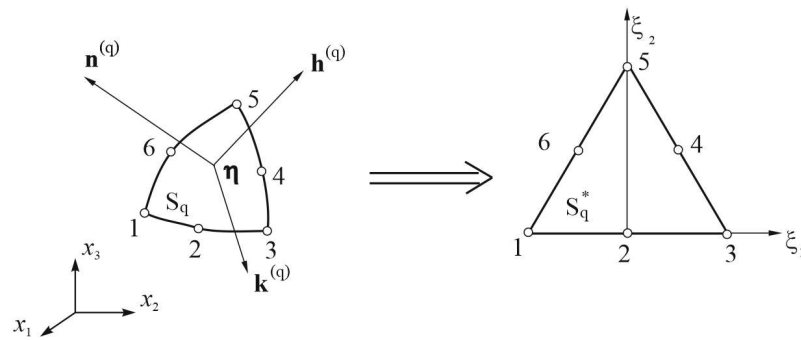


Рис. 2.5. Конформне відображення криволінійної поверхні трикутного граничного елемента на правильний трикутник за допомогою функцій форми.

$$J^{(q)}(\xi_1; \xi_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(n_i^{(q)}(\xi_1, \xi_2) \right)^2}. \quad (2.16)$$

Враховуючи це, в інтегралах (2.13) перейдемо до інтегрування по локальних координатах. Для чотирикутного граничного елемента отримаємо:

$$\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2; \\
\iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \quad k=1,2, \\
i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S_q, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

У випадку трикутного граничного елемента інтеграли (2.13) в локальній системі координат будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2; \\
\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2; \\
\iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \quad k=1,2, \\
i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S_q, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2.1. Застосування сітки із суперпараметричних граничних елементів

Розглянемо випадок, коли невідомі функції системи ГІР (2.8) або її часткових випадків (2.9) – (2.10) в довільній точці криволінійного елемента S_q виражаються через їх значення в кутових (непарних) вузлах цього елемента, які надалі називатимемо опорними вузлами [501]:

$$u_j^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{S_q} = \sum_{m=1}^{N_q} u_{j,2m-1}^{(q)} M_m^{(N_q)}(\xi_1, \xi_2); \quad t_{nj}^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \Big|_{S_q} = \sum_{m=1}^{N_q} t_{nj,2m-1}^{(q)} M_m^{(N_q)}(\xi_1, \xi_2), \tag{2.19}$$

де $M_m^{(4)}(\xi_1, \xi_2)$, $(m = \overline{1,4})$ – апроксимаційні функції чотирикутного граничного

елемента (див. Додаток А.5); $M_m^{(3)}(\xi_1, \xi_2)$, $(m = \overline{1,3})$ – апроксимаційні функції трикутного граничного елемента (див. Додаток А.6).

Отже, апроксимація топології міжфазної поверхні має порядок на одиницю більший ніж апроксимація значень шуканих функцій. Такий спосіб дискретизації прийнято називати суперпараметричним [501].

У випадку коли точка $\mathbf{x}$ не є опорним вузлом розглядуваного граничного елемента S_q , інтеграли (2.17) і (2.18) є регулярними і можуть бути обчислені з допомогою формули Гауса-Лежандра:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(\xi_1; \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n f(\xi_1^l; \xi_2^p) w_l w_p, \quad (2.20)$$

де вагові функції w_i і координати вузлових точок інтегрування ξ_j^i можна взяти з таблиці [206] в залежності від області інтегрування. Наприклад, якщо в формулі (2.20) вибрати другий порядок квадратур ($n = 2$), то для квадратної області S_q^* отримаємо: $\xi_j^i = \pm 0,57735$ ($i, j = 1, 2$); $w_i = 1$, а для трикутної області S_q^* – $\xi_1^1 = 0$; $\xi_2^1 = 0$; $w_1 = \sqrt{3}/3$; $\xi_1^2 = \sqrt{3}/2$; $\xi_2^2 = \sqrt{3}/2$; $w_2 = \sqrt{3}/3$; $\xi_1^3 = -\sqrt{3}/2$; $\xi_2^3 = \sqrt{3}/2$; $w_3 = \sqrt{3}/3$.

Таким чином, з врахуванням (2.14), (2.19), (2.20) інтеграли (2.17) і (2.18) остаточно можна подати у вигляді: для чотирикутного граничного елемента

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 &= \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) \times \\ &\times J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) \left[\sum_{s=1}^4 u_{j, 2s-1}^{(q)} M_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right] J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \\ &= \sum_{s=1}^4 u_{j, 2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) M_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \\
& = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p), \\
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) \left[\sum_{s=1}^4 t_{nj, 2s-1}^{(q)} M_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right] J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \\
& = \sum_{s=1}^4 t_{nj, 2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) M_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) \right], \quad k=1, 2, \\
& i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

для трикутного граничного елемента

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right) \left[\sum_{s=1}^3 u_{j, 2s-1}^{(q)} M_s^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right] J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \\
& = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{s=1}^3 u_{j, 2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right) M_s^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right], \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \\
& = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right) J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l), \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\times J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right) \left[\sum_{s=1}^3 t_{nj, 2s-1}^{(q)} M_s^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right] J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{s=1}^3 t_{nj, 2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right) M_s^{(3)}(\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \right], \quad k=1, 2, \\
i, j, r &= \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Якщо точка інтегрування $\mathbf{x}$ співпадає з одним із опорних вузлів граничного елемента, в інтегралах типу (2.17) та (2.18) виникає інтегровна сингулярність. У цьому випадку, перед застосуванням формули (2.20), необхідно провести процедуру числової регуляризації. З точки зору числової реалізації методу граничних елементів ефективною процедурою числової регуляризації є метод регуляризуючих відображень. Опишемо цей метод для чотирикутного і трикутного граничних елементів, припускаючи, що точка $\mathbf{x}$ співпадає з опорним вузлом під номером «1» (цього завжди можна досягти перенумерацією вузлів).

Нехай необхідно обчислити значення інтеграла типу (2.18) по трикутному граничному елементу S_q в опорному вузлі $\mathbf{x}_1^{(q)}$. Після відображення області S_q на правильний плоский трикутник S_q^* (рис. 2.5) сингулярність буде знаходитися в точці «1» з координатами $\xi_1 = -1$; $\xi_2 = 0$. З допомогою перетворення координат

$$\xi_1^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 - \gamma_1) + \frac{1}{4}(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \gamma_2)(1 + \gamma_1) \tag{2.23}$$

відобразимо область S_q^* на внутрішність квадрата $\tilde{S}_q^*$ ($-1 < \gamma_1 < 1$; $-1 < \gamma_2 < 1$) (рис. 2.6). При цьому сингулярний вузол «1» ($\xi_1 = -1$; $\xi_2 = 0$) відображається на сторону квадрата $\tilde{S}_q^*$ ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 \in [-1, 1]$). На рис. 2.6 показано, як перетворюються опорні вузли внаслідок цього відображення.

Якобіан відображення (2.23) рівний

$$K^{(0)}(\gamma_1; \gamma_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1^{(0)}}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \xi_1^{(0)}}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial \xi_2^{(0)}}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \xi_2^{(0)}}{\partial \gamma_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi_1^{(0)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(0)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(0)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(0)}}{\partial \gamma_1} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \gamma_1).$$

Таким чином, якобіан відображення перетворюється в нуль в тих точках області $\tilde{S}_q^*$, де має місце сингулярність першого порядку, а це означає, що сингулярний інтеграл в координатах $\xi_1; \xi_2$ перетворюється в регулярний інтеграл в координатах $\gamma_1; \gamma_2$ і його можна обчислити за формулою Гауса-Лежандра (2.20).

Враховуючи це, для інтегралів типу (2.18) отримаємо:

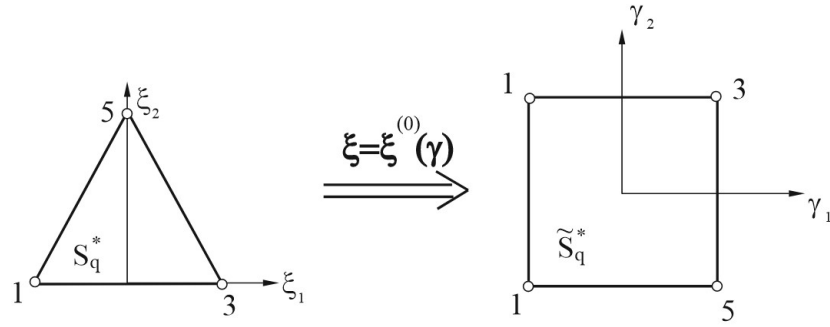


Рис. 2.6. Регуляризуюче неконформне афінне відображення образу трикутного граничного елемента на одиничний квадрат.

$$\begin{aligned} \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))\right) \left[\sum_{s=1}^3 u_{j,2s-1}^{(q)} M_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))\right] \times \\ &\times J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1 + \gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{s=1}^3 u_{j,2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))\right)\right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times M_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))(1 + \gamma_l) \Big], \\
& \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))(1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))(1 + \gamma_l), \\
& \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))(1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \left[\sum_{s=1}^3 t_{nj, 2s-1}^{(q)} M_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) \right] \times \\
& \times J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))(1 + \gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{s=1}^3 t_{nj, 2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) \right) \right] \times \\
& \times M_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))(1 + \gamma_l) \Big], \quad k=1, 2, \quad i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Далі розглянемо випадок чотирикутного граничного елемента S_q . Обчислимо значення інтеграла типу (2.17) в опорному вузлі $\mathbf{x}_1^{(q)}$. Після відображення області S_q на квадрат S_q^* (рис. 2.7) сингулярність буде знаходитися в точці «1» с координатами $\xi_1 = -1$; $\xi_2 = -1$. Розділимо квадратну область S_q^* по

діагоналі на дві трикутні області S'_q і S''_q , що містять сингулярний вузол «1» (рис. 2.7). Отримані трикутні області відобразимо на внутрішність квадратних областей $(-1 < \gamma_1 < 1; -1 < \gamma_2 < 1)$ з допомогою наступних перетворень координат:

а) для трикутної області S'_q :

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}(1-\gamma_1) + \frac{1}{4}(1-\gamma_2)(1+\gamma_1) + \frac{1}{4}(1+\gamma_2)(1+\gamma_1); \\ \xi_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}(1-\gamma_1) + \frac{1}{4}(1-\gamma_2)(1+\gamma_1) - \frac{1}{4}(1+\gamma_2)(1+\gamma_1),\end{aligned}\quad (2.25)$$

якобіан відображення (2.25) рівний

$$K^{(1)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \gamma_1} = -\frac{1}{2}(1+\gamma_1),$$

б) для трикутної області S''_q :

$$\begin{aligned}\xi_1^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1-\gamma_1) - \frac{1}{4}(1-\gamma_2)(1+\gamma_1) + \frac{1}{4}(1+\gamma_2)(1+\gamma_1); \\ \xi_2^{(2)} &= -\frac{1}{2}(1-\gamma_1) + \frac{1}{4}(1-\gamma_2)(1+\gamma_1) + \frac{1}{4}(1+\gamma_2)(1+\gamma_1),\end{aligned}\quad (2.26)$$

якобіан відображення (2.26) рівний

$$K^{(2)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \gamma_1} = -\frac{1}{2}(1+\gamma_1).$$

Сингулярний вузол «1» в обох випадках відображається на сторону квадрата $(\gamma_1 = -1; \gamma_2 \in [-1; 1])$. Таким чином, якобіани відображень компенсують

сингулярність першого порядку в опорному вузлі «1». Враховуючи це, для інтегралів типу (2.17) отримаємо:

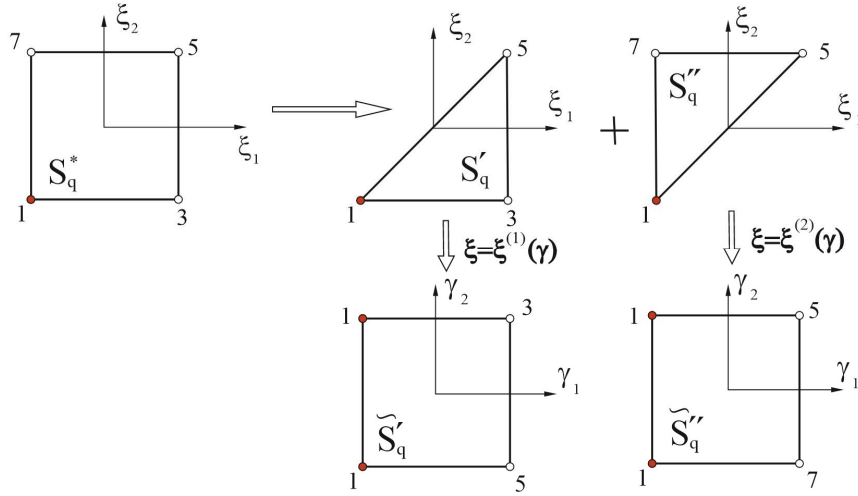


Рис. 2.7. Розділення образу чотирикутного граничного елемента на трикутники та їх регуляризуючі некомформні афінні відображення на одиничні квадрати.

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 = \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_1} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{\xi_1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}) \times \\
 &\times d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}))) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma})) \left(-\frac{1}{2}\right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\boldsymbol{\gamma}))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\boldsymbol{\gamma}))) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\boldsymbol{\gamma})) \left(-\frac{1}{2}\right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) - \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \left[\sum_{s=1}^4 u_{j, 2s-1}^{(q)} M_s^{(4)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right] \times \\
 &\times J^{(q)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{s=1}^4 u_{j,2s-1}^{(q)} M_s^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 u_{j,2s-1}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) M_s^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) M_s^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_1} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{\xi_1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_1} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{\xi_1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \left[\sum_{s=1}^4 t_{nj, 2s-1}^{(q)} M_s^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] \times \\
& \times J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \times \\
& \times \left[\sum_{s=1}^4 t_{nj, 2s-1}^{(q)} M_s^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 t_{nj, 2s-1}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) M_s^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) M_s^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) \right], \\
& k = 1, 2, \quad i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Задовольняючи рівняння системи (2.8) у опорних вузлах методом колокацій з урахуванням апроксимаційних формул (2.21), (2.22), (2.24), (2.27) та дискретизації (2.13), отримаємо $6 \times L_2$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& u_i^w + \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(1)w} u_j^w - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(1)qsw} u_j^{v(q, 2s-1)} - B_{ij}^{(1)qsw} t_{nj}^{v(q, 2s-1)} \right] = u_i^{(0)}(\mathbf{x}^w), \\
& - \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(2)w} u_j^w + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(2)qsw} u_j^{v(q, 2s-1)} - B_{ij}^{(2)qsw} t_{nj}^{v(q, 2s-1)} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad w = \overline{1, L_2}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

де L_2 – кількість опорних вузлів сітки граничних елементів; $\mathbf{x}^w$ ($w = \overline{1, L_2}$) – глобальні координати опорних вузлів; функція $v(q, 2s - 1)$, $i = \overline{1, 4}$ визначає глобальний номер опорного вузла по номеру граничного елемента, до якого він належить і локальному номеру опорного вузла всередині граничного елемента; $A_{ij}^{(k)qsw}$, $B_{ij}^{(k)qsw}$, $C_{ij}^{(k)w}$ – константи, що отримані шляхом сумування добутків значень фундаментальних розв’язків та функцій форми граничного елемента у колокаційних точках образів граничних елементів в рівняннях (2.21), (2.22), (2.24), (2.27) де точкою поля виступає w -й опорний вузол

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij}^{(k)qsw} \\ B_{ij}^{(k)qsw} \end{array} \right\} = \begin{cases} \text{для } w \neq v(q, 2s - 1), s = \overline{1, N_q} \\ \left(\sqrt{3} \right)^{N_q - 4} \sum_{l=1}^{N_q} \left\{ \begin{array}{l} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{array} \right\} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) M_s^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l); \\ \text{для } w = v(q, 2s - 1), s = \overline{1, N_q} \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q - 4} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{array} \right\} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times \\ \times M_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l), \end{cases}$$

$$C_{ij}^{(k)w} = \left(\sqrt{3} \right)^{N_q - 4} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w \neq v(q, 2s-1)}}^{L_1} \sum_{l=1}^{N_q} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q - 4} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w = v(q, 2s-1)}}^{L_1} \sum_{r=1}^{N_q-2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times$$

$$\times J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l), \quad k = 1, 2; w = \overline{1, L_2}; q = \overline{1, L_q}; s = \overline{1, N_q}. \quad (2.29)$$

Зауважимо, що кожний інтеграл системи рівнянь (2.8) при реалізації цієї схеми формує в загальній матриці блок розміром $L_2 \times L_2$. Елемент a_{ij} цього блоку є значенням інтеграла в i -тому опорному вузлі відносно значень невідомих функцій в j -тому опорному вузлі. Таким чином, на значення елемента

блоку a_{ij} впливає значення інтеграла в i -тому опорному вузлі по всіх граничних елементах, які прилягають до j -того опорного вузла. Якщо i -тий і j -тий опорні вузли не належать до одного граничного елемента, то інтеграли, що впливають на значення a_{ij} є регулярними і обчислюються по методиці (2.21) чи (2.22) в залежності від форми граничного елемента. В іншому випадку необхідно застосовувати методику (2.24) чи (2.27) числової регуляризації інтеграла.

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.28), знаходимо компоненти векторів міжфазних переміщень та зусиль в опорних вузлах сітки граничних елементів, що дає нам можливість обчислити компоненти тензорів напружень та вектора переміщень як у включенні, так і в матриці за формулами (2.11) та (2.3), відповідно. Однак, високий ступінь сингулярності ядер інтегралів (2.12) в точках області S не дозволяє з достатньою точністю визначати напруження вже на близькій відстані від міжфазної поверхні. З метою збільшення точності обчислень в цій зоні проведемо регуляризацію інтегралів в виразах (2.11), описану в роботі [206], що ґрунтується на теоремі Гауса про дивергенцію:

$$\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x})\delta_{1k} + (-1)^k \sum_{m=1}^3 \left[\iint_S D_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_{mn}^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} - \iint_S \hat{L}_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_m^{(k)}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} \right],$$

$$\mathbf{x} \in \Omega^{(k)}, \quad k=1,2, \quad i,j=\overline{1,3}, \quad (2.30)$$

$$\text{де } \hat{L}_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = -\frac{G_k}{8\pi(1-\nu_k)|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^2} \left\{ 4\nu_k \delta_{ij} \left(\frac{x_1-\eta_1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} D_{1m}^* + \frac{x_2-\eta_2}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} D_{2m}^* + \frac{x_3-\eta_3}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} \times \right. \right.$$

$$\times D_{1m}^* (1-2\nu_k) \left[\frac{x_i-\eta_i}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} D_{jm}^* + \frac{x_j-\eta_j}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} D_{im}^* - \frac{x_1-\eta_1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} \left[(\delta_{im} D_{j1}^* + \delta_{jm} D_{i1}^*) - \frac{x_2-\eta_2}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (\delta_{im} D_{j2}^* + \delta_{jm} D_{i2}^*) - \frac{x_3-\eta_3}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} (\delta_{im} D_{j3}^* + \delta_{jm} D_{i3}^*) \right] - 3 \frac{(x_m-\eta_m)(x_1-\eta_1)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^2} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{j1}^* + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{i1}^* \right) - 3 \frac{(x_m - \eta_m)(x_2 - \eta_2)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{j2}^* + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{i2}^* \right) - \\ & - 3 \frac{(x_m - \eta_m)(x_3 - \eta_3)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{j3}^* + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} D_{i3}^* \right) \Bigg\}, i, j, m = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (2.31)$$

де оператор $D_{ij}^* = \varepsilon_{ij3} \frac{\partial}{\partial \tau(\boldsymbol{\eta})}$; ε_{ijm} - одиничний асиметричний тензор. Переходячи до явного вигляду інтегральних ядер для чотирикутного граничного елемента, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_q} \hat{L}_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_m(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{c=1}^3 \iint_{S_q} \frac{1}{J_q(\boldsymbol{\xi})} \hat{L}_{ijmc}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \sum_{s=1}^4 u_{m,2s-1}^{(q)} d_c^{sq}(\xi_1, \xi_2) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \\ & = \sum_{c=1}^3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{L}_{ijmc}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})) \sum_{s=1}^4 u_{m,2s-1}^{(q)} d_c^{sq}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = \sum_{c=1}^3 \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \hat{L}_{ijmc}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{n=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_c^{(4)}(\xi_l; \xi_p) \right) \sum_{s=1}^4 u_{m,2s-1}^{(q)} d_c^{sq}(\xi_l, \xi_p) = \\ & = \sum_{c=1}^3 \sum_{s=1}^4 u_{m,2s-1}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \hat{L}_{ijmc}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{n=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_c^{(4)}(\xi_l; \xi_p) \right) d_c^{sq}(\xi_l, \xi_p) \right], \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} & \hat{L}_{ijmc}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = - \frac{G_k}{8\pi(1-\nu_k)|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left\{ 4\nu \delta_{ij} \left(\frac{x_1 - \eta_1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{1mc} + \frac{x_2 - \eta_2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{2mc} + \frac{x_3 - \eta_3}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{3mc} \right) + \right. \\ & + (1 - 2\nu_k) \left[\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{jmc} (\delta_{im} \varepsilon_{j2c} + \delta_{jm} \varepsilon_{i2c}) - \frac{x_3 - \eta_3}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} (\delta_{im} \varepsilon_{j3c} + \delta_{jm} \varepsilon_{i3c}) \right] - \\ & - 3 \frac{(x_m - \eta_m)(x_1 - \eta_1)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{j1c} + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{i1c} \right) - 3 \frac{(x_m - \eta_m)(x_2 - \eta_2)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \times \\ & \times \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{j2c} + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{i2c} \right) - 3 \frac{(x_m - \eta_m)(x_3 - \eta_3)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2} \left(\frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{j3c} + \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} \varepsilon_{i3c} \right) \Bigg\}; \end{aligned}$$

$$d_c^{sq}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{r=1}^4 \eta_c^{(q)(2r-1)} \left(\frac{\partial R_{2s-1}^{(4)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial R_{2r-1}^{(4)}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial R_{2r-1}^{(4)}}{\partial \xi_1} \frac{\partial R_{2s-1}^{(4)}}{\partial \xi_2} \right).$$

Проведена таким чином регуляризація дає можливість значного зближення при визначенні внутрішніх напружень до поверхні розділу матриці і включення.

2.2.2. Застосування сітки із ізопараметричних граничних елементів

Розглянемо випадок, коли невідомі функції системи ГІР (2.8) або її часткових випадків (2.9) – (2.10) в довільній точці криволінійного елемента S_q апроксимуються через їх значення у всіх вузлах елемента, тобто всі вузли в даному випадку будуть опорними. Тоді апроксимаційні функції невідомих величин співпадатимуть з функціями форми граничного елемента:

$$u_j^{(q)}(\boldsymbol{\eta})|_{S_q} = \sum_{m=1}^{2N_q} u_{j,m}^{(q)} R_m^{(N_q)}(\xi_1, \xi_2); \quad t_{nj}^{(q)}(\boldsymbol{\eta})|_{S_q} = \sum_{m=1}^{2N_q} t_{nj,m}^{(q)} R_m^{(N_q)}(\xi_1, \xi_2). \quad (2.32)$$

Отже, порядок апроксимації топології міжфазної поверхні та апроксимації значень шуканих міжфазних переміщень і зусиль співпадають. Такий спосіб дискретизації прийнято називати ізопараметричним [501].

Якщо точка $\mathbf{x}$ не є вузлом граничного елемента S_q , то обчислення регулярних інтегралів (2.17) і (2.18) по поверхні цього граничного елемента буде відбуватися наступним чином: для чотирикутного граничного елемента

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 &= \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) \times \\ &\times J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) \left[\sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right] J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \\ &= \sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l, \xi_p) \right) R_s^{(4)}(\xi_l, \xi_p) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi_l; \xi_p)) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l; \xi_p) \right) \left[\sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(4)}(\xi_l; \xi_p) \right] J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) = \\
& = \sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^8 x_{rm}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi_l; \xi_p) \right) R_s^{(4)}(\xi_l; \xi_p) J^{(q)}(\xi_l; \xi_p) \right], \quad k=1,2, \\
& i, j, r = \overline{1,3}, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

для трикутного граничного елемента

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right) \left[\sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right] J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \\
& = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^3 T_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right) R_s^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right], \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi_1^l; \xi_2^l)) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right) \left[\sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right] J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) = \\
& = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^3 U_{ij}^{(k)} \left(x_r, \sum_{m=1}^6 x_{rm}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right) R_s^{(3)}(\xi_1^l; \xi_2^l) J^{(q)}(\xi_1^l; \xi_2^l) \right], \quad k=1,2, \\
& i, j, r = \overline{1,3}, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Інтеграли типу $\iint_{S_q} T_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}}$ тут і надалі, де це не обумовлено окремо,

обчислюються аналогічно, як у виразах (2.21) та (2.22).

Якщо точка інтегрування $\mathbf{x}$ співпадає з одним із вузлів граничного елемента, то слабосингулярні інтеграли типу (2.17) та (2.18) потребують числової регуляризації. Методика цієї регуляризації залежить від того непарний чи парний вузол граничного елемента містить особливість.

Якщо особливість у непарному вузлі, то методика числової регуляризації схожа на викладену в п. 2.2.1. Для обчислення значення інтеграла типу (2.18) по трикутному граничному елементу S_q в опорному вузлі $\mathbf{x}_1^{(q)}$ застосуємо регуляризуюче відображення (2.23), після чого отримаємо:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))\right) \left[\sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))\right] \times \\
&\times J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1+\gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m))\right) \times \right. \\
&\quad \left. \times R_s^{(3)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1+\gamma_l)\right], \\
\iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \left[\sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(3)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right] \times \\
&\times J^{(q)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{1r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right) \times \right. \\
&\times R_s^{(3)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(0)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) \left. \right], \quad k=1,2, \quad i,j,r=\overline{1,3}, \quad q=\overline{1,L_1}. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Для обчислення інтеграла типу (2.17) по чотирикутному граничному елементу S_q в опорному вузлі $\mathbf{x}_1^{(q)}$ використаємо методику відображення області S_q на квадрат S_q^* (рис. 2.4), розділення квадратної області S_q^* по діагоналі (рис. 2.7) та застосування регуляризуючих відображень (2.25) та (2.26) отриманих трикутних підобластей. З врахуванням цього, для інтегралів типу (2.17) отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_q} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_1} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{\xi_1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) \times \\
&\times d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma)) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(1)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
&+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma)) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(2)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \left[\sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times J^{(q)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) \times \\
& \times\left[\sum_{s=1}^8 u_{j, s}^{(q)} R_s^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right] J^{(q)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)=-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^8 u_{j, s}^{(q)} \times \\
& \times\left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) R_s^{(4)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)+\right. \\
& \left.+\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) R_s^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)\right], \\
& \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}\right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) d S_{\boldsymbol{\eta}}=\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)\right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d \xi_1 d \xi_2= \\
& =\int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_1} U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)\right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d \xi_1 d \xi_2+\int_{-1}^1 \int_{\xi_1}^1 U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)\right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) \times \\
& \times d \xi_1 d \xi_2=\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(1)}(\gamma)\right)\right) t_{nj}\left(\boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(1)}(\gamma)\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(1)}(\gamma)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+\gamma_1\right) d \gamma_1 d \gamma_2+ \\
& +\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(2)}(\gamma)\right)\right) t_{nj}\left(\boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(2)}(\gamma)\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(2)}(\gamma)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+\gamma_1\right) d \gamma_1 d \gamma_2= \\
& =-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}\left(x_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) t_{nj}\left(\boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)- \\
& -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_1^{(q)}, \boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) t_{nj}\left(\boldsymbol{\eta}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) J^{(q)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)= \\
& =-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right)\left[\sum_{s=1}^8 t_{nj, s}^{(q)} R_s^{(4)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right] \times \\
& \times J^{(q)}\left(\xi^{(1)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)}\left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right) \times \\
& \times\left[\sum_{s=1}^8 t_{nj, s}^{(q)} R_s^{(4)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\right] J^{(q)}\left(\xi^{(2)}\left(\gamma_l; \gamma_p\right)\right)\left(1+\gamma_l\right)=-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^8 t_{nj, s}^{(q)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(1)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{1r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{1r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(2)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) \right] \\
& k = 1, 2, \quad i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Нехай необхідно обчислити значення інтеграла типу (2.18) по трикутному граничному елементу S_q в опорному вузлі $\mathbf{x}_2^{(q)}$. Після відображення області S_q на правильний плоский трикутник S_q^* (рис. 2.5) сингулярність буде знаходитися в точці «2» з координатами $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$. Розділимо квадратну область S_q^* по діагоналі на дві трикутні області S'_q і S''_q , що містять сингулярний вузол «2» (рис. 2.8). Отримані трикутні області відобразимо на внутрішність квадратних областей $(-1 < \gamma_1 < 1; -1 < \gamma_2 < 1)$ з допомогою наступних перетворень координат:

$$\xi_1^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \gamma_2)(1 + \gamma_1), \tag{2.37}$$

$$\xi_1^{(4)} = -\frac{1}{4}(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(4)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \gamma_2)(1 + \gamma_1). \tag{2.38}$$

При цьому сингулярний вузол «2» ($\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$) підобластей S'_q і S''_q відображається на сторону $(\gamma_1 = -1; \gamma_2 \in [-1; 1])$ квадратів $\widetilde{S}'_q$ та $\widetilde{S}''_q$ відповідно. На рис. 2.8 показано, як перетворюються кутові вузли внаслідок цих відображень.

Якобіани відображень (2.37) та (2.38) рівні відповідно

$$K^{(3)}(\gamma_1; \gamma_2) = -\frac{\sqrt{3}}{8}(1 + \gamma_1); \quad K^{(4)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\sqrt{3}}{8}(1 + \gamma_1).$$

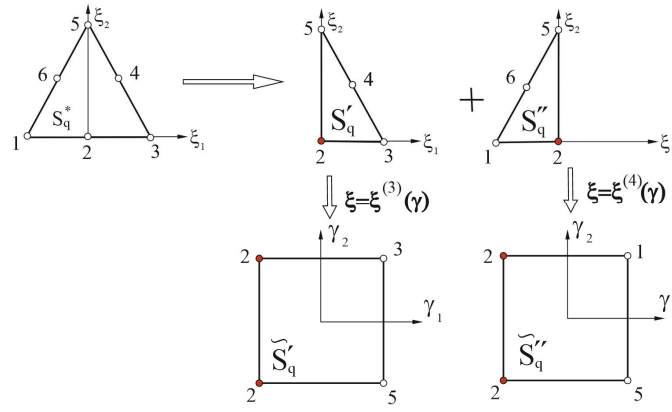


Рис. 2.8. Розділення образу трикутного граничного елемента на трикутники та їх регуляризуючі некомформні афінні відображення на одиничні квадрати.

Отже, якобіани відображень регуляризують шукані інтеграли, оскільки перетворюються в нуль в тих точках, де має місце сингулярність першого порядку.

Враховуючи це, для інтегралів типу (2.18) отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_0^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 + \\
 &+ \int_{-1}^0 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(4)}(\gamma)) \frac{\sqrt{3}}{8} (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) + \\
 &+ \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1+\gamma_l) = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p))\right) \left[\sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(3)}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m))\right] \times \\
 &\times J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1+\gamma_l) + \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}\left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p))\right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(3)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right] J^{(q)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{s=1}^6 u_{j,s}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right) R_s^{(3)} \left(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) - \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right) R_s^{(3)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) \right], \\
& \iint_{S_q} T_{ij}^k \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_0^1 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 + \int_{-1}^0 \int_0^{1-|\xi_1|} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) \times \\
& \times J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma)) \right) J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma)) \right) J^{(q)}(\xi^{(4)}(\gamma)) \frac{\sqrt{3}}{8} (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) = \\
& \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_0^1 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 + \\
& + \int_{-1}^0 \int_0^{1-|\xi_1|} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^*(\gamma)) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(3)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(3)}(\gamma)) \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma) \right) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma) \right) \right) J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma) \right) \frac{\sqrt{3}}{8} (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \left[\sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right] \times \\
& \times J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) + \frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \times \\
& \times \left[\sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right] J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sum_{s=1}^6 t_{nj,s}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right) R_s^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) - \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^6 x_{2r}^{(q)} R_m^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) \right) R_s^{(3)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) J^{(q)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(4)}(\gamma_l; \gamma_m) \right) (1 + \gamma_l) \right], \\
& k = 1, 2, \quad i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок чотирикутного граничного елемента S_q . Обчислимо значення інтеграла типу (2.17) у вузлі $\mathbf{x}_2^{(q)}$. Після відображення області S_q на квадрат S_q^* (рис. 2.4) сингулярність буде знаходитися в точці «2» з координатами $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = -1$. Розділимо квадратну область S_q^* на три трикутні області S'_q , S''_q та S'''_q , що містять сингулярний вузол «2» (рис. 2.9). Отримані трикутні області відобразимо на внутрішність квадратних областей $(-1 < \gamma_1 < 1; -1 < \gamma_2 < 1)$ з допомогою наступних перетворень координат:

а) для трикутної області S'_q :

$$\xi_1^{(5)} = -\frac{1}{2}(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(5)} = -\frac{1}{2}(1 - \gamma_1) + \frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1), \quad (2.40)$$

якобіан відображення (2.40) рівний

$$K^{(5)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\partial \xi_1^{(5)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(5)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(5)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(5)}}{\partial \gamma_1} = -\frac{1}{4}(1 + \gamma_1).$$

б) для трикутної області S_q''' :

$$\xi_1^{(6)} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(6)} = -\frac{1}{2}(1 - \gamma_1) + \frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1), \quad (2.41)$$

якобіан відображення (2.26) рівний

$$K^{(6)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\partial \xi_1^{(6)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(6)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(6)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(6)}}{\partial \gamma_1} = \frac{1}{4}(1 + \gamma_1).$$

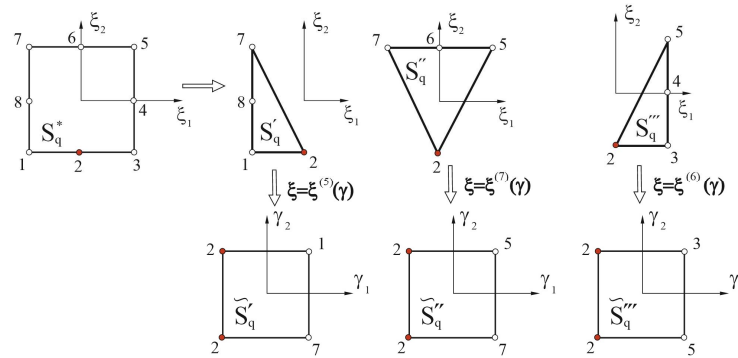


Рис. 2.9. Розділення образу чотирикутного граничного елемента на трикутники та їх регуляризуючі некомфорні афінні відображення на одиничні квадрати.

в) для трикутної області S_q'' :

$$\xi_1^{(7)} = -\frac{\gamma_2}{2}(1 + \gamma_1); \quad \xi_2^{(7)} = \gamma_1, \quad (2.42)$$

якобіан відображення (2.42) рівний

$$K^{(7)}(\gamma_1; \gamma_2) = \frac{\partial \xi_1^{(7)}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \xi_2^{(7)}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial \xi_1^{(7)}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \xi_2^{(7)}}{\partial \gamma_1} = -\frac{1}{2}(1 + \gamma_1).$$

Сингулярний вузол «2» для всіх трьох підобластей відображається на сторону квадрата $(\gamma_1 = -1; \gamma_2 \in [-1; 1])$. Таким чином, якобіани відображень компенсують сингулярність першого порядку у вузлі «2». Враховуючи це, для інтегралів типу (2.17) отримаємо:

$$\begin{aligned} \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) u_j(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-2\xi_1-1} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{-2|\xi_1|-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) \times \\ &\times J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^1 \int_{-1}^{2\xi_1-1} T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi)) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(5)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{4}\right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(7)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(6)}(\gamma)) \frac{1}{4} (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p))) u_j(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p))) J^{(q)}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) + \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \left[\sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(4)}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)\right) \times \\
& \times \left[\sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] (1+\gamma_l) + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \times \\
& \left[\sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) = -\frac{1}{4} \sum_{s=1}^8 u_{j,s}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^*(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) + \right. \\
& + 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) - \\
& \left. - \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) \right], \\
& \iint_{S_q} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-2\xi_1-1} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) \times \\
& \times d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{-2|\xi_1|-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^1 \int_{-1}^{2\xi_1-1} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
& = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^*(\gamma)) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma)\right) \left(-\frac{1}{4} \right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma)) \right) \times \\
& \times J^{(q)}\left(\xi^{(7)}(\gamma)\right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma)) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma)\right) \times \\
& \times \frac{1}{4} (1+\gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) + \\
& + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1+\gamma_l) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l), \\
&\quad \iint_{S_q} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta} \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-2\xi_1-1} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{-1}^1 \int_{-2|\xi_1|-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) \times \\
&\quad \times J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^1 \int_{-1}^{2\xi_1-1} U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi)) J^{(q)}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma)) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(5)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{4} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
&\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma)) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(7)}(\gamma)) \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 + \\
&\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma)) \right) t_{nj}(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma))) J^{(q)}(\xi^{(6)}(\gamma)) \frac{1}{4} (1 + \gamma_1) d\gamma_1 d\gamma_2 = \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}_2^{(q)}, \boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) t_{nj} \left(\boldsymbol{\eta}(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) (1 + \gamma_l) + \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \left[\sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1 + \gamma_l) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right) \times \\
& \times \left[\sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] (1 + \gamma_l) + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) \times \\
& \left[\sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} R_s^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right] J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1 + \gamma_l) = -\frac{1}{4} \sum_{s=1}^8 t_{nj,s}^{(q)} \times \\
& \times \left[\sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(5)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1 + \gamma_l) + \right. \\
& + 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(7)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1 + \gamma_l) - \\
& \left. - \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 U_{ij}^{(k)} \left(x_{2r}^{(q)}, \sum_{m=1}^8 x_{2r}^{(q)} R_m^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) \right) R_s^{(4)} \left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p) \right) J^{(q)}\left(\xi^{(6)}(\gamma_l; \gamma_p)\right)(1 + \gamma_l) \right], \\
& k = 1, 2, \quad i, j, r = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, L_1}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Враховуючи апроксимаційні формули (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.39) та (2.43), дискретизація системи ГР (2.8) методом колокацій дозволяє побудувати систему $6 \times L_2$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& u_i^w + \sum_{j=1}^3 C i_{ij}^{(1)w} u_j^w - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A i_{ij}^{(1)qsw} u_j^{v(q,s)} - B i_{ij}^{(1)qsw} t_{nj}^{v(q,s)} \right] = u_i^{(0)}(\mathbf{x}^w); \\
& - \sum_{j=1}^3 C i_{ij}^{(2)w} u_j^w + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A i_{ij}^{(2)qsw} u_j^{v(q,s)} - B i_{ij}^{(2)qsw} t_{nj}^{v(q,s)} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad w = \overline{1, L_2}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

де L_2 – загальна кількість вузлів сітки граничних елементів; $\mathbf{x}^w$ ($w = \overline{1, L_2}$) – глобальні координати вузлів; функція $v(q, s)$, $s = \overline{1, 2N_q}$ визначає глобальний номер вузла по номеру граничного елемента, до якого він належить і локальному номеру вузла всередині граничного елемента; $A i_{ij}^{(k)qsw}$, $B i_{ij}^{(k)qsw}$, $C i_{ij}^{(k)w}$ – константи, що отримані шляхом сумування добутків значень фундаментальних

розв'язків та функцій форми граничного елемента у колокаційних точках образів граничних елементів в рівняннях (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.39) та (2.43) в w -му опорному вузлі

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} Ai_{ij}^{(k)qsw} \\ Bi_{ij}^{(k)qsw} \end{matrix} \right\} = & \begin{cases} \text{для } w \neq v(q, s), s = \overline{1, 2N_q} \\ \left(\sqrt{3} \right)^{N_q-4} \sum_{l=1}^{N_q} \left\{ \begin{matrix} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{matrix} \right\} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l); \\ \text{для } w = v(q, s), s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \left\{ \begin{matrix} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{matrix} \right\} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times \\ \times R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l); \\ \text{для } w = v(q, s), s = 2, 4, \dots, 2N_q \\ -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{r=2N_q-3}^{3N_q-5} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \left\{ \begin{matrix} T_{ij}^{(k)} \\ U_{ij}^{(k)} \end{matrix} \right\} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times \\ \times R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) 2^{\delta_{r6}} (-1)^{r+1} J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l), \end{cases} \\
 Ci_{ij}^{(k)w} = & \left(\sqrt{3} \right)^{N_q-4} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w \neq v(q,s)}}^{L_1} \sum_{l=1}^{N_q} T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) \left| J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right| - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \times \\
 & \times \sum_{\substack{s=1 \\ s \in 2\mathbf{Z}+1}}^{2N_q-1} \sum_{\substack{q=1 \\ w=v(q,s)}}^{L_1} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) - \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{\substack{s=1 \\ s \in 2\mathbf{Z}}}^{2N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w=v(q,s)}}^{L_1} \sum_{r=2N_q-3}^{3N_q-5} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 T_{ij}^{(k)} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) 2^{\delta_{r6}} (-1)^{r+1} \times \\
 & \times J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l). \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що розмірність дискретного аналога системи ГПР визначається добутком кількості опорних вузлів сітки граничних елементів на кіль-

кість ступенів вільності вузла. Тому використання ізопараметричних граничних елементів хоча і дає можливість зменшити кількість граничних елементів на міжфазній поверхні за рахунок вищого ступеня апроксимації шуканих функцій, проте через більшу кількість опорних вузлів в такому елементі розмірність дискретного аналогу системи ГІР (2.44) не буде гарантовано меншою за розмірність дискретного аналогу такої ж системи ГІР (2.28), отриманого з використанням суперпараметричних граничних елементів.

2.3. Апробація граничноелементного алгоритму на задачах зі сферичним включенням у безмежному пружному тілі

Для апробації викладеної граничноелементної методики проведено розрахунок напружено-деформованого стану безмежної пружної матриці з кульовим включенням (рис. 2.10). Міжфазна поверхня описується співвідношенням $S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$. На безмежності до тіла прикладене однорідне розривне навантаження, спрямоване вздовж осі Ox_3 : $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma^{(0)} = const$.

Поле переміщень, що виникає при такому навантаженні в безмежному однорідному тілі, задається лінійною залежністю:

$$u_j^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{[\delta_{j3} - \nu_1(\delta_{1j} + \delta_{2j})]\sigma^{(0)}}{2(1 + \nu_1)G_1} x_j, \quad j = \overline{1,3} \quad (2.46)$$

Генеруємо сітку граничних елементів, поділяючи полярний та азимутальний кути сферичної поверхні на рівні сектори (рис. 2.10). Утворена сітка складається майже повністю з чотирикутних граничних елементів за винятком елементів, які межують з полюсами поверхні S ($x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = \pm R$). Кількість граничних елементів $L_1 = m_p \cdot m_a$ рівна добутку кількості частин, на які поділено полярний (m_p) та азимутальний (m_a) кути сферичної поверхні S .

Кількість опорних вузлів сітки ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів рівна відповідно $L_2 = (2m_p - 1) \cdot (2m_a - 1) + 2$ та $L_2 = m_p \times (m_a - 1) + 2$. Локальна нумерація вузлів у граничному елементі відбувається проти годинникової стрілки. Глобальна нумерація вузлів та граничних елементів відбувається ряд за рядом починаючи з верхнього полюса та осі Ox_1 проти годинникової стрілки якщо дивитися вздовж осі Ox_3 .

Описаною схемою методу граничних елементів обчислено міжфазні переміщення та зусилля на поверхні сферичного включення для дисперсних жорсткісних властивостей з параметром $G = G_2/G_1$. Коефіцієнти Пуассона включення та матриці вибрано рівними між собою: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. На рис. 2.11 синіми векторами зображено тривимірне поле нормованих міжфазних переміщень опорних вузлів (позначено червоними точками) сітки суперпараметричних граничних елементів при розтягу матриці на безмежності зусиллями $\sigma_{33}^{(0)} = const$. Переміщення віднесені до радіуса включення R . Відносна жорсткість включення вважалася рівною $G = 10$.

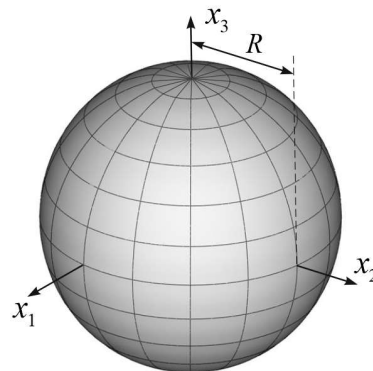


Рис. 2.10. Сітка граничних елементів для кульового включення в безмежній матриці.

Верифікація отриманих результатів проводилася шляхом порівняння з відомим у літературі аналітичним розв'язком [270]. Напруження всередині включення визначаються тензором четвертого рангу Ешелбі. Зокрема, для еліпсоїдального включення з півосями $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ його ненульові компоненти будуть мати вигляд [270]:

$$S_{iii} = Q a_i^2 I_{ii} + R I_i; S_{ijj} = Q a_j^2 I_{ij} - R I_i; 2S_{ijj} = 2S_{iji} = Q(a_i^2 + a_j^2) I_{ij} + R(I_i + I_j),$$

$$\text{де } i, j = \overline{1,3}; Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu_1)}; R = \frac{1-2\nu_1}{8\pi(1-\nu_1)}; I_i = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)\Delta};$$

$$I_{ii} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)^2 \Delta}; I_{ij} = \frac{2}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)(a_j^2 + u)\Delta};$$

$$\Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u).$$

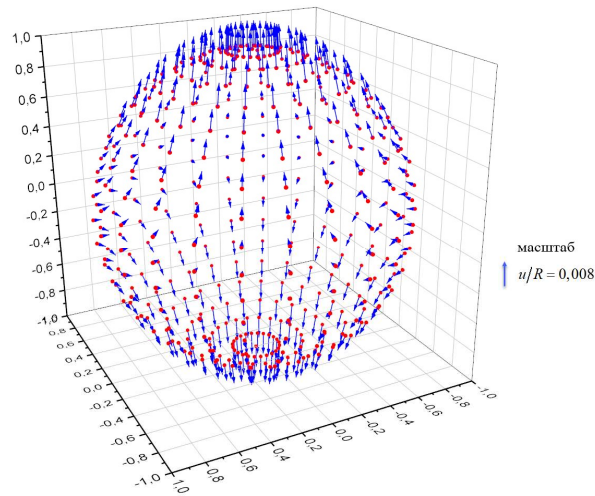


Рис. 2.11. Тривимірний мапа поля міжфазних переміщень при навантаженні матриці розтягуючими зусиллями на безмежності.

На рис. 2.12 зображено залежності нормованих нормальних напружень всередині (рис. 2.12) та зовні (рис. 2.13) включення сферичної форми радіуса R від відносної координати x_1/R вздовж осі, перпендикулярної до напрямку розтягу матриці композиту. Напруження σ_{33} віднесені до величини зусиль прикладених до матриці на безмежності $\sigma_{33}^{(0)}$. Співвідношення жорсткісних характеристик складових композиту було прийнято рівним $G = 10, 20, 50, 100$. В обчисленнях використано сітку суперпараметричних граничних елементів. Суцільними лініями на графіках рис. 2.12, 2.13 показано результати отримані вищевикладеним методом граничних елементів. Штриховими кривими з круглими маркерами на рис. 2.12 позначено відомі в літературі результати залежностей напружень отриманих з допомогою тензора Ешелбі.

Практичний інтерес при дослідженні властивостей гранульованих композитів становлять усереднені по об'єму напруження всередині включення, оскільки саме вони дозволяють визначити макромеханічні характеристики композиту. Зважаючи на осьову симетрію задачі, усереднені по об'єму напруження будуть утворювати симетричний тензор розмірністю 6×6 при розривному та зсувному навантаженні матриці на безмежності відносно трьох осей системи координат, прив'язаної до включення. Знаходимо усереднені напруження за формулою:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{V \sigma_{ij}^{(0)}} \iiint_V \sigma_{ij} dV; \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (2.47)$$

Нижче наведено таблицю значень усереднених напружень для сферичного включення з відносною жорсткістю $G = 100$, отриманих модифікованим методом граничних елементів та відомим в літературі методом Ешелбі.

Таблиця 2.1. Порівняльна таблиця усереднених напружень при $G = 100$.

		σ_{11}^*	σ_{22}^*	σ_{33}^*	σ_{12}^*	σ_{13}^*	σ_{23}^*
Ox_1	МГЕ	1,9132	-0,1514	-0,1514	0	0	0
	Ешелбі	1,9199	-0,1572	-0,1572	0	0	0
Ox_2	МГЕ	-0,1514	1,9132	-0,1514	0	0	0
	Ешелбі	-0,1572	1,9199	-0,1572	0	0	0
Ox_3	МГЕ	-0,1514	-0,1514	1,9132	0	0	0
	Ешелбі	-0,1572	-0,1572	1,9199	0	0	0
$x_1 Ox_2$	МГЕ	0	0	0	2,0687	0	0
	Ешелбі	0	0	0	2,0754	0	0
$x_1 Ox_3$	МГЕ	0	0	0	0	2,0687	0
	Ешелбі	0	0	0	0	2,0754	0
$x_2 Ox_3$	МГЕ	0	0	0	0	0	2,0687
	Ешелбі	0	0	0	0	0	2,0754

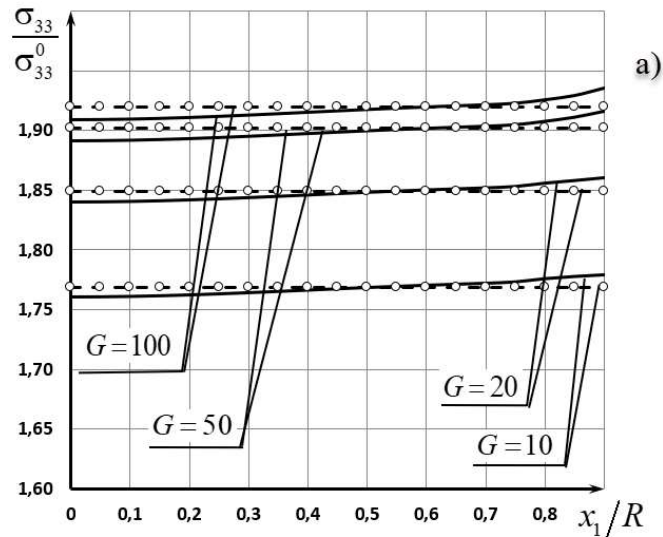


Рис. 2.12. Залежності нормованих нормальних напружень всередині включення сферичної форми від відносної координати вздовж осі, перпендикулярної до напрямку розтягу матриці композиту.

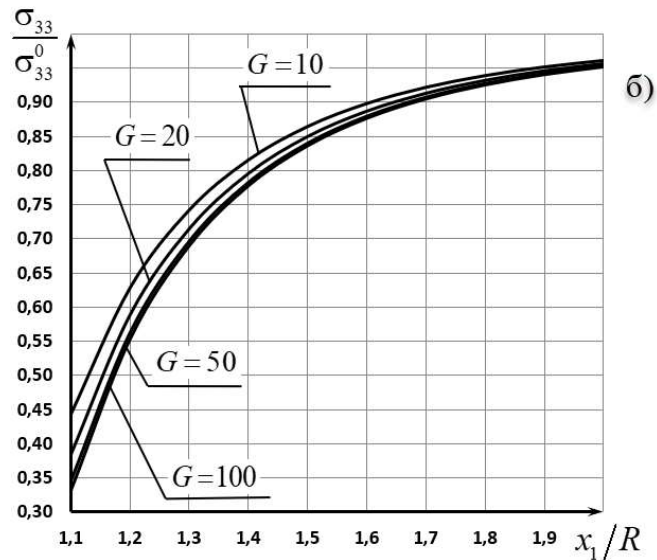


Рис. 2.13. Залежності нормованих нормальних напружень ззовні включення сферичної форми від відносної координати вздовж осі, перпендикулярної до напрямку розтягу матриці композиту.

Важливою з огляду на числову реалізацію методу граничних елементів є інформація про ефективність застосування різних типів сітки граничних елементів для дискретизації міжфазної поверхні композиту. Для цього задачу про розтяг сферичного включення зусиллями $\sigma_{33}^{(0)} = const$ в безмежній пружній матриці було розв'язано із застосуванням сітки ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів. Відносна жорсткість включення приймалася рівною $G=100$. Проведено порівняльний аналіз (рис. 2.14) усереднених по

об'єму включення напружень σ_{33}^* , отриманих модифікованим методом граничних елементів для обидвох типів сітки при різній її густині. На рис. 2.14 та 2.15 суцільними кривими показано розв'язок вищеописаної задачі, отриманий аналітичним методом Ешелбі. На цих же рисунках кривими з круглими маркерами позначено розв'язок задачі модифікованим методом граничних елементів з використанням сітки суперпараметричних граничних елементів (штрихові криві) та ізопараметричних граничних елементів (штрих-пунктирні криві).

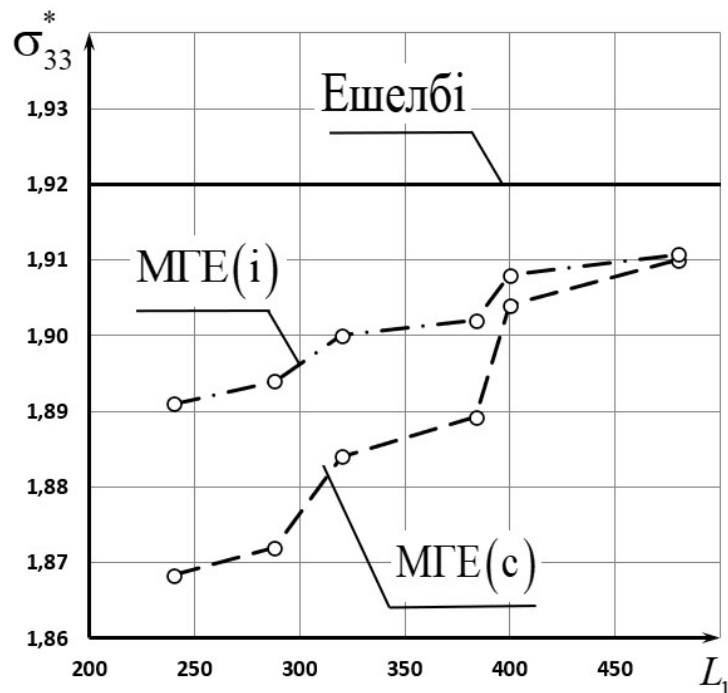


Рис. 2.14. Залежності усереднених по об'єму нормальних напружень всередині включення сферичної форми від кількості граничних елементів.

Розрахунки проводилися для наступної густини сітки: 240 елементів ($m_p = 20, m_a = 12$); 288 елементів ($m_p = 24, m_a = 12$); 320 елементів ($m_p = 20, m_a = 16$); 384 елементи ($m_p = 24, m_a = 16$); 400 елементів ($m_p = 20, m_a = 20$); 480 елементів ($m_p = 24, m_a = 20$).

На рис. 2.15 показано залежність сумарного часу обчислень регулярних та сингулярних інтегралів (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.39) та (2.43) для сітки ізопараметричних граничних елементів та інтегралів (2.21), (2.22), (2.24),

(2.27) для сітки суперпараметричних граничних елементів, а також часу формування глобальної матриці жорсткості задачі про розтяг статичними зусиллям на безмежності пружного простору з кульовим ізольованим включенням від кількості граничних елементів використаних для побудови сітки.

Час обчислень фіксувався для тих самих параметрів сітки граничних елементів як і на рис. 2.14 на комп'ютері з процесором QuadCore Intel i5-4460, 3200 MHz та оперативною пам'яттю 32 GB DDR3-1600 SDRAM.

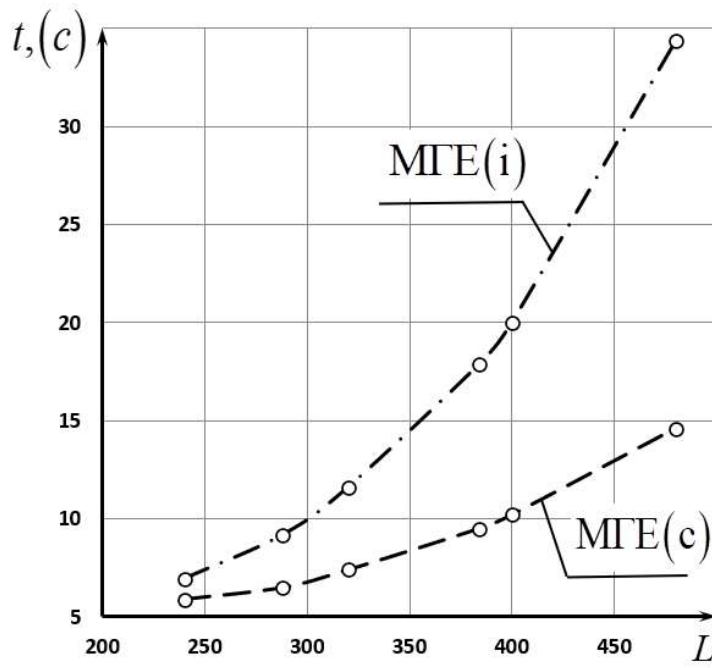


Рис. 2.15. Залежності часу обчислень елементів глобальної матриці жорсткості задачі про розтяг пружного простору з кульовим включенням від кількості граничних елементів.

Із наведених даних випливає, що за введених апроксимацій використання ізопараметричних граничних елементів більш прийнятне для покриття сильно витягнутих поверхонь волокнистих включень, коли вимога щільності сітки приводить до кардинального збільшення кількості граничних елементів.

2.4. Числовий аналіз напруженого стану безмежного тіла, що містить пружне квазіциліндричне прямолінійне і викривлене включення

Локальний напружено-деформований стан гранульованих та волокнистих композитів, а також їх макромеханічні ефективні характеристики значною

мірою залежать від форми включень матеріалу наповнювача. Якщо для канонічних топологічних форм включень (сфера, сфероїд, еліпсоїд) компоненти напружено-деформованого стану можна досліджувати аналітичними методами [125, 270], то для включень із складнішою топологією запропонований метод граничних елементів є оптимальним варіантом для досліджень. Розглянемо включення у вигляді коротких волокон, бічна поверхня яких є циліндричною, а торці можуть мати сферичне заокруглення, або бути плоскими (рис. 2.16). Включення такої форми часто зустрічаються на практиці при виготовленні волокнистих композитів і дослідження напружено-деформованого стану в їх околі має значний теоретичний інтерес.

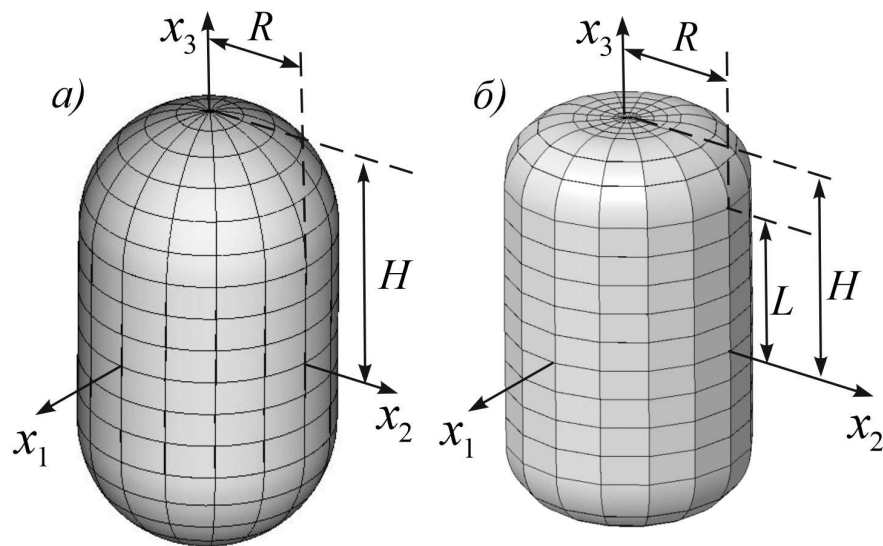


Рис. 2.16. Схема квазіциліндричних включень та сітка граничних елементів на їх поверхні.

Позначимо через R радіус серединного поперечного перерізу включень, а через H - половину повної висоти включень. Для включення у формі циліндра з плоскими торцями (рис. 2.16 б) через L позначимо половину висоти циліндричної частини включення. Виберемо глобальну систему координат $Ox_1x_2x_3$ в центрі включень так, щоб координатна площина x_1Ox_2 співпадала з серединним поперечним перерізом включення, а вісь Ox_3 була направлена вздовж осі симетрії включення.

Міжфазні поверхні для обох форм включень є гладкими (без кутових точок) і задаються рівняннями: форма 1 (рис. 2.16 а)

$$S = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2, & \text{якщо } |x_3| \leq H - R; \\ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - H + R)^2 = R^2, & \text{якщо } H - R < |x_3| \leq H, \end{cases}$$

форма 2 (рис. 2.16 б)

$$S = \begin{cases} x_3 = H, & \text{якщо } x_1^2 + x_2^2 \leq (R + L - H)^2; \\ x_1^2 + x_2^2 = \left(R - H + L + \sqrt{(H - x_3)(H + x_3 - 2L)} \right)^2, & \text{якщо } L < |x_3| < H; \\ x_1^2 + x_2^2 = R^2, & \text{якщо } |x_3| \leq L. \end{cases}$$

За таких умов в кожній точці поверхонь включень обох типів можна побудувати єдиний вектор зовнішньої нормалі. Нехай на безмежності до пружного тіла, що містить ізолюване пружне включення у формі сфероциліндра (рис. 2.15 а) або у формі циліндра з плоскими торцями (рис. 2.16 б) прикладене стаціонарне розривне навантаження, спрямоване вздовж осі Ox_3 : $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma^{(0)} = \text{const}$.

Поле переміщень, що виникає при такому навантаженні в безмежному пружному тілі задається формулою (2.46).

У випадку включення у формі сфероциліндра (рис. 2.16 а) генеруємо сітку граничних елементів на півсферичних торцях включення аналогічно як це описано для сфери у пункті 2.3, поділяючи полярний та азимутальний кути на m_p та m_a частин відповідно. Циліндричну частину такого включення розбиваємо по висоті на m_h частин за аналогічної розбивки полярного кута. Кількість граничних елементів рівна $L_1 = m_p \cdot (m_a + m_h)$. Кількість опорних вузлів сітки ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів рівна відповідно $L_2 = (2m_p - 1) \cdot (2m_a + 2m_h - 1) + 2$ та $L_2 = m_p \cdot (m_a + m_h - 1) + 2$.

Поверхню циліндричного включення з плоскими торцями (рис. 2.16 б) покриваємо неперервною сіткою граничних елементів поділяючи полярний

кут на m_p частин, а азимутальному напрямку розбиваємо радіус плоского торця на m_t частин; заокруглення між плоскою і циліндричною частиною поверхні на m_a частин, а циліндричну частину включення по висоті на m_h частин. В цьому випадку кількість граничних елементів буде рівна $L_1 = m_p \times (2m_t + 2m_a + m_h)$, а кількість опорних вузлів сітки ізопараметричних та суперпараметричних граничних елементів – відповідно $L_2 = (2m_p - 1) \cdot (4m_t + 4m_a + 2m_h - 2) + 2$ та $L_2 = m_p \cdot (2m_t + 2m_a + m_h - 1) + 2$.

Локальна нумерація вузлів у граничному елементі для обох випадків побудови сітки відбувається проти годинникової стрілки. Глобальна нумерація вузлів та граничних елементів відбувається ряд за рядом починаючи з верхнього полюса та осі Ox_1 проти годинникової стрілки якщо дивитися вздовж осі Ox_3 .

Запропонованим методом обчислено міжфазні переміщення та зусилля на поверхні сфероциліндричного (рис. 2.16 а) та циліндричного з плоскими торцями (рис. 2.16 б) включення для дисперсних жорсткісних властивостей з параметром $G = G_2/G_1 = 100$. Коефіцієнти Пуассона включення та матриці вибрано рівними між собою: $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$. На рис. 2.17 синіми векторами зображено тривимірне поле нормованих міжфазних переміщень опорних вузлів (позначено червоними точками) сітки суперпараметричних граничних елементів при розтягу матриці на безмежності зусиллями $\sigma_{33}^{(0)} = const$. Переміщення віднесені до радіуса включення R .

Дискретизацію та обернення системи ГР (2.8) проведено з використанням сітки суперпараметричних граничних елементів густиною $m_p = 20$,

$m_a = 12$, $m_h = 4 \left\lceil \frac{H}{R} - 1 \right\rceil$ для сфероциліндричного включення (рис. 2.15 а) та

$m_p = 20$, $m_a = 4$, $m_t = 6$, $m_h = 4 \lceil L \rceil$ для циліндричного з плоскими торцями

(рис. 2.16 б). Визначені таким чином міжфазні переміщення та зусилля дозволяють за формулами (2.30) обчислити напруження у внутрішніх точках включення.

Осьові нормальні напруження вздовж осі циліндричного волокна обчислені методом скінчених елементів в роботі [277]. Порівняння залежності нормованих значень цих напружень всередині волокна з відносною довжиною $H/R = 200$ та відносною жорсткістю $G = 50$ від нормованої координати x_3/R для сфероциліндричного волокна, отриманої запропонованим методом граничних елементів (суцільна крива) та циліндричного волокна отриманої методом скінчених елементів (штрихова крива) показано на рис. 2.17.

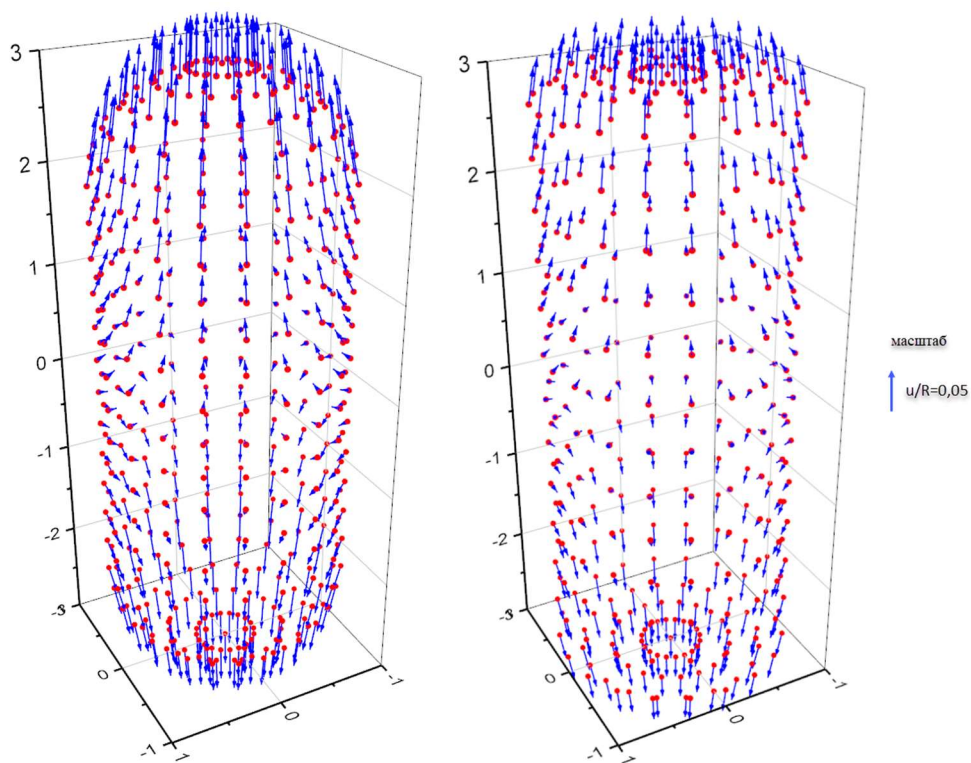


Рис. 2.17. Тривимірні мапи поля переміщень опорних вузлів міжфазної поверхні двох типів квазіциліндричних включень відносної висоти $H/R = 3$.

На рис. 2.18-2.21 суцільними лініями показано залежності нормованих нормальних напружень всередині сфероциліндричного (рис. 2.19 а – 2.21 а) та циліндричного з плоскими торцями (рис. 2.19 б – 2.21 б) включення радіуса R для різних геометричних параметрів H/R від відносної координати x_1/R вздовж осі, перпендикулярної до осі включення. Напруження σ_{11} (рис. 2.19),

σ_{22} (рис. 2.20), σ_{33} (рис. 2.21) віднесені до величини зусиль прикладених до матриці на безмежності $\sigma_{33}^{(0)}$. Співвідношення жорсткісних характеристик складових композиту було прийнято рівним $G = 100$.

Штриховими лініями на рис. 2.19 а) – 2.21 а) для порівняння показані залежності відповідних нормованих напружень для сферичного включення $H/R = 1$.

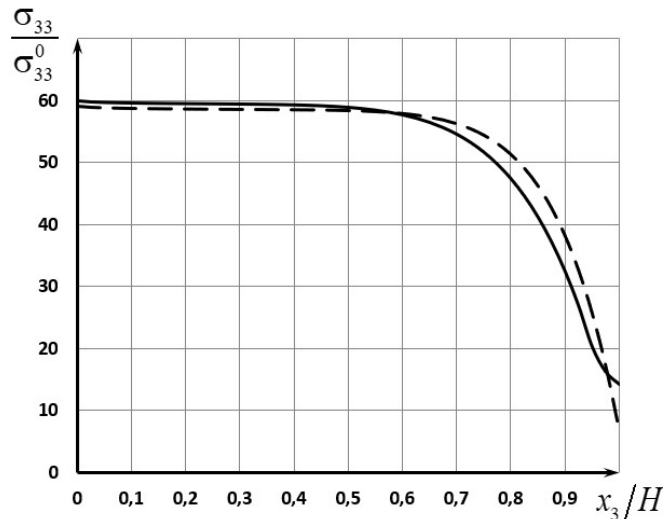


Рис. 2.18. Залежності нормованих напружень σ_{33} всередині сфероциліндричного та циліндричного включення з відносною жорсткістю $G = 50$ та висотою $H/R = 200$ від відносної координати вздовж осі включення.

Усереднені по об'єму напруження всередині сфероциліндричного включення (рис. 2.16 а) з відносною жорсткістю $G = 100$, обчислені за формулою (2.47) приведені в таблицях 2.2, 2.3 для геометричних параметрів включень $H/R = 1,5$ та $H/R = 2$ відповідно.

Зауважимо, що при розрахунку волокнистих композитів з великим співвідношенням H/R потрібно дотримуватися правила: параметри граничного елемента, що використовується для апроксимації бічної поверхні волокнистого включення, не повинні перевищувати радіуса його поперечного перерізу. Лише в цьому випадку результати, отримані методом граничних елементів, є достатньо точними. Таким чином, зростання відносної довжини волокна призводить до збільшення числа граничних елементів, необхідних для розв'язування задачі, що в свою чергу, призводить до збільшення розмірності системи

алгебраїчних рівнянь – регулярного аналогу системи ГР (2.8).

На рис. 2.22 показані нормовані залежності напружень $\sigma_{33}/\sigma_{33}^0$ від відносної координати вздовж осі включення за розтягу матриці, що містить це включення зусиллями $\sigma_{33}^0 = \text{const}$. Штриховими лініями показані криві, що відповідають циліндричному включенню з плоскими торцями (рис. 2.16 б), а суцільні – сфероциліндричному включенню (рис. 2.16 а). Відносна жорсткість

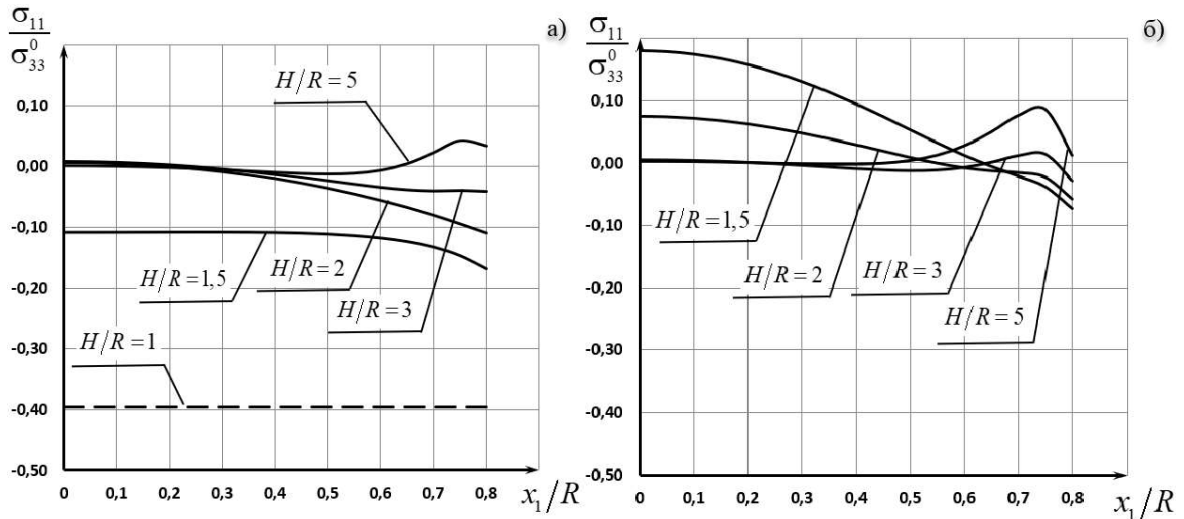


Рис. 2.19. Залежності нормованих нормальних напружень σ_{11} всередині а) сфероциліндричного; б) циліндричного з плоскими торцями включення від відносної координати вздовж осі, перпендикулярної до осі включення.

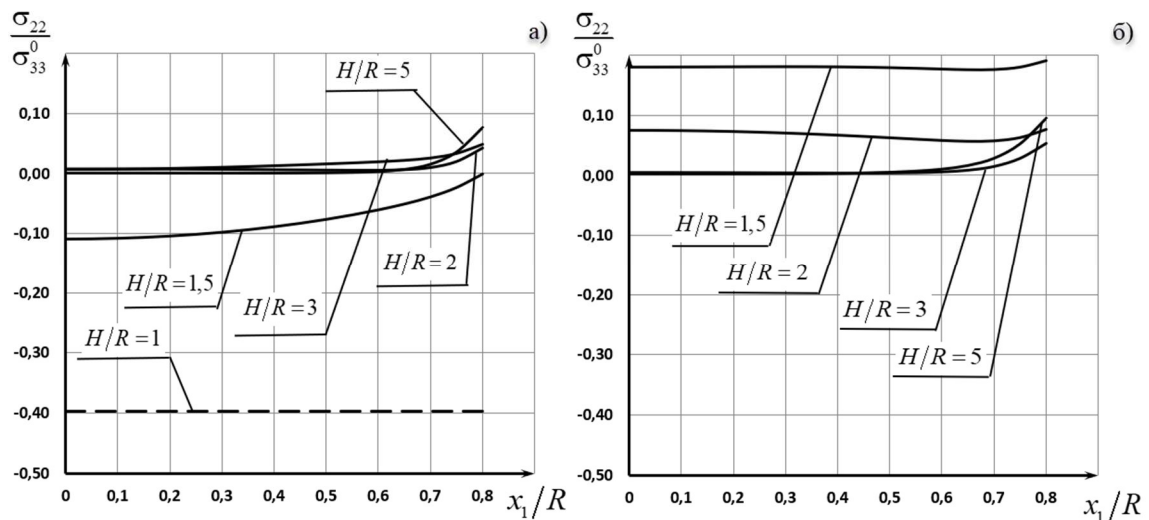


Рис. 2.20. Залежності нормованих нормальних напружень σ_{22} всередині а) сфероциліндричного; б) циліндричного з плоскими торцями включення від відносної координати вздовж осі, перпендикулярної до осі включення.

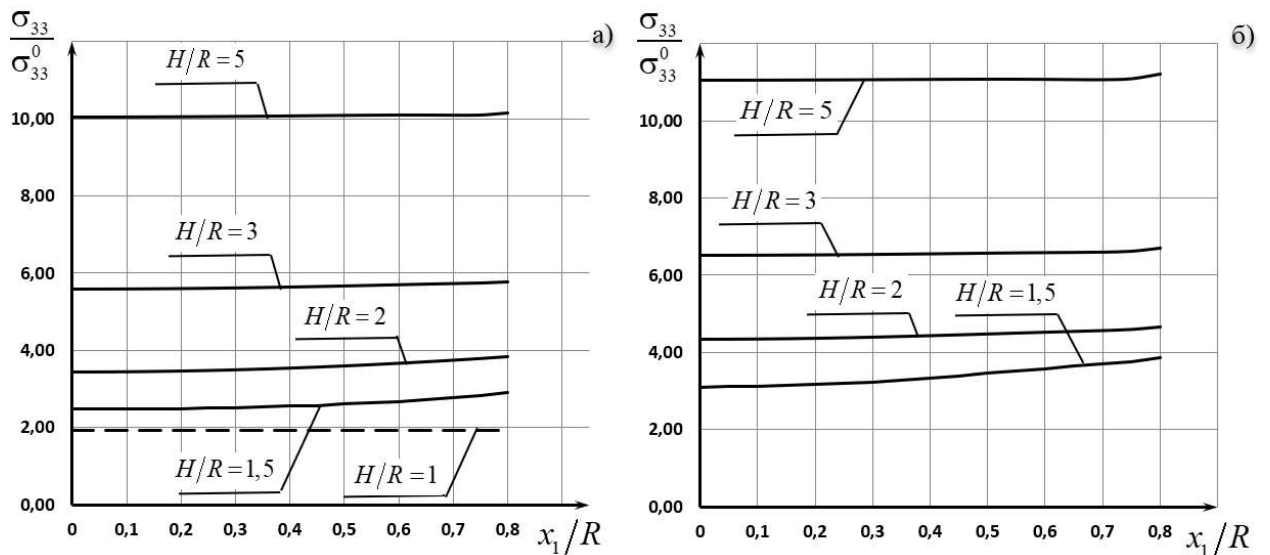


Рис. 2.21. Залежності нормованих нормальних напружень σ_{33} всередині а) сфероциліндричного; б) циліндричного з плоскими торцями включення від відносної координати вздовж осі, перпендикулярної до осі включення.

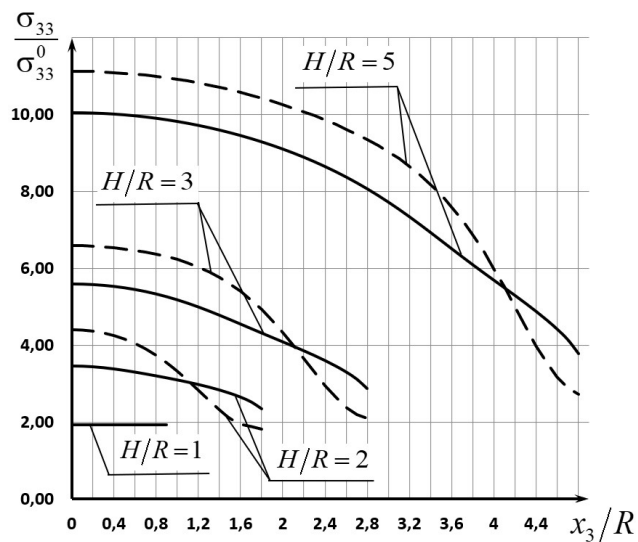


Рис. 2.22. Залежності нормованих напружень σ_{33} всередині сфероциліндричного та циліндричного з плоскими торцями включення з відносною жорсткістю $G = 100$ від відносної координати вздовж осі включення.

включень обидвох форм прийнято рівною $G = 100$, а геометричні параметри включень вибрано рівними $H/R = 1$ (сфера); $H/R = 2$; $H/R = 3$; $H/R = 5$.

Штрихові криві відповідають циліндричному включенню з плоскими торцями (рис. 2. 16 б), а суцільні – сфероциліндричному включенню (рис. 2.16 а). Штрих-пунктирною лінією відзначено відповідну величину в однорідному безмежному тілі (механічні характеристики включення і матриці співпадають $G=1$).

Тенденції зміни напружень всередині включень в залежності від їх дисперсних механічних характеристик висвітлені на рис. 2.23. Розподіл відносних напружень $\sigma_{33}/\sigma_{33}^0$ вздовж осі Ox_3 ($x_1 = x_2 = 0$) показаний для фіксованого геометричного параметра $H/R = 3$ та різних водоносних жорсткостей включень ($G = 0,1;5;10;100;1000$).

Таблиця 2.2. Усереднені по об'єму сфероциліндричного включення напруження при $H/R = 1,5$.

	σ_{11}^*	σ_{22}^*	σ_{33}^*	σ_{12}^*	σ_{13}^*	σ_{23}^*
Ox_1	1,7209	-0,3612	-0,6869	0	0	0
Ox_2	-0,3612	1,7209	-0,6869	0	0	0
Ox_3	-0,2725	-0,2725	2,5597	0	0	0
$x_1 Ox_2$	0	0	0	2,0834	0	0
$x_1 Ox_3$	0	0	0	0	2,3867	0
$x_2 Ox_3$	0	0	0	0	0	2,3867

Таблиця 2.3. Усереднені по об'єму сфероциліндричного включення напруження при $H/R = 2$.

	σ_{11}^*	σ_{22}^*	σ_{33}^*	σ_{12}^*	σ_{13}^*	σ_{23}^*
Ox_1	1,6519	-0,3486	-1,0144	0	0	0
Ox_2	-0,3486	1,6519	-1,0144	0	0	0
Ox_3	-0,2307	-0,2307	3,2806	0	0	0
$x_1 Ox_2$	0	0	0	2,0012	0	0
$x_1 Ox_3$	0	0	0	0	2,4822	0
$x_2 Ox_3$	0	0	0	0	0	2,4822

Розглянемо включення у вигляді коротких викривлених волокон, поперечний переріз яких є колом радіуса R , а вісь – дугою кола радіусом ρ та центральним кутом θ (рис. 2.24). Торці волокна мають півсферичну форму.

Неосесиметрична форма таких включень зумовлює необхідність дослідження залежності їх напружено-деформованого стану не лише від відносної довжини таких волокон, а і від кривини їх осі.

Виберемо глобальну систему координат $O x_1 x_2 x_3$ в центрі включення так, щоб координатна площина $x_1 O x_2$ співпадала з його серединним поперечним перерізом, а вісь $O x_3$ була дотичною до його викривленої осі. На безмежності до пружної матриці прикладене стаціонарне розривне навантаження N_0 (рис. 2.25), спрямоване вздовж осі $O x_3$, що викликає в однорідному пружному середовищі з механічними характеристиками матриці поле напружень $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma^{(0)} = \text{const}$ та поле переміщень, що задається виразом (2.46).

Будуючи сітку граничних елементів на поверхні розглядуваного включення за подібною до попередніх випадків методикою, отримаємо кількість граничних елементів $L_1 = m_p \cdot (m_a + m_\theta)$ та кількість опорних вузлів $L_2 = (2m_p - 1) \cdot (2m_a + 2m_\theta - 1) + 2$ у випадку ізопараметричних граничних елементів або $L_2 = m_p \cdot (m_a + m_\theta - 1) + 2$ у випадку суперпараметричних граничних

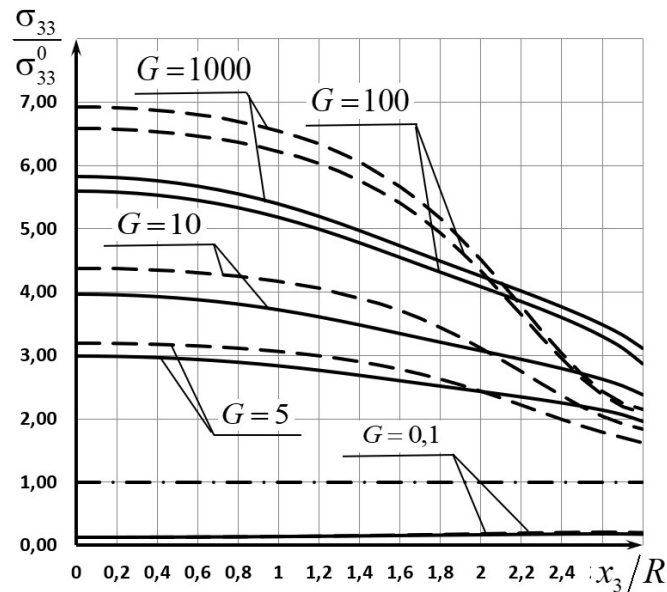


Рис. 2.23. Залежності нормованих напружень σ_{33} всередині сфероциліндричного та циліндричного з плоскими торцями включення з геометричним параметром $H/R = 3$ від відносної координати вздовж осі включення.

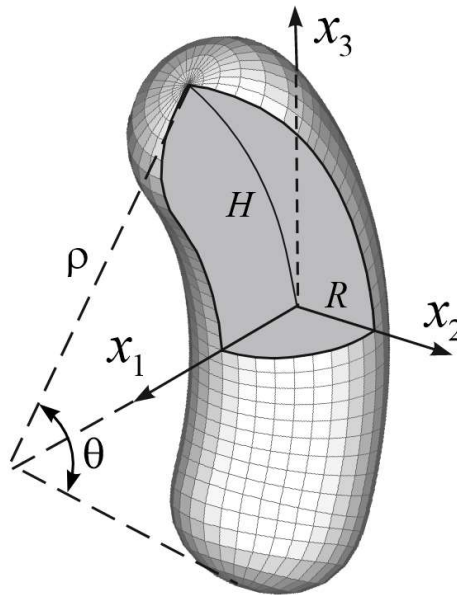


Рис. 2.24. Схема квазіциліндричних включень та сітка граничних елементів їх поверхні.

елементів, де на m_p – частин розбито полярний кут; на m_a частин – азимутальний кут; на m_θ частин – центральний кут дуги осі волокна.

Розв'язуючи систему рівнянь (2.28), що є дискретним аналогом системи ГІР пропонованого модифікованого методу граничних елементів, обчислимо міжфазні переміщення та зусилля на поверхні розглядуваного включення за умови його відносної жорсткості $G = G_2/G_1 = 10$ та коефіцієнтів Пуассона

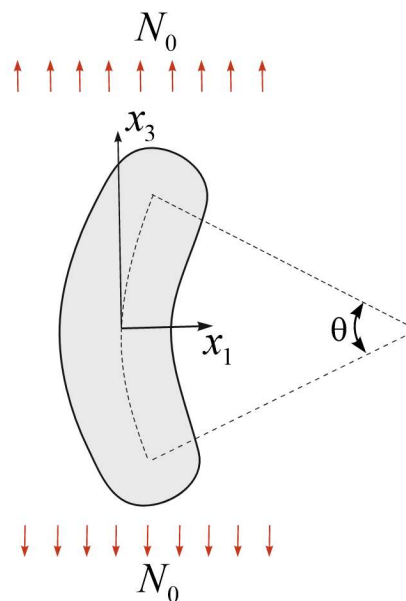


Рис. 2.25. Схема навантаження безмежної пружної матриці з включенням у формі викривленого волокна в перерізі $x_1 O x_3$.

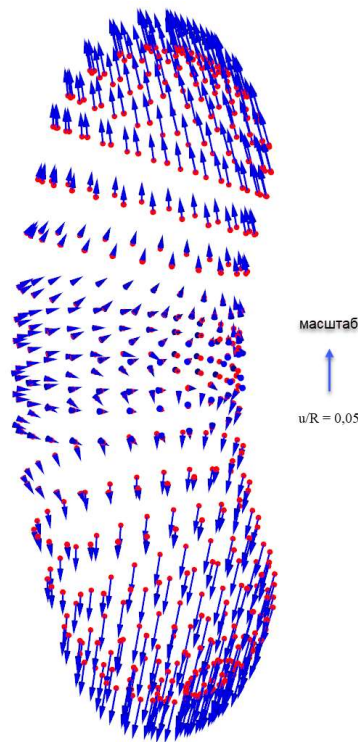


Рис. 2.26. Тривимірний мапа поля переміщень опорних вузлів міжфазної поверхні викривленого короткого волокна в безмежній пружній матриці.

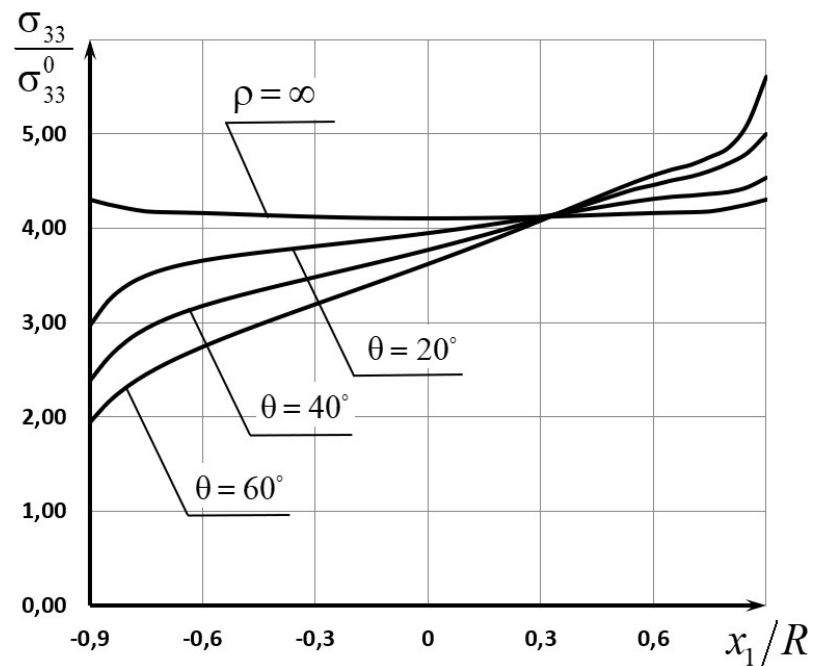


Рис. 2.27. Залежності нормованих напружень σ_{33} всередині сфероциліндричного включення з викривленою віссю від відносної координати вздовж радіуса його перерізу.

складових гетерогенного тіла рівних $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$. На рис. 2.26 зображено тривимірне поле міжфазних переміщень, віднесених до радіуса серединного

перерізу включення R , опорних вузлів сітки граничних елементів за навантаження матриці розтягуючими зусиллями для випадку $\rho = 6R$ і $\theta = 60^\circ$.

Густину сітки граничних елементів в цьому та подальших обчисленнях напруженого стану викривленого волокна в пружній безмежній матриці вибрано наступним чином: $m_p = 24$, $m_a = 12$, $m_\theta = 16$.

З виразів (2.30) використовуючи визначені з рівнянь (2.28) міжфазні переміщення та зусилля обчислюємо напруження у всередині включення. На рис. 2.27 показано залежності нормованих нормальних напружень в точках серединного поперечного перерізу викривленого волокна з однаковою довжиною осі і різною її кривиною: $\rho = \infty$ (сфероциліндричне включення з прямою віссю); $\rho = 17,188R$, $\theta = 20^\circ$; $\rho = 8,594R$, $\theta = 40^\circ$; $\rho = 5,73R$, $\theta = 60^\circ$ від відносної координати x_1/R . Напруження σ_{33} віднесені до напружень у матриці на безмежності $\sigma_{33}^{(0)}$.

2.5. Висновки до другого розділу

Із застосуванням методу підобластей та з використанням фундаментальних розв'язків задачі теорії пружності здійснено інтегральне формулювання статичних задач для двокомпонентної пружної системи «безмежна матриця – об'ємне включення» за ідеального контакту її компонент. Доведено ефективність неявного врахування контактних умов у гранично-інтегральних формулюваннях тривимірних задач для композитних тіл з включеннями складної форми та запропоновано алгоритми їх двоетапної регуляризації і граничноелементної дискретизації на супер- та ізопараметричних сітках з квадратичною та лінійною апроксимацією шуканих функцій, відповідно.

Запропонована методика апробована на розв'язуванні задачі про сферичне пружне включення в безмежному тілі за ідеальних умов міжфазного контакту. Результати моделювання показують добру кореляцію результатів з аналітичним розв'язком Ешелбі як для окремих значень компонент напружень

всередині включення, так і для усереднених по об'єму включення напружень.

Зафіксовано узгодження результатів, отриманих із застосуванням супер-та ізопараметричних сіток граничних елементів зі значним зменшенням часу розрахунку у першому випадку, спричиненим зменшенням кількості опорних вузлів, а відтак розмірності дискретного аналога рівнянь. Проте за введених апроксимацій використання ізопараметричних граничних елементів більш прийнятне для покриття сильно витягнутих поверхонь волокнистих включень, коли вимога щільності сітки приводить до кардинального збільшення кількості граничних елементів.

Числово встановлено неоднорідність розподілу напружень всередині прямих і викривлених скінченних циліндричних волокон за однорідного навантаження матриці (на противагу від канонічних сферичних і сфероїдальних включень), який більш виразний у випадку викривлення волокна.

Показано, що вказана неоднорідність суттєвіша за наближення до поверхні волокна, більшого його видовження та контрасту жорсткості щодо матричної, а також за сплюснення торців та викривлення волокна. Наприклад, за розтягу матриці вздовж осі скінченного циліндричного волокна з відносною жорсткістю $G_2/G_1 = 100$ щодо матричного матеріалу відхилення в розподілі нормальних напружень вздовж його осі у 1,5 разів менше для волокна зі сферичними торцями, ніж з плоскими торцями. У серединному перерізі скінченного сфероциліндричного волокна з викривленою по дузі кола віссю зафіксовано точку інваріантності нормальних напружень щодо кривизни осі волокна на відстані $0,33 R$ від центра цього перерізу.

Встановлено, що неоднорідність напружень у волокні породжує зони їх концентрації, які можуть локалізуватись як у торцевій (для $G_2/G_1 < 1$), так і серединній (для $G_2/G_1 > 1$) частинах волокна. У жорсткому скінченному волокні зі сферичними торцями напруження в серединній його частині у 2-3 рази більші, ніж у торцевій залежно від його довжини.

РОЗДІЛ 3

ТРИВИМІРНІ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ НЕКАНОНІЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ТА ТРІЩИН У БЕЗМЕЖНІЙ ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ

У розділі граничноелементний аналіз узагальнено на тривимірні задачі пружної взаємодії у безмежній матриці скінченної кількості об'ємисто-неканонічних та плоских тонкостінних включень і тріщин (як матричних, так і волоконних). Граничноелементну дискретизацію поширено на відповідні системи дуальних граничних інтегральних рівнянь у переміщеннях і напруженнях.

Описано і реалізовано модифікований граничноелементний підхід до числового врахування взаємодії у розріджено-великих системах наповнювачів на основі ітерацій односторонніх впливів.

Проведено числове дослідження впливу на тріщиноподібні дефекти композитного тіла його різнотипних за формою, жорсткістю та розташуванням наповнювачів.

Матеріали розділу викладені в працях [87, 144, 145, 148, 149, 151–155, 158, 163, 184–186, 389, 456, 459].

3.1. Гранично-інтегральне формулювання і дискретизація тривимірних задач взаємодії неканонічних включень та тріщин у безмежній пружній матриці

Розглянемо пружне ізотропне безмежне тіло (матрицю), що містить N_1 об'ємистих включень з умовами їх ідеального контакту (2.1) з матрицею по поверхнях S_s ($s = \overline{2, N_1 + 1}$), N_2 плоских тріщин з виконанням на їх поверхнях S_s ($s = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$) крайових умов відсутності навантажень, N_3 дискових податних включень з пропорційністю їх розкриття напруженням та N_4 дискових жорстких включень з умовами лінійності переміщень (поступальності

і обертальності) в областях S_s ($s = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$) і S_s ($s = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$) таких неоднорідностей (рис. 3.1), які є довільно взаємно розташованими. В центрі n -того тонкого концентратора напружень виберемо локальну систему координат $O_n x_{1n} x_{2n} x_{3n}$ таким чином, щоб вісь з індексом "3" була перпендикулярною до поверхні тріщини або серединної поверхні тонкого включення, а осі з індексами "1" та "2" лежали в площині цієї поверхні. Геометрично орієнтовані локальні системи координат пов'яжемо також з центрами об'ємистих включень. На безмежності до матриці прикладені відомі статичні зовнішні навантаження.

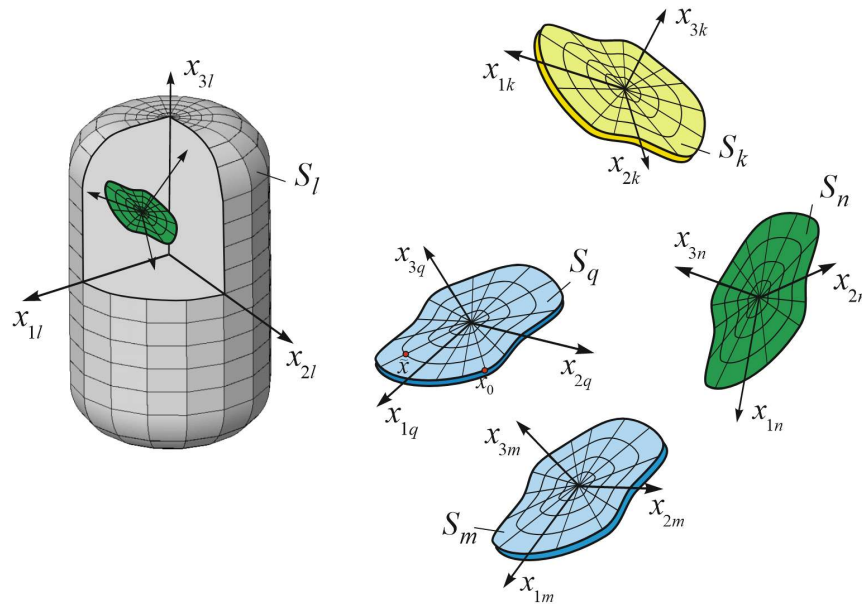


Рис. 3.1. Схема розташування взаємодіючих тріщин, тонких пружних включень малої жорсткості та тонких абсолютно жорстких включень.

Взаємне розташування об'єктів в тілі будемо характеризувати такими величинами: d_{kn} - віддаллю між центром k -го і n -го об'єкту, напрямними косинусами e_{jkn} вектора $\mathbf{d}_{kn}$, а також напрямними косинусами l_{ijkn} кутів між осями x_i та x_j k -тої та n -тої локальних систем координат.

Механічні характеристики матриці опишемо пружними сталими G_1 та ν_1 , а механічні характеристики об'ємистих та тонких податливих пружних включень – G_k та ν_k ($k = \overline{2, N_1 + 1}$ та $k = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$).

Напружено-деформований стан в тілі, що містить тріщини та включення, згідно принципу суперпозиції можна описати сумами:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

де $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})$ - напруження і переміщення в пружному однорідному просторі, аналогічному за властивостями до матриці, викликані зовнішнім навантаженням; $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x})$ - складові внеску у напружено-деформований стан від наявності i -го концентратора напружень.

Якщо поле напружень $\{\boldsymbol{\sigma}^0\}$ в деякій базовій системі (глобальній) координат $Ox_{11}x_{21}x_{31}$ описується тензором

$$\{\boldsymbol{\sigma}^0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{21}^0 & \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{31}^0 & \sigma_{32}^0 & \sigma_{33}^0 \end{Bmatrix},$$

а орієнтація n - того об'єкта в цій системі координат задається напрямними косинусами l_{ij1n} , то функції напружень в суцільному однорідному пружному просторі на площинці, яка співпадає з серединною поверхнею n -того об'єкта, обчислюються за такими формулами:

$$T_{qn}(\mathbf{x}_{nn}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^0 l_{3j1n} l_{qi1n}, \quad q = \overline{1,3}.$$

Тут і надалі перший індекс координати точки тіла $\mathbf{x}_{ij}$ означає приналежність до поверхні i -того об'єкта, а другий індекс – прив'язку до j -тої локальної системи координат.

Крайові умови на поверхнях тріщин мають вигляд:

$$\sigma_{j3}^{(n)}(\mathbf{x}_{nn}) = T_{jn}(\mathbf{x}_{nn}), \mathbf{x}_{nn} \in S_n, j=\overline{1,3}, n=\overline{N_1+2, N_1+N_2+1}. \quad (3.2)$$

Позначимо функції розкриття тріщин у напрямі осей $O_n \mathbf{x}_{jn}$ через

$$\alpha_{jn}(\mathbf{x}_{nn}) = \frac{u_{jn}^-(\mathbf{x}_{nn}) - u_{jn}^+(\mathbf{x}_{nn})}{4\pi} \Big|_{\mathbf{x}_{nn} \in S_n} \neq 0; j=\overline{1,3}, n=\overline{N_1+2, N_1+N_2+1}.$$

Крайові умови на серединній поверхні тонких податливих пружних включень є такими:

$$\sigma_{j3}^{(n)}(\mathbf{x}_{nn}) = T_{jn}(\mathbf{x}_{nn}) + 4\pi G_n \left(\frac{2(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} \right)^{\delta_{j3}} \frac{\beta_{jn}(\mathbf{x}_{nn})}{h_n(\mathbf{x}_{nn})}, \mathbf{x}_{nn} \in S_n, j=\overline{1,3},$$

$$n=\overline{N_1+N_2+2, N_1+N_2+N_3+1}. \quad (3.3)$$

$$\text{Тут } \beta_{jn}(\mathbf{x}_{nn}) = \frac{u_{jn}^-(\mathbf{x}_{nn}) - u_{jn}^+(\mathbf{x}_{nn})}{4\pi} \Big|_{\mathbf{x}_{nn} \in S_n} \neq 0 - \text{стрибок переміщень на включенні}$$

у напрямі осей $O_n \mathbf{x}_{jn}$; $h_n(\mathbf{x}_{nn})$, $\mathbf{x}_{nn} \in S_n$ – залежність товщини включення від координати точки його серединної поверхні.

Переміщення абсолютно жорсткого включення, задаються виразами:

$$u_j^{(m)}(\mathbf{x}_{mm}) = \sum_{i=1}^3 u_i^0(\mathbf{x}_{mm}) l_{ij1m} + a_{jm} + (-1)^j (1 - \delta_{j3}) b_{1m} x_{3-jmm} + \delta_{j3} \times$$

$$\times (-b_{2m} x_{1mm} + b_{3m} x_{2mm}), j=\overline{1,3}, m=\overline{N_1+N_2+N_3+2, N_1+N_2+N_3+N_4+1},$$

$$(3.4)$$

де $u^{(0)}(\mathbf{x}_{mm})$ – переміщення в однорідному тілі з характеристиками матриці на місці розташування включення, викликані зовнішнім навантаженням, a_{jm} , b_{jm} – невідомі константи, які характеризують переміщення включення як жорсткого цілого, що визначаються з умов

$$\begin{aligned}
\iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) d_\xi S_m &= 0, \quad j = \overline{1,3}, \\
\iint_{S_m} \xi_i \omega_{3m}(\xi) d_\xi S_m &= 0, \quad i = 1, 2, \\
\iint_{S_m} [\xi_2 \omega_{1m}(\xi) - \xi_1 \omega_{2m}(\xi)] d_\xi S_m &= 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

де $\omega_{jm}(x_{mm}) = \sigma_{jm}^-(x_{mm}) - \sigma_{jm}^+(x_{mm})|_{x_{mm} \in S_m} \neq 0$ - стрибок напружень при переході точки через серединну площину m -того жорсткого тонкого включення.

Подаючи розв'язки рівнянь рівноваги у вигляді комбінації пружних потенціалів простого та подвійного шару [59] і задовольняючи крайові умови (2.1), (3.2)-(3.5) в областях всіх тріщин та включень і враховуючи принцип суперпозиції (3.1), отримуємо систему дуальних граничних інтегральних рівнянь в напруженнях та переміщеннях:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u_{is}(\mathbf{x}_{ss}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_s} [U_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \xi) t_{js}(\xi) - T_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \xi, \mathbf{n}^{(s)}) u_{js}(\xi)] d_\xi S &= 0, \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\
\sum_{l=2}^{N_1+1} \sum_{q=1}^3 \left(\frac{1}{2} u_{ql}(\mathbf{x}_{ls}) l_{qls} + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} [U_{qj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi) l_{qls} t_{jl}(\xi) - T_{qj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{qls} u_{jl}(\xi)] d_\xi S \right) &+ \\
+ \sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) \Omega_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns}) d_\xi S + \sum_{k=N_1+N_2+2}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) \Omega_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) d_\xi S &+ \\
+ \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Theta_{ijms}(\xi, \mathbf{x}_{ms}) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 u_j^{(0)}(\mathbf{x}_{ss}) l_{ij1s}, \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\
\sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) K_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns}) d_\xi S + \sum_{k=N_1+N_2+2}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) K_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) d_\xi S &+ \\
+ \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Phi_{ijms}(\xi, \mathbf{x}_{ms}) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{l=2}^{N_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{c=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} [D_{qcj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi) l_{q3ls} l_{cils} \times &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times t_{jl}(\xi) - L_{qcj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{q3ls} l_{cils} u_{jl}(\xi) \Big] d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} T_{is}(\mathbf{x}_{ss}), \quad s = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}, \\
& \sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) K_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns}) d_\xi S + g_{is} \beta_{is}(\mathbf{x}_{ss}) + \sum_{k=N_1+N_2+2}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) K_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) d_\xi S + \\
& + \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Phi_{ijms}(\xi, \mathbf{x}_{ms}) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{l=2}^{N_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{c=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} \Big[D_{qcj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi) l_{q3ls} l_{cils} \times \\
& \times t_{jl}(\xi) - L_{qcj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{q3ls} l_{cils} u_{jl}(\xi) \Big] d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} T_{js}(\mathbf{x}_{ss}), \\
& s = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}, \\
& \frac{1}{2} u_{is}(\mathbf{x}_{ss}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_s} \Big[U_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \xi) t_{js}(\xi) - T_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}_{ss}, \xi, \mathbf{n}^{(s)}) u_{js}(\xi) \Big] d_\xi S = 0, \quad s = \overline{2, N_1 + 1}, \\
& \sum_{l=2}^{N_1+1} \sum_{q=1}^3 \left(\frac{1}{2} u_{ql}(\mathbf{x}_{ls}) l_{iqls} + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} \Big[U_{qj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi) l_{iqls} t_{jl}(\xi) - T_{qj}^{(1)}(\mathbf{x}_{ls}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{iqls} u_{jl}(\xi) \Big] d_\xi S \right) + \\
& + \sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) \Omega_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns}) d_\xi S + \sum_{k=N_1+N_2+2}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) \Omega_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) d_\xi S + \\
& + \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Theta_{ijms}(\xi, \mathbf{x}_{ms}) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 u_j^{(0)}(\mathbf{x}_{ss}) l_{ij1s} + a_{is} + (-1)^i (1 - \delta_{i3}) \times \\
& \times b_{1s} x_{3-i ss} + \delta_{i3} (-b_{2s} x_{1ss} + b_{3s} x_{2ss}), \quad s = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}, \\
& \mathbf{x}_{ns}, \mathbf{x}_{ks}, \mathbf{x}_{ms}, \mathbf{x}_{ss} \in S_s, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

де $g_{is} = -\frac{4\pi(1-\nu_1)}{h_s(\mathbf{x}_{ss})} \frac{G_s}{G_1} \left[\frac{2(1+\nu_s)}{1-2\nu_s} \right]^{\delta_{j3}}$ віднесені до товщини пружні характеристики

тики тонкого податного включення.

Явний вигляд ядер $K_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns})$, $\Phi_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns})$, $\Theta_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns})$, $\Omega_{ijns}(\xi, \mathbf{x}_{ns})$ інтегральних рівнянь залежить від взаємного розміщення об'єктів в тілі і в загальному випадку задається як [59]:

$$K_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = \left(x_{3ks} \frac{\partial \hat{A}_{jks}}{\partial x_{jks}} - \hat{B}_{jls} \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|} \right), \quad (3.7)$$

$$\Phi_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = \frac{\partial \hat{A}_{jks}}{\partial x_{jks}} |\mathbf{x}_{ks} - \xi| - 2(1 - \nu_0) \hat{C}_{jls} \frac{1}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|}, \quad (3.8)$$

$$\Theta_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = \frac{H_{jls}}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|} - \frac{1}{2(1 - \nu_0)} \frac{\partial \hat{F}_{jks}}{\partial x_{jks}} |\mathbf{x}_{ks} - \xi|, \quad (3.9)$$

$$\Omega_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = \left(\hat{D}_{jls} - \frac{x_{3ks}}{2(1 - \nu_0)} \frac{\partial \hat{F}_{jks}}{\partial x_{jks}} \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|} \right), \quad (3.10)$$

де $|\mathbf{x}_{ks} - \xi|$ – відстань між точками $\mathbf{x}_{ks} \in S_k$ і $\xi \in S_s$; $\hat{A}_{jks}$; $\hat{B}_{jls}$; $\hat{C}_{jls}$; $\hat{D}_{jls}$; $\hat{F}_{jks}$ – диференціальні оператори з постійними коефіцієнтами. Запис цих операторів можна подати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_{jks} \\ \hat{B}_{jls} \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^3 q_{ijks} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_{iks}^2} + \frac{q_{1jks}^*}{B_{1jls}^*} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{1ks} \partial x_{2ks}} + \frac{m_{j3ks}^*}{B_{2jls}^*} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_{2ks} \partial x_{3ks}} + \frac{n_{j3ks}^*}{B_{3jls}^*} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{1ks} \partial x_{3ks}},$$

$$\hat{C}_{jls} = \sum_{i=1}^3 C_{ijls} \frac{\partial}{\partial x_{iks}}, \quad \left. \begin{aligned} \hat{D}_{jls} \\ \hat{F}_{jls} \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^3 \frac{D_{ijls}}{l_{ijks}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{iks}} \right\}. \quad (3.11)$$

Коефіцієнти l_{j3ks} ; l_{j3ks}^* ; m_{j3ks} ; m_{j3ks}^* ; n_{j3ks} ; n_{j3ks}^* ; B_{ijks} ; B_{ijks}^* ; C_{ijks} ; D_{ijks} ; H_{ijks} є постійними величинами. Ці величини залежать лише від взаємного розміщення тріщин та включень і пружних сталих матеріалу матриці, що їх містить і визначаються виразами:

$$q_{ijks} = l_{ijks} l_{i3ks},$$

$$q_{1jks}^* = l_{1jks} l_{23ks} + l_{13ks} l_{2jks}, \quad q_{2jks}^* = l_{3jks} l_{23ks} + l_{33ks} l_{2jks}, \quad q_{3jks}^* = l_{1jks} l_{33ks} + l_{13ks} l_{3jks},$$

$$B_{1jls} = \nu_1 \delta_{2l} q_{2jks}^* - (1 - 2\nu_1) \delta_{3l} q_{1jks}, \quad B_{2jls} = \nu_1 \delta_{1l} q_{3jks}^* - (1 - 2\nu_1) \delta_{3l} q_{2jks},$$

$$B_{3j l k s} = \delta_{1l} q_{3j k s}^* + \delta_{2l} q_{2j k s}^* + \delta_{3l} q_{3j k s} + 2\nu_1 \delta_{3l} (q_{1j k s} + q_{2j k s}),$$

$$B_{1j l k s}^* = -\nu_1 (\delta_{1l} q_{2j k s}^* + \delta_{2l} q_{3j k s}^*) - (1 - 2\nu_1) \delta_{3l} q_{1j k s}^*,$$

$$B_{2j l k n}^* = 2\delta_{2l} (\nu_1 q_{1j k s} + q_{2j k s}) + (1 - \nu_1) \delta_{1l} q_{1j k s}^*,$$

$$B_{3j l k s}^* = 2\delta_{1l} (q_{1j k s} + \nu_1 q_{2j k s}) + (1 - \nu_1) \delta_{2l} q_{1j k s}^*,$$

$$C_{1j l k s} = \delta_{2l} q_{1j k s}^* + \delta_{3l} q_{3j k s}^* + \left(\frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \delta_{j3} + 2q_{1j k s} \right) \delta_{1l},$$

$$C_{2j l k s} = \delta_{3l} q_{2j k s}^* + \delta_{1l} q_{1j k s}^* + \left(\frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \delta_{j3} + 2q_{2j k s} \right) \delta_{2l},$$

$$C_{3j l k s} = \delta_{1l} q_{3j k s}^* + \delta_{2l} q_{2j k s}^* + \left(\frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \delta_{j3} + 2q_{3j k s} \right) \delta_{3l},$$

$$D_{1j l k s} = \delta_{1l} l_{3j k s} - \frac{1 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)} \delta_{3l} l_{1j k s}, \quad D_{2j l k s} = \delta_{2l} l_{3j k s} - \frac{1 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)} \delta_{3l} l_{2j k s},$$

$$D_{3j l k s} = \delta_{1l} l_{1j k s} + \delta_{2l} l_{2j k s} + \frac{3 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)} \delta_{3l} l_{3j k s}, \quad H_{j l k s} = \sum_{i=1}^3 \delta_{il} l_{ij k s}.$$

Загальна кількість інтегральних рівнянь дуального типу системи (3.6) – $3(2N_1 + N_2 + N_3 + N_4)(6N_1 + 3N_4$ у переміщеннях з сингулярністю і $3N_2 + 3N_3$ у напруженнях з гіперсингулярністю у ядрах) відносно міжфазних переміщень та зусиль на поверхнях об'ємних пружних включень, функцій розкриття тріщин, стрибків переміщень на поверхнях тонких податливих включень, стрибків напружень на поверхнях тонких абсолютно жорстких включень та їх поступальних переміщень і поворотів. Важливо, що відповідальні за взаємодію ядра отриманих ГІР є регулярними через віддаленість у них точок джерела і інтегрування, тому допускають стандартне числове інтегрування. Дискретизація цієї системи рівнянь здійснюємо поєднанням граничноелементного підходу, запропонованого в попередньому розділі для об'ємистих включень, та запозичених з роботи [59] регуляризаційних і дискретизаційних процедур

щодо ГР для тривимірних задач теорії тріщин та тонких включень.

У такій схемі необхідно враховувати умову кореневого зникання стрибків переміщень на контурі області тріщини або пружного тонкого включення та кореневий ріст стрибків напружень при підході до фронтів жорстких включень. Для цього у випадку тріщин і тонкостінних включень загальної форми пропонується здійснити відображення області об'єкта S_n на круглу область одиничного радіусу $\tilde{S}_n^C$ за допомогою зміни змінних $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_n)$. Тоді стрибки переміщень та напружень будуть: на поверхнях тріщин

$$\alpha_{jn}(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_n)) = \sqrt{1 - \tilde{x}_{1n}^2 - \tilde{x}_{2n}^2} \alpha_j^*(\tilde{\mathbf{x}}_n), \quad j = \overline{1,3}, \quad n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}, \quad (3.12)$$

на поверхнях тонких податливих пружних включень

$$\beta_{jk}(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k)) = \sqrt{1 - \tilde{x}_{1k}^2 - \tilde{x}_{2k}^2} \beta_j^*(\tilde{\mathbf{x}}_k); \quad j = \overline{1,3}; \quad k = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}, \quad (3.13)$$

на поверхнях тонких жорстких включень

$$\omega_{jm}(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_m)) = \omega_j^*(\tilde{\mathbf{x}}_m) / \sqrt{1 - \tilde{x}_{1m}^2 - \tilde{x}_{2m}^2}, \quad j = \overline{1,3},$$

$$m = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}, \quad (3.14)$$

де α_{jq}^* , β_{jq}^* та ω_{jq}^* – нові невідомі функції, задані в області $\tilde{S}_q^C$ і наділені властивостями диференційованості завдяки їхній достатній гладкості.

Для залучення цих подань стрибків переміщень і напружень у ГР та виділення сингулярностей слід отримати явні вирази ядер (3.7) та (3.8).

Виконавши всі операції диференціювання у співвідношеннях (3.7) і згрупувавши відповідні члени у виразах (3.11), функції $K_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})$ записуються як:

$$K_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = -\frac{a_{ijks}}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|^3} - \frac{b_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|^5} + \frac{c_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|^7}, \quad (3.15)$$

$$\text{де } |\mathbf{x}_{ks} - \xi| = \sqrt{(x_{1ks} - \xi_1)^2 + (x_{2ks} - \xi_2)^2 + x_{3ks}^2};$$

$$a_{ijks} = B_{1ijks} + B_{2ijks} + B_{3ijks};$$

$$\begin{aligned} b_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = & 3x_{3ks} \left\{ \delta_{i3} \left(x_{jks} - (1 - \delta_{3j}) \xi_j \right) + \delta_{1j} \left[2q_{1iks} (x_{1ks} - \xi_1) + q_{ijks}^* (x_{2ks} - \xi_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_{ijks}^* x_{3ks} \right] + \delta_{2j} \left[2q_{2iks} (x_{2ks} - \xi_2) + q_{1jks}^* (x_{1ks} - \xi_1) + q_{2jks}^* x_{3ks} \right] + \delta_{3j} \left[2q_{3iks} x_{3ks} + \right. \right. \\ & \left. \left. - q_{2jks}^* (x_{2ks} - \xi_2) + q_{3jks}^* (x_{1ks} - \xi_1) \right] \right\} - 3B_{1ijks} (x_{1ks} - \xi_1)^2 - 3B_{2ijks} (x_{2ks} - \xi_2)^2 - \\ & - 3B_{3ijks} x_{3ks}^2 - 3B_{1ijks}^* (x_{1ks} - \xi_1)(x_{2ks} - \xi_2) - 3B_{2ijks}^* (x_{2ks} - \xi_2)x_{3ks} - 3B_{3ijks}^* (x_{1ks} - \xi_1)x_{3ks}. \\ c_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = & 15x_{3ks} \left(x_{jks} - (1 - \delta_{3j}) \xi_j \right) \left\{ q_{1iks} (x_{1ks} - \xi_1)^2 + q_{2iks} (x_{2ks} - \xi_2)^2 + q_{3iks} x_{3ks}^2 + \right. \\ & \left. + q_{1iks}^* (x_{1ks} - \xi_1)(x_{2ks} - \xi_2) + q_{2iks}^* (x_{2ks} - \xi_2)x_{3ks} + q_{3iks}^* (x_{1ks} - \xi_1)x_{3ks} \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогічні перетворення у виразах (3.8) з врахуванням (3.11) дають змогу вивести явний вигляд ядер $\Phi_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})$, а саме:

$$\Phi_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = \frac{d_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|^3} + \frac{h_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks})}{|\mathbf{x}_{ks} - \xi|^5}, \quad (3.17)$$

де

$$\begin{aligned} d_{ijks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = & \left[\left(2(1 - \nu_0) C_{1ijks} + l_{i3ks} \delta_{1j} \right) (x_{1ks} - \xi_1) + \left(2(1 - \nu_0) C_{2ijks} + m_{i3ks} \delta_{2j} \right) \times \right. \\ & \times (x_{2ks} - \xi_2) + \left. \left(2(1 - \nu_0) C_{3ijks} + q_{3iks} \delta_{3j} \right) x_{3ks} \right] - \left\langle 2q_{1iks} (x_{1ks} - \xi_1) + 2q_{2iks} (x_{2ks} - \xi_2) + \right. \\ & \left. + 2q_{3iks} x_{3ks} + q_{1iks}^* \left[\delta_{1j} (x_{2ks} - \xi_2) + \delta_{2j} (x_{1ks} - \xi_1) \right] + q_{2iks}^* \left[\delta_{3j} (x_{2ks} - \xi_2) + \delta_{2j} x_{3ks} \right] + \right. \\ & \left. + q_{3iks}^* \left[\delta_{3j} (x_{1ks} - \xi_1) + \delta_{1j} x_{3ks} \right] \right\rangle, \end{aligned}$$

$$h_{iks}(\xi, \mathbf{x}_{ks}) = q_{1iks}(x_{1ks} - \xi_1)^2 + q_{2iks}(x_{2ks} - \xi_2)^2 + q_{3iks}x_{3ks}^2 + q_{1iks}^*(x_{1ks} - \xi_1)(x_{2ks} - \xi_2) + q_{2iks}^*(x_{2ks} - \xi_2)x_{3ks} + q_{3iks}^*(x_{1ks} - \xi_1)x_{3ks}. \quad (3.18)$$

Співвідношення між координатами точки $\mathbf{x}_{ks}$ в k -й та s -й системах координат будуть мати вигляд:

$$x_{qks} = e_{qks} d_{ks} + \sum_{i=1}^2 l_{qiks} x_{iss}, \quad q = \overline{1,3} \quad (3.19)$$

Тут враховано, що $x_{3ss} = 0$, оскільки ця точка знаходиться в площині ротацію s -го об'єкта, а вісь $O_s x_{3s}$ є перпендикулярною до цієї площини.

Як видно з перетворень (3.15) - (3.18), всі гіперсингулярні інтеграли з областю інтегрування S_q ($q = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$) для q -го об'єкта в системі рівнянь (3.6) є лінійними комбінаціями інтегралів, що мають таку структуру:

$$\iint_{S_q} \frac{\rho_{iq}(\xi)}{|\mathbf{x}_{qq} - \xi|^3} \frac{(x_1 - \xi_1)^j (x_2 - \xi_2)^k}{|\mathbf{x}_{qq} - \xi|^{j+k}} d_\xi S, \quad i = \overline{1,3}, \quad j + k = 0, 2, 4, \quad (3.20)$$

де $\rho_{iq}(\xi)$ – густини інтегралів, що мають фізичний зміст функцій $\alpha_{iq}(\xi)$ розкриття поверхонь тріщин ($q = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$), функцій $\beta_{iq}(\xi)$ стрибків переміщень на поверхнях тонких пружних включень ($q = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$) в напрямку осей $O_q x_{iq}$ локальної системи координат прив'язаної до q -го об'єкта. Всі ці густини мають спільну властивість – рівність нулеві на межі області інтегрування.

З урахуванням подань (3.12), (3.13) врахування поведінки густин інтегралів на межі області інтегрування та відображення області інтегрування на

круглу область одиничного радіуса, процедура регуляризації гіперсингулярних інтегралів (3.20) виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_q} \frac{\rho_{iq}(\xi)}{|\mathbf{x}_{qq} - \xi|^3} \frac{(x_1 - \xi_1)^j (x_2 - \xi_2)^k}{|\mathbf{x}_{qq} - \xi|^{j+k}} d_\xi S = \iint_{\tilde{S}_q^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} \frac{(\tilde{x}_1 - y_1)^j (\tilde{x}_2 - y_2)^k}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^{j+k}} \times \\
 & \times \left[R(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \right]^{3+j+k} \rho_{iq}^*(\mathbf{y}) d_\mathbf{y} S = I_{00jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}}) + I_{10jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1} + I_{01jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_2} + \\
 & + \frac{1}{2} I_{20jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1^2} + I_{11jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} + \frac{1}{2} I_{02jk}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_2^2} + \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} \times \\
 & \times F(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \left[\rho_{iq}^*(\mathbf{y}) - \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}}) - (y_1 - \tilde{x}_1) \frac{\partial \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1} - (y_2 - \tilde{x}_2) \frac{\partial \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{1}{2} (y_1 - \tilde{x}_1)^2 \times \right. \\
 & \times \left. \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1^2} - (y_1 - \tilde{x}_1) (y_2 - \tilde{x}_2) \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2} - \frac{1}{2} (y_2 - \tilde{x}_2)^2 \frac{\partial^2 \rho_{iq}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_2^2} \right] d_\mathbf{y} S, \quad i = \overline{1, 3}, \\
 & s = 0, 2, 4, \quad j + k = 0, 5s, \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

де $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_q^C$; регулярна функція R описує залежність відстані між точками $\tilde{\mathbf{x}}$ і $\mathbf{y}$ та їх образами, а саме $R(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = |\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}| / |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})|$; останній інтеграл в правій частині (3.21) існує в звичайному сенсі;

$$\begin{aligned}
 I_{mnjk}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \iint_{\tilde{S}_q^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} \frac{(\tilde{x}_1 - y_1)^j (\tilde{x}_2 - y_2)^k}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^{j+k}} \left[R(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \right]^{3+j+k} (\tilde{x}_1 - y_1)^m \times \\
 & \times (\tilde{x}_2 - y_2)^n d_\mathbf{y} S, \quad \mathbf{x} \in \tilde{S}_q^C, \quad j + k = 0, 2, 4, \quad m, n = \overline{0, 2}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Значення інтегралів (3.22) для кругових областей інтегрування обчислюємо через полігармонічні многочлени

$$\left\{ \begin{matrix} u_n^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ v_n^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{matrix} \right\} = r^{n+m-1} \left\{ \begin{matrix} \cos(n-m+1)\varphi \\ \sin(n-m+1)\varphi \end{matrix} \right\}, n=0,1,\dots,m=1,2,\dots, r^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2, \varphi = \arctg \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1}.$$

за формулою [146]

$$\iint_{\tilde{S}_q^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^3} \left\{ \begin{matrix} u_n^m(\mathbf{y}) \\ v_n^m(\mathbf{y}) \end{matrix} \right\} d_y S = \frac{\pi^2}{(2m-2)!!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m} \frac{(2n+2k-2m+3)!!}{(2n+2k-2m+2)!!} \times$$

$$\times \frac{(2k+1)!!}{(2k-2m+3)!!} \binom{m-1}{k} \left\{ \begin{matrix} u_{k+n-m+1}^{(k+1)}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ v_{k+n-m+1}^{(k+1)}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{matrix} \right\}.$$

Зокрема, інтеграли (3.22) з еліптичною областю інтегрування обчислюються шляхом інтегрування по частинах і визначаються через повні еліптичні інтеграли першого $K(e)$ і другого $E(e)$ роду, де $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$, a та b – пі-восі еліпса. Значення деяких інтегралів такого типу приведені в Додатку Б.

Щодо особливих інтегралів в областях розташування тонких жорстких включень, то для їх регуляризації на основі подання стрибків напружень (3.14) застосована техніка, описана у роботі [59].

Числове розв'язування регуляризованих ГІР полягає в дискретизації областей S_q ($q = \overline{N_1+2, N_1+N_2+N_3+N_4+1}$) на малі підобласті і виборі колокаційних точок всередині підобластей. Значення невідомих функцій стрибків переміщень (для тріщин та пружних тонких включень малої жорсткості) та стрибків напружень (для абсолютно жорстких тонких включень) визначаються шляхом задоволення рівнянь системи (3.6) у колокаційних точках. При цьому регулярні інтеграли у рівняннях (3.6) обчислюємо методом Гауса-Лежандра (2.20), а похідні від невідомих функцій в певному вузлі подаємо скінченними різницями через значення цих функцій у сусідніх вузлах області інтегрування.

Після розв'язування регулярного аналогу системи ГІР (3.6) коефіцієнти

інтенсивності напружень (КІН) на фронті тріщини, що займає область S_q ($q = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$) обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned}
 K_{1q}(\mathbf{x}_{0q}) &= -\pi\sqrt{2\pi}\frac{G_1}{1-\nu_1}\left[-\frac{\partial L_q}{\partial x_{1q}}\cos\psi_{0q}-\frac{\partial L_q}{\partial x_{2q}}\sin\psi_{0q}\right]^{0,5}\alpha_{3q}^*(\mathbf{x}_{0q}); \\
 K_{2q}(\mathbf{x}_{0q}) &= -\pi\sqrt{2\pi}\frac{G_1}{1-\nu_1}\left[-\frac{\partial L_q}{\partial x_{1q}}\cos\psi_{0q}-\frac{\partial L_q}{\partial x_{2q}}\sin\psi_{0q}\right]^{0,5}\times \\
 &\quad \times\left[\alpha_{1q}^*(\mathbf{x}_{0q})\cos\psi_{0q}+\alpha_{2q}^*(\mathbf{x}_{0q})\sin\psi_{0q}\right]; \\
 K_{3q}(\mathbf{x}_{0q}) &= -\pi\sqrt{2\pi}G_0\left[-\frac{\partial L_q}{\partial x_{1q}}\cos\psi_{0q}-\frac{\partial L_q}{\partial x_{2q}}\sin\psi_{0q}\right]^{0,5}\times \\
 &\quad \times\left[\alpha_{1q}^*(\mathbf{x}_{0q})\sin\psi_{0q}-\alpha_{2q}^*(\mathbf{x}_{0q})\cos\psi_{0q}\right], \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

де $\mathbf{x}_{0q}$ – точка контуру L_q області тріщини S_q , а ψ_{0q} – кут між нормаллю до контуру цієї тріщини в точці $\mathbf{x}_{0q}$ і віссю $O_q x_{1q}$.

3.2. Числовий аналіз взаємодії плоскої тріщини зі скінченним волокном у безмежній пружній матриці

Волокнисті включення можуть відігравати роль екрануючих чи навпаки підсилюючих чинників для поширення тріщин у композитному тілі залежно від їх взаємної геометричної конфігурації та жорсткісних характеристик. Цей ефект впливає з перерозподілу полів деформацій та напружень за рахунок взаємодії тріщина-волокно в пружному середовищі. На практиці утворення тріщини можливе у матриці (матрична тріщина), у волокні (волоконна тріщина) та на міжфазному з'єднанні (інтерфейсна тріщина), але при осьовому

навантаженні впорядковано структурованого композиту переважаючими є перші дві конфігурації [416]. Слід зазначити, що волокно виступає в якості коректора навантаження відносно матричної тріщини та навантажувального передавача для волоконної.

З метою деталізації запропонованих у попередньому підрозділі формувань для множинних наповнювачів розглянемо ситуацію, коли тривимірна нескінченна пружна матриця містить плоску тріщину з поверхнею S^C та пружне сфероциліндричне волокно, обмежене гладкою поверхнею S^F . Тріщина може бути довільно розташована в матриці (Конфігурація I, Рис. 3.2 (а)) або у

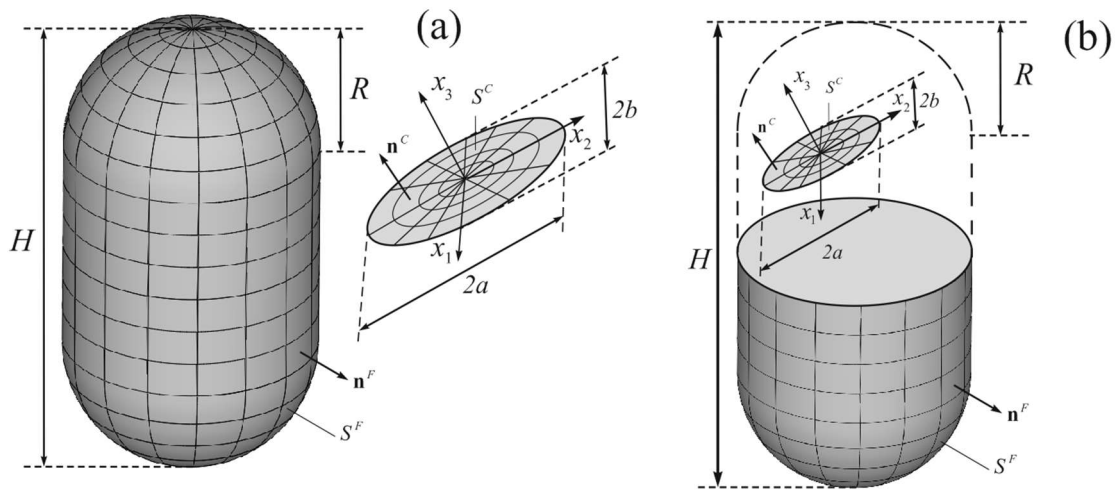


Рис. 3.2. Схема розташування плоскої тріщини відносно об'ємного пружного включення: а) матрична тріщина; б) волоконна тріщина

волокні (Конфігурація II, Рис. 3.2 (б)). Для зручності опису взаємного розташування розглянутих об'єктів вводиться система координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ з початком в центрі тріщини так, щоб площина $x_3 = 0$ співпадала з площиною тріщини, та система координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ з початком в центрі волокна. Матричний матеріал визначається густиною ρ_1 , модулем зсуву G_1 та коефіцієнтом Пуассона ν_1 , тоді як матеріал включення характеризується величинами ρ_2 , G_2 і ν_2 відповідно. Припускається ідеальний контакт між матрицею та включенням, що означає, що переміщення та напруження залишаються незмінними при переході через міжфазну поверхню S^F «матриця-волокно». Напружено-деформований стан у композитному матеріалі зумовлений навантаженням на

безмежності, яке характеризується компонентами вектора переміщень u_1^0, u_2^0, u_3^0 в матеріалі однорідної матриці, тобто за відсутності тріщини та включення. Поверхні тріщини S^C не навантажені.

Взаємне розташування включення та тріщини у тілі будемо характеризувати наступними величинами: d - віддаллю між центрами об'єктів, напрямними косинусами e_{j2} та e_{j1}^* ($j=\overline{1,3}$) векторів $\mathbf{d}_2$ та $\mathbf{d}_1$ у напрямку цієї відстані в системах координат $O_2 x_{12}x_{22}x_{32}$ та $O_1 x_{11}x_{21}x_{31}$ відповідно, а також косинусами $l_{ij} = \cos(\widehat{O_1 x_{i1}, O_2 x_{j2}})$ ($i, j = \overline{1,3}$) кутів між координатними осями.

Відповідно до принципу суперпозиції (3.1) та викладеного у попередньому розділі методу підобластей, компоненти вектора переміщень в матриці $u_i^{(1)} (i=\overline{1,3})$ та у включенні $u_i^{(2)} (i=\overline{1,3})$ для конфігурації I ($k=1$) і конфігурації II ($k=2$) подаються у системі координат $O_2 x_{12}x_{22}x_{32}$ в інтегральній формі як:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)}(\mathbf{x}) &= \beta^{(k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) t_j^{(k)}(\xi) - T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j^{(k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \iint_{S^C} \Omega_{ij21}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j^{(k)}(\xi) d_\xi S + f_i^{(k)}(\mathbf{x}); \\ u_i^{(3-k)}(\mathbf{x}) &= \beta^{(3-k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}, \xi) t_j^{(3-k)}(\xi) - T_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j^{(3-k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\ &+ f_i^{(3-k)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\text{де } \beta^{(k)} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } k=1; \\ 1, & \text{якщо } k=2, \end{cases} \quad f_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^0(\mathbf{x}), & \text{якщо } k=1; \\ 0, & \text{якщо } k=2, \end{cases}$$

$\mathbf{x}$ це вектор координат точки поля; $t_i^{(k)} (i=\overline{1,3})$ ($k=1,2$) є компонентами векторів зусиль, викликаних впливом включення на матрицю і навпаки; $\alpha_j^{(k)}(\mathbf{x})$ є функціями розкриття матричної тріщини ($k=1$) і волоконної тріщини

($k=2$) в нормальному ($j=3$) і тангенціальному ($j=1,2$) напрямках відносно площини тріщини; $\mathbf{n}^F$ є вектором зовнішньої нормалі до поверхні волокна (рис. 3.2); $\mathbf{n}^C$ з компонентами $n_j^C = \delta_{j3}$ є вектором нормалі до поверхні тріщини; δ_{ij} – символ Кронекера; $U_{ij}^{(k)}$, $T_{ij}^{(k)}$, $\Omega_{ij21}^{(k)}$ ($k=1,2$) є тривимірними фундаментальними розв’язками, що визначаються формулами (2.4) та (3.17).

Після підстановки виразів (3.24) в закон Гука і переходу до системи координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$, отримаємо інтегральні подання компонент тензора напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$ в матеріалі k ($k=1,2$), що містить тріщину, у формі

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) = & \beta^{(k)} \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[D_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) l_{s3} l_{mj} t_j^{(k)}(\xi) - L_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^F) l_{s3} l_{mj} u_j^{(k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\ & + \frac{G_0}{1-\nu_0} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^C} K_{ij11}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j^{(k)}(\xi) d_\xi S + g_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$g_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{jm}^0(\mathbf{x}) l_{ji} l_{m3}, & \text{якщо } k=1; \\ 0, & \text{якщо } k=2. \end{cases}$$

Тут, σ_{jm}^0 є відомими компонентами тензора напружень в системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$, що пов’язані законом Гука з полем переміщень $\mathbf{u}^0$, тривимірні фундаментальні розв’язки другого порядку $D_{smj}^{(k)}$, $L_{smj}^{(k)}$ та $K_{ij22}^{(k)}$ мають вирази (2.12) та (3.15).

Враховуючи умови ідеального контакту $u_j^{(1)} = u_j^{(2)} = u_j$ та $t_j^{(1)} = t_j^{(2)} = t_j$ ($j=\overline{1,3}$) в точці $\mathbf{x}_{22}$ на міжфазній поверхні S^F , з інтегральних подань (3.24) та (3.25) отримаємо шість граничних інтегральних рівнянь в переміщеннях для конфігурації I ($k=1$) і конфігурації II ($k=2$) як окремого випадку загального формулювання (3.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}_{22}) - \beta^{(3-k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) t_j(\xi) - T_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j(\xi) \right] d_\xi S = f_i^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}), \\
& \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}_{22}) - \beta^{(k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) t_j(\xi) - T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j(\xi) \right] d_\xi S - \\
& - \sum_{j=1}^3 \iint_{S^C} \Omega_{ij21}^{(k)}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j^{(k)}(\xi) d_\xi S = f_i^{(k)}(\mathbf{x}_{22}), \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S^F.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Підставивши співвідношення (3.25) у крайові умови $\sigma_{i3}^{(k)} = 0$ на поверхнях тріщини S^C , отримаємо три інтегральні рівняння в напруженнях для обох конфігурацій як окремого випадку загального формулювання (3.6)

$$\begin{aligned}
& \beta^{(k)} \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[D_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}_{12}, \xi) l_{s3} l_{mi} t_j^{(k)}(\xi) - L_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^F) l_{s3} l_{mi} u_j^{(k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\
& + \frac{G_0}{1-\nu_0} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^C} K_{ij11}^{(k)}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j^{(k)}(\xi) d_\xi S = -g_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}_{11}), \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S^C.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Тут координати точки $\mathbf{x}_{ms}$ ($m \neq s; m, s = 1, 2$) в m -й та s -й системах координат пов'язані залежністю:

$$x_{jms} = e_{jm} d_m + (-1)^k \sum_{i=1}^3 l_{mi} x_{iss}, \quad (j = \overline{1,3}), \quad x_{311} = 0. \tag{3.28}$$

Система рівнянь (3.26), (3.27) утворює повну систему з дев'яти скалярних ГР дуального типу відносно міжфазних переміщень u_j та зусиль t_j , а також $\alpha_j^{(k)}$ стрибків переміщень на поверхні тріщини. Тут слід зазначити, що у рівняннях (3.26) містяться сингулярні функції $T_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) та слабосингулярні функції $U_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) в інтегралах по поверхні волокна S^F , а інтеграли по поверхні тріщини S^C описують вплив тріщини на включення і вони регулярні,

оскільки в них точка джерела та точка інтегрування не збігаються. Рівняння (3.27) містять гіперсингулярні функції $K_{ij11}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) в інтегралах по поверхні тріщини, а інтеграли по поверхні включення описують вплив включення на тріщину, і вони є регулярними з тієї ж причини.

Для розв'язування системи ГПР (3.26), (3.27) застосуємо такий набір процедур: дискретизації інтегральних рівнянь, описану в п. 2.2 для суперпараметричних граничних елементів; методологію обчислення регулярних інтегралів по міжфазній поверхні S^F (2.21), (2.22); методику регуляризації і обчислення слабосингулярних інтегралів по міжфазній поверхні S^F (2.7), (2.24), (2.27); методику регуляризації гіперсингулярних інтегралів (3.21) з врахуванням кореневої поведінки (3.12) стрибків переміщень в області тріщини S^C .

Отриманий таким чином регулярний аналог системи ГПР (3.26), (3.27) зводимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом колокації у вузлових точках чотирикутних та трикутних суперпараметричних граничних елементів міжфазної поверхні S^F , а також в точках граничноелементного розбиття кругової області $\tilde{S}^C$ (образу поверхні тріщини S^C). Гранично-елементна сітка формується рівномірним поділом поверхні включення S^F у напрямку циліндричних координат на циліндричній частині поверхні включення та сферичних координат на сферичній його частині (рис. 3.2). Гранично-елементна сітка області $\tilde{S}^C$ формується однорядним розподілом відповідно до полярних координат r і φ (рис. 3.2).

У числовому прикладі розглянуто одновісне розтягувальне навантаження N_0 , прикладене не безмежності до матриці, що містить систему "тріщина-волокно" для обох конфігурацій I і II. Припускається також, що вісь симетрії включення перпендикулярна до площини тріщини, віддалене навантаження діє вздовж осі включення. Крім того, площина серединного поперечного перерізу включення збігається з площиною тріщини, що забезпечує ная-

вність симетрії і призводить до рівності нулеві коефіцієнтів інтенсивності напружень поперечного і поздовжнього зсувів на контурі тріщини.

Щоб перевірити точність запропонованого числово-аналітичного методу, розглянемо спочатку конфігурацію I зі сферичним включенням та матрицею, послабленою круговою тріщиною того ж радіусу $H = 2R = 2a$, що і включення, із різною відстанню d між їх центрами. Для порівняння з відомими результатами коефіцієнти Пуассона матриці та включення приймаються рівними $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$, а співвідношення модулів зсуву приймаємо $G = G_2/G_1 = 10$ і $G = G_2/G_1 = 1000$ (тверде включення). Також розглядається особливий випадок, що відповідає сусідству тріщини з порожниною $G = G_2/G_1 = 0$. Такі постановки задач на певних відстанях між включенням і тріщиною вивчалися в роботах [350] та [451].

Враховуючи вирази (3.23), КІН відриву в точці $\mathbf{x}_0$ контуру такої тріщини буде визначатися через розв'язок ГІР (3.6) так:

$$K_1(\mathbf{x}_0) = -2\pi\sqrt{a\pi}\frac{G_0}{1-\nu_0}\alpha_3^*(\mathbf{x}_0). \quad (3.29)$$

Гіперсингулярні інтеграли (3.22) з круговою областю інтегрування, необхідні для аналітико-числової регуляризації системи ГІР (3.6), подані в Додатку Б.1.

Для порівняння отриманих розв'язків з відомими в літературі результатами тут і надалі був розрахований нормалізований КІН нормального відриву $\bar{K}_I^{(k)} = K_I^{(k)} / K_I^*$ ($k = 1, 2$), віднесений до КІН для плоскої кругової тріщини радіуса a в безмежному просторі $K_I^* = 2N_0\sqrt{a/\pi}$ при аналогічному навантаженні. Контраст жорсткості між матрицею та включенням описується співвідношенням модулів зсуву $G = G_2/G_1$. У аналізі був використаний варіант сітки густиною від 120 до 360 граничних елементів на поверхні включення залежно

від його довжини та 120 граничних елементів на поверхні тріщини.

Обчислення показують хорошу збіжність з відомими результатами (рис. 3.3). На рис. 3.3 трикутниками позначені значення, що відповідають розв'язку, описаному в роботі [350], квадратами – значення, що відповідають розв'язку, запропонованому в [451].

Що стосується конфігурації II з круговою тріщиною усередині сферичного включення, то її досліджували в роботі [319] в умовах осової симетрії, коли центри тріщини і включення збігаються. Там були дані КІН тріщини різного радіусу та різного контрасту жорсткості матеріалів включення і матриці,

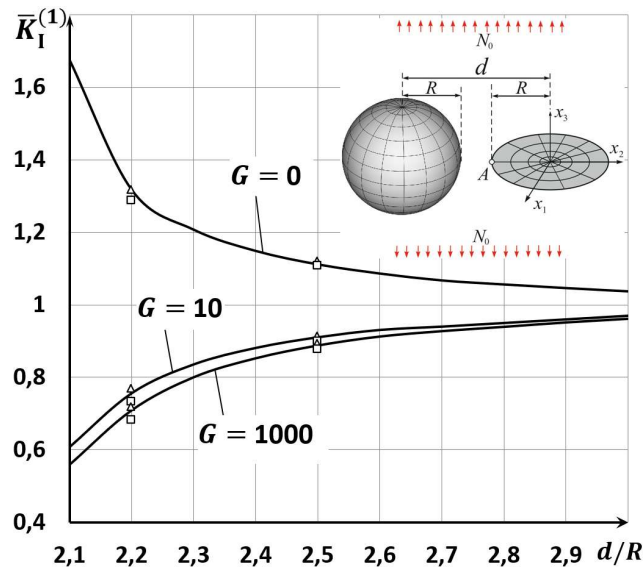


Рис. 3.3. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву на контурі кругової матричної тріщини від відстані між центрами тріщини та кульового включення.

а саме з $\nu_1 = 0,2$; $\nu_2 = 0,4$; $G=2$ (тверде включення); $\nu_1 = 0,4$; $\nu_2 = 0,2$; $G=2$ (відносно тверде включення); $\nu_1 = 0,4$; $\nu_2 = 0,2$; $G=0,5$ (м'яке включення).

На рис. 3.4 показано порівняння з результатами, отриманими за допомогою запропонованого нами методу. Як бачимо, також має місце ідеальне співпадіння результатів (квадратними маркерами показані результати роботи [319]).

Для дослідження впливу об'ємних пружних включень неканонічної форми на КІН кругової тріщини виконувався чисельний розрахунок для конфігурації I з тріщиною та включенням у вигляді сфероциліндричного волокна загальної довжини H . Довжина циліндричної частини включення становить

$H = 2R$. Радіус напівсфер заокруглення нижнього та верхнього торця включення співпадає з радіусом тріщини $a = R$. Відстань між центрами тріщини та включення рівна $d = 2.1R$.

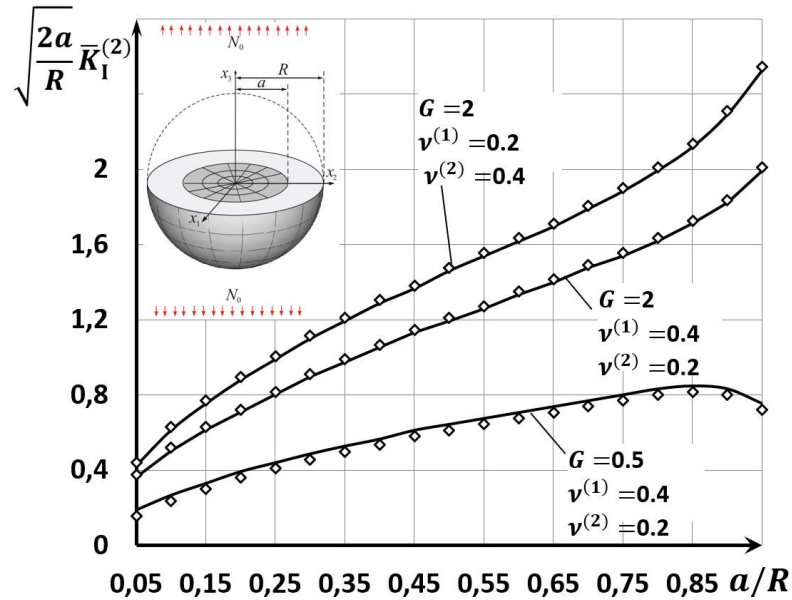


Рис. 3.4. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву від радіусу круглої тріщини в центрі кульового включення.

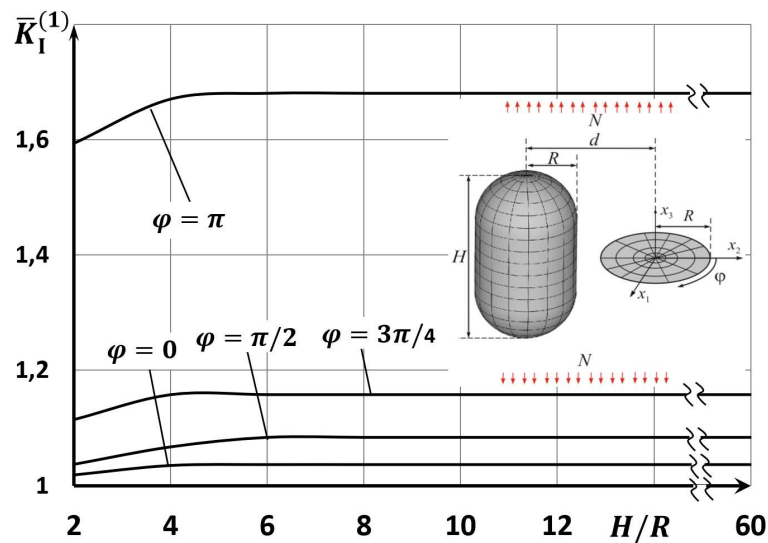


Рис. 3.5. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву в різних точках контуру круглої тріщини від висоти сусіднього м'якого волокна за сталої відстані між ними.

Залежність нормалізованого КІН на контурі області тріщини від довжини м'якого ($G=0,1$) та твердого ($G=10$) волокна показана на рис. 3.5 та 3.6, для конфігурації I. Обчислення проводились для точок контуру тріщини

$\varphi = 0$ (дальня точка контуру області тріщини по відношенню до включення);
 $\varphi = \pi/2$; $\varphi = 3\pi/4$; $\varphi = \pi$ (ближня точка контуру області тріщини по відношенню до включення), що відповідають кутовій координаті, яка відраховується від осі Ox_2 .

Розглянуто також задачу, що відповідає конфігурації II взаємного розташування тріщини та волокна сфероциліндричної форми. Радіус тріщини всередині включення приймався вдвічі меншим за радіус поперечного перерізу волокна $a = 0,5R$. Через інтерес до розгляду тріщини, близької до поверхні волокна, коли явища взаємодії найбільш виражені, відстань між центрами тріщини та волокна вибиралась як $d = 0.4R$.

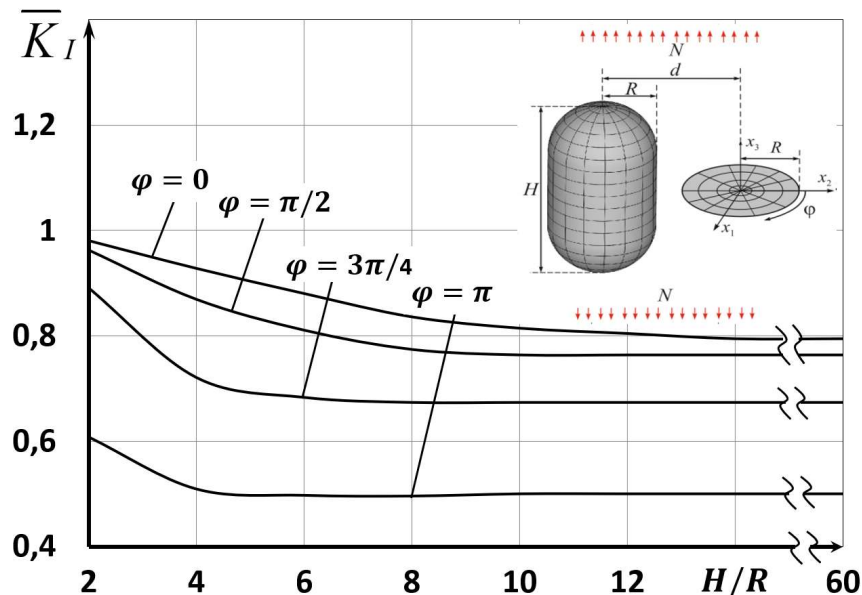


Рис. 3.6. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву в різних точках контуру круглої тріщини від висоти сусіднього м'якого волокна за сталої відстані між ними.

На рис. 3.7 та 3.8 для конфігурації II показано залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини всередині м'якого ($G=0,1$) та твердого ($G=10$) волокна від повної його висоти. Тут також враховано зміну нормалізованих КІН вздовж контуру тріщини внаслідок порушення осьової симетрії задачі. На рис. 3.7 та 3.8 приведено результати для точок контуру тріщини $\varphi = 0$ (ближня точка контуру області тріщини до міжфазної поверхні);

$\varphi = \pi/4$; $\varphi = \pi/2$; $\varphi = \pi$ (найбільш віддалена точка контуру області тріщини від міжфазної поверхні).

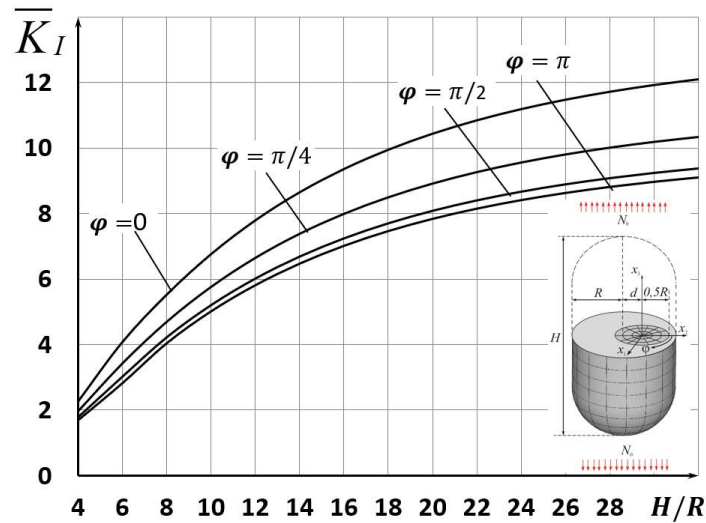


Рис. 3.7. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву в різних точках контуру круглої тріщини всередині м'якого волокна від його висоти за сталого розташування тріщини.

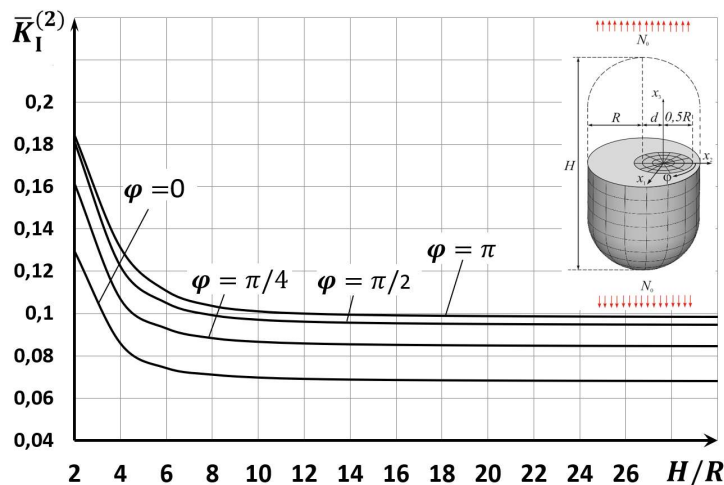


Рис. 3.8. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву в різних точках контуру круглої тріщини всередині твердого волокна від його висоти за сталого розташування тріщини.

Розрахунок нормалізованих КІН на контурі еліптичної тріщини з півосями a і b потребує відображення області тріщини S^C на кругову область одиничного радіуса $\tilde{S}^C$ за допомогою зміни змінних $\mathbf{x}_{11} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{11})$: $x_{111} = a\tilde{x}_{111}$, $x_{211} = b\tilde{x}_{211}$ задля врахування фізичного змісту функцій стрибків переміщень на поверхнях тріщини. Тоді функція нормального розкриття тріщини подається таким чином:

$$\alpha_3^{(k)}(\mathbf{x}_{11}) = \sqrt{1 - \frac{x_{111}^2}{a^2} - \frac{x_{211}^2}{b^2}} \alpha_3^{*(k)}(\mathbf{x}_{11}). \quad (3.30)$$

Після заміни змінних система ГР (3.26) та (3.27) для обох Конфігурацій з врахуванням симетрії набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_{22}) - \beta^{(3-k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) t_j(\xi) - T_{ij}^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j(\xi) \right] d_\xi S = f_i^{(3-k)}(\mathbf{x}_{22}), \\ & \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_{22}) - \beta^{(k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[U_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) t_j(\xi) - T_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j(\xi) \right] d_\xi S - \\ & - \iint_{\tilde{S}^C} \bar{\Omega}_{i321}^{(k)}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_3^{(k)}(\xi) d_\xi S = f_i^{(k)}(\mathbf{x}_{22}), \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S^F \\ & \beta^{(k)} \sum_{j=1}^3 \iint_{S^F} \left[D_{i3j}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_{12}, \xi) t_j^{(k)}(\xi) - L_{i3j}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_{12}, \xi, \mathbf{n}^F) u_j^{(k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\ & + \frac{G_0}{1 - \nu_0} \iint_{\tilde{S}^C} K_{i311}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_{11}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_3^{(k)}(\xi) d_\xi S = -g_{i3}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_{11}), \quad \tilde{\mathbf{x}}_{11}, \tilde{\mathbf{x}}_{12} \in S^C. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тут модифіковані функції $\bar{\Omega}_{i321}^{(k)}$, $\bar{K}_{i311}^{(k)}$ визначені наступним чином:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{i321}^{(k)}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) &= ab \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \Omega_{i321}^{(k)}(\mathbf{x}_{21}, \mathbf{f}(\xi), \mathbf{n}^C), \\ \bar{K}_{i311}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_{11}, \xi, \mathbf{n}^C) &= ab \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} K_{i311}^{(k)}(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{11}), \mathbf{f}(\xi), \mathbf{n}^C), \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для розв'язування системи ГР (3.31) застосуємо: процедуру дискретизації інтегральних рівнянь, описану в п. 2.2 для суперпараметричних граничних елементів; обчислення регулярних інтегралів по поверхні S^F включення (2.21), (2.22); регуляризацию і обчислення слабо сингулярних інтегралів по поверхні S^F (2.7), (2.24), (2.27); схему регуляризації (3.21) з аналітичним обчисленням інтегралів (3.22), значення яких приведено в Додатку Б.2.

Слід зазначити, що подання функцій стрибків переміщень у формі (3.30)

спрощує визначення КІН на контурі тріщини, тому що вони обчислюються безпосередньо через розв'язки отриманих ГР. Зокрема, КІН нормального відриву $K_I^{(k)}$ для матричної тріщини ($k=1$) або волоконної тріщини ($k=2$) як функції полярного кута φ точки контуру тріщини визначається за формулою .

$$K_I^{(k)}(\varphi) = -\frac{N_0 G_k \sqrt{\pi}}{2(1-\nu_k) \sqrt{b}} \left[\frac{(b/a)^2 + \tan^2 \varphi^*}{1 + \tan^2 \varphi^*} \right]^{1/4} \alpha_3^{(k)}(\sin \varphi^*, \cos \varphi^*), \quad k=1,2 \quad (3.33)$$

Тут φ^* є полярною координатою образу точки контуру тріщини, отриманої після заміни змінних. Кути φ^* та φ пов'язані залежністю $\varphi = \tan^{-1}(b \tan \varphi^* / a)$.

Відомо, що ізольована еліптична тріщина в безмежному твердому тілі, що навантажене розтягувальними зусиллями на нескінченності, у порівнянні з круговою тріщиною відрізняється особливими точками А і В на її контурі, а саме на малій і великій півосях, де досягаються максимальні та мінімальні значення КІН, відповідно [320]. З огляду на це аналізуються дві позиції матричної еліптичної тріщини відносно волокна для конфігурації І, коли точка А (рис. 3.9) та В (рис. 3.10) є найближчою до поверхні волокна.

На тривимірних графіках показано значення нормалізованого КІН нормального відриву $\bar{K}_I^{(k)} = K_I^{(k)} / K_I^*$ ($k=1,2$), віднесеного до КІН для плоскої кругової тріщини в безмежному просторі, що описана навколо даної еліптичної області $K_I^* = 2N_0 \sqrt{a/\pi}$ при аналогічному навантаженні.

Більша піввісь матричної тріщини рівна радіусу волокна $a=R$. Довжина волокон вважається рівною $H=6R$, а співвідношення модулів зсуву компонент композиту прийнято $G=10$ (тверде волокно). Чисельні результати описують поведінку нормалізованих КІН залежно від відстані між тріщиною та поверхнею волокна. Крім того, враховано різні співвідношення півосей еліптичної тріщини, а саме $b/a = 0.5$ на рис. 3.9 (а) та рис. 3.10 (а); $b/a = 0.8$ на рис. 3.9 (б) та рис. 3.10 (б).

Аналогічні залежності нормалізованих КІН побудовані у випадку конфігурації II з еліптичною тріщиною у твердому волокні з $G=10$ і довжиною $H=6R$ (рис. 3.11). Дефект спрямований до поверхні волокна більшою піввіссю, щоб уникнути перетину тріщини та поверхні волокна для малих відстаней між центрами розглянутих об'єктів.

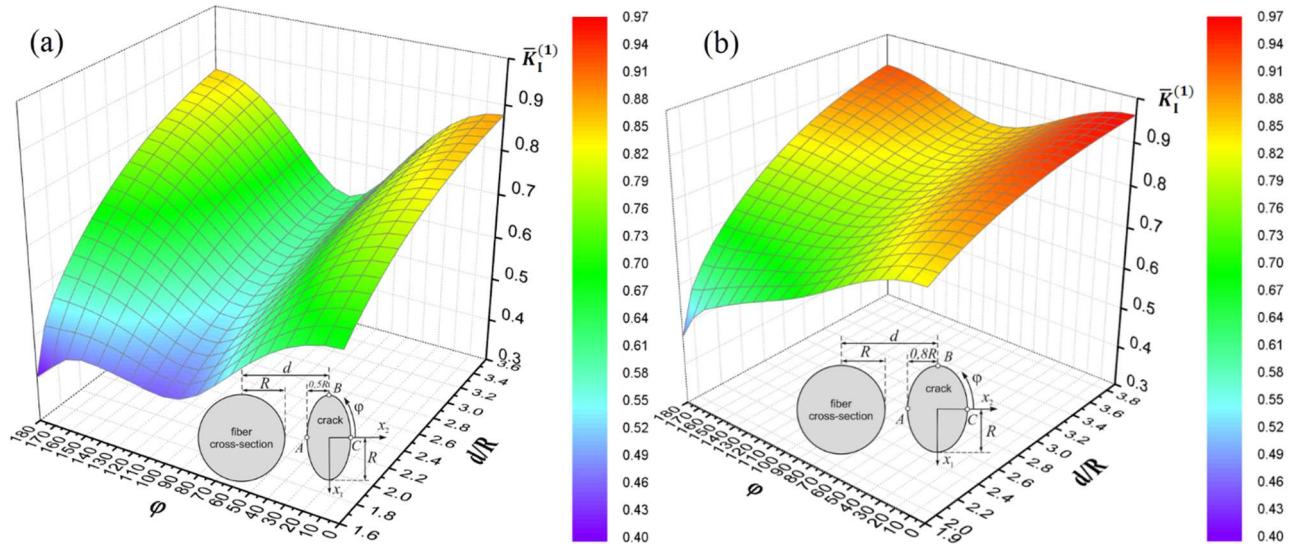


Рис. 3.9. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву від кутової координати точки контуру еліптичної матричної тріщини та від відносної відстані між центрами включення і тріщини за умови, що лінія, яка з'єднує їх центри перпендикулярна до більшої півосі області тріщини.

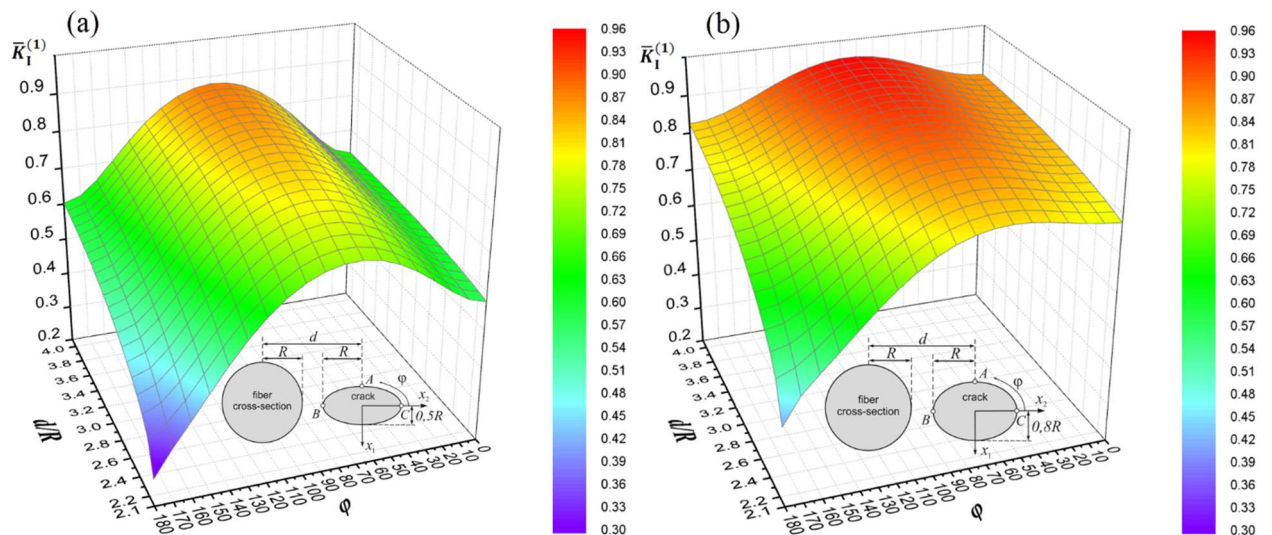


Рис. 3.10. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву від кутової координати точки контуру еліптичної матричної тріщини та від відносної відстані між центрами включення і тріщини за умови, що лінія, яка з'єднує їх центри перпендикулярна до меншої півосі області тріщини.

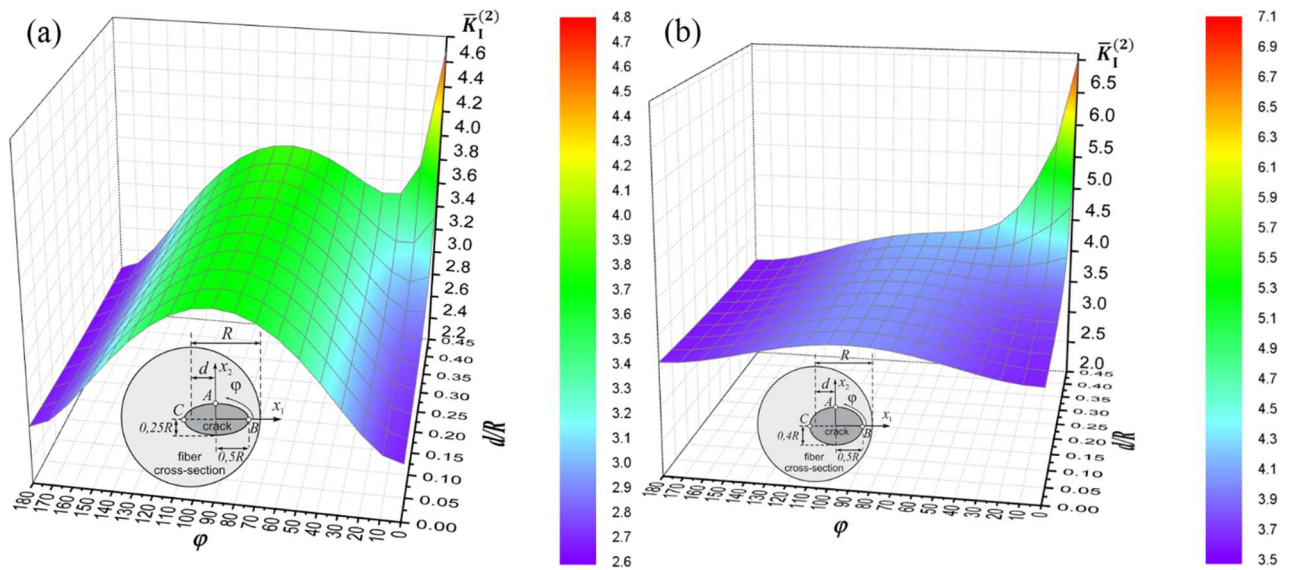


Рис. 3.11. Залежність нормалізованого КІН нормального відриву від кутової координати точки контуру еліптичної тріщини волокна та від відносної відстані між центрами вклюдження і тріщини за умови, що лінія, яка з'єднує їх центри перпендикулярна до меншої півосі області тріщини.

Для порівняння на рисунках також наведено результати щодо точки контуру тріщини С, яка найбільш віддалена від поверхні волокна. Тріщина має більшу піввісь $a = 0.5R$, співвідношення півосей області еліптичної тріщини подане на графіках у двох варіантах: $b/a = 0.5$ рис. 3.11 (а); $b/a = 0.8$ рис. 3.11 (б).

3.3. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на концентрацію напружень в околі сусідньої плоскої тріщини

Важливим окремим випадком задачі про взаємодію тріщин та об'ємних вклюдень є дослідження локального напруженого стану біля близько розташованих тріщин та об'ємних порожнин. Це пов'язано, зокрема, з вдосконаленням технологій видобування сланцевого газу методом розтріскування газоносної пористої породи. Моделювання гідророзривів пористого матеріалу природнього походження можливе лише за умови врахування складної топології порожнин, наявності тиску на їх поверхні, взаємного розташування та орієнтації

сусідніх тріщин. В таких умовах ефективним є запропонований алгоритм методу граничних елементів, який знімає всі обмеження на топологію концентраторів напружень.

Розглянемо безмежне пружне ізотропне тіло Ω , що містить газонаповнену порожнину довільної форми, яка обмежена гладкою поверхнею S_p із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. Нехай поблизу порожнини розташована плоска тріщина. Область S_c , яку займає тріщина, обмежена гладким контуром L (рис. 3.11). Механічні властивості тіла визначаються модулем зсуву G_1 і коефіцієнтом Пуассона ν_1 . Тіло знаходиться під дією статичного навантаження, яке створює при відсутності неоднорідностей відоме первинне поле переміщень $\mathbf{u}^{(0)}(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ і пов'язане з ним законом Гука поле напружень $\sigma_{ij}^{(0)}(i, j = \overline{1, 3})$. Крім того, поверхня S_p навантажена тиском p газу, що перебуває в порожнині.

У центрі тріщини виберемо систему координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ таким чином, щоб вісь $O_1 x_{31}$ була перпендикулярною до поверхні тріщини. Іншу систему координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ виберемо в центрі порожнини (рис. 3.12).

Компоненти тензора напружень та вектора переміщень точок тіла за принципом суперпозиції подамо наступним чином:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^P(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^C(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}) + u_i^P(\mathbf{x}) + u_i^C(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (3.34)$$

де $\sigma_{ij}^P(\mathbf{x})$, $u_i^P(\mathbf{x})$ - напруження та переміщення у пружному просторі, викликані наявністю порожнини, поверхня якої знаходиться під навантаженням внутрішнього тиску p ; $\sigma_{ij}^T(\mathbf{x})$, $u_i^T(\mathbf{x})$ - аналогічні характеристики напружено-деформованого стану пружного простору, викликаного розкриттям тріщини.

Краєві умови на поверхні порожнини запишемо в локальній системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$:

$$\sigma_{nj}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S_p} = p n_j(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1,3}, \quad (3.35)$$

Краєві умови на поверхні тріщини, що перебуває в безмежному однорідному тілі в системі координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ будуть мати вигляд:

$$\sigma_{3j}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S_c} = T_j(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1,3}. \quad (3.36)$$

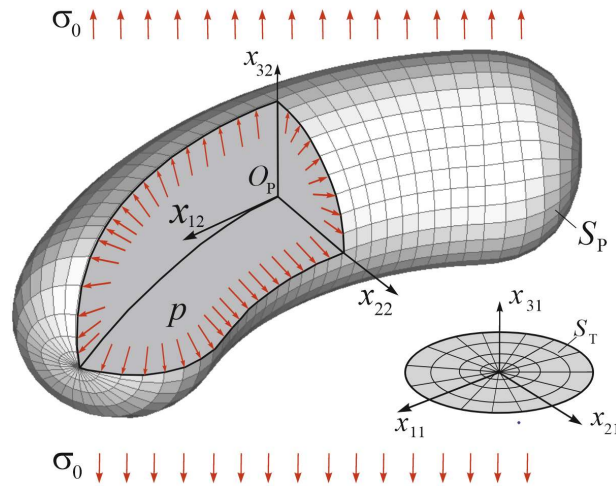


Рис. 3.12. Схема розташування газонаповненої порожнини та тріщини в тілі з покриттям їх поверхонь сіткою граничних елементів.

Функції напружень $T_j(\mathbf{x})$ в бездефектному тілі на площинці, яка збігається з поверхнею тріщини, обчислюються так:

$$T_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(0)} l_{3m} l_{ji}; \quad j = \overline{1,3}.$$

Граничний перехід у другому рівнянні системи (3.34) до точки $\mathbf{x}_{22}$ на поверхні порожнини в системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ з врахуванням інтегральних подань компонент векторів переміщень (3.24), крайових умов (3.35) та граничних властивостей пружних потенціалів простого і подвійного шару (2.5) дає змогу отримати систему трьох скалярних інтегральних рівнянь відно-

сно переміщень точок поверхні порожнини та стрибків переміщень на поверхнях тріщини. З використанням позначень підрозділу 3.2, матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_{22}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} [U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) p n_j^P(\xi) - T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^P) u_j(\xi)] d_\xi S - \\ & - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij21}^{(1)}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S = u_i^{(0)}(\mathbf{x}_{22}), \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_p, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Зауважимо, що отримані ГІР (3.37) відрізняються від аналогічних рівнянь виведених для випадку ізольованої порожнини в безмежному пружному тілі [206] наявністю суми трьох регулярних інтегралів по області тріщини. Саме ці інтеграли і визначають вплив розкриття тріщини на деформацію поверхні порожнини.

Для числового розв'язування системи рівнянь (3.37) застосуємо перехід до їх слабосингулярної форми:

$$\begin{aligned} & u_i(\mathbf{x}_{22}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi, \mathbf{n}^P) [u_j(\xi) - u_j(\mathbf{x}_{22})] d_\xi S - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij21}^{(1)}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S = \\ & = u_i^{(0)}(\mathbf{x}_{22}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) p n_j^P(\xi) d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_p, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Аналогічний граничний перехід у першому рівнянні системи (3.34) до точки $\mathbf{x}_{11}$ на поверхні тріщини в системі координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ із залученням крайових умов (3.36) забезпечує отримання трьох гіперсингулярних інтегральних рівнянь відносно тих же невідомих, а саме:

$$\begin{aligned} & + \frac{G_1}{1 - \nu_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} K_{i311}^{(1)}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S + \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} L_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^P) l_{s3} l_{mj} u_j(\xi) d_\xi S = \\ & = N_i(\mathbf{x}_{11}) + p \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} D_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi) l_{s3} l_{mj} n_j(\xi) d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_C. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Перетворення координат точки поверхні порожнини при переході від однієї системи координат до іншої відбувається за формулою (3.28).

Якщо орієнтація площинки, на якій шукаємо напруження, співпадає з площиною $x_1 O_T x_2$ розташування тріщини ($l_{ij} = \delta_{ij}$), то вирази для ядер інтегральних рівнянь суттєво спрощуються і будуть

$$\begin{aligned} K_{131}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_2 - \xi_2)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5}; \quad K_{232}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5}; \\ K_{231}(\mathbf{x}, \xi) &= K_{132}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^5}; \quad K_{333}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|^3}; \\ K_{331}(\mathbf{x}, \xi) &= K_{332}(\mathbf{x}, \xi) = K_{133}(\mathbf{x}, \xi) = K_{233}(\mathbf{x}, \xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ii}(\mathbf{x} - \xi) &= -\frac{x_3}{2(1 - \nu_1)|\mathbf{x} - \xi|^3} \left(1 - 2\nu_1 + \frac{3(x_i - \xi_i)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \right); \quad i = \overline{1, 3}, \\ \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{(x_i - \xi_i)^{1-\delta_{i3}}(x_j - \xi_j)^{1-\delta_{j3}}}{2(1 - \nu_1)|\mathbf{x} - \xi|^3} \left((1 - 2\nu_1)(\delta_{j3} - \delta_{i3}) + \frac{3x_3^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \right), (i \neq j); \end{aligned} \quad (3.41)$$

Отже, остаточно рівняння (3.39) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{G_1}{1 - \nu_1} \iint_{S_T} \left[\left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x}_{11} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-i1} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{11} - \xi|^5} \right) \alpha_i(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{11} - \xi_1)(x_{21} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{11} - \xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S + \\ &+ \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} L_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^P) l_{s3} l_{mi} u_j(\xi) d_\xi S = T_i(\mathbf{x}_{11}) + p \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} D_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi) \times \\ &\times l_{s3} l_{mi} n_j(\xi) d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_C, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\frac{G_1}{1 - \nu_1} \iint_{S_C} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x}_{11} - \xi|^3} d_\xi S + \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} L_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^P) l_{s3} l_{mi} u_j(\xi) d_\xi S =$$

$$= T_3(\mathbf{x}_{11}) + p \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_p} D_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi) l_{s3} l_{mi} n_j(\xi) d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S^C. \quad (3.42)$$

В рівняннях (3.42) регулярні інтеграли з областю інтегрування S_p визначають вплив газонаповненої порожнини на концентрацію напружень в околі контуру тріщини.

Таким чином, отримано замкнуту систему шести сингулярних та гіперсингулярних граничних інтегральних рівнянь (3.38), (3.42) відносно невідомих компонент вектора переміщень точок поверхні порожнини та функцій розкриття тріщини. Для чисельного визначення цих величин апроксимуємо поверхні S_p та S_C неперервною сукупністю чотирикутних (восьмивузлових) і трикутних (шестивузлових) криволінійних граничних елементів (рис. 3.12). Вузли елементів нумеруємо проти годинникової стрілки. Дискретизацію системи ГІР (3.38), (3.42) здійснюємо за схемою, описаною у п. 2.2 для суперпараметричних граничних елементів, обчислюючи регулярні інтеграли по поверхні S_p порожнини (2.21), (2.22), регуляризуючи та обчислюючи слабосингулярні інтегралів по поверхні S_C тріщини за схемами (2.7), (2.24), (2.27) і застосовуючи схему регуляризації (3.21) з аналітичним обчисленням інтегралів (3.22). Отриманий таким чином дискретний аналог системи ГІР у вигляді системи лінійних рівнянь має розмірність $3N_1 + 3N_2$ відносно значень компонент вектора переміщень в кутових вузлах граничних елементів поверхні S_p та значень функцій розкриття тріщини у колокаційних точках поверхні S_C . Тут N_1 - кількість опорних вузлів граничних елементів поверхні S_p , а N_2 - загальна колокаційних точок поверхні S_C .

Після розв'язування регулярного аналогу системи ГІР компоненти тензора напружень і вектора переміщень в тілі знаходимо за формулами (3.34), враховуючи інтегральні подання (3.25) та (3.24). КІН на контурі тріщини будемо обчислювати за формулою (3.23), відносячи їх до КІН для аналогічної

тріщини в безмежному суцільному просторі в полі напружень $\sigma_{ij}^{(0)} (i, j = \overline{1,3})$.

Зважаючи на те, що як правило механізмом руйнування пористого тіла, послабленого тріщиною, є поширення цієї тріщини [72], то дослідження поведінки тріщин в околі газонаповнених порожнин складної форми стає пріоритетним. Обчислимо КІН на контурі кругової тріщини радіуса a , що знаходиться неподалік від порожнини, яка має форму викривленого циліндра діаметром $2a$ (рис. 3.12). Вважається, що радіус кривизни осі порожнини ρ в 6 раз перевищує радіус її основи R . Нехай розміри тріщини співпадають з розмірами серединного поперечного перерізу порожнини ($R = a$).

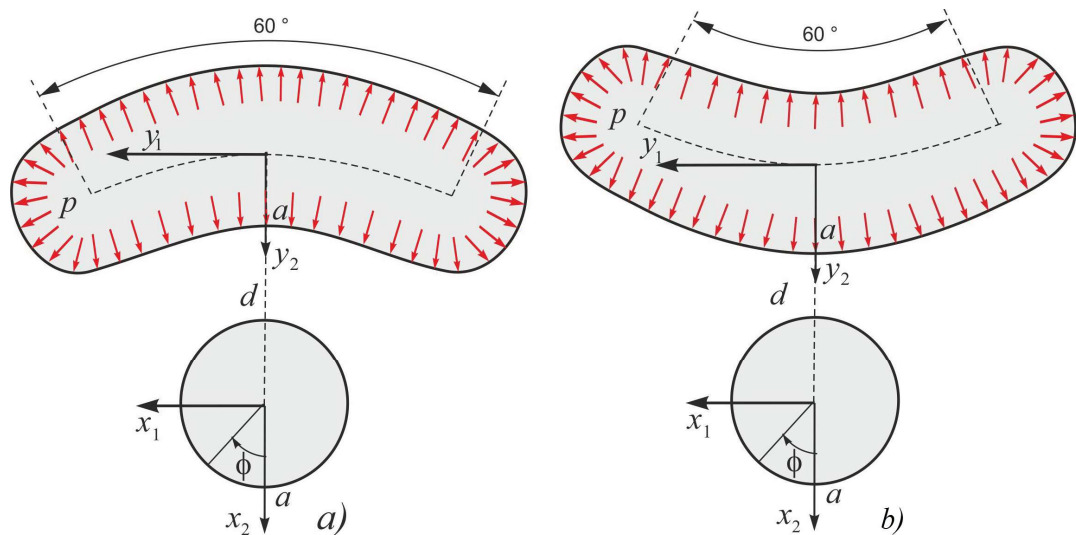


Рис. 3.13. Схема перерізу тіла з газонаповненою порожниною та тріщиною в площині $x_3 = y_3 = 0$ за радіуса кривини осі порожнини: а) $\rho = 6a$; б) $\rho = -6a$.

Кут розхилу осі порожнини приймемо 60° (рис. 3.13). Розташування тріщини визначається величинами: $e_1 = 0$; $e_2 = 1$; $e_3 = 0$; $e_1^* = 0$; $e_2^* = 1$; $e_3^* = 0$. Орієнтація тріщини відносно порожнини задається напрямними косинусами $l_{ij} = \delta_{ij}$. Розглянемо два варіанти розташування тріщини відносно порожнини в площині $x_3 = y_3 = 0$: центр тріщини лежить з боку від'ємної кривини поверхні порожнини (рис. 3.13 а); центр тріщини лежить з боку додатної кривини поверхні порожнини (рис. 3.13 б).

Нехай на безмежності до тіла прикладені навантаження σ_0 , перпендикулярні до поверхонь тріщини. Згідно з експериментальними даними, отриманими в роботі [50], пружні характеристики піщанистого сланцю задамо наступним чином: модуль зсуву $G = 1,04 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,31$.

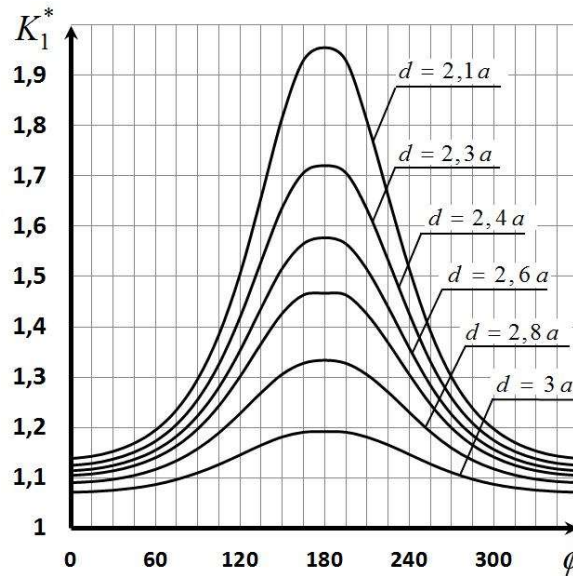


Рис. 3.14. Залежність приведенного КІН від кутової координати ϕ точки контуру кругової тріщини за взаємодії з порожниною, кривина осі якої $\rho = 6a$ (рис. 3.13 а) для різних значень відстаней між центрами дефектів.

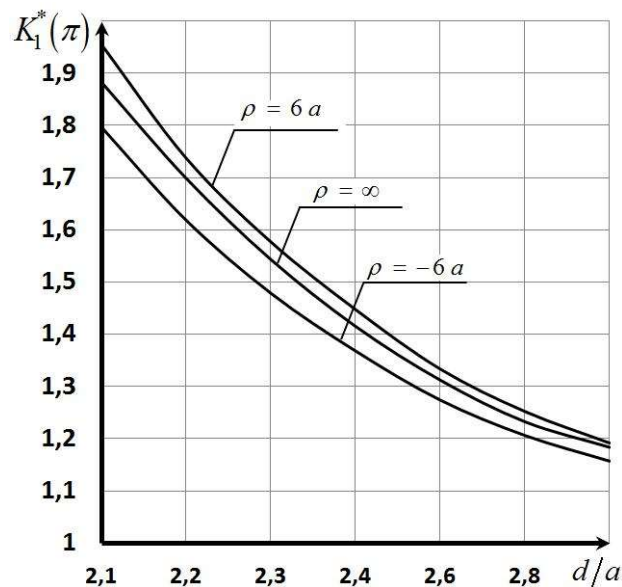


Рис. 3.15. Залежність максимального значення приведенного КІН на контурі тріщини від відстані між центрами тріщини та порожнини за відсутності внутрішнього тиску.

На рис. 3.14 – 3.16 показані залежності приведенного значення КІН

$K_1^* = K_1 / \hat{k}_1$, де $\hat{k}_1 = 2\sigma_0 \sqrt{a/\pi}$ – КІН на контурі ізольованої кругової тріщини, що перебуває в безмежному тілі під дією аналогічного навантаження. На рис. 3.14 і рис. 3.15 наведені результати для випадку відсутності на поверхні порожнини внутрішнього тиску для різних відстаней між центрами порожнин та для різних радіусів кривини осі порожнини відповідно.

Рис. 3.16 показує залежність значення КІН на контурі тріщини в точці, найбільш наближеній до поверхні порожнини, від величини приведенного внутрішнього тиску p/σ_0 в порожнині для двох випадків розташування тріщини ($d = 2,1a$ та $d = 2,3a$).

Числовий експеримент зміни густини сітки граничних елементів показує, що точність методу в межах 0,5 % відносного відхилення результатів досягається при використанні 160 колокаційних точок на поверхні тріщини та 512 суперпараметричних граничних елементів поверхні порожнини.

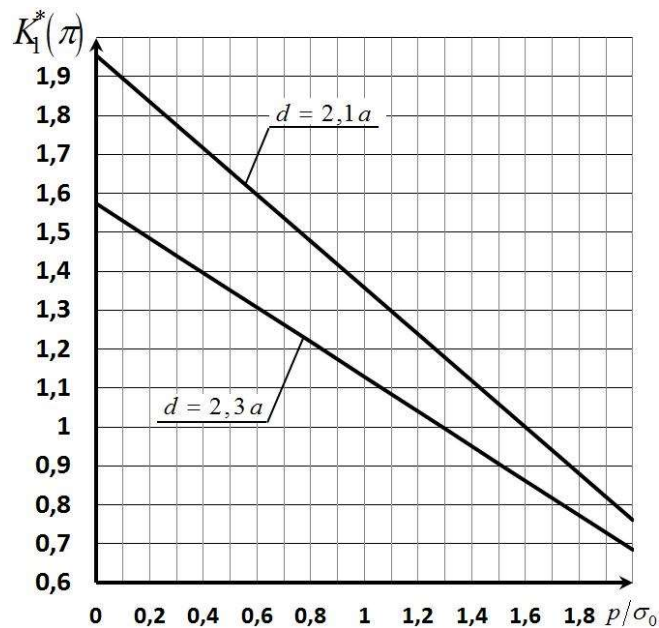


Рис. 3.16. Залежність максимального значення приведенного КІН на контурі тріщини від відносного значення тиску в порожнині за розташування тріщини з боку від'ємної кривини поверхні тріщини (рис. 3.13 а).

Ймовірний напрямок поширення тріщини в околі газонаповненої порожнини залежить від величини внутрішнього тиску в порожнині та розташування тріщини відносно порожнини. Зменшення радіуса кривизни осі порожнини з

безмежності до $6a$ спричинює зростання максимального значення КІН на контурі тріщини на 5 %.

При відсутності внутрішнього тиску в порожнині КІН досягає найбільшого значення в точці контуру тріщини, яка найбільш наближена до поверхні порожнини. Із збільшенням співвідношення p/σ_0 , КІН в цій точці зменшується за лінійним законом і при досягненні внутрішнім тиском певного значення (при $d/a = 2,1$ - $p/\sigma_0 = 1,6$, а при $d/a = 2,3$ - $p/\sigma_0 = 1,3$) напрямок імовірного поширення тріщини змінюється на протилежний.

Якщо внутрішній тиск в порожнині значно перевищує напруження на берегах тріщини, то тріщина поширюватиметься в протилежному до порожнини напрямку. Таким чином, для прориву сланцевої породи потрібно забезпечити розривне навантаження на берегах тріщин не менше ніж 80 – 100 % від прогнозованого тиску газу в порожнинах.

3.4. Метод ефективних (односторонніх) впливів у тривимірних задачах взаємодії у великих системах тонких та об'ємних концентраторів напружень

Для забезпечення достатньої точності граничноелементного дослідження напружено-деформованого стану тіл з різнотипними взаємодіючими концентраторами напружень, області їх поверхонь повинні дискретизовуватись з використанням великої кількості колокаційних вузлів. Так за 160 колокаційних вузлів для тонких концентраторів напружень дискретний аналог задачі про взаємодію п'яти тонких концентраторів напружень може містити більше 2400 лінійних алгебраїчних рівнянь, а у випадку дослідження тріщини в оточенні множинних гранул чи пор кількість рівнянь дискретного аналогу може подвоїтися або потроїтися. Зауважимо, що матриця жорсткості у методі граничних елементів є повністю заповненою, тому розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності приводить до накопичення

більшої похибки. Зважаючи на це, дослідження взаємодії від кількох одиниць до кількох десятків концентраторів напружень потребує застосування спрощеної методики, яка б дозволила оцінити характер розподілу концентрації напружень в околі контуру конкретної тріщини з врахуванням впливу сусідніх тріщин, включень або порожнин.

Для розріджених систем з великими масивами взаємодіючих тріщин та різнотипних включень у безмежній пружній матриці запропоновано варіант модифікації граничноелементного аналізу на основі введення ефективних полів або ітерацій односторонніх взаємодій. Він полягає у виділенні у суперпозиційних співвідношеннях (3.1) складової напруженого стану від присутності кожного окремого певного об'єкта взаємодії та заміні внеску інших попередньо розрахованими ефективними полями напружень чи переміщень із розв'язку задач для матриці з поодинокими наповнювачами.

У рамках такого підходу розглянемо тріщину по поверхні S_q , в околі контуру якої потрібно визначити концентрацію напружень за умови взаємодії з концентраторами напружень типу: ідеально сконтактованих з матрицею об'ємних пружних включень з поверхнею S_l , $l = \overline{2, N_1 + 1}$ із механічними характеристиками їх матеріалів G_l та ν_l ; плоских тріщин з поверхнями S_n , $n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}$, пружних тонких податливих включень з серединними поверхнями S_m і з механічними характеристиками їх матеріалів G_m та ν_m , $m = \overline{N_1 + N_2 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + 1}$, $m \neq q$, абсолютно жорстких тонких включень з серединними поверхнями S_k , $k = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$. Випадок об'ємної порожнини можна отримати спрямовуючи до нуля модуль зсуву об'ємного пружного включення. В центрі кожного концентратора напружень виберемо локальну систему координат $O_i x_{1i} x_{2i} x_{3i}$ ($i = \overline{2, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1}$). Матриця, що містить перелічені концентратори

напружень характеризується механічними характеристиками G_1 та ν_1 і навантажена відомими статичними зусиллями, що створюють поле напружень $\sigma^{(0)}$.

Виділимо з отриманих в параграфі 3.1 систем ГР (3.6) три інтегральні рівняння, які отримуються шляхом задоволення крайових умов (3.2) на серединній поверхні S_q розглядуваного включення:

$$\begin{aligned}
 & g_{iq} \beta_{iq}(\mathbf{x}_{qq}) + \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jq}(\xi) K_{ijqq}(\xi, \mathbf{x}_{qq}) d_\xi S + \sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) K_{ijnq}(\xi, \mathbf{x}_{nq}) d_\xi S + \\
 & + \sum_{\substack{k=N_1+N_2+2 \\ k \neq q}}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) K_{ijkq}(\xi, \mathbf{x}_{kq}) d_\xi S + \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{i=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Phi_{ijmq}(\xi, \mathbf{x}_{mq}) d_\xi S + \\
 & + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{l=2}^{N_1} \sum_{s=1}^3 \sum_{c=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} \left[D_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq}, \xi) l_{s3lq} l_{cilq} t_{jl}(\xi) - L_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{s3lq} l_{cilq} u_{jl}(\xi) \right] d_\xi S = \\
 & = \frac{1-\nu_1}{G_1} T_{jq}(\mathbf{x}_{qq}), \mathbf{x}_{qq}, \mathbf{x}_{nq}, \mathbf{x}_{kq}, \mathbf{x}_{mq}, \mathbf{x}_{lq} \in S_q, j = \overline{1,3}, \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

де α_{in} – невідомі функції розкриття i -тої тріщини в напрямку осей $O_n x_{in}$; β_{ik} – невідомі стрибки переміщень берегів k -го тонкого пружного включення в напрямку осей $O_k x_{ik}$; ω_{im} – невідомі стрибки напружень на берегах m -го тонкого жорсткого включення в напрямку осей $O_m x_{im}$; u_{il} та t_{il} – невідомі компоненти векторів переміщень та зусиль l -го об'ємного пружного включення в напрямку осей $O_l x_{il}$.

Перший доданок системи рівнянь (3.43) містить гіперсингулярні інтеграли, густинами яких є функції, що характеризують стрибок переміщень точок протилежних поверхонь розглядуваного тонкого включення. Інші інтеграли в лівій частині системи рівнянь (3.43) є регулярними і мають фізичний зміст напружень в точках серединної поверхні розглядуваного включення викликаних наявністю сусідніх концентраторів напружень. Переносячи всі регулярні інтеграли в праву частину рівнянь (3.43), отримаємо систему трьох інтегральних

рівнянь відносно стрибків переміщень умовно ізольованого включення, поверхні якого перебувають під дією деяких зусиль $T_{jq}^*(\mathbf{x}_{qq})$, що моделюють поле напружень задачі множинної взаємодії концентраторів напружень.

$$\begin{aligned}
& -4\pi(1-\nu_0)\frac{G_q}{G_0}\left[\frac{2(1+\nu_q)}{1-2\nu_q}\right]^{\delta_{i3}}\frac{\beta_{iq}(\mathbf{x}_{qq})}{h_q(\mathbf{x}_{qq})}+\sum_{j=1}^3\iint_{S_q}\beta_{jq}(\xi)K_{ijqq}(\xi,\mathbf{x}_{qq})d_\xi S_q=T_{iq}^*(\mathbf{x}_{qq})= \\
& -\sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1}\sum_{j=1}^3\iint_{S_n}\alpha_{jn}(\xi)K_{ijnq}(\xi,\mathbf{x}_{nq})d_\xi S-\sum_{\substack{k=N_1+N_2+2 \\ k\neq q}}^{N_1+N_2+N_3+1}\sum_{j=1}^3\iint_{S_k}\beta_{jk}(\xi)K_{ijkq}(\xi,\mathbf{x}_{kq})d_\xi S- \\
& -\sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1}\sum_{j=1}^3\iint_{S_m}\omega_{jm}(\xi)\Phi_{ijmq}(\xi,\mathbf{x}_{mq})d_\xi S-\frac{1-\nu_1}{G_1}\sum_{l=2}^{N_1}\sum_{s=1}^3\sum_{c=1}^3\sum_{j=1}^3\iint_{S_l}\left[D_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq},\xi)l_{s3lq}l_{cilq}\times\right. \\
& \left.\times t_{jl}(\xi)-L_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq},\xi,\mathbf{n}^{(l)})l_{s3lq}l_{cilq}u_{jl}(\xi)\right]d_\xi S+\frac{1-\nu_1}{G_1}T_{iq}(\mathbf{x}_{qq}),\quad i=\overline{1,3},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{qq}, \mathbf{x}_{nq}, \mathbf{x}_{kq}, \mathbf{x}_{mq}, \mathbf{x}_{lq} \in S_q, \quad (3.44)$$

Враховуючи вирази (3.40) для ядер інтегральних представлень напружень при деформації тонкого включення у площині, що співпадає з його серединною поверхнею, остаточно будемо мати:

$$\begin{aligned}
& -4\pi(1-\nu_0)\frac{G_q}{G_0}\frac{2(1+\nu_q)}{1-2\nu_q}\frac{\beta_{3q}(\mathbf{x}_{qq})}{h_q(\mathbf{x}_{qq})}+\iint_{S_q}\frac{\beta_{3q}(\xi)}{|\mathbf{x}_{qq}-\xi|^3}d_\xi S_q=T_{3q}^*(\mathbf{x}_{qq})= \\
& -\sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1}\sum_{i=1}^3\iint_{S_n}\alpha_{jn}(\xi)K_{3jnnq}(\xi,\mathbf{x}_{nq})d_\xi S-\sum_{\substack{k=N_1+N_2+2 \\ k\neq q}}^{N_1+N_2+N_3+1}\sum_{i=1}^3\iint_{S_k}\beta_{jk}(\xi)K_{3jkkq}(\xi,\mathbf{x}_{kq})d_\xi S- \\
& -\sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1}\sum_{j=1}^3\iint_{S_m}\omega_{jm}(\xi)\Phi_{3jmq}(\xi,\mathbf{x}_{mq})d_\xi S-\frac{1-\nu_1}{G_1}\sum_{l=2}^{N_1}\sum_{s=1}^3\sum_{c=1}^3\sum_{j=1}^3\iint_{S_l}\left[D_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq},\xi)l_{s3lq}l_{c3lq}\times\right. \\
& \left.\times t_{jl}(\xi)-L_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq},\xi,\mathbf{n}^{(l)})l_{s3lq}l_{c3lq}u_{jl}(\xi)\right]d_\xi S+\frac{1-\nu_1}{G_1}T_{3q}(\mathbf{x}_{qq}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_q} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}_{qq}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-iqq}-\xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{qq}-\xi|^5} \right) \beta_{iq}(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{1qq}-\xi_1)(x_{2qq}-\xi_2)}{|\mathbf{x}_{qq}-\xi|^5} \beta_{3-i,q}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& -4\pi(1-\nu_1) \frac{G_q}{G_1} \frac{\beta_{iq}(\mathbf{x}_{qq})}{h_q(\mathbf{x}_{qq})} = T_{iq}^*(\mathbf{x}_{qq}) = - \sum_{n=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_n} \alpha_{jn}(\xi) K_{ijnq}(\xi, \mathbf{x}_{nq}) d_\xi S - \\
& - \sum_{\substack{k=N_1+N_2+2 \\ k \neq q}}^{N_1+N_2+N_3+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_k} \beta_{jk}(\xi) K_{ijkq}(\xi, \mathbf{x}_{kq}) d_\xi S - \sum_{m=N_1+N_2+N_3+2}^{N_1+N_2+N_3+N_4+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \omega_{jm}(\xi) \Phi_{ijmq}(\xi, \mathbf{x}_{mq}) d_\xi S - \\
& - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{l=2}^{N_1} \sum_{s=1}^3 \sum_{c=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_l} \left[D_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq}, \xi) l_{s3lq} l_{cilq} t_{jl}(\xi) - L_{scj}^{(1)}(\mathbf{x}_{lq}, \xi, \mathbf{n}^{(l)}) l_{s3lq} l_{cilq} u_{jl}(\xi) \right] d_\xi S + \\
& + \frac{1-\nu_1}{G_1} T_{iq}(\mathbf{x}_{qq}), \quad i=1,2, \quad \mathbf{x}_{qq}, \mathbf{x}_{nq}, \mathbf{x}_{kq}, \mathbf{x}_{mq}, \mathbf{x}_{lq} \in S_q, \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Для точного визначення напружень, в якому перебуває розглядувана тріщина, потрібно розв'язувати всю систему рівнянь (3.43), що пов'язано з великими труднощами. Для наближеного розв'язування задачі пропонується реальне поле напружень $T_{jq}^*(\mathbf{x}_{qq})$, в якому перебуває тріщина, замінити на ефективне поле напружень $\hat{T}_{jq}^*(\mathbf{x}_{qq})$, яке легко можна обчислити, не розв'язуючи складних систем інтегральних рівнянь. Для цього, замість невідомих функцій стрибків переміщень та напружень, а також міжфазних переміщень та зусиль в правій частині рівнянь (3.45), підставимо аналогічні величини для відповідних ізольованих в пружному просторі концентраторів напружень, поверхні яких перебувають під дією заданого навантаження. Перевагою такого підходу є можливість незалежно визначити ефективне поле напружень, яке створюється кожним сусіднім концентратором напружень зокрема. У зв'язку з цим, збільшення кількості взаємодіючих об'єктів практично не приводить до ускладнення задачі, оскільки числово потрібно розв'язувати лише систему трьох рівнянь відносно функцій розкриття розглядуваної тріщини.

Для числової реалізації цієї методики необхідно мати явний вираз для

всіх регулярних ядер, що входять в рівняння (3.45), а також розв'язки для ізованих неоднорідностей структури, поверхні яких перебувають під дією заданого зовнішнього навантаження.

У випадку дослідження взаємодії дископодібних концентраторів напружень, коли від їх форми не залежить вибір осей локальних систем координат, компоненти ефективного поля напружень, що входять в рівняння (3.45), можемо записати в явному вигляді. Ядра інтегральних рівнянь будуть залежати лише від одного параметра – кута між площинами тріщин і (або) серединними поверхнями тонких включень θ_{qn} .

Таблиця 3.1. Напрямні косинуси кутів між локальними системами координат прив'язаними до центрів взаємодіючих об'єктів.

	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}
x_{1q}	1	0	0
x_{2q}	0	$\cos \theta_{qn}$	$\sin \theta_{qn}$
x_{3q}	0	$-\sin \theta_{qn}$	$\cos \theta_{qn}$

Зокрема, якщо вибрати локальні системи координат в центрах q -тої та n -тої області взаємодіючих об'єктів таким чином, щоб осі з індексом "3" – були перпендикулярними до площин їх розташування, а осі з індексом "2" – лежали в площині розташування тріщин або серединних поверхонь тонких включень та були перпендикулярними до лінії перетину цих площин, а осі з індексом "1" будуть паралельні між собою (рис. 3.17), то напрямні косинуси кутів між осями в цьому випадку можемо подати у вигляді табл. 3.1.

Тоді, наприклад, конгломерація тріщин S_n ($n = \overline{1, N}$) створюватиме в точках серединної площини тонкого пружного включення S_q поле ефективних напружень, явний вигляд компонент якого можна з врахуванням (3.15), (3.16) та (3.19) подати так:

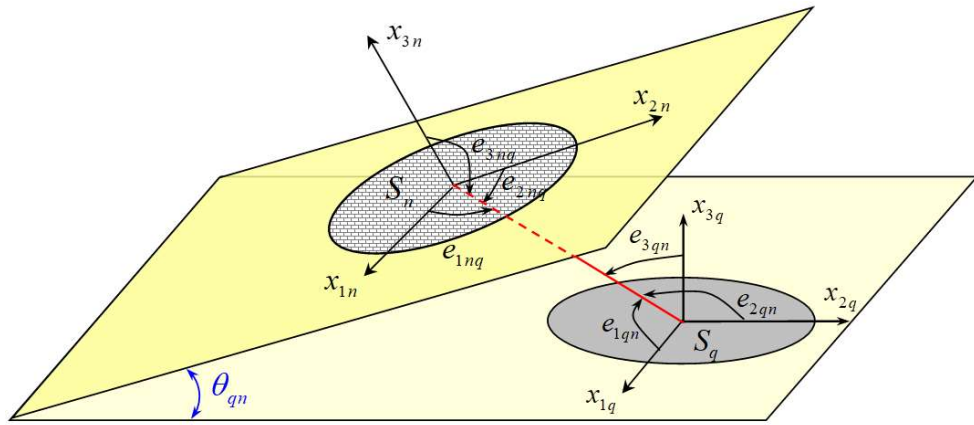


Рис. 3.17. Схема розташування взаємодіючих кругової тріщини та дископодібного тонкого податливого включення.

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{1q}^*(\mathbf{x}_{qq}) = & \frac{1-\nu_0}{G_0} T_{1q}(\mathbf{x}_{qq}) - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \left\langle \alpha_{1n}(\xi) \left\{ \frac{\cos \theta_{qn}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \left[1 + \nu_0 - \frac{3\nu_0(x_{2nq} - \xi_2)^2 + 3x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{15(x_{1nq} - \xi_1)^2 x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] - \sin \theta_{qn} \frac{3x_{3nq}(x_{2nq} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \nu_0 + 5 \frac{(x_{1nq} - \xi_1)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \right\} + \\
 & + \alpha_{2n}(\xi) \left\{ (\cos^2 \theta_{qn} - \sin^2 \theta_{qn}) \frac{3(x_{1nq} - \xi_1)(x_{2nq} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[\nu_0 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn} \frac{3(x_{1nq} - \xi_1)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[2\nu_0 + \frac{5[(x_{2nq} - \xi_2)^2 - x_{3nq}^2]}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \right\} + \alpha_{3n}(\xi) \times \\
 & \times \left\{ \sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn} \frac{6(x_{1nq} - \xi_1)(x_{2nq} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[\nu_0 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] + \sin^2 \theta_{qn} \frac{3(x_{1nq} - \xi_1)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \times \right. \\
 & \times \left[1 - 2\nu_0 + \frac{5(x_{2nq} - \xi_2)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] + \cos^2 \theta_{qn} \frac{3(x_{1nq} - \xi_1)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \left. \right\} d_\xi S, \\
 \hat{T}_{2q}^*(\mathbf{x}_{qq}) = & \frac{1-\nu_0}{G_0} T_{2q}(\mathbf{x}_{qq}) - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \left\langle \alpha_{1n}(\xi) \left\{ \cos \theta_{qn} \frac{3(x_{2nq} - \xi_2)(x_{1nq} - \xi_1)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \times \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\nu_0 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] - \sin \theta_{qn} \frac{3x_{3nq}(x_{1nq} - \xi_1)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \nu_0 + 5 \frac{(x_{2nq} - \xi_2)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \Bigg\} - \\
& - \alpha_{2n}(\xi) \left\{ \sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn} \frac{3(x_{2nq} - \xi_2)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 + \frac{5[(x_{2nq} - \xi_2)^2 - x_{3nq}^2]}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] - \right. \\
& - \frac{(\cos^2 \theta_{qn} - \sin^2 \theta_{qn})}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \left[1 + \nu_0 - \frac{3\nu_0(x_{1nq} - \xi_1)^2 + 3x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} - \frac{15(x_{2nq} - \xi_2)^2 x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] \Bigg\} + \\
& + \alpha_{3n}(\xi) \left\{ \frac{2 \sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \left[1 + \nu_0 - \frac{3\nu_0(x_{1nq} - \xi_1)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} - \frac{15(x_{2nq} - \xi_2)^2 x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] + \sin^2 \theta_{qn} \times \right. \\
& \times \frac{3(x_{2nq} - \xi_2)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5(x_{2nq} - \xi_2)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] + \cos^2 \theta_{qn} \frac{3(x_{2nq} - \xi_2)x_{3nq}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \Bigg\} \Bigg\rangle d_\xi S, \\
& \hat{T}_{3q}^*(\mathbf{x}_{qq}) = \frac{1 - \nu_0}{G_0} T_{3q}(\mathbf{x}_{qq}) - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \left\langle \alpha_{1n}(\xi) \left\{ \cos \theta_{qn} \frac{3x_{3nq}(x_{1nq} - \xi_1)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] + \right. \right. \\
& + \sin \theta_{qn} \frac{3(x_{2nq} - \xi_2)(x_{1nq} - \xi_1)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \Bigg\} + \alpha_{2n}(\xi) \left\{ \frac{\sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \times \right. \\
& \times \left[2(1 - 2\nu_0) + \frac{3(1 - 2\nu_0)(x_{2nq} - \xi_2)^2 - 3(1 + 2\nu_0)x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} - \frac{15x_{3nq}^2[(x_{2nq} - \xi_2)^2 - x_{3nq}^2]}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] + \\
& + (\cos^2 \theta_{qn} - \sin^2 \theta_{qn}) \frac{3x_{3nq}(x_{2nq} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \Bigg\} + \alpha_{3n}(\xi) \left\{ \frac{\cos^2 \theta_{qn}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \times \right. \\
& \times \left[1 + \frac{6x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} - \frac{15x_{3nq}^4}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] - \frac{\sin^2 \theta_{qn}}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^3} \left[1 - 4\nu_0 - \frac{3(1 - 2\nu_0)[(x_{2nq} - \xi_2)^2 + x_{3nq}^2]}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] +
\end{aligned}$$

$$\left. + \frac{15x_{3nq}^2 (x_{2nq} - \xi_2)^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^4} \right] + \sin \theta_{qn} \cos \theta_{qn} \frac{6x_{3nq} (x_{2nq} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^5} \left[1 - \frac{5x_{3nq}^2}{|\mathbf{x}_{nq} - \xi|^2} \right] \Bigg\rangle d_\xi S, \quad (3.46)$$

де $x_{1nq} = e_{1nq} d + x_{1qq}$; $x_{2nq} = e_{2nq} d + x_{2qq} \cos \theta_{qn}$; $x_{3nq} = e_{3nq} d - x_{2qq} \sin \theta_{qn}$.

Функції розкриття n -ї ізольованої кругової тріщини радіуса a_n в пружному тілі під дією статичного зовнішнього навантаження задаються виразами [59]:

$$\alpha_{jn}(\xi) = -\frac{1-\nu_0}{G_0} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{2-\nu} \right)^{1-\delta_{j3}} T_{jn} \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (3.47)$$

де $T_{jn} = \text{const}$ - зовнішні навантаження пружного безмежного тіла в n -тій локальній системі координат, які враховуючи таблицю 3.1. можна подати в системі координат q -го концентратора напружень наступним чином: $T_{1n} = T_{1q}$; $T_{2n} = T_{2q} \cos \theta_{qn} + T_{3q} \sin \theta_{qn}$; $T_{3n} = T_{3q} \cos \theta_{qn} - T_{2q} \sin \theta_{qn}$.

Всі інтеграли у виразах (3.46) для визначення поля ефективних напружень поверхонь q -го об'єкту є регулярними і обчислюються в колокаційних точках області S_q з допомогою гаусових квадратур.

Вищевикладений метод використано для визначення концентрації напружень в околі контуру кругової тріщини S_2 радіусом a_2 за умови взаємодії: з трьома круговими тріщинами S_3 , S_4 , S_5 ; дископодібним тонким пружним включенням S_6 з аналогічними жорсткісними характеристиками і товщиною; та абсолютно жорстким круглим тонким включенням S_7 (рис. 3.18). На безмежності до пружного середовища, що містить згадані концентратори напружень, прикладені постійні статичні розтягуючі зусилля $p_0 = \text{const}$, направлені перпендикулярно до області S_1 . Коефіцієнти Пуассона матриці і пружних включень співпадають та рівні $\nu_1 = \nu_2 = \nu_6 = 0,3$. Відносні розміри взаємодіючих об'єктів, відстані між їх центрами d_{2j} ($j = \overline{3,7}$) та взаємні кути нахилу їх

площин θ_{ln} подані в таблиці 3.2.

Ефективне поле напружень, створюване тріщинами S_3 , S_4 , S_5 , визначаємо за формулами (3.46), (3.47). Вирази в правій частині рівнянь (3.45) використовуємо для визначення ефективного поля напружень, викликаного стрибками переміщень точок поверхонь включення S_5 , які визначаємо числово з задачі про ізольоване тонке пружне включення та ефективного поля напружень викликаного стрибками напружень на поверхнях абсолютно жорсткого тонкого включення S_7 .

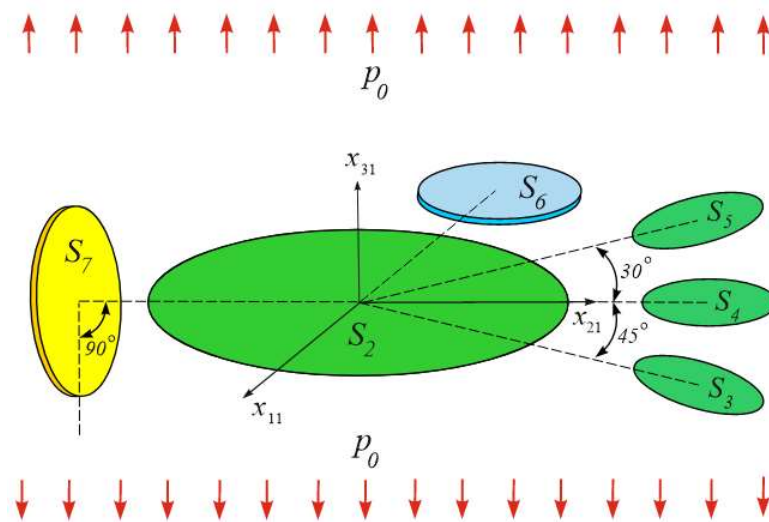


Рис. 3.18. Схема розташування взаємодіючих кругових тріщин та дископодібних тонких включень.

Таблиця 3.2. Розмірні характеристики взаємодіючих об'єктів на рис. 3.18 та їх розташування.

Номер об'єкту	3	4	5	6	7
a_n/a_2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3
d_n/a_2	1,2	1,15	1,2	1,25	1,2
θ_{2n}	- 45 °	0 °	30 °	0 °	90 °

Ці стрибки напружень для ізольованого жорсткого дископодібного включення

радіуса a_7 , що перебуває в безмежному просторі, навантаженому розтягуючими зусиллями P_0 направленими паралельно до серединної площини включення (рис. 3.19), задаються виразами [181]:

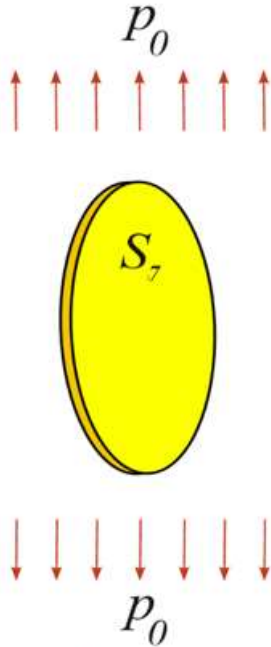


Рис. 3.19. Ізольоване абсолютно жорстке тонке включення в просторі з розтягуючим вздовж площини

$$\omega_{17}(\xi) = \frac{\xi_1}{\sqrt{a_7^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \frac{(-13 + 17\nu_1)(1 - \nu_1)}{\pi^2(3 - 4\nu_1)(1 + \nu_1)(7 - 8\nu_1)};$$

$$\omega_{27}(\xi) = \frac{\xi_2}{\sqrt{a_7^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \frac{(-1 + 13\nu_1 - 16\nu_1^2)(1 - \nu_1)}{\pi^2(3 - 4\nu_1)(1 + \nu_1)(7 - 8\nu_1)};$$

$$\omega_{37}(\xi) = 0.$$

Числове розв'язування системи рівнянь (3.45) дозволяє визначити стрибки переміщень в колокаційних точках області S_2 , що слугуватимуть для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень на контурі цієї області за формулами (3.23). Зважаючи, що рівняння контуру кругової області S_2 можна подати у вигляді $L(x_1, x_2) = a_2^2 - x_1^2 - x_2^2$, то вирази

(3.23) будуть мати вигляд [186]:

$$K_1(\mathbf{x}_0) = -2\pi\sqrt{a_1}\pi\frac{G_1}{1-\nu_1}\beta_{32}(\mathbf{x}_0),$$

$$K_2(\mathbf{x}_0) = -2\pi\sqrt{a_1}\pi\frac{G_1}{1-\nu_1}[\beta_{12}(\mathbf{x}_0)\cos\psi_0 + \beta_{22}(\mathbf{x}_0)\sin\psi_0],$$

$$K_3(\mathbf{x}_0) = -2\pi\sqrt{a_1}\pi G_1[\beta_{12}(\mathbf{x}_0)\sin\psi_0 - \beta_{22}(\mathbf{x}_0)\cos\psi_0], \quad (3.48)$$

де $\mathbf{x}_0$ - точка контуру області S_2 ; ψ_0 - кутова координата цієї точки в локальній системі координат, прив'язаній до центру цієї області, що відкладається від осі x_{12} .

На рис. 3.20 суцільною кривою показана залежність від кутової координати ψ_0 контуру серединної поверхні тріщини S_2 приведеної комбінації коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) $\tilde{C}(\psi_0)$ згідно енергетичного критерію [189] поширення тріщиноподібних дефектів:

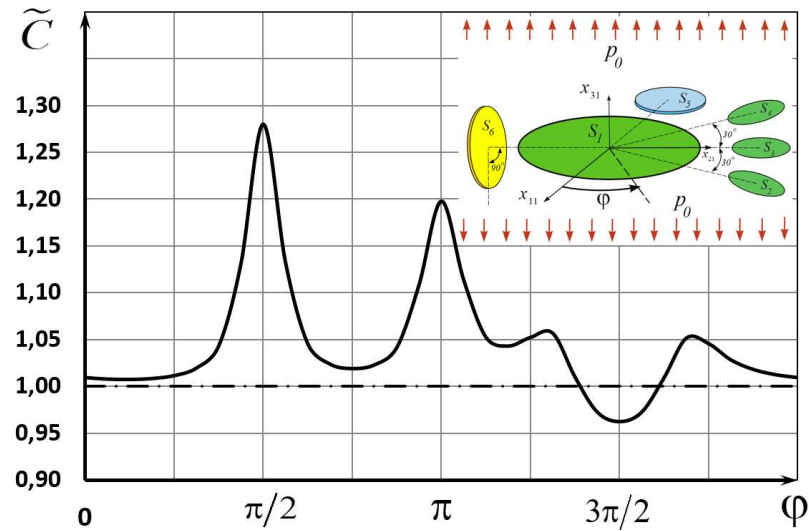


Рис. 3.20. Залежність комбінації КІН за енергетичним критерієм на контурі кругової тріщини за умови взаємодії з тріщинами пружним і жорстким включеннями від кутової координати точки контуру.

$$\tilde{C}(\psi_0) = \frac{(1-\nu)(K_1^2 + K_2^2) + K_3^3}{(1-\nu)\tilde{k}_1^2}, \quad (3.49)$$

де $\tilde{k}_1 = 2 p_0 \sqrt{\frac{a_2}{\pi}}$ – КІН відриву на контурі кругової тріщини радіуса a_2 , поверхні якої перебувають під дією нормального постійного навантаження p_0 .

Штрихова лінія відповідає залежності приведенного КІН нормального відриву для поодинокого тонкого пружного включення з аналогічними жорсткісними та розмірними параметрами в пружному просторі під дією відповідного навантаження.

Як видно з рис. 3.20, концентрація напружень на контурі включення є максимальною в напрямку розташування сусідніх тріщин і меншою мірою зростає в напрямку пружного тонкого включення малої жорсткості. Натомість

наявність абсолютно жорсткого включення поблизу контуру включення податливого концентрацію напружень навпаки знижує.

Оскільки викладений модифікований метод граничноелементного аналізу є наближеним, то необхідно дослідити величини похибок, що виникають при застосуванні цього методу для різних положень взаємодіючих тріщин та включень. Визначення меж застосовності методу ефективного поля напружень проводилося шляхом порівняння точного розв'язку задачі про взаємодію кругової тріщини та дископодібного тонкого пружного включення однакового розміру з розв'язком, отриманим запропонованим методом.

Розглянемо частковий випадок розв'язування задачі методом поля ефективних напружень для безмежного пружного тіла, що містить кругле тонке пружного включення малої жорсткості та кругову тріщину, або дві кругові тріщини які розташовані в паралельних площинах, яке навантажене статичними зусиллями p_0 перпендикулярними до цих площин. Тоді функції навантажень будуть мати вигляд:

$$T_{1n} = T_{2n} = 0; \quad T_{3n} = p_0, \quad (n = 2, 3).$$

Тоді функції розкриття (3.47) ізольованої тріщини що займає область S_3 в безмежному тілі при такому навантаженні можна спростити:

$$\alpha_{13}(\xi) = \alpha_{23}(\xi) \equiv 0; \quad \alpha_{33}(\xi) = -\frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}. \quad (3.50)$$

З врахуванням цього система ГР (3.45) для визначення стрибків переміщень на поверхнях дископодібного пружного включення малої жорсткості за умови взаємодії з тріщиною розташованою в паралельній площині буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_2-\xi_2)^2}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \right) \beta_{12}(\xi) + \frac{3\nu_1(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \beta_{22}(\xi) \right] d_\xi S - 4\pi(1-\nu_1) \times \\
& \times \frac{G_2}{G_1} \frac{\beta_{12}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} = \frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \frac{3(x_1-\xi_1)d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^2} \right] d_\xi S; \\
& \iint_{S_2} \left[\frac{3\nu_1(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \beta_{12}(\xi) + \frac{\beta_{22}(\xi)}{|\mathbf{x}-\xi|^3} \left(1 + \nu_1 - \frac{3\nu_1(x_1-\xi_1)^2}{|\mathbf{x}-\xi|^2} \right) \right] d_\xi S - 4\pi(1-\nu_1) \times \\
& \times \frac{G_2}{G_1} \frac{\beta_{22}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} = \frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \frac{3(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^2} \right] d_\xi S \\
& \iint_{S_2} \frac{\beta_{32}(\xi)}{|\mathbf{x}-\xi|^3} d_\xi S - 4\pi(1-\nu_1) \frac{G_2}{G_1} \frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\beta_{32}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} = \frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x}^*-\xi|^3} \times \\
& \times \left[1 + \frac{6d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^2} - \frac{15d^4 \sin^4 \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^4} \right] d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} p_0, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

де $x_1^* = x_1$; $x_2^* = -d \cos \varphi + x_2$; $x_3^* = d \sin \varphi$; φ – кут нахилу радіус-вектора, що з'єднує центри включення та тріщини до площин їх розташування.

У випадку взаємодії аналогічно розташованих двох тріщин рівняння для визначення функції розкриття однієї з них методом поля ефективних напружень будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_2-\xi_2)^2}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \right) \alpha_{12}(\xi) + \frac{3\nu_1(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \alpha_{22}(\xi) \right] d_\xi S = \\
& = \frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \frac{3(x_1-\xi_1)d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^*-\xi|^2} \right] d_\xi S;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_2} \left[\frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^5} \alpha_{12}(\boldsymbol{\xi}) + \left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^5} \right) \alpha_{22}(\boldsymbol{\xi}) \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S = \\
& = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \frac{3(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2) d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|^2} \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S. \\
& \iint_{S_2} \frac{\alpha_{32}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} d_{\boldsymbol{\xi}} S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{p_0}{\pi^2} \iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|^3} \left[1 + \frac{6d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|^2} - \frac{15d^4 \sin^4 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|^4} \right] d_{\boldsymbol{\xi}} S + \\
& + \frac{1 - \nu_1}{G_1} p_0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Числово розв'язуючи систему рівнянь (3.51) за описаною вище методикою знаходимо значення стрибків переміщень в колокаційних точках серединної поверхні пружного включення зумовленого наявністю сусідньої тріщини, а розв'язування системи рівнянь (3.52) дозволяє знайти значення функцій розкриття тріщини, викликане наявністю сусідньої тріщини в паралельній площині. Далі за формулами (3.48) можемо обчислити КІН на контурі цих концентраторів напружень.

На рис. 3.21 показано порівняння результатів обчислень значень КІН нормального відриву в точці $\psi_0 = \pi/2$ (кут відкладається від осі x_{12}) контуру серединної поверхні дископодібного включення (криві 1) та контуру кругової тріщини (криві 2) радіуса a отриманих із застосуванням методу поля ефективних напружень (суцільні криві) та модифікованого методу граничних елементів, який в повний мірі враховує взаємодію розглядуваних концентраторів напружень (штрихові криві), в задачах про їх взаємодію з рівновеликою круговою тріщиною в безмежному пружному просторі. Розглядалися три випадки розташування взаємодіючих об'єктів в паралельних площинах: радіус-вектор, що з'єднує центри об'єктів нахилений до їх площин під кутом 0° (рис. 3.21 а); 45° (рис. 3.21 б); 90° (рис. 3.21 в). Включення характеризується малою

жорсткістю $G_2/G_1 = 0,05$ і товщиною $h_2/a_2 = 0,01$. Коефіцієнтів Пуассона матеріалів безмежного простору та включення однакові і рівні $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

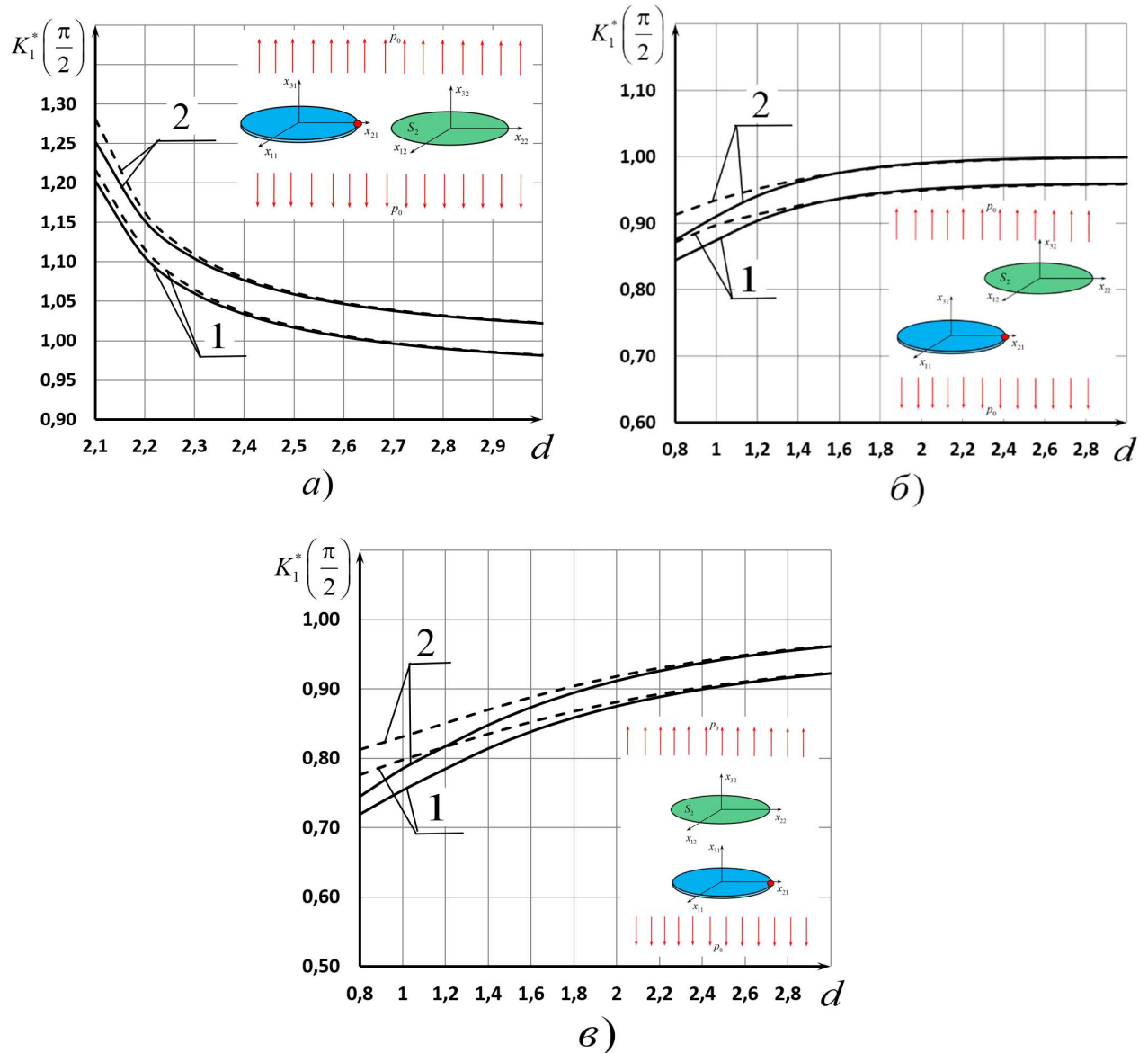


Рис. 3.21. Залежність приведенного КІН нормального відриву на контурі тонкого пружного включення (1) та тріщини (2) за умови їх взаємодії з рівновеликою круговою тріщиною від відстані між їх центрами. Радіус-вектор між центрами об'єктів нахилений до площин їх розташування під кутом: а) 0° ; б) 45° ; в) 90° .

Значення КІН на графіках віднесені до КІН нормального відриву на контурі ізолюваної тріщини при аналогічному навантаженні безмежного тіла.

Як видно з рис. 3.21, точність результатів отриманих методом поля ефе-

ктивних напружень залежать від взаємного розташування взаємодіючих об'єктів і є задовільними якщо між найближчими точками контурів взаємодіючих об'єктів відстань є більшою за $0,1a$ при $\varphi = 0$; $0,8a$ при $\varphi = 45^\circ$; $1,6a$ при $\varphi = 90^\circ$.

В іншому випадку метод поля ефективних напружень підлягає уточненню за наступною схемою: а) визначення з рівнянь (3.51) функції стрибків переміщень $\beta_{j2}(\mathbf{x})$ ($j = \overline{1,3}$) серединної поверхні включення підставляємо в систему ГПР (3.43) застосовуючи метод поля ефективних напружень до тріщини

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_3} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{y}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(y_2-\xi_2)^2}{|\mathbf{y}-\xi|^5} \right) \alpha_{13}(\xi) + \frac{3\nu_1(y_1-\xi_1)(y_2-\xi_2)}{|\mathbf{y}-\xi|^5} \alpha_{23}(\xi) \right] d_\xi S = \\
& = - \iint_{S_2} \left\langle \frac{\beta_{12}(\xi)}{|\mathbf{y}^*-\xi|^3} \left[1+\nu_1 - \frac{3\nu_1(y_2-d\cos\varphi-\xi_2)^2 + 3d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^2} - \frac{15(y_1-\xi_1)^2 d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^4} \right] + \right. \\
& + \beta_{22}(\xi) \frac{3(y_1-\xi_1)(y_2-d\cos\varphi-\xi_2)}{|\mathbf{y}^*-\xi|^5} \left[\nu_1 - \frac{5d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^5} \right] - \beta_{32}(\xi) \frac{3(y_1-\xi_1)d\sin\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^5} \times \\
& \times \left. \left[1 - \frac{5d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^2} \right] \right\rangle d_\xi S, \\
& \iint_{S_3} \left[\frac{3\nu_1(y_1-\xi_1)(y_2-\xi_2)}{|\mathbf{y}-\xi|^5} \alpha_{13}(\xi) + \left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{y}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(y_1-\xi_1)^2}{|\mathbf{y}-\xi|^5} \right) \alpha_{23}(\xi) \right] d_\xi S = \\
& \iint_{S_2} \left\langle \beta_{12}(\xi) \frac{3(y_2-d\cos\varphi-\xi_2)(y_1-\xi_1)}{|\mathbf{y}^*-\xi|^5} \left[\nu_1 - \frac{5d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^2} \right] + \frac{\beta_{22}(\xi)}{|\mathbf{y}^*-\xi|^3} \left[1+\nu_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{3\nu_1(y_1-\xi_1)^2 + 3d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^2} - \frac{15(y_2+d\cos\varphi-\xi_2)^2 d^2\sin^2\varphi}{|\mathbf{y}^*-\xi|^4} \right] + \beta_{32}(\xi) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{3(y_2 - d \cos \varphi - \xi_2) d \sin \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^2} \right] \Bigg\rangle d_\xi S, \\
& \iint_{S_3} \frac{\alpha_{33}(\xi)}{|\mathbf{y} - \xi|^3} d_\xi S = \iint_{S_2} \left\langle \beta_{12}(\xi) \frac{3d \sin \varphi (y_1 - \xi_1)}{|\mathbf{y}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^2} \right] + \beta_{22}(\xi) \times \right. \\
& \times \frac{3d \sin \varphi (y_2 - d \cos \varphi - \xi_2)}{|\mathbf{y}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^2} \right] - \frac{\beta_{32}(\xi)}{|\mathbf{y}^* - \xi|^3} \times \\
& \left. \times \left[1 + \frac{6d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^2} - \frac{15d^4 \sin^4 \varphi}{|\mathbf{y}^* - \xi|^4} \right] \right\rangle d_\xi S + \frac{1 - \nu_1}{G_1} p_0, \mathbf{y} \in S_2; \tag{3.53}
\end{aligned}$$

б) функції розкриття тріщини $\alpha_{j2}^{(1)}(\mathbf{x}) (j = \overline{1,3})$ визначені на попередньому кроці підставляємо у вихідні співвідношення методу поля ефективних напружень для включення замість нульового наближення (3.50):

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1 (x_2 - \xi_2)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \right) \beta_{12}^{(1)}(\xi) + \frac{3\nu_1 (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \beta_{22}^{(1)}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& - 4\pi(1 - \nu_1) \frac{G_2}{G_1} \frac{\beta_{12}^{(1)}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} + \iint_{S_3} \left\langle \frac{\alpha_{13}^{(1)}(\xi)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^3} \left[1 + \nu_1 - \frac{3\nu_1 (x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)^2 + 3d^2 \sin \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{15(x_1 - \xi_1)^2 d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^4} \right] + \alpha_{23}^{(1)}(\xi) \frac{3(x_1 - \xi_1)(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \left[\nu_1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_{33}^{(1)}(\xi) \frac{3(x_1 - \xi_1) d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] \right\rangle d_\xi S;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_2} \left[\frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \beta_{12}^{(1)}(\xi) + \left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \right) \beta_{22}^{(1)}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& - 4\pi(1 - \nu_1) \frac{G_2}{G_1} \frac{\beta_{22}^{(1)}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} + \iint_{S_3} \left\langle \alpha_{13}^{(1)}(\xi) \frac{3(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)(x_1 - \xi_1)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \left[\nu_1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha_{23}^{(1)}(\xi)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^3} \left[1 + \nu_1 - \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)^2 + 3d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} - \frac{15(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)^2 d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^4} \right] + \\
& \left. + \alpha_{33}^{(1)}(\xi) \frac{3(x_2 - d \cos \varphi - \xi_2) d \sin \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] \right\rangle d_\xi S; \\
& \iint_{S_2} \frac{\beta_{32}^{(1)}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S - 4\pi(1 - \nu_1) \frac{G_2}{G_1} \frac{2(1 + \nu_2)}{1 - 2\nu_2} \frac{\beta_{32}^{(1)}(\mathbf{x})}{h_2(\mathbf{x})} + \iint_{S_3} \left\langle \alpha_{13}^{(1)}(\xi) \frac{3d \sin \varphi (x_1 - \xi_1)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \times \right. \\
& \times \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] + \alpha_{23}^{(1)}(\xi) \frac{3d \sin \varphi (x_2 - d \cos \varphi - \xi_2)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^5} \left[1 - \frac{5d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} \right] + \frac{\alpha_{33}^{(1)}(\xi)}{|\mathbf{x}^* - \xi|^3} \times \\
& \times \left[1 + \frac{6d^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^2} - \frac{15d^4 \sin^4 \varphi}{|\mathbf{x}^* - \xi|^4} \right] \left. \right\rangle d_\xi S + \frac{1 - \nu_1}{G_1} p_0; \tag{3.54}
\end{aligned}$$

в) розв'язавши числово систему ГІР (3.54), отримаємо уточнені функції стрибків $\beta_{j2}^{(1)}(\mathbf{x}) (j = \overline{1,3})$ серединної поверхні включення. За потреби ітерацію уточнення розв'язку можна повторити, підставивши $\beta_{j2}^{(1)}(\mathbf{x}) (j = \overline{1,3})$ в рівняння (3.53), визначаємо $\alpha_{j3}^{(2)}(\mathbf{x}) (j = \overline{1,3})$, які в свою чергу підставляємо в (3.54) для визначення наступного наближення $\beta_{j2}^{(2)}(\mathbf{x}) (j = \overline{1,3})$ і т.д.

На рис. 3.22 показано результат обчислення двох ітерації уточнення методу поля ефективних напружень задачі про взаємодію тонкого пружного

включення з тріщиною, коли радіус-вектор що з'єднує їх центри перпендикулярний до площин розташування дефектів ($\varphi = 90^\circ$). Обчислення проводились при відносно близькому розташуванні концентраторів напружень $0,8 < d/a < 2,2$. Як видно з рисунку, в залежності від розташування розглядуваних взаємодіючих об'єктів достатньо від однієї до двох ітерацій уточнення методу поля ефективних напружень, щоб досягнути задовільної точності

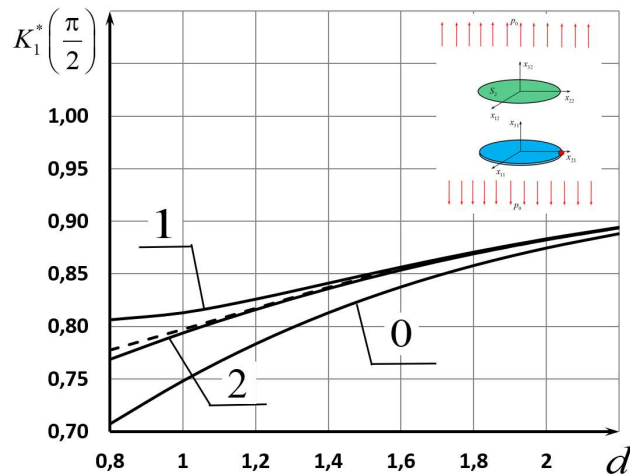


Рис. 3.22. Ітераційне уточнення залежності приведенного КІН нормального відриву на контурі тонкого пружного включення за його взаємодії з компланарною рівновеликою круговою тріщиною від відстані між їх центрами.

розв'язування задачі, що в сумі все одно забезпечує економію роботи процесора ПК за рахунок меншої кількості математичних операцій порівнянь з точним методом дослідження взаємодії плоских концентраторів напружень методом граничних елементів.

3.5. Замкнутий розв'язок задачі про взаємодію двох кругових тріщин в одній площині методом поля ефективних напружень

В механіці руйнування при дослідженні теплопровідності і термопружності пружних тіл, ослаблених тріщинами, а також в аналізі контактної взаємодії пружних тіл широко використовуються замкнуті аналітичні розв'язки модельних задач для перевірки достовірності математичних моделей та чисельних методик їх реалізації.

Зокрема, розв'язаність двовимірних інтегро-дифференціальних рівнянь першого роду типу ньютонівського потенціалу

$$\iint_S \frac{\alpha(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S = g(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.55)$$

досліджено для деяких видів областей шляхом зведення до задачі Рімана-Гільберта теорії аналітичних функцій. Доведено, що в загальному випадку рівняння (3.55) не має єдиного розв'язку, але при існуванні додаткових умов на поведінку функції $\alpha(\xi)$ у околі контуру області інтегрування, рівняння розв'язується однозначно. У механіці руйнування, де густини інтегралів мають фізичний сенс функцій розкриття тріщини, така умова виливає з фізичної постановки задачі.

Проблема побудови замкнутого аналітичного розв'язку рівнянь вигляду (3.55) при довільній правій частині також вирішена лише для деяких областей інтегрування. Наприклад, для кругової області інтегрування формула обернення має вигляд [181]:

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi^3} \iint_S \frac{g(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} \arctg \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}}{a|\mathbf{x} - \xi|} d_\xi S, \quad (3.56)$$

де a – радіус області S . У випадку постійної правої частини, розв'язок рівняння (3.55) набуває простішого вигляду і був поданий вище останнім виразом співвідношень (3.50).

Що ж до інших топологічних форм області інтегрування або проблеми взаємодії не періодичної системи декількох тріщин, то в літературі відсутні аналітичні розв'язки таких задач. Застосуємо вищевикладений метод поля ефективних напружень для побудови наближеного аналітичного розв'язку системи двовимірних інтегро-дифференціальних рівнянь першого роду типу нью-

тонівського потенціалу задачі про взаємодію двох кругових тріщин в пружному просторі.

Нехай в однорідному пружному просторі розташовані в одній площині дві плоскі кругові тріщини (рис. 3.23). Одна з тріщин займає кругову область S_2 радіуса a_2 , а друга – область S_3 радіуса a_3 . Виберемо в центрі області S_2 декартову систему координат $O_2 x_1 x_2 x_3$ так, щоб протилежним поверхням $S_2^\pm$ тріщини відповідали значення $x_3 = \pm 0$. Аналогічним чином в центрі області S_3 виберемо систему координат $O_3 y_1 y_2 y_3$. Відстань між центрами тріщин позначимо через $|O_2 O_3| \stackrel{def}{=} d$. Нехай, на нескінченності тіло навантажене постійними, нормальними до поверхні тріщин зусиллями T_3 .

Система ГІР (3.6), в розглядуваному випадку, зводиться до двох гіперсингулярних інтегральних рівнянь [153]:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \frac{\alpha_3^{(2)}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S + \iint_{S_3} \frac{\alpha_3^{(3)}(\eta)}{|\mathbf{y} - \eta|^3} d_\eta S &= \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_2; \\ \iint_{S_2} \frac{\alpha_3^{(2)}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S + \iint_{S_3} \frac{\alpha_3^{(3)}(\eta)}{|\mathbf{y} - \eta|^3} d_\eta S &= \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_3, \end{aligned} \quad (3.57)$$

де $\alpha_3^{(j)} (j=1,2)$ – функції, що характеризують нормальне розкриття j -тої тріщини; G_0, ν_0 – пружні сталі матеріалу тіла, що містить тріщини.

Враховуючи перетворення на нуль густин потенціалів в рівняннях (3.57) на контурі областей інтеграції, надалі використовуватимемо нові невідомі функції:

$$\alpha_3^{(2)}(\xi) = \gamma_3^{(2)}(\xi) \sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad \alpha_3^{(3)}(\eta) = \gamma_3^{(3)}(\eta) \sqrt{a_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}. \quad (3.58)$$

Враховуючи (3.58) і залишаючи в лівій частині рівнянь лише сингулярні інтеграли, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S &= \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3 - \iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \gamma_3^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S, \\
\iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \gamma_3^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S &= \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3 - \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S. \quad (3.59)
\end{aligned}$$

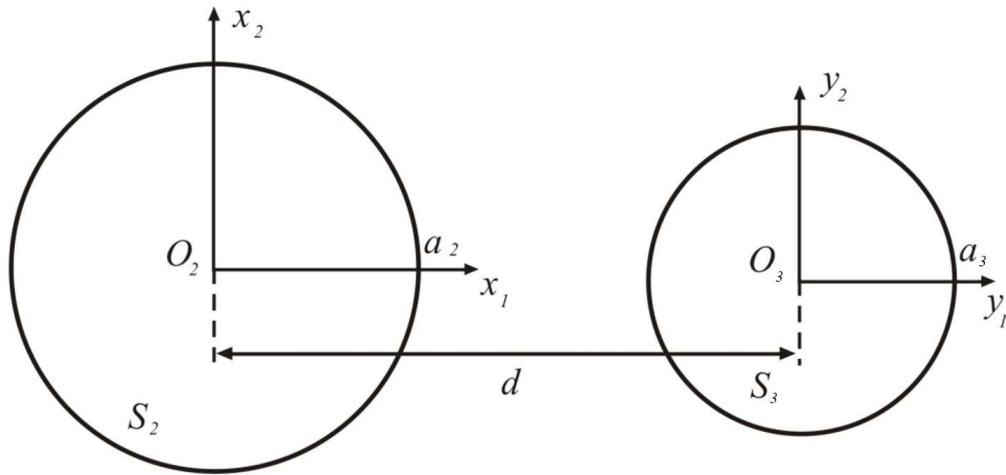


Рис. 3.23. Схема взаємодіючих тріщин в пружному просторі.

Отримані рівняння мають структуру аналогічну рівнянню (3.55) задачі про концентрацію напружень в околі ізольованої плоскої тріщини. Права частина рівнянь відповідає навантаженню поверхні тріщини. Таким чином, інтеграли в правій частині рівнянь (3.59) можна вважати поправкою до зусиль на поверхні тріщини, що зумовлені наявністю сусідньої тріщини. Визначення цих інтегралів дало б можливість застосувати формулу обернення (3.56), але, на жаль, це неможливо внаслідок взаємозалежності рівнянь (3.59).

Проблему можна вирішити, нехтуючи в першому наближенні взаємодією тріщин і приймаючи, згідно (3.50) $\gamma_3^{(3)}(\boldsymbol{\xi})$ в першому рівнянні (3.59) і $\gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ у другому рівнянні (3.59) рівним значенню $-\frac{1 - \nu}{G} \frac{T_3}{\pi^2}$. Таким чином, можна розділити систему (3.59) на незалежні рівняння:

$$\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S = \frac{1 - \nu_0}{G_0} T_3 \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} d_{\boldsymbol{\eta}} S \right),$$

$$\iint_{S_3} \frac{\sqrt{a_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \gamma_3^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3 \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} d_{\boldsymbol{\xi}} S \right). \quad (3.60)$$

Далі необхідно обчислити інтеграл вигляду $J(\mathbf{y}) = \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} d_{\boldsymbol{\eta}} S$ у

точці, що знаходиться за межами області інтегрування. Для цього перейдемо до полярних координат: $\eta_1 = y_1 + \rho \cos \varphi$; $\eta_2 = y_2 + \rho \sin \varphi$. Оскільки значення інтеграла залежить лише від відстані центру області інтегрування до точки визначення інтеграла, досить розглянути окремий випадок коли $y_1 = -r$, $y_2 = 0$ (рис. 3.24).

Рівняння контуру області S_2 має вид $\eta_1^2 + \eta_2^2 = a_2^2$ або в полярних координатах $(-r + \rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = a_2^2$. Обчислимо значення ρ , при яких точка $\boldsymbol{\eta}$ знаходиться на контурі області S_2 : $\rho^2 + 2M\rho - N = 0$, де $M = -r \cos \varphi$; $N = a_2^2 - r^2$; ($N < 0$ $M < 0$). Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо: $\rho_{1-2} = -M \pm \sqrt{M^2 + N}$.

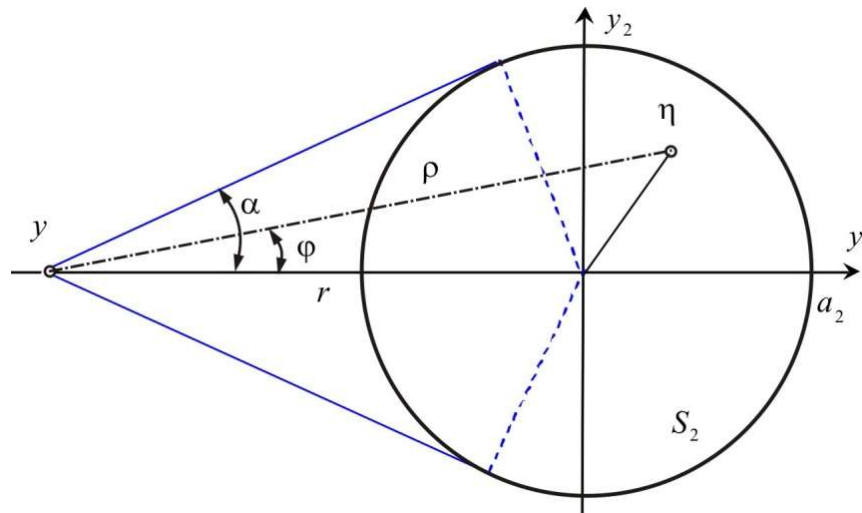


Рис. 3.24. Схема розташування точки поля ефективних напружень при взаємодії двох кругових тріщин в одній площині.

Кут огляду, під яким видно область тріщини з точки, позначимо через

2α , де $\alpha = \arcsin \frac{a_2}{r}$. Тоді шуканий інтеграл можна подати таким чином:

$$J(\mathbf{y}) = \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} d_{\boldsymbol{\eta}} S = \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_{-M-\sqrt{M^2+N}}^{-M+\sqrt{M^2+N}} \frac{\rho \sqrt{N-2M\rho-\rho^2}}{\rho^3} d\rho.$$

Проведемо заміну змінних $\rho = -M + t\sqrt{M^2 + N}$. Тоді $d\rho = dt\sqrt{M^2 + N}$; $\sqrt{N-2M\rho-\rho^2} = \sqrt{M^2 + N} \sqrt{1-t^2}$. Використовуючи прийом інтегрування по частинах, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)^2} dt &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{-\sqrt{1-t^2}}{t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)} d\varphi = \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-1}^1 \frac{t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}} + \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}}{\sqrt{1-t^2} \left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)} dt \right] d\varphi = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-1}^1 \frac{t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}}{\sqrt{1-t^2} \left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{\frac{M}{\sqrt{M^2+N}}}{\sqrt{1-t^2} \left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)} dt \right] d\varphi = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{M}{\sqrt{M^2+N}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t - \frac{M}{\sqrt{M^2+N}}\right)} \right] d\varphi = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\pi + \pi \frac{M}{\sqrt{M^2+N}} \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2}{M^2+N} - 1}} \right] d\varphi = \\ &= - \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[1 + \frac{M}{\sqrt{-N}} \right] d\varphi = -2\pi\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{-N}} 2r \sin \alpha = 2\pi \left[\frac{a_2}{\sqrt{r^2 - a_2^2}} - \arcsin\left(\frac{a_2}{r}\right) \right]. \end{aligned}$$

Тут взято до уваги, що [37]

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - y)} = \pi \begin{cases} 0, & |y| < a \\ -\frac{\operatorname{sign} y}{\sqrt{y^2 - a^2}}, & |y| > a \end{cases} \quad \text{і} \quad \left| \frac{M}{\sqrt{M^2 + N}} \right| > 1.$$

Таким чином, перше рівняння системи (3.60) матиме вигляд:

$$\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3 \left(1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 - a_3^2}} - \arcsin \left(\frac{a_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) \right] \right)$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1$. Враховуючи співвідношення між координатами точки в локальних системах координат $x_1 = y_1 + d$; $x_2 = y_2$, остаточно отримаємо:

$$\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \gamma_3^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} S_1 = \frac{1 - \nu_1}{G_1} T_3 \left(1 + \frac{2}{\pi} \Omega(\mathbf{x}) \right); \quad \mathbf{x} \in S_2,$$

$$\text{де } \Omega(\mathbf{x}) = \frac{a_3}{\sqrt{(x_1 - d)^2 + x_2^2 - a_3^2}} - \arcsin \left(\frac{a_3}{\sqrt{(x_1 - d)^2 + x_2^2}} \right).$$

Далі, використовуючи формулу обернення (3.56), отримуємо функції розкриття тріщини:

$$\gamma_3^{(2)}(x) = -\frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{T_3}{\pi^2} \left(1 + \iint_{S_2} \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi})}{\pi^2 |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \sqrt{a_2^2 - x_1^2 - x_2^2}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \sqrt{a_2^2 - x_1^2 - x_2^2}}{a_2 |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} d_{\boldsymbol{\xi}} S \right).$$

Для визначення КІН нормального відриву необхідні значення функцій $\gamma_3^{(j)} (j = 1, 2)$ на контурі тріщин. Розкладаючи функцію arctg у ряд для ліквіда-

ції невизначеності, і переходячи до точки контуру $\mathbf{x}_0$ області тріщини, отримаємо:

$$\gamma_3^{(2)}(\mathbf{x}_0) = -\frac{1-\nu_1}{G_1} \frac{T_3}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_2} \Omega(\xi) \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{a_2 |\mathbf{x}_0 - \xi|^2} d_\xi S \right).$$

Інші члени ряду перетворюються на нуль. Таким чином, враховуючи (3.48) КІН нормального відриву на контурі тріщини буде рівний:

$$K_1(\mathbf{x}_0) = 2T_3 \sqrt{\frac{a_2}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_2} \Omega(\xi) \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{a_2 |\mathbf{x}_0 - \xi|^2} d_\xi S \right). \quad (3.61)$$

Інтеграл у формулі (3.61) містить інтегровну сингулярність на контурі області тріщини. Ліквідація цієї особливості можлива за допомогою чисельно-аналітичної методики регуляризації.

Для перевірки формули (3.61) результати, отримані з її допомогою, порівнювалися з відомими в літературі результатами чисельного розв'язування задачі [178, 182].

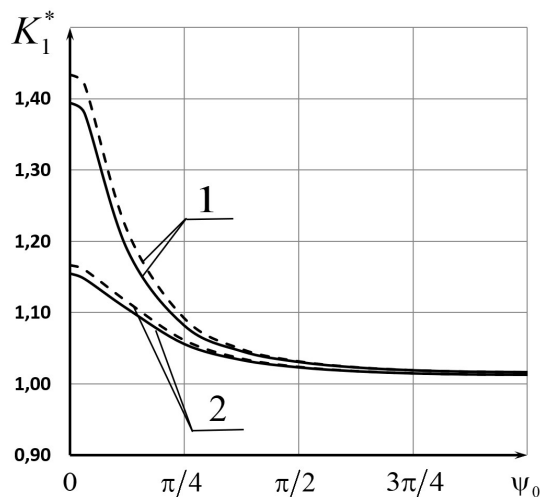


Рис. 3.25. Залежність нормованого КІН на контурі тріщини за взаємодії з іншою рівновеликою тріщиною аналітичний розв'язок методом ПЕН (суцільні криві) та числовий розв'язок (штрихові криві).

Розглянемо випадок взаємодії двох кругових тріщин однакового радіусу

a , що знаходяться в одній площині. Для виключення впливу величини навантаження на коефіцієнти інтенсивності напружень, на рис. 3.25 представлені залежності нормованих величин $K_1^*(x_0) = K_1(x_0)/k_\infty$, від кутової координати ψ_0 точки контуру тріщини в діапазоні $0 < \psi_0 < \pi$ в силу симетрії задачі ($k_\infty = 2T_3 \sqrt{a/\pi}$ – КІН для кругової ізольованої тріщини аналогічного радіусу). Суцільними лініями позначені результати, отримані за наближеним аналітичним розв’язком методу поля ефективних напружень, штриховими – результати, отримані методом ГІР. Криві 1 відповідають відстані між центрами тріщин $d = 2,05a$, криві 2 – відстані $d = 2,2a$.

Вищевикладений метод очікувано показує найменш точний результат в точках контуру тріщини, які найбільш близькі до сусідньої тріщини, причому точність погіршується при наближенні тріщин. Слід зауважити, що КІН визначений за допомогою методу малого параметра [58] в першому наближенні по точності значно поступається виразу (3.61) при аналогічних вихідних даних.

3.6. Висновки до третього розділу

Описано граничноелементний алгоритм дослідження тривимірної пружної взаємодії скінченної кількості об’ємисто-неканонічних та плоских тонкостінних включень і тріщин та його модифікований варіант для розріджено-великих систем таких наповнювачів з досягненням редукції розрахункових ГІР.

Тверде (м’яке) волокно забезпечує ефект екранування (посилення) для матричної тріщини, що проявляється зменшенням (збільшенням) КІН у порівнянні з ізольованою тріщиною. Екстремальне значення КІН матричної тріщини фіксується в точці контуру тріщини, найближчій (найвіддаленішій) до твердого (м’якого) волокна.

Зміщена від центру тріщина всередині твердого (м’якого) волокна демонструє більший (менший) КІН в точці контуру тріщини, найближчій до поверхні волокна, завдяки підсилюючому (захисному) ефекту м’якої (твердої)

матриці, що оточує волокно.

Зафіксовано порогову довжину скінченного циліндричного волокна, за перевищення якої спостерігається відсутність її впливу на КІН в околі матричної або волоконної тріщини. Зокрема, гранична піввисота волокна, збільшення якої не приводить до зміни КІН для тріщини радіусу R , становить $H = 6R$ у випадку матричної тріщини і $H = 16R$ у випадку волоконної для матеріалу волокон, вдсятеро м'якішого за матричний, тоді як для вдсятеро жорсткіших за матрицю волокон ця регулярність виникає з довжини $H = 14R$ у випадку матричної тріщини і $H = 30R$ у випадку волоконної.

Якісно кругова та еліптична тріщини під впливом волокна відрізняються більш складним розподілом КІН вздовж фронту тріщини у другому випадку за рахунок появи додаткових екстремумів і зміни їх позицій. Матрична еліптична тріщина, орієнтована малою піввіссю на волокно, характеризується двома мінімальними та двома максимальними значеннями КІН. КІН як функція точки контуру матричної еліптичної тріщини, що до волокна більшою піввіссю, демонструє три екстремуми, а саме: два мінімуми і максимум. У випадку еліптичної тріщини волокна фіксуються два максимуми та два мінімуми КІН. Для обох конфігурацій, якщо відстань між тріщиною і поверхнею волокна збільшується, розподіл КІН вздовж фронту тріщини стає більш згладженим, зокрема, для Конфігурації I КІН наближаються до відповідних значень ізольованої тріщини (тоді взаємодією між тріщиною та волокном можна бути знехтувати).

Якісна картина розподілу локального поля напружень за взаємодії тріщини з порожниною аналогічно до випадку взаємодії тріщини з м'яким включенням. Проте ймовірний напрямок поширення тріщини в околі газонаповненої порожнини залежить від величини внутрішнього тиску в порожнині та розташування тріщини відносно порожнини. Зменшення радіуса кривизни осі порожнини з безмежності до $6a$ спричинює зростання максимального зна-

чення КІН на контурі тріщини на 5 %. Якщо внутрішній тиск в порожнині значно перевищує напруження на берегах тріщини, то тріщина поширюватиметься в протилежному до порожнини напрямку. Тож, наприклад, для прориву газоносної сланцевої породи потрібно забезпечити розривне навантаження на берегах тріщин не менше ніж 80 % від прогнозованого тиску газу в порожнинах.

Для дослідження локальних полів напружень за множинної взаємодії тріщиноподібних дефектів та тонких або об'ємних включень запропоновано використовувати наближений метод поля ефективних напружень, що ґрунтується на нехтуванні зворотного впливу розглядуваного об'єкту на сусідні тріщини або включення. Це дозволяє на порядок зменшити кількість математичних операцій при розв'язуванні задачі множинної взаємодії тріщин та включень. Взаємодія тріщинних дефектів з різнотипними за формою, жорсткістю та розташуванням неоднорідностями приводить до складної поведінки КІН вздовж фронту дефекту з проявом ефектів як збільшення, так і зменшення КІН стосовно аналогічно навантажених тріщин в однорідному тілі.

Межі застосовності результатів отриманих методом поля ефективних напружень залежить від взаємної орієнтації взаємодіючих об'єктів. У випадку зменшення віддалі між їх центрами похибка зростає, проте, вона локалізована лише в точках, що найближче розташовані до сусіднього об'єкта. Застосування методу поля ефективних напружень рекомендоване у випадку, коли має місце взаємодія більше двох тріщин, найближчі точки яких знаходяться на відстані в межах 10-400 % радіусів тріщин.

Близьке розташування взаємодіючих об'єктів може вимагати застосування декількох ітерацій методу поля ефективних напружень. Аналіз результатів отриманих двома ітераціями методу поля ефективних напружень у випадку взаємодії рівновеликих тріщин розташованих в паралельних площинах одна над одною показує, що похибка зменшується в 10 разів і при цьому зменшення кількості математичних операцій порівняно з класичним методом ГІР залишається високою.

РОЗДІЛ 4

ТРИВИМІРНІ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ НЕКАНОНІЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ТА ТРІЩИН У ОБМЕЖЕНОМУ ТІЛІ

У більшості відомих в літературі досліджень локальних напружених полів, генерованих взаємодіючими тріщинними (тонкостінними) дефектами, наявність поверхні тіла або взагалі ігнорувалася або моделювалася безмежною площиною. Натомість кривизна зовнішньої поверхні тіла суттєво впливає на концентрацію напружень на контурі приповерхневих тріщиноподібних дефектів у випадку, якщо радіус цієї кривизни або співмірний або на порядок більший за радіус кривизни контуру області розглядуваних тріщин чи включень.

У цьому розділі числові дослідження методом граничних елементів поширено на тривимірні задачі присутності тонких податливих включень і тріщин у обмеженому пружному тілі. На прикладах пружного порожнистого циліндра і призматичного тіла проаналізовано вплив поверхневих факторів на КІН в околі внутрішніх поодиноких і множинних тріщинних дефектів.

Матеріали розділу викладені в працях [147, 148, 150, 160, 162, 326, 457].

4.1. Зведення задач взаємодії плоских тріщин та тонких податливих включень із зовнішньою поверхнею пружного тіла до систем інтегральних рівнянь та побудова їх дискретних аналогів

Оцінка міцності та надійності пружних тіл, обмежених криволінійними поверхнями, що містять дефекти, на відміну від випадку аналогічної задачі в пружному просторі, вимагає врахування полів напружень і деформацій, ініційованих зусиллями та переміщеннями точок поверхні тіла внаслідок його закріплення та зовнішнього навантаження.

Розглянемо однорідне пружне тіло Ω , обмежене гладкою поверхнею S , послаблене довільно орієнтованими плоскими тріщиноподібними дефектами. Області серединних поверхонь внутрішніх тонких включень малої жорсткості

товщиною h_k позначимо через S_k , $(k = \overline{2, N_1 + 1})$, області поверхонь плоских тріщин позначимо через S_n , $(n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1})$ (рис. 4.1). Механічні властивості матеріалів визначаються модулями зсуву і коефіцієнтами Пуассона тіла Ω (G_1, ν_1) та пружних включень $(G_k, \nu_k, k = \overline{2, N_1 + 1})$. Тіло Ω знаходиться під дією статичного навантаження частини S_T його зовнішньої поверхні, на іншій частині поверхні тіла S_U задані переміщення так, щоб сукупність активних і реактивних зовнішніх сил забезпечували статичну рівновагу тіла. $S_T \cup S_U = S$. Поверхні тріщин вільні від навантажень.

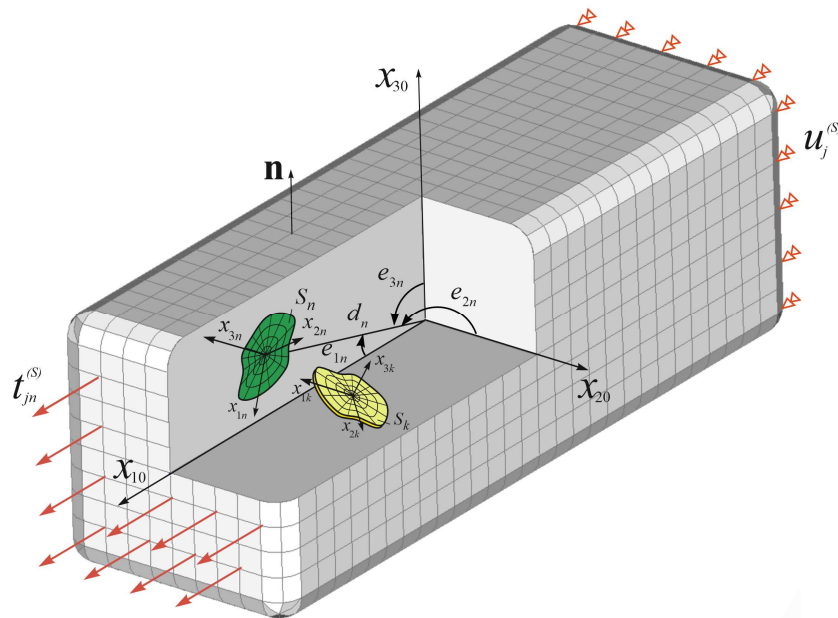


Рис. 4.1. Схема розташування тріщин та тонких податливих включень в тілі, обмеженому гладкою поверхнею S .

Виділимо поля напружень, деформацій та переміщень в тілі $\sigma_{ij}^{(0)}; \varepsilon_{ij}^{(0)}; u_i^{(0)}$ $(i, j = \overline{1, 3})$, викликані заданим зовнішнім навантаженням і реактивними силами у бездефектному пружному тілі Ω у глобальній системі координат $Ox_{11}x_{21}x_{31}$ з початком в центрі тіла і осями направленими з врахуванням його топології. Нехай стрибки переміщень на поверхнях k -того включення генерують поля напружень, деформацій та переміщень $\sigma_{ij}^{(k)}; \varepsilon_{ij}^{(k)}; u_i^{(k)}$

$(i, j = \overline{1,3}; k = \overline{2, N_1 + 1})$, описані в системі координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, що прив'язана до центру цього включення. Розкриття n -ї тріщини є причиною появи полів напружень, деформацій та переміщень $\sigma_{ij}^{(n)}$; $\varepsilon_{ij}^{(n)}$; $u_i^{(n)}$ $(i, j = \overline{1,3}; n = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1})$, заданих в системі координат $O_n x_{1n} x_{2n} x_{3n}$, що прив'язана до центру області відповідної тріщини. Вісь $O_m x_{3m}$ $(m = \overline{2, N_1 + N_2 + 1})$ завжди будемо направляти в напрямку, перпендикулярному до площини області S_m .

Положення дефектів опишемо з допомогою радіус-вектора $\vec{d}_m$ центру m -того дефекту та його напрямних косинусів e_{jm} $(j = \overline{1,3}; m = \overline{2, N_1 + N_2 + 1})$ в глобальній системі координат $O x_{11} x_{21} x_{31}$. Положення центру глобальної системи координат відносно m -того дефекту задамо протилежним вектором $\vec{d}_m^*$ та його напрямними косинусами e_{jm}^* в системі координат $O_m x_{1m} x_{2m} x_{3m}$. Відносне положення двох дефектів визначатимемо вектором $\vec{d}_{km}^*$, що з'єднує центри k -того та m -того дефектів та його напрямними косинусами e_{jkm}^* в системі координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$. Через $l_{ijm1} = \cos(\widehat{O_m x_{im}, O x_{j1}})$ $(i, j = \overline{1,3})$ позначимо косинуси кутів між осями m -тої локальної і глобальної систем координат, а через $l_{ijmk} = \cos(\widehat{O_m x_{im}, O_k x_{jk}})$ $(i, j = \overline{1,3})$ – косинуси кутів між осями m -тої та k -тої локальних систем координат. Компоненти тензорів напружень, деформацій, та вектора переміщень, що виникають внаслідок наявності в тілі m -того дефекту, у глобальній системі координат будемо позначати через $\sigma_{ij}^{(m1)}$; $\varepsilon_{ij}^{(m1)}$; $u_i^{(m1)}$ відповідно.

Таким чином, для перетворення компонент тензора напружень і вектора переміщень в різних системах координат слід використовувати формули:

$$u_i^{(m1)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 u_j^{(m)}(\mathbf{y}) l_{ijm1}; \quad \sigma_{ij}^{(m1)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sigma_{ls}^{(m)}(\mathbf{y}) l_{ilm1} l_{jsm1}; \quad j = \overline{1,3}. \quad (4.1)$$

Принцип суперпозиції дозволяє визначити загальний напружено-деформований стан в тілі як суму напружених станів описаних вище:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} \sigma_{ij}^{(m1)}(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_1+N_2+1} u_i^{(m1)}(\mathbf{x}), \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (4.2)$$

Крайові умови на поверхні тіла Ω в глобальній системі координат $Ox_{11}x_{21}x_3$ мають вигляд ($j = \overline{1,3}$):

$$u_j(\mathbf{x}_0) \Big|_{\mathbf{x}_0 \in S_U} = u_j^{(S)}(\mathbf{x}_0); \quad \sigma_{nj}(\mathbf{x}_0) \Big|_{\mathbf{x}_0 \in S_T} = t_{jn}^{(S)}(\mathbf{x}_0). \quad (4.3)$$

Крайові умови на поверхнях тріщин та тонких пружних включень в локальних системах координат задаються виразами (3.2)-(3.3).

Інтегральні подання Сомільяно компонент вектора переміщень та тензора напружень в тілі, викликаних його деформацією зовнішніми силами [206] та розкриттям тріщиноподібних дефектів [59] на основі залежностей (3.24), (3.25) у глобальній системі координат будуть мати вигляд:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \iint_S [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) t_j(\xi) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) u_j(\xi)] d_\xi S + \sum_{m=2}^{N_1+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \times \\ \times \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S, \quad \mathbf{x} \in \Omega, i = \overline{1,3}, \quad (4.4)$$

де $\mathbf{x}$ - вектор координат точки поля; t_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненти вектору крайових зусиль; $\beta_{jm}(\mathbf{x})$ ($m = \overline{2, N_1+1}$) є функціями стрибків переміщень точок серединної поверхні m -того включення вздовж осі $O_m x_{jm}$; $\alpha_{jm}(\mathbf{x})$ ($m = \overline{N_1+2, N_1+N_2+1}$) є функціями розкриття m -тої тріщини в напрямку осі $O_m x_{jm}$; $\mathbf{n}$ є вектором зовнішньої нормалі до поверхні тіла (рис. 4.1); $\mathbf{n}^{I_m}$ та $\mathbf{n}^{C_m}$

– вектори нормалі до серединної площини включення та поверхні тріщини відповідно; U_{ij} , T_{ij} , $\Omega_{ijm0}^{(m)}$ ($i, j = \overline{1,3}$; $m = \overline{2, N_1 + N_2 + 1}$) є тривимірними фундаментальними розв'язками, що визначаються формулами (2.4) та (3.41).

Інтегральні подання компонент тензора напружень в тілі у глобальній системі координат отримуємо, підставивши вирази (4.4) в закон Гука. Як результат, матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = & \sum_{s=1}^3 \iint_S [D_{ijs}(\mathbf{x}, \xi) t_s(\xi) - L_{ijs}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}) u_s(\xi)] d_\xi S + \frac{G_1}{1-\nu_1} \sum_{m=2}^{N_1+1} \sum_{s=1}^3 \iint_{S_m} K_{ism1}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \times \\ & \times \beta_{sm}(\xi) d_\xi S + \frac{G_1}{1-\nu_1} \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{s=1}^3 \iint_{S_m} K_{ism1}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) l_{j3} \alpha_{sm}(\xi) d_\xi S, \mathbf{x} \in \Omega; i, j = \overline{1,3}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

де функції D_{ijs} , L_{ijs} та K_{ism1} задаються співвідношеннями (2.12) та (3.15) відповідно.

Задоволення крайових умов на поверхні пружного тіла з урахуванням граничних властивостей потенціалів простого і подвійного шару [11] в глобальній системі координат дозволяє сформулювати три інтегральних рівнянь відносно невідомих значень вектора переміщень та зусиль на поверхні тіла, а також невідомих стрибків переміщень на поверхнях дефектів:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\ & + \sum_{m=2}^{N_1+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}_{1m}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}_{1m}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S = \\ & = -\frac{1}{2} u_i^{(s)}(\mathbf{x}_{11}) + \sum_{j=1}^3 t_j^{(s)}(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_T} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S - \sum_{j=1}^3 u_j^{(s)}(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_U} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) d_\xi S, \\ & i = \overline{1,3}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{1m} \in S_U, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} u_i^*(\mathbf{x}_{11}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{m=2}^{N_1+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}_{1m}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S_m + \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm1}(\mathbf{x}_{1m}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S_m = \\
& = \sum_{j=1}^3 t_j^{(s)}(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_T} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S - \sum_{j=1}^3 u_j^{(s)}(\mathbf{x}_{11}) \iint_{S_U} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) d_\xi S; i = \overline{1, 3}, \\
& \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{1m} \in S_T,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

де u_i^* , t_i^* – значення компонент векторів переміщень та зусиль в точках поверхні тіла S відповідно; для ідентифікації точки поля будемо дотримуватися позначень прийнятих в розділі 3, де перший індекс координати точки $\mathbf{x}_{ij}$ означає приналежність до поверхні i -того об'єкта, а другий індекс – прив'язку до j -тої системи координат. Таким чином, позначення $\mathbf{x}_{11}$ означає координату точки, що належить поверхні тіла S в глобальній системі координат, а $\mathbf{x}_{1m}$ – координати цієї ж точки у системі координат $O_m x_{1m} x_{2m} x_{3m}$. Перетворення координат при переході від однієї системи координат до іншої є такими:

$$x_{i1m} = e_{im} d_m + \sum_{j=1}^3 l_{ijm1} x_{j11}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Зауважимо, що інтеграли по поверхні S_U в лівій частині рівнянь (4.6) та інтеграли по поверхні S_T в лівій частині рівнянь (4.7) є сингулярними і потребують регуляризації за процедурою, описаною в розділі 2. Решту інтегралів в цих рівняннях є регулярними. Зокрема, інтеграли по поверхнях S_m ($m = \overline{N_1+2, N_1+N_2+1}$) визначають вплив деформування пружних тонких включень та розкриття тріщин на переміщення і зусилля на поверхні пружного тіла, що містить ці дефекти. Інтеграли в правій частині рівнянь (4.6) та (4.7) визначають вплив зовнішнього навантаження та закріплення поверхні пружного тіла на його напружено-деформований стан.

Граничний перехід точки поля у виразах (4.5) до серединних поверхонь

тонких пружних включень з урахування крайових умов на цих поверхнях в локальних системах координат дає можливість отримати ще $3N_1$ інтегральних рівнянь відносно тих самих невідомих величин:

$$\begin{aligned}
& -4\pi \frac{G_k}{G_1} (1-\nu_1) \left(\frac{2+2\nu_k}{1-2\nu_k} \right)^{\delta_{i3}} \frac{\beta_{ik}(\mathbf{x}_{kk})}{h_k(\mathbf{x}_{kk})} + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_k} K_{ijkk}(\mathbf{x}_{kk}, \xi) \beta_{jk}(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{N_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \sum_{m=N_1+1}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S - \\
& - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) \times \\
& \times l_{3sk1} l_{jik1} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 u_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 t_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S, \mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k1} \in S_k; i = \overline{1,3}; k = \overline{2, N_1+1},
\end{aligned}$$

де $\mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k0}$ – координати точки на поверхні k -го дефекту в системах координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, $O_m x_{1m} x_{2m} x_{3m}$ та $O x_{11} x_{21} x_{31}$ відповідно. Тут перетворення координат при переході від однієї системи координат до іншої задається так:

$$x_{ik1} = e_{ik}^* d_k^* + \sum_{j=1}^3 l_{ijk1} x_{jkk}, \quad x_{ikm} = e_{ikm} d_{km} + \sum_{j=1}^3 l_{ijkm} x_{sjk}, \quad i = \overline{1,3}.$$

З урахуванням явного вигляду ядер $K_{ijkk}(\mathbf{x}_{kk}, \xi)$ (3.40), остаточний вигляд ГІР, що визначають деформацію тонких пружних включень, буде:

$$\begin{aligned}
& -4\pi \frac{G_k}{G_1} (1-\nu_1) \frac{2+2\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\beta_{3k}(\mathbf{x}_{kk})}{h_k(\mathbf{x}_{kk})} + \iint_{S_k} \frac{\beta_{3k}(\xi)}{|\mathbf{x}_{kk} - \xi|^3} d_\xi S + \\
& + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{N_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{3jmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{3jmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} \times \\
& \times l_{jik1} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 u_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S - \\
& -\frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 t_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S, \mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k1} \in S_k; k = \overline{2, N_1+1}, \\
& \iint_{S_k} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}_{kk}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-ikk}-\xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{kk}-\xi|^5} \right) \beta_{jk}(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{1kk}-\xi_1)(x_{2kk}-\xi_2)}{|\mathbf{x}_{kk}-\xi|^5} \beta_{3-ik}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& -4\pi \frac{G_k}{G_1} (1-\nu_1) \frac{\beta_{ik}(\mathbf{x}_{kk})}{h_k(\mathbf{x}_{kk})} + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{N_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{m=N_1+2}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_j^{(m)}(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} \times \\
& \times u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 u_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \times \\
& \times \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 t_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S, \\
& \mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k1} \in S_k; i = \overline{1, 2}; k = \overline{2, N_1+1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ще $3N_2$ інтегральних рівнянь отримаємо шляхом граничного переходу точки поля у виразах (4.5) до поверхонь тріщин з урахування крайових умов на цих поверхнях в локальних системах координат та виразів (3.40):

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_k} \frac{\alpha_{3k}(\xi)}{|\mathbf{x}_{kk}-\xi|^3} d_\xi S + \sum_{m=1}^K \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{3jmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{I_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{\substack{m=N_1+2 \\ m \neq k}}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{3jmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_{jm}(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk} l_{j3k1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{j3k1} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 u_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \times \\
& \times \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{j3k1} d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 t_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{j3k1} d_\xi S, \\
& \mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k1} \in S_k; k = \overline{2 + N_1, N_1 + N_2 + 1}, \\
& \iint_{S_k} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}_{kk} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-ikk} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{kk} - \xi|^5} \right) \alpha_{jk}(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{1kk} - \xi_1)(x_{2kk} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{kk} - \xi|^5} \alpha_{3-ik}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& + \sum_{m=2}^{N_1+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{l_m}) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S + \sum_{\substack{m=N_1+1 \\ m \neq k}}^{N_1+N_2+1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} K_{ijmk}(\mathbf{x}_{km}, \xi, \mathbf{n}^{C_m}) \alpha_j^{(m)}(\xi) d_\xi S - \\
& - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} \times \\
& \times l_{jik1} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 u_q^{(s)}(\mathbf{x}_{k1}) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} L_{sjq}(\mathbf{x}_{k1}, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 t_q^{(s)}(\mathbf{x}_k) \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sjq}(\mathbf{x}_k, \xi) l_{3sk1} l_{jik1} d_\xi S, \mathbf{x}_{kk}, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{x}_{k1} \in S_k, i = \overline{1, 2}, \\
& k = \overline{2 + N_1, N_1 + N_2 + 1}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Інтеграли по поверхні S_k в лівій частині рівнянь (4.8) та (4.9) є гіперсингулярними і потребують регуляризації за процедурою, описаною в розділі 3. Решту інтегралів в цих рівняннях є регулярними. Зокрема, інтеграли по поверхнях S_m ($m = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 + 1}, m \neq k$) визначають вплив на розкриття k -го дефекту з боку сусідніх тріщин та включень. Інтеграли по поверхнях S_T та S_U в рівняннях (4.8) та (4.9) визначають вплив крайових умов на поверхні пружного тіла на концентрацію напружень в околі контуру k -го пружного включення або тріщини.

Загалом для визначення напружено-деформованого стану пружного обмеженого тіла довільної форми, послабленого множинними взаємодіючими

тонкими пружними включеннями і плоскими тріщинами отримано систему $3(N_1 + N_2 + 1)$ скалярних інтегральних рівнянь.

Слід зазначити, що частковий випадок $N_1 = 0$ і $N_2 = 1$ системи рівнянь (4.6) – (4.9) (пружне тіло містить одну плоску тріщину) співпадає з системою рівнянь (3.26) та (3.27), отриманою в п. 3.2 третього розділу для Конфігурації II за умови, що механічні характеристики матриці спрямувати до нуля, а зовнішнє навантаження композиту прикладене на безмежності перенести на міжфазну поверхню.

4.2. Напружений стан порожнистого циліндра із системою взаємодіючих внутрішніх тонких податливих включень

Розглядається обмежений вздовж осі пружний порожнистий циліндр Ω , обмежений двома циліндричними поверхнями: S_{out} радіусом $R + h_0$ та S_{in} радіусом R , а також двома торцевими поверхнями S_{ef} . Нехай пружне тіло Ω містить N довільно орієнтованих внутрішніх тонких включень малої жорсткості товщиною h_k , серединні поверхні яких позначимо через S_k , ($k = \overline{2, N+1}$) (рис. 4.2). Механічні властивості матеріалів визначаються модулями зсуву і

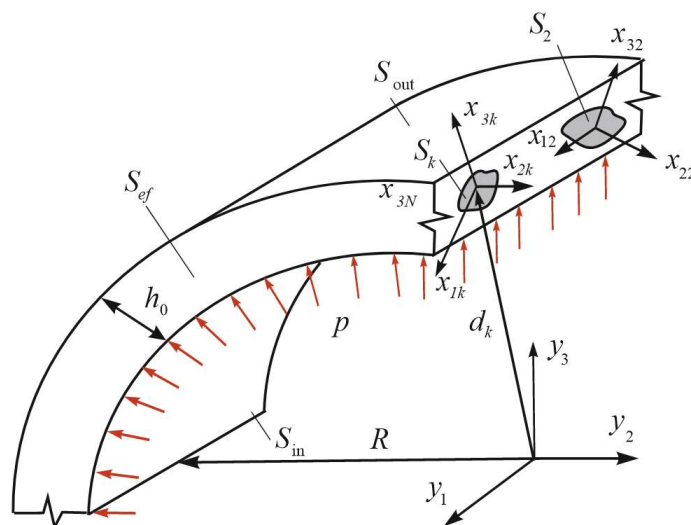


Рис. 4.2. Схема порожнистого циліндра, що містить множинні тонкі пружні включення.

коефіцієнтами Пуассона порожнистого циліндра (G_1, ν_1) та пружних включень $(G_k, \nu_k, k = \overline{2, N+1})$. Тіло Ω знаходиться під дією постійного тиску p на внутрішній поверхні S_{in} . Торцеві поверхні S_{ef} закріплені.

Виділимо напружено-деформований стан в тілі, викликаний стрибком переміщень на поверхнях k -того включення, $u_i^{(k)}; \sigma_{ij}^{(k)} (i, j = \overline{1, 3})$, описуючи його в системі координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, що прив'язана до центру цього включення. Вісь $O_k x_{3k}$ завжди будемо направляти в напрямку, перпендикулярному до області S_k так, що поверхні включення можна описати залежністю $x_{k3} = \pm h_k(x_{k1}, x_{k2})$. Величини $u_i^{(0)}; \sigma_{ij}^{(0)} (i, j = \overline{1, 3})$, що визначатимуть напружено-деформований стан в бездефектному циліндрі з аналогічними пружними характеристиками під дією заданого навантаження, описуємо в системі координат $O y_1 y_2 y_3$, початок якої знаходиться в центрі поперечного перерізу порожнистого циліндра.

Положення включень опишемо з допомогою радіус-вектора $\vec{d}_k$ центру k -того включення та його напрямних косинусів $e_{jk} (j = \overline{1, 3})$ в глобальній системі координат $O y_1 y_2 y_3$. Положення центру глобальної системи координат відносно k -того включення задамо протилежним вектором $\vec{d}_k^*$ та його напрямними косинусами e_{jk}^* в системі координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$. Через $l_{ijk1} = \cos(\widehat{O_k x_{ik}, O y_j}) (i, j = \overline{1, 3})$ позначимо косинуси кутів між осями локальних і глобальної систем координат.

Принцип суперпозиції (4.2) дозволяє визначити загальний напружено-деформований стан в тілі як суму напружених станів, викликаних деформацією обмеженого твердого тіла та кожного тонкого податливого включення. Для перетворення компонент тензора напружень і вектора переміщень в різних системах координат використовуємо формули (4.1).

Крайові умови на поверхнях порожнистого циліндра в глобальній системі координат $O y_1 y_2 y_3$ записуються як

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{in}} &= u_j^*(\mathbf{y}), \quad u_j(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{out}} = u_j^{**}(\mathbf{y}), \quad u_j(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{ef}} = u_j^{***}(\mathbf{y}), \quad j = \overline{1,3}, \\ \sigma_{jn}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{in}} &= -p n_j, \quad \sigma_{jn}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{out}} = 0, \quad \sigma_{jn}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \in S_{ef}} = t_j^{***}(\mathbf{y}), \quad j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

а умови на поверхнях включень в системі координат $O_k x_{k1} x_{k2} x_{k3}$ представимо у вигляді:

$$\sigma_{3j}^{(k)}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S_k} = 4\pi G_k \left(\frac{2+2\nu_k}{1-2\nu_k} \right)^{\delta_{j3}} \frac{\beta_{jk}(\mathbf{x})}{h_k(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in S_k, \quad j = \overline{1,3}, \quad k = \overline{2, N+1}. \quad (4.11)$$

Використовуючи інтегральні подання компонент вектора переміщень (4.4) та тензора напружень (4.5) в тілі, викликаних деформацією порожнистого циліндра і деформаціями включень та здійснюючи граничний перехід до точок поверхонь порожнистого циліндра і серединних поверхонь включень, а також задовольняючи краєві умови (4.1), (4.10), (4.11), отримаємо $6 + 3N$ інтегральних рівнянь, які є наслідком рівнянь (4.6) – (4.8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i^*(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm0}(\tilde{\mathbf{y}}^{(m)}, \xi, \mathbf{n}^C) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - \\ & - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \quad \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}^{(m)} \in S_{in}, \quad i = \overline{1,3}; \\ & \frac{1}{2} u_i^{**}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^3 \iint_{S_m} \Omega_{ijm0} \left(\tilde{\mathbf{y}}^{(m)}, \xi, \mathbf{n}^m \right) \beta_{jm}(\xi) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - \\
& - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}^{(m)} \in S_{out}, i = \overline{1, 3}; \\
& - 4\pi \frac{G_m}{G_1} (1 - \nu_0) \frac{2 + 2\nu_m}{1 - 2\nu_m} \frac{\beta_{3m}(\mathbf{x})}{h_m(\mathbf{x})} + \iint_{S_m} \frac{\beta_{3m}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) \times \right. \\
& \times l_{3sm1} l_{j3m1} u_q^*(\xi) d_\xi S - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{j3m1} u_q^{**}(\xi) d_\xi S \Big) = \\
& = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{j3m1} u_q^{***}(\xi) d_\xi S - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{j3m1} \times \right. \\
& \times t_q^{***}(\xi) d_\xi S + p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{j3m1} n_q d_\xi S \Big), \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}^{(m)} \in S_m, m = \overline{2, N+1}; \\
& - 4\pi \frac{G_m}{G_1} (1 - \nu_1) \frac{\beta_{im}(\mathbf{x})}{h_m(\mathbf{x})} + \iint_{S_m} \left[\left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1 (x_{3-i} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \right) \beta_{im}(\xi) + \right. \\
& + \frac{3\nu_1 (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \beta_{3-i}(\xi) \Big] d_\xi S - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{ijm1} u_q^*(\xi) d_\xi S - \right. \\
& - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{ijm1} u_q^{**}(\xi) d_\xi S \Big) = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} L_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{ijm1} \times \right. \\
& \times u_q^{***}(\xi) d_\xi S - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{ijm1} t_q^{***}(\xi) d_\xi S + \\
& + p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq} \left(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}, \xi \right) l_{3sm1} l_{ijm1} n_q d_\xi S \Big), \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}^{(m)} \in S_m, i = \overline{1, 2}, m = \overline{2, N+1}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

де u_j^* і u_j^{**} – значення компонент вектора переміщень в точках поверхонь S_{in} ,

S_{out} відповідно з боку вектора нормалі $\mathbf{n}$; $\beta_{jm}(\xi) = (u_{jm}^-(\xi) - u_{jm}^+(\xi)) / 4\pi \Big|_{\xi \in S_m}$,
 $(j = \overline{1,3})$ – нормовані стрибками точок серединних поверхонь m -того вклю-
 чення в напрямку осей $O_m x_{jm}$; U_{ij} , T_{ij} , D_{ijq} , L_{ijq} , Ω_{ijm0} – відомі (2.4), (2.12),
 (3.10) фундаментальні розв’язки та їх похідні, що залежать від механічних ха-
 рактеристик матеріалу порожнистого циліндра та орієнтації включень в
 ньому; символами « $\sim(m)$ » позначуємо координати точки, яка належить пове-
 рхні порожнистого циліндра, записані в локальній системі координат, що
 прив’язана до m -того включення; символи « $\wedge(m)$ » означають координати то-
 чки, яка лежить на серединній поверхні m -того включення, записані в глоба-
 льній системі координат. При цьому перетворення координат при переході від
 однієї системи координат до іншої є такими: $\tilde{y}_i^{(m)} = e_{im} d_m + \sum_{s=1}^3 l_{ism1} y_s$,
 $\hat{x}_i^{(m)} = e_{im}^* d_m^* + \sum_{s=1}^2 l_{ism1} x_s^{(m)}$, $i = \overline{1,3}$, $m = \overline{2, N+1}$.

З метою дискретизації рівнянь (4.12) апроксимуємо поверхні S_{in} , S_{out} , S_{ef}
 та S_k ($k = \overline{1, N}$) неперервною сукупністю криволінійних суперпараметричних
 граничних елементів. Особливості регуляризації сингулярних та гіперсингу-
 лярних інтегралів, а також побудови дискретного аналогу системи інтеграль-
 них рівнянь (4.12) описано в розділах 2 і 3 цієї дисертації.

Результатом розв’язування дискретного аналогу системи ГІР (4.12) є зна-
 чення компонентів вектора переміщень в опорних вузлах граничних елементів
 поверхонь порожнистого циліндра S_{in} та S_{out} і значення функцій стрибків пе-
 реміщень у колокаційних точках поверхонь S_k .

У випадку розташування дископодібних кругових включень у площині,
 що проходить через вісь порожнистого циліндра, внаслідок симетрії задачі,
 ненульовий коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) відриву на контурі k -

того включення з радіусом a_k обчислюємо через стрибок переміщень його поверхонь за формулами [59]:

$$K_1^{(k)}(\mathbf{x}_{0k}) = -2\pi\sqrt{a_k}\pi\frac{G_0}{1-\nu_0}\beta_{3k}^*(\mathbf{x}_{0k}), \quad (4.13)$$

де $\beta_{3k}^*(\mathbf{x}_k) = \beta_{3k}(\mathbf{x}_k) / \sqrt{a_k^2 - x_{k1}^2 - x_{k2}^2}$ – модифікована функція стрибків переміщень поверхонь k -того включення; $\mathbf{x}_{0k}$ – точка контуру поверхні S_k k -того включення.

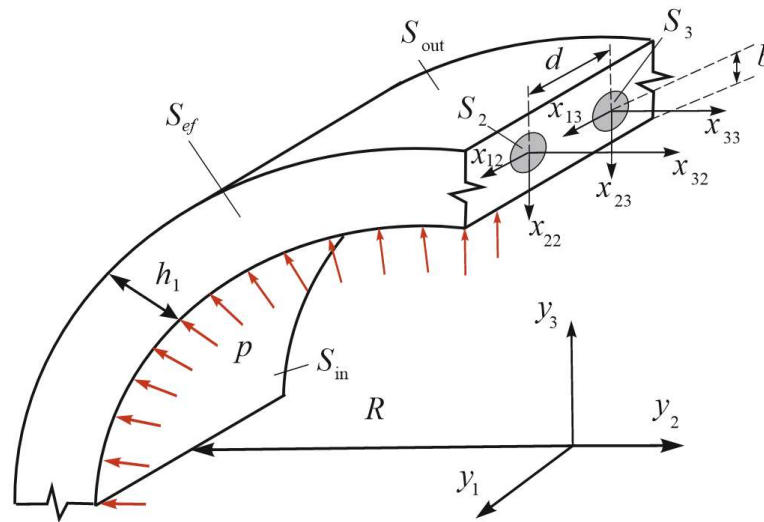


Рис. 4.3. Схема розташування двох взаємодіючих тонких пружних включень у порожнистому циліндрі за дії внутрішнього тиску.

Як приклад, розв'язано задачу взаємодії двох дископодібних кругових тонких пружних включень з радіусом $a = 0,4h_1$ та товщиною $h_2 = h_3 = 0,01a$, серединна поверхня яких лежить в одній площині з віссю порожнистого циліндра (рис. 4.3). Відстань центрів включень до поверхні S_{in} позначимо через b . На поверхні S_{in} діє постійний внутрішній тиск p , а поверхні S_{ef} закріплені $(u_j^{***}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in S_{ef})$.

Коефіцієнти Пуассона матеріалу порожнистого циліндра та включень приймаємо рівними між собою $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$. Зважаючи на однакову гли-

бину залягання включень отримаємо симетричну задачу, що дозволяє аналізувати розподіл КІН лише для одного включення. Розташування включень визначаються величинами $e_{k1} = -e_{k1}^* = (-1)^{k+1} d / \sqrt{4(R+b)^2 + d^2}$; $e_{k2} = e_{k3}^* = 0$; $e_{k3} = e_{k2}^* = (R+b) / \sqrt{(R+b)^2 + (d/2)^2}$, а їх орієнтація відносно глобальної системи координат – напрямними косинусами $l_{11k1} = -l_{23k1} = l_{32k1} = 1$; $l_{12k1} = l_{13k1} = l_{21k1} = l_{22k1} = l_{31k1} = l_{33k1} = 0$, ($k = 2, 3$).

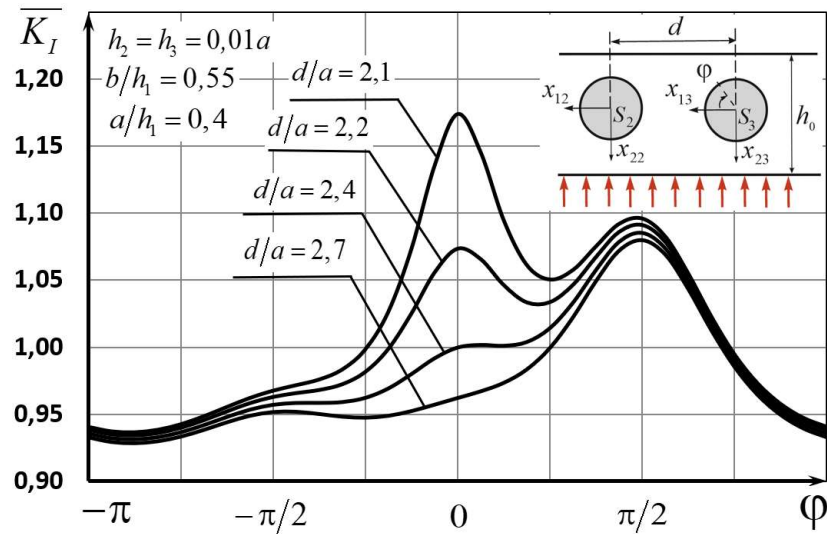


Рис. 4.4. Залежності КІН відриву від кутової координати точки контуру одного із двох взаємодіючих кругових включень для різних відстаней між їх центрами.

На рис. 4.4 та 4.5 показані залежності приведенного значення КІН $\bar{K}_1 = K_1 / \hat{k}_1$ від кутової координати φ точки контуру включення за фіксованої глибини залягання взаємодіючих включень ($b = 0,55h_1$), де $\hat{k}_1 = 2\sigma_\theta \sqrt{a/\pi}$ – КІН для ізольованої кругової тріщини такого ж розміру, що перебуває в безмежному тілі під дією навантаження:

$$\sigma_\theta = \frac{R^2 p}{h_1^2 + 2Rh_1} \left(1 + \frac{(R+h_1)^2}{(R+b)^2} \right).$$

На рис. 4.4 приведені криві, що відповідають різній відстані між центрами включень за фіксованої їх податливості ($G_2/G_1 = G_3/G_1 = 0,001$): $d/a = 2,1$; $d/a = 2,2$; $d/a = 2,4$; $d/a = 2,7$.

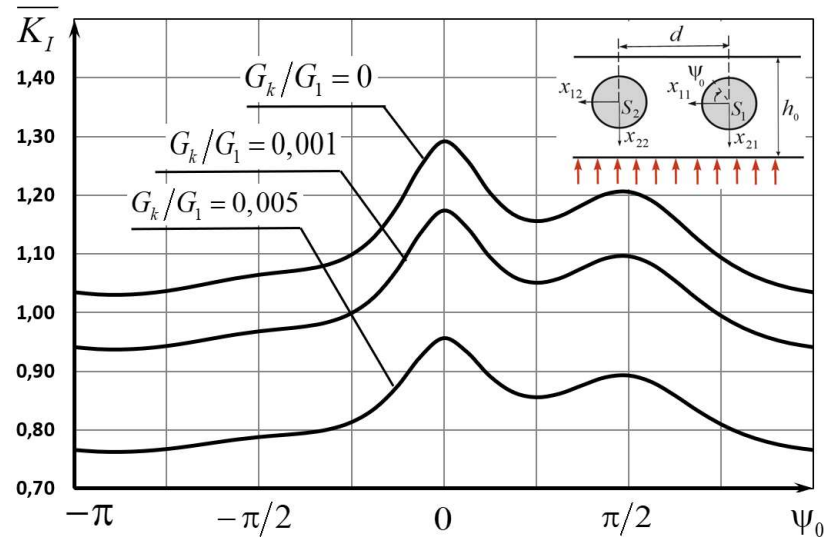


Рис. 4.5. Залежності комбінованого КІН від кутової координати точки контуру одного із двох взаємодіючих кругових включень для різних їх податливостей.

Криві на рис. 4.5 відповідають різній податливості включень за фіксованої відстані між ними ($d/a = 2,1$): $G_2/G_1 = G_3/G_1 = 0$ (випадок взаємодіючих в порожнистому циліндрі тріщин); $G_2/G_1 = G_3/G_1 = 0,001$; $G_2/G_1 = G_3/G_1 = 0,005$.

Числовий експеримент зміни густини сітки граничних елементів показує, що точність запропонованого методу забезпечується в межах 1 % при використанні 144 колокаційних вузлів в області кожного включення та 672 суперпараметричних граничних елементів на поверхнях порожнистого циліндра. Результати отримані запропонованим методом достатньо добре корелюють з відомими в літературі частковими випадками даної задачі, зокрема була протестована задача взаємодії двох податливих включень у просторі [20].

4.3. Числове дослідження задачі про приповерхневу тріщину в порожнистому циліндрі за дії внутрішнього тиску

Застосуємо пропонований метод для дослідження напруженого стану в околі плоскої тріщини з врахуванням її взаємодії з топологічно складною поверхнею обмеженого тіла, що її містить. Нехай Ω – пружне однорідне тіло,

обмежене двома циліндричними поверхнями: вільною від навантажень поверхнею S_{out} радіусом $R + h$ та внутрішньо навантаженою тиском p поверхнею S_{in} радіусом R і закріпленими торцевими поверхнями S_{ef} перпендикулярними до осі циліндричних поверхонь (рис. 4.6). Тіло Ω містить плоску тріщину, площа якої S_C паралельна до осі труби. Поверхні тріщини вільні від навантажень. Механічні властивості порожнистого циліндра визначаються модулями зсуву і коефіцієнтами Пуассона (G_1 ; ν_1).

Виділимо напружено-деформований стан в тілі викликаний розкриттям тріщини $u_i^{(2)}$; $\sigma_{ij}^{(2)}$ ($i, j = \overline{1,3}$), описуючи його в локальній системі координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, що прив'язана до центру тріщини. Напруження і деформації, які виникають в тілі внаслідок деформації труби під дією зовнішнього навантаження $u_i^{(1)}$; $\sigma_{ij}^{(1)}$ ($i, j = \overline{1,3}$) будуть визначені в глобальній системі координат $O y_1 y_2 y_3$, початок якої знаходиться в центрі поперечного перерізу труби. Орієнтацію згаданих локальних систем координат будемо задавати виходячи з орієнтації тріщини відносно радіуса труби. Зокрема, вісь $O_1 x_3$ завжди будемо направляти в напрямку, перпендикулярному до площини тріщини, а вісь $O y_3$ – вздовж напрямку, який з'єднує центри порожнистого циліндра і тріщини. Оскільки тріщина осьова, то будемо вважати осі $O_1 x_1$ та $O y_1$ паралельними і направленими вздовж осі порожнистого циліндра.

Величини $u_i^{(0)}$; $\sigma_{ij}^{(0)}$ ($i, j = \overline{1,3}$) визначатимуть напружено-деформований стан в бездефектній пружному тілі з аналогічними пружними характеристиками під дією аналогічного зовнішнього навантаження.

Положення центру тріщини в глобальній системі координат $O y_1 y_2 y_3$ опишемо з допомогою радіус-вектора $\vec{d}$ та його напрямних косинусів $e_j = \delta_{j3}$ ($j = \overline{1,3}$). Положення центру тіла відносно площини тріщини задамо протилежним вектором $\vec{d}^*$ та його напрямними косинусами $e_1^* = 0$; $e_2^* = \sin \alpha$;

$e_3^* = -\cos \alpha$ в системі координат $O_1 x_1 x_2 x_3$. Косинуси кутів між осями обидвох систем координат $l_{ij} = \cos(O_1 x_i, \widehat{O y_j})$ ($i, j = \overline{1,3}$) задаються таблицею 4.1.

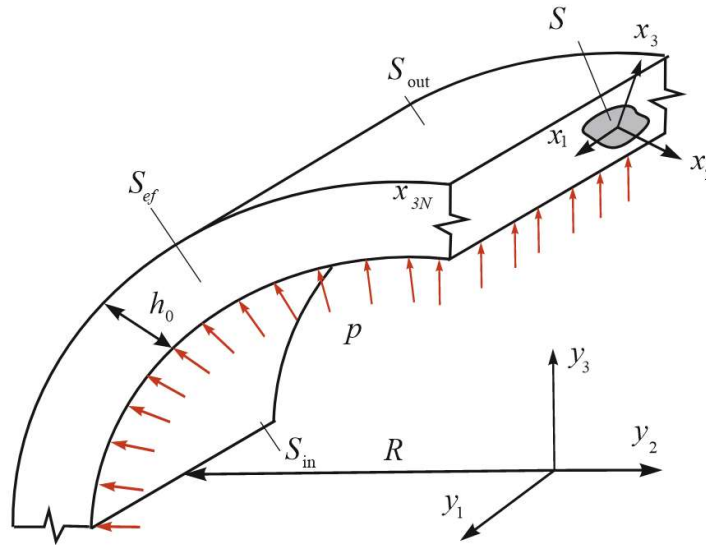


Рис. 4.6. Розташування осьової тріщини у порожнистому циліндрі.

Таблиця 4.1. Напрямні косинуси локальної системи координат для тріщини.

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	0	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
x_3	0	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

Виходячи з принципу суперпозиції (4.2) та враховуючи вирази (4.4), компоненти вектора переміщень у пружному тілі в глобальній системі координат можемо записати у формі:

$$u_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^3 \left[-p \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S - \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \right. \\ \left. + \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \iint_{S_C} \Omega_{ij21}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S \right], \quad (4.14)$$

де $i = \overline{1,3}$, $\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in \Omega$ – координати точки поля в глобальній та локальній системі

координат відповідно; $u_j^*(\xi) (\xi \in S_{in})$, $u_j^{**}(\xi) (\xi \in S_{out})$ – невідомі значення компонент вектора переміщень в точках поверхні S_{in} та S_{out} відповідно з боку зовнішньої до поверхні нормалі $\mathbf{n}$; $t_j^{***}(\xi) (\xi \in S_{ef})$ – невідомі значення компонент векторів реактивних зусиль в точках поверхні S_{ef} ; U_{ij} , T_{ij} та Ω_{ij21} – фундаментальні розв’язки відповідних задач теорії пружності (2.4), (3.41).

Закон Гука дозволяє отримати аналогічні залежності для компонент тензора напружень з врахуванням (4.5):

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = \sum_{s=1}^3 \left[-p \iint_{S_{in}} D_{ijs}(\mathbf{y}, \xi) n_s d_\xi S - \iint_{S_{in}} L_{ijs}(\mathbf{y}, \xi) u_s^*(\xi) d_\xi S + \iint_{S_{ef}} D_{ijs}(\mathbf{y}, \xi) t_s^{***}(\xi) d_\xi S - \right. \\ \left. - \iint_{S_{out}} L_{ijs}(\mathbf{y}, \xi) u_s^{**}(\xi) d_\xi S + \frac{G_1}{1-\nu_1} \iint_{S_C} K_{is21}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) l_{j3} \alpha_s(\xi) d_\xi S \right], \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in \Omega. \quad (4.15)$$

Функції D_{ijs} з порядком особливості $|\mathbf{y} - \xi|^{-2}$, функції L_{ijs} з порядком особливості $|\mathbf{y} - \xi|^{-3}$ та функції K_{is21} з порядком особливості $|\mathbf{x} - \xi|^{-3}$ визначаємо за формулами (2.12) та (3.15).

Краєві умови на поверхні тіла в системі координат $O y_1 y_2 y_3$ задаватимуться співвідношеннями (4.10). Оскільки поверхні тріщини вільні від навантажень, то краєві умови на цих поверхнях в системі координат $O_1 x_1 x_2 x_3$ матимуть вигляд:

$$\sigma_{3j}^{(2)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S_C} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_C, \quad j = \overline{1,3}. \quad (4.16)$$

Для перетворення компонент тензора напружень і вектора переміщень в різних системах координат слід використовувати формули (4.1).

Здійснимо граничний перехід до точки $\mathbf{y}$ на поверхні тіла S_{in} в системі координат $O y_1 y_2 y_3$ з врахуванням представлень (4.14), крайових умов (4.10)

та граничних властивостей пружних потенціалів простого і подвійного шару:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i^*(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij10}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) \times \\ \times \alpha_j(\xi) d_\xi S_C = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in S_{in}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Аналогічний граничний перехід до точки $\mathbf{y}$ на зовнішній поверхні тіла S_{out} дає можливість отримати ще три граничні інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i^{**}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij10}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) \times \\ \times \alpha_j(\xi) d_\xi S_C = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in S_{out}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Отримані інтегральні рівняння слугують для визначення невідомих значень компонент векторів переміщень u_i^* та u_i^{**} точок внутрішньої та зовнішньої поверхонь пустотілого циліндричного тіла Ω та реактивних зусиль t_i^{***} на його торцевих поверхнях. Регулярні інтеграли по області S_C поверхонь тріщини, які містять невідомі функції розкриття тріщини, визначають вплив цього розкриття на шукані крайові значення переміщень і зусиль точок поверхонь тіла. В правій частині рівнянь знаходяться регулярні інтеграли від відомих функцій, які характеризують вплив зовнішнього навантаження торців порожнистого циліндра та його внутрішнього тиску на шукані величини.

Перетворення координат точки поверхні при переході від однієї системи координат до іншої задається виразом: $\tilde{y}_i = e_i^* d^* + \sum_{s=1}^3 l_{si} y_s, i = \overline{1,3}$.

Слід зазначити, що за граничного переходу точки поля до поверхонь S_{ef} інтеграли по області S_C є нехтувано малими через велику відстань від точки поля, до точки інтегрування. Внаслідок цього отримані інтегральні рівняння

вироджуються у залежності, що характеризують рівновагу розглядуваного пружного бездефектного тіла як жорсткого цілого.

Інтегральні співвідношення для тріщини отримуємо здійснюючи граничний перехід до точок поверхні S_C в локальній системі координат $Ox_1x_2x_3$ з врахуванням представлень (4.15), крайових умов (4.16) та явного вигляду ядер гіперсингулярних інтегралів на площинці, що співпадає з областю інтегрування (3.40):

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_C} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x}-\xi|^3} d_\xi S_C - \frac{1-\nu_0}{G_0} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} u_q^*(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_0}{G_0} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} u_q^{**}(\xi) d_\xi S = -\frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} t_q^{***}(\xi) d_\xi S + \\
& + \frac{1-\nu_1}{G_1} p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} n_q d_\xi S, \\
& \iint_{S_C} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}-\xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-i}-\xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \right) \alpha_j(\xi) + \frac{3\nu_1(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|\mathbf{x}-\xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} u_q^*(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_0}{G_0} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} u_q^{**}(\xi) d_\xi S = \\
& = -\frac{1-\nu_0}{G_0} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} t_q^{***}(\xi) d_\xi S + \\
& + \frac{1-\nu_1}{G_1} p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} n_q d_\xi S, \quad \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in S_C, \quad i = \overline{1,2}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що регулярні інтеграли по внутрішній і зовнішній поверхні порожнистого циліндра Ω у лівій частині отриманих ГІР (4.19) містять невідомі густини u_i^* , u_i^{**} та визначають вплив деформації поверхонь тіла Ω на розкриття тріщини. Права частина цих рівнянь має фізичний зміст викликаних зовнішнім навантаженням напружень, що діють на площинці, яка співпадає з

поверхнями тріщини.

Координати точки області тріщини в глобальній системі координат визначаємо наступним чином: $\tilde{x}_i = e_i d + \sum_{s=1}^2 l_{si} x_s$, $i = \overline{1,3}$.

Система інтегральних рівнянь (4.17) - (4.19) є замкнутою взаємозв'язаною системою рівнянь для визначення поверхневих переміщень у порожнистому циліндрі та стрибків переміщень на поверхнях тріщини, що міститься в ньому. Розв'язування цієї системи дає можливість визначити напружено-деформований стан всередині розглядуваного пружного тіла з використанням інтегральних представлень (4.14) і (4.15), а також КІН на контурі тріщини за формулами (3.23).

Для числового розв'язування задачі систему рівнянь (4.17), (4.18) доцільно записати в слабосингулярній формі за схемою (2.7), а гіперсингулярні інтеграли в рівняннях (4.19) регуляризувати за схемою (3.21). Далі регулярний аналог системи ГР дискретизуємо заміною інтегралів по поверхнях тіла та внутрішньої тріщини на суму інтегралів по граничних елементах і областях навколо колокаційних точок дискретної моделі. Для цього використовуємо сітку суперпараметричних чотирикутних (восьмивузлових) і трикутних (шестивузлових) криволінійних граничних елементів, яка неперервно апроксимує

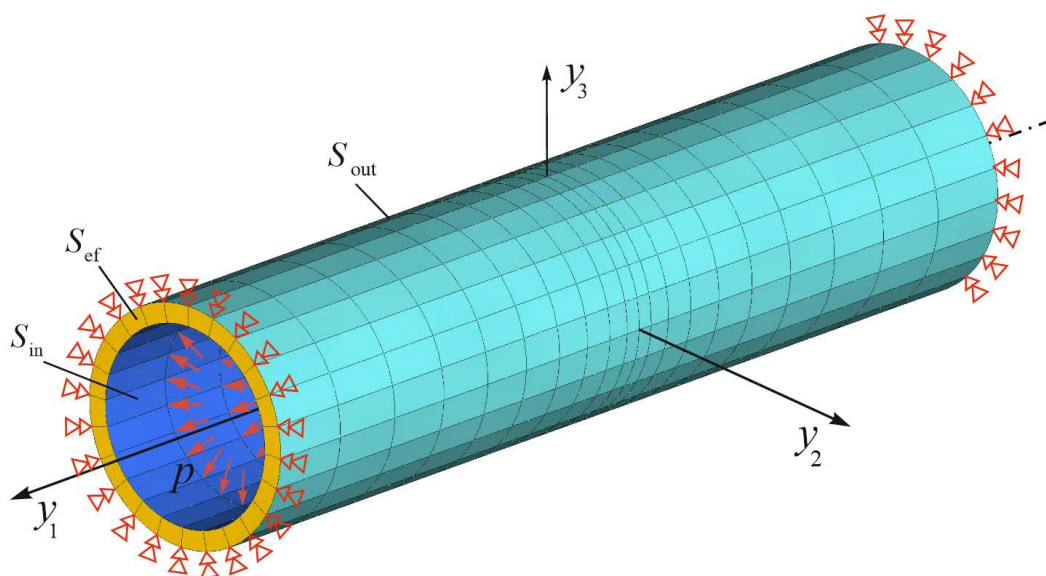


Рис. 4.7. Схема покриття поверхонь призматичного тіла суперпараметричними граничними елементами.

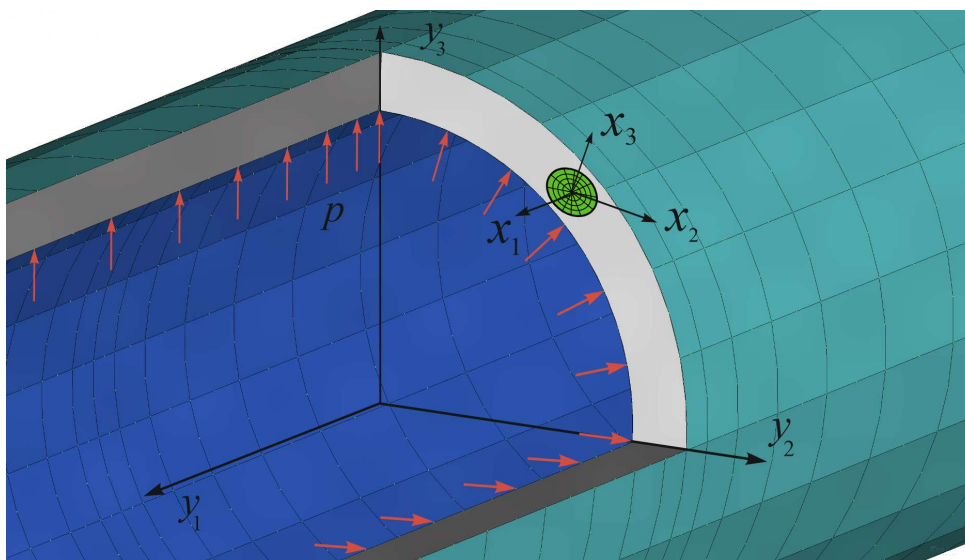


Рис. 4.8. Схема покриття поверхонь тріщини сіткою граничних елементів. поверхні S_{in} , S_{out} та S_{ef} (рис. 4.7), а також сітку колокаційних точок на перетині концентричних кривих до контуру області тріщини з її радіусами (рис. 4.8).

Зважаючи на форму тіла, що містить тріщину, апроксимувати його поверхні рівномірною сіткою граничних елементів не доцільно. Регулярні інтеграли по області граничних елементів на поверхні тіла, які характеризують вплив крайових значень вектора переміщень на концентрацію напружень довкола тріщини, суттєво зменшуються за віддалення граничного елементу від центральної частини фрагменту циліндра, тобто від місця розташування тріщини. Ті ж інтеграли, які обчислюються по граничних елементах, розташованих близько до тріщини, вносять більший вклад в матрицю жорсткості дискретного аналога системи інтегральних рівнянь. Тому сітку граничних елементів рекомендується згущувати в центральній частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь розглядуваного призматичного тіла (рис. 4.7).

Замінивши невідомі функції крайових переміщень на їх дискретні значення у вузлах сітки граничних елементів, а також невідомі функції стрибків переміщень поверхонь тріщини на їх значення у колокаційних точках, методом колокацій зведемо регуляризований аналог системи ГІР до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень невідомих

функцій.

КІН на контурі тріщини визначаємо за формулами (3.23), попередньо викремивши кореневу особливість розкриття тріщини на її контурі за схемою (3.12).

Таким чином, для кругової тріщини радіусом a будемо мати [186]:

$$K_1(\mathbf{x}_0) = -\frac{G_0}{1-\nu_0} 2\pi\sqrt{\pi a} \alpha_3^*(\mathbf{x}_0);$$

$$K_2(\mathbf{x}_0) = -\frac{G_0}{1-\nu_0} 2\pi\sqrt{\pi a} (\alpha_1^*(\mathbf{x}_0)\cos\psi_0 + \alpha_2^*(\mathbf{x}_0)\sin\psi_0);$$

$$K_3(\mathbf{x}_0) = -G_0 2\pi\sqrt{\pi a} (\alpha_1^*(\mathbf{x}_0)\sin\psi_0 - \alpha_2^*(\mathbf{x}_0)\cos\psi_0),$$

де ψ_0 – кут між нормаллю до кривої контуру тріщини і віссю Ox_1 в точці $\mathbf{x}_0$;

$$\alpha_i^*(\mathbf{x}) = \alpha_i(\mathbf{x}) / \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad i = \overline{1,3}.$$

КІН на контурі еліптичної тріщини з півосями a і b отримуємо застосувавши відображення даної області на кругову область одиничного радіуса за допомогою перетворень $x_1 = at_1$; $x_2 = bt_2$. За співвідношеннями, отриманими в роботі [9], маємо:

$$K_1(\mathbf{x}_0) = -\frac{2\pi G_1}{1-\nu_1} \sqrt{\pi} (a^2 \sin^2 \psi_0 + b^2 \cos^2 \psi_0)^{\frac{1}{4}} \frac{\alpha_3^*(\mathbf{x}_0)}{(ab)^{3/2}};$$

$$K_2(\mathbf{x}_0) = -\frac{2\pi G_1}{1-\nu_1} \sqrt{\pi} (a^2 \sin^2 \psi_0 + b^2 \cos^2 \psi_0)^{\frac{1}{4}} \frac{[\alpha_1^*(\mathbf{x}_0)b \cos \psi_0 + \alpha_2^*(\mathbf{x}_0)a \sin \psi_0]}{(ab)^{3/2}};$$

$$K_3(\mathbf{x}_0) = -2\pi\sqrt{\pi} G_1 (a^2 \sin^2 \psi_0 + b^2 \cos^2 \psi_0)^{\frac{1}{4}} \frac{[\alpha_1^*(\mathbf{x}_0)a \sin \psi_0 - \alpha_2^*(\mathbf{x}_0)b \cos \psi_0]}{(ab)^{3/2}},$$

$$\text{де } \alpha_i^*(\mathbf{x}) = ab \alpha_i(\mathbf{x}) / \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Обчислимо КІН на контурі дископодібної осьової тріщини радіусом a , площина якої утворює кут 0° з радіусом циліндра (рис. 4.9).

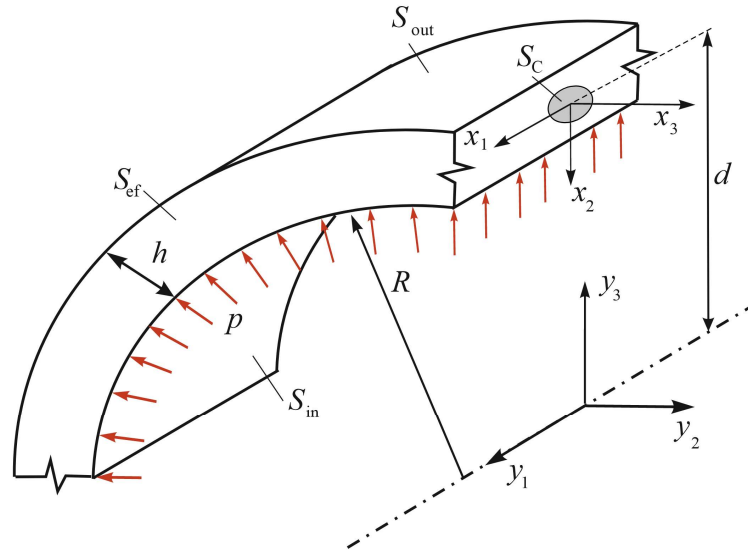


Рис. 4.9. Розташування осьової приповерхневої тріщини, площина якої утворює кут 0° з радіусом циліндра.

Таблиця 4.2. Напрямні косинуси кутів між системою координат, прив'язаною до осьової тріщини, та глобальною системою координат.

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	0	0	-1
x_3	0	1	0

На поверхні труби S_{in} діє постійний внутрішній тиск $p/G_0 = 0,03$. Коефіцієнт Пуассона задаватимемо рівним $\nu_0 = 0,3$. Співвідношення радіуса тріщини і товщини стінки циліндра покладемо $a/h = 0,4$, а співвідношення радіуса його поперечного перерізу до товщини стінки – $R/h = 36$. Розташування тріщини визначається величинами: $e_1 = 0$; $e_2 = 0$; $e_3 = 1$; $e_1^* = 0$; $e_2^* = 1$; $e_3^* = 0$. Орієнтація тріщини задається таблицею 4.2.

На рис. 4.10 для різних випадків розташування осьової плоскої тріщини даються залежності приведенного КІН відриву $\bar{K}_I = K_I / \hat{k}_1$, де $\hat{k}_1 = 2\sigma_\theta \sqrt{a/\pi}$ – КІН для ізольованої кругової тріщини радіуса a , що перебуває в безмежному

тілі під дією навантаження $\sigma_\theta = \frac{R^2 p}{h^2 + 2Rh} \left(1 + \frac{(R+h)^2}{d^2} \right)$, яке відповідає кільцевим напруженням в бездефектному обмеженому тілі під дією аналогічного внутрішнього тиску.

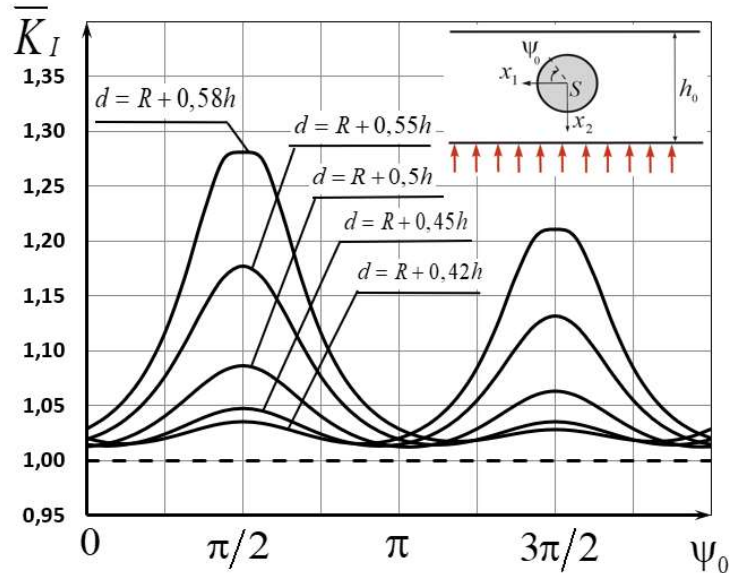


Рис. 4.10. Залежність нормованого КІН відриву приповерхневої кругової тріщини від кутової координати точки її контуру при різній глибині залягання у порожнистому циліндрі.

Штриховою кривою позначено КІН для аналогічної кругової тріщини в безмежному просторі під дією нормального до її поверхонь навантаження (без врахування взаємодії з поверхнями тіла) [59].

На рис. 4.11 показано для порівняння кольорові схеми функції нормального розкриття тріщин: а) в безмежному тілі (без врахування взаємодії з поверхнями тіла); б) в півпросторі (взаємодія з поверхнею нульової кривизни); в) у порожнистому циліндрі ближче до внутрішньої його поверхні $d = R + 0,45h$.

На рис. 4.12 показані залежності приведенного КІН відриву для еліптичної тріщини, більша піввісь якої a направлена вздовж радіуса порожнистого циліндра, що її містить і рівна $a/h = 0,4$. Менша піввісь b області тріщини для різних кривих на рис. 4.12 змінюється в межах від $b/a = 1$ (кругова тріщина) до $b/a = 0,5$. Центр еліптичної тріщини знаходиться на відстані $d = R + 0,58h$

від осі обмеженого тіла аналогічного за геометричними розмірами та механічними характеристиками. Зазначені величини віднесені до КІН $\hat{k}_1 = 2\sigma_\theta \sqrt{a/\pi}$ на контурі кругової тріщини радіуса a в безмежному просторі, поверхні якої перебувають під навантаженням, що дорівнює кільцевим напруженням у аналогічному бездефектному порожнистому циліндрі в точці з координатою центра розглядуваної еліптичної тріщини.

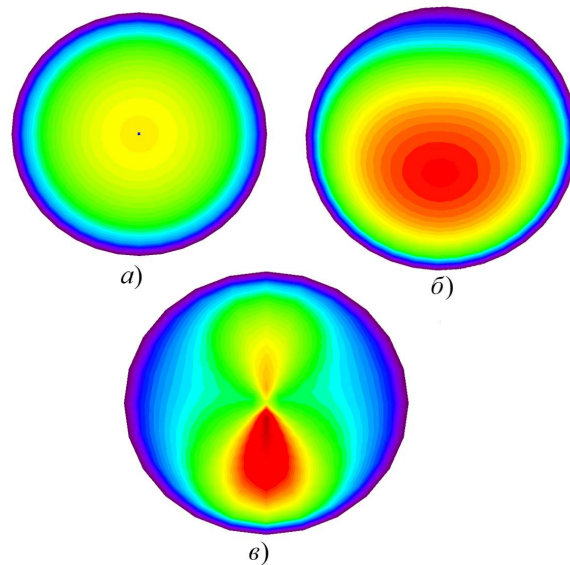


Рис. 4.11. Кольорові схеми нормального розкриття кругової тріщини: а) в безмежному тілі; б) в півпросторі в) у порожнистому циліндрі, що перебуває під дією внутрішнього тиску на відстані $d = R + 0,45h$.

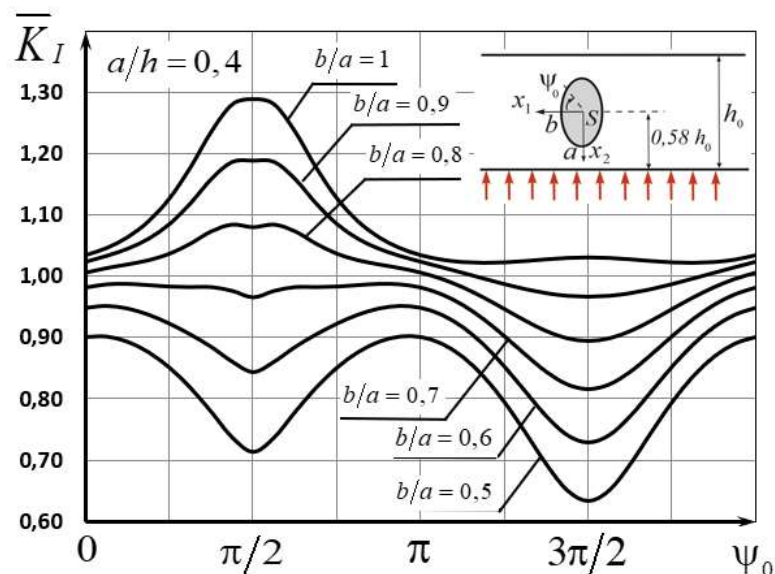


Рис. 4.12. Залежність КІН приповерхневої еліптичної тріщини у порожнистому циліндрі від кутової координати точки її контуру при різній глибині залягання.

Зауважимо, що вищевикладений метод розв'язування задач про концентрацію напружень в обмежених тілах, послаблених тріщинами, передбачає квазікрихку модель руйнування, тому його використання накладає певні обмеження на геометричні параметри досліджуваних тріщин. Зокрема для більшості сталей, що використовуються для виробництва труб магістральних трубопроводів, коректне визначення концентрації напружень можливе для тріщин, діаметр яких перевищує 4-6 мм.

Числовий експеримент зміни густини сітки граничних елементів показує, що точність запропонованого методу забезпечується в межах 1 % вже при використанні 64 колокаційних точок на поверхні тріщини та 672 суперпараметричних граничних елементів на поверхнях порожнистого циліндра. Розрахунки показали, що при співвідношенні радіуса циліндричної поверхні тіла до радіуса кругової приповерхневої осьової тріщини $R/a = 90$, для визначення концентрації напружень на її контурі достатньою є дискретизація поверхонь фрагмента циліндра довжиною $l = 2,2R$ вздовж осі Oy_1 .

4.4. Напружений стан порожнистого циліндра, послабленого газонаповненою тріщиною

В деяких випадках дослідження проявів експлуатаційної деградації труб магістральних газопроводів, послаблених тріщиноподібними дефектами, показує, що механізм їх руйнування не пов'язаний з «підростанням» цих дефектів, а зумовлений перевищенням допустимих напружень в інших точках конструкції. В цьому випадку проблема визначення КІН на контурі тріщини відходить на другий план і основним завданням є визначення складного напружено-деформованого стану зумовленого розкриттям тріщиноподібних дефектів та зовнішнім навантаженням пружного обмеженого тіла, що містить тріщину.

Досліджено пружне тіло Ω , обмежене двома циліндричними поверхня-

ми зовнішньою S_{out} та внутрішньою S_{in} і двома закріпленими кільцевими поверхнями S_{ef} (рис. 4.13), а також послаблене математичним розрізом, що описується деяким фрагментом S_c поверхні малої кривини з гладким контуром. Спираючись на низку прикладів виявлених обширних розшарувань у надземній частині тривало експлуатованих транзитних газопроводів [412], [322], прийmemo для подальших розрахунків такі геометричні параметри порожнистого циліндра та макродефекту: довжина циліндра 1000 мм, зовнішній діаметр 440 мм, товщина стінки 18 мм, довжина дефекту уздовж осі труби 210 мм, а перпендикулярно до осі – 70 мм, дефект знаходиться у верхній частині труби (рис. 4.13). Глибина залягання розшарування – 4 мм від зовнішньої поверхні.

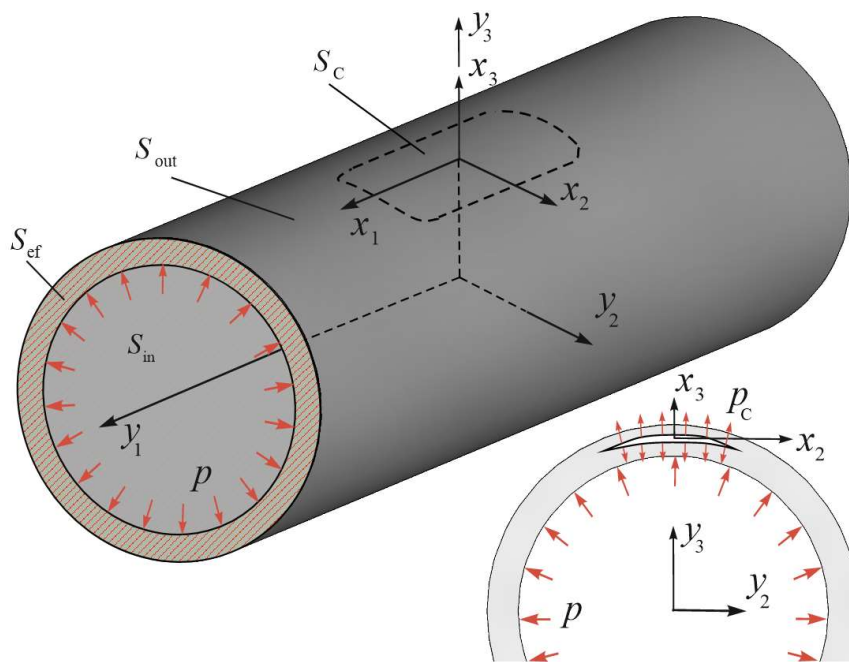


Рис. 4.13. Схема фрагменту порожнистого циліндра з тріщиною.

Найбільше напруження на зовнішній поверхні порожнистого циліндра буде в центрі відшарованої оболонки (над розшаруванням) і відповідатиме точці A з координатами $(0,0,220)$ в глобальній системі координат $O y_1 y_2 y_3$, прив'язаній до центра фрагменту циліндра. В центрі розшарування виберемо локальну систему координат $O_1 x_1 x_2 x_3$ з осями, паралельними до відповідних глобальних осей (рис. 4.17). Механічні властивості циліндра визначають модулями зсуву та коефіцієнтами Пуассона (G_1, ν_1).

Зважаючи на те, що поверхні S_C макротріщини мають малу кривизну порівняно з її розмірами і внутрішній тиск у відшаруванні виключає контакт його берегів, можемо використовувати відомі співвідношення теорії пружних потенціалів відносно плоских тріщин для інтегрального подання компонент напружено-деформованого стану такої структури. Таким чином, напруження та переміщення у розглянутому тілі подаються у вигляді співвідношень (4.15) та (4.14) відповідно.

Якщо крайові умови на поверхні тіла можемо як і раніше в попередньому параграфі записати у формі (4.10), то крайові умови на поверхнях тріщини в локальній системі координат запишемо з врахуванням тиску p_C у тріщині:

$$\sigma_{3j}^{(2)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S_C} = p_C n_j^C(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_C, \quad j = \overline{1,3}, \quad (4.20)$$

де $\mathbf{n}^C$ – вектор нормалі до поверхонь відшарування.

Невідомі переміщення $u_j^*(\xi)$ внутрішньої та $u_j^{**}(\xi)$ зовнішньої поверхонь циліндра, а також пов'язані з ними стрибки переміщень на поверхнях відшарування $\alpha_j(\xi)$ ($j = \overline{1,3}$) визначаємо з системи дев'яти граничних інтегральних рівнянь, отриманих задоволенням крайових умов (4.10) та (4.20) на поверхнях циліндра та в області тріщини:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i^*(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij21}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) \times \\ & \times \alpha_j(\xi) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \quad \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in S_{in}, \quad i = \overline{1,3}. \\ & \frac{1}{2} u_i^{**}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{out}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^{**}(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} T_{ij}(\mathbf{y}, \xi) u_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij21}(\tilde{\mathbf{y}}, \xi, \mathbf{n}^C) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \alpha_j(\xi) d_\xi S = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{ef}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) t_j^{***}(\xi) d_\xi S - p \sum_{j=1}^3 \iint_{S_{in}} U_{ij}(\mathbf{y}, \xi) n_j d_\xi S, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in S_{out}, i = \overline{1, 3}. \\
& \iint_{S_C} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} u_q^*(\xi) d_\xi S - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) \times \right. \\
& \left. \times l_{3s} l_{j3} u_q^{**}(\xi) d_\xi S \right) = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(p_C n_3^C - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} t_q^{***}(\xi) d_\xi S + \right. \\
& \left. + p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{j3} n_q d_\xi S \right), \\
& \iint_{S_C} \left[\left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-i} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \right) \alpha_j(\xi) + \frac{3\nu_1(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \times \\
& \times \left(\sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{in}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} u_q^*(\xi) d_\xi S - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{out}} L_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} u_q^{**}(\xi) d_\xi S \right) = \\
& = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \left(p_C n_i^C - \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} t_q^{***}(\xi) d_\xi S + \right. \\
& \left. + p \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_{ef}} D_{sjq}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) l_{3s} l_{ij} n_q d_\xi S \right), \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in S_C, i = \overline{1, 2}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Взаємне перетворення координат точки поверхонь тіла або відшарування в різних системах координат, зважаючи на їх взаємну орієнтацію, задається виразами: $\tilde{y}_i = -\delta_{i3}d + y_i$, $\tilde{x}_i = \delta_{i3}d + x_i$, $i = \overline{1, 3}$.

Процедура числового розв'язування рівнянь (4.21) описана в параграфі 4.3 з тією різницею, що в процесі регуляризації гіперсингулярних інтегралів потрібно застосувати схему конформного відображення області у вигляді прямокутника зі скругленими кутами на область круга одиничного радіуса. Таке відображення разом з методикою визначення КІН на контурі тріщини у формі

многокутника описано в роботі [187].

Визначені дискретні значення невідомих функцій у колокаційних точках на поверхні відшарування та вузлах суперпараметричних граничних елементів на поверхні тіла підставляємо в інтегральні подання переміщень (4.14).

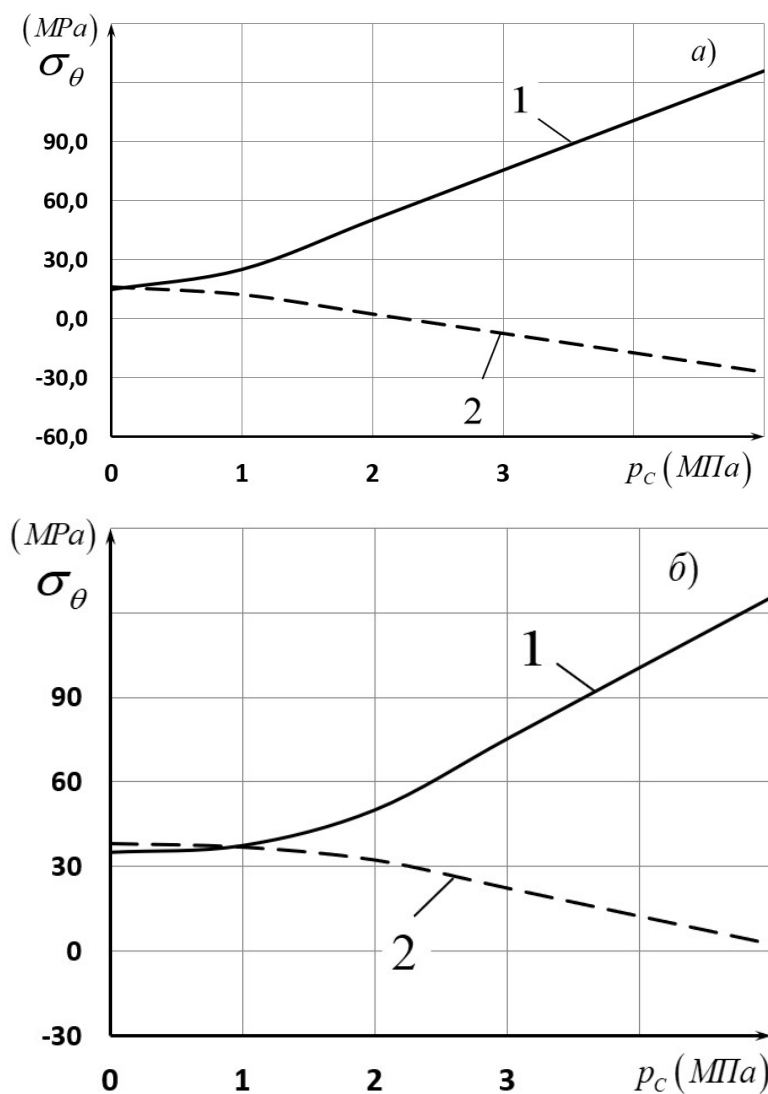


Рис. 4.14. Залежність тангенціальних σ_θ напружень на зовнішній (1) та внутрішній (2) поверхні циліндра від тиску в тріщині при $p = 3$ МПа (а) та $p = 7$ МПа (б) на внутрішній поверхні циліндра.

Розрахунки проведені (рис. 4.14) для тангенціальних напружень σ_θ , у двох характерних точках порожнистого циліндра, що лежать на осі Oy_3 на зовнішній (криві 1) та внутрішній (криві 2) поверхнях. Для плоскої деформації серединного поперечного перерізу порожнистого циліндра будемо мати:

$$\sigma_{\theta} = 2G_1 \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1} \left(\frac{u_3}{y_3} + \frac{\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right).$$

На графіках показані залежності цих напружень від тиску у тріщині p_c в діапазоні від нуля до 5 МПа, зважаючи на те, що напруження, спричинені тиском молекулярного водню в дефектах (внутрішніх порожнинах), можуть бути співмірні з границею витривалості сталі, згідно з теоретичними розрахунками та експериментальними результатами [247]. Розглянуто два випадки значень тиску у порожнистому циліндрі $p = 3 \text{ МПа}$ і $p = 7 \text{ МПа}$, враховуючи можливий діапазон робочих тисків у магістральному газопроводі.

В розрахунку використано 288 колокаційних точок на поверхні відшарування та 832 суперпараметричних граничних елементів на поверхнях порожнистого циліндра.

4.5. Концентрація напружень в околі тонкого податливого включення, що знаходиться в обмеженому призматичному тілі

Розглянемо пружне тіло Ω в формі паралелепіпеда розміром $a_0 \times b_0 \times c_0$ із закругленими ребрами (рис. 4.15) обмежене гладкою поверхнею S , що знаходиться під дією статичного постійного навантаження $\mathbf{t}^{(s)}(\mathbf{x}_0) = q = \text{const}$ однієї з граней S_T його зовнішньої поверхні. Навантаження перпендикулярне до грані S_T , а на протилежній до неї грані переміщення двох рядів вузлів сітки граничних елементів (поверхня S_U) є рівним нулю $\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}_0) = 0$. Інша частина поверхні тіла S_0 є вільна як від закріплень так і від навантажень. $S = S_T \cup S_U \cup S_0$.

Модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона тіла Ω позначимо відповідно G_1 та ν_1 . Виберемо глобальну систему координат $Ox_{11}x_{21}x_{31}$ з початком в центрі тіла і осями направленими вздовж його граней (рис. 4.15). В цій системі координат

крайові умови на поверхні тіла можемо записати наступним чином:

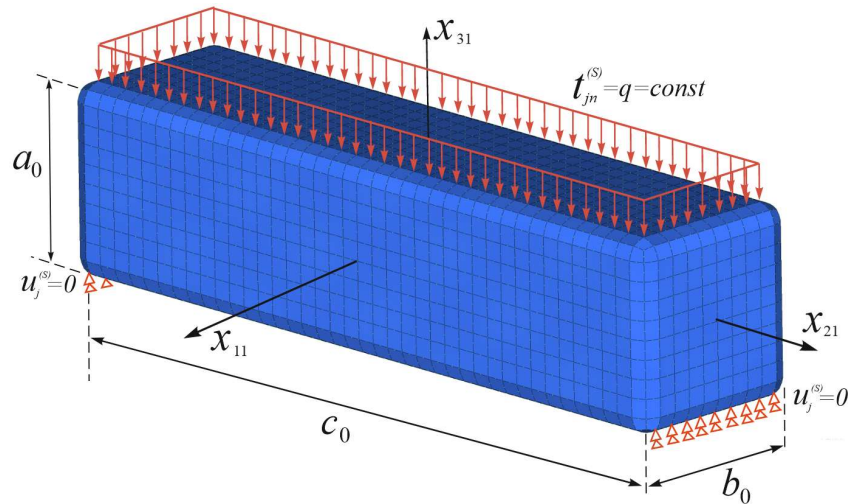


Рис. 4.15. Сітка граничних елементів поверхні призматичного пружного тіла з закріпленнями і навантаженнями у її вузлах.

$$t_j(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0, \mathbf{x}_0 \in S_T \cup S_0; \\ t_j^*, \mathbf{x}_0 \in S_U, j=1,2; \end{cases} \quad t_3(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} -q, \mathbf{x}_0 \in S_T; \\ 0, \mathbf{x}_0 \in S_0; \\ t_3^*, \mathbf{x}_0 \in S_U; \end{cases} \quad \mathbf{u}_j(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0, \mathbf{x}_0 \in S_U; \\ u_j^*, \mathbf{x}_0 \in S_T \cup S_0, \end{cases} \quad (4.22)$$

де u_i^* , t_i^* – невідомі значення компонент векторів переміщень та зусиль в точках поверхні S відповідно.

Нехай в площині $x_{11}Ox_{31}$ знаходиться тонке податливе включення радіусом r_2 та постійної товщини h_2 , центр якого розміщений на відстані a_1 від осі Ox_{11} та на відстані b_1 від осі Ox_{31} . Матеріал включення характеризується модулем зсуву G_2 та коефіцієнтом Пуассона ν_2 . Прив'яжемо до центру серединної площини включення S_2 локальну систему координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ так, щоб вісь Ox_{32} була перпендикулярною до цієї площини (рис. 4.16). Зважаючи на положення включення в тілі, компоненти радіус-вектору його центру в глобальній системі координат наступні: $d_1 = b_1$; $d_2 = 0$; $d_3 = -a_1$. Напрямні косинуси цього радіус-вектору можна визначити як $e_1 = b_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $e_2 = 0$; $e_3 = -a_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. Ті ж самі величини в локальній системі координат будуть

мати вигляд: $d_1^* = b_1$; $d_2^* = a_1$; $d_3^* = 0$; $e_1^* = b_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $e_2^* = a_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $e_3^* = 0$.

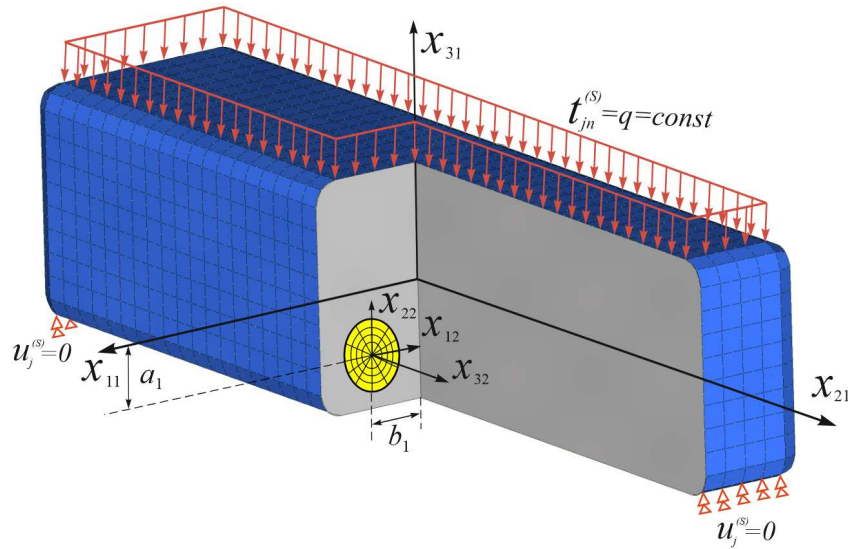


Рис. 4.16. Розташування тонкого податливого включення у призматичному пружному тілі.

Напрямні косинуси $l_{ij21} = \cos(\widehat{O_1 x_{i2}, O x_{j1}})$ ($i, j = \overline{1,3}$) осей обох систем координат подамо у вигляді табл. 4.3.

Таблиця 4.3. Напрямні косинуси кутів між локальною і глобальною системами координат у призматичному тілі.

	x_{11}	x_{21}	x_{31}
x_{12}	-1	0	0
x_{22}	0	0	1
x_{32}	0	1	0

Система ГПР (4.6)-(4.8) відносно функцій стрибків переміщень поверхонь включення та крайових значень вектора переміщень та зусиль на поверхні тіла з врахуванням крайових умов (4.22) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\
 & + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_2} \Omega_{ij21}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^C) \beta_j(\xi) d_\xi S = -q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_U,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} u_i^*(\mathbf{x}_{11}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_2} \Omega_{ij21}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^C) \beta_j(\xi) d_\xi S = -q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S_T, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_T \cup S_0, \\
& -4\pi \frac{G_2}{G_1} (1 - \nu_1) \frac{2 + 2\nu_2}{1 - 2\nu_2} \frac{\beta_3(\mathbf{x}_{22})}{h_2} + \iint_{S_2} \frac{\beta_3(\xi)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} d_\xi S - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) \times \\
& \times l_{3s21} l_{j321} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1 - \nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} t_q^*(\xi) d_\xi S = \\
& = \frac{1 - \nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_2; \\
& \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1 + \nu_1}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1 (x_{3-i22} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \right) \alpha_j(\xi) + \frac{3\nu_1 (x_{122} - \xi_1)(x_{222} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& -4\pi \frac{G_2}{G_1} (1 - \nu_1) \frac{\beta_i(\mathbf{x}_{22})}{h_2} - \frac{1 - \nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1 - \nu_1}{G_1} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} d_\xi S, \\
& \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_2, \quad i = \overline{1, 2}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Пружне тіло Ω внаслідок дії активних та реактивних зовнішніх сил деформується, що призводить до нормальних переміщень поверхонь включення, яке міститься в тілі. Напружений стан в околі включення, викликаний його деформацією, в свою чергу впливає на деформацію пружного тіла Ω . Тому отримана система ГІР (4.23) є взаємопов'язаною системою рівнянь відносно невідомих значень вектора переміщень в точках поверхні $S_T \cup S_0$, вектора реактивних зусиль в точках поверхні S_U та значень нормалізованих стрибків переміщень на серединній поверхні включення S_2 . Розв'язування цієї системи

рівнянь в повній мірі дасть можливість врахувати вплив складної топології поверхні пружного тіла на деформацію включення.

Поклавши жорсткість включення рівною нулевій, отримаємо частковий випадок системи ГІР (4.23) задачі про тріщину в призматичному пружному тілі:

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_2} \Omega_{ij21}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S = -q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_U, \\
& \frac{1}{2} u_i^*(\mathbf{x}_{11}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) t_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) u_j^*(\xi) d_\xi S + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_2} \Omega_{ij21}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S = -q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_T \cup S_0, \\
& \iint_{S_2} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \times \\
& \times \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} d_\xi S, \\
& \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_2; \\
& \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-i22} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \right) \alpha_j(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{122} - \xi_1)(x_{222} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S - \\
& - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} u_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} \times \\
& \times l_{ji21} t_q^*(\xi) d_\xi S = \frac{1-\nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_2, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Якщо радіус тріщини r_1 малий порівняно з розмірами пружного тіла Ω

($r_1 \ll a_0, b_0, c_0$) та центр тріщини знаходиться на відстані більшій ніж три її радіуси від поверхні тіла, то задачу визначення КІН на контурі тріщини можна розв'язати без врахування впливу поверхні тіла [186]. Для цього тріщину можна розглянути як таку, що розташована в безмежному пружному середовищі з механічними характеристиками, що співпадають з механічними характеристиками тіла Ω . Навантаження поверхонь тріщини вважаємо такими, що співпадають із зусиллями на площинці, яка знаходиться на місці розташування тріщини у аналогічному бездефектному пружному тілі Ω . Для визначення цих навантажень можемо використати спрощену розрахункову модель простої балки (рис. 4.17). В цьому випадку система рівнянь (4.24) для визначення функцій розкриття тріщини за умови ($r_1 \ll a_0$) зведеться до одного рівняння:

$$\iint_{S_2} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d_\xi S = \frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{3q c_0^2 a_1}{2a_0^3}, \quad \mathbf{x} \in S_2. \quad (4.25)$$

Рівняння (4.25) має аналітичний розв'язок :

$$\alpha_3(\mathbf{x}) = -\frac{1 - \nu_1}{G_1} \frac{3q c_0^2 a_1}{2\pi^2 a_0^3} \sqrt{r_1^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (4.26)$$

Таким чином, КІН в точці $\mathbf{x}_0$ контуру області S_2 тріщини без врахування впливу поверхні тіла, що її містить, визначаємо з виразу (3.29)

$$K_1^*(\mathbf{x}_0) = \sqrt{r_2} \pi \frac{3q c_0^2 a_1}{\pi a_0^3}. \quad (4.27)$$

Наближене врахування впливу поверхні пружного тіла, що містить тріщину, на КІН в точках її контуру можливе шляхом застосування методу поля ефективних напружень, описаного в параграфі 3.4 цієї роботи. Для цього в перших шести рівняннях системи (4.23) інтеграли по області тріщини S_1

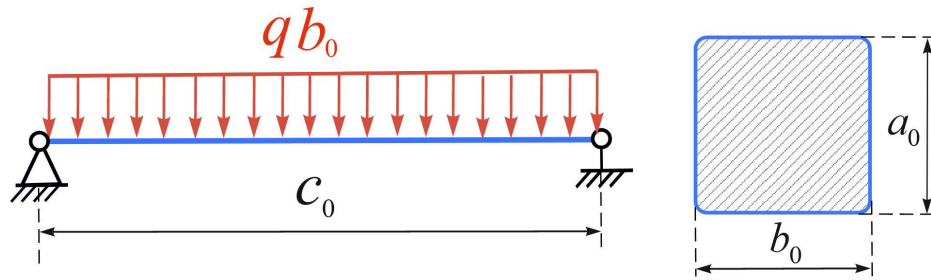


Рис. 4.17. Розрахункова схема для визначення КІН на контурі внутрішньої тріщини з урахуванням лише фактора навантаження призматичного тіла.

перенесемо в праву частину рівнянь з одночасною заміною невідомих функцій $\alpha_j(\xi)$ ($j = \overline{1,3}$) розкриття тріщини на відомі функції $\alpha_j^*(\xi)$ ($j = \overline{1,3}$) розкриття такої ж тріщини під аналогічним навантаженням її поверхонь в безмежному пружному середовищі:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) \tilde{t}_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) \tilde{u}_j^*(\xi) d_\xi S = \\
 & = -\iint_{S_2} \Omega_{i321}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_3^*(\xi) d_\xi S - q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_U, \\
 & \frac{1}{2} \tilde{u}_i^*(\mathbf{x}_{11}) - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_U} U_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi) \tilde{t}_j^*(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} T_{ij}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}) \tilde{u}_j^*(\xi) d_\xi S = \\
 & = -\iint_{S_2} \Omega_{i321}(\mathbf{x}_{01}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_3^*(\xi) d_\xi S - q \iint_{S_T} U_{i3}(\mathbf{x}_{11}, \xi) d_\xi S, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_T \cup S_0, \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

де $\alpha_3^*(\xi)$ визначається виразом (4.26); $\tilde{u}_i^*$, $\tilde{t}_i^*$ – невідомі наближені (за методом поля ефективних напружень) значення компонент векторів крайових переміщень та зусиль.

Тут враховано, що $\alpha_j^*(\xi) = 0$ ($j = 1, 2$) за умови відсутності зсувного навантаження поверхонь тріщини, що знаходиться в серединному поперечному перерізі тіла Ω .

Далі в останніх трьох рівняннях системи (4.23) перенесемо в праву частину регулярні інтеграли по поверхні S тіла Ω , замінюючи невідомі значення

компонент векторів крайових переміщень та зусиль u_i^* , t_i^* розв'язками $\tilde{u}_i^*$, $\tilde{t}_i^*$ рівнянь (4.28):

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \frac{\alpha_3(\xi)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} d_\xi S &= \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} \tilde{u}_q^*(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \times \\ &\times \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} \tilde{t}_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{j321} d_\xi S, \\ \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} &\in S_2; \\ \iint_{S_2} \left[\left(\frac{1+\nu_1}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^3} - \frac{3\nu_1(x_{3-i22} - \xi_{3-i})^2}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \right) \alpha_j(\xi) + \frac{3\nu_1(x_{122} - \xi_1)(x_{222} - \xi_2)}{|\mathbf{x}_{22} - \xi|^5} \alpha_{3-i}(\xi) \right] d_\xi S &= \\ = \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T \cup S_0} L_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} \tilde{u}_q^*(\xi) d_\xi S - \frac{1-\nu_1}{G_1} \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_U} D_{sjq}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} \times \\ \times l_{ji21} \tilde{t}_q^*(\xi) d_\xi S + \frac{1-\nu_1}{G_1} q \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \iint_{S_T} D_{sj3}(\mathbf{x}_{21}, \xi) l_{3s21} l_{ji21} d_\xi S, \quad \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_2, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Таким чином, метод поля ефективних напружень в задачах теорії пружності для обмежених тіл з внутрішніми дефектами передбачає послідовне розв'язування двох розділених систем ГП (4.28) та (4.29), менших за розмірністю порівняно з системою рівнянь (4.24), необхідною для точного розв'язування поставленої задачі.

В обидвох випадках для визначення невідомих величин необхідно застосувати процедуру числової дискретизації інтегральних рівнянь. Для цього будемо сітку суперпараметричних граничних елементів на поверхні S пружного тіла та систему колокаційних вузлів на поверхні тріщини (включення) S_2 ; дискретизуємо рівняння (4.23) та (4.24) або (4.28) та (4.29) за алгоритмом описаним в п. 2.2, замінюючи невідомі функції їх значеннями у вузлах побудованої сітки; регулярні інтеграли по зовнішній тіла поверхні тіла обчислюємо

за формулами (2.21), (2.22); регуляризуємо та визначаємо слабосингулярні інтеграли по зовнішній поверхні тіла з використанням виразів (2.7), (2.24), (2.27); в інтегралах по області S_2 тріщини неявно враховуємо рівність нулю стрибків переміщень на контурі області інтегрування за формулою (3.17) та регуляризуємо гіперсингулярні інтеграли алгоритмом описаним в (3.25).

Такі перетворення зводять поставлену задачу до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь звідки визначаємо дискретні значення поля переміщень і зусиль у вибраних вузлах, а це в свою чергу дає можливість з врахуванням (3.23) визначити уточнені значення КІН на контурі тріщини (включення) з врахуванням її (його) взаємодії з поверхнею тіла.

Здійснимо числовий аналіз нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини, що знаходиться в серединному поперечному перерізі призматичного тіла розміром $c_0/a_0 = 20$; $b_0/a_0 = 1$. Відносне навантаження грані S_T приймемо рівним $q(1-\nu_1)/G_1 = 1$, а коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла – $\nu_1 = 0,3$. Радіус області тріщини рівний $a_0/r_2 = 8$. Радіус заокруглення ребер призматичного тіла Ω рівний $r_0/r_2 = 0,25$.

На рис. 4.18–4.24 показано значення КІН нормального відриву $\tilde{K}_1 = K_1/K_1^*$, де $K_1^*(x_0)$ визначається виразом (4.27) і характеризує інтенсивність напружень на контурі тріщини без врахування впливу поверхні тіла. Ці значення КІН на графіках подані як функції кутової координати ψ_0 точки контуру тріщини x_0 , що відраховується в локальній системі координат від осі $O_1 x_{11}$ проти годинникової стрілки якщо дивитися вздовж осі $O_1 x_{31}$.

Суцільні лінії на графіках відповідають розв'язкам, отриманим шляхом розв'язування дискретного аналога системи ГІР (4.24); штрихові лінії – розв'язкам, отриманим методом поля ефективних напружень шляхом обернення дискретних аналогів систем рівнянь (4.28) та (4.29); пунктирна лінія відповідає найбільш поширеній в літературі моделі тріщини у півпросторі, де поверхня тіла моделюється площиною [59]; штрих-пунктирні лінії – випадку

тріщини у безмежному пружному просторі з аналогічними механічними характеристиками та навантаженням поверхонь тріщини.

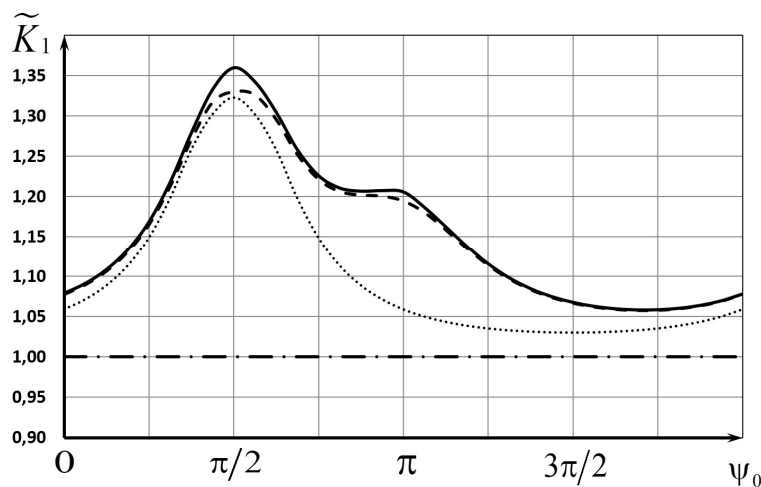


Рис. 4.18. Залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини за різних моделей врахування впливу поверхні тіла від кутової координати точки контуру тріщини.

Рис. 4.18 дозволяє порівняти результати розрахунків, які є реалізаціями вищезгаданих математичних моделей врахування впливу поверхні призматичного пружного тіла на концентрацію напружень в околі контуру внутрішньої кругової тріщини за умови її розташування, що характеризується наступними геометричними параметрами: $a_1/r_1 = 2,95$, $b_1/r_1 = 2,8$.

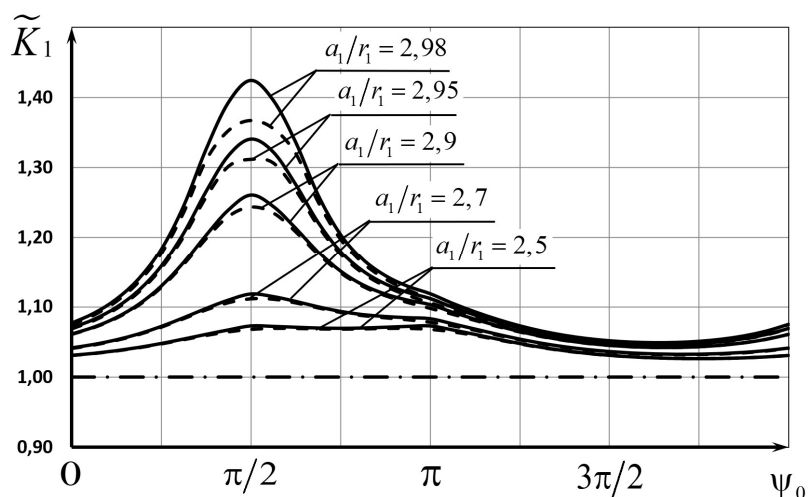


Рис. 4.19. Залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини, з горизонтальним зміщенням від центра тіла на величину $b_1/r_1 = 2,5$ від кутової координати точки контуру тріщини.

На рис. 4.19, рис. 4.20, рис. 4.21 показано зміну значень нормалізованих

КІН на контурі кругової тріщини за різного її положення по вертикальній осі Ox_{31} глобальної системи координат та зміщенням центра тріщини від центра тіла Ω по осі Ox_{11} $b_1/r_1 = 2,5$, $b_1/r_1 = 2,8$, $b_1/r_1 = 2,96$ відповідно.

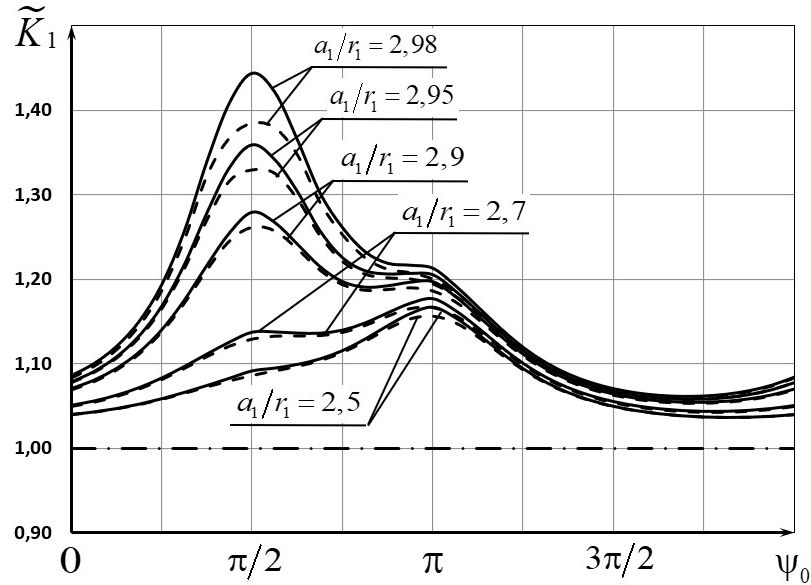


Рис. 4.20. Залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини, з горизонтальним зміщенням від центра тіла на величину $b_1/r_1 = 2,8$ від кутової координати точки контуру тріщини.

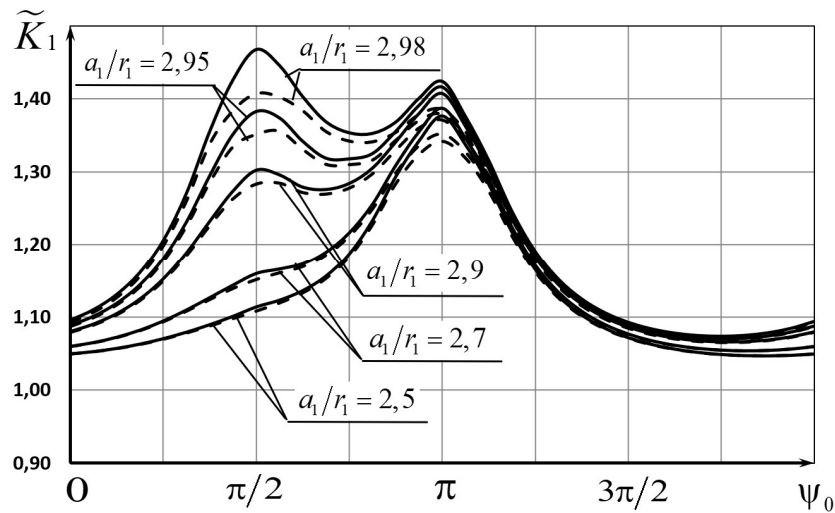


Рис. 4.21. Залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини, з горизонтальним зміщенням від центра тіла на величину $b_1/r_1 = 2,96$ від кутової координати точки контуру тріщини.

Натомість на рис. 4.22 показано зміну значень нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини за різного її положення по горизонтальній осі Ox_{11} глобальної системи координат та зміщенням центра тріщини від центра тіла Ω по

осі Ox_3 $a_1/r_1 = 2,9$.

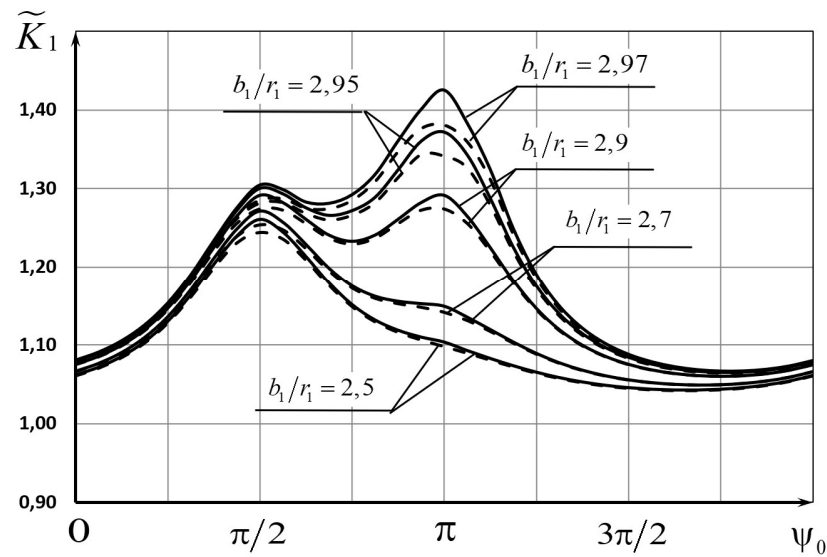


Рис. 4.22. Залежність нормалізованих КІН на контурі кругової тріщини, з вертикальним зміщенням від центра тіла на величину $a_1/r_1 = 2,9$ від кутової координати точки контуру тріщини.

Аналогічні числові розрахунки шляхом дискретизації системи ГР (4.23) проведено щодо нормалізованих КІН на контурі тонкого податливого включення для випадку його розташування у серединному поперечному перерізі пружного обмеженого тіла аналогічної форми та розмірів за дії аналогічного навантаження. Включення має дископодібну форму з радіусом $r_1 = a_0/8$ та товщину $h_1 = 0,01r_1$. Відносна жорсткість матеріалу включення становить $G_1/G_0 = 0,005$, а його коефіцієнт Пуассона співпадає з матричним і рівний $\nu_2 = 0,3$.

Значення КІН $K_1^{(I)}$ нормального відриву на контурі включення, що зображені на рис. 4.23 – 4.24, також віднесені до $K_1^*(x_0)$ – КІН на контурі круглої ізольованої тріщини радіуса r_1 в безмежному пружному просторі з механічними характеристиками тіла.

Положення центру включення визначається геометричними параметрами горизонтального зміщення $b_1/r_1 = 2,8$ (рис. 4.23); $b_1/r_1 = 2,96$ (рис. 4.24) та вертикального зміщення $a_1/r_1 = 2,95$; $a_1/r_1 = 2,9$; $a_1/r_1 = 2,7$; $a_1/r_1 = 2,5$, що

відповідають різним кривим на цих рисунках.

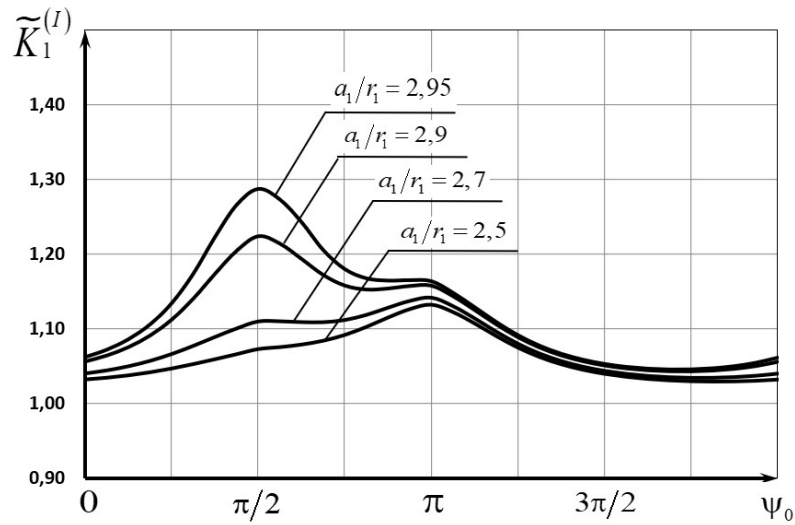


Рис. 4.23. Залежність нормалізованих КІН на контурі дископодібного тонкого включення, з горизонтальним зміщенням від центра тіла на величину $b_1/r_1 = 2,8$ від кутової координати точки контуру.

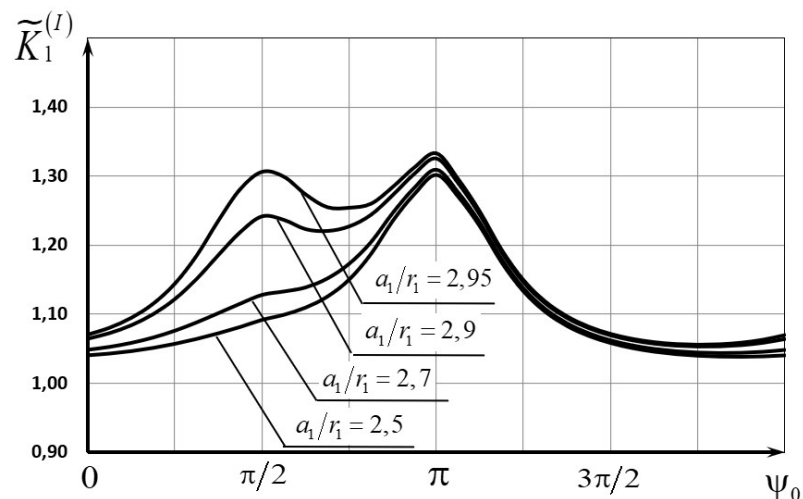


Рис. 4.24. Залежність нормалізованих КІН на контурі дископодібного тонкого включення, з горизонтальним зміщенням від центра тіла на величину $b_1/r_1 = 2,96$ від кутової координати точки контуру.

Зауважимо, що за малої відстані точок контуру тріщини (тонкого включення) до поверхні тіла порівняно з її радіусом, відстань між колокаційними точками на контурі тріщини має бути не менша ніж характеристичний розмір суперпараметричного граничного елементу або половина характерного розміру ізопараметричного граничного елементу на поверхні тіла. У зв'язку із цим необхідно забезпечити або достатньо дрібну сітку граничних елементів

при дискретизації зовнішньої поверхні пружного твердого тіла, або її згущення в області, наближеній до внутрішньої тріщини.

Для розв'язування даної задачі використано 160 колокаційних точок на поверхні тріщини або включення та 1312 ізопараметричних граничних елементи на зовнішній поверхні S пружного тіла, що містить тріщину. За такої густини сітки застосування методу поля ефективних напружень приносить значну економію як задіяних апаратних ресурсів, так і затраченого часу розв'язування задачі.

4.6. Висновки до четвертого розділу

Запропоновано граничноелементну схему дискретизації ГПР, які враховують просторову силову та кінематичну дію на поверхню обмежених тіл з тонкостінними включеннями та тріщинами. Аналіз напружень в околі тріщинних дефектів, що містяться в приповерхневій зоні пружних тіл у вигляді скінченного порожнистого циліндра та призми, засвідчує їх суттєву залежність від геометрії поверхні та локалізації дефекту відносно цієї поверхні. Зокрема, при розгляді газонаповнених приповерхневих тріщин зафіксовано ситуації зі зменшенням КІН в їх околі за рахунок додаткового тиску на поверхні тіла, який виступає стримуючим фактором для поширення дефектів.

На контурі кругових тонкостінних податливих включень спостерігаються локальні максимуми КІН у точках, наближених до зовнішньої поверхні обмеженого тіла, які є менш виразними якщо поверхня навантажена тиском. Зменшення радіусу кривини зовнішньої поверхні тіла, модуля зсуву матеріалу включень та їх товщини приводить до збільшення КІН на контурі таких приповерхневих тріщинних неоднорідностей.

Прояв навантаження поверхні тіла на напруження в околі тонкого пружного включення менший від аналогічно розташованої тріщини, що виражається у більш монотонній зміні КІН вздовж фронту включення, а також виникненні ефекту передислокації по фронту точок максимуму КІН за більшого

ніж для тріщини зближення з поверхнею тіла.

Наявність внутрішнього тиску $p/G_0 = 0,03$ на викривлену поверхню порожнистого циліндра радіусом $R = 90a$ зменшує КІН на контурі внутрішньої приповерхневої кругової тріщини радіусом a на 2-10 % залежно від її наближення до поверхні порівняно з випадком відсутності такого тиску.

Поздовжня внутрішня газонаповнена тріщина у порожнистому циліндрі навантаженому внутрішнім тиском збільшує кільцеві напруження на його зовнішній поверхні в 4 рази за умови зростання тиску газу у тріщині до рівня внутрішнього тиску у циліндрі.

Застосування методу поля ефективних напружень є дієвим засобом розв'язування задач про міцність обмежених пружних тіл з тріщинами та включеннями, що значно зменшує обсяг обчислень при оберненні дискретного аналогу граничних інтегральних рівнянь за незначної втрати точності. Винятком є випадки, коли точки контуру приповерхневих тріщин наближені до зовнішньої поверхні тіла на віддаль меншу ніж $0,05a$ і похибка методу поля ефективних напружень порівняно з прямим розв'язком задачі становить більше 3 %.

РОЗДІЛ 5

ВПЛИВ КОНТАКТНИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ТА МІЖФАЗНИХ ПРОШАРКІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОМПО- ЗИТНИХ ТІЛ

Задачі мікромеханіки гетерогенних середовищ, які складаються з двох або більше різних компонентів можуть бути розв'язані лише за умови адекватного моделювання міжфазного контакту з врахуванням його можливих пошкоджень таких як відшарування або тонкі прошарки, утворені технологічним шляхом при виготовленні композитів або хімічним шляхом внаслідок їх тривалої експлуатації. Неідеальні умови контакту між фазами гетерогенного пружного тіла на рівні з топологічною формою включень та контрастністю жорсткості фаз значним чином впливають на міцність та деформаційну поведінку конструкцій, виготовлених з таких матеріалів [76].

У цьому розділі граничноелементний аналіз поширено на тривимірні задачі про неідеальний контакт безмежної пружної матриці з пружним включенням загальної форми, що моделює проковзування та наявність тонкого податливого прошарку.

Матеріали розділу викладені в працях [88, 156, 157, 159, 372].

5.1. Модифікація граничноелементних алгоритмів для врахування ковзного контакту об'ємного включення з матрицею

Ідеальний механічний контакт є найпоширенішою в літературі математичною моделлю міжфазного з'єднання включення з матрицею, що передбачає неперервність переміщень і зусиль поверхні розділу середовищ. Різного роду ослаблення цього з'єднання можуть вносити істотні зміни до пружних полів напружень, що виникають у композиті. У багатьох практичних випадках між включенням та матрицею реалізується ковзний або гладкий контакт, що

супроводжується відсутністю дотичних зусиль на міжфазній поверхні. Як зазначено у роботі [45], ковзний контакт охоплює опис прояву широкого кола міжфазних дефектів у композиті. Таким чином, дослідження ковзного контакту об'ємного включення складної форми з тривимірною пружною матрицею нарівні із задачами про їх ідеальний контакт [85] є актуальними та важливими для практичних інженерних розрахунків конструкцій із композитних матеріалів. При розгляді неоднорідностей з ускладненою топологією необхідно застосовувати чисельні методи аналізу. Перевага методу граничних елементів визначається дискретизацією лише двовимірної поверхні розділу середовищ. Нижче запропоновано алгоритм зазначеного методу модифіковано для визначення напруженого стану включення у формі кінцевого циліндричного волокна, за умови його ковзного зчеплення з нескінченною пружною матрицею.

Розглянемо тривимірне пружне ізотропне включення Ω_2 , що межує з безмежним пружним середовищем Ω_1 (матрицею). Поверхня контакту матриці та включення є довільною гладкою поверхнею S із зовнішньою до включення нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. Механічні характеристики складових гетерогенного тіла визначаються модулями зсуву G_i і коефіцієнтами Пуассона ν_i ($i = 1, 2$). На тіло діє статичне навантаження, що викликає поле переміщень $\mathbf{u}^{(0)}(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ в однорідному пружному просторі з механічними властивостями матриці, а через $\sigma_{ij}^{(0)}(i, j = \overline{1, 3})$ позначимо напруження, пов'язані законом Гука з цим полем. Між складовими частинами тіла реалізується гладкий контакт, тобто забезпечується неперервність нормальних до поверхні розділу фаз переміщень і зусиль, а також відсутність дотичних зусиль на поверхні S :

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}); \quad t_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{x}) = -t_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \\ t_{\mathbf{h}}^{(1)}(\mathbf{x}) &= t_{\mathbf{h}}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0; \quad t_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

де $\mathbf{h}(h_1, h_2, h_3)$ і $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ – дотичні до поверхні S ортогональні вектори одиничної довжини (рис. 5.1).

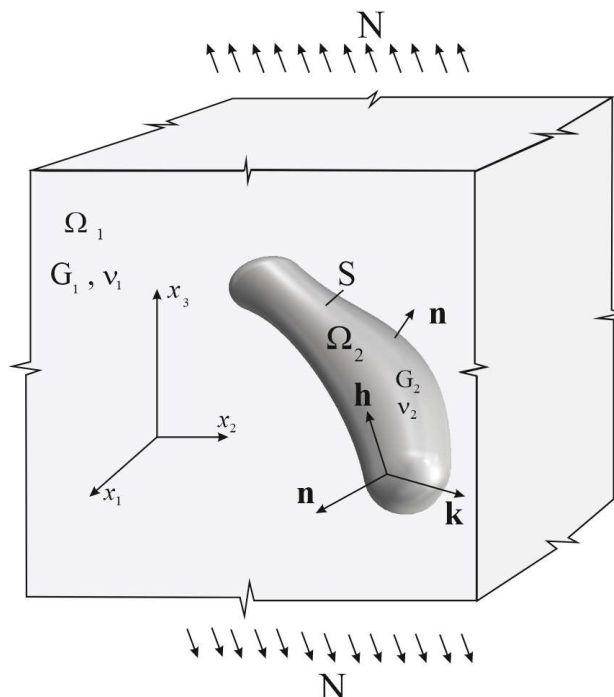


Рис. 5.1. Схема тривимірної задачі про пружну рівновагу об'ємного включення в безмежному середовищі за умови ковзного контакту на міжфазній поверхні.

Інтегральні подання Сомільяно для розв'язків зовнішньої ($m=1$) і внутрішньої ($m=2$) задач теорії пружності в переміщеннях дозволяють визначити переміщення в тілі в глобальній системі координат $Ox_1x_2x_3$ за формулами (2.3), де $t_j^{(m)}(\mathbf{x})$, $u_j^{(m)}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in S$) – контактні значення компонент зусиль і переміщень на поверхні S з боку нормалі, для $m=1$, і з протилежного боку, коли $m=2$.

Для отримання систем ГІР (2.8) здійснюємо в (2.3) граничний перехід до поверхні S , враховуючи властивості пружних потенціалів простого і подвійного шару та застосовуючи процедуру (2.7) первинної регуляризації інтегралів з сингулярним ядром $T_{ij}^{(m)}$ з метою перетворення їх до слабосингулярної форми.

Проблема невідповідності кількості шуканих невідомих і отриманих ГІР

може бути розв'язана двома шляхами. Перший з них передбачає явне доєднання крайових умов до системи інтегральних рівнянь. Цей підхід, після регуляризації сингулярних інтегралів, дозволяє звести поставлену задачу до розв'язування дев'яти рівнянь відносно контактних величин $u_i^{(m)}(\mathbf{x})$, $t_i(\mathbf{x})$, $(m=1,2; i=\overline{1,3})$.

Більш ефективним є підхід, пов'язаний з можливістю позбутися «зайвих» невідомих шляхом перетворення системи ГІР (2.8) в локальній системі координат, орієнтованій на нормаль до поверхні S в точці інтегрування, забезпечивши неявне виконання контактних умов (5.1).

Задамо функції стрибків граничних значень переміщень на поверхні S $\Delta u_i(\mathbf{x}) = u_i^{(1)}(\mathbf{x}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x})$. Тоді ГІР (2.4) можна записати наступним чином:

$$u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \Delta u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [\Delta u_j(\boldsymbol{\eta}) - \Delta u_i(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right] = u_i^{(0)}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right] = 0; \quad \mathbf{x} \in S, \quad (5.2)$$

Перейдемо до нових невідомих функцій, здійснюючи перетворення від глобальної системи координат $Ox_1x_2x_3$ до локальної системи координат $\mathbf{x}_0 \mathbf{h} \mathbf{k} \mathbf{n}$. Виходячи з умов гладкості контакту, співвідношення між поверхневими переміщеннями і зусиллями в різних системах координат набувають вигляду $\Delta u_i = h_i \Delta u_{\mathbf{h}} + k_i \Delta u_{\mathbf{k}}$; $t_i = n_i t_{\mathbf{n}}$. З врахуванням цього систему ГІР можна подати у вигляді:

$$u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + h_i(\mathbf{x}) \Delta u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) + k_i(\mathbf{x}) \Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_j^{(2)}(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^3 \left[h_j(\mathbf{x}) \Delta u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) + k_j(\mathbf{x}) \Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right] \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \times \\
& \times \left[h_j(\boldsymbol{\eta}) \Delta u_{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\eta}) + k_j(\boldsymbol{\eta}) \Delta u_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\eta}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) n_j(\boldsymbol{\eta}) t_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_i^{(0)}(\mathbf{x}), \\
& \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left[u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) n_j(\boldsymbol{\eta}) t_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right] = 0; \quad \mathbf{x} \in S, \\
& i = \overline{1, 3}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

В замкнутій системі шести ГІР (5.3) відносно трьох компонент поверхневих переміщень включення $u_i^{(2)}$, нормальних контактних зусиль $t_{\mathbf{n}}$ і двох стрибків поверхневих дотичних переміщень $\Delta u_{\mathbf{h}}$, $\Delta u_{\mathbf{k}}$ автоматично виконуються умови ковзного контакту між включенням і матрицею.

Для побудови дискретного аналогу системи ГІР міжфазна поверхня S апроксимується компактною неперервною сіткою N чотирикутних восьмикутних і трикутних шестивузлових суперпараметричних криволінійних елементів S^q ($q = \overline{1, N}$). Дискретизація системи рівнянь (5.3) здійснюється шляхом заміни інтегралів по міжфазній поверхні S сумою інтегралів по граничних елементах S^q , відображених на плоску область квадратної або трикутної форми залежно від типу елемента з застосуванням апроксимації по всіх його вузлах.

Координати довільної точки поверхні граничного елемента визначаються через координати його вузлів і функції форми залежностями (2.14). Функції форми приведені в додатку А. Компоненти векторів переміщень і зусиль в точках поверхні включення білінійно інтерполюються через їх значення в кутових (непарних) вузлах елемента наступним чином

$$u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} u_{j, 2s-1}^{(2)} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2), \quad i = \overline{1, 3}; \quad \Delta u_{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} \Delta u_{\mathbf{h}, 2s-1} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2);$$

$$\Delta u_k(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} \Delta u_{k,2s-1} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2); \quad t_n(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} t_{n,2s-1} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2),$$

де N_q – кількість опорних вузлів граничного елемента; $M_s^{\langle N_q \rangle}$ – інтерполяційні функції залежні від форми граничного елемента (див. Додаток А).

Порядок топологічної інтерполяції на одиницю вище порядку інтерполяції шуканих функцій, що дозволяє побудувати оптимальний за розмірністю дискретний аналог системи ГР для включень складної топологічної форми.

Якщо точка $\boldsymbol{\eta} \in S$ не відносяться до області граничного елемента, по поверхні якого ведеться інтегрування, то інтеграли в рівняннях (5.3) є регулярними і можуть бути обчислені за допомогою формул Гауса-Лежандра (2.20). За наявності сингулярних інтегралів необхідно попередньо провести процедуру їх чисельної регуляризації (2.23) - (2.27). Слід зауважити, що в даному випадку має місце ускладнення, пов'язане з визначенням орієнтації одиничних дотичних векторів у вузлах граничних елементів, які явно входять до системи рівнянь (5.3). Визначення координат цих векторів методом диференціювання функцій форми граничного елемента залежить від внутрішньої нумерації вузлів елемента (рис. 5.2) і здійснюється за формулами (2.15).

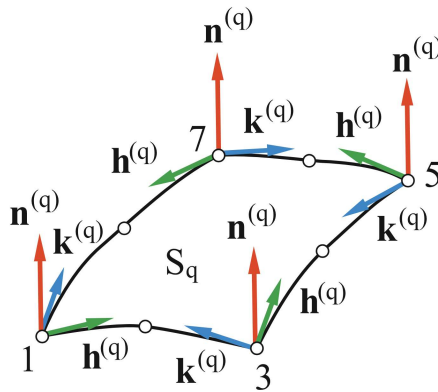


Рис. 5.2. Схема розташування ортів локальної системи координат в опорних вузлах граничного елемента.

Тоді компоненти вектора нормалі в точці $\boldsymbol{\eta}$ мають вигляд:

$$n_i^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ijm} h_j^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) k_m^{(q)}(\boldsymbol{\eta}),$$

де ε_{ijm} - символи Леві-Чівіта. Оскільки один і той же вузол належить до різних граничних елементів і йому автоматично присвоюються різні порядкові номери, то і орієнтація одиничних дотичних векторів в одному і тому ж вузлі для різних граничних елементів буде різною. Тому, додатково до вищевикладеної в розділі 2 чисельної процедури дискретизації системи ГР, необхідно застосувати алгоритм автоматичної переорієнтації одиничних дотичних векторів у вузлах сітки залежно від їх локального номеру в кожному граничному елементі.

Задовольняючи систему ГР (5.3) в опорних вузлах суперпараметричних граничних елементів, отримаємо дискретний аналог ГР у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & u_i^{(2)w} + h_i^w \Delta u_h^w + k_i^w \Delta u_k^w + \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(1)w} \left(u_j^{(2)w} + h_j^w \Delta u_h^w + k_j^w \Delta u_k^w \right) - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(1)qsw} u_j^{(2)v(q,2s-1)} - \right. \\
 & \left. - B_{ij}^{(1)qsw} n_j^{v(q,2s-1)} t_n^{v(q,2s-1)} + A_{ij}^{(1)qsw} \left(h_i^{v(q,2s-1)} \Delta u_h^{v(q,2s-1)} + k_i^{v(q,2s-1)} \Delta u_k^{v(q,2s-1)} \right) \right] = u_i^{(0)}(\mathbf{x}^w), \\
 & - \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(2)w} u_j^{(2)w} + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(2)qsw} u_j^{(2)v(q,2s-1)} - B_{ij}^{(2)qsw} n_j^{v(q,2s-1)} t_n^{v(q,2s-1)} \right] = 0; \quad i = \overline{1,3}, \\
 & \mathbf{x}^w \in S, \quad w = \overline{1, L_2},
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

де L_2 – загальна кількість опорних вузлів сітки граничних елементів; функція $v(q, 2s - 1)$, $s = \overline{1, N_q}$ визначає глобальний номер опорного вузла по номеру граничного елемента, до якого він належить і локальному номеру опорного вузла всередині граничного елемента; $A_{ij}^{(k)qsw}$, $B_{ij}^{(k)qsw}$, $C_{ij}^{(k)w}$ – коефіцієнти, що визначаються виразами (2.29).

У випадку, коли застосовуємо сітку ізопараметричних граничних елементів, дискретний аналог системи ГР можемо подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
& u_i^{(2)w} + h_i^w \Delta u_h^w + k_i^w \Delta u_k^w + \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(1)w} \left(u_j^{(2)w} + h_j^w \Delta u_h^w + k_j^w \Delta u_k^w \right) - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A i_{ij}^{(1)qsw} u_j^{(2)v(q,s)} - \right. \\
& \left. - B i_{ij}^{(1)qsw} n_j^{v(q,s)} t_n^{v(q,s)} + A i_{ij}^{(1)qsw} \left(h_i^{v(q,s)} \Delta u_h^{v(q,s)} + k_i^{v(q,s)} \Delta u_k^{v(q,s)} \right) \right] = u_i^{(0)}(\mathbf{x}^w), \\
& - \sum_{j=1}^3 C i_{ij}^{(2)w} u_j^{(2)w} + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A i_{ij}^{(2)qsw} u_j^{(2)v(q,s)} - B i_{ij}^{(2)qsw} n_j^{v(q,s)} t_n^{v(q,s)} \right] = 0; \quad i = \overline{1,3}, \\
& \mathbf{x}^w \in S, \quad w = \overline{1, L_2},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

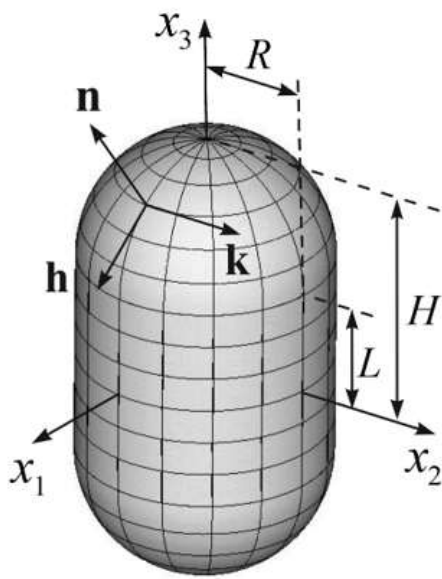


Рис. 5.3. Сітка граничних елементів скінченного циліндричного волокна.

де $A i_{ij}^{(k)qsw}$, $B i_{ij}^{(k)qsw}$, $C i_{ij}^{(k)w}$ – коефіцієнти, що визначаються виразами (2.45).

Визначивши з систем (5.4) або (5.5) дискретні значення переміщень поверхні включення, а також нормальних зусиль і стрибків дотичних переміщень на поверхні розділу середовищ, можна обчислити компоненти тензора напружень у матриці і включенні. Для цього необхідно підставити згадані величини у формули (2.11) з урахуванням введення нових контактних змінних в глобальній системі координат:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \delta_{1k} \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) + \frac{(-1)^k}{1 - \nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_S D_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) n_m t_n(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \frac{(-1)^{k+1} G_k}{1 - \nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_S L_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \times \\
& \times \left[u_m^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) + \delta_{1k} \Delta u_m(\boldsymbol{\eta}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Тут функції $D_{ijm}^{(k)}$ з порядком особливості $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-2}$ і функції $L_{ijm}^{(k)}$ з порядком особливості $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-3}$ подані в (2.12).

Як приклад, розглянемо усесторонній стиск зусиллями σ_0 матриці з

включенням у формі скінченного циліндричного волокна, обмеженого елементами сферичних і циліндричних поверхонь (рис. 5.3) з радіусом R , повною довжиною $2H$. Тоді довжина циліндричної його частини буде $2L = 2H - 2R$. В глобальній системі координат поверхня S задається як:

$$S = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2, & |x_3| \leq H - R; \\ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - H + R)^2 = R^2, & H - R < |x_3| \leq H, \end{cases}$$

Для усестороннього стиску основне поле переміщень $u_i^{(0)}$ в правій частині ГР буде визначатися виразом

$$u_i^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\sigma_0}{G_1} \frac{1 + 2\nu_1}{2(1 + \nu_1)}.$$

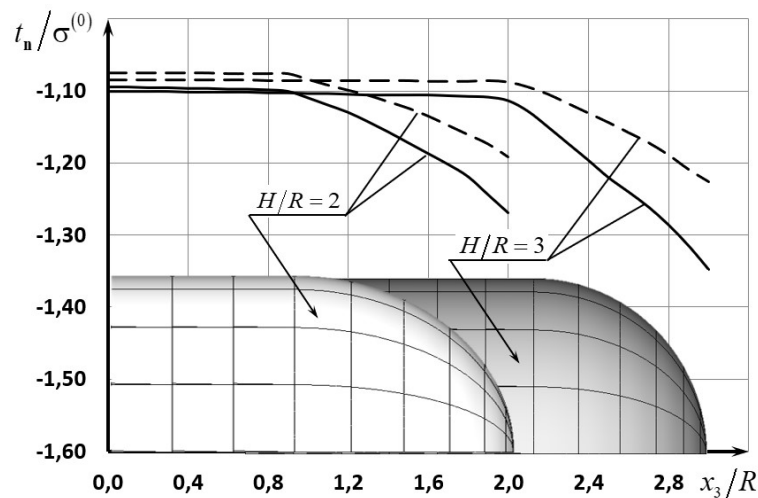


Рис. 5.4. Зміна нормованих нормальних до міжфазної поверхні зусиль вздовж висоти скінченного циліндричного волокна за умови його ковзного контакту з матрицею.

При обчисленнях прийнято $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$. На рис. 5.4 – 5.7 показано залежність нормованих значень контактних зусиль (рис. 5.4) і стрибків полярних (рис. 5.5) та азимутальних (рис. 5.6) дотичних переміщень на міжфазній поверхні вздовж висоти включення для геометричного параметра $H/R = 2$ і $H/R = 3$.

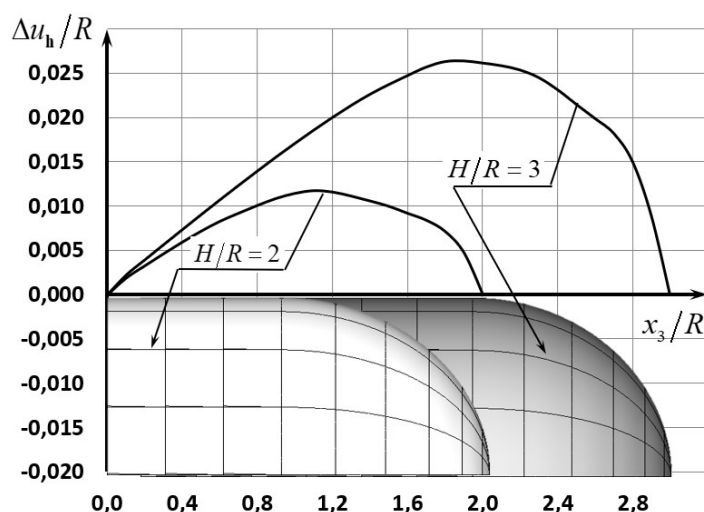


Рис. 5.5. Зміна нормованих полярних стрибків переміщень вздовж висоти скінченного циліндричного волокна за умови його ковзного контакту з матрицею.

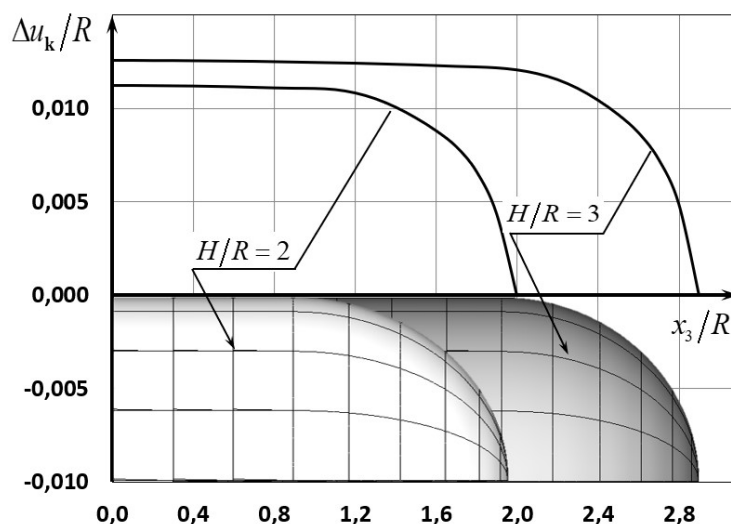


Рис. 5.6. Зміна нормованих азимутальних стрибків переміщень вздовж висоти скінченного циліндричного волокна за умови його ковзного контакту з матрицею.

На рис. 5.7 показано залежності нормальних напружень $\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$ в поперечному перерізі включення ($x_3 = 0$) вздовж осі Ox_1 для волокон різної відносної довжини ($H/R = 2$; $H/R = 3$ і $H/R = 3$). На рис. 5.8 показані залежності максимальних нормованих значень тих же напружень від нормованої довжини включення H/R для різної відносної жорсткості складових гетерогенного тіла ($G_2/G_1 = 10$ і $G_2/G_1 = 50$). Суцільні криві відповідають випадку ковзного кон-

такту між включенням і матрицею, а штрихові – ідеального механічного між-
фазного контакту.

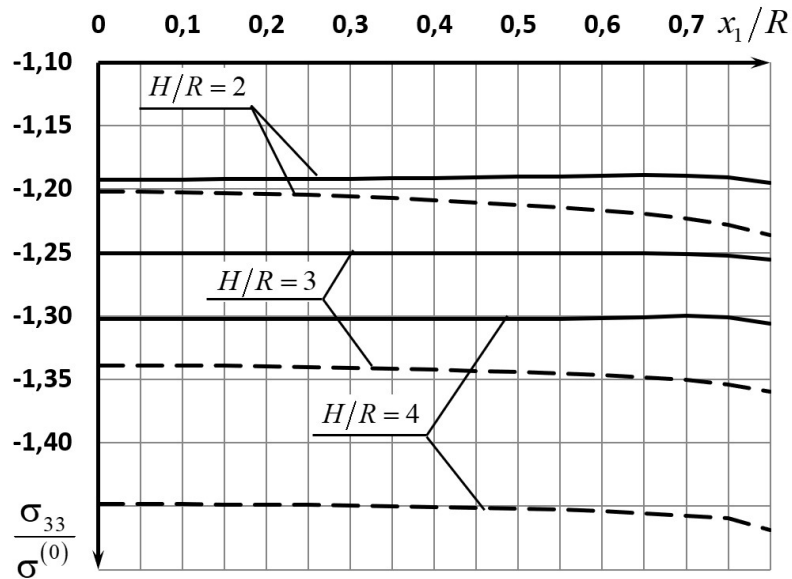


Рис. 5.7. Зміна нормованих напружень вздовж радіусу поперечного перерізу скінченного циліндричного волокна різної відносної довжини за умови його ковзного контакту з матрицею.

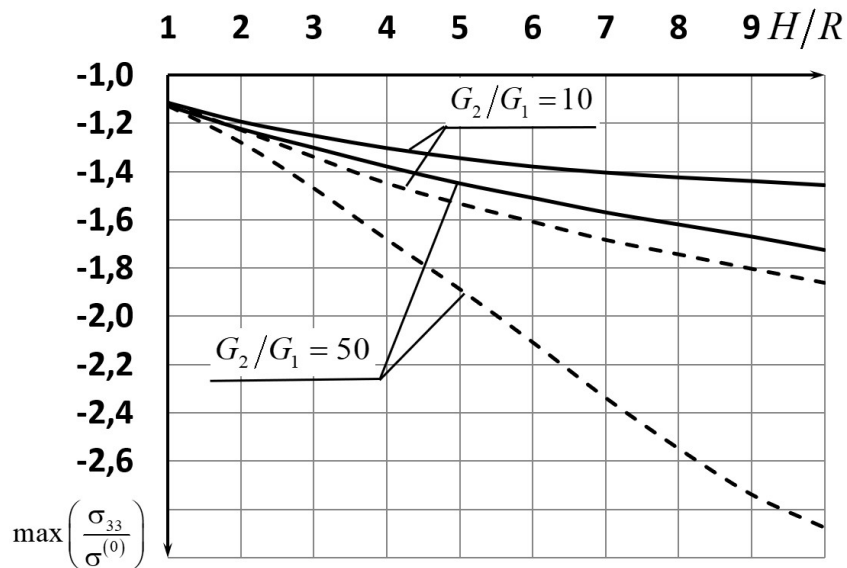


Рис. 5.8. Залежність максимальних нормованих напружень від відносної довжини скінченного циліндричного волокна різної відносної жорсткості за умови його ковзного контакту з матрицею.

Задовільної точності розрахунків в межах 0,5 % розбіжності результатів при згущенні дискретизаційної сітки вдалося досягти, використовуючи покриття поверхні S 512 граничними елементами. В табл. 5.1, для різної чисельності використаних граничних елементів, приведені значення нормальних

напружень $\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$ і $\sigma_{11}/\sigma^{(0)}$ в центрі включення з геометричним параметром $H/R = 2$ і відносною жорсткістю $G_2/G_1 = 10$ для ілюстрації збіжності отриманих результатів. З метою контролю точності задоволення граничних умов, наведені також відносні значення стрибка переміщень на полюсі включення, які внаслідок симетрії в цій точці повинні бути рівні нулю.

Таблиця 5.1. Збіжність результатів при згущенні сітки обчислення напружень всередині включення за умови його ковзного контакту з матрицею

Число елем.	480	360	288	216	192	144
$\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$	-1.192369	-1.189312	-1.198138	-1.187521	-1.201534	-1.186677
$\sigma_{11}/\sigma^{(0)}$	-1.081506	-1.086179	-1.079360	-1.088751	-1.076674	-1.091078
$\Delta u_r/R$	0.000009	0.000014	0.000031	0.000059	0.000072	0.000139

Достовірність запропонованого методу перевірялася також на двох модельних задачах. Розв'язання задачі про всебічне стиснення пружного простору з кульовим включенням, коли $H = R$ дає результат, що збігається з відомим аналітичним розв'язком Ешелбі аналогічної задачі за умови ідеального механічного контакту між матрицею і включенням [270]. Другий показовий приклад реалізується у випадку чистого кручення відносно осі Ox_3 пружного простору з розглянутим циліндричним включенням, коли внаслідок проковзування на включення не передаються зусилля. Числові результати також підтверджують відсутність деформації включення у цьому випадку.

5.2. Поширення граничноелементних схем аналізу на модель тонкого міжфазного прошарку між об'ємним включенням і матрицею

На поверхні контакту наповнювача та матриці в процесі тривалої експлуатації двокомпонентного пружного композиту внаслідок хімічної реакції між його матеріалами може утворюватися тонкий пружний шар, механічні ха-

рактеристики якого відмінні від механічних характеристик включень та матриці. Інколи створення такого тонкого пружного шару на міжфазних поверхнях ініціюють штучно в процесі виготовлення композиту методами іонної імплантації або термічного осадження з метою кращого зчеплення між включеннями і матрицею та запобігання відшаруванням.

Розглядати такий шар як третій пружний компонент гетерогенного середовища недоцільно через його малу товщину порівняно з розмірами включень. З іншого боку зовсім ігнорувати наявність тонкого міжфазного шару на пружну рівновагу об'ємних включень також не можна через суттєвий його вплив на напружений стан включень при транспортуванні навантажень з матриці композиту, що також впливає на визначення ефективних модулів пружності композиту методами гомогенізації середовища. Зважаючи на складну топологічну форму включень та суттєву різницю між товщиною міжфазного шару і геометричними розмірами включень, очевидну перевагу при побудові тривимірної математичної моделі такої задачі мають числові методи, базовані на двовимірній дискретизації поверхонь досліджуваних об'єктів.

Розглянемо пружне ізотропне безмежне тіло (матрицю) Ω_1 з механічними пружними характеристиками G_1 (модулем зсуву) та ν_1 (коефіцієнтом Пуассона). Нехай матриця містить тривимірне пружне ізотропне включення Ω_2 довільної форми, обмежене гладкою поверхнею (рис. 5.9). Модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона включення позначимо відповідно G_2 та ν_2 . Нехай між матрицею і включенням існує тонкий шар пружного матеріалу товщиною h_0 , що характеризується пружними сталими G_0 та ν_0 .

Будемо враховувати присутність тонкого прошарку виконанням на міжфазній поверхні S крайових умов $\mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$ (неперервної передачі через нього зусиль) і існуванням розривів $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$ (компоненти вектора переміщень допускають стрибок, який відповідає величині абсолютної деформації міжфазного шару у відповідних напрямках).

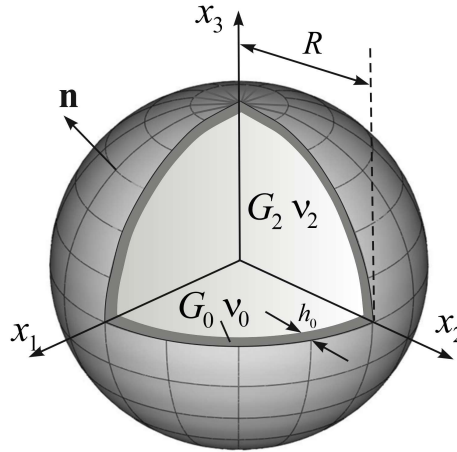


Рис. 5.9. Кульове включення з міжфазним шаром.

Припускається модель податливого матеріалу міжфазного прошарку, коли стрибки переміщень пропорційні до напружень, що виникають у ньому. Тоді крайові умови на міжфазній поверхні будуть:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}) = f \Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{x}); \quad \mathbf{t}_\tau(\mathbf{x}) = g \Delta \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (5.7)$$

де індексом $\mathbf{n}$ позначено величини, що направлені вздовж нормалі до поверхні S , а індексом τ – величини, що направлені по дотичній до цієї поверхні, f і g – відомі приведені коефіцієнти жорсткості прошарку. Враховуючи залежність між зусиллями і переміщеннями в локальній та глобальній системах координат, вирази (5.7) можна записати таким чином:

$$t_j(\mathbf{x}) = f \Delta u_j(\mathbf{x}) + (g - f) n_j \sum_{k=1}^3 n_k \Delta u_k(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1,3} \quad (5.8)$$

де n_j , $j = \overline{1,3}$ – компоненти вектора нормалі до поверхні включення. Зі співвідношень (5.8) отримаємо стрибки переміщень на міжфазній поверхні:

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{f} t_j(\mathbf{x}) + \frac{f - g}{f g} n_j \sum_{k=1}^3 n_k t_k(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1,3}. \quad (5.9)$$

В матричній формі співвідношення (5.9) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{f g} \begin{pmatrix} f n_1^2 + g(n_2^2 + n_3^2) & (f - g)n_1 n_2 & (f - g)n_1 n_3 \\ (f - g)n_1 n_2 & f n_2^2 + g(n_1^2 + n_3^2) & (f - g)n_2 n_3 \\ (f - g)n_1 n_3 & (f - g)n_2 n_3 & f n_3^2 + g(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Якщо припустити, що міжфазний шар деформується як тонка пружна оболонка, то

$$t_n = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} (\varepsilon_n + \nu_0 \varepsilon_\tau); \quad t_\tau = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \gamma_{n\tau}.$$

Нехтуючи лінійною деформацією в кутовому напрямку $\varepsilon_\tau \approx \frac{u_\tau}{R}$ і приймаючи $\varepsilon_n \approx \frac{\Delta u_n}{h}$ та $\gamma_{n\tau} \approx \frac{\Delta u_\tau}{h}$, визначимо константи f і g через механічні характеристики міжфазного шару та його товщину:

$$f = \frac{2G_0}{h_0(1 - \nu_0)}; \quad g = \frac{G_0}{h_0}.$$

Позначимо через $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\{\sigma^{(0)}(\mathbf{x})\}$ пружне поле переміщень та напружень, що виникає під дією навантаження N в однорідному безмежному тілі з механічними характеристиками матриці.

Інтегральне подання компонент вектора переміщень в точках включення і матриці визначаються виразами (2.3). Розглядаючи пружну рівновагу матриці та включення за граничного переходу точки поля до поверхні S з обох боків міжфазного шару та беручи до уваги крайові умови і граничні властивості ядер (2.5), отримаємо систему ГІР відносно переміщень і зусиль в точках міжфазної поверхні:

$$\frac{1}{2} u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0; \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\frac{1}{2}u_i^{(1)}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S.$$

Враховуючи, що

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} + \Delta u_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (5.10)$$

будемо мати:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0; \\ & \frac{1}{2}u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\Delta u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \Delta u_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \\ & + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Систему рівнянь (5.11) перетворимо до слабосингулярного виду за методикою (2.7).

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left[u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_j^{(2)}(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0; \\ & u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \Delta u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left[u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_j^{(2)}(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \times \\ & \times \left[\Delta u_j(\boldsymbol{\eta}) - \Delta u_j(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Підставимо в рівняння (5.12) вирази стрибків переміщень на міжфазній поверхні. Після перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left[u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) - u_j^{(2)}(\mathbf{x}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0; \\
& u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 u_j^{(2)}(\mathbf{x}) \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 Q_{ij}^*(\mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \\
& \mathbf{x} \in S, \quad i = \overline{1, 3},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

де функції

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^*(\mathbf{x}) = & \frac{1}{f g} \left[g \delta_{ij} + (f - g) n_i n_j + (g + (f - g) n_j^2) \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \right. \\
& \left. + (f - g) n_j \sum_{k=1}^3 n_k \iint_S T_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S \right]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

та інтеграли з ядрами

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{f g} \left[(g + (f - g) n_j^2) T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + (f - g) n_j \sum_{k=1}^3 n_k T_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \right] \tag{5.15}$$

характеризують вплив міжфазного шару на напружено-деформований стан включення та матриці.

Отримана система рівнянь (5.13) є більш загальним випадком системи ГІР (2.8) задачі про ідеальний контакт між об'ємним пружним включенням та пружною матрицею. Умови ідеального контакту включення з матрицею можна отримати, спрямувавши константи g і f до нескінченості, що відповідає або нульовій товщині міжфазного шару або абсолютній його жорсткості.

Систему сингулярних інтегральних рівнянь (5.13) пропонується

розв'язувати шляхом апроксимації міжфазної поверхні S компактною неперервною сіткою N чотирикутних восьмивузлових і трикутних шестивузлових суперпараметричних криволінійних елементів S^q ($q = \overline{1, N}$) та заміни інтегралів по поверхні S сумою інтегралів по граничних елементах S^q , відображених на плоску область квадратної або трикутної форми залежно від типу елемента з застосуванням апроксимації по всіх його вузлах (Додаток А).

Інтерполяцію шуканих функцій здійснюємо через їх значення в кутових (опорних) вузлах елемента наступним чином

$$u_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} u_{j,2s-1}^{(2)} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2), \quad t_j(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^{N_q} t_{j,2s-1} M_s^{\langle N_q \rangle}(\xi_1, \xi_2) \quad i = \overline{1, 3}.$$

де N_q – кількість опорних вузлів граничного елемента; $M_s^{\langle N_q \rangle}$ – інтерполяційні функції залежні від форми граничного елемента (див. Додаток А).

Алгоритм дискретизації системи ГР (5.13) аналогічний до описаного вище і для сітки суперпараметричних граничних елементів відбувається за схемою (2.21) – (2.27). Методом колокацій зводимо задачу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень зусиль та переміщень у вузлах поверхні S :

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(2)w} u_j^{(2)w} + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(2)qsw} u_j^{(2)v(q,2s-1)} - B_{ij}^{(2)qsw} t_j^{v(q,2s-1)} \right] = 0; \\ & u_i^{w(2)} + \sum_{j=1}^3 \left(C_{ij}^{(1)w} u_j^{(2)w} + D_{ij}^w t_j^w \right) - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(1)qsw} u_j^{(2)v(q,2s-1)} - \left(B_{ij}^{(1)qsw} - F_{ij}^{qsw} \right) t_j^{v(q,2s-1)} \right] = \\ & = u_i^{(0)}(\mathbf{x}^w), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x}^w \in S, \quad w = \overline{1, L_2}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

де L_2 – загальна кількість опорних вузлів сітки граничних елементів; функція

$v(q, 2s - 1)$, $s = \overline{1, N_q}$ визначає глобальний номер опорного вузла по номеру граничного елемента, до якого він належить і локальному номеру опорного вузла всередині граничного елемента; $A_{ij}^{(k)qsw}$, $B_{ij}^{(k)qsw}$, $C_{ij}^{(k)w}$ – коефіцієнти, що визначаються виразами (2.29);

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^w = & \left(\sqrt{3} \right)^{N_q - 4} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w \neq v(q, 2s-1)}}^{L_1} \sum_{l=1}^{N_q} \mathcal{Q}_{ij}^* \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l) - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q - 4} \sum_{s=1}^{N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w = v(q, 2s-1)}}^{L_1} \sum_{r=1}^{N_q-2} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \mathcal{Q}_{ij}^* \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_m)) \right) \times \\
 & \times J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1 + \gamma_l), \quad k = 1, 2; w = \overline{1, L_2}; q = \overline{1, L_q}; s = \overline{1, N_q}; \\
 F_{ij}^{qsw} = & \begin{cases} \text{для } w \neq v(q, 2s - 1), s = \overline{1, N_q} \\ \left(\sqrt{3} \right)^{N_q - 4} \sum_{l=1}^{N_q} \mathcal{Q}_{ij} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) M_s^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l); \\ \text{для } w = v(q, 2s - 1), s = \overline{1, N_q} \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q - 4} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 \mathcal{Q}_{ij} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{v(q, 2s-1)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_m)) \right) \times \\ \times M_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_m)) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_m)) (1 + \gamma_l). \end{cases} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

У випадку застосування ізопараметричних граничних елементів для дискретизації системи ГПР (5.13), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(2)w} u_j^{(2)w} + \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(2)qsw} u_j^{(2)v(q,s)} - B_{ij}^{(2)qsw} t_j^{v(q,s)} \right] = 0; \\
 & u_i^{w(2)} + \sum_{j=1}^3 \left(C_{ij}^{(1)w} u_j^{(2)w} + D_{ij}^{ww} t_j^w \right) - \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(1)qsw} u_j^{(2)v(q,s)} - \left(B_{ij}^{(1)qsw} - F_{ij}^{qsw} \right) t_j^{v(q,s)} \right] = \\
 & = u_i^{(0)} (\mathbf{x}^w), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x}^w \in S, \quad w = \overline{1, L_2}, \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

де $Ai_{ij}^{(k)qsw}$, $Bi_{ij}^{(k)qsw}$, $Ci_{ij}^{(k)w}$ – коефіцієнти визначаються виразами (2.45);

$$\begin{aligned}
 Di_{ij}^{(k)w} = & \left(\sqrt{3} \right)^{N_q-4} \sum_{s=1}^{2N_q} \sum_{\substack{q=1 \\ w \neq \nu(q,s)}}^{L_1} \sum_{l=1}^{N_q} Q_{ij}^* \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l; \xi_2^l) \right) \left| J^{(q)} (\xi_1^l; \xi_2^l) \right| - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \times \\
 & \times \sum_{\substack{s=1 \\ s \in 2\mathbf{Z}+1}}^{2N_q-1} \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 Q_{ij}^* \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l) - \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{\substack{s=1 \\ s \in 2\mathbf{Z}}}^{2N_q} \sum_{q=1}^{L_1} \sum_{r=2N_q-3}^{3N_q-5} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 Q_{ij}^* \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) 2^{\delta_{r6}} (-1)^{r+1} \times \\
 & \times J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l).
 \end{aligned}$$

$$Fi_{ij}^{(k)qsw} = \begin{cases} \text{для } w \neq \nu(q,s), s = \overline{1, 2N_q} \\ \left(\sqrt{3} \right)^{N_q-4} \sum_{l=1}^{N_q} Q_{ij} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) \right) R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi_1^l, \xi_2^l) J^{(q)} (\xi_1^l, \xi_2^l); \\ \text{для } w = \nu(q,s), s = 1, 3, \dots, 2N_q - 1 \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{r=N_q-3}^{2(N_q-3)} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 Q_{ij} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times \\ \times R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l); \\ \text{для } w = \nu(q,s), s = 2, 4, \dots, 2N_q \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N_q-4} \sum_{r=2N_q-3}^{3N_q-5} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 Q_{ij} \left(\mathbf{x}^w, \sum_{m=1}^{2N_q} x_m^{\nu(q,s)} R_m^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) \right) \times \\ \times R_s^{\langle N_q \rangle} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) 2^{\delta_{r6}} (-1)^{r+1} J^{(q)} (\xi^{(r)}(\gamma_l; \gamma_p)) (1 + \gamma_l), \end{cases}$$

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (5.16) або (5.18) дозволяє визначити дискретні значення векторів переміщень та зусиль на поверхні включення в опорних вузлах сітки граничних елементів. Аналогічні значення на поверхні матриці знаходимо з (5.10), враховуючи вирази (5.9).

Напруження всередині і ззовні включення через отримані величини визначаємо за формулами:

$$\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \delta_{1k} \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) + \frac{(-1)^k}{1-\nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_S D_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_m(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \frac{(-1)^{k+1} G_k}{1-\nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_S L_{ijm}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \times \\ \times \left[u_m^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) + \delta_{1k} \Delta u_m(\boldsymbol{\eta}) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} S, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad k = 1, 2, \quad (5.19)$$

де функції $D_{ijm}^{(k)}$ та $L_{ijm}^{(k)}$ задаються виразами (2.12).

Для покращення точності визначення напружень біля міжфазної поверхні їх вирази потрібно регуляризовувати за схемою (2.30) – (2.31).

Вищевикладеною методикою обчислено напруження в матриці при навантаженні композиту постійними розтягуючими зусиллями, прикладеними на безмежності вздовж осі x_3 : $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma_0 = \text{const}$. Поле переміщень, що виникає при такому навантаженні в безмежному пружному тілі, задається виразом (2.46).

Для розрахунків вибрано скло-епоксидний композит з наступними механічними характеристиками його компонент: $G_1 = 1,3 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,22$ (для матриці); $G_2 = 30 \text{ ГПа}$, $\nu_2 = 0,35$ (для включення); $\nu_0 = 0,3$ (для міжфазного шару). Товщину міжфазного шару приймаємо рівною $h_0 = 0,01 R$, де R - радіус поперечного перерізу включення.

На рис. 5.11 подано значення зведених нормальних напружень $\sigma_{33}^{(1)}/\sigma_0$ у матриці в околі пружного включення сфероциліндричної форми (рис. 10) вздовж осі x_3 при $x_1 = x_2 = 0$. Співвідношення між модулями зсуву міжфазного шару та матриці приймаємо $G_0/G_1 = 0,4$ - крива 1; $G_0/G_1 = 0,3$ - крива 2; $G_0/G_1 = 0,2$ - крива 3; $G_0/G_1 = 0,1$ - крива 4. Співвідношення піввисоти та радіусу поперечного перерізу сфероциліндричного включення приймемо рівним $H/R = 5$.

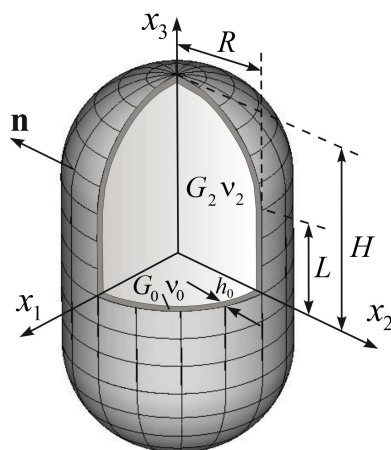


Рис. 5.10. Сфероциліндричне включення з міжфазним шаром.

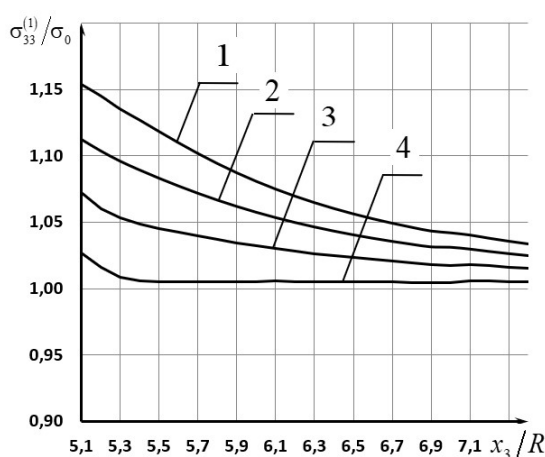


Рис. 5.11. Залежність нормованих напружень зовні сфероциліндричного включення вздовж напрямку розтягу композиту.

Слід відзначити, що за розгляду навантаження тіла з циліндричним включенням та прошарком у площині $x_1 O x_2$ та за відносно великого видовження $H/R > 20$ числові результати наближаються до розв'язку плоскої задачі з безмежним волокном та прошарком [196].

5.3. Вплив недосконалого міжфазного контакту на взаємодію скінченного волокна із тріщиною

Тривимірний напружений стан в околі контуру тріщин зазнає значних змін у випадку наявності поблизу об'ємних пружних включень складної топологічної форми. Як зазначалося в розділі 3, локальна концентрація напружень і, як наслідок, ймовірність поширення тріщини в тому чи іншому напрямку

залежить від жорсткісної контрастності між матеріалами матриці, що містить тріщину, і наповнювача. Ще одним чинником, який суттєво впливає на КІН в точках контуру матричних тріщин є характер міжфазного контакту в композиті. Порушення ідеальних механічних умов зчеплення включення з матрицею може помітно підсилити або навпаки нівелювати його вплив на сусідні тріщини. Тому з практичної точки зору дослідження взаємодії плоских матричних тріщин з об'ємними пружними включеннями за умов ковзного контакту на міжфазній поверхні має окрему актуальність.

Розглянемо плоску тріщину з поверхнею S^C та ізотропне пружне включення, поверхню якого позначимо через S^F в безмежному пружному просторі (рис. 5.12). Опис полів напружень та деформацій за довільного взаємного розташування досліджуваних об'єктів необхідно здійснювати в двох системах координат: $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ з початком в центрі тріщини так, що площина $x_3 = 0$ співпадає з площиною тріщини та $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ з початком в центрі включення. Механічні характеристики складових гетерогенного тіла позначимо через G_k, ν_k ($k = 1$ для матриці та $k = 2$ для включення). Нехай має місце ковзний контакт між матрицею та включенням, що описується співвідношеннями (5.1) на міжфазній поверхні S_F «матриця-включення». Напружено-деформований стан у композитному матеріалі зумовлений навантаженням на безмежності, яке характеризується компонентами вектора переміщень u_1^0, u_2^0, u_3^0 в матеріалі однорідної матриці, за відсутності тріщини та включення в системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$. Поверхні тріщини S^C , не навантажені і в точках цих поверхонь виконуються умови (4.16).

Взаємне розташування включення та тріщини у тілі будемо визначається наступними величинами: віддаллю між центрами тріщини і включення d ; напрямними косинусами e_{j2} та e_{j1}^* ($j = \overline{1,3}$) векторів $\mathbf{d}_2$ та $\mathbf{d}_1$ точок O_2 та O_1 в системах координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ та $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ відповідно; косинусами кутів

$O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$, отримаємо компоненти поля напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$ в матриці ($k=1$) та включенні ($k=2$):

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) = & (-1)^k \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_F} \left[D_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi) l_{s3} l_{mi} t_j^{(k)}(\xi) - L_{smj}^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^F) l_{s3} l_{mi} u_j^{(k)}(\xi) \right] d_\xi S + \\ & + \frac{G_1}{1-\nu_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} K_{ij11}(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S + \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{jm}^0(\mathbf{x}) l_{ji} l_{m3}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

де σ_{jm}^0 – компоненти тензора напружень в системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$, що пов’язані законом Гука з полем переміщень $\mathbf{u}^0$, фундаментальні розв’язки другого порядку $D_{smj}^{(k)}$, $L_{smj}^{(k)}$ та K_{ij11} , вирази для яких подані у (2.12) та (3.15).

Подання (5.20) та (5.21) використаємо для граничного переходу до точок поверхні включення з метою задоволення умов ковзного контакту і поверхні тріщини. Зокрема, в точці $\mathbf{x}_{22}$ на міжфазній поверхні S_F у системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$ граничний перехід представлень (5.20) після часткової регуляризації сингулярних інтегралів (2.7) дає змогу отримати шість граничних інтегральних рівнянь у переміщеннях:

$$\begin{aligned} & u_i^{(2)}(\mathbf{x}_{22}) + h_i(\mathbf{x}_{22}) \Delta u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_{22}) + k_i(\mathbf{x}_{22}) \Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_{22}) - \iint_{S_F} T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) \times \\ & \times \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_j^{(2)}(\mathbf{x}_{22}) \right] d_\xi S + \left[h_j(\mathbf{x}_{22}) \Delta u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_{22}) + k_j(\mathbf{x}_{22}) \Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_{22}) \right] \times \\ & \times \iint_{S_F} T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) d_\xi S - \iint_{S_F} T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) \left[h_j(\xi) \Delta u_{\mathbf{h}}(\xi) + k_j(\xi) \Delta u_{\mathbf{k}}(\xi) \right] d_\xi S + \\ & + \sum_{j=1}^3 \iint_{S_F} U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) n_j^F(\xi) t_{\mathbf{n}}(\xi) d_\xi S - \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} \Omega_{ij21}(\mathbf{x}_{21}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_\xi S = u_i^{(0)}(\mathbf{x}_{22}), \\ & \sum_{j=1}^3 \left[\iint_{S_F} T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_i^{(2)}(\mathbf{x}_{22}) \right] d_\xi S - \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}_{22}, \xi) n_j^F(\xi) t_{\mathbf{n}}(\xi) d_\xi S \right] = 0; \end{aligned}$$

$$i = \overline{1,3}, \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{21} \in S_F, \quad (5.22)$$

де $\mathbf{x}_{21}$ – це точка $\mathbf{x}_{22}$, координати якої подані в системі координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$
 $x_{j21} = e_{j2} d_2 + \sum_{i=1}^3 l_{ij} x_{i22}$; $\Delta u_{\mathbf{h}}$ і $\Delta u_{\mathbf{k}}$ – стрибки дотичних до міжфазної поверхні
 переміщень вздовж ортів, ортогональних до нормалі $\mathbf{n}^F$ в точці поля або точці
 інтегрування.

Здійснимо граничних перехід до точки $\mathbf{x}_{11}$ на поверхні тріщини S_C у си-
 стемі координат $O_1 x_{11} x_{21} x_{31}$ підставивши подання (5.21) в крайові умови (4.16)
 та отримаємо три інтегральні сингулярні рівняння у напруженнях:

$$\begin{aligned} & - \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{S_F} \left[D_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi) l_{s3} l_{mi} n_j^F(\xi) t_{\mathbf{n}}(\xi) - L_{smj}^{(1)}(\mathbf{x}_{12}, \xi, \mathbf{n}^F) l_{s3} l_{mi} (u_j^{(2)}(\xi) + \Delta u_j(\xi)) \right] d_{\xi} S + \\ & + \frac{G_1}{1-\nu_1} \sum_{j=1}^3 \iint_{S_C} K_{ij11}(\mathbf{x}_{11}, \xi, \mathbf{n}^C) \alpha_j(\xi) d_{\xi} S = - \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{jm}^0(\mathbf{x}) l_{ji} l_{m3}, \quad \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12} \in S_C. \end{aligned} \quad (5.23)$$

де $\Delta u_i = h_i \Delta u_{\mathbf{h}} + k_i \Delta u_{\mathbf{k}} \quad (i = \overline{1,3})$; $\mathbf{x}_{12}$ – це точка $\mathbf{x}_{11}$, координати якої подані в
 системі координат $O_2 x_{12} x_{22} x_{32}$, $x_{j12} = e_{j1}^* d_1 + \sum_{i=1}^2 l_{ij} x_{i11}$.

Система рівнянь (5.22), (5.23) є замкнутою повною системою дев'яти ГІР
 дуального типу відносно переміщень поверхні включення $u_j^{(2)} \quad (j = \overline{1,3})$, нор-
 мальних до поверхні включення зусиль $t_{\mathbf{n}}$, стрибків дотичних до міжфазної
 поверхні переміщень $\Delta u_{\mathbf{h}}$ і $\Delta u_{\mathbf{k}}$, а також $\alpha_j \quad (j = \overline{1,3})$ стрибків переміщень на
 поверхні тріщини. Вплив розкриття тріщини на напружений стан об'ємного
 пружного включення визначається регулярними інтегралами по поверхні S_F
 у (5.22), а вплив наявності включення на КІН на розкриття тріщини – регуля-
 рними інтегралами по поверхні S_F у рівняннях (5.23).

Дискретизація системи ГІР (5.22), (5.23) методом граничних елементів

описана в п. 2.2 із застосуванням сітки суперпараметричних граничних елементів на поверхні включення та в п. 3.1 із застосуванням колокаційного методу на поверхні тріщини. Інтеграли, що входять в систему ГР замінюємо на суму інтегралів по поверхнях граничних елементів міжфазної області контакту або на суму інтегралів по областях навколо колокаційних точок поверхні тріщини. Невідомі функції апроксимуються через їх значення у опорних (кутових) вузлах граничних елементів після чого регулярні інтеграли по поверхні граничного елемента обчислюємо за формулами (2.21), (2.22). Сингулярні інтеграли по поверхні граничного елемента на міжфазній поверхні регуляризуємо і обчислюємо за формулами (2.7), (2.24), (2.27). Гіперсингулярні інтеграли по області тріщини S_C регуляризуємо за формулами (3.21) з врахуванням процедури неявного подання особливості стрибків переміщень на контурі області тріщини (3.12). Таким чином, дискретним аналогом системи ГР (5.22), (5.23) буде система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканих функцій у опорних вузлах сітки граничних елементів на міжфазній поверхні і колокаційних точках на поверхні тріщини.

Оскільки метою цього дослідження є виявлення впливу неідеальних міжфазних контактних умов на концентрацію напружень в околі контуру тріщини, то у числових розрахунках через знайдені в колокаційних точках значення функцій розкриття тріщини обчислимо КІН на контурі тріщини.

Розглянемо одновісне постійне розтягувальне навантаження N_0 , прикладене не безмежності до матриці, що містить включення сфероциліндричної форми та плоску тріщину, що розташована в площині серединного поперечного перерізу включення (рис. 5.13). Нехай навантаження в матриці діє вздовж осі включення і перпендикулярно до площини тріщини, викликаючи її нормальне розкриття. Отже, в даному випадку ненульовим буде лише КІН першої моди, який обчислимо за формулою (3.29). Як і в п.3.2, отримані залежності КІН на контурі тріщини будемо представляти в нормалізованій формі $\bar{K}_I = K_I / K_I^*$, де $K_I^* = 2N_0\sqrt{a/\pi}$ – КІН плоскої кругової тріщини радіуса a в безмежному

просторі з механічними характеристиками матриці при аналогічному навантаженні.

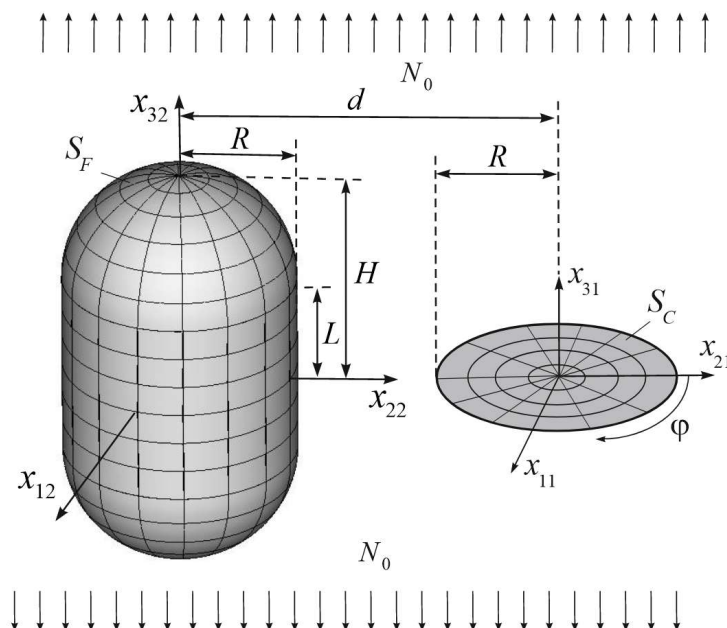


Рис. 5.13. Схема навантаження пружного простору з сфероциліндричним волокном та круговою тріщиною та покриття їх поверхонь сіткою граничних елементів.

За такого розташування взаємодіючих об'єктів дослідження величини напрямних косинусів між локальними системами координат задаватимуться таблицею 3.3, а величини $e_{12} = 0$; $e_{22} = -1$; $e_{32} = 0$; $e_{11}^* = 0$; $e_{21}^* = 1$; $e_{31}^* = 0$ визначатимуть розміщення тріщини відносно включення.

Для виявлення ефектів впливу ковзного контакту на міжфазній поверхні порівняно з ідеальними механічними умовами контакту здійснимо розрахунки для аналогічних до п.3.2 топологічних форм і геометричних розмірів включення і тріщини та механічних характеристик складових гетерогенного тіла, а саме: коефіцієнти Пуассона матриці та включення приймаються рівними $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$; співвідношення модулів зсуву приймаємо $G = G_2/G_1 = 10$ (м'яке включення) і $G = G_2/G_1 = 0,1$ (тверде включення); загальна довжина сфероциліндричного включення рівна H , а довжина його циліндричної частини становить $H - 2R$; радіус напівсфер заокруглення нижнього та верхнього торця включення співпадає з радіусом тріщини $a = R$ (рис. 5.13).

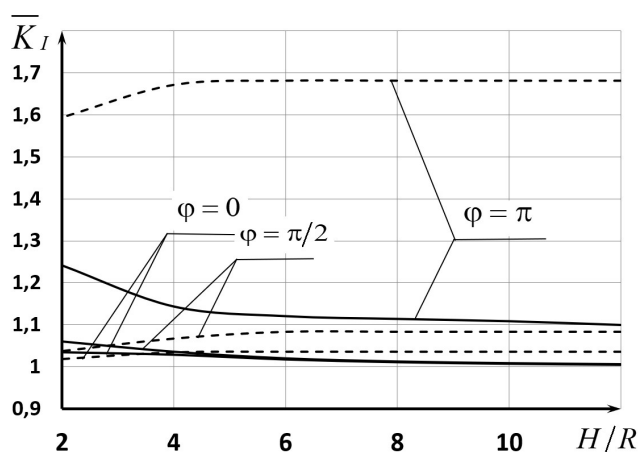


Рис. 5.14. Залежність нормалізованого КІН відриву в різних точках контуру круглої тріщини від висоти сусіднього м'якого волокна за сталої відстані між ними.

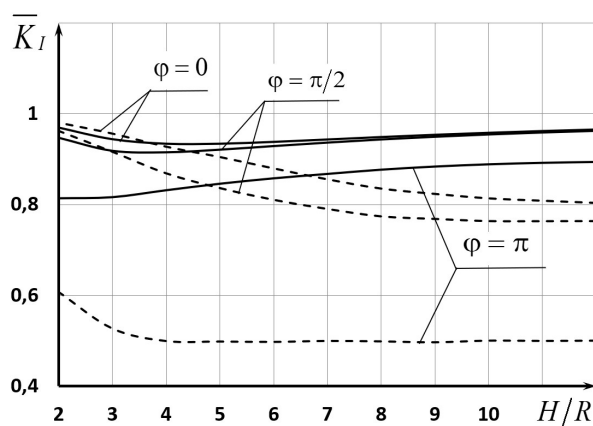


Рис. 5.15. Залежність нормалізованого КІН відриву в різних точках контуру круглої тріщини від висоти сусіднього твердого волокна за сталої відстані між ними.

На рис. 5.14 та 5.15 суцільними кривими показані залежності нормалізованого КІН на контурі області тріщини від довжини м'якого ($G = 0,1$) та твердого ($G = 10$) волокна відповідно за умови сталої відстані між центрами тріщини та включення $d = 2,1R$. Штрихові криві відповідають випадку ідеального механічного контакту для аналогічних жорсткісних характеристик включення та розташування досліджуваних об'єктів.

Обчислення проводились для точок контуру тріщини $\varphi = 0$ (дальня точка контуру області тріщини по відношенню до включення); $\varphi = \pi/2$; $\varphi = \pi$ (ближня точка контуру області тріщини по відношенню до включення), що відповідають кутовій координаті, яка відраховується від осі $O_1 x_{21}$ (рис. 5.13).

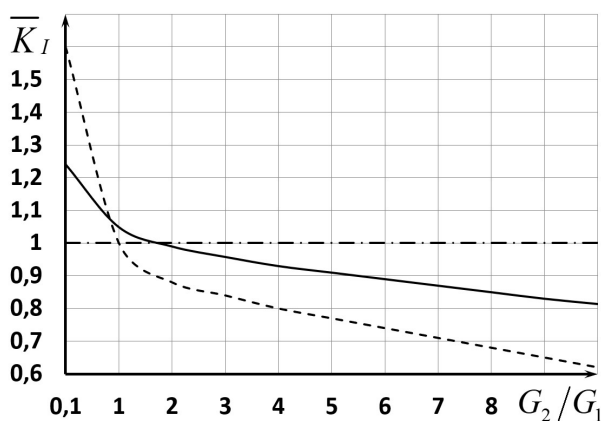


Рис. 5.16. Залежність нормалізованого КІН відриву найближчої до міжфазної поверхні точки контуру кругової тріщини від відносної жорсткості включення за сталої відстані між ними.

Залежність КІН в найближчій до міжфазної поверхні точці контуру кругової тріщини від відносної жорсткості включення у випадку ковзного контакту (суцільна крива) та ідеального механічного контакту (штрихова крива) за умови $d = 2,1R$ приведена на рис. 5.16. Штрих-пунктирна лінія відповідає випадку ізолюваної тріщини в пружному просторі з механічними характеристиками матриці.

Зауважимо, що умови міжфазного контакту не впливають на густину сітки граничних елементів, достатню для задовільної точності розв'язування задачі про пружну рівновагу об'ємного включення в безмежній матриці. Тобто отримані в даному розділі системи ГІР дозволяють користуватися сіткою граничних елементів однакової густини як для розв'язування задач про ідеальний міжфазний контакт, так і для випадку порушення взаємодії включення з матрицею.

5.4. Висновки до п'ятого розділу

Розгляд умов ковзного контакту та пружинної моделі тонкого податливого прошарку дозволяє їх неявне врахування у гранично-інтегральному формулюванні тривимірних задач з об'ємистим включенням у пружній матриці та

відрізняє алгоритм граничноелементної дискретизації стосовно задач з ідеальним контактом лише перерозподілом чи додатковим сумуванням у виразах коефіцієнтів матриці відповідних систем ліній-них алгебраїчних рівнянь.

У наведених прикладах розрахунків зафіксовано суттєве зниження (релаксацію) напружень всередині включення за рахунок міжфазного проковзування та деформативності прошарку з більш виразним проявом для видовжених волокон. Так за всебічного стиску матриці з волокном ковзний міжфазний контакт знижує нормальні напруження у серединному перерізі волокна на 10 – 40 % залежно від його відносної довжини та жорсткості. Водночас нормальні зусилля на циліндричній частині міжфазної поверхні мало залежать від характеру контакту включення з матрицею. До збільшення відносної довжини включення ці величини також нечутливі. Значне збільшення нормального тиску матриці на включення порівняно з випадком ідеального механічного контакту спостерігається лише у півсферичних торцях. Незалежно від відносної довжини включення, стрибки полярних дотичних переміщень на поверхні досягають максимуму приблизно в зоні переходу від циліндричної частини поверхні включення у сферичну. Що ж до залежності стрибків азимутальних дотичних переміщень, то в циліндричній частині поверхні включення вони незначно змінюються, і різко зменшуються на торцевих частинах його поверхні.

За розтягу епоксидної матриці зі скляним волокном, збільшення в 4 рази податливості тонкого міжфазного прошарку між ними зменшує концентрацію осьових нормальних напружень у матриці на 12-15 % залежно від товщини прошарку та відносної довжини волокна

Ковзний контакт сфероциліндричного включення з матрицею позначається на максимумах КІН в околі матричної тріщини в більшості їх збільшенням, за виключенням випадків сусідства тріщини з м'якою неоднорідністю. Вплив міжфазних дефектів структури на КІН контуру матричних тріщин помітний лише на невеликій відстані (менше радіуса поперечного перерізу включення) від міжфазної поверхні.

РОЗДІЛ 6

ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ КОМПОЗИТУ З РОЗПОДІЛЕНИМИ НЕКАНОНІЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ІДЕАЛЬНОГО ТА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ЙОГО КОМПОНЕНТ

Механічні властивості матричних композитів суттєвим чином залежать від характеристик матеріалів їх складових, об'ємної долі наповнювача, геометричної форми включень та умов їх контакту з матрицею. У цьому розділі запропоновано підхід до числового дослідження ефективних модулів пружності три-вимірних композитів з неканонічними включеннями на основі введення у гомогенізаційні співвідношення Морі-Танаки граничноелементних розв'язків для репрезентативного елемента гетерогенного середовища. Шляхом узагальнення формул Морі-Танаки на присутність у структурі розривів міжфазних переміщень аналіз поширено на композити з ковзним контактом на міжфазних поверхнях. Підхід реалізовано для коротковолокнистих композитів з впорядкованою та випадковою орієнтаціями волокон.

Матеріали розділу викладені в працях [385, 386, 390].

6.1. Використання граничноелементних розв'язків у моделях гомогенізації композитів з неканонічними включеннями та узагальнених моделях зі стрибками переміщень на міжфазних поверхнях

Розглянемо тривимірний пружний двофазний композит, що складається з ізотропної матриці і однорідно розподілених в ній однакових скінчених волокон з об'ємною концентрацією f . Орієнтація волокон можлива або впорядкована вдовж паралельних ліній (рис. 6.1), або хаотична (рис. 6.3). Окремим випадком впорядкованої схеми розташування волокон є структурно впорядкована схема, за якої волокна не лише мають спільну направленість, але і розташовані періодично на відстані d_1, d_2, d_3 одне від одного по осях Ox_1 ,

Ox_2 та Ox_3 (рис. 6.2).

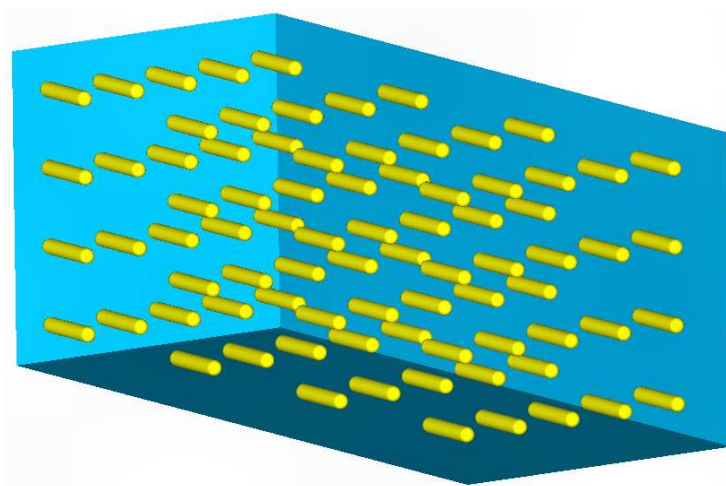


Рис. 6.1. Схема однакової орієнтації коротких волокон у композиті.

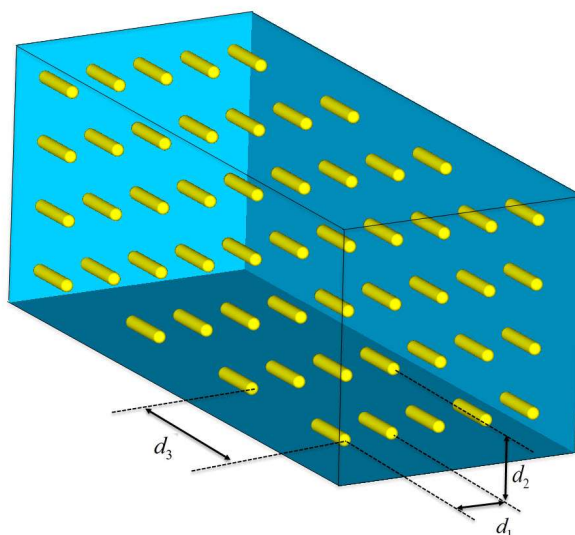


Рис. 6.2. Схема періодичного розташування коротких волокон у композиті.

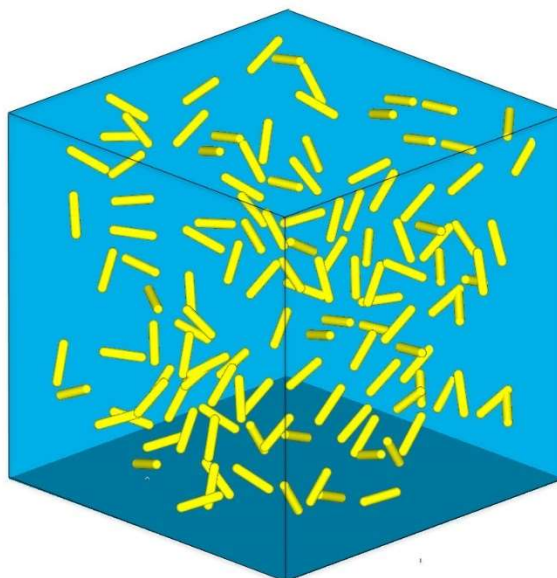


Рис. 6.3. Схема випадкової орієнтації коротких волокон у композиті.

Геометрична форма кожного волокна визначається його загальною довжиною $2H$, довжиною циліндричної частини $2L$, а також радіусом поперечного перерізу його циліндричної частини і заокруглення на кінцях, що забезпечує гладкість міжфазних поверхонь (рис. 2.15). За умови $H = R$ отримуємо частковий випадок сферичних включень. Механічні властивості композиту задаються модулями Юнга $E^{(i)}$ і коефіцієнтами Пуассона $\nu^{(i)}$ його компонент ($i = 1, 2$). Тут і надалі всі величини, що стосуються матриці, позначаємо верхнім індексом "1", а включення – індексом "2" в дужках.

Компоненти тензорів напружень і деформацій обох фаз гетерогенного середовища зв'язані лінійними залежностями закону Гука у формі згорток

$$\sigma^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \quad \text{або} \quad \sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijml}^{(k)} \varepsilon_{ml}^{(k)}, \quad i, j, m, l = \overline{1, 3}, k = 1, 2, \quad (6.1)$$

де $C_{ijml}^{(k)}$ – відомі компоненти тензора жорсткості матеріалів матриці ($k = 1$) та включення ($k = 2$), які виражаються через відповідні пружні сталі цих матеріалів.

На поверхнях розділу матриці і волокон діють умови ідеального механічного контакту, що рівносильно рівності компонент вектора переміщень $u_j^{(k)}$ ($j = \overline{1, 3}$) та зусиль $t_j^{(k)}$ ($j = \overline{1, 3}$) в точках поверхні S з боку матриці та включень.

Схема гомогенізації такого середовища за алгоритмом Морі-Танаки [380] передбачає запровадження репрезентативного об'ємного елемента (РОЕ) об'ємом V і межею ∂V , який складається з матричної фази $V^{(1)}$ та описаного вище короткого волокна об'ємом $V^{(2)}$ (тоді $f = V^{(2)}/V$, $1 - f = V^{(1)}/V$) (рис. 6.4). Припускається природня для «зовнішнього спостерігача» поведінка РОЕ як цілісного середовища з відповідними формулюваннями для усереднених по

об'єму РОЕ тензорів деформацій $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ і напружень $\langle \sigma_{ij} \rangle$ через поверхневі інтеграли [210]:

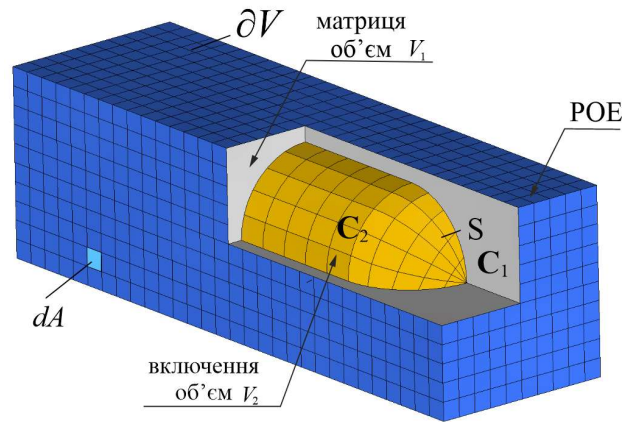


Рис. 6.4. Репрезентативний об'ємний елемент композиту (РОЕ).

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2V} \iint_{\partial V} (u_i N_j + u_j N_i) dA, \\ \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^3 \iint_{\partial V} \sigma_{ik} N_k x_j dA, \quad i, j = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (6.2)$$

де u_i і σ_{ik} – компоненти вектора переміщень і тензора напружень, N_i – компоненти зовнішньої до поверхні ∂V одиничної нормалі, dA – площа елементу поверхні ∂V , по якій ведеться інтегрування.

Фазові усереднення компонент напружено-деформованого стану

$$\langle \sigma \rangle^{(k)} = \frac{1}{V^{(k)}} \iiint_{V^{(k)}} \sigma^{(k)} dV, \quad \langle \varepsilon \rangle^{(k)} = \frac{1}{V^{(k)}} \iiint_{V^{(k)}} \varepsilon^{(k)} dV, \quad k = 1, 2,$$

пов'язані співвідношеннями

$$\langle \sigma \rangle^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} : \langle \varepsilon \rangle^{(k)}, \quad k = 1, 2.$$

Тоді за умови неперервності зусиль та переміщень на міжфазній поверхні S в РОЕ отримаємо

$$\langle \varepsilon \rangle = (1-f) \langle \varepsilon \rangle^{(1)} + f \langle \varepsilon \rangle^{(2)}, \quad \langle \sigma \rangle = (1-f) \langle \sigma \rangle^{(1)} + f \langle \sigma \rangle^{(2)}, \quad (6.3)$$

де фазові усереднення за теоремою про дивергенцію можна подати у вигляді

[210]:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(1)} = \frac{1}{2V^{(1)}} \iint_{\partial V} (u_i N_j + u_j N_i) dA - \frac{1}{2V^{(1)}} \iint_S (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS, \\
\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(2)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \iint_S (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS, \\
\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} &= \langle \sigma_{ij} \rangle^{(1)} = \frac{1}{V^{(1)}} \iint_{\partial V} \sigma_{ik} N_k x_j dA - \frac{1}{V^{(1)}} \iint_S t_i^{(1)} x_j dS, \\
\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_{ij} \rangle^{(2)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S t_i^{(2)} x_j dS.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Для РОЕ введемо ефективний тензор жорсткості $\mathbf{C}^*$ як

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad \text{або} \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijml}^* \langle \varepsilon_{ml} \rangle, \quad i, j, m, l = \overline{1, 3}, \tag{6.5}$$

для якого виконується рівність $\mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$.

Із співвідношень (6.2) випливає, що за умови наявності на межі РОЕ ∂V постійного поля деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const}$, яке викликане лінійним розподілом переміщень $u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j$, усереднені деформації будуть рівними $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ або $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$, оскільки

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \iint_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dA = \frac{1}{2V} \iint_{\partial V} (\varepsilon_{ik}^0 x_k n_j + \varepsilon_{jk}^0 x_k n_i) dA = \frac{\varepsilon_{ik}^0 \delta_{jk} + \varepsilon_{ik}^0 \delta_{jk}}{2V} \iiint_V dV = \varepsilon_{ij}^0$$

Введемо в розгляд тензор концентрації деформацій (матрицю впливу), який задає зв'язок між деформаціями всередині РОЕ і деформаціями на його межі

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \text{або} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \tag{6.6}$$

З урахуванням (6.5) матимемо

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle, \langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{I}.$$

Введемо усереднені по фазах сталі тензори впливу, які б давали аналогічний зв'язок між усередненими деформаціями в k -ій фазі і макроскопічними деформаціями РОЕ (або сталими деформаціями на його межі) за формулами

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \text{або} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad k = 1, 2.$$

Із співвідношення

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(k)} = \frac{1}{V^{(k)}} \iiint_{V^{(k)}} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \left[\frac{1}{V^{(k)}} \iiint_{V^{(k)}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV \right] : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$$

випливає, що тензор впливу для k -ї фази $\mathbf{A}^{(k)}$ пов'язаний із загальним тензором впливу $\mathbf{A}$ так

$$\mathbf{A}^{(k)} = \langle \mathbf{A} \rangle^{(k)} = \frac{1}{V^{(k)}} \iiint_{V^{(k)}} \mathbf{A} dV.$$

З урахуванням введених величин вираз ефективного тензора жорсткості буде мати вигляд

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V (\mathbf{C} : \mathbf{A}) dV = \frac{1}{V} \iiint_{V^{(1)}} (\mathbf{C}^{(1)} : \mathbf{A}) dV + \frac{1}{V} \iiint_{V^{(2)}} (\mathbf{C}^{(2)} : \mathbf{A}) dV.$$

Тобто

$$\mathbf{C}^* = (1-f) \mathbf{C}^{(1)} : \mathbf{A}^{(1)} + f \mathbf{C}^{(2)} : \mathbf{A}^{(2)}.$$

Оскільки із умови $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{I}$ випливає, що $(1-f)\mathbf{A}^{(1)} + f\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{I}$, то остаточно для тензора ефективної жорсткості отримаємо:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + f(\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) : \mathbf{A}^{(2)}, \quad (6.7)$$

де компоненти тензора впливу волокна визначають з множини розв'язків крайових задач теорії пружності для РОЕ за почергової дії на його межі ненульових компонент тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, і з врахуванням співвідношень (6.4) можуть бути отримані через переміщення на міжфазній поверхні S :

$$A_{ijml}^{(k)} = \frac{1}{2V^{(k)}} \iint_S (u_i^{(k)ml} n_j + u_j^{(k)ml} n_i) dS, \quad (6.8)$$

де $u_i^{(k)ml}$ – i -та компонента вектора переміщень на міжфазній поверхні з боку матриці ($k=1$) і волокна ($k=2$) внаслідок деформації ε_{ml}^0 на межі ∂V .

Модель Морі-Танаки (Mori-Tanaka model [380]) ґрунтується на розгляді РОЕ з одним включенням, де сукупний або кумулятивний вплив інших включень описується трансформованими постійними деформаціями на межі, які прирівнюються до усереднених по матричній фазі, тобто у цій моделі $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)}$.

Тоді розв'язок задачі з такими крайовими умовами буде наступним:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} \quad (6.9)$$

Позначимо тензор впливу за цією моделлю через $\mathbf{A}_{MT}^{(2)}$. Як відомо, тензор впливу має задовольняти тензорне рівняння

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \mathbf{A}_{MT}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (6.10)$$

Якщо цей тензор відомий, то аналіз ефективних властивостей двофазного середовища у рамках такої моделі зводиться до визначення тензора ефективної жорсткості за формулою:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + f \left(\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)} \right) : \mathbf{A}_{MT}^{(2)}. \quad (6.11)$$

Усереднені деформації РОЕ можна виразити через усереднення матричної фази

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = (1-f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = (1-f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \mathbf{A}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \left[(1-f) \mathbf{I} + f \mathbf{A}^{(2)} \right] : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)},$$

або фази наповнювача

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= (1-f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = (1-f) \left(\mathbf{A}^{(2)} \right)^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \\ &= \left[f \mathbf{I} + (1-f) \left(\mathbf{A}^{(2)} \right)^{-1} \right] : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)}. \end{aligned}$$

Обернені співвідношення матимуть вигляд:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} = \left[(1-f) \mathbf{I} + f \mathbf{A}^{(2)} \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \left[f \mathbf{I} + (1-f) \left(\mathbf{A}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle.$$

Таким чином, з (6.10) остаточно маємо:

$$\mathbf{A}_{MT}^{(2)} = \left[f \mathbf{I} + (1-f) \left(\mathbf{A}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (6.12)$$

Зауважимо, що у цій моделі ефективні властивості структури визначаються ефективними властивостями матричного середовища і додатковим чле-

ном, який нелінійно залежить від концентрації включень за рахунок чого досягаються обидва граничні випадки: $f = 0 - \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)}$ і $f = 1 - \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(2)}$.

Розглянемо також випадок ковзного механічного контакту на міжфазній поверхні (5.1), що описується рівністю нормальних переміщень $u_n^{(m)}$ і зусиль $t_n^{(m)}$, а також відсутністю дотичних зусиль $t_h^{(m)}$, $t_k^{(m)}$ при наближенні до цієї поверхні з боку матриці ($m = 1$) і наповнювача ($m = 2$).

Оскільки деформування композиту супроводжується стрибками дотичних переміщень на міжфазних поверхнях, то усереднення деформацій для РОЕ з включенням можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{2V} \iiint_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{2V} \iiint_{V^{(1)}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV + \frac{1}{2V} \iiint_{V^{(2)}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \iint_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dA - \frac{1}{2V} \iint_S (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS + \frac{1}{2V} \iint_S (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS - \\ &- \frac{1}{2V} \iint_S \left[(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) n_j + (u_j^{(2)} - u_j^{(1)}) n_i \right] dS. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (6.3) з врахуванням (6.4) запишемо так:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = (1 - f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} - f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)}, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (1 - f) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)}, \quad (6.13)$$

де додатковий член в усередненні деформацій відрізняє формули (6.13) від аналогічних залежностей для випадку ідеального міжфазного контакту і відображає вклад стрибків контактних переміщень, а саме

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(12)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \iint_S \left[(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) n_j + (u_j^{(2)} - u_j^{(1)}) n_i \right] dS. \quad (6.14)$$

Фазові усереднення напружень і деформацій у виразах (6.13) задаються

співвідношеннями (6.4). Слід відзначити, що у цих співвідношеннях, а також у виразах (6.14) $t_i^{(m)}$, $u_i^{(m)}$ ($i = \overline{1,3}, m = 1, 2$) – міжфазні значення компонент зусиль і переміщень на поверхні S з боку матриці ($k = 1$) і з боку включення ($k = 2$) пов'язані з відповідними компонентами (5.1) наступними формулами перетворень від глобальної до локальної системи координат:

$$u_i^{(m)} = h_i u_h^{(m)} + k_i u_k^{(m)} + n_i u_n; \quad t_i^{(m)} = (-1)^m n_i t_n, \quad i = \overline{1,3}, m = 1, 2. \quad (6.15)$$

За умови задання на межі РОЕ ∂V постійного поля деформацій $\epsilon_0 = const$, необхідно буде додатково до тензора впливу волокна (6.8), визначати тензор впливу дефектів міжфазної поверхні $\mathbf{A}^{(12)}$, який задовольняє співвідношенню

$$\langle \epsilon \rangle^{(12)} = \mathbf{A}^{(12)} : \langle \epsilon \rangle = \mathbf{A}^{(12)} : \epsilon_0, \quad (6.16)$$

і компоненти якого визначаються через переміщення на міжфазній поверхні S наступним чином:

$$A_{ijml}^{(12)} = A_{ijml}^{(2)} - \frac{1}{2V^{(2)}} \iint_S \left(u_i^{(1)ml} n_j + u_j^{(1)ml} n_i \right) dS. \quad (6.17)$$

З метою усереднення пружних характеристик РОЕ запишемо друге рівняння (6.13) в термінах шуканого ефективного тензора пружності $\mathbf{C}^*$ і заданих тензорів пружності матриці $\mathbf{C}^{(1)}$ та волокна $\mathbf{C}^{(2)}$ з урахуванням першого співвідношення (6.13) в виде

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \mathbf{C}^* : \langle \epsilon \rangle = (1-f) \langle \sigma \rangle^{(1)} + f \langle \sigma \rangle^{(2)} = (1-f) \mathbf{C}^{(1)} : \langle \epsilon \rangle^{(1)} + f \mathbf{C}^{(2)} : \langle \epsilon \rangle^{(2)} = \\ &= \mathbf{C}^{(1)} : \left[\langle \epsilon \rangle - f \langle \epsilon \rangle^{(2)} + f \langle \epsilon \rangle^{(12)} \right] + f \mathbf{C}^{(2)} : \langle \epsilon \rangle^{(2)} = \mathbf{C}^{(1)} : \langle \epsilon \rangle + \end{aligned}$$

$$+f\left[\left(\mathbf{C}^{(2)}-\mathbf{C}^{(1)}\right):\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)}+\mathbf{C}^{(1)}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(12)}\right]. \quad (6.18)$$

Узагальнення на випадок розривних переміщень на міжфазній поверхні моделі Морі-Танаки для визначення ефективного тензору пружності $\mathbf{C}^*$ базуються на врахування взаємодії волокон заданням на межі ∂V постійної деформації, яка рівна середній деформації в матричній фазі $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}$. Тоді, враховуючи що $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)}=\mathbf{A}^{(2)}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(12)}=\mathbf{A}^{(12)}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}$, з (6.13) отримаємо

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle=(1-f)\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}+f\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)}-f\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(12)}=(1-f)\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}+f\mathbf{A}^{(2)}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}-f\mathbf{A}^{(12)}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}.$$

Звідки випливає, що

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)}=\left[(1-f)\mathbf{I}+f(\mathbf{A}^{(2)}-\mathbf{A}^{(12)})\right]^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \quad (6.19)$$

Підставляючи (6.19) у вираз (6.18), остаточно будемо мати:

$$\mathbf{C}^*=\mathbf{C}_1+f\left[\left(\mathbf{C}^{(2)}-\mathbf{C}^{(1)}\right):\mathbf{A}^{(2)}+\mathbf{C}^{(1)}:\mathbf{A}^{(12)}\right]:\left[(1-f)\mathbf{I}+f(\mathbf{A}^{(2)}-\mathbf{A}^{(12)})\right]^{-1}. \quad (6.20)$$

Зауважимо, що класичний випадок композиту з ідеальним механічним контактом його компонент можна отримати за нульового тензора $\mathbf{A}^{(12)}$.

Таким чином, задача визначення ефективних модулів пружності армованого короткими волокнами композиту зводиться до отримання тензорів концентрації деформацій $\mathbf{A}^{(2)}$ і $\mathbf{A}^{(12)}$ для РОЕ у вигляді безмежної матриці з поодиноким волокном розглянутої форми. З точки зору ефективності застосування граничноелементного підходу для розрахунку вказаних компонент тензорів концентрації деформацій важливо, що у визначальних співвідношеннях (6.8) і (6.17) присутнє лише інтегрування по внутрішній щодо РОЕ міжфазній поверхні, що уможлиблює для відносно розрідженого

композиту розгляд РОЕ з безмежною матрицею. Отже, стратегія числового дослідження ефективних властивостей розглянутих композитів передбачає поетапно граничноелементне розв'язання задач навантаження безмежної матриці з включенням (наприклад, шести елементарних варіантів деформування у трьох напрямках) за описаним у попередніх розділах алгоритмом, числове інтегрування цих розв'язків за формулами (6.8) і (6.17) з отриманням відповідних тензорів впливу, та обчислення тензорних згорток в гомогенізаційній моделі Морі-Танаки (6.12) для ідеального контакту компонент композиту і узагальненій моделі (6.20) для ковзного контакту.

6.2. Задачі гомогенізації двофазного пружного композиту з впорядкованою орієнтацією скінчених волокон

Розглянемо тривимірний пружний двофазний композит, що складається з безмежної матриці та орієнтованих вздовж осі Ox_3 сфероциліндричних включень (рис. 6.1). Внаслідок процедури гомогенізації такої структури, отримаємо макроскопічно трансверсально-ізотропне середовище, що характеризується п'ятьма незалежними ефективними модулями пружності C_{11}^* , C_{12}^* , C_{13}^* , C_{33}^* , C_{44}^* . Задача з їх визначення зводиться до обчислення тензорів впливу $\mathbf{A}^{(2)}$ і $\mathbf{A}^{(12)}$, компоненти яких визначаються з шести варіантів однорідної деформації розтягу та зсуву на безмежності в повздовжньому і поперечних відносно осі волокна напрямках.

Технічні модулі пружності, а саме: ефективні повздовжній (вздовж волокон) E_{33}^* і поперечний (в перпендикулярному до волокон напрямку) E_{11}^* модулі Юнга, відповідні модулі зсуву в осьовому G_{13}^* і поперечному G_{12}^* напрямку, а також коефіцієнт Пуассона ν_{13}^* за осьового навантаження, визначаються через класичні ефективні модулі пружності наступним чином:

$$\begin{aligned}
E_{33}^* &= C_{33}^* - \frac{2(C_{13}^*)^2}{C_{11}^* + C_{12}^*}, & E_{11}^* &= \frac{(C_{11}^* - C_{12}^*)[C_{11}^*C_{33}^* + C_{12}^*C_{33}^* - 2(C_{13}^*)^2]}{C_{11}^*C_{33}^* - (C_{13}^*)^2}, \\
G_{13}^* &= C_{44}^*, & G_{12}^* &= \frac{C_{11}^* - C_{12}^*}{2}, & \nu_{13}^* &= \frac{C_{13}^*}{C_{11}^* + C_{12}^*}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Таким чином, у випадку композиту з ідеальними міжфазними умовами між матрицею та наповнювачем підставляємо шість комплектів розв'язків ГІР (2.6) для елементарних деформованих станів у вирази (6.8) з врахуванням (6.11) для моделі Морі-Танаки з (6.21) знаходимо залежність технічних ефективних модулів композиту від об'ємної частки наповнювача.

Аналогічні залежності для композиту з ковзним міжфазним контактом його компонент знаходимо з (6.21) підставляючи шість комплектів розв'язків ГІР (5.3) для елементарних деформованих станів у вирази (6.8) і (6.17) з врахуванням (6.20) для моделі Морі-Танаки.

Верифікація запропонованого аналітико-числового підходу і дослідження точності розрахунків проведені шляхом порівняння чисельних результатів з відомими в літературі аналітичними розв'язками для композитних матеріалів зі стохастично розподіленими кульовими абсолютно жорсткими [308] та пружними [304] включеннями за умови їх ковзного контакту з матрицею. Результатом гомогенізації таких матеріалів є макроскопічно ізотропне середовище. Для відповідності з вхідними параметрами вказаних робіт у випадку абсолютно жорстких включень приймемо $\nu^{(1)} = 0,3$, $E^{(2)}/E^{(1)} \rightarrow \infty$ (тоді коефіцієнт Пуассона включень $\nu^{(2)}$ не впливає на поведінку розв'язків), а у випадку пружних включень — $\nu^{(1)} = 0,3$, $\nu^{(2)} = 0,2$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$.

На рис. 6.5. бачимо хороше узгодження числових (суцільні лінії) та аналітичних (маркованих трикутниками для випадку жорстких включень [308] і квадратами для випадку пружних включень [304]) значень ефективного мо-

дуля Юнга композиту для всього діапазону концентрацій включень, обмеженою умовою не перетину наповнювача.

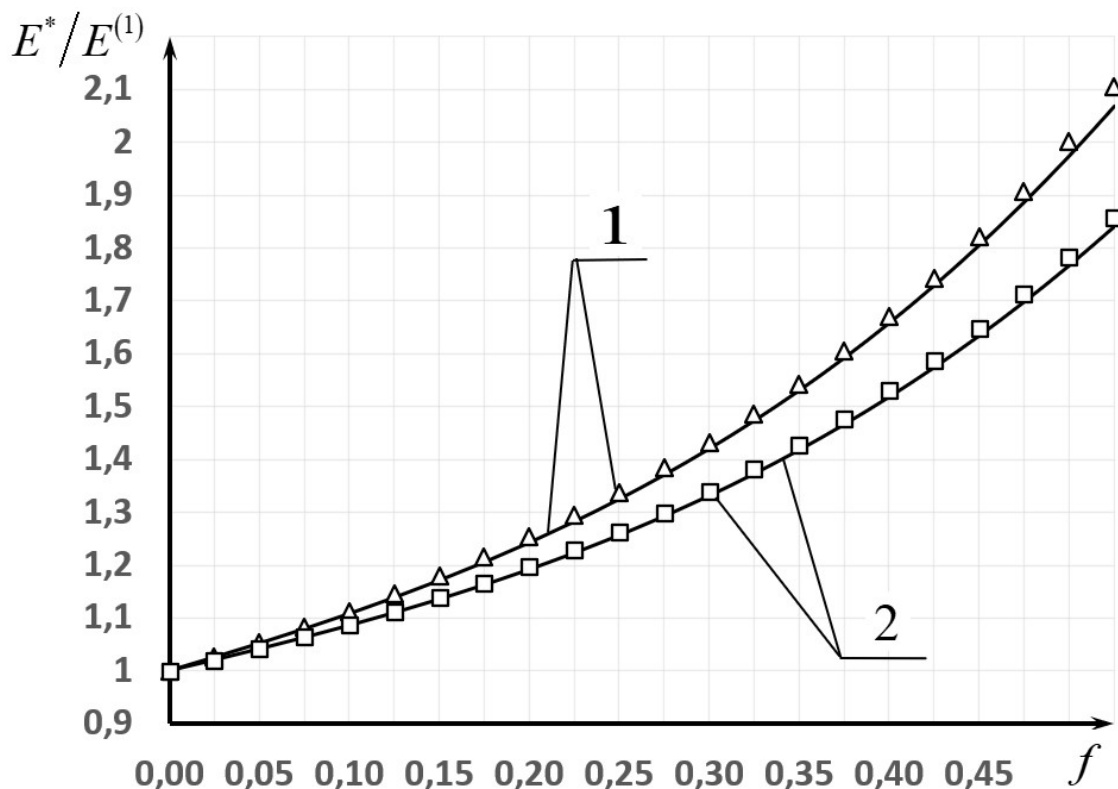


Рис. 6.5. Залежність ефективних модулів пружності двофазного композиту з кульовими абсолютно жорсткими (1) та пружними (2) включеннями від об'ємної частки наповнювача.

Для додаткової перевірки точності розрахунків з наповнювачем у вигляді впорядкованих за напрямком коротких волокон використовувались приведені в [306] аналітичні вирази на основі так званої сполучної моделі ("bridging model") та числові дані скінчено-елементного аналізу ефективних характеристик композиту як гомогенізованого трансверсально-ізотропного середовища. В цих прикладах розглянуті періодично розподілені скляні волокна ($E^{(2)} = 74 \text{ ГПа}$, $\nu^{(2)} = 0,2$, $f = 0,2$), які ідеально контактують з епоксидним матричним матеріалом ($E^{(1)} = 3,35 \text{ ГПа}$, $\nu^{(1)} = 0,35$). Приведене в табл. 6.1 порівняння результатів для різної відносної довжини волокон, отриманих цими підходами і пропонованим модифікованим методом граничних елементів, свідчить про задовільну точність розрахунків.

Таблиця 6.1. Порівняння результатів аналізу ефективних характеристик композиту з впорядкованими короткими волокнами за умови ідеального контакту на міжфазних поверхнях.

H/R		E_{11}^* (ГПа)	E_{33}^* (ГПа)	G_{12}^* (ГПа)	G_{13}^* (ГПа)	ν_{13}^*
2	Розрахунок МГЕ і за моделлю Морі-Танаки	4,794	5,641	1,758	1,809	0,334
	Розрахунок за сполучною «bridging» моделлю	5,073	7,461	1,800	1,802	0,341
	Розрахунок МСЕ	5,579	6,522	2,161	1,728	0,287
4	Розрахунок МГЕ і за моделлю Морі-Танаки	4,830	7,234	1,726	1,782	0,332
	Розрахунок за сполучною «bridging» моделлю	5,177	9,602	1,800	1,802	0,337
	Розрахунок МСЕ	5,425	8,113	1,959	1,770	0,299
16	Розрахунок МГЕ і за моделлю Морі-Танаки	4,945	12,095	1,703	1,742	0,317
	Розрахунок за сполучною «bridging» моделлю	5,291	14,103	1,800	1,802	0,327
	Розрахунок МСЕ	5,266	12,830	1,843	1,795	0,308

Незначне відхилення значень відповідних ефективних модулів пружності пояснюється відмінністю розподілу і форми торців коротких волокон, які в роботі [306] приймалися періодично розташованими (рис. 6.2) і з плоскими торцями, а в нашому випадку – випадково розташованими (рис. 6.1) та з заокругленими півсферичними торцями. Саме тому кореляція результатів краща для більш витягнутих волокон, де вплив форми їх торців на ефективні модулі пружності нівелюється.

Таблиця 6.2. Відносні ефективні модулі пружності композиту з впорядкованими короткими волокнами різної відносної довжини H/R за умов ідеального та ковзного контакту на міжфазних поверхнях ($f = 0,3$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$).

H/R	тип міжфазного контакту	$E_{11}^*/E^{(1)}$	$E_{33}^*/E^{(1)}$	$G_{12}^*/G^{(1)}$	$G_{13}^*/G^{(1)}$	ν_{13}^*
1	ідеальний	1,9313	1,9313	1,9313	1,9313	0,4307
	ковзний	1,3257	1,3257	1,3257	1,3257	0,4463
2	ідеальний	1,9441	2,4472	1,8345	1,8293	0,4301
	ковзний	1,3870	1,6903	1,3180	0,6710	0,4453
5	ідеальний	1,9940	4,1540	1,7751	1,6992	0,4250
	ковзний	1,4680	2,4819	1,3110	0,5581	0,4412
10	ідеальний	2,0520	6,7486	1,7571	1,6386	0,4109
	ковзний	1,5266	3,5974	1,3107	0,4718	0,4345
15	ідеальний	2,0745	8,7097	1,7514	1,6178	0,3994
	ковзний	1,5553	4,5406	1,3107	0,4611	0,4286

Слід відзначити, що в розглянутих прикладах використовувалося розбиття сферичної міжфазної поверхні включення на 288 граничних елементи, при розгляді сфероциліндричної поверхні короткого волокна ця кількість елементів доповнювалася $48h^*$ елементами на її циліндричній частині, де h^* – ціла частина відносної довжини H/R волокна.

З метою спрощення параметризації розрахунків ефективних пружних характеристик композиту в наступних прикладах розглянуті матеріали з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,45$, тоді неоднорідність структури визначаються співвідношеннями між модулями Юнга матриці $E^{(1)}$ і волокон $E^{(2)}$. Вплив ковзного міжфазного контакту продемонстровано шляхом співставлення відповідних результатів (суцільні лінії на приведених рисунках) з випадком ідеального контакту складових

композиту (штрихові лінії) за умови відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ волокон розміром $H/R = 15$.

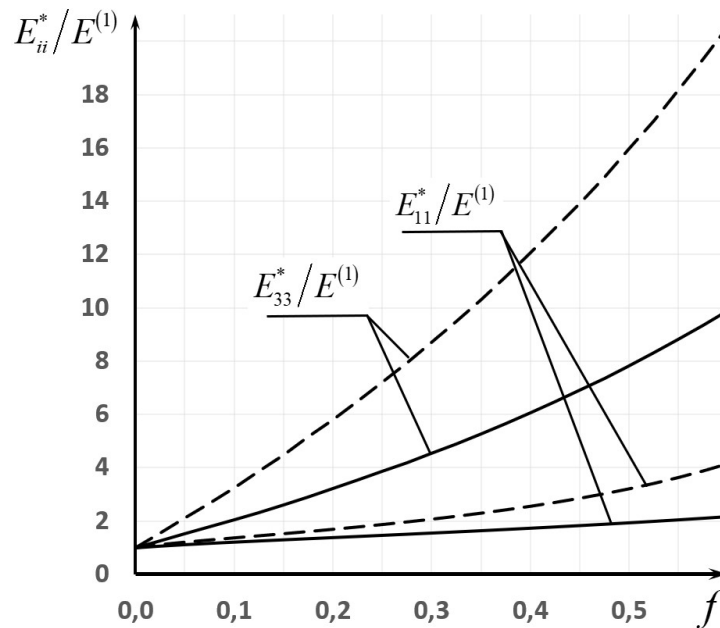


Рис. 6.6. Залежність ефективних модулів Юнга композиту впорядковано аромованого волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту та відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$.

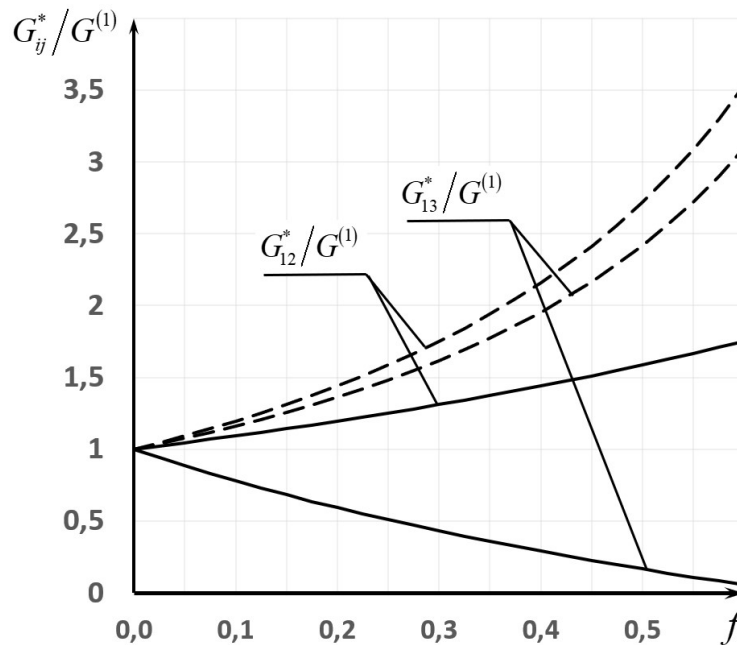


Рис. 6.7. Залежність ефективних модулів зсуву композиту впорядковано аромованого волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту та відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$.

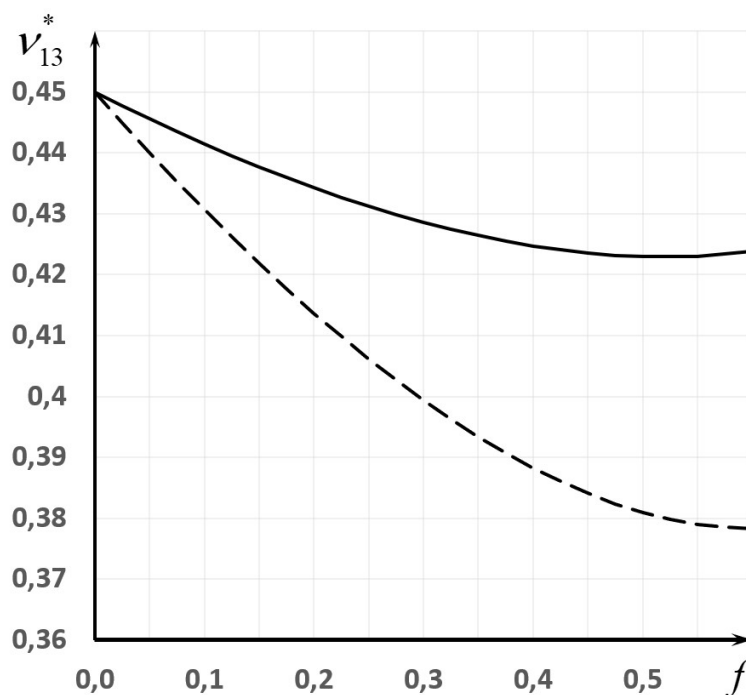


Рис. 6.8. Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона за осьового навантаження композиту впорядковано армованого волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту та відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$.

На рис. 6.6 показані залежності технічних модулів Юнга композиту з впорядкованими короткими волокнами орієнтованими вздовж осі Ox_3 віднесені до модуля Юнга матриці композиту від об'ємної частки волокон.

Аналогічні залежності для відносних технічних модулів зсуву такого композиту віднесені до модуля зсуву матриці показані на рис. 6.7. За умови навантаження композиту армованого впорядкованими короткими волокнами розтягуючими зусиллями вздовж напрямку орієнтації волокон, зміна їх об'ємної частки призводить до суттєвої змін ефективного коефіцієнта Пуассона ν_{13}^* . На рис. 6.8 показана така зміна для випадків ідеального та ковзного міжфазного контактів.

Для випадку ковзного міжфазного контакту залежності теоретичних модулів пружності віднесених до модуля зсуву матриці композиту з впорядковано розташованими короткими волокнами відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ від об'ємної їх частки для $H/R = 15$ та від відносної їх довжини для

$f = 0,2$ показані на рис. 6.9. та 6.10 відповідно.

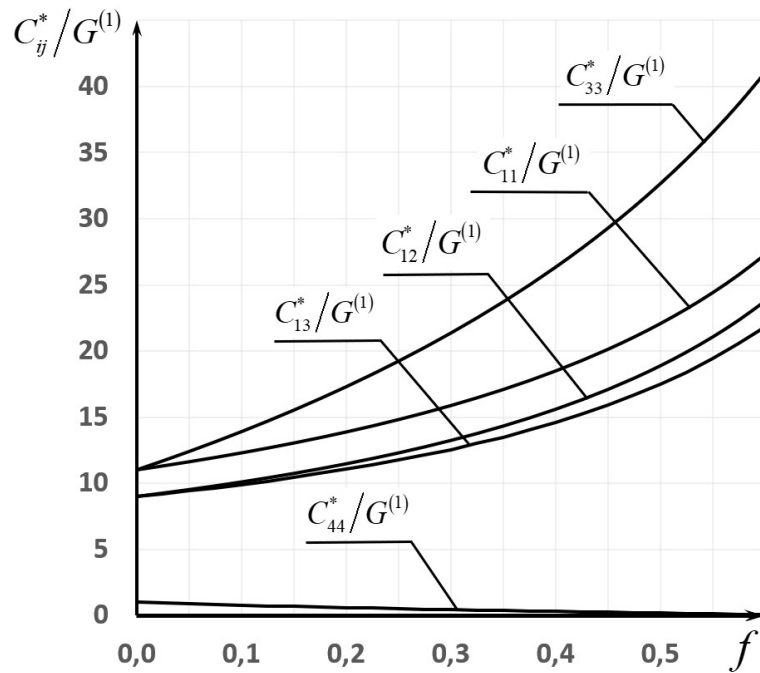


Рис. 6.9. Залежність ефективних теоретичних модулів пружності композиту впорядковано армованого короткими волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного контакту та відносної жорсткості компонент $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$.

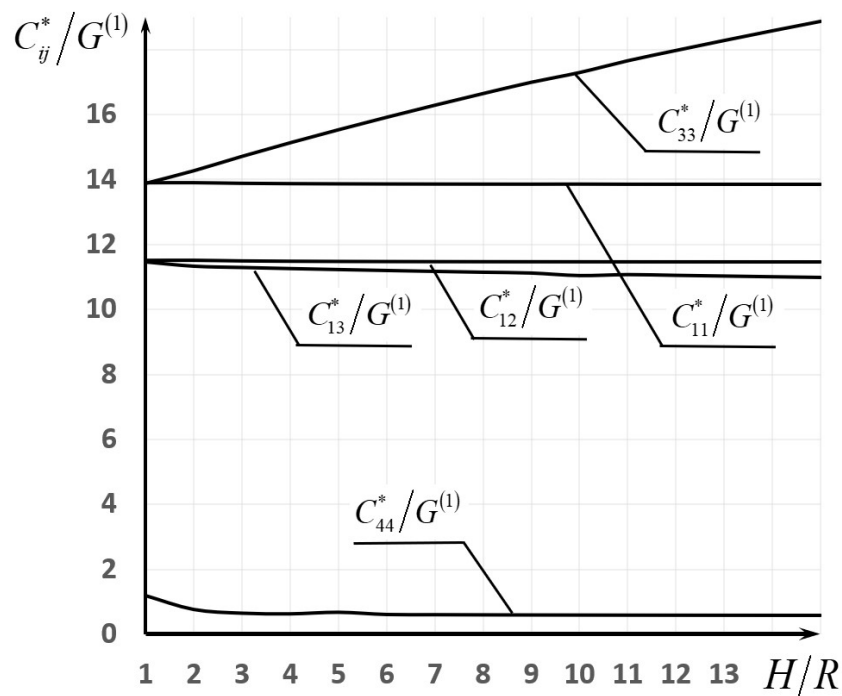


Рис. 6.10. Залежність ефективних теоретичних модулів пружності композиту впорядковано армованого волокнами з об'ємною часткою $f = 0,2$ від їх довжини за умови ковзного міжфазного контакту та відносної жорсткості компонент $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$.

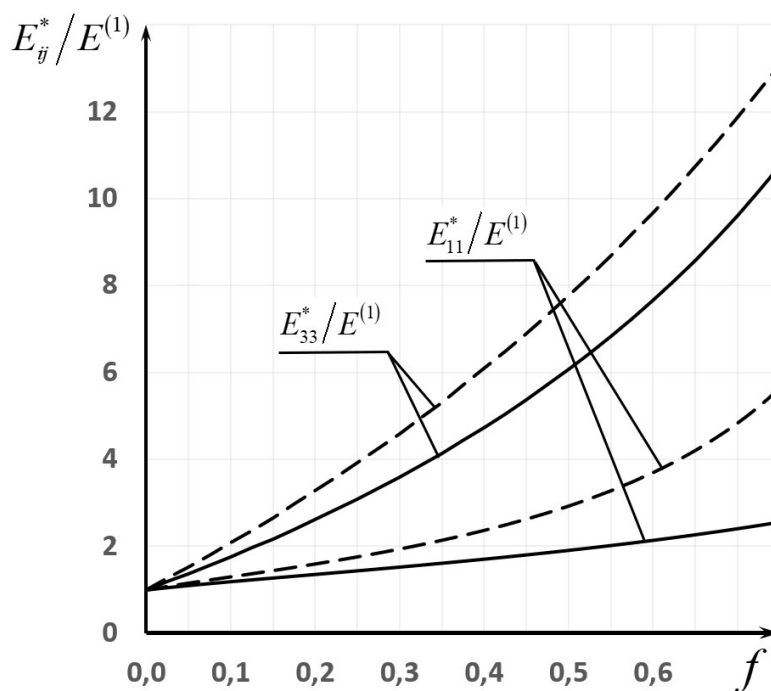


Рис. 6.11. Залежність ефективних модулів Юнга композиту впорядковано аромованого волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту та відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$.

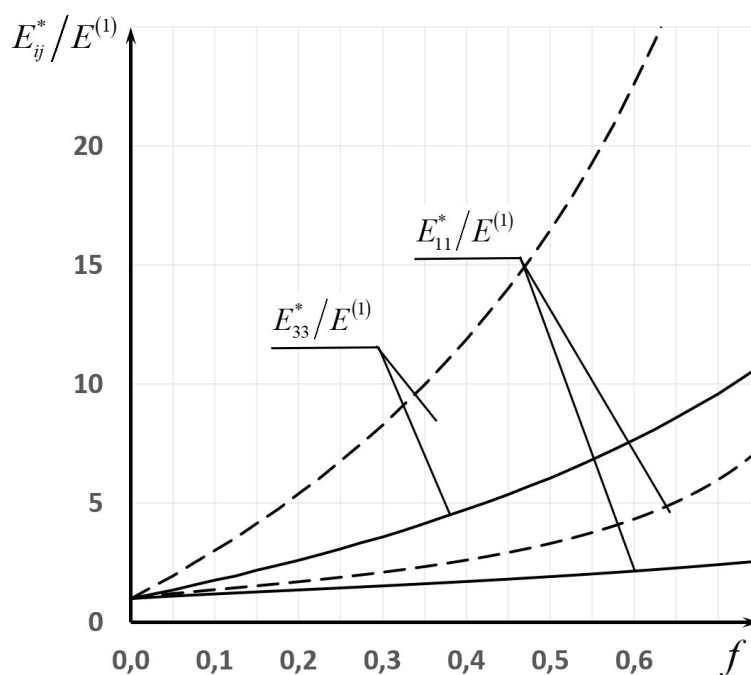


Рис. 6.12. Залежність ефективних модулів Юнга композиту впорядковано аромованого волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту та відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 100$.

З метою дослідження впливу жорсткості наповнювача на ефективні механічні характеристики композитів армованих короткими однонаправленими волокнами, на рис. 6.11 та 6.12 показані залежності нормованих технічних модулів Юнга від об'ємної частки більш м'яких ($E^{(2)}/E^{(1)} = 20$) та більш твердих ($E^{(2)}/E^{(1)} = 100$) волокон відповідно розміром $H/R = 15$ за умови ідеального (штрихові лінії) та ковзного (суцільні лінії) міжфазних умов зчеплення складових композиту.

Зауважимо, що вибрана схема гомогенізації композиту, яка вимагає визначення лише міжфазних переміщень у РОЕ композиту, та ГР, отримані в розділі 4, розмірність дискретного аналогу яких не залежить від типу міжфазного контакту, роблять процедуру розрахунку ефективних модулів пружності з ідеальним та неідеальним механічним контактом наповнювача з матрицею однаково ефективною.

6.3. Ефективні пружні характеристики композиту армованого хаотично розташованими короткими волокнами

В промисловості значно більшого поширення набуло виготовлення коротковолокнистих композитів з хаотично розташованими включеннями армуючого матеріалу (рис. 6.3) через простоту технологічного процесу. Рівномірно розподілені випадково орієнтовані короткі волокна в пружній матриці утворюють макроскопічно ізотропне середовище, для отримання ефективних механічних характеристик якого необхідне додаткове усереднення тензора ефективних модулів пружності композиту з впорядковано орієнтованими волокнами по всіх можливих просторових кутах Ейлера їх орієнтації [386].

Задамо глобальну систему координат $O_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3$ двофазного композиту додатково до системи координат $O x_1 x_2 x_3$ прив'язаної до РОЕ, що містить

включення. Тоді орієнтація РОЕ визначатиметься кутами Ейлера: кутом прецесії ($0 \leq \varphi < 2\pi$); кутом нутації ($0 \leq \theta < \pi$); кутом власного обертання ($0 \leq \psi < 2\pi$) (рис. 6.13).

Припускаючи однакову імовірність орієнтації коротких волокон у всіх можливих напрямках, отримаємо результуючий тензор ефективних модулів пружності за формулою:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{C}^*(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\varphi d\theta d\psi, \quad (6.22)$$

де $\mathbf{C}^*(\varphi, \theta, \psi)$ – тензор ефективних модулів пружності композиту армованого впорядковано орієнтованими за кутами Ейлера φ, θ, ψ короткими волокнами аналогічної форми та матеріалу.

У випадку осьової симетрії РОЕ (кульові, еліпсоїдальні, сфероциліндричні включення) таке усереднення спрощується завдяки тривіальному інтегруванню по куту власного обертання (рис. 6.14):

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{C}^*(\varphi, \theta) \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (6.23)$$

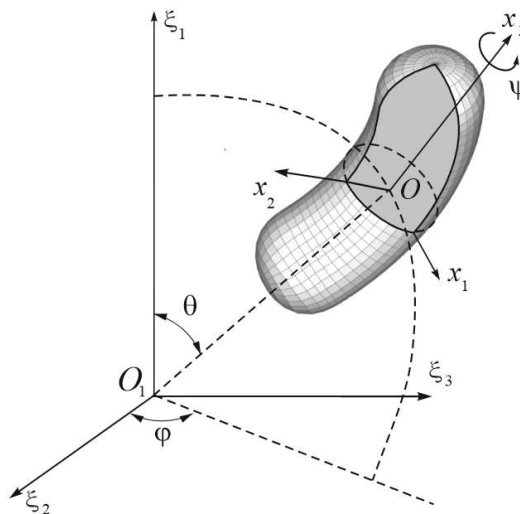


Рис. 6.13. Орієнтація несиметричного короткого волокна в пружній матриці двофазного композиту.

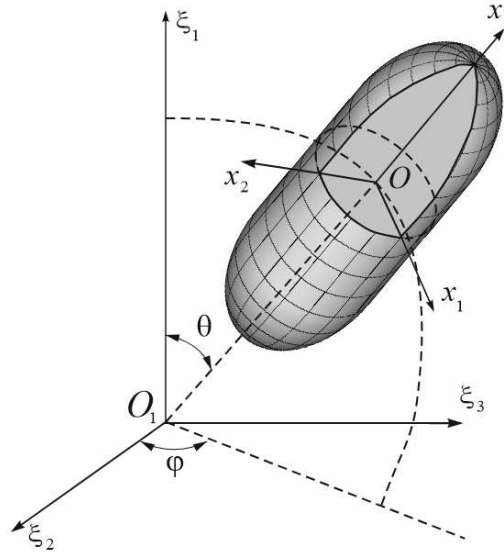


Рис. 6.14. Орієнтація осесиметричного короткого волокна в пружній матриці двофазного композиту.

Інтегрування за схемою (6.23) по кутах прецесії та нутації вдається виконати в замкнутій формі [303]:

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = \frac{1}{3}(2C_{11}^* + C_{33}^*) - \frac{2}{15}(C_{11}^* + C_{33}^* - 2C_{23}^* - 4C_{44}^*);$$

$$L_{12} = L_{23} = L_{13} = \frac{1}{3}(2C_{13}^* + C_{12}^*) + \frac{1}{15}(C_{11}^* + C_{33}^* - 2C_{23}^* - 4C_{44}^*);$$

$$L_{44} = L_{55} = L_{66} = \frac{1}{3}(2C_{44}^* + C_{66}^*) + \frac{1}{15}(C_{11}^* + C_{33}^* - 2C_{23}^* - 4C_{44}^*).$$

Враховуючи, що

$$E^* = L_{11} - \frac{2L_{12}^2}{L_{11} + L_{12}}; \quad \nu^* = \frac{L_{12}}{L_{11} + L_{12}}, \quad (6.24)$$

остаточно отримуємо ефективні механічні характеристики композиту армованого хаотично розташованими короткими волокнами:

$$E^* = \frac{(2C_{11}^* + 2C_{12}^* + 4C_{13}^* + C_{33}^*)(7C_{11}^* - 5C_{12}^* - 4C_{13}^* + 2C_{33}^* + 12C_{44}^*)}{3(9C_{11}^* + 5C_{12}^* + 12C_{13}^* + 4C_{33}^* + 4C_{44}^*)},$$

$$\nu^* = \frac{C_{11}^* + 5C_{12}^* + 8C_{13}^* + C_{33}^* - 4C_{44}^*}{9C_{11}^* + 5C_{12}^* + 12C_{13}^* + 4C_{33}^* + 4C_{44}^*}. \quad (6.25)$$

Для випадків ідеального (суцільні лінії) та ковзного (штрихові лінії) контакту між короткими волокнами та матрицею обчислено ефективні модуль Юнга (рис. 6.15 – 6.17) та коефіцієнт Пуассона (рис. 6.18 – 6.19) макроскопічно ізотропного композиту з хаотичним розташуванням прямих коротких волокон (рис. 6.13) з відносною довжиною $H/R = 15$.

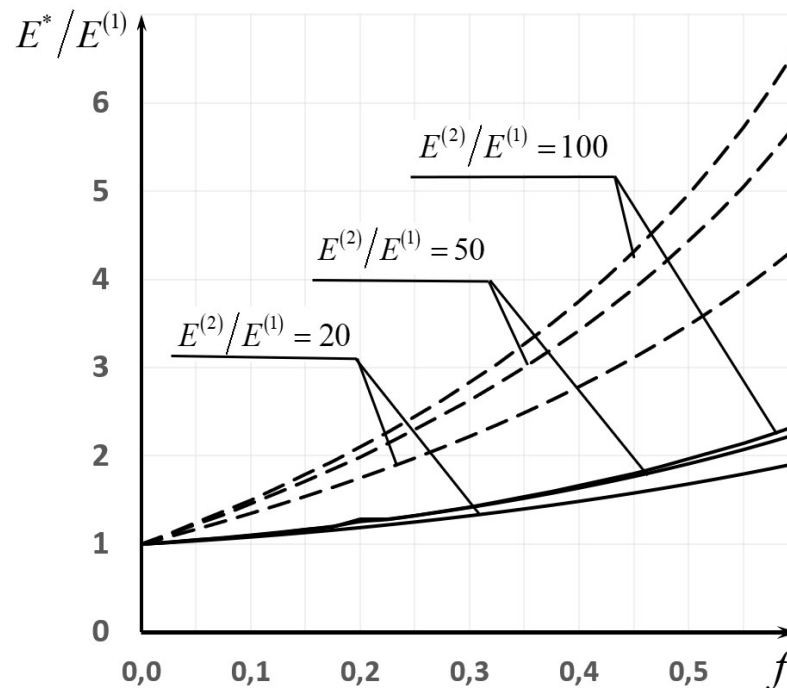


Рис. 6.15. Залежність ефективних модулів Юнга композиту хаотично армованого пружними волокнами довжиною $H/R = 10$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту.

На рис. 6.15 та 6.16 показані залежності нормованих модулів Юнга віднесених до модуля Юнга матриці композиту від об'ємної частки волокон довжиною $H/R = 10$ та $H/R = 15$ відповідно для випадків контрастної жорсткості складових композиту $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ та $E^{(2)}/E^{(1)} = 100$.

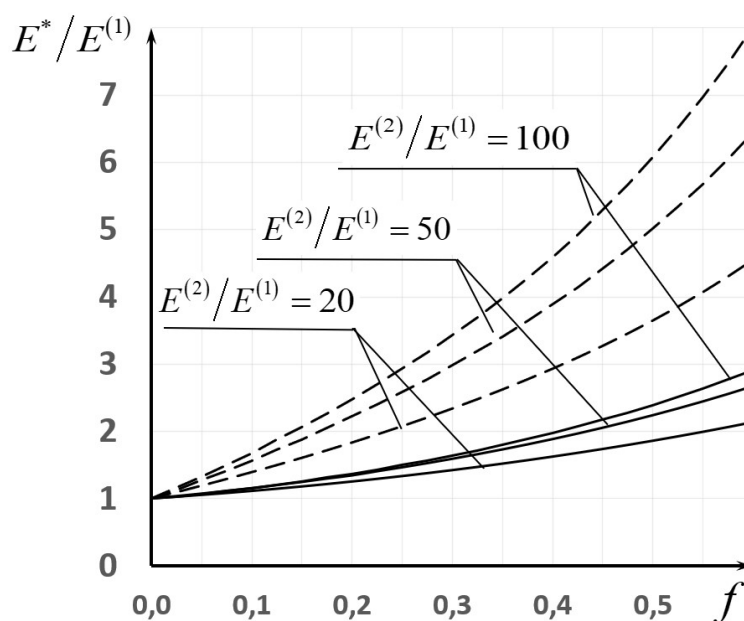


Рис. 6.16. Залежність ефективних модулів Юнга композиту хаотично армованого пружними волокнами довжиною $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту.

На рис. 6.17 приведені залежності нормованих модулів Юнга від відносної довжини волокон за сталої об'ємної їх частки $f = 0,2$.

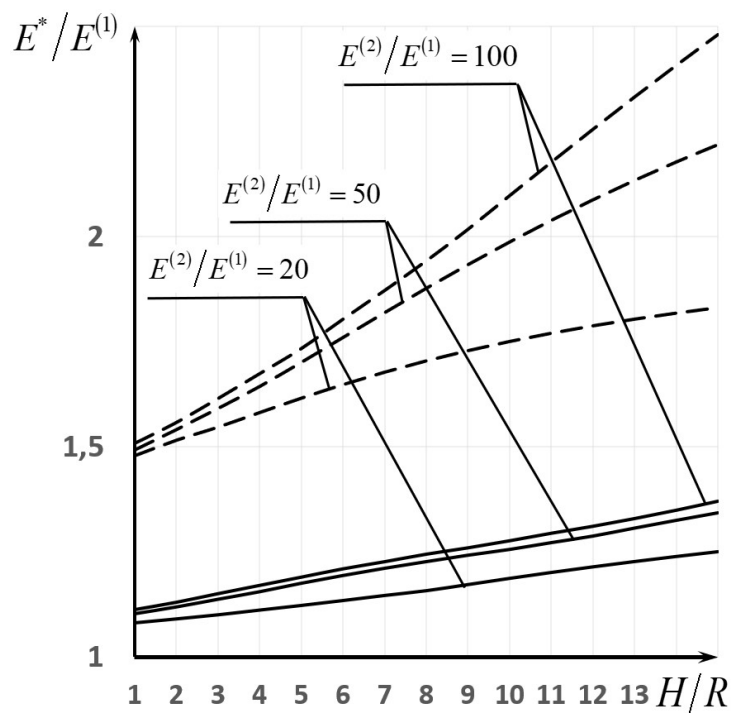


Рис. 6.17. Залежність ефективних модулів Юнга композиту хаотично армованого пружними волокнами з об'ємною часткою $f = 0,2$ від їх довжини за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту.

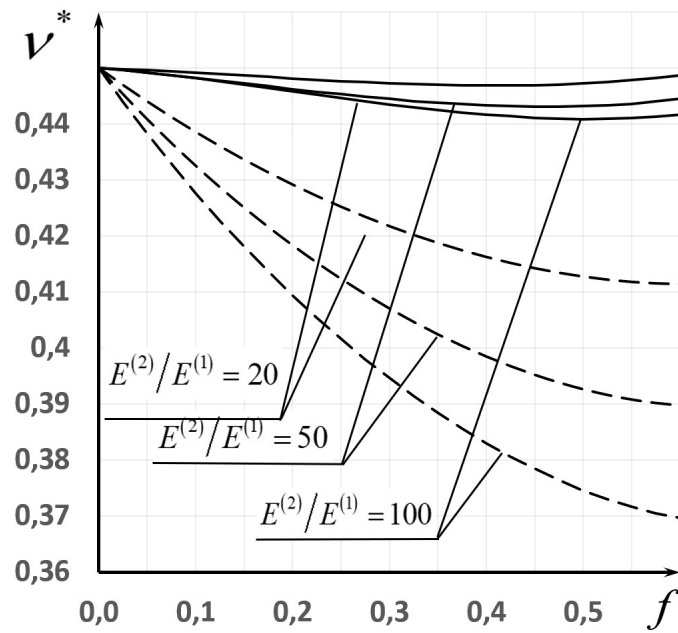


Рис. 6.18. Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона композиту армованого хаотично орієнтованими волокнами розміром $H/R = 15$ від об'ємної частки наповнювача за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту.

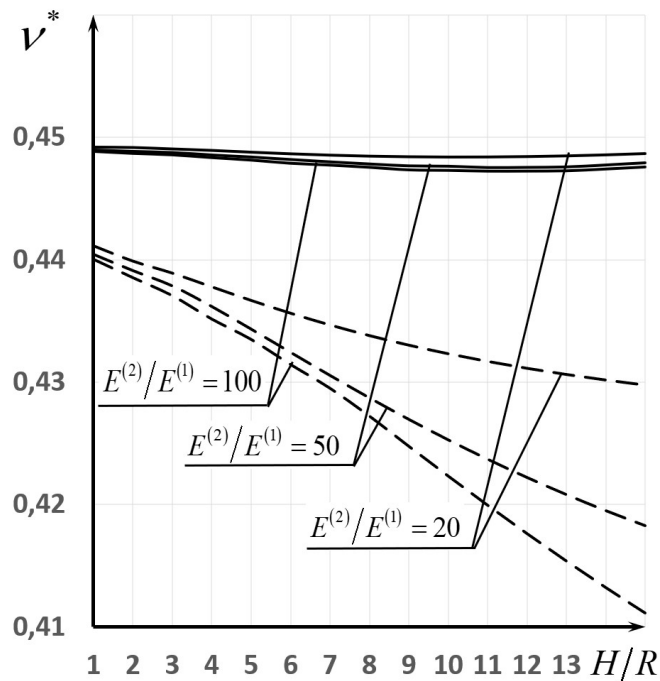


Рис. 6.19. Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона композиту армованого хаотично орієнтованими волокнами об'ємної частки $f = 0,2$ від їх відносної довжини за умови ковзного (суцільні криві) та ідеального (штрихові криві) міжфазного контакту.

Вплив типу міжфазного контакту в пружному волокнистому композиті з хаотично орієнтованими рівномірно розподіленими прямими волокнами на

залежності ефективного коефіцієнта Пуассона можна побачити на графіках на рис. 6.18 та 6.19. На першому з цих рисунків показано зміну ефективного коефіцієнта Пуассона залежно від об'ємної частки волокон в композиті з відносною довжиною $H/R = 15$, а на другому – залежно від відносної довжини волокон за їх сталої об'ємної частки $f = 0,2$. Як і в попередніх випадках, криві, що відповідають ідеальному міжфазному контакту, позначено штриховими лініями, в ковзному контакту – суцільними.

Зауважимо, що отримані результати в частковому випадку кульових включень великої жорсткості за ковзного контакту з матрицею добре узгоджуються з отриманими в роботі [308] аналітичними виразами для ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона композиту з аналогічними механічними характеристиками його складових.

Розглянемо випадок коротких циліндричних волокон з викривленою у формі дуги кола віссю (рис. 6.13) рівномірно без перетину розташованих у пружній матриці і при цьому довільно орієнтованих. Переріз такого волокна площиною x_1Ox_3 показаний на рис. 6.20. Його геометричними параметрами будемо вважати: R – радіус серединного поперечного перерізу волокна; ρ – радіус викривлення осі волокна; α – кут розхилу дуги осі волокна.

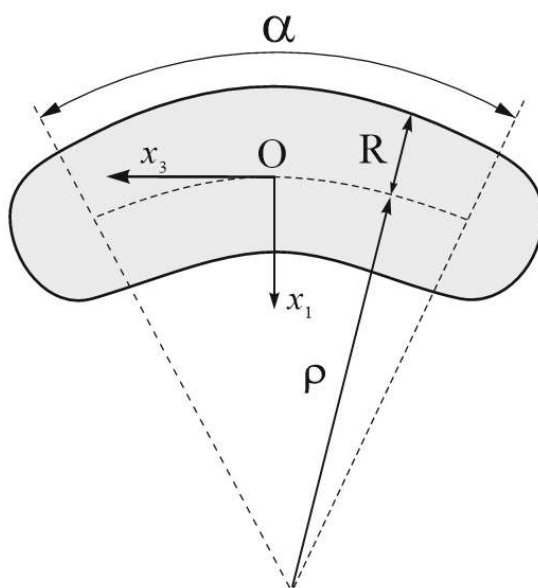


Рис. 6.20. Переріз викривленого сфероциліндричного короткого волокна площиною симетрії.

Припускаючи ідеальний механічний контакт між матрицею та волокнами визначаємо шість комплектів розв'язків ГІР (2.6) для елементарних деформованих станів РОЕ (рис. 6.21). Підставимо отримані розв'язки у вирази (6.8) та за методикою Морі-Танаки (6.11) знаходимо залежність теоретичних ефективних модулів композиту з впорядковано орієнтованими розглядуваними волокнами від об'ємної частки наповнювача.

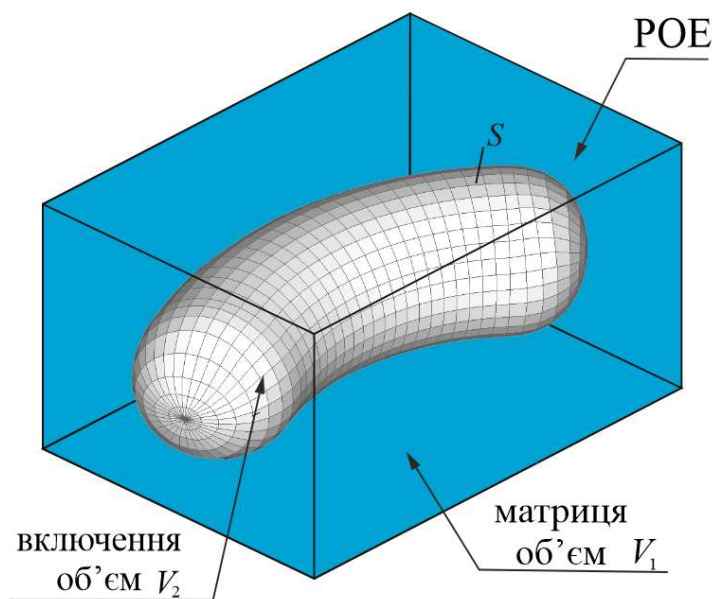


Рис. 6.21. Репрезентативний об'ємний елемент композиту з криволінійним волокном.

Інтегруємо числовим способом теоретичні ефективні модулі пружності по всіх можливих напрямках орієнтації волокна за формулою (6.22) та з виразів (6.24) визначаємо ефективні модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона композиту армованого хаотично орієнтованими рівномірно розподіленими криволінійним короткими волокнами.

На рис. 6.22 та 6.23 представлено результати порівняння залежностей ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона відповідно композиту армованого хаотично орієнтованими викривленими (суцільні криві) та прямими (штрихові криві) короткими пружними волокнами від їх відносної об'ємної частки. Відносний радіус кривини осі викривлених сфероциліндричних волокон приймали в розрахунках рівним $\rho/R = 10$, а кут розхилу – 60° . Також на графіках представлені ефективні макрохарактеристики пружності композиту

з хаотично орієнтованими випрямленими волокнами аналогічної відносної довжини $H/R = 6,236$. Розрахунки ефективних модулів Юнга проведені для випадків відносної жорсткості твердих ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$; $E^{(2)}/E^{(1)} = 10$) та м'яких ($E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$) волокон.

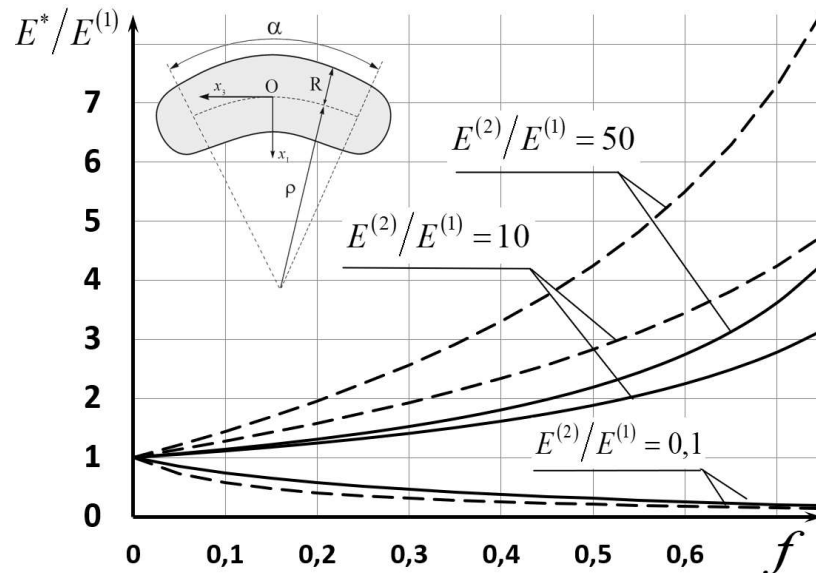


Рис. 6.22. Залежність ефективних модулів Юнга композиту хаотично армованого пружними викривленими (суцільні криві) та прямими (штрихові криві) волокнами з кутом розхилу 60° від об'ємної частки наповнювача за умови ідеального міжфазного контакту.

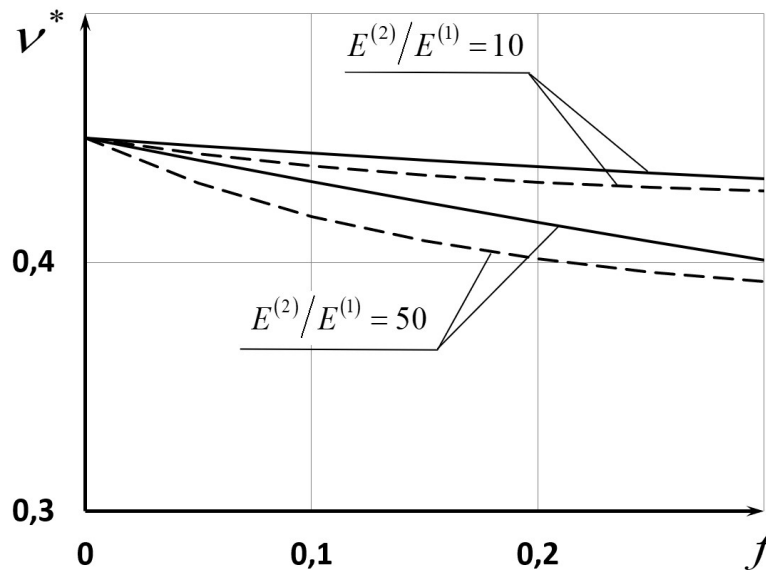


Рис. 6.23. Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона композиту хаотично армованого пружними викривленими (суцільні криві) та прямими (штрихові криві) волокнами з кутом розхилу 60° від об'ємної частки наповнювача за умови ідеального міжфазного контакту.

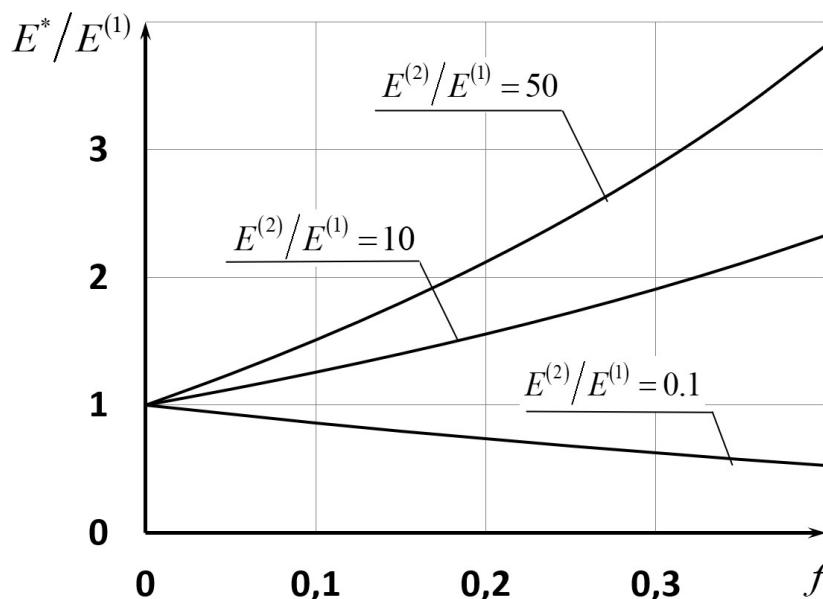


Рис. 6.24. Залежність ефективних модулів Юнга композиту хаотично армованого пружними викривленими волокнами з кутом розхилу 120° від об'ємної частки наповнювача за ідеального міжфазного контакту.

На рис. 6.24 показано залежності нормованих ефективних модулів Юнга композиту, армованого хаотично орієнтованими рівномірно розподіленими викривленими сфероциліндричними волокнами з відносним радіусом кривизни осі $\rho/R = 10$ і кутом розхилу – 120° від відносної об'ємної частки наповнювача за його відносної жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$; $E^{(2)}/E^{(1)} = 10$ та $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$.

6.4. Верифікація числових моделей на експерименті з визначення ефективних модулів пружності фібробетону

Фібробетон – це інноваційний будівельний матеріал, що поєднує в собі властивості традиційного бетону з унікальними характеристиками армованих волокнами композитів. Універсальність, висока міцність та стійкість до зношування, роблять фібробетон важливим інструментом сучасної будівельної індустрії. Він знайшов широке застосування в конструкціях, які піддаються динамічним навантаженням, де вимагається поєднання надійності та ефективності.

Волокна, якими армується фібробетон (фібра), переважно є сталйними, рідше – полімерними або скляними. Стальна фібра все частіше використовується при виробництві тримальних залізобетонних конструкцій, оскільки її застосування підвищує пластичність матеріалу та забезпечує більшу міцність навіть після утворення макротріщин. Крім того, додавання сталльної фібри в бетон підвищує його ударну міцність, втомну міцність, збільшує зносостійкість кутів конструкції та змінює характер тріщиноутворення. Всі ці фактори дають можливість проектувальникам частково або навіть повністю замінювати гнуту арматуру та арматурні сітки сталлюю фіброю, що призводить до значного зменшення собівартості конструкцій та помітного зниження їх ваги.

Проте додавання сталльної фібри навіть в незначних концентраціях помітно змінює механічні характеристики новоутвореного матеріалу, що не можна не враховувати під час розрахунку конструкцій. Механічні властивості матеріалу фібри, її геометрична форма та об'ємна частка в бетоні є основними факторами, які впливають на ефективні пружні характеристики фібробетону.

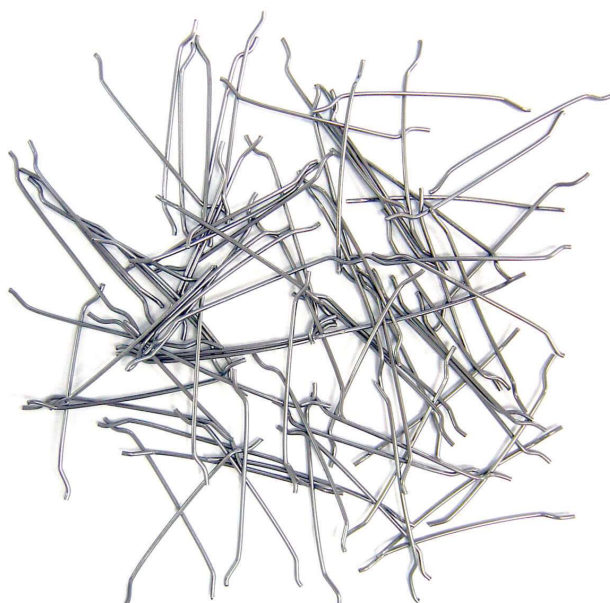


Рис. 6.25. Стальна фібра Wirand FF3 компанії Maccaferri.

Для забезпечення кращого зчеплення з бетоном волокна сталльної фібри здебільшого мають криволінійну вісь (рис. 6.25), що значно ускладнює розрахунок локального напружено-деформованого стану такого включення, що в свою чергу створює складнощі визначення ефективних макрохарактеристик

фібробетону. Пропонований модифікований метод граничних елементів дає можливість точно визначати міжфазні переміщення для включень довільної форми і тому є ефективним у розв'язуванні поставленої задачі.

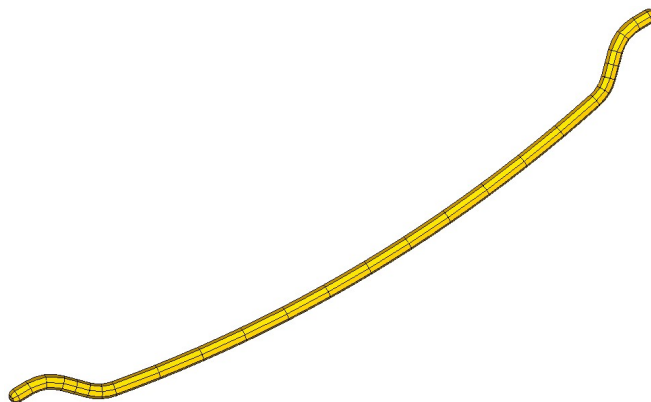


Рис. 6.26. Гранично-елементна модель фібри Wirand FF3 компанії Massacerri.

В роботі проведено теоретичні та експериментальні дослідження ефективних модулів пружності фібробетону, де в якості матриці вибрано бетон марки М250 класу В20 ($E^{(1)} = 26,55 \text{ ГПа}$, $\nu^{(1)} = 0,15$), а наповнювачем виступала стальна фібра марки Wirand FF3 компанії Massacerri довжиною 50 мм і діаметром 0,75 мм ($E^{(2)} = 190 \text{ ГПа}$, $\nu^{(2)} = 0,26$). На основі точної гранично-елементної моделі (рис. 6.26) сталюго включення за формою ідентичного до вибраної марки фібри розв'язано задачі визначення переміщень на його поверхні за виконання на ній ідеальних механічних умов контакту з безмежною матрицею, що перебуває в умовах шести елементарних деформованих станів (трьох розтягів вздовж глобальних координатних осей та трьох зсувів в глобальних координатних площинах). Для цього використано систему ГР (2.6), шість комплектів розв'язків якої для ізолюваного включення зображеного на рис. 6.20 були усереднені за схемою (6.8) для побудови тензора впливу фібра на деформований стан РОЕ, побудованого з врахуванням концентрації фібри в бетоні. Далі за методикою Морі-Танаки (6.11) здійснено розрахунок залежності теоретичних ефективних модулів композиту з впорядковано орієнтованими розглядуваними волокнами від об'ємної частки наповнювача. Остаточню

ефективний модуль Юнга фібробетону знаходимо з виразів (6.24) шляхом числового інтегрування за формулою (6.22) теоретичних ефективних модулів пружності по всіх можливих напрямках орієнтації фібри.

Експериментальне визначення ефективного модуля Юнга даного фібробетону проводилося на зразках у формі призм розміром $100 \times 100 \times 400$ мм на 28 день після їх виготовлення за температури 22°C згідно з національним стандартом [46]. Призми піддавалися стискуючим навантаженням на пресі ПГ-125 (кафедра будівельних конструкцій та мостів, Національний університет «Львівська політехніка»). Вимірювання стискуючих деформації призми на базі близько $2/3$ її повної висоти при силі рівній близько третини руйнуючого навантаження дозволяло визначити умовний модуль пружності фібробетону. Досліди проведені на серіях призм з відносною концентрацією фібри 15 кг/м^3 , 30 кг/м^3 , 45 кг/м^3 , 60 кг/м^3 , 75 кг/м^3 , 90 кг/м^3 по три зразки в кожній серії.



Рис. 6.27. Система індикаторів для вимірювання повздовжніх та поперечних деформацій зразків фібробетону за їх стиску.

Для вимірювання повздовжніх та поперечних деформацій використано систему шести індикаторів годинникового типу (рис. 6.27) першого класу точності (ціна поділки 0,01 мм) встановлених на зразку за допомогою притискних пристосувань у вигляді сталевих рамок, що закріплювалися на зразку за допомогою чотирьох опорних гвинтів – по два із протилежних сторін зразка, що забезпечували їх стабільне щодо зразка положення в процесі випробувань відповідно до фіксованої бази вимірювання деформацій. База вимірювання повздовжніх деформацій становила 250 мм та розташовано на однаковій відстані від торців зразка. Чотири індикатори з вимірювання повздовжніх деформацій були встановлені на чотирьох гранях зразка. Два інші індикатори для вимірювання поперечних деформацій встановлені посередині висоти зразка.

Для проведення замірів до зразка прикладали початкове зусилля обтиснення 2 кН , що надалі приймали за умовний нуль, та збільшували навантаження трьома ступенями по 20 кН , зберігаючи в межах кожного ступеня швидкість навантаження $(0,6 \pm 0,2)\text{ МПа/с}$ і роблячи паузи 4 хв між кожним ступенем навантаження. Потім зразки кожної серії були доведені до руйнування (рис. 6.28).



Рис. 6.28. Зруйновані зразки з фібробетону.

Ефективний модуль юнга зразків фібробетону був обчислений за допомогою лінійного закону Гука шляхом ділення приросту напружень на кожній стадії випробувань на середнє по чотирьох індикаторах з кожної сторони дослідної призми значення приросту повздовжньої деформації. Задля мінімізації випадкової похибки досліджувана величина усереднювалася для кожного зразка за трьома стадіям довантаження, а потім за трьома зразками з кожної серії, що відповідала даній об'ємній концентрації наповнювача.

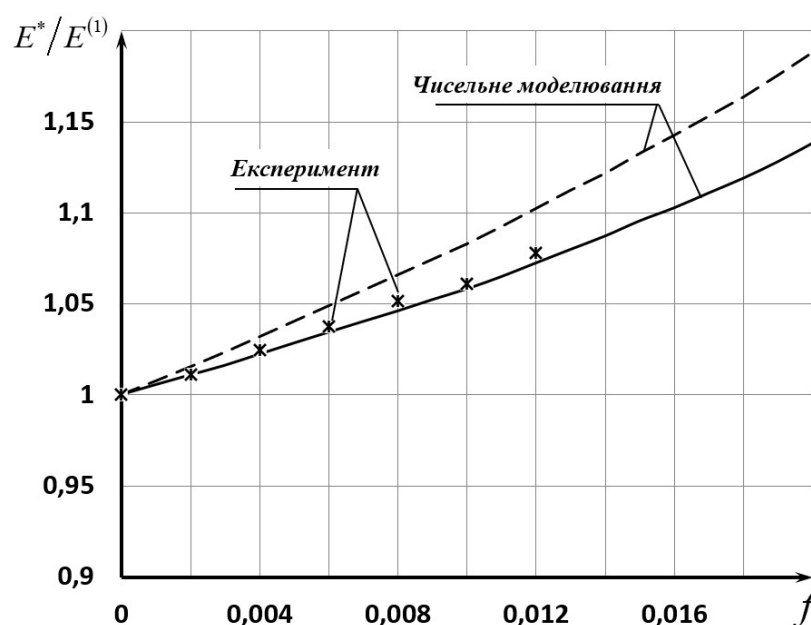


Рис. 6.29. Залежність ефективного модуля Юнга фібробетону від об'ємної концентрації стальної фібри.

На рис. 6.29 показано порівняння результатів чисельного моделювання ефективного модуля Юнга фібробетону армованого криволінійною фіброю Wirand FF3 (суцільна крива) та випрямленими стальними волокнами такої ж довжини та з аналогічними механічними характеристиками (штрихова крива) з результатами експерименту описаного в даному параграфі.

Зауважимо, що незначне відхилення результатів експерименту від значень ефективного модуля Юнга змодельованих запропонованим методом (суцільна крива) можна пояснити крайовим ефектом зовнішньої поверхні призматичного зразка з якою безпосереднього контактують деякі стальні волокна. А у випадку числового моделювання бетонна матриця вважалася безмежною.

6.5. Висновки до шостого розділу

Числове дослідження ефективних властивостей тривимірних композитів з неканонічними щодо форми та міжфазного контакту включеннями ґрунтується на можливості безпосереднього залучення граничноелементних розв'язків у гомогенізаційний алгоритм Морі-Танаки як інтегральних складових відповідних тензорів впливу. У випадках макроанізотропії композиту з однонаправленими скінченними волокнами і його макроізотропії для випадково орієнтованих волокон спостережено як збільшення, так і зменшення окремих ефективних модулів пружності від викривлення і проковзування наповнювальних елементів. Виявлений контраст виразніший для композитів з більшими об'ємною фракцією, жорсткістю та видовженням волокон.

За умови ковзного міжфазного контакту ефективні теоретичні модулі пружності (крім C_{33}^*) практично не залежать від відносної довжини однаково орієнтованих волокон в композиті. Величина C_{33}^* демонструє плавне зростання зі збільшенням довжини волокон. Натомість зі збільшенням об'ємної частки волокон всі ефективні теоретичні модулі пружності монотонно зростають окрім C_{44}^* , який дещо зменшується.

Викривлення осі коротких пружних волокон з відносною жорсткістю $G^{(2)}/G^{(1)} = 10$ як і ковзні умови їх зчеплення з матрицею знижують ефективні модулі Юнга макро-ізотропного композиту з у 1,5-2 рази за об'ємної частки наповнювача $f = 0,3$ відносно ефективних модулів Юнга композиту армованого прямими ідеально сконтактованими з матрицею волокнами. Водночас ефективні коефіцієнти Пуассона зростають на 3-10 %;

Для фібробетонів армованих сталлю фіброю з стандартною густиною наповнювача 60 кг/м^3 неврахування кривизни осі сталюї фібри призводить до похибки у визначенні ефективного модуля Юнга на 2-3 %;

Збільшення вдвічі відносної довжини ідеально зконтактованого з матрицею волокна з об'ємною часткою $f = 0,2$ макроскопічно ізотропного композиту з $5R$ до $10R$ приводить до зростання ефективного модуля Юнга від 6 % для відносної жорсткості наповнювача $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$ до 30 % для відносної жорсткості наповнювача $E^{(2)}/E^{(1)} = 100$. Для випадку ковзного контакту волокон з матрицею таке збільшення відбувається на 1-2 % незалежно від його відносної жорсткості;

За ковзного контакту з матрицею прямих сфероциліндричних хаотично орієнтованих і випадково розташованих волокон за відносної їх жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} > 50$ ці волокна можна вважати абсолютно жорсткими, оскільки цей параметр практично не впливає на ефективні пружні властивості макроскопічно ізотропного композиту. Ефективний коефіцієнт Пуассона такого середовища крім того не залежить від відносної довжини волокон.

РОЗДІЛ 7

ВРАХУВАННЯ МАТЕРІАЛІЗАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ТА НАНОРОЗМІРНИХ ЕФЕКТІВ У КОМПОЗИТНИХ І ПОРИСТИХ ТІЛАХ З НАПОВНЮВАЧАМИ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

Різниця між енергією міжатомної взаємодії у безпосередній близькості від пустотних чи міжфазних поверхонь та всередині пружного тіла є причиною виникнення спеціальних поверхневих деформацій та залишкових напружень, внесок яких у загальне поле зростає із зменшенням характерного розміру поверхонь (що супроводжується збільшенням їх питомої частки в одиниці об'єму) і стає суттєво відчутним на нанорівні. У рамках положень континуальної механіки та багаторівневого підходу («multiscale approach») привнесення цих наноструктурних факторів забезпечується наділенням поверхонь власними матеріальними властивостями. Тоді важливим є дослідження впливу пружності та натягу матеріальних поверхонь на об'ємні деформації і напруження всередині нанокомпозитного чи нанопористого тіл та відповідні ефективні модулі пружності у залежності як від кривизни цих поверхонь, так і контрасту їх жорсткості стосовно утворювальних матеріалів. Оскільки поверхневі та об'ємні пружні константи мають різну розмірність, то при такому аналізі неодмінно з'являється ефект залежності результатів від розмірів наповнювальних часток. Як випливає із експериментальних досліджень [373], величини поверхневих пружних модулів стають співставними з об'ємними після їх масштабування розмірами, що досягаються за розгляду нановключень чи нанопорожнин.

У цьому розділі дається спосіб числового розв'язання тривимірних задач пружної рівноваги безмежної матриці з нанорозмірним включенням або порожниною через поєднання гранично-елементної схеми дискретизації із скінченнорізницеvim аналогом нанорівневої мембранної моделі матеріальної поверхні (міжфазної чи пустотної) з власною пружністю та натягом. Шляхом ви-

користання цих розв'язків як конструктивних в узагальнених на випадок присутності стрибків напружень на міжфазних та пустотних поверхнях гомогенізаційних співвідношеннях Морі-Танаки визначено ефективні модулі пружності нанокомпозитного та нанопористого середовища з розподіленими включеннями та порожнинами. Числові результати стосуються нановключення (нанопорожнини) у формі кулі і обмеженого півсферами циліндричного волокна (нанотрубки) за умов їх поверхневого натягу та однорідного навантаження матриці на безмежності, а також однакової та хаотичної орієнтацій розподілених наповнювачів такого типу у нанокомпозиті (нанопористому середовищі).

Матеріали розділу викладені в працях [161, 458].

7.1. Побудова системи з диференціальних та інтегральних рівнянь для тривимірних нанорівневих задач контакту пружних безмежної матриці та включення через матеріальну поверхню

Нехай безмежна пружна ізотропна матриця Ω_1 містить нанорозмірне включення Ω_2 довільної форми, яке обмежене гладкою поверхнею S (рис. 7.1). Як фактор впливу на нанорівні, розглядатимемо цю поверхню як ідеально сконтактовану з прилеглими середовищами двовимірну оболонку нульової товщини (мембрану), що характеризується поверхневими пружними константами Ляме λ_s , G_s та заданим поверхневим натягом τ_s з розмірністю $[H/m]$, порядок яких за наномасштабування співрозмірний з константами Ляме λ_m та G_m , $m = 1, 2$ прилеглих матеріалів (тут і надалі індекс «1» стосуватиметься матриці, а індекс «2» - включення).

Нехай вектори $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ позначають нормальний та тангенціальні до матеріалізованої поверхні S ортогональні орти. Глобальну систему координат $Ox_1x_2x_3$ виберемо з початком у внутрішній точці

включення, а локальні системи координат в кожній точці міжфазної поверхні $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ орієнтуємо вздовж ортів $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ та $\mathbf{n}$ відповідно.

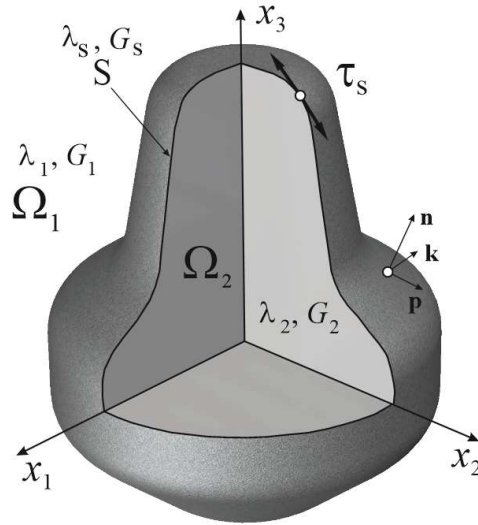


Рис. 7.1. Включення з матеріалізованою міжфазною поверхнею у пружній матриці.

Виходячи з моделі Підстригача-Повстенка-Гуртіна-Мердока матеріалізованої поверхні [128, 284] узагальнені крайові умови для її наопису передбачають рівність переміщень та стрибки компонент напружень або відповідного вектору зусиль за наближення до неї з боку матриці та включення і записуються у введених на поверхні S локальних системах координат таким чином:

$$\begin{aligned}
 u_{i'}^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_{i'}^{(2)}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} u_{i'}(\mathbf{x}), \quad i' = \overline{1, 3}; \\
 \Delta t_{3'}(\mathbf{x}) &= \sigma_{3'3'}^{(1)}(\mathbf{x}) - \sigma_{3'3'}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \sigma_{3'1'}^s)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_1 \sigma_{3'2'}^s)}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\sigma_{1'1'}^s}{\rho_{1'}} + \frac{\sigma_{2'2'}^s}{\rho_{2'}}; \\
 \Delta t_{i'}(\mathbf{x}) &= \sigma_{3'i'}^{(1)}(\mathbf{x}) - \sigma_{3'i'}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_{3-i'} \sigma_{i'i'}^s)}{\partial \xi_i} + \frac{\partial(h_{i'} \sigma_{3-i', i'}^s)}{\partial \xi_{3-i}} \right] + \sigma_{i', 3-i'}^s \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_{3-i}} - \\
 &\quad - \sigma_{3-i', 3-i'}^s \frac{\partial h_{3-i'}}{\partial \xi_i} \left] - \frac{\sigma_{3'i'}^s}{\rho_{i'}}, \quad i' = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

де штрихами позначені напрямки вздовж локальних координатних осей ($3'$ – напрямком нормалі до поверхні, а $1'$ та $2'$ – дотичні до поверхні напрямки ортів

$\mathbf{k}$ та $\mathbf{p}$); $h_{i'}$ ($i' = 1, 2$) - геометричні константи Ляме поверхні S ; $\rho_{i'}$ ($i' = 1, 2$) – локальні радіуси її головних кривин. Поверхневі напруження $\sigma_{ij'}^s$ у виразах (7.1) подамо у формі [343]:

$$\begin{aligned}\sigma_{i'i'}^s(\mathbf{x}) &= \tau_s + (2G_s - \tau_s)\varepsilon_{i'i'} + (\lambda_s + \tau_s)(\varepsilon_{1'1'} + \varepsilon_{2'2'}), \quad i' = 1, 2; \\ \sigma_{3'i'}^s(\mathbf{x}) &= \tau_s \left(\frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{3'}}{\partial \xi_i} - \frac{u_{i'}}{\rho_{i'}} \right), \quad i' = 1, 2; \\ \sigma_{i'j'}^s(\mathbf{x}) &= 2(\mu_s - \tau_s)\varepsilon_{i'j'} + \tau_s \left(\frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{j'}}{\partial \xi_i} - \frac{u_{i'}}{h_{i'}h_{j'}} \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_j} \right), \quad i' \neq j'; i', j' = 1, 2,\end{aligned}\tag{7.2}$$

а співвідношення Коші для матеріальної поверхні будуть:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i'i'}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{i'}}{\partial \xi_i} + \frac{u_{3-i'}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_{3-i'}} + \frac{u_{3'}}{\rho_{i'}}, \quad i' = 1, 2; \\ \varepsilon_{i'j'}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_{i'}} \frac{\partial u_{j'}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{h_{j'}} \frac{\partial u_{i'}}{\partial \xi_j} - \frac{u_{i'}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_2} - \frac{u_{2'}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_{j'}}{\partial \xi_1} \right], \quad i' \neq j'; i', j' = 1, 2.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Підставляючи співвідношення (7.3) у формули (7.2), а потім (7.1), отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь пружного деформування поверхні S , які визначені в цій області та пов'язують покомпонентно стрибки компонент вектора зусиль на ній з переміщеннями, їх першими та другими похідними за дотичними напрямками.

Слід зауважити, що математична модель гладкої матеріалізованої міжфазної поверхні S (7.1) – (7.3) не виключає можливості розривів першого роду стосовно її коефіцієнтів Ляме та радіусів головних кривин на деякому замкнутому контурі, як наприклад за переходу циліндричної поверхні у сферичну. Тоді відповідні рівняння рівноваги формулюються на кожній із частин поверхні із забезпеченням умов сумісності деформацій на контурі їх з'єднання, а саме, неперервності переміщень та кутів повороту поверхні..

Щодо компонент «матриця-включення», то інтегральні рівняння їх взаємодії з безпосереднім урахуванням рівності переміщень з обох сторін поверхні та збереженням індивідуальності компонент відповідних зусиль, виходячи із гранично-інтегрального формулювання (2.3) у глобальній системі координат, приймають форму:

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \\
 \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0, \\
 i = \overline{1, 3}, \mathbf{x} \in S,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

де $\mathbf{u}^{(0)}(u_{01}, u_{02}, u_{03})$ – відоме поле переміщень від статичного навантаження на безмежності однорідного простору з механічними властивостями матриці; $U_{ij}^{(m)}, T_{ij}^{(m)} (i, j = \overline{1, 3}, m = 1, 2)$ – тривимірні фундаментальні розв'язки, що визначаються формулами (2.4).

Оскільки на міжфазній поверхні реалізується стрибок $\Delta t_i(\mathbf{x})$ компонент вектора зусиль, то для зручності у глобальній системі координат зв'язок між компонентами зусиль зі сторони матриці і включення можна ввести співвідношеннями $t_i^{(1)}(\mathbf{x}) = t_i^{(2)}(\mathbf{x}) + \Delta t_i(\mathbf{x}) (i = \overline{1, 3})$ з переходом цих стрибків від глобальної до локальної систем координат залежностями $\Delta t_i(\mathbf{x}) = n_i \Delta t_{3'}(\mathbf{x}) + k_i \Delta t_{1'}(\mathbf{x}) + p_i \Delta t_{2'}(\mathbf{x}) (i = \overline{1, 3})$. Тоді у нових величинах інтегральні рівняння (7.4) набувають форми

$$u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_i \Delta t_{3'}(\boldsymbol{\eta}) + k_i \Delta t_{1'}(\boldsymbol{\eta}) + p_i \Delta t_{2'}(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,3} \\
& \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Система дев'яти рівнянь з трьох диференціальних (7.1) та шести граничних інтегральних (7.5) є замкнутою відносно компонент вектора переміщень на міжфазній поверхні $u_i(\mathbf{x})$ ($i = \overline{1,3}$) в глобальній системі координат, компонент вектора зусиль на поверхні включення $t_i^{(2)}(\mathbf{x})$ ($i = \overline{1,3}$) в глобальній системі координат та стрибків компонент вектора зусиль на міжфазній поверхні з боку матриці та включення $\Delta t_{i'}(\mathbf{x})$ ($i' = \overline{1,3}$) в локальній системі координат.

За розв'язками цієї системи рівнянь можна визначити напруження у матриці і включенні, використовуючи запис співвідношень (2.11) у термінах введених розрахункових функцій, а саме:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}) &= \sum_{s=1}^3 \iint_S D_{ijs}^{(m)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_s^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{s=1}^3 \iint_S L_{ijs}^{(m)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{n}) u_s(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \delta_{m1} \times \\
&\times \sum_{s=1}^3 \iint_S D_{ijs}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_s \Delta t_{3'}(\boldsymbol{\eta}) + k_s \Delta t_{1'}(\boldsymbol{\eta}) + p_s \Delta t_{2'}(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_m. \quad (7.6)
\end{aligned}$$

де фундаментальні розв'язки $D_{ijs}^{(m)}$, $L_{ijs}^{(m)}$ задаються співвідношеннями (2.12).

Із отриманих формулювань, як окремий випадок, впливають рівняння пружної рівноваги безмежного простору з вільною від навантажень порожниною (порою), поверхня якої є матеріальною. Це досягається граничним переходом до $G_2 = 0$ та $t_i^{(2)}(\mathbf{x}) = 0$. Тоді система результуючих рівнянь спрощуються до трьох диференціальних та трьох граничних інтегральних рівнянь сто-

совно компонент векторів поверхневих переміщень $u_i(\mathbf{x})$ ($i = \overline{1,3}$) (у глобальній системі координат) та згенерованих матеріальною поверхнею зусиль $t_{i'}^{(1)}$ ($i' = \overline{1,3}$) на матрицю (у локальній системі координат) і набирає вигляду:

$$t_{3'}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1 h_{2'}} \left[\frac{\partial(h_{2'} \sigma_{3'1'}^s)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(h_{1'} \sigma_{3'2'}^s)}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\sigma_{1'1'}^s}{\rho_{1'}} + \frac{\sigma_{2'2'}^s}{\rho_{2'}};$$

$$t_{i'}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{h_1 h_{2'}} \left[\frac{\partial(h_{3-i'} \sigma_{i'i'}^s)}{\partial \xi_i} + \frac{\partial(h_{i'} \sigma_{3-i',i'}^s)}{\partial \xi_{3-i}} + \sigma_{i',3-i'}^s \frac{\partial h_{i'}}{\partial \xi_{3-i}} - \sigma_{3-i',3-i'}^s \frac{\partial h_{3-i'}}{\partial \xi_i} \right] - \frac{\sigma_{3'i'}^s}{\rho_{i'}},$$

$$i' = 1, 2, \quad (7.7)$$

$$u_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) [u_j(\boldsymbol{\eta}) - u_j(\mathbf{x})] d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_i t_{3'}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) + k_i t_{1'}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) + p_i t_{2'}^{(1)}(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (7.8)$$

У отриманих граничних інтегральних рівняннях, на відміну формулювань задач у попередніх розділах, умови спряження компонент тіла враховуються лише частково щодо неперервних на матеріальній поверхні S переміщень. Це пояснюється присутністю в решті умов на стрибки компонент вектора зусиль диференціальних операторів, внесення яких у інтегральні складові приводило б до інтегро-диференціальних рівнянь та затратних обчислень інтегралів згорток фундаментальних розв'язків з похідними від шуканих функцій.

Результуючі системи рівнянь допускають перехід до окремих класів задач, спричинених різним щодо походження силовим навантаженням матриці з включенням (порожниною) та особливостями матеріальної поверхні їх контакту. Так врахування лише заданого натягу позбавленої власної пружності

матеріальної поверхні досягається, коли $\lambda_s = 0$, $G_s = 0$, $u_{0i} = 0$ ($i = \overline{1,3}$), поверхневих натягу та пружності, коли $u_{0i} = 0$ ($i = \overline{1,3}$) (в обох цих випадках граничні інтегральні рівняння у системі вироджуються в однорідні), навантаження матриці на безмежності за наділення міжфазної поверхні лише власною пружністю, коли $\tau_s = 0$, навантаження матриці на безмежності за наділення міжфазної поверхні лише поверхневим натягом, коли $\lambda_s = 0$, $G_s = 0$.

7.2. Поєднання та верифікація скінченнорізницевого та граничноелементного алгоритмів числового розв'язання задач зі сферичними нановключенням та нанопорожниною

Нехай пружні безмежна матриця та кульове включення з радіусом R (рис. 7.2) розділені матеріальною поверхнею із заданим натягом τ_s та пружними модулями λ_s , G_s . Початок відліку глобальної системи координат виберемо у центрі включення. За введення сферичних координат (r, φ, θ) , коли $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$; $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$; $x_3 = r \cos \theta$; ($0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$), геометричні параметри поверхні включення будуть: $h_1 = R \sin \theta$; $h_2 = R$; $\rho_\varphi = R$; $\rho_\theta = R$; $\partial h_1 / \partial \theta = R \cos \theta$; $\partial h_1 / \partial \varphi = \partial h_2 / \partial \varphi = \partial h_2 / \partial \theta = 0$.

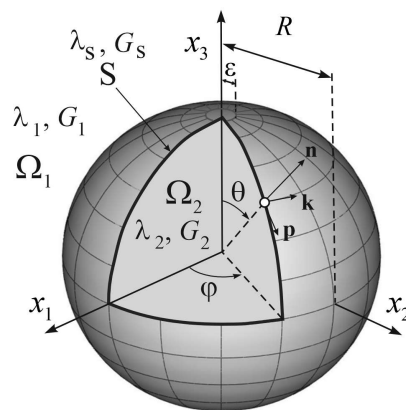


Рис. 7.2. Матриця з кульовим включенням та матеріалізованою міжфазною поверхнею.

Тоді, здійснюючи у співвідношеннях (7.1)–(7.3) перехід до сферичної

системи координат, отримаємо диференціальні рівняння пружного деформування сферичної матеріальної поверхні у вигляді зв'язку між стрибками компонент радіальних (по нормалі), азимутальних та зенітних (по дотичних напрямках) зусиль на ній та відповідними їй переміщеннями (включно з другими похідними), а саме [343]:

$$\begin{aligned}
 \Delta t_n(\mathbf{x}) &= 2\frac{\tau_s}{R} + 2\frac{G_s + \lambda_s + \tau_s}{R^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\frac{2G_s + 2\lambda_s + \tau_s}{R^2} u_n - \\
 &\quad - \frac{\tau_s}{R^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} \right]; \\
 \Delta t_\varphi(\mathbf{x}) &= -\frac{2G_s + \lambda_s}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\lambda_s + G_s}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(G_s + \lambda_s + \tau_s)}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{3G_s + \lambda_s}{R^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{G_s}{R^2} \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right] + \left[\operatorname{ctg}^2 \theta G_s - G_s + 2\tau_s \right] \frac{u_\varphi}{R^2}; \\
 \Delta t_\theta(\mathbf{x}) &= -2\frac{G_s + \lambda_s + \tau_s}{R^2} \frac{\partial u_n}{\partial \theta} - \frac{G_s}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} - \frac{2G_s + \lambda_s}{R^2} \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - \\
 &\quad - \frac{G_s + \lambda_s}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{3G_s + \lambda_s}{R^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\lambda_s + 2\tau_s + (2G_s + \lambda_s) \operatorname{ctg}^2 \theta}{R^2} u_\theta. \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Доповняльні граничні інтегральні рівняння пружної рівноваги включення та матриці (7.5) запишемо з урахуванням перетворень стрибків компонент вектора зусиль у сферичній системі координат:

$$\begin{aligned}
 n_i u_n(\mathbf{x}) + k_i u_\varphi(\mathbf{x}) + p_i u_\theta(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 (n_j u_n(\mathbf{x}) + k_j u_\varphi(\mathbf{x}) + p_j u_\theta(\mathbf{x})) \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_\eta S - \\
 - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_j u_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j u_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j u_\theta(\boldsymbol{\eta})) d_\eta S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_\eta S + \\
 + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_i \Delta t_n(\boldsymbol{\eta}) + k_i \Delta t_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_i \Delta t_\theta(\boldsymbol{\eta})) d_\eta S = u_{0i}(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^3 \left(n_j u_n(\mathbf{x}) + k_j u_\varphi(\mathbf{x}) + p_j u_\theta(\mathbf{x}) \right) \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j u_n(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\
& \left. + k_j u_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j u_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (7.10)
\end{aligned}$$

де орти локальної системи координат визначаємо виразами $n_1 = \sin \theta \cos \varphi$; $n_2 = \sin \theta \sin \varphi$; $n_3 = \cos \theta$; $k_1 = \sin \varphi$; $k_2 = \cos \varphi$; $k_3 = 0$; $p_1 = \cos \theta \cos \varphi$; $p_2 = \cos \theta \sin \varphi$; $p_3 = \sin \theta$.

Для постановок задач з різною розмірністю модулів пружності важливим є перехід до відносних величин з метою зручності подальшого порівняльного аналізу та виявлення розмірозалежних ефектів. Виходячи це, введемо у системі диференціальних (7.9) та інтегральних (7.10) рівнянь такі відносні величин та безрозмірні координати:

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}_n = \frac{u_n}{R}; \quad \Delta \tilde{t}_n = \frac{\Delta t_n}{G_1}; \quad \tilde{G}_s = \frac{G_s}{G_1 R}; \quad \tilde{u}_{0i} = \frac{u_{0i}}{R}; \quad \tilde{U}_{ij}^{(k)} = R \cdot G_1 \cdot U_{ij}^{(k)}, \quad (i, j = \overline{1,3}, k = 1, 2) \\
& ; \\
& \tilde{u}_\varphi = \frac{u_\varphi}{R}; \quad \Delta \tilde{t}_\varphi = \frac{\Delta t_\varphi}{G_1}; \quad \tilde{\tau}_s = \frac{\tau_s}{G_1 R}; \quad \tilde{t}_i^{(2)} = \frac{t_i^{(2)}}{G_1}; \quad \tilde{T}_{ij}^{(k)} = R^2 \cdot T_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,3}, k = 1, 2); \\
& \tilde{u}_\theta = \frac{u_\theta}{R}; \quad \Delta \tilde{t}_\theta = \frac{\Delta t_\theta}{G_1}; \quad \tilde{\lambda}_s = \frac{\lambda_s}{G_1 R}; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{R}. \quad (7.11)
\end{aligned}$$

У нових позначеннях результуюча система дев'яти рівнянь задачі матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& \Delta \tilde{t}_n(\tilde{\mathbf{x}}) = 2\tilde{\tau}_s + 2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{u}_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + 2(2\tilde{G}_s + 2\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \tilde{u}_n - \\
& - \tilde{\tau}_s \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \theta^2} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{t}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = & -\frac{2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s)}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \varphi} - \\
& -\frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} \right] + \left[\operatorname{ctg}^2 \theta \tilde{G}_s - \tilde{G}_s + 2\tilde{\tau}_s \right] \tilde{u}_\varphi; \\
\Delta \tilde{t}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) = & -2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} - \frac{\tilde{G}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi^2} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - \\
& -\frac{\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + (\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \operatorname{ctg}^2 \theta) \tilde{u}_\theta. \quad (7.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n_i \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_i \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_i \tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \\
& - \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{t}_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_i \Delta \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_i \Delta \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_i \Delta \tilde{t}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = \tilde{u}_{0i}(\tilde{\mathbf{x}}), \\
& - \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\
& \left. + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{t}_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = 0, i = \overline{1,3}, \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}, \quad (7.13)
\end{aligned}$$

де $\tilde{S}$ – сферична поверхня одиничного радіуса.

З метою числового розв'язування системи рівнянь (7.12), (7.13) поверхня $\tilde{S}$ покривається сіткою чотирикутних восьмивузлових суперпараметричних граничних елементів (рис. 7.2) за винятком малих ε -околів полюсів $(0,0,1)$ та $(0,0,-1)$ через присутність породжених сферичною системою координат усунених особливостей порядку $1/\sin(\theta)$ у точках $\theta = 0$ та $\theta = \pi$. Інтеграли в рівняннях (7.13) по поверхні $\tilde{S}$ замінюємо сумою інтегралів по граничних елементах. Невідомі нормалізовані значення компонент векторів переміщень $\tilde{u}_n$,

$\tilde{u}_\varphi$, $\tilde{u}_\theta$ та стрибків зусиль $\Delta\tilde{t}_n$, $\Delta\tilde{t}_\varphi$, $\Delta\tilde{t}_\theta$ міжфазної матеріалізованої поверхні у локальній системі координат, а також вектора зусиль на поверхні включення $\tilde{t}_i$ ($i = \overline{1,3}$) у глобальній системі координат лінійно апроксимуємо через їх значення у кутових (опорних) вузлах граничних елементів, як описано в розділі 2. В рівняннях (7.12) похідні від компонент вектора переміщень в опорних вузлах граничних елементів подаємо через їх вузлові значення за допомогою скінченних різниць. Зокрема, перші похідні від переміщень апроксимуватимемо на двоточковому, другі однойменні – триточковому скінченнорізницевою та змішані – п'ятиточковому хрестовому шаблонах, вузли яких збігаються з опорними вузлами сітки граничних елементів. Так за введення глобальної нумерації вузлів та граничних елементів на сферичній поверхні як показано на рис. 7.3, відповідні наближення будуть для похідних по полярному куту ($\Delta\theta = \pi/2N_s$):

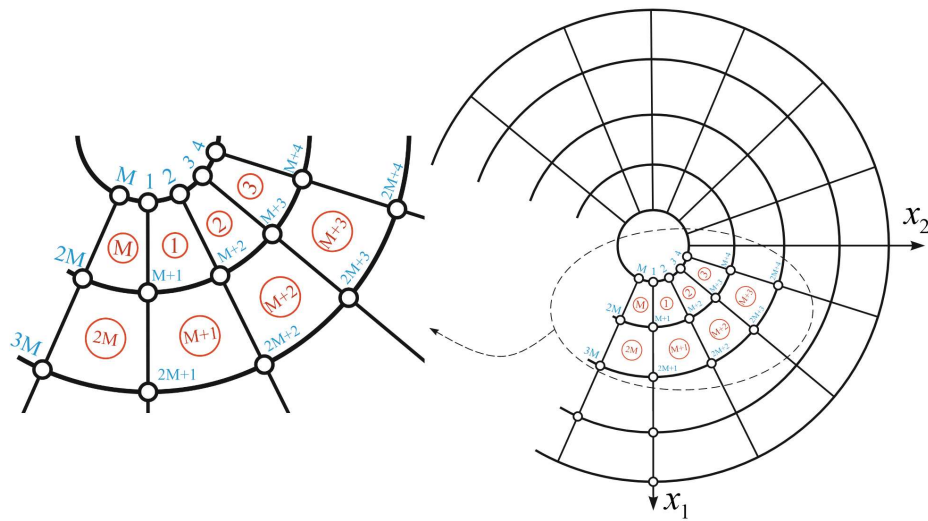


Рис. 7.3. Схема глобальної нумерації вузлів та граничних елементів сферичної поверхні нановключення за розбиття азимутального кута на M частин та полярного кута на N_s частин (вид зверху).

$1 \leq i \leq M$ (перший ряд опорних вузлів)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_i = \frac{1}{\Delta\theta}(-u_i + u_{i+M}), \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta\theta^2}(u_i - 2u_{i+M} + u_{i+2M});$$

$M + 1 \leq i \leq (N_s - 1)M + 1$ (внутрішні опорні вузли)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\theta} (-u_{i-M} + u_{i+M}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta\theta^2} (u_{i-M} - 2u_i + u_{i+M});$$

$N_s M + 1 \leq i \leq (N_s + 1)M$ (останній ряд опорних вузлів)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_i = \frac{1}{\Delta\theta} (-u_{i-M} + u_i); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta\theta^2} (u_{i-2M} - 2u_{i-M} + u_i). \quad (7.14)$$

Похідні від переміщень по азимутальному куту сферичної поверхні
($\Delta\varphi = 2\pi/M$):

$i = kM + 1, k = \overline{0, 2N_s}$ (опорні вузли першого меридіану)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} (-u_{i+M-1} + u_{i+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2} (u_{i+M-1} - 2u_i + u_{i+1});$$

$kM + 2 \leq i \leq (k+1)M - 1, k = \overline{0, 2N_s}$ (внутрішні опорні вузли)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} (-u_{i-1} + u_{i+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1});$$

$i = (k+1)M, k = \overline{0, 2N_s}$ (опорні вузли останнього меридіану)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} (-u_{i-1} + u_{i-M+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i-M+1}). \quad (7.15)$$

Змішані похідні від переміщень:

$i = kM + 1, k = \overline{0, N_s}; k = \overline{N_s + 1, 2N_s}$ (опорні вузли першого меридіану)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i+M-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i+1} \right);$$

$kM + 2 \leq i \leq (k+1)M - 1$, $k = \overline{0, N}$; $k = \overline{N_s + 1, 2N_s}$ (внутрішні опорні вузли)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i+1} \right);$$

$i = (k+1)M$, $k = \overline{0, N}$; $k = \overline{N_s + 1, 2N_s}$ (опорні вузли останнього меридіану)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{i-M+1} \right). \quad (7.16)$$

Регулярні інтеграли в рівняннях (7.13) обчислюємо за формулами Гауса-Лежандра (2.20). Якщо точка інтегрування $\boldsymbol{\eta} \in \tilde{S}$ та точка поля $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}$ належать одному граничному елементу, то необхідно провести процедуру чисельної регуляризації (2.23) - (2.27) перед обчисленням інтеграла по цьому граничному елементу. В результаті проведення процедур дискретизації системи рівнянь (7.12), (7.13) та їх сумісного задоволення у колокаційних точках на поверхні, що збігаються зі всіма L_2 опорними вузлами граничноелементної сітки, отримуємо за рівномірного розбиття азимутального кута на M частин і полярного кута на N_s частин замкнуту систему $9L_2 = 9(N_s + 1)M$ лінійних алгебраїчних рівнянь. У операторній формі із введенням векторів невідомих функцій $\boldsymbol{\alpha}$ і правих частин $\boldsymbol{\beta}$ вона записується як

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}.$$

Структура матриці жорсткості $\mathbf{A}$ цієї системи блоками розмірністю $L_2 \times L_2$ має вигляд:

[illegible]

де $w = \overline{1, L_2}$; по індексу « j » ведеться сумування; $\{\mathbf{I}\}_{L_2 \times L_2}$ та $\{\mathbf{0}\}_{L_2 \times L_2}$ – одинична та нульова матриці відповідно; $\{\mathbf{D}_{ij}\}_{L_2 \times L_2} (i, j = \overline{1, 3})$ - матриці коефіцієнтів скінченних різниць компонент вектора переміщень (7.14)-(7.16) в рівняннях (7.12)

$$\hat{\mathbf{A}}_{i1wv(q,2s-1)}^{(k)} = \sum_{m=1}^3 A_{im}^{(k)qsw} n_m - \delta_{wv(q,2s-1)} \sum_{m=1}^3 C_{im}^{(k)w} n_m - \delta_{1k} \delta_{i1} \delta_{wv(q,2s-1)} n_i ;$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i2wv(q,2s-1)}^{(k)} = \sum_{m=1}^3 A_{im}^{(k)qsw} k_m - \delta_{wv(q,2s-1)} \sum_{m=1}^3 C_{im}^{(k)w} k_m - \delta_{1k} \delta_{i2} \delta_{wv(q,2s-1)} k_i ;$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i3wv(q,2s-1)}^{(k)} = \sum_{m=1}^3 A_{im}^{(k)qsw} p_m - \delta_{wv(q,2s-1)} \sum_{m=1}^3 C_{im}^{(k)w} p_m - \delta_{1k} \delta_{i3} \delta_{wv(q,2s-1)} p_i ;$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{ijwv(q,2s-1)}^{(k)} = B_{ij}^{(k)qsw} ; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, 2}, \quad s = \overline{1, N_q}, \quad q = \overline{1, L_1}, \quad w = \overline{1, L_2} .$$

Константи $A_{ij}^{(k)qsw}$, $B_{ij}^{(k)qsw}$, $C_{ij}^{(k)w}$ у випадку сітки суперпараметричних граничних елементів визначаються формулами (2.29). Структура векторів невідомих та вільних членів є наступною:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \Delta \tilde{t}_n \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \Delta \tilde{t}_\varphi \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \Delta \tilde{t}_\theta \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{t}_1^{(2)} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{t}_2^{(2)} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{t}_3^{(2)} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_n \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_\varphi \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_\theta \right\}_{L_2 \times 1} \end{array} \right\} ; \quad \boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ 2\tilde{\tau}_s \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{0} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{0} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{0} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{0} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{0} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_{01} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_{02} \right\}_{L_2 \times 1} \\ \left\{ \tilde{u}_{03} \right\}_{L_2 \times 1} \end{array} \right\} ;$$

Дискретні розв'язки системи рівнянь (7.12), (7.13) використовуємо для визначення відносних напружень в матриці та включенні за формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = & \delta_{1k} \tilde{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{x}) + \frac{(-1)^k}{1-\nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} D_{ijm}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left[\tilde{t}_m^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) + \delta_{1k} (n_m \Delta \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \Delta \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\ & \left. + p_m \Delta \tilde{t}_\theta(\boldsymbol{\eta})) \right] d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \frac{(-1)^{k+1} G_k}{(1-\nu_k) G_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} L_{ijm}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) (n_m \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{u}_\theta(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S}, \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega_k, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.17)$$

де функції $D_{ijm}^{(k)}$ та $L_{ijm}^{(k)}$ задаються виразами (2.12).

За граничного переходу $\lambda_2 = G_2 = 0$; $\tilde{t}_m^{(2)} = 0$ окрема математична модель кульової порожнини з матеріальною поверхнею у пружному безмежному просторі описується системою трьох диференціальних і трьох інтегральних рівнянь, яка відносно нормалізованих значення компонент векторів переміщень $\tilde{u}_n, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_\theta$ цієї поверхні та зусиль $\tilde{t}_n, \tilde{t}_\varphi, \tilde{t}_\theta$ на ній у локальній системі координат буде:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n(\mathbf{x}) = & 2\tilde{\tau}_s + 2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{u}_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + 2(2\tilde{G}_s + 2\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \tilde{u}_n - \\ & - \tilde{\tau}_s \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \theta^2} \right]; \\ \tilde{t}_\varphi(\mathbf{x}) = & -\frac{2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s)}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} \right] + \left[\operatorname{ctg}^2 \theta \tilde{G}_s - \tilde{G}_s + 2\tilde{\tau}_s \right] \tilde{u}_\varphi; \\ \tilde{t}_\theta(\mathbf{x}) = & -2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} - \frac{\tilde{G}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi^2} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \operatorname{ctg}^2 \theta \right) \tilde{u}_\theta. \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} n_i \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_i \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_i \tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \\ - \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_i \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\ \left. + k_i \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_i \tilde{t}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = \tilde{u}_{0i}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

У цьому випадку із застосуванням викладених вище дискретизаційних процедур задача зводиться до розв'язування системи $6(N+1)M$ лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тоді відносні напруження за межами порожнини знаходимо через числові розв'язки системи рівнянь (7.18), (7.19) за формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) = \tilde{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{x}) - \frac{1}{1-\nu_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} D_{ijm}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_m \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{t}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \\ + \frac{1}{1-\nu_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} L_{ijm}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_m \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{u}_\theta(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

7.2.1. Апробація числового алгоритму на задачах з натягом поверхні сферичного нановключення та нанопорожнини

Аналітичний розв'язок задачі поверхневого натягу поверхні сферичної нанопорожнини у безмежному пружному тілі без інших додаткових навантажень отримано в роботі [299] з таким кульовим розподілом напружень вздовж радіальної координати r

$$\sigma_{nn}(r) = -2\sigma_{\theta\theta}(r) = -2\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{2G_1\tau_s}{G_1R + \lambda_s + G_s + \tau_s/2} \left(\frac{R}{r} \right)^3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7.21)$$

У табл. 7.1 для різної густини сітки граничних елементів подано та співставлено результати числового розрахунку викликаних натягом сталих радіальних (нормальних) напружень $\sigma_{nn} R/\tau_s$ на поверхні сферичної порожнини коли $r = R$, радіусом $R = 5 \text{ нм}$. Тут і надалі у цьому підрозділі використовуємо дані щодо поверхні, яка відповідає свіжосколотому залізу («freshly cleaved iron») [299] з такими механічними характеристиками: $G_1 = 70 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,26$, $G_s = 2,5 \text{ Н/м}$, $\lambda_s = -8 \text{ Н/м}$ та за умови поверхневого натягу величиною $\tau_s = 1,7 \text{ Н/м}$.

Таблиця 7.1. Порівняння числового та аналітичного розв’язків задачі про натяг поверхні сферичної нанопорожнини.

Кількість використаних граничних елементів	Числові результати	Аналітичний розв’язок
288	2,0249	2,0269
384	2,0252	
512	2,0263	

В роботі [356] приведено точний розв’язок задачі про поверхневий натяг на міжфазній сферичній поверхні для випадку неконтрастного включення, коли $G_2/G_1 = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,26$. У такій постановці розподіл кульових напружень вздовж радіальної координати r у матричному матеріалі буде:

$$\sigma_{rr} = -2\sigma_{\varphi\varphi} = -2\sigma_{\theta\theta} = \frac{8G^M \sigma^S}{6G^M R + 3\lambda^M R + 4\lambda^S + 4G^S + 2\sigma^S} \left(\frac{R}{r} \right)^3. \quad (7.22)$$

У табл. 7.2 показано процес збіжності числових результатів щодо нормованих напружень $\sigma_{nn} R/\tau_s$ на міжфазній сферичній поверхні радіусом $R = 5 \text{ нм}$ зі свіжосколотого заліза до точного розв’язку (7.22) за згущення сітки граничних елементів.

Таблиця 7.2. Порівняння числового та аналітичного розв’язків задачі про поверхневий натяг на поверхні неконтрастного сферичного включення.

Кількість використаних граничних елементів	Числові результати	Аналітичний розв’язок
288	0,8934	0,8699
384	0,8851	
512	0,8624	

На рис. 7.4. зображено отримані на основі розбиття 512 граничними елементами числові залежності нормальної компоненти вектора зусиль $\tilde{t}_n/\tilde{\tau}_s$ на сферичній поверхні нанопорожнини (крива 1) та на міжфазній поверхні неконтрастного нановключення (крива 2) від радіусу нанорозмірної неоднорідності під поверхневим натягом. Круглими маркерами показані результати виразу (7.21), отримані в роботі [299], а квадратними – результати виразу (7.22), отримані в роботі [356].

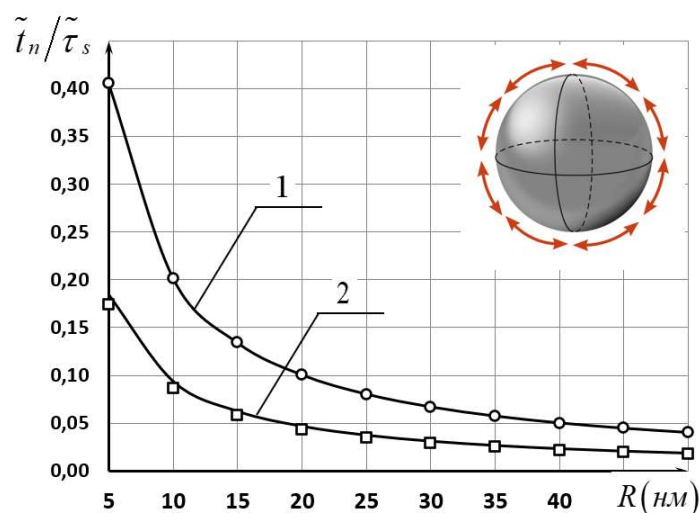


Рис. 7.4. Залежність нормальних напружень на поверхні сферичної нанопорожнини (1) та міжфазній поверхні неконтрастного нановключення (2) від радіуса поверхні.

Із даних на таблицях та рис. 7.4 за розгляду фактору поверхневого натягу слідує стійке наближення числових результатів до точних зі згущенням граничноелементної сітки та досягнення 0,1 % відносної їх точності на сітці з 512

елементів, яка використовуватиметься у подальших обчисленнях. Також числовий алгоритм показує хорошу стійкість до зміни геометричного параметру ε сітки граничних елементів в межах від $0,01R$ до $0,06R$.

На рис. 7.5. показані залежності нормалізованих зусиль $\tilde{t}_n/\tilde{\tau}_s$ на сферичній міжфазній поверхні від відносної жорсткості нановключень за умови відсутності зовнішніх навантажень матриці, що містить одиночні нановключення розміром 5 нм , 10 нм та 20 нм .

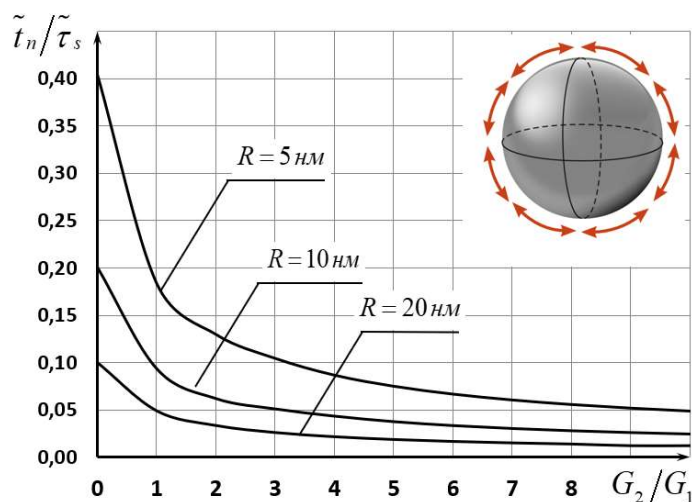


Рис. 7.5. Залежність нормалізованих напружень на поверхні нанопори (1) та міжфазній поверхні неконтрастного нановключення від радіуса поверхні.

Із рисунку видно хороше узгодження результатів, із яких випливає, що наноефекти помітні для розмірів включень в діапазоні $R < 20\text{ нм}$, коли спостерігається виразне збільшення радіальних напружень зі зменшенням розміру нанонеоднорідності (справджується обернена пропорційність між напруженнями та радіусом включення). Також їх прояв більший для включень, модуль зсуву яких значно менший, ніж модуль зсуву матриці.

7.2.2. Задачі комбінованого просторово-поверхневого навантаження безмежної матриці зі сферичними нановключенням та нанопорожниною

З точки зору загальності запропонованого скінченнорізницево-граничноелементного числового алгоритму важливою є його апробація, коли у системі «безмежна матриця – сферичне нановключення (нанопорожнина)» присутні як поверхневий натяг τ_s , так і навантаження на безмежності з заданням

відповідного розподілу функції $\mathbf{u}^{(0)}(u_{01}, u_{02}, u_{03})$.

Випадок одновісного розтягу пружного простору вздовж осі Ox_3 , коли $\sigma_{33} = \sigma_{33}^{(0)}$, що містить нанопорожнину з поверхневим натягом τ_s , розглянуто в роботі [347]. Порівняння результатів в табл. 7.3 щодо нормальних поверхневих напружень у полюсах $\theta = \pi/2$ нанопорожнини показує високу ступінь їх узгодження за покриття поверхні 576-ма суперпараметричними граничними елементами.

Таблиця 7.3. Порівняння числового та аналітичного розв'язків задачі про розтяг пружного простору з нанопорожниною.

Кількість використаних граничних елементів	Навантаження	Числове моделювання	Куш В.І. [347]
384	$\tilde{\sigma}_{33}^{(0)} / \tilde{\tau}_s = 1$	1,3568	1,3216
512		1,3346	
576		1,3222	
384	$\tilde{\sigma}_{33}^{(0)} / \tilde{\tau}_s = 2$	0,6973	0,7426
512		0,7154	
576		0,7389	

Наглядно якісний та кількісний вплив поверхневого натягу матеріальної поверхні нанопорожнини на переміщення її поверхні продемонстровано на рис. 7.6 за умови одновісного розтягу вздовж осі Ox_1 . Наявність поверхневого натягу $\tilde{\tau}_s / \tilde{\sigma}_{11}^{(0)} = 1$ (рис. 7.6 б) порівняно з його відсутністю $\tilde{\tau}_s = 0$ (рис. 7.6 а) приводить до зменшення переміщень при $\theta = \pi/2$ та зміни їх напрямку на протилежний при $\theta = 0$.

Рис. 7.7 стосується числового аналізу розглянутого комбінованого навантаження матриці з кульовим нановключенням радіусу $R=2$ нм для таких механічних характеристик матриці $G_1 = 34,7$ ГПа; $\nu_1 = 0,3$ та матеріалізованої

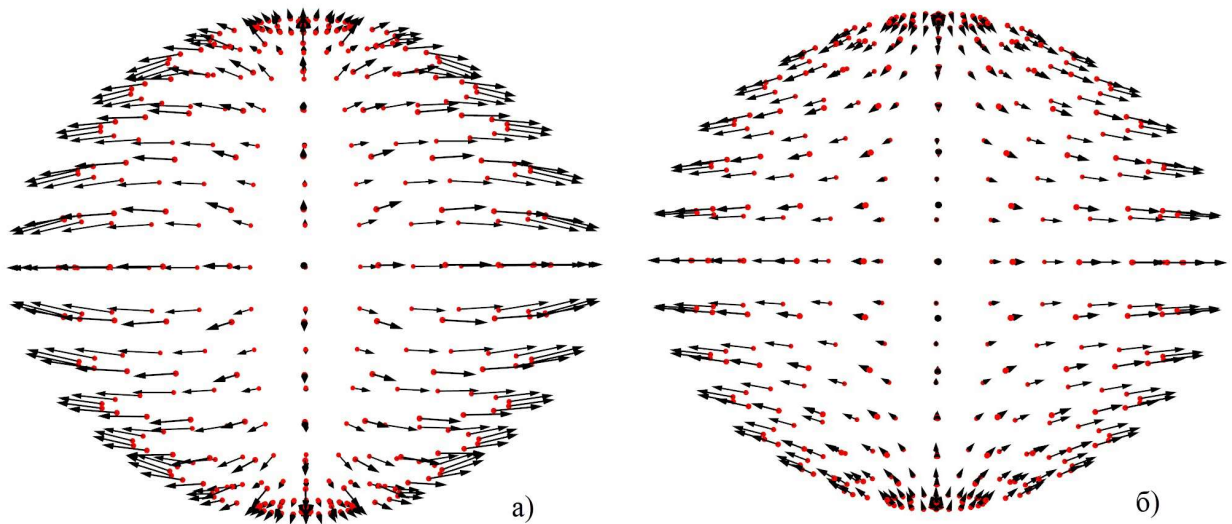


Рис. 7.6. Тривимірні мапи поля переміщень поверхні (проекція на площину $x_1 O x_3$) при навантаженні матриці розтягуючими зусиллями на безмежності: а) без поверхневого натягу матеріальної поверхні; б) з поверхневим натягом матеріальної поверхні.

міжфазної поверхні взятими із роботи [376] її характеристиками $G_s = -6,2178 \text{ Н/м}$; $\lambda_s = 3,48912 \text{ Н/м}$; $\tau_s = 0,72 \text{ Н/м}$. Коефіцієнт Пуассона включень приймали як $\nu_2 = 0,3$. Залежності нормалізованих напружень $\tilde{\sigma}_{33}^{(k)} / \tilde{\sigma}_{33}^{(0)}$ від відносної координати точки поля x_1/R матриці та наповнювача для випадку твердого включення $G_2/G_1 = 2$ показано суцільними кривими, а для випадку м'якого включення $G_2/G_1 = 0,5$ – штриховими кривими. Також на графіку штрих-пунктирною кривою показано матричне напруження $\tilde{\sigma}_{33}^{(1)} / \tilde{\sigma}_{33}^{(0)}$ ззовні нанопорожнини аналогічного розміру та за аналогічного зовнішнього навантаження. Круговими маркерами на рис. 7.7 позначено результати, отримані в роботі [259].

Некласичний контакт між матрицею і нановключенням внаслідок матеріалізації міжфазної поверхні спричинює неоднорідний розподіл напружень в області включення (на відміну від ідеального макрорівневого контакту компонент, що визначається розв'язком Ешелбі).

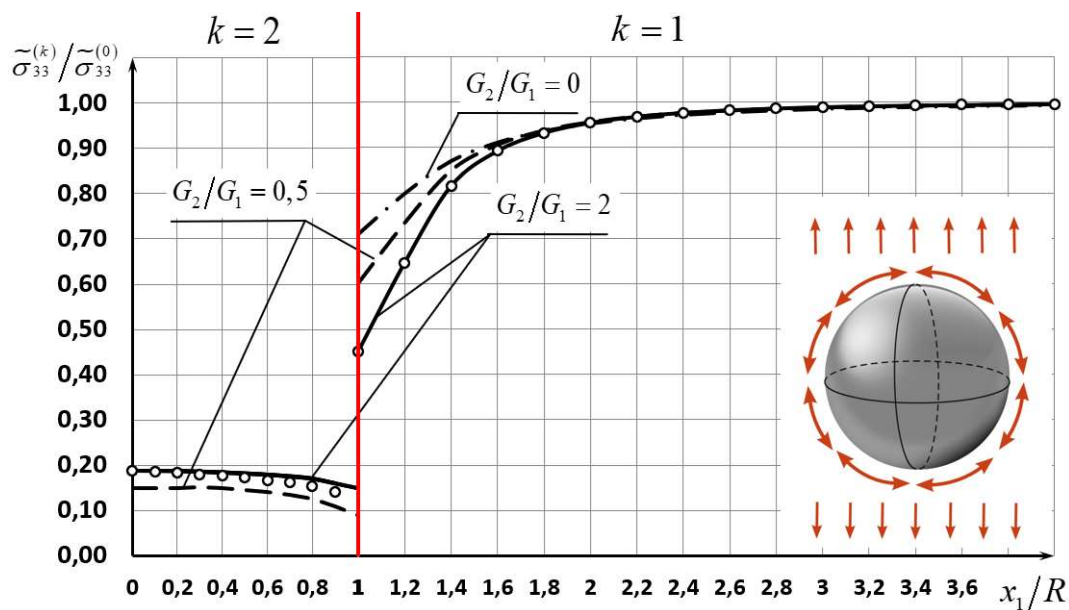


Рис. 7.7. Залежність нормалізованих напружень у матриці та у нановключенні від відносної координати точки поля за різних відносних жорсткостей складових нанокompозиту.

Ця неоднорідність більш виражена для нановключень з меншим модулем зсуву. Врахування матеріальності міжфазної поверхні зумовлює також зменшення напружень у матриці (нанорівневе зміцнення). На відстанях від поверхні нановключення, більших від $3R$, його вплив на напруження у матриці нівелюється, що приводить до їх однорідності у цій зоні.

7.3. Узагальнення гібридної скінченнорізницево-граничноелементної схеми числового розв'язку на задачі із сфероциліндричним нановключенням та нанопорожниною

Розглянемо безмежну пружну ізотропну матрицю Ω з нановключенням у формі циліндра із заокругленими півсферами на краях, що забезпечує гладкість його об'єднаної поверхні $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, де S_2 - циліндрична її частина, а S_1 та S_3 - її верхня та нижня півсферичні частини, відповідно (рис. 7.8). Позначимо через $2L$ висоту циліндричної частини поверхні S_2 , а через $2H$ - повну довжину нановключення разом із його півсферичними частинами, тоді

$H = L + R$, де R - радіус поперечного перерізу циліндричної частини нанопори. Вектори $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ позначають неперервні нормальний та дотичні до поверхні ортогональні орти.

Поверхневі пружні константи Ляме λ_s та G_s і задане навантаження у формі поверхневого натягу τ_s з розмірністю $[H/м]$ характеризують матеріалізовану поверхню нановключення.

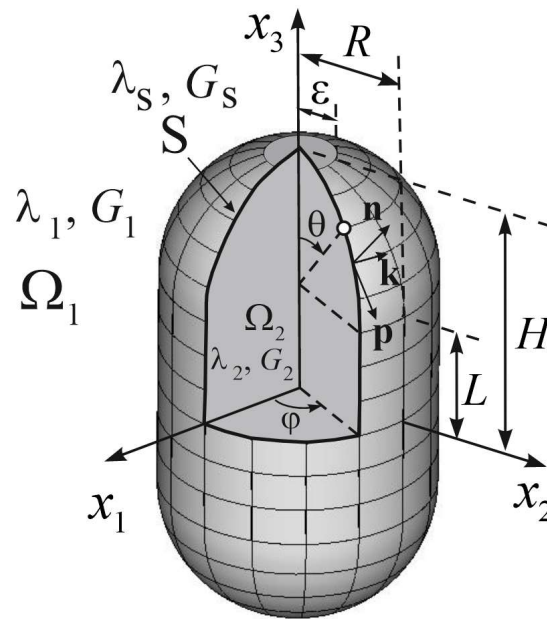


Рис. 7.8. Сфероциліндричне нановключення в пружному просторі з матеріалізованою міжфазною поверхнею.

Глобальну систему координат виберемо з початком у центрі нановключення таким чином, щоб вісь x_3 збігалася з віссю його циліндричної частини, а координатна площина $x_1 O x_2$ лежала в серединному поперечному перерізі. Локальні системи координат використовуватимемо залежно від кривини частин поверхні нановключення (рис. 7.8): для S_1 та S_3 – сферичну систему координат (r, φ, θ) , а для S_2 – циліндричну (r, φ, z) , для якої: $x_1 = r \cos \varphi$; $x_2 = r \sin \varphi$; $x_3 = z$; $(0 < \varphi < 2\pi)$; $h_1 = R$; $h_2 = 1$; $\rho_\varphi = R$; $\rho_z = \infty$; $\partial h_1 / \partial \varphi = \partial h_1 / \partial z = \partial h_2 / \partial \varphi = \partial h_2 / \partial z = 0$.

Тоді диференціальні рівняння деформування матеріалізованої поверхні

в точках її сферичної частини матимуть вигляд (7.12). Щодо циліндричної частини, то з урахуванням геометричних параметрів її модель (7.1) у циліндричній системі координат набирає форми співвідношень:

$$\begin{aligned}
 u_n^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_n^{(2)}(\mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x}); & u_z^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_z^{(2)}(\mathbf{x}) = u_z(\mathbf{x}); & u_\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = u_\varphi(\mathbf{x}); \\
 \Delta t_n(\mathbf{x}) &= \sigma_{nn}^{(1)}(\mathbf{x}) - \sigma_{nn}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{n\varphi}^s}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{nz}^s}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s}{R}; \\
 \Delta t_\varphi(\mathbf{x}) &= \sigma_{n\varphi}^{(1)}(\mathbf{x}) - \sigma_{n\varphi}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^s}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{z\varphi}^s}{\partial z} - \frac{\sigma_{n\varphi}^s}{R}; \\
 \Delta t_z(\mathbf{x}) &= \sigma_{nz}^{(1)}(\mathbf{x}) - \sigma_{nz}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \sigma_{zz}^s}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^s}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Закон Гука (7.2) для матеріалізованої поверхні у циліндричних координатах матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \tau_s + (2G_s - \tau_s) \varepsilon_{\varphi\varphi} + (\lambda_s + \tau_s) (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}); \\
 \sigma_{zz}^s &= \tau_s + (2G_s - \tau_s) \varepsilon_{zz} + (\lambda_s + \tau_s) (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}); \\
 \sigma_{n\varphi}^s &= \frac{\tau_s}{R} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); & \sigma_{nz}^s &= \tau_s \frac{\partial u_n}{\partial z}; \\
 \sigma_{\varphi z}^s &= 2(G_s - \tau_s) \varepsilon_{\varphi z} + \tau_s \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}; & \sigma_{z\varphi}^s &= 2(G_s - \tau_s) \varepsilon_{z\varphi} + \tau_s \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Враховуючи співвідношення Коші (7.3) у циліндричній системі координат

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_n \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right], \tag{7.25}$$

з (7.24) отримаємо залежності між поверхневими напруженнями та переміщеннями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \tau_s + \frac{2G_s + \lambda_s}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_n \right) + (\lambda_s + \tau_s) \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
 \sigma_{zz}^s &= \tau_s + (2G_s + \lambda_s) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda_s + \tau_s}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_n \right); \\
 \sigma_{n\varphi}^s &= \frac{\tau_s}{R} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); & \sigma_{nz}^s &= \tau_s \frac{\partial u_n}{\partial z}; \\
 \sigma_{\varphi z}^s &= G_s \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right] - \tau_s \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; & \sigma_{z\varphi}^s &= G_s \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right] - \frac{\tau_s}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

а їх підстановка у крайові умови (7.23) приводить до таких диференціальних рівнянь деформування матеріальної циліндричної поверхні:

$$\begin{aligned}
 \Delta t_n(\mathbf{x}) &= \frac{\tau_s}{R} + \frac{2G_s + \lambda_s + \tau_s}{R^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2G_s + \lambda_s}{R^2} u_n - \frac{\tau_s}{R^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} + \frac{\lambda_s + \tau_s}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \tau_s \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}; \\
 \Delta t_\varphi(\mathbf{x}) &= -\frac{2G_s + \lambda_s}{R^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\lambda_s + G_s}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} - \frac{2G_s + \lambda_s + \tau_s}{R^2} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - G_s \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\tau_s}{R^2} u_\varphi; \\
 \Delta t_z(\mathbf{x}) &= -\frac{\lambda_s + \tau_s}{R} \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{G_s}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} - (2G_s + \lambda_s) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{G_s + \lambda_s}{R} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z \partial \varphi}. \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Граничні інтегральні рівняння пружної рівноваги сфероциліндричного включення та матриці (7.5) за задання точки джерела на різних частинах поверхні S будуть мати вигляд:

$$n_i u_n(\mathbf{x}) + k_i u_\varphi(\mathbf{x}) + p_i u_p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \left(n_j u_n(\mathbf{x}) + k_j u_\varphi(\mathbf{x}) + p_j u_p(\mathbf{x}) \right) \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{\eta}) d_\eta S -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_j u_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j u_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j u_p(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_j \Delta t_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j \Delta t_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \Delta t_p(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S = u_{0i}(\mathbf{x}), \\
& - \sum_{j=1}^3 (n_j u_n(\mathbf{x}) + k_j u_\varphi(\mathbf{x}) + p_j u_p(\mathbf{x})) \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S + \sum_{j=1}^3 \iint_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) (n_j u_n(\boldsymbol{\eta}) + \\
& + k_j u_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j u_p(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} S - \sum_{j=1}^3 \iint_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) t_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} S = 0, i = \overline{1, 3}, \mathbf{x} \in S, \quad (7.28)
\end{aligned}$$

$$\text{де } u_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_\theta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_1 \cup S_3, \\ u_z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_2; \end{cases} \quad \Delta t_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Delta t_\theta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_1 \cup S_3, \\ \Delta t_z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_2; \end{cases}$$

орти локальної системи координат визначаємо за формулами $n_1 = \cos \varphi$; $n_2 = \sin \varphi$; $n_3 = 0$; $k_1 = \sin \varphi$; $k_2 = \cos \varphi$; $k_3 = 0$; $p_1 = 0$; $p_2 = 0$; $p_3 = -1$.

Перейдемо у системі рівнянь (7.27), (7.28) до відносних величин ввівши позначення (7.11) та $\tilde{u}_z = \frac{u_z}{R}$; $\Delta \tilde{t}_z = \frac{\Delta t_z}{G_1}$; $\tilde{u}_p = \frac{u_p}{R}$; $\Delta \tilde{t}_p = \frac{\Delta t_p}{G_1}$; $\tilde{z} = \frac{z}{R}$, що дозволяє записати диференціальні рівняння (7.27) щодо безрозмірних величин у циліндричній системі координат таким чином (відповідні безрозмірнені рівняння у сферичній системі мають вигляд (7.12)):

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{t}_n(\mathbf{x}) &= \tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \tilde{u}_n - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + (\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \tilde{z}^2} \\
\Delta \tilde{t}_\varphi(\mathbf{x}) &= -(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - (\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z} \partial \varphi} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \tilde{z}^2} + \tilde{\tau}_s \tilde{u}_\varphi \\
\Delta \tilde{t}_z(\mathbf{x}) &= -(\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \tilde{z}} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \varphi^2} - (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^2} - (\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \tilde{z} \partial \varphi}. \quad (7.29)
\end{aligned}$$

Система ГІР для сфероциліндричного включення відносно безрозмірних міжфазних переміщень, зусиль та стрибків зусиль буде:

$$\begin{aligned}
& n_i \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_i \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_i \tilde{u}_p(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_p(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \\
& - \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{t}_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \\
& + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_i \Delta \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_i \Delta \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_i \Delta \tilde{t}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = \tilde{u}_{0i}(\tilde{\mathbf{x}}), \\
& - \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_p(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}_2} \tilde{T}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}_2} \tilde{T}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\
& \left. + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}_2} \tilde{U}_{ij}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{t}_j^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = 0, i = \overline{1, 3}, \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}, \quad (7.30)
\end{aligned}$$

де $\tilde{S}$ – сфероциліндрична поверхня з півсферичними торцями одиничного радіусу та висотою циліндричної частини $2H/R$.

Зауважимо, що окремий розгляд деформування сферичних і циліндричної частин матеріальної поверхні вимагає виконання умов сумісності цих деформацій або формулювання крайових умов для відповідних диференціальних рівнянь на контурі стику цих частин. Вони передбачають рівність там переміщень та кутів повороту обох частин поверхні. Зокрема, у припущенні осьової симетрії задачі стосовно осі Ox_3 (незалежності розв'язків від колової координати та відсутності компонент $\tilde{u}_\varphi$ та $\Delta \tilde{t}_\varphi$), ці умови мають вигляд:

$$\tilde{u}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) \Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \\ \mathbf{x} \in \tilde{S}_3}} = \tilde{u}_z(\tilde{\mathbf{x}}) \Big|_{\substack{z=\pm \frac{H}{R} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_2}}; \quad \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) \Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \\ \mathbf{x} \in \tilde{S}_3}} = \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) \Big|_{\substack{z=\pm \frac{H}{R} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_2}}; \quad \frac{\partial \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \\ \mathbf{x} \in \tilde{S}_3}} = \frac{\partial \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial z} \Big|_{\substack{z=\pm \frac{H}{R} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_2}}.$$

Дискретизація системи рівнянь (7.12), (7.29), (7.30) полягає у введенні на поверхнях $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ та $\tilde{S}_3$ сіток чотирикутних восьмивузлових суперпараметричних граничних елементів, як показано на рис. 7.7. Шукані компоненти поверхневих переміщень $\tilde{u}_n$, $\tilde{u}_\varphi$, $\tilde{u}_\theta$ (для вузлів що належать $\tilde{S}_1$ і $\tilde{S}_3$) та $\tilde{u}_n$, $\tilde{u}_\varphi$,

$\tilde{u}_z$ (для вузлів що належать $\tilde{S}_2$); стрибків зусиль $\Delta\tilde{t}_n$, $\Delta\tilde{t}_\varphi$, $\Delta\tilde{t}_\theta$ (для вузлів що належать $\tilde{S}_1$ і $\tilde{S}_3$) та $\Delta\tilde{t}_n$, $\Delta\tilde{t}_\varphi$, $\Delta\tilde{t}_z$ (для вузлів що належать $\tilde{S}_2$) у локальній системі координат; зусиль на поверхні включення $\tilde{t}_i^{(2)}$ ($i=\overline{1,3}$) у глобальній системі координат, лінійно апроксимуємо через їх значення у кутових (опорних) вузлах граничних елементів. Для апроксимації похідних в опорних вузлах граничних елементів використовуємо скінченнорізницеві наближення. Зокрема, щодо їх значень на циліндричній поверхні за її розбиття граничними елементами (рис. 7.9) застосовуємо формули

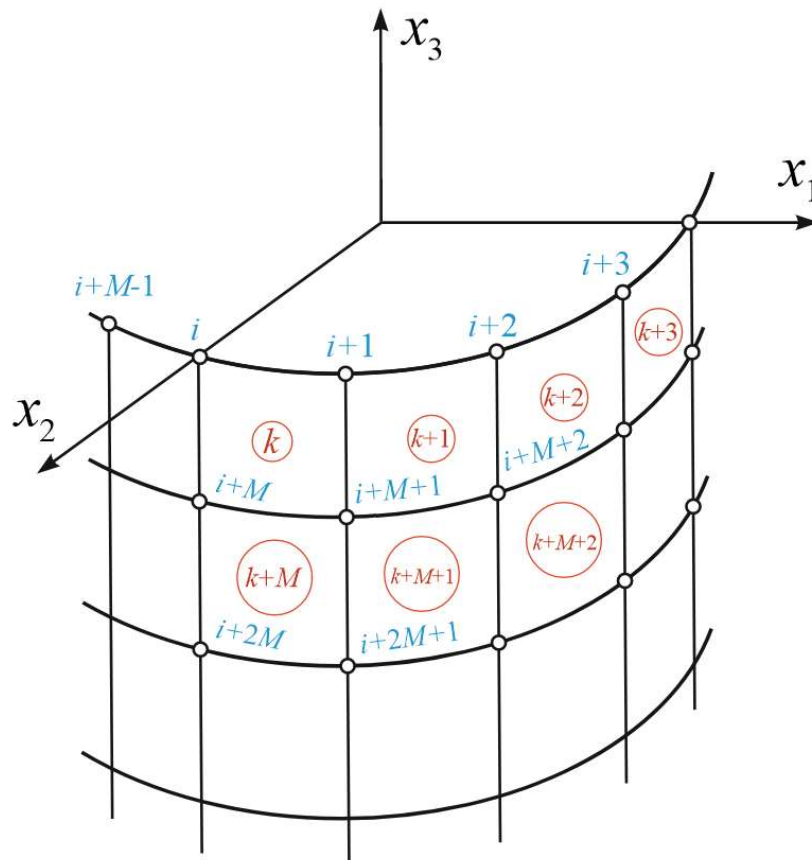


Рис. 7.9. Схема глобальної нумерації вузлів та граничних елементів циліндричної поверхні нановключення за розбиття азимутального кута на M частин та висоти на N_c частин.

Похідні від переміщень по висоті циліндричної поверхні ($\Delta h = H/N_c$):

$1 \leq i \leq M$ (перший ряд опорних вузлів);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{\Delta h}(-u_i + u_{i+M}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta h^2}(u_i - 2u_{i+M} + u_{i+2M});$$

$M+1 \leq i \leq (2N_c - 1)M + 1$ (внутрішні опорні вузли);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{2\Delta h}(-u_{i-M} + u_{i+M}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta h^2}(u_{i-M} - 2u_i + u_{i+M});$$

$2N_c M + 1 \leq i \leq (2N_c + 1)M$ (останній ряд опорних вузлів);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{\Delta h}(-u_{i-M} + u_i); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta h^2}(u_{i-2M} - 2u_{i-M} + u_i).$$

Похідні від переміщень по азимутальному куту циліндричної поверхні
($\Delta\varphi = 2\pi/M$):

$i = kM + 1, k = \overline{0, 2N_s + 2N_c}$ (опорні вузли першого меридіану);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi}(-u_{i+M-1} + u_{i+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2}(u_{i+M-1} - 2u_i + u_{i+1});$$

$kM + 2 \leq i \leq (k+1)M - 1, k = \overline{0, 2N_s + 2N_c}$ (внутрішні опорні вузли);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi}(-u_{i-1} + u_{i+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1});$$

$i = (k+1)M, k = \overline{0, 2N_s + 2N_c}$ (опорні вузли останнього меридіану);

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi}(-u_{i-1} + u_{i-M+1}); \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta\varphi^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i-M+1}).$$

Змішані похідні від переміщень:

$i = kM + 1, k = \overline{N_s + 1, 2N_c + N_s}$ (опорні вузли першого меридіану, циліндрична поверхня);

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+M-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+1} \right);$$

$kM + 2 \leq i \leq (k+1)M - 1, k = \overline{N_s + 1, 2N_c + N_s}$ (внутрішні опорні вузли, циліндрична поверхня);

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+1} \right);$$

$i = (k+1)M, k = \overline{N_s + 1, 2N_c + N_s}$ (опорні вузли останнього меридіану циліндрична поверхня);

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} \right)_i = \frac{1}{2\Delta\varphi} \left(- \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i-M+1} \right).$$

Методика обчислення регулярних та сингулярних інтегралів отриманої системи рівнянь описана вище та зводиться до виразів (2.20) та (2.23) - (2.27) відповідно. На основі колокацій у опорних вузлах граничноелементної сітки отримується дискретний аналог системи рівнянь (7.12), (7.29), (7.30) як система $18(N_s + N_c + 1)M$ лінійних алгебраїчних рівнянь за розбиття азимутального кута на M частин, полярного кута сферичної частини міжфазної поверхні на N_s частин та піввисоти циліндричної частини поверхні на N_c частин.

Напруження в матриці та у нановключенні визначаються підстановкою отриманих числових розв'язків у співвідношення:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \delta_{1k} \tilde{\sigma}_{ij}^0(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{(-1)^k}{1-\nu_k} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} D_{ijm}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left[t_m(\boldsymbol{\eta}) + \delta_{1k} (n_m \Delta \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \Delta \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \times \right. \\
&\times \Delta \tilde{t}_p(\boldsymbol{\eta})) \left. \right] d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \frac{(-1)^{k+1} G_k}{(1-\nu_k) G_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} L_{ijm}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) (n_m \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{u}_p(\boldsymbol{\eta})) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S}, \\
\tilde{\mathbf{x}} &\in \tilde{\Omega}_k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{7.31}$$

де функції $D_{ijm}^{(k)}$ та $L_{ijm}^{(k)}$ задаються виразами (2.12).

Математична модель сфероциліндричної нанопорожнини у пружному безмежному просторі описується системою шести (трьох диференціальних та трьох інтегральних) рівнянь відносно нормалізованих значень компонент векторів поверхневих переміщень $\tilde{u}_n, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_p$ ($\tilde{u}_p = \tilde{u}_\theta$ – для вузлів що належать $\tilde{S}_1$ і $\tilde{S}_3$ та $\tilde{u}_p = \tilde{u}_z$ – для вузлів що належать $\tilde{S}_2$) та поверхневих зусиль $\tilde{t}_n, \tilde{t}_\varphi, \tilde{t}_p$ ($\tilde{t}_p = \tilde{t}_\theta$ – для вузлів що належать $\tilde{S}_1$ і $\tilde{S}_3$ та $\tilde{t}_p = \tilde{t}_z$ – для вузлів що належать $\tilde{S}_2$) у локальній системі координат:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_n(\tilde{\mathbf{x}}) &= 2\tilde{\tau}_s + 2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{u}_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + 2(2\tilde{G}_s + 2\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \tilde{u}_n - \\
&- \tilde{\tau}_s \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \theta^2} \right], \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_3,
\end{aligned}$$

$$\tilde{t}_n(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \tilde{u}_n - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \varphi^2} + (\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} - \tilde{\tau}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial z^2}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_2,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) &= -\frac{2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s)}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \varphi} - \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \times \\
&\times \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} \right] + [\operatorname{ctg}^2 \theta \tilde{G}_s - \tilde{G}_s + 2\tilde{\tau}_s] \tilde{u}_\varphi, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) &= -\left(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \left(\tilde{\lambda}_s + \tilde{G}_s\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z} \partial \varphi} - \left(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s\right) \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \tilde{z}^2} + \tilde{\tau}_s \tilde{u}_\varphi \\
\tilde{\mathbf{x}} &\in \tilde{S}_2, \\
\tilde{t}_\theta(\tilde{\mathbf{x}}) &= -2\left(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s\right) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \theta} - \frac{\tilde{G}_s}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi^2} - \left(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s\right) \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - \\
&\frac{\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{3\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\tau}_s + (2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s) \operatorname{ctg}^2 \theta\right) \tilde{u}_\theta, \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_3 \\
\Delta \tilde{t}_z(\tilde{\mathbf{x}}) &= -\left(\tilde{\lambda}_s + \tilde{\tau}_s\right) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \tilde{z}} - \tilde{G}_s \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \varphi^2} - \left(2\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^2} - \left(\tilde{G}_s + \tilde{\lambda}_s\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \tilde{z} \partial \varphi}, \\
\tilde{\mathbf{x}} &\in \tilde{S}_2.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}
&n_i \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_i \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_i \tilde{u}_p(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^3 \left(n_j \tilde{u}_n(\tilde{\mathbf{x}}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + p_j \tilde{u}_p(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} - \\
&- \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{T}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_j \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_j \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_j \tilde{u}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \sum_{j=1}^3 \iint_{\tilde{S}} \tilde{U}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_i \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + \right. \\
&\left. + k_i \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_i \tilde{t}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} = \tilde{u}_{0i}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S},
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Тоді дискретний аналог цих рівнянь складається з $12(N_s + N_c + 1)M$ лінійних алгебраїчних рівнянь.

Напруження за межами нанопорожнини знаходимо через розв'язки системи рівнянь (7.32), (7.33) за формулами:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{\sigma}_{ij}^0(\tilde{\mathbf{x}}) - \frac{1}{1-\nu_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} D_{ijm}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_m \tilde{t}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{t}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{t}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S} + \\
&+ \frac{1}{1-\nu_1} \sum_{m=1}^3 \iint_{\tilde{S}} L_{ijm}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}) \left(n_m \tilde{u}_n(\boldsymbol{\eta}) + k_m \tilde{u}_\varphi(\boldsymbol{\eta}) + p_m \tilde{u}_p(\boldsymbol{\eta}) \right) d_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{S}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_1, \quad i, j = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Шляхом числового експерименту доведено, що достовірність моделювання поля напружень з відносною похибкою не більше ніж 3 % досягається

за густини сітки з 512 суперпараметричних граничних елементів для кульових частин нанонеоднорідності, 706 – для циліндричних сфероциліндричної з геометричним параметром $H/R = 2$ та за зростання на 128 граничних елементів з подальшим збільшенням геометричного параметру H/R на одиницю.

7.3.1. Результати обчислень за натягу поверхні сфероциліндричної нанопорожнини

Для дослідження нанорівневих ефектів, проведено розрахунки стосовно сфероциліндричної нанопорожнини за поверхневого натягу $\tau_s = 1,7 \text{ Н/м}$ у матеріалі з такими механічними об'ємними та поверхневими характеристиками: $G_1 = 70 \text{ ГПа}$, $\lambda_1 = 80 \text{ ГПа}$, $G_s = 2,5 \text{ Н/м}$, $\lambda_s = -8 \text{ Н/м}$ (свіжосколоте залізо). Тоді у просторі з наноотвором такої форми реалізується осесиметричний стосовно осі Ox_3 напружено-деформований стан.

На рис. 7.10 з дотриманням відносного геометричного масштабу показано 3-D діаграми викликаних натягом розподілів відносного модуля вектора зусиль $\sqrt{\tilde{t}_n^2 + \tilde{t}_\varphi^2 + \tilde{t}_z^2}$ на поверхні нанопорожнини з відносною висотою $H/R = 3$ та розмірами $R = 2 \text{ нм}$, $H = 6 \text{ нм}$ (рис. 7.10 а); $R = 5 \text{ нм}$, $H = 15 \text{ нм}$ (рис. 7.10 б).

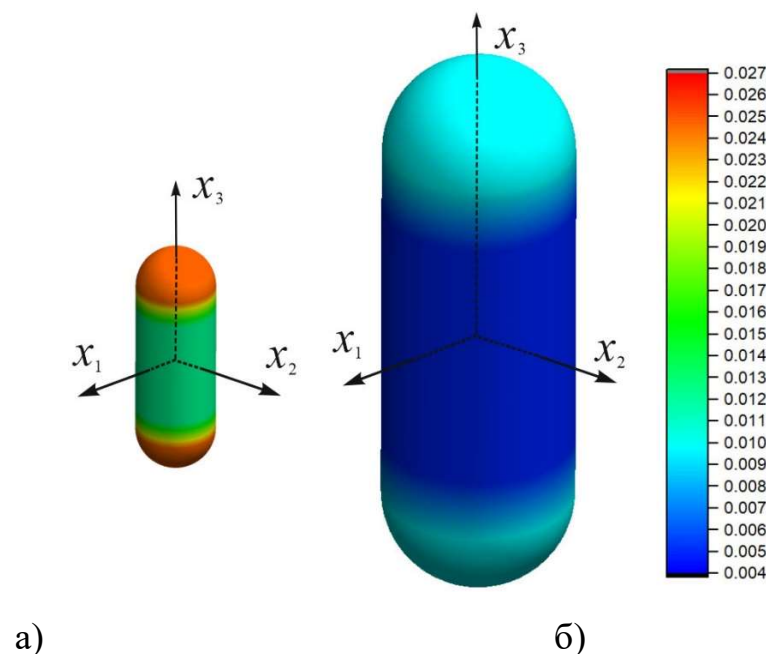


Рис. 7.10. Тривимірні мапи розподілу зусиль на поверхні сфероциліндричної нанопори різного розміру за натягу її поверхні.

На рис. 7.11 показано кольорову діаграму розподілу нормованих нормальних переміщень на поверхні нанопорожнини у вигляді скінченного циліндра із закругленими краями радіуса $R = 5\text{ нм}$ (рис. 7.11 а) і $R = 10\text{ нм}$ (рис. 7.11 б) для однакового відношення її півдовжини до радіуса $H/R = 3$ за умов поверхневого натягу $\tau_s = 1,7\text{ Н/м}$.

На рисунках чітко видно природній симетричний щодо серединної площини, але зумовлений присутністю поверхні з різним типом кривизни неоднорідний характер розподілів переміщень і напружень з максимальним їх градієнтом в околі кругового контуру стику сферичної і циліндричної частин. Концентрація напружень спостерігається на вершинах сферичних частин поверхні нанопорожнини, в той час як переміщення максимальні біля їх основи. Збільшення розміру нанопорожнини спричинює значне зменшення як поверхневих переміщень, так і напружень.

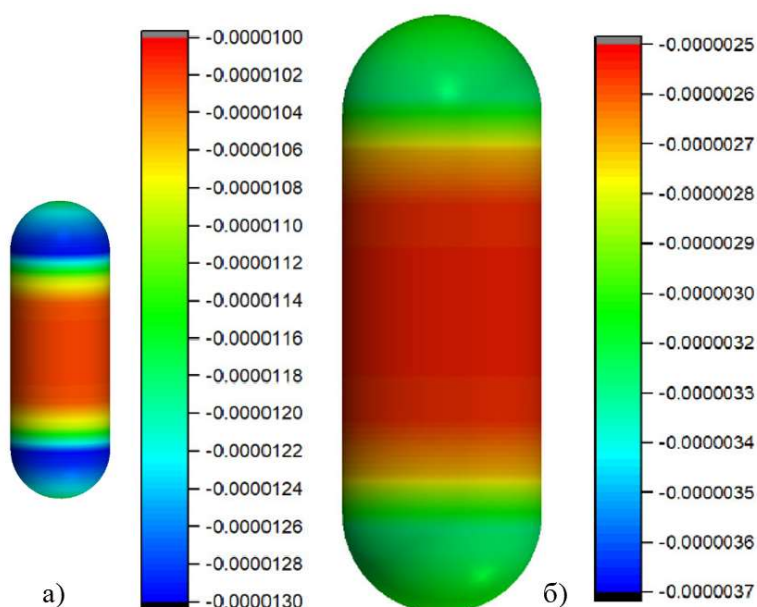


Рис. 7.11. Тривимірні мапи розподілу нормальних переміщень на поверхні сфероциліндричної нанопори різного розміру за натягу її поверхні.

На рис. 7.12, 7.13 і 7.14 для розглянутого поверхневого натягу показано залежності приведених нормальних напружень $\bar{\sigma}_{nn} = \sigma_{nn} R/\tau_s$, $\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} R/\tau_s$ та $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} R/\tau_s$ відповідно, у серединній площині $x_3 = 0$ безмежного пруж-

ного простору із сфероциліндричним наноотвором з радіусом поперечного перерізу $R = 5 \text{ нм}$ та різного його видовження. Додатково круглими маркерами позначено результати точного аналітичного розв'язку (7.21) для сферичної нанопопи ($H/R = 1$).

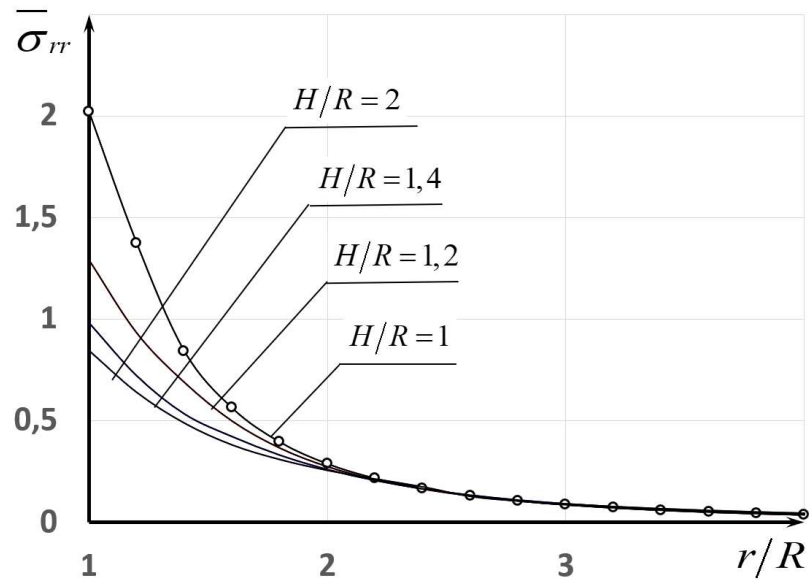


Рис. 7.12. Розподіл нормалізованих радіальних нормальних напружень зовні сфероциліндричної нанопопи різної відносної висоти від нормалізованої відстані до її центру за наявності поверхневого натягу.

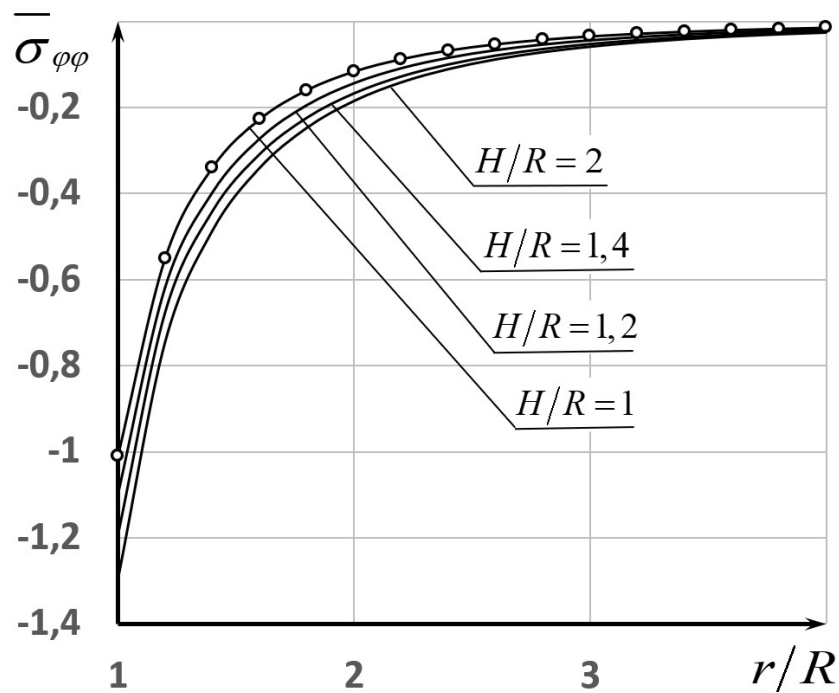


Рис. 7.13. Розподіл нормалізованих азимутальних нормальних напружень зовні сфероциліндричної нанопопи різної відносної висоти від нормалізованої відстані до її центру за наявності поверхневого натягу.

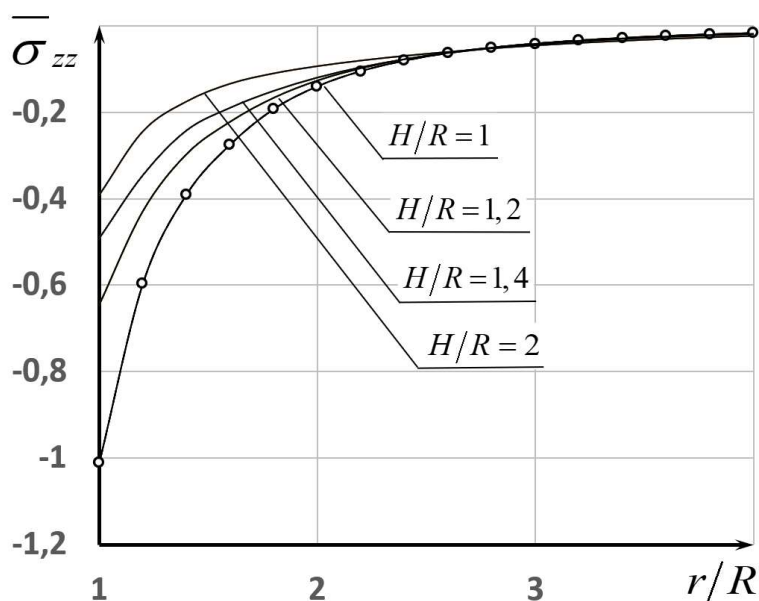


Рис. 7.14. Розподіл нормалізованих осьових нормальних напружень зовні сфероциліндричної нанопори різної відносної висоти від нормалізованої відстані до її центру за наявності поверхневого натягу.

На рисунках спостерігаємо плавне прямування до нуля зі сторони додатних значень для нормальних радіальних напружень та від'ємних для азимутальних і осьових при віддаленні від поверхні нанопорожнини. За збільшення відносної висоти нанопорожнини значення радіальних $\bar{\sigma}_{rr}$ та осьових $\bar{\sigma}_{zz}$ напружень в серединній площині зменшуються по модулю, а азимутальні напруження $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ навпаки ростуть. Такі протилежні тенденції при видовженні нанопорожнини пояснюються ростом впливу кривини циліндричної частини її поверхні. Коли $H/R > 2$, напруження у площині серединного перерізу нанонеоднорідності не залежить від її відносної висоти через мінімізацію впливу сферичних частин її поверхні. У цих випадках нанонеоднорідність умовно можна вважати «безмежною» по висоті і ефекти поверхневого натягу досліджувати з розв'язків відповідної плоскої задачі наномеханіки. На відстані більшій за $r = 2,5 R$ криві напружень для різних співвідношень геометричного параметра H/R сходяться в одну криву, що свідчить про зведення нанівель впливу форми нанопорожнини у зазначеній зоні і ефект поверхневого натягу визначається лише розміром її поперечного перерізу.

7.3.2. Результати обчислень за комбінованого навантаження простору зі сфероциліндричною нанопорожниною

На рис. 7.15 показано векторне поле поверхневих переміщень (рис. 7.15 а), поверхневих зусиль (рис. 7.15 б) та кольорову мапу модуля вектора зусиль для випадку сумісної дії поверхневого натягу та статичного розтягу $\tilde{\sigma}_{33}^{(0)}/\tilde{\tau}_s = 1$ на безмежності вздовж осі Ox_3 .

Аналогічні результати стосовно поверхневого натягу та розтягу $\tilde{\sigma}_{11}^{(0)}/\tilde{\tau}_s = 1$ простору вздовж осі Ox_1 наведено на рис. 7.16 а), 7.16 б) та 7.16 в), відповідно.

У випадку осьової симетрії задачі за розтягу вздовж осі Ox_3 як переміщення, так і напруження максимальні у вершинах нанопорожнини, на відміну від випадку від розтягу вздовж осі Ox_1 з суттєвою залежністю від кутової координати, коли вони досягають максимуму в точках циліндричної частини нанопорожнини по всій її висоті для яких $x_2 = 0$. В іншому поперечному щодо осі порожнини напрямі ($x_1 = 0$) компоненти вектора нормальних переміщень та зусиль на циліндричній частині поверхні порожнини мають протилежний напрям та вдвічі менші за модулем. Мінімуму напруження досягають у полюсах сферичних частин поверхні нанопорожнини.

Запропонованим методом здійснено моделювання напруженого стану всередині та зовні сфероциліндричного нановключення за дії поверхневого натягу $\tau_s = 0,72 \text{ Н/м}$ на міжфазній поверхні та розтягу $\tilde{\sigma}_{33}^{(0)}/\tilde{\tau}_s = 1$ на безмежності матриці вздовж осі включення за таких взятих з роботи [376] механічних характеристик матриці $G_1 = 34,7 \text{ ГПа}$; $\nu_1 = 0,3$, включення – $G_2 = 69,4 \text{ ГПа}$; $\nu_2 = 0,3$ та матеріалізованої міжфазної поверхні – $G_s = -6,2178 \text{ Н/м}$; $\lambda_s = 3,48912 \text{ Н/м}$.

На рис. 7.15. приведені залежності нормованих значень напружень $\tilde{\sigma}_{33}^{(k)}/\tilde{\sigma}_{33}^{(0)}$ від відносної координати точки поля x_1/R матриці та наповнювача в

площині серединного перерізу включення ($x_3 = 0$).

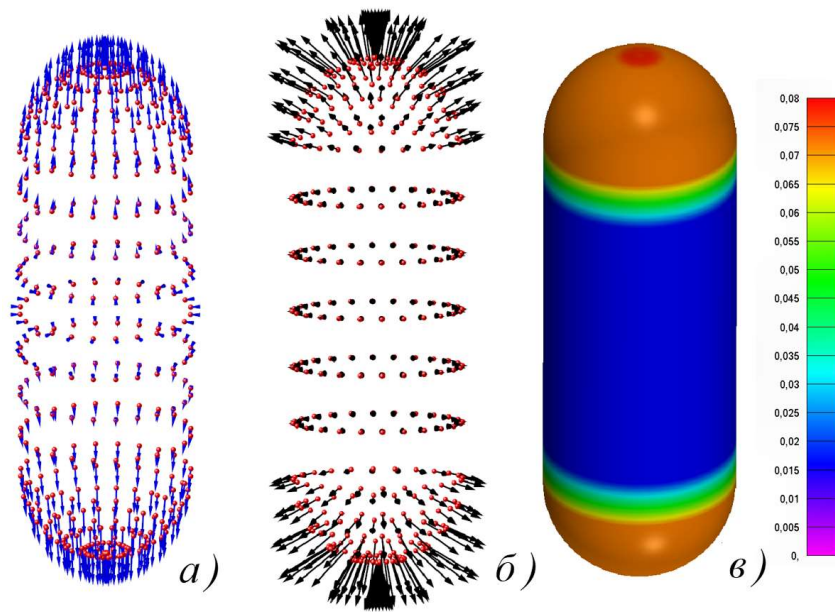


Рис. 7.15. Векторне поле переміщень (а) та зусиль (б) та кольорова мапа модуля вектора зусиль (в) на поверхні сфероциліндричної нанопорожнини за дії поверхневого натягу та розтягу матриці вздовж осі Ox_3 .

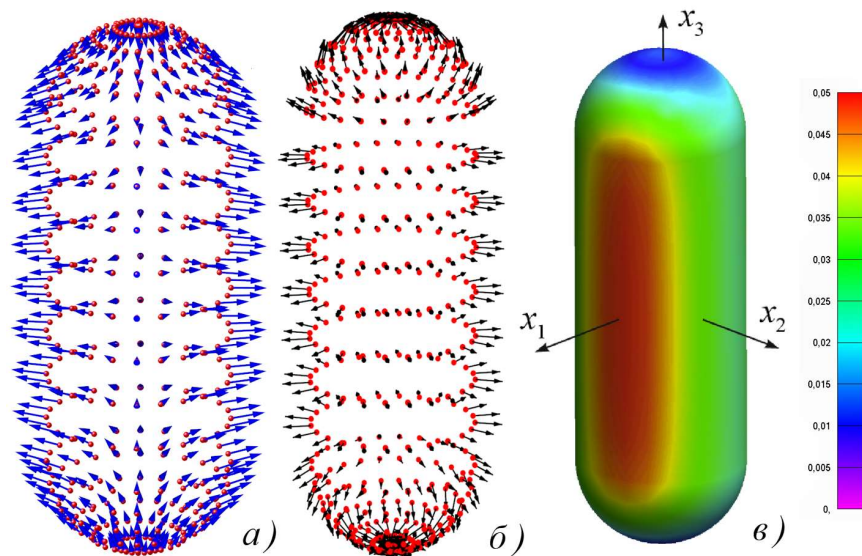


Рис. 7.16. Векторне поле переміщень (а) та зусиль (б) та кольорова мапа модуля вектора зусиль (в) на поверхні сфероциліндричної нанопорожнини за дії поверхневого натягу та розтягу матриці вздовж осі Ox_1 .

Отримані результати свідчать про збільшення нормальних напружень в центральній частині нановолокна та в матриці поблизу матеріалізованої міжфазної поверхні за збільшення геометричного параметра H/R . Проте вже на відстані більшій ніж $0,4R$ від циліндричної частини поверхні нановолокна

його відносна довжина не впливає на напружений стан матриці в площині $x_3 = 0$.

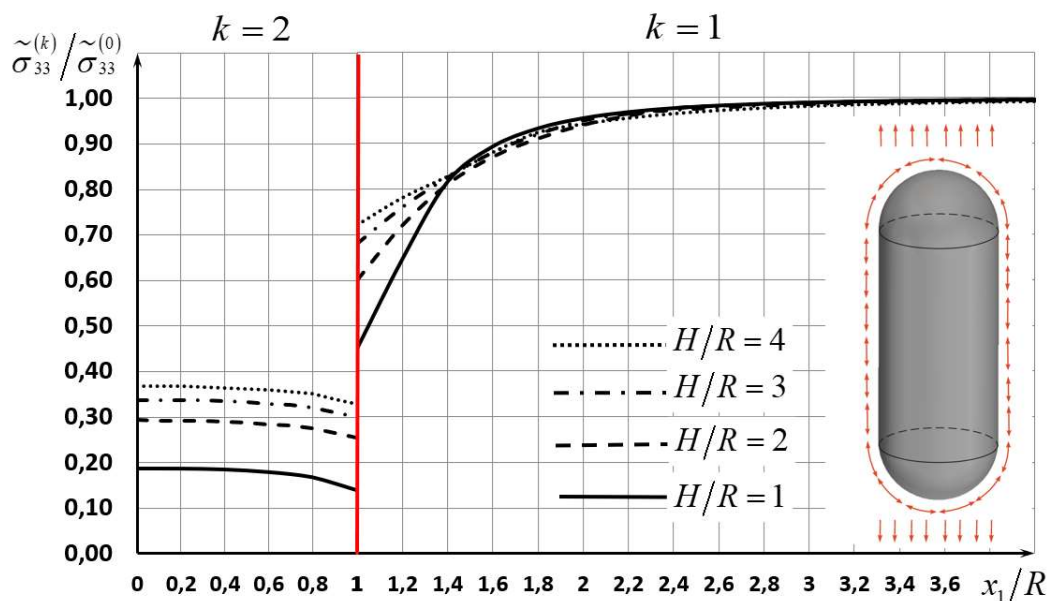


Рис. 7.17. Залежність нормалізованих напружень у матриці та у сфероциліндричному нановключенні від відносної координати точки поля за різної відносної висоти нановключення.

Масштабний ефект призводить до зменшення стрибка напружень на матеріалізованій міжфазній поверхні в серединному поперечному перерізі нановключення зі збільшенням його довжини. Внутрішній розподіл нормальних напружень в цьому перерізі залишається нерівномірним проте з меншим градієнтом для довших нановолокон.

7.4. Використання граничноелементних розв'язків в узагальненій схемі Морі-Танаки з визначення ефективних пружних властивостей тривимірних нанокомпозитів та нанопористих середовищ

Розглянемо композит (пористе середовище), що складається із матричного матеріалу та однорідно розподілених у ньому однакових нанорозмірних включень (пор або порожнин) з описаною у попередніх підрозділах матеріальною міжфазною (пустотною) поверхнею, яка має власну пружність

та натяг. Для компактності запису подальших формулювань механічні характеристики композиту задаватимемо тензорами пружності $\mathbf{C}^{(1)}$ та $\mathbf{C}^{(2)}$ його складових, відповідно (у всіх подальших викладках для нанопористого матеріалу $\mathbf{C}^{(2)} = 0$).

Для застосування гомогенізаційних процедур виділимо репрезентативний об'ємний елемент (РОЕ) структури з об'ємом V і межею ∂V , який складається з матричної фази $V^{(1)}$ і нановключення (нанопори) об'ємом $V^{(2)}$ (рис. 7.18 стосується нановключення, рис. 7.19 – нанопорожнини), тоді об'ємна концентрація наповнювачів буде $f = V^{(2)}/V$, $1 - f = V^{(1)}/V$.

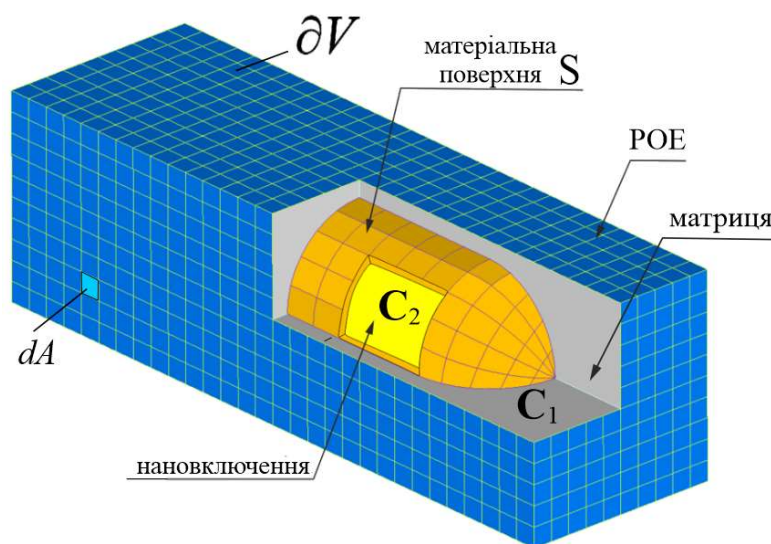


Рис. 7.18. Репрезентативний об'ємний елемент нанокompозиту (РОЕ).

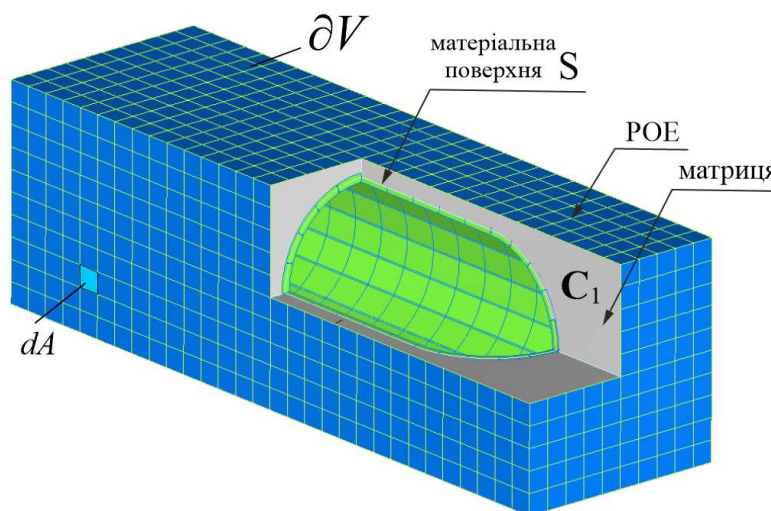


Рис. 7.19. Репрезентативний об'ємний елемент нанопористого середовища.

В рамках описаної у попередніх підрозділах моделі нановключень, деформування композиту з такими наповнювачами передбачає виникнення стрибків напружень на матеріальній міжфазній поверхні, тому усереднення деформацій та напружень для введеного РОЕ через фазові усереднення (6.3) матиме вигляд:

$$\langle \epsilon \rangle = (1-f)\langle \epsilon \rangle^{(1)} + f\langle \epsilon \rangle^{(2)}, \quad \langle \sigma \rangle = (1-f)\langle \sigma \rangle^{(1)} + f\langle \sigma \rangle^{(2)} + f\langle \sigma \rangle^{(12)}, \quad (7.35)$$

де фазові усереднення напружень і деформацій у виразах (7.35) задаються співвідношеннями (6.4), додатковий член в усередненні напружень порівняно з (6.3) відображає внесок стрибків напружень на матеріальній поверхні і виражається з залученням переходів до поверхневих інтегралів (6.2) співвідношенням:

$$\langle \sigma \rangle^{(12)} = \langle \sigma_{ij} \rangle^{(12)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S \Delta t_i x_j dS, \quad (7.36)$$

Тут Δt_i – введені у підрозділі 7.1 функції стрибків компонент зусиль на матеріальній поверхні у глобальній системі координат.

З іншого боку, за відмежованого від структури РОЕ його розгляду як цілісного об'єкту та на основі теореми про усереднені напруження (averaged stress theorem) [210]) слідує, що за наявності наявності на межі РОЕ ∂V сталого поля напружень $\sigma_0 = const$, яке забезпечується зусиллями $t_i = \sigma_{ij}^0 n_j$, усереднені напруження є однорідними $\langle \sigma \rangle = \sigma_0$ або $\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0$, оскільки

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \iint_{\partial V} t_i x_j dA = \frac{1}{V} \iint_{\partial V} \sigma_{ik}^0 n_k x_j dA = \frac{\sigma_{ik}^0 \delta_{jk}}{V} \iiint_V dV = \sigma_{ij}^0.$$

Використовуючи цю закономірність, введемо усереднені по фазах сталі чотиривалентні тензори впливу або концентрації напружень $\mathbf{B}^{(k)}$, які б давали

зв'язок між усередненими напруженнями в k -тій фазі і макроскопічними напруженнями РОЕ, а також викликаний стрибками напружень додатковий сталий тензор впливу матеріальної поверхні $\mathbf{B}^{(12)}$ співвідношеннями

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} : \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{B}^{(k)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad k = 1, 2; \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(12)} = \mathbf{B}^{(12)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{B}^{(12)} : \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (7.37)$$

Тоді в термінах шуканого ефективного тензору пружності $\mathbf{C}^*$ наноком-
позиту і заданих тензорів пружності матриці $\mathbf{C}^{(1)}$ та включення $\mathbf{C}^{(2)}$ з ураху-
ванням закону Гука та другого співвідношення (7.35) буде:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= (\mathbf{C}^*)^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (1-f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = (1-f) (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} + f (\mathbf{C}^{(2)})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} = \\ &= (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \left[\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - f \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} - f \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(12)} \right] + f (\mathbf{C}^{(2)})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} = (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \\ &+ f \left[\left((\mathbf{C}^{(2)})^{-1} - (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} \right) : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} - (\mathbf{C}^{(1)})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(12)} \right]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Узагальнення на випадок розривних напружень на матеріальній повер-
хні моделі гомогенізації Морі-Танаки для визначення ефективного тензору
пружності $\mathbf{C}^*$ базуються на врахуванні взаємодії включень заданням на межі
 ∂V постійних зусиль, які відповідають середнім напруженням в матричній
фазі $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)}$. Тоді, внаслідок зв'язків $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)}$, $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(12)} = \mathbf{B}^{(12)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)}$, із рі-
вняння (7.35) отримаємо

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} = \left[(1-f) \mathbf{I} + f (\mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(12)}) \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (7.39)$$

Остаточню шляхом підстановки цього значення у вираз (7.38) прийдемо
до такої формули щодо ефективного тензора пружності нанокомпозиту:

$$\mathbf{C}^* = \left(\left(\mathbf{C}^{(1)} \right)^{-1} + f \left[\left(\left(\mathbf{C}^{(2)} \right)^{-1} - \left(\mathbf{C}^{(1)} \right)^{-1} \right) : \mathbf{B}^{(2)} + \left(\mathbf{C}^{(1)} \right)^{-1} : \mathbf{B}^{(12)} \right] : \right. \\ \left. : \left[(1-f)\mathbf{I} + f(\mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(12)}) \right]^{-1} \right)^{-1}. \quad (7.40)$$

Ефективний тензор пружності нанопористого матеріалу отримаємо за умови $\mathbf{B}^{(2)} \equiv 0$:

$$\mathbf{C}^* = \left(\left(\mathbf{C}^{(1)} \right)^{-1} + f \left(\mathbf{C}^{(1)} \right)^{-1} : \mathbf{B}^{(12)} : \left[(1-f)\mathbf{I} + f\mathbf{B}^{(12)} \right]^{-1} \right)^{-1}.$$

Таким чином, задача визначення ефективних модулів пружності нанокомпозиту зводиться до отримання тензорів концентрації напружень $\mathbf{B}^{(2)}$ і $\mathbf{B}^{(12)}$ (для нанопористого матеріалу лише $\mathbf{B}^{(12)}$) для РОЕ. Розрахунок їх компонент здійснюється з множини розв'язків крайових задач теорії пружності для РОЕ за різних типів його однорідного поверхневого навантаження або задання компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}_0$.

Тоді на основі залежностей (6.4) та (7.36) матимемо:

$$B_{ijml}^{(12)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S \Delta t_i^{ml} x_j dS; \quad B_{ijml}^{(2)} = \frac{1}{V^{(2)}} \iint_S t_i^{(2)ml} x_j dS, \quad (7.41)$$

де $t_i^{(2)ml}$ – i -та компонента вектора зусиль на міжфазній поверхні з боку нановключення, а Δt_i^{ml} – i -та компонента вектора стрибка зусиль на матеріальній поверхні S в полі напружень σ_{ml}^0 на межі ∂V .

З точки зору ефективності застосування граничноелементного підходу для розрахунку вказаних компонент тензорів концентрації напружень важливо, що у визначальних співвідношеннях (7.40) присутнє лише інтегрування по внутрішній щодо РОЕ міжфазній поверхні, що уможливорює для відносно

розрідженого композиту розгляд РОЕ з безмежною матрицею. Також підінтегральні величини у цих співвідношеннях з урахуванням переходів між системами координат

$$\Delta t_i = p_i \Delta t_p + k_i \Delta t_\varphi + n_i \Delta t_n, \quad i = \overline{1,3}. \quad (7.42)$$

є безпосередніми розв'язками отриманих у підрозділі 7.3 систем ГІР (7.32), (7.33).

Отже, стратегія числового дослідження ефективних властивостей розглянутих нанокомпозитів передбачає поетапно граничноелементне розв'язання задач навантаження безмежної матриці з нановключенням (наприклад, шести елементарних варіантів розтягу та зсуву у трьох напрямках) за описаним у попередніх підрозділах алгоритмом, числове інтегрування цих розв'язків за формулами (7.41) з отриманням відповідних тензорів впливу, та обчислення тензорних згорток в узагальненій гомогенізаційній моделі Морі-Танаки (7.40).

Для перевірки точності результатів запропонованого підходу порівняємо їх з відомим в літературі аналітичним розв'язком щодо ефективного 2D модуля всебічного стиску $k^* = 2(\lambda^* + G^*)$ нанопористого середовища рівномірно розподіленими по об'єму сферичними нанопорожнинами [261]:

$$k^* = \frac{2G^{(1)}(4fG^{(1)}\tilde{k}_s + 3k^{(1)}(2 - 2f + \tilde{k}_s))}{3(3fk^{(1)} + 2G^{(1)}(2 + \tilde{k}_s - f\tilde{k}_s))}, \quad (7.43)$$

де f – об'ємна частка нанопор; $k^{(1)}$ – 2D модуль всебічного стиску матеріалу матриці; $\tilde{k}_s = k_s / (RG^{(1)})$, $k_s = 2(\lambda_s + G_s)$ – нормалізований 2D модуль всебічного стиску матеріальної поверхні.

Вираз (7.43) дозволяє перехід до часткового випадку макropористого середовища за умови $k_s = 0$, коли ефекти наявності матеріальної поверхні відсутні:

$$k_M^* = \frac{4G^{(1)}k^{(1)}(1-f)}{3fk^{(1)} + 4G^{(1)}}. \quad (7.44)$$

На рис. 7.20 показано залежності відносного ефективних 2D модулів всебічного стиску k^*/k_M^* від об'ємної частки порожнин алюмінієвого нанопористого матеріалу зі сферичними порожнинами з механічними характеристиками матриці $k^{(1)} = 75,2 \text{ ГПа}$, $G^{(1)} = 34,71 \text{ ГПа}$, $\nu^{(1)} = 0,3$ та двома варіантами матеріальної поверхні [373, 447]: тип А (поверхня орієнтована відносно кристалографічних напрямків $[100]$) з механічними характеристиками $k_s^A = -5,457 \text{ Н/м}$, $G_s^A = -6,2178 \text{ Н/м}$, $\nu_s^A = -0,639$, $\lambda_s^A = 3,4893 \text{ Н/м}$ та тип В (поверхня орієнтована відносно кристалографічних напрямків $[111]$) з механічними характеристиками $k_s^B = 12,932 \text{ Н/м}$, $G_s^B = -0,3755 \text{ Н/м}$, $\nu_s^B = 0,529$, $\lambda_s^B = 6,8415 \text{ Н/м}$. Натяг поверхні нанопор відсутній.

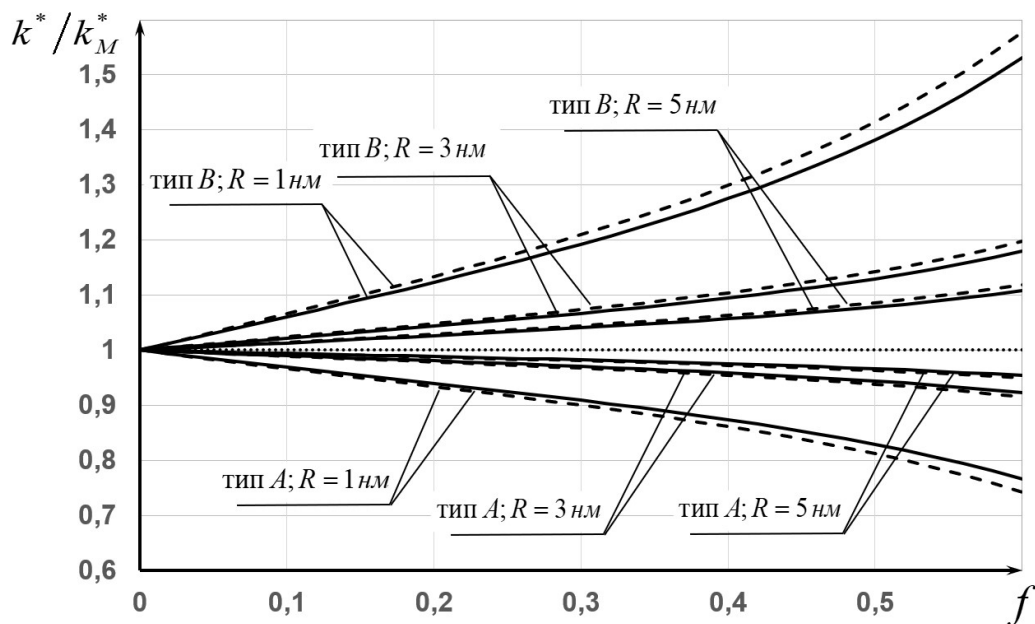


Рис. 7.20. Залежність нормованих ефективних 2D модулів всебічного стиску нанопористого середовища зі сферичними порожнинами від відносної об'ємної частки наповнювача.

Штрихові лінії відповідають аналітичному розв'язку (7.43), (7.44), а суцільні лінії отримані шляхом поєднання методу граничних елементів та схеми Морі-Танаки. Пунктирна лінія відображає випадок відсутності поверхневих

ефектів у пористому середовищі (макропористість). Навіть за використання безмежного РОЕ бачимо добре узгодження результатів у діапазоні, що включає відносно великі об'ємні концентрації (до 0,6) нанопор.

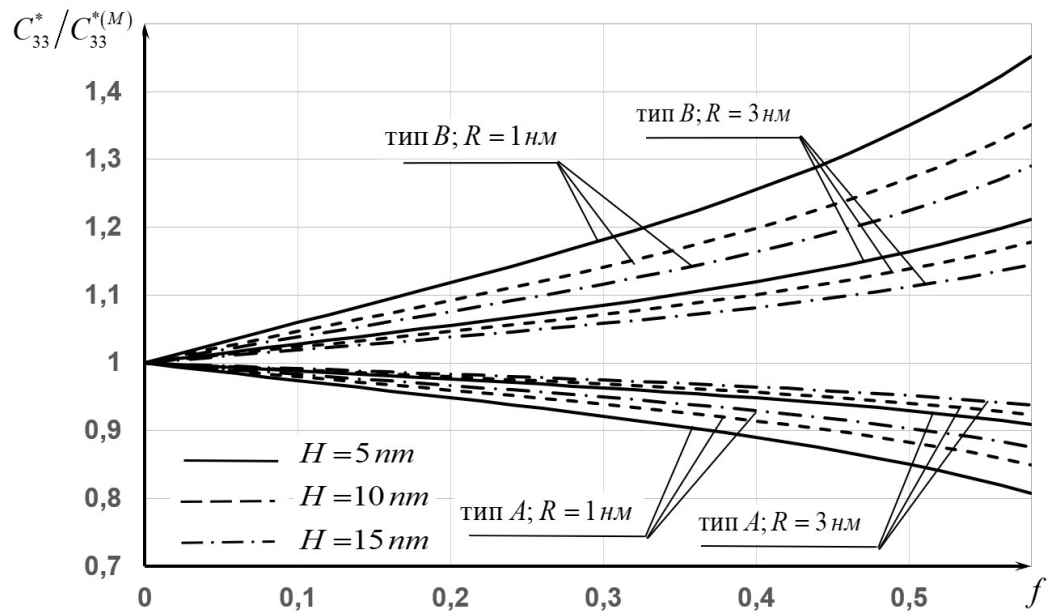


Рис. 7.21. Залежність нормованих ефективних теоретичних модулів пружності $C_{33}^*/C_{33}^{*(M)}$ нанопористого середовища зі однонаправленими сфероциліндричними порожнинами від відносної об'ємної частки порожнин.

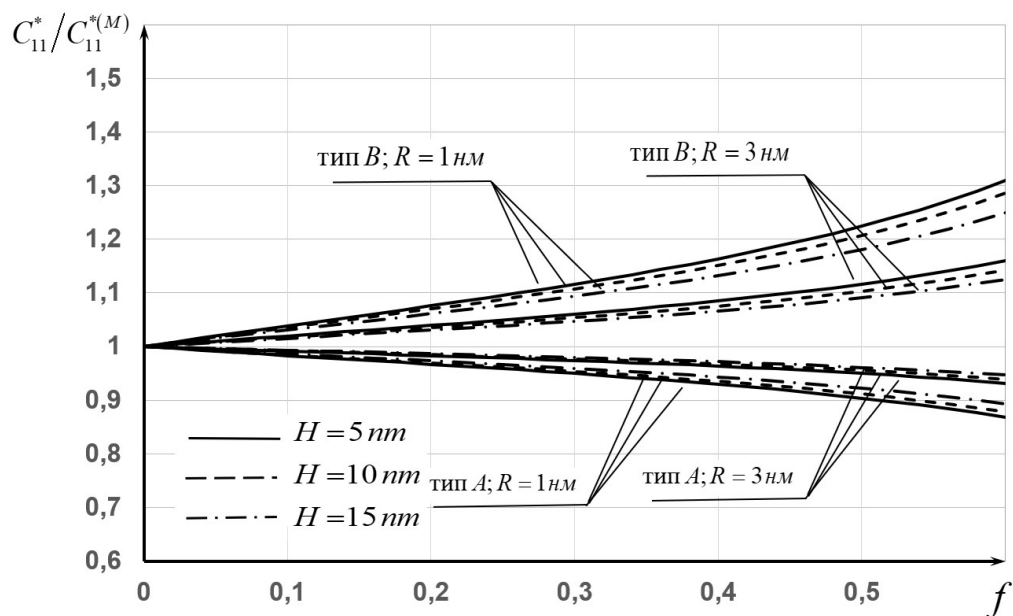


Рис. 7.22. Залежність нормованих ефективних теоретичних модулів пружності $C_{11}^*/C_{11}^{*(M)}$ нанопористого середовища зі однонаправленими сфероциліндричними порожнинами від відносної об'ємної частки порожнин.

Запропонованою методикою отримано ефективні пружні модулі алюмінієвого нанопористого середовища з однаково орієнтованими вздовж осі Ox_3 порожнинами сфероциліндричної форми (рис. 7.19) та обома типами матеріальних поверхонь. Гомогенізація такого нанопористого середовища приводить до його макроскопічної трансверсальної анізотропії, тому на рис. 7.21 – 7.22 показана поведінка найбільш характерних ефективних пружних модулів C_{33}^* і $C_{11}^* = C_{22}^*$ для перпендикулярних площин анізотропії такого типу. Дані стосуються сфероциліндрів з радіусом центрального поперечного перерізу $R = 1\text{ нм}$ і $R = 3\text{ нм}$ та піввисотою $H = 5\text{ нм}$ (суцільні лінії); $H = 10\text{ нм}$ (штрихові лінії); $H = 15\text{ нм}$ (штрих-пунктирні лінії). Результати віднесено до відповідних ефективних модулів пружності $C_{33}^{*(M)}$ і $C_{11}^{*(M)} = C_{22}^{*(M)}$ макropористого середовища з порожнинами аналогічної форми та аналогічної об'ємної концентрації, коли поверхневі ефекти нехтувано малі.

Прояв анізотропії ефективних властивостей розглянутого нанопористого середовища демонструється відмінністю значень ефективних модулів пружності C_{33}^* (рис. 7.21) і $C_{11}^* = C_{22}^*$ (рис. 7.22). Ефективні модулі пружності нанопористого середовища з поверхнею наповнювачів типу *B* більші від макроскопічних, водночас розгляд поверхні наповнювачів типу *A* дає протилежний ефект. Ці тенденції більш виразні для нанопористого середовища з більшою концентрацією наповнювачів. За збереження концентрації сфероциліндричних нанопор їх видовження приводить до послаблення наноефектів, що виражається у зменшенні ефективних модулів пружності нанопористого середовища з поверхнею наповнювачів типу *B* та їх збільшення у випадку поверхні наповнювачів типу *A*.

Для алюмінієвого нанопористого середовища обчислено також ефективні модулі Юнга у випадку випадкової орієнтації сфероциліндричних порожнин-наповнювачів (рис. 7.23) з типами поверхонь *A* і *B*. У цьому випадку

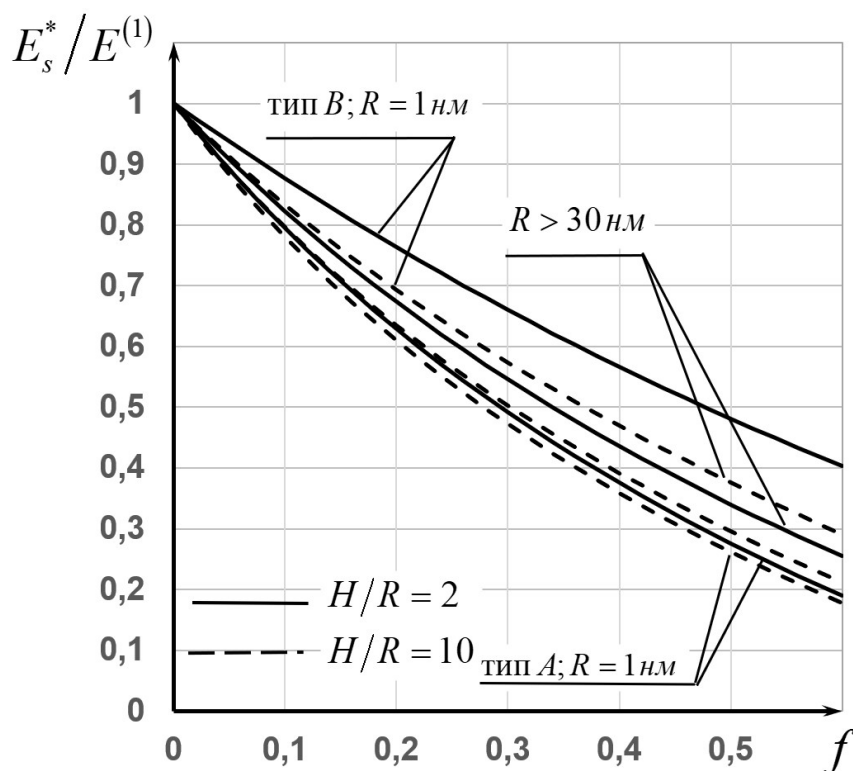


Рис. 7.23. Залежність нормованих ефективних модулів Юнга нанопористого середовища з випадково орієнтованими сфероциліндричними порожнинами від відносної об'ємної частки порожнин.

гомогенізоване середовище буде ізотропним, а його пружні модулі визначатимуться додатковими співвідношеннями (6.25). Результати віднесені до модуля Юнга матеріалу, що містить порожнини.

На рисунку чітко прослідковується природне спадання ефективного модуля Юнга за зростання концентрації пустотних наповнювачів, причому воно більш стрімке для нанопор з поверхнею типу *A*. Значення ефективних модулів Юнга пористого середовища з нехтувано малою поверхневою пружністю (коли $R > 30$ нм) знаходяться між відповідними величинами для нанопористих середовищ з поверхнями типу *B* і *A*.

Зауважимо, що наведені на рис. 7.20-7.23 числові результати якісно узгоджуються з дослідженнями [347, 400], де розглянуто випадок нанопор у вигляді витягнутих сфероїдів.

7.5. Висновки до сьомого розділу

Базовані на методі граничних елементів алгоритми розрахунку локальних та ефективних пружних властивостей композитів та пористих середовищ з нанорозмірними включеннями і порожнинами відзначаються високою продуктивністю внаслідок формулювання та дискретизації розрахункових задач лише щодо поверхневих величин, які входять безпосередньо у нанорівневі диференціальні моделі деформування поверхонь з власною пружністю і натягом, а також модель Морі-Танаки гомогенізації неоднорідних і пористих структур. У практичному сенсі це приводить до замкнених гібридних систем з диференціальних і інтегральних рівнянь, визначених на поверхні наповнювачів, та можливості суміщення граничноелементної і скінченнорізницевої апроксимацій розв'язків на спільній сітці розбиття цієї поверхні.

Присутність власної поверхневої пружності і натягу у композиті (середовищі) з включеннями (отворами чи порами) відчутна для радіусів сферичних наповнювачів менших ніж 20 нм та довжин сфероциліндричних – ніж 30 нм. У цьому діапазоні результати характеризуються вираженою розмірозалежністю з посиленням наноефектів за зменшення розмірів наповнювачів структури. Так порівняння числових розв'язків щодо поодиноких нановключень і нанопорожнин різного розміру під поверхневим натягом показує суттєвий розмірний ефект оберненої залежності між напруженнями на їх поверхні та радіусом нанонеоднорідності. Прояв матеріальної поверхні досягає максимуму для порожнистого наповнювача.

Розподіл полів переміщень і напружень по поверхні сфероциліндричної нанопорожнини під поверхневим натягом неоднорідний з максимумами переміщень в основі та напружень на вершинах її сферичних частин. В околі такої нанопорожнини нормальні осьові та азимутальні напруження у площині її серединного перерізу від'ємні (стискувальні), що є фактором зміцнення матеріалу з поверхневою пружністю. За збільшення відносної висоти нанопорожнини значення відповідних нормальних радіальних та осьових напружень зме-

ншуються по модулю, а азимутальні напруження навпаки ростуть. Такі протилежні тенденції пояснюються мінімізацією впливу сферичних частин поверхні видовженої нанопорожнини на напруження у площині її серединного перерізу. Коли довжина сфероциліндричної нанопорожнини сягає двох діаметрів її поперечного перерізу, то напруження у серединній площині виходять на певні сталі значення. Тоді нанопорожнину умовно можна вважати «безмежною» по висоті з циліндричною поверхнею і напруження у серединній площині досліджувати з розв'язків відповідної плоскої задачі наномеханіки. На відстанях від поверхні, більших від 2,5 радіусу поперечного перерізу сфероциліндричної нанопорожнини, для різних її видовжень криві напружень у серединній площині сходяться в одну криву, що свідчить про зведення нанівель впливу форми нанонеоднорідності у вказаній зоні.

За сумісної дії поверхневого натягу та зовнішнього навантаження матриці розтягом вздовж осі включення спостерігається стрімкіший ріст осьових напружень в матриці поблизу кульового включення порівняно зі сфероциліндричним. Це пояснюється різною кривиною міжфазної матеріалізованої поверхні в площині серединного поперечного перерізу включення. Таким чином, ефекти поверхневого натягу та ефекти впливу жорсткісних характеристик складових композиту мають протилежний вплив на напружений стан в площині серединного перерізу нановключення.

Ефективним пружним властивостям пористих середовищ з розподіленими нанопорожнинами сфероциліндричної форми (порожнистими кінцевими нанотрубками) притаманна трансверсальна анізотропія у випадку односпрямованих наповнювачів та ізотропія у випадку їх випадкової орієнтації. Вплив поверхневої пружності на ці властивості суттєвіший для середовищ, що містять сфероциліндричні нанопори з меншою відносною довжиною та більшою їх концентрацією. Ефективні пружні модулі таких наносередовищ можуть бути як більші, так і менші від отриманих без врахування поверхневої пружності аналогів залежно від типу кристалографічної орієнтації присутніх матеріальних поверхонь.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему з розроблення базованих на інтегральних формулюваннях задач, граничноелементних алгоритмів числового дослідження тривимірного напружено-деформованого стану композитних тіл і ефективних модулів пружності композитних середовищ з об'ємисто-неканонічними, тонкостінними і нанорозмірними включеннями та впливу на механічні властивості таких структур взаємодії включень, внутрішніх тріщин і недосконалостей міжфазного контакту. В основу проведених досліджень покладено такі результати:

1. З використанням методу підобластей в інтегральних поданнях розв'язків та граничних інтегральних рівняннях тривимірних задач теорії пружності для матриці з ідеально сконтактованим об'ємистим включенням впроваджено неявне врахування умов неперервної передачі переміщень і зусиль через міжфазну поверхню загальної форми.

2. Розроблено процедури додискретизаційної регуляризації сингулярних ядер та післядискретизаційної регуляризації слабосингулярних ядер отриманих граничних інтегральних рівнянь на сітках ізо- та суперпараметричних граничних елементів з отриманням універсальних щодо форми та типу елементів виразів коефіцієнтів дискретних аналогів рівнянь через значення фундаментальних розв'язків, функцій форми, інтерполяційних функцій та якобіанів регуляризуючих відображень у точках колокації.

3. Граничноелементні схеми узагальнено на числове розв'язання інтегральних рівнянь дуального типу (у переміщеннях і напруженнях), якими описується взаємодія пружних об'ємистих, тонкостінних податливих та жорстких включень і тріщин між собою у необмеженій матриці та з зовнішньою поверхнею у обмеженому композитному тілі.

4. Для розріджено-великих систем тонкостінних включень і тріщин у пружній матриці запропоновано модифікацію граничноелементного підходу до

числового аналізу їх взаємодії на основі ітерації полів одностороннього впливу з отриманням розщеплених систем розрахункових рівнянь.

5. Здійснено граничноелементну апроксимацію розв'язків інтегральних рівнянь у локальних системах координат з повним або частковим неаявним врахуванням неідеального контакту між об'ємистим включенням і матрицею внаслідок проковзування, присутності тонкого прошарку чи нанорівневої матеріалізації міжфазної поверхні. Шляхом комбінованого вибору невідомих у глобальній та локальних системах координат забезпечено уніфікацію процедур регуляризації та дискретизації рівнянь для різних умов контакту на міжфазній поверхні.

6. Для задач з нанорозмірним включенням замкнутість розрахункових рівнянь досягнуто поєднанням граничноелементного дискретного аналога із скінченнорізницею щодо співвідношень деформування матеріальної міжфазної поверхні. У випадку міжфазної поверхні, складеної із півсферичних і циліндричної частин (за розгляду скінченного нановолокна), проведено узгодження шуканих величин в різних системах координат та доповнення числової моделі умовами деформаційної сумісності підповерхонь.

7. Реалізовано схему безпосереднього внесення граничноелементних розв'язків у співвідношення гомогенізації пружних середовищ з розподіленими скінченими волокнами та порожнинами, зокрема в узагальнені моделі для неідеального та нанорівневого контакту компонент, які допускають існування стрибків переміщень або напружень на міжфазних і пустотних поверхнях.

Створений числовий інструментарій застосовано для визначення розподілів переміщень, напружень і ефективних модулів пружності у тривимірних композитних тілах та середовищах у залежності від геометричної форми включень, розміру нановключень, комбінації матеріалів у системі, взаємного розташування включень, тріщин та зовнішніх поверхонь, умов контакту включень з матрицею, показника об'ємної фракції та просторової орієнтації розподілених включень. Отримані числові результати дозволяють зробити такі висновки.

1. У тривимірних задачах навантаження безмежної пружної матриці з поодиноким включенням у вигляді скінченного циліндричного волокна за їх ідеального і неідеального контакту виявлено, що:

- специфіка форми включення проявляється у неоднорідності напружень у ньому навіть за однорідного навантаження матриці (на відміну від включення сфероїдної форми), вказана неоднорідність суттєвіша за наближення до поверхні волокна, більшого його видовження та контрасту жорсткості щодо матричної, а також за сплюснення торців та викривлення волокна. Наприклад, за розтягу матриці вздовж осі скінченного циліндричного волокна з відносною жорсткістю $G_2/G_1 = 100$ щодо матричного матеріалу відхилення в розподілі нормальних напружень вздовж його осі у 1,5 разів менше для волокна зі сферичними торцями, ніж з плоскими торцями. У серединному перерізі скінченного сфероциліндричного волокна з викривленою по дузі кола віссю зафіксовано точку інваріантності нормальних напружень щодо кривизни осі волокна на відстані $0,33 R$ від центра цього перерізу;
- неоднорідність напружень у волокні породжує зони їх концентрації, які можуть локалізуватись як у торцевій (для $G_2/G_1 < 1$), так і серединній (для $G_2/G_1 > 1$) частинах волокна. У жорсткому скінченому волокні зі сферичними торцями напруження в серединній його частині у 2-3 рази більше ніж у торцевій залежно від його довжини;
- міжфазне проковзування чи тонкий податний прошарок між матрицею і сфероциліндричним волокном є факторами зниження (релаксації) напружень з більш виразним проявом для видовжених волокон. Так за всебічного стиску матриці з волокном ковзний міжфазний контакт знижує нормальні напруження у серединному перерізі волокна на 10 – 40 % залежно від його відносної довжини та жорсткості. За розтягу епоксидної матриці зі скляним волокном, збільшення в 4 рази податливості тонкого міжфазного прошарку між ними зменшує концентрацію осьових нормальних напружень у матриці на 12-15 % залежно від товщини прошарку та відносної довжини волокна.

2. У тривимірних задачах взаємодії об'ємистих сфероциліндричних включень (скінченних волокон), тонкостінних дискових включень та кругових (еліптичних) тріщин у безмежній матриці і обмежених порожнистому циліндрі і призматичному тілі встановлено, що

- розташування тріщини поряд з міжфазною поверхнею як зі сторони матриці (матрична тріщина), так і волокна (волоконна тріщина) позначається на монотонності зміни КІН вздовж фронту дефекту та точках екстремальних значень КІН залежно від взаємного положення взаємодіючих об'єктів та жорсткостей волокон, у загальному сенсі виражається також у збільшенні чи зменшенні максимальних КІН. Зафіксовано збільшення КІН у ближній точці контуру кругової тріщини радіуса R до поверхні м'якого сфероциліндричного включення ($G_2/G_1 = 0,1$) з рівновеликим з тріщиною серединним перерізом до 1,7 рази для матричних тріщин і до 12 разів для тріщин волокна порівняно з випадком поодинокі матричної тріщини залежно від довжини волокна. Характерним є спад такої взаємодії за віддалення тріщин, включень і зовнішніх поверхонь;
- для матричної і волоконної тріщин прослідковано порогове значення видовження волокна, за яким його вплив на КІН в околі дефекту нівелюється. Зокрема, гранична піввисота волокна, збільшення якої не приводить до зміни КІН для тріщини радіусу R , становить $H = 6R$ у випадку матричної тріщини і $H = 16R$ у випадку волоконної для матеріалу волокон, вдсятеро м'якішого за матричний, тоді як для вдсятеро жорсткіших за матрицю волокон ця регулярність виникає з довжини $H = 14R$ у випадку матричної тріщини і $H = 30R$ у випадку волоконної;
- ковзний контакт між матрицею та волокном приводить до зростання КІН в околі сусідньої матричної тріщини навіть за розгляду жорсткіших щодо матриці волокон (зафіксовано 5-30 % збільшення залежно від розташування та геометричних розмірів волокна). Також виявлено спеціальні ситуації такого контакту, коли КІН в околі матричної тріщини такі ж, як за її взаємодії з

ідеально сконтактованим з матрицею волокном, чи збігаються з КІН за відсутності волокна;

- на контурі кругових тонкостінних податливих включень спостерігаються локальні максимуми КІН у точках наближених до зовнішньої поверхні обмеженого тіла, які є менш виразними якщо поверхня навантажена тиском. Зменшення радіусу кривини зовнішньої поверхні тіла, модуля зсуву матеріалу включень та їх товщини приводить до збільшення КІН на контурі таких приповерхневих тріщинних неоднорідностей.
- наявність внутрішнього тиску $p/G_0 = 0,03$ на викривлену поверхню порожнистого циліндра радіусом $R = 90a$ зменшує КІН на контурі внутрішньої приповерхневої кругової тріщини радіусом a на 2-10 % залежно від її наближення до поверхні порівняно з випадком відсутності такого тиску;
- поздовжня внутрішня газонаповнена тріщина у порожнистому циліндрі навантаженому внутрішнім тиском збільшує кільцеві напруження на його зовнішній поверхні в 4 рази за умови зростання тиску газу у тріщині до рівня внутрішнього тиску у циліндрі.

4. Дослідження ефективних пружних властивостей композитних середовищ показали, що:

- викривлення осі коротких пружних волокон з відносною жорсткістю $G^{(2)}/G^{(1)} = 10$ як і ковзні умови їх зчеплення з матрицею знижують ефективні модулі Юнга макро-ізотропного композиту з γ у 1,5-2 рази за об'ємної частки наповнювача $f = 0,3$ відносно ефективних модулів Юнга композиту армованого прямими ідеально сконтактованими з матрицею волокнами. Водночас ефективні коефіцієнти Пуассона зростають на 3-10 %;
- для фібробетонів армованих сталлю фіброю з стандартною густиною наповнювача 60 кг/м^3 неврахування кривизни осі сталюї фібри призводить до похибки у визначенні ефективного модуля Юнга на 2-3 %;
- збільшення вдвічі відносної довжини ідеально зконтактованого з матрицею

волокна з об'ємною часткою $f = 0,2$ макроскопічно ізотропного композиту з $5R$ до $10R$ приводить до зростання ефективного модуля Юнга від 6 % для відносної жорсткості наповнювача $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$ до 30 % для відносної жорсткості наповнювача $E^{(2)}/E^{(1)} = 100$. Для випадку ковзного контакту волокон з матрицею таке збільшення відбувається на 1-2 % незалежно від його відносної жорсткості;

- за ковзного контакту з матрицею прямих сфероциліндричних хаотично орієнтованих і випадково розташованих волокон за відносної їх жорсткості $E^{(2)}/E^{(1)} > 50$ ці волокна можна вважати абсолютно жорсткими, оскільки цей параметр практично не впливає на ефективні пружні властивості макроскопічно ізотропного композиту. Ефективний коефіцієнт Пуассона такого середовища крім того не залежить від відносної довжини волокон.
5. У тривимірних задачах визначення нанорівневих локальних і ефективних пружних властивостей тривимірних композитних тіл та середовищ, встановлено, що:
- наповнення структури трубчастими нанопорами за різного їх видовження та типу матеріальних поверхонь розширює інструментарій керованої макроскопічної анізотропії нанопористого матеріалу та досягнення контрасту ефективних властивостей щодо макропористого середовища через регулювання його ефективних властивостей (збільшення або зменшення ефективних пружних модулів стосовно макроскопічних за сталої об'ємної частки пустот).
 - ефекти поверхневого натягу та розмірозалежності проявляються як при визначенні локальних полів напружень так і за оцінки цілісних характеристик неоднорідних тіл за умови розміру неоднорідностей від 30 нм і менше;
 - для сфероциліндричної нанопори з геометричним параметром $H = 3R$ свіжосколотому залізі поверхневі зусилля зменшуються в 2 рази коли радіус серединного перерізу збільшується з $R = 2\text{ нм}$ до $R = 5\text{ нм}$;

- ефект нанозміцнення для трубчастої нанопорожнини за наближення до серединного її перерізу зі сторони матриці на 60 % менший ніж за наближення до сферичної нанопорожнини такого ж радіуса;
- для керамічного нановключення сфероциліндричної форми ефект нанозміцнення в центральній його частині зменшується вдвічі за збільшення його відносної довжини в 4 рази.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М: Наука, 1978. 464 с.
3. Александров А. Я., Вольперт В.С. Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсальноизотропном теле. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1970. № 1. С. 115–121.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 487 с.
5. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М: Физматлит, 1993. 224 с.
6. Андрейкив А.Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1992. 184 с.
7. Антипов Ю.А., Попов Г.Я., Яцко С.И. Решение задач о концентрации напряжений возле пересекающихся дефектов при помощи задачи Римана с бесконечным индексом. *Прикладная математика и механика*. 1987. Т. 51, № 3. С. 458–467.
8. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных Интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 254 с.
9. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. О распределении напряжений и смещений вблизи жесткого дискообразного включения. *Физ.- хим. механика материалов*. 1984. № 6. С. 105–106.
10. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
11. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями. *Пробл. Проч-*

ности. 1973. № 10. С. 8–11.

12. Бернар И.И., Опанасович В.К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности. *Прикладная математика и механика*. 1983. Т. 47, № 2. С. 249–256.
13. Богданов В.Л., Григоренко О.Я., Сторожук Є.А., Тормахов М.М. Про чисельне дослідження впливу параметрів різьби на напружено-деформований стан системи імплантат-кістка. *Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019: тези доповідей міжнародної наукової конференції. (15 – 18 квітня 2019 р.). – Дніпро, Кам'янське, 2019.* С. 93-94.
14. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Т. 2. Математичні методи в задачах руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. 424 с.
15. Божидарнік В.В., Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Метод граничних елементів для двовимірних задач термопружності ізотропних тіл із тріщинами та тонкими включеннями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 17.* – С. 51–59.
16. Бойков И.В., Добрынина Н.Ф. Приближенные методы вычисления щтегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пензен. гос. техно ун-та, 1996. 188 с.
17. Бурак Я., Чекурин В.Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. Киев: Наук. думка, 1987. 264 с.
18. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Визначення параметрів термомеханічного стану термочутливих магнітотвердих феромагнітних тіл за умов дії квазіусталених електромагнітних полів. *Доп. НАН України*. 2007. № 8. С. 53–58.
19. Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г. Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1985. 225 с.

20. Бутрак І. Вплив гармонічної хвилі на концентрацію напружень у безмежному тілі з податливими дисковими включеннями. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. Т. 21. С. 30–38.
21. Вайсфельд Н.Д. Нестационарная задача концентрации напряжений вблизи сферической трещины, расположенной внутри усеченного конуса. *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. 2004. Т. 47, № 3. С. 134–143.
22. Васільєв К.В., Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням. *Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. наук*. 2010. № 2. С. 55–63.
23. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1980. 510 с.
24. Винницька Л., Савула Я. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням. *Фіз.-мат. моделювання та інф. технолог.* 2008. Т. 7. С. 21–29.
25. Винницька Л.І., Григоренко Я.М., Савула Я.Г. Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням. *Доп. НАН України*. 2009. № 9. С. 62–66.
26. Вишневский К.В., Кушнир Р.М. Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями. *Мат. методы физ.-мех. поля*. 1996. Т. 39, № 1. С. 37–41.
27. Габдулахаев Д.В., Душков П.Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. *Изв. вузов. Математика*. 1973. Т. 7. С. 12–24.
28. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
29. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 345 с.
30. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 438 с.
31. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. Киев: Наук. думка, 1992. 192 с.
32. Гнітько В.І., Дегтярьов К.Г., Стрельнікова О.О., Тонконоженко А.М.

Розрахункові моделі для аналізу ефективних характеристик тривимірних нанокompозитів із системами включень. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2023. Т. 2, № 2. С. 32–49.

33. Головач Н.П., Дияк І.І. Метод декомпозиції області та комбінований скінченно-граничноелементний аналіз пружності. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2000. № 1. С. 115–117.
34. Головчан В.Т. К решению тройкопериодических задач статики упругого тела со сферическими включениями. *Прикл. механика*. 1986. Т. 22, № 7. С. 29–39.
35. Гольдштейн Р.В., Капцов А.В. Интегро-дифференциальные уравнения нестационарной динамической пространственной задачи о трещине в упругой среде. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1983. Т. 5. С. 74–80.
36. Горгадзе А.Я., Рухадзе А.К. Об одном численном методе решения интегральных уравнений теории упругости. *Сообщения Грузин, филиала АН СССР*. 1940. Т. 1, № 4. С. 225–258.
37. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
38. Григоренко О., Савула Н. Полівимірна крайова задача гетерогенної математичної моделі контактної взаємодії пружного тіла з тонким включенням. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2006. № 11. С. 120–126.
39. Григорян Э.Х. Задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное включение. *Известия НАН Армении. Механика*. 2002. Т. 55, № 1. С. 6–16.
40. Гриліцький М.Д., Кунець Я.І., Матус В.В., Пороховський В.В. Дифракція SH-хвиль тонким прямолінійним тунельним включенням низької жорсткості в півпросторі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2006. Т. 49, № 4. С. 92–96.
41. Гриліцький Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонко-

- стенным включением. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1975. Т. 1. С. 41–48.
42. Гриліцький Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1987. Т. 27. С. 3–9.
 43. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1983. 296 с.
 44. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. О построении основ механики нанокompозитов: обзор. *Прикл. механика*. 2011. Т. 47, № 1. С. 4–61.
 45. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. Анализ нанокompозитов сложной структуры: обзор. *Прикл. механика*. 2011. Т. 47, № 4. С. 3–75.
 46. ДСТУ Б В.2.7-217:2009 Будівельні матеріали і бетони. Методи визначення призмової міцності, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. [Чинний від 01.09.2010]. Вид. офіц. Київ, 2009. 16 с. (Інформація та документація).
 47. Дияк І., Савула Я., Стягар О. Числовий розв’язок задач типу Гіркмана для тіл з включенням. В кн. “Сучасні проблеми механіки та математики”. Том 2. / Під заг. редакцією чл.-кора НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кора НАН України Б.Й. Пташника. 2013. Львів. С. 103.
 48. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1992. Т. 37. С. 49–55.
 49. Дробенко Б.Д. Комп’ютерне моделювання деформування елементів діючого енергетичного обладнання з пошкодженнями. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. № 6. С. 56–60.
 50. Жданова, О.О., Самедов А.М. Пружні характеристики сланцевих гірських порід. *Вісник ЖДТУ. Серія: Технічні науки*. 2012. Т. 60, № 1. С. 109–116.
 51. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 480 с.
 52. Калоев С.А., Авдюшина Е.В., Качан Ю.Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями. *Теоретическая и прикладная механика*.

2002. Т. 35. С. 53–65.

53. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композиционных материалов. Петрозаводск: И-во петрозаводского у-та, 1993. 598 с.
54. Кирилюк В.С. О термонапряженном состоянии эллипсоидальной неоднородности (включения) при полиномиальном силовом и температурном внешних полях. *Теоретическая и прикладная механика*. 1999. Т. 30. С. 67–76.
55. Кирилюк В.С. О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений. *Проблемы прочности*. 2006. № 1. С. 58–68.
56. Кирилюк В.С., Левчук О.И. Напряженное состояние ортотропного пьезоэлектрического тела с трехосным эллипсоидальным включением при растяжении. *Прикладная механика*. 2019. Т. 33, № 3. С. 102–108.
57. Кит Г.С., Подстригач Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением. *Физ.-хим. механика материалов*. 1966. Т. 2, № 3. С. 247–252.
58. Кит Г.С., Хай М. В., Лаушник И.П. Определение напряжений в полупространстве с произвольно расположенными плоскими трещинами. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 3. С. 164–169.
59. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1989. 276 с.
60. Крауч С., Старфильд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
61. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
62. Кундрат А.М. Антиплоска задача для пружного простору із жорстким тонкостінним кутником. *Наукові нотатки*. 2007. № 20. С. 245–249.
63. Кундрат А.М. Ізотропне тіло армоване фасонними профілями тавра та кутника в умовах поздовжнього зсуву. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. 2009. Т. 46, № 2. С. 173–178.

64. Кундрат Н.М. Отслоение включения в ортотропной композиции. *Прикл. механика*. 2000. Т. 36, № 9. С. 123–128.
65. Кунець Я., Матус В. Розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Т. 20. С. 132–139.
66. Кунець Я.І. Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м'яким включенням в умовах поздовжнього зсуву. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2004. Т. 47, № 3. С. 144–148.
67. Кунець Я.І., Матус В.В. Коливання необмеженого середовища із пружним волокном та тонкою міжфазною неоднорідністю малої жорсткості. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. Т. 22. С. 77–85.
68. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М: Физматгиз, 1963. 472 с.
69. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1976. 664 с.
70. Кушнир Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
71. Куш В. И. Теоремы сложения для частных решений уравнения Ляме в сфероидальном базисе. *Прикладная Механика*. 1995. Т. 31, № 2. С. 86–91.
72. Куш В. И. Напряженное состояние упругой среды, содержащей взаимодействующие круговые трещины и сфероидальные включения. *Прикладная механика*. 1998. Т. 34, № 5. С. 42–47.
73. Левин В.М. К определению эффективных упругих модулей композиционных материалов. *ДАН СССР, сер. матем.-физ.* 1976. Т. 220, № 5. С. 1042–1045.
74. Леонов М.Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала. *Укр. мат. журнал*. 1953. Т. 5, № 1. С. 50–57.

75. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. Петербург: Наука, 1999. 382 с.
76. Липатов Ю. С. Межфазные явления в полимерах. Київ: Наук. думка, 1980. 259 с.
77. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, теории упругости и дифракции волн. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
78. Лобода В.В. Применение метода осреднения к расчету плиты, подкрепленной стрингерами. *Прикл. мат. и механика*. 1981. Т. 45, № 5. С. 867–875.
79. Мартиняк Р.М. Механодифузійна взаємодія тіл з урахуванням заповнювача міжконтактних зазорів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2000. Т. 36, № 2. С. 124–126.
80. Маруха В.І., Панасюк В.В., Силованюк В.П. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. Львів: СПОЛОМ, 2009. 262 с.
81. Марчук М.В., Хом'як М.М. Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повідомлення 1. Основні співвідношення й загальна методика побудови розрахункових схем у рамках $\{m, n\}$ -апроксимації. *Проблеми прочності*. 2000. № 2. С. 118–127.
82. Марчук М.В., Хом'як М.М. Ермітові сплайни як базисні функції методу скінченних елементів для побудови траєкторій напружень. *Мат методи та фіз.-мех. поля*. 2009. Т. 52, № 1. С. 138–149.
83. Матус В.В. Модифікований метод нульового поля в задачі розсіяння SH-хвиль частково відшарованим пружним включенням з кусково-гладким контуром. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2009. Т. 52, № 4. С. 145–149.
84. Матус В.В. Метод нульового поля в задачах дифракції пружних хвиль на волокнах з тонкими міжфазними неоднорідностями. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2017. Т. 15. С. 82–87.

85. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы. *Прикладна механіка*. 2007. Т. 43, № 4. С. 27–35.
86. Михаськів В.В., Хай М.В. Прочность бесконечного тела с дискообразной трещиной, находящегося под действием циклических нагрузок. *Проблемы прочности*. 1987. Т. 1. С. 13–16.
87. Михаськів В.В. Стасюк Б.М. Концентрація напружень в околі плоскої тріщини та об'ємного пружного включення за умови їх взаємодії. Сучасні проблеми механіки та математики: збірник праць Міжн. конф. у 3-х томах (Львів, 21-25 травня 2013). – Л.: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. - Т. 2. – С. 74-76.
88. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Упругое состояние включения неканонической формы при условии скользящего контакта с трехмерной матрицей. *Прикладна механіка*. 2015. Т. 51, № 6. С. 42–51.
89. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения. *Успехи мат. наук*. 1948. Т. 25, № 3. С. 19–112.
90. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: Гостехиздат, 1949. 380 с.
91. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 224 с.
92. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
93. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Физматгиз, 1968. 576 с.
94. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 87 с.
95. Мовчан А.Б., Морозов Н.Ф., Назаров Н.А. О разрушении вблизи пикообразных включений при посадке с натягом. *Пластичность и разрушение тверд. тел*. 1988. № 1. С. 137–145.
96. Мусхелишвили Н.И. О численном решении задачи теории упругости.

Труды Тбилисского мат. ин-та. 1937. Т. 1. С. 83–87.

97. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
98. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
99. Назаренко Л.Д., Острик В.И. Изгиб прямоугольной пластинки с тонким криволинейным включением. *Динамика и прочность машин.* 1988. № 44. С. 19–24.
100. Назарчук З.Т., Стаднік Т.М. Дифракційна взаємодія тріщиноподібних дефектів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2008. Т. 44, № 4. С. 47–51.
101. Николаев А. Г., Проценко В.С. Первая и вторая осесимметричные задачи теории упругости для двухсвязных областей, ограниченных по верхностями сферы и сфероида. *Прикл. математика и механика.* 1990. Т. 24, № 1. С. 65–74.
102. Опанасович В.К. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1984. № 22. С. 71–77.
103. Опанасович В.К., Драган М.С., Тисовский Л.О. Напряжения в плоскости, содержащей систему прямолинейных включений. *Физ.-хим. механика материалов.* 1985. Т. 21, № 6. С. 21–26.
104. Осадчук В.А., Кушнир Р.М., Николишин М.М. Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною. *Машинознавство.* 1998. № 4/5. С. 40–43.
105. Осів О.П., Сулим Г.Т. Антиплоска деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій.* 2002. № 5. С. 154–164.
106. Панасюк В.В., Андрейків О.Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1976. № 7. С. 636–639.
107. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
108. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных

- интегральных уравнений в задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.
109. Панасюк В.В., Силованюк В.П., Маруха В.І. Міцність пошкоджених тріщинами елементів конструкцій, залікованих за ін'єкційними технологіями. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2005. № 6. С. 60–64.
 110. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. К.: Наук. думка, 1986. 216 с.
 111. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М: Наука, 1988. 472 с.
 112. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
 113. Пастернак Я., Сулим Г. Інтегральні рівняння для моделювання плоскої термовологопружності анізотропних тіл. *Фіз.-мат. модел. та інформ. технol.* 2012. № 15. С. 65–74.
 114. Пастернак Я., Сулим Г., Пастернак Р. Уніфікований підхід до вивчення плоских задач теорії пружності для тіл із тонкими включеннями і накладками з урахуванням можливого відшарування. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. (Львів, 14–17 вер. 2010 р.). – Львів: ІППММ НАНУ, 2010. – С. 78–79.
 115. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2010. Т. 53, № 2. С. 46–57.
 116. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем. *Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Серія Механіка*. 2011. Т. 15, № 5. С. 200–210.
 117. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Двовимірні зв'язані електричні, магнітні та механічні поля в діелектриках із тріщинами та тонкими включеннями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2012. Т. 55, № 2. С. 71–85.
 118. Пелех Б.Л., Коровайчук И.М. К механике композитных сред с несовер-

- шенными связями на поверхностях раздела фаз. *Механика композитных материалов*. 1984. № 4. С. 606–611.
119. Перлин П.И., Самаров В.И. Применение теории потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами. *Прикл. пробл. прочности*. 1977. № 6. С. 111–122.
 120. Перлин П.И., Самаров В.И. Об одном методе вычисления двумерных сингулярных интегралов и его применении к решению сингулярных интегральных уравнений пространственной задачи теории упругости. Киев: Инж.-строит. ин-т, 1978. С. 27–39.
 121. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1963. № 7. С. 872–874.
 122. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив поверхневих напружень на антиплоский напружено-деформований стан тонкого стрічкового міжфазного включення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. Т. 63, № 2. С. 98–108.
 123. Повстенко Ю.З. Учет поверхностной энергии в граничных условиях краевых задач механики деформируемых твердых тел. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1981. Т. 13. С. 15–28.
 124. Повстенко Ю.З. Напружений стан в твердому тілі, зумовлений лапласівським навантаженням у від'ємному кристалі. *Мат. методи и физ.-мех. поля*. 1991. Т. 34. С. 69–73.
 125. Подильчук Ю.Н. Граничные задачи статики упругих тел. Киев: Наук. думка, 1984. 303 с.
 126. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор). *Прикл. механика*. 1997. Т. 33, № 10. С. 3–30.
 127. Подстригач Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1982. № 12. С. 30–32.
 128. Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наук. думка, 1985. 200 с.

129. Подстригач Я. С., Шевчук П.Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. *Прикл. механика*. 1967. Т. 3, № 6. С. 8–16.
130. Попов В.Г., Мойсеенок А.П. Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига. *Теорет. и прикладная механика*. 2005. № 41. С. 184–192.
131. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М: Наука, 1982. 344 с.
132. Попов Г.Я. Вклад одесских исследователей в развитие методов решения смешанных задач механики деформируемого тела. Тез. докл. IV Всесоюз. конф. Смешанные задачи механики деформируемого тела (Одесса, 26–29 сент. 1989 г.). Одесса, 1989. – Т. 2. – С. 59–60.
133. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
134. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. Панасюка В.В. / Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с.
135. Савула Я.Г., Дияк І.І., Паук Н.П. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двовимірної задачі теорії пружності. *Доповіді НАН України*. 1995. № 5. С. 49–52.
136. Саникидзе Д.Г. О приближенном вычислении сингулярных интегралов с суммируемой плотностью методом механических квадратур. *Укр. математический журнал*. 1970. Т.22. № 1 С. 106–114.
137. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
138. Сахаров А.С., Кислоокый В.Н., Кирический В.В., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа, 1982. 480 с.

139. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально – ізотропних тіл із дефектами. Львів: НАНУ ФМІ ім. Г.В. Карпенка, 2000. 300 с.
140. Силованюк В.П., Юхим Р.Я. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2007. Т. 43. № 6. С. 31–35.
141. Стадник М.М. Метод розв’язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1994. Т. 43. № 6. С. 30–40.
142. Стадник М.М. Пружне включення у пластині під дією двовісного навантаження і рівномірного нагріву. *Машинознавство*. 2010. № 1–2. С. 3–7.
143. Стадник М.М., Андрейкив А.Е. Прочность материалов, содержащих системы тонких включений. *Физ.- хим. механика материалов*. 1986. Т. 22, № 1. С. 29–35.
144. Станкевич В.З., Стасюк Б. М. Трехмерная динамическая задача о взаимодействии трещин в полупространстве. *Теоритическая и прикладная механика*. 2001. Т. 34. С. 125–131.
145. Станкевич В.З., Стасюк Б. М. О решении трехмерной динамической задачи для биматериального тела с трещиной методом граничных интегральных уравнений. *Теоритическая и прикладная механика*. 2003. Т. 38. С. 130–134.
146. Станкевич В.З., Стасюк Б.М. Про розв’язування деяких двовимірних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь за допомогою полігармонічних многочленів. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Математика*. 2000. № 407. С. 17–20.
147. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Децик Т.Б. Гранично-рівноважний стан бруса круглого попереччя з внутрішньою тріщиною під поперечним згином. *«Львівська політехніка». Математика*. 2011. № 718. С. 81–85.
148. Станкевич В., Стасюк Б. Станкевич О. Переміщення на поверхні півпростору ініційовані внутрішньою тріщиною скруту. Теорія та практика

раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: праці конф. (11–13 листопада 2010 р., м. Львів). Львів, 2010. С. 83–84.

149. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Хай О. М. Решение динамической задачи о взаимодействии компланарных трещин с заземленной поверхностью посредством граничных интегральных уравнений. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46. № 1. С. 153–159.
150. Стасюк Б.М. Напружено-деформований стан магістрального трубопроводу, послабленого приповерхневою осьовою тріщиною. Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. 4-ї міжнародної конференції. (Львів, 30–31 жовтня, 2014). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2014. С. 91–92.
151. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин *Машинознавство*. 2005. № 2. С. 17–21.
152. Стасюк Б.М. Вплив наявності тріщин на напружений стан гранульованого композита. 8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 23–25 травня 2007). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2007. С. 53.
153. Стасюк Б.М. Приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии компланарных дискообразных трещин в упругом пространстве. *Теоретическая и прикладная механика*. 2008. Т. 44. С. 48–54.
154. Стасюк Б.М. Взаємодія тріщин та порожнин складної форми у безмежному пружному тілі. Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. 2-ї міжнародної конференції. (Львів, 22–24 жовтня, 2008). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2008. С. 77–78.
155. Стасюк Б.М. Метод ефективного поля напружень в тривимірних задачах про взаємодію плоских тріщин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2009. Т. 1. С. 33–42.
156. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного

- пружного включення. *Машинознавство*. 2009. № 10. С. 9–14.
157. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. 9-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 20-22 травня 2009). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2009. С. 100–102.
 158. Стасюк Б.М. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на напруження в околі сусідньої тріщини. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. Т. 6. С. 28–35.
 159. Стасюк Б.М. Модель гладкого контакту об'ємного пружного включення довільної форми з безмежним тілом. 11-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 15-17 травня 2013). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2013. С. 54–55.
 160. Стасюк Б.М., Крет Н.В., Звірко О.І., Штойко І.П. Аналіз напруженого стану тру-би газопроводу з макродефектом, ініційованим воднем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2019. Т. 55, №1. С. 113–118.
 161. Стасюк Б.М. Моделювання поверхневого натягу в тривимірних нанокompозитах за умови змінної кривини міжфазної поверхні. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. збірник наукових праць X Міжнародної наукової конференції за ред. Р.М. Кушінра, Г.С. Кіта. Львів: ІП-ПММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2019. С. 144–145.
 162. Стасюк Б.М. Напруження у порожнистому циліндрі, послабленому множинними тріщиноподібними дефектами. *Доповіді НАН України*. 2021. Т. 3. С. 33–39.
 163. Стасюк Б.М., Кіндрацький Б.І. Взаємодія в безмежному тілі плоских тріщин та тонких пружних включень малої жорсткості. Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Матеріали 4-ї міжнародної конференції під ред. З. Назарчука, Б.І. Кіндрацького. (Львів, 11-13 листопада, 2010). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2010. – С. 485–490.
 164. Стасюк Б.М. Напружений стан гранульованих композитів у випадку рівності коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці і включення. *Машино-*

знавство. 2006. Т. 5. С. 14–22.

165. Стрельникова Е.А. Об ограниченности сингулярных интегральных операторов с ядром типа Адамара. *Доп. НАН України*. 1995. Т. 12. С. 31–33.
166. Стрельникова Е.А. Непрямая формулировка метода граничных элементов для неупругих тел с разрезами. *Вестник Харьковского гос. политехн. ун-та*. 1998. Т. 12. С. 71–75.
167. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.
168. Сулим Г., Пастернак Я., Оліярник Н. Поздовжній зсув анізотропних тіл із тонкими відшарованими включеннями. *Фіз.-мат. модел. та ін-форм. технол.* 2013. Т. 17. С. 186–194.
169. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений. *Прикладная механика*. 1981. Т. 17. № 11. С. 82–89.
170. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
171. Сулим Г.Т., Гриліцький Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. *Прикладная механика*. 1972. Т. 8. № 11. С. 58–65.
172. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2008. Т. 51. № 4. С. 136–144.
173. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл (огляд). *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2004. Т. 47. № 3. С. 110–125.
174. Сяський А.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. *Прикладная механика*. 1983. Т. 19. № 5. С. 94–99.
175. Терлецький Р.Ф. Моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання. Ч.1. Балансові співвідношення механіки і другий закон термодинаміки. *Мат методи та фіз.-мех. поля*. 2002.

Т. 45. № 2. С. 81–91.

176. Угодников А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во казан, гос. ун-та, 1986. 296 с.
177. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 261 с.
178. Улітко А. Ф. Растяжение упругого пространства ослабленного двумя круговыми трещинами, расположенными в одной плоскости. *Концентрация напряжений*. 1968. Т. 2. С. 201–208.
179. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1991. № 4. С. 119–127.
180. Френчко Ю.С., Ткач М.Д Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением. *Физ.-мех. поля в деформируемых средах*. 1978. С. 81–84.
181. Хай М. В. Двухмерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. Киев: Наук. думк-е изд., 1993. 253 с.
182. Хай М. В., Лаушник И.П., Калыняк И.В. Взаимодействие близко расположенных дискообразных компланарных трещин. *Физ.-хим. механика материалов*. 1985. Т. 21. № 6. С. 87–88.
183. Хай М.В., Калыняк И.В. Об одном подходе к численному решению задач математической теории трещин. *Математические методы и физико-механические поля*. 1984. Т. 20. С. 38–42.
184. Хай М.В., Стасюк Б.М. Про спрощення розрахунку на міцність пружних тіл, що містять плоскі тріщини. 5-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 16-18 травня 2001). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2001. С. 16–17
185. Хай М.В., Стасюк Б.М. Модифікований метод граничних інтегральних рівнянь при розрахунку на міцність тіл, послаблених великою кількістю взаємодіючих тріщин. 6-й міжнародний симпозіум українських інжене-

- рів-механіків у Львові: тези доповіді. (Львів, 21-23 травня 2003). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2003. С. 44.
186. Хай М.В., Станкевич В.З., Стасюк Б.М. До теорії механіки руйнування. *Машинознавство*. 2002. Т. 65. № 11. С. 3–19.
 187. Хай М.В., Стасюк Б.М. Исследование зависимости коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещин нормального отрыва в форме правильных многоугольников. *Прикл. механика*. 1997. Т. 33. № 9. С. 56–63.
 188. Хачикян А.С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. *Изв. АН АрмССР. Механика*. 1970. Т.23. № 3. С. 14–22.
 189. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М: Наука, 1974. 405 с.
 190. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М: Наука, 1983. 296 с.
 191. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. *Изв. АН АрмССР. Механика*. 1967. Т. 20. № 6. С. 19–29.
 192. Шацький І.П., Кундрат А.М. Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями. *Доп. НАН України*. 2004. № 11. С. 55–60.
 193. Щербина В.А. Метод граничных интегральных уравнений для второй краевой задачи в областях с разрезом. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*. 1988. Т. 50. С. 129–135.
 194. Ясній П.В. Пластично деформовані матеріали: втомі і тріщинотривкість. Львів: Світ, 1998. 292 с.
 195. Aboudi J., Arnold S. M., Bednarczyk B. A. *Micromechanics of Composite Materials*. Waltham: Elsevier Inc., 2013. 1011 p.
 196. Achenbach J. D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1989. Vol. 37. No 3. P. 381–393.

197. Aliofkhazraei M. Nanocoatings: Size Effect in Nanostructured Films. Berlin: Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 251 p.
198. Alok S., Paulino G., Gray L. BEM Symetric Galerkin Method. Berlin: Springer, 2008. 276 p.
199. Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2010. Vol. 90. No 3. P. 231–240.
200. Altenbach H., Morozov E. Surface Effects in Solid Mechanics: Models, Simulations and Applications. New York Dordrecht London: Springer, 2013. 194 p.
201. Andrianov I.V., Bolshakov V.I., Danishevs'kiy V.V., Weichert D. Asymptotic simulation of imperfect bonding in periodic fibre-reinforced composite materials under axial shear. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 49. No 12. P. 1344–1354.
202. Araújo F.C., Gray L.G. Evaluation of Effective Material Parameters of CNT-reinforced Composites via 3D BEM. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2008. Vol. 24. No 2. P. 103–121.
203. Argiris J.H. Energy theorems of structural analysis. Part I. General theory. *Aircraft Engineering*. 1954. Vol. 26. No 308. P. 347–356.
204. Babich I. Y., Kirilyuk V. S. Stress state of a piezoelectric elastic medium with an arbitrarily oriented triaxial ellipsoidal inclusion. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No 4. P. 406–412.
205. Badia S. Parks M., Bochev P., Gunzburger M., Lehoucq R. On atomistic-to-continuum coupling by blending. *Multiscale Model. Simul.* 2008. Vol. 7. No 1. P. 381–406.
206. Balas J., Sladek J. Sladek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods, Amsterdam: Elsevier Ltd, 1989. 686 p.
207. Banerjee P. K., Henry D. P. Elastic analysis of three-dimensional solids with fiber inclusions by bem. *International Journal of Solids and Structures*. 1992. Vol. 29. No 20. P. 2423–2440.

208. Bansal N.P. Handbook of Ceramic Composites. Boston: Springer, 2005. 565 p.
209. Belytschko T., Xiao S.P. Coupling methods for continuum model with molecular model. *Int. J. for Multiscale Computational Engineering*. 2003. Vol. 1. No 1. P. 115–126.
210. Benveniste Y. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials*. 1985. Vol. 4. No 2. P. 197–208.
211. Benveniste Y.A. New approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*. 1987. Vol. 6. No 2. P. 147–157.
212. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity, *Mechanics of Materials*. 2001. Vol. 33. No 6. P. 309–323.
213. Bogdanov V.L. Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2008. Vol. 15. No 6–7. P. 453–460.
214. Bogdanov V.L. Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 165. No 3. P. 371–384.
215. Bogdanov V.L. Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 186. No 1. P. 1–13.
216. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51. No 1. P. 64–84.
217. Bogdanov V.L., Kipnis A.L. Investigation of the Fracture of a Semibounded Body Compressed Along a Near-Surface Interface Crack. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 253. No 1. P. 99–107.
218. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Analysis of Nonclassical Fracture Problems for Prestressed Bodies with Interacting Cracks. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2018. Vol. 229. No 2. P. 133–161.
219. Bogdanov V.L. Nonaxisymmetric problem of the stress-strain state of an elastic

- half-space with a near-surface circular crack under the action of loads along it. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174. P. 341–366.
220. Bogdanov V.L. On one approach in fracture mechanics of composites with parallel cracks under the action of initial (residual) stresses. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 239–262.
 221. Bogdanov V.L., Dovzhyk M.V., Nazarenko V.M. Fracture of Highly Elastic and Composite Materials in Compression Along Near-Surface Crack. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. No 2. P. 411–418.
 222. Bohdanov V.L. Influence of Initial Stresses on the Fracture of Composite Material Weakened by a Subsurface Mode III Crack. *Journal of Mathematical Science*. 2015. Vol. 205. No 5. P. 621–634.
 223. Böhm H. *Mechanics of Microstructured Materials*. Wien: Springer, 2004. 311p.
 224. Boström A., Bövik P., Olsson P. A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 1992. Vol. 11. No 3–4. P. 175–184.
 225. Bower C., Rosen, R., Jin, L., Han, J., Zhou, O. Deformation of carbon nanotubes in nanotube-polymer composites. *Applied Physics Letters*. 1999. Vol. 74. No 22. P. 3317–3319.
 226. Bozhydarnyk V., Pasternak Ia., Sulym H. BEM Approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities. *Acta mechanica et automatica*. 2011. Vol. 5. No 4. P. 11–16.
 227. Brebbia C.A., Dominguez J. *Boundary elements. An introductory course*. Southampton: WIT Press, 1994. 322 p.
 228. Brebbia C.A., Telles J.C., Wrobel L.C. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Berlin: Springer, 1984. 466 p.
 229. Brebbia C.A., Dominguez J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*. 1977. Vol. 1. No 7. P. 372–378.
 230. Buryachenko V. *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Dayton: Springer, 2007. 686 p.
 231. Buryachenko V.A. Multiparticle effective field and related methods in micro-

- mechanics of random structure components. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2001. Vol. 6 No 6. P. 577–612.
232. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Numerical Analysis of the Edge Effect in a Composite Laminate with Compressed Reinforcement Plies. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51. No 5. P. 561–566.
 233. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Edge Effect and Near-Surface Buckling in Layered Composite Material with Imperfect Contact Between Layers. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No 6. P. 695–705.
 234. Campbell F.C. Structural composite materials. ASM International, 2010. 629 p.
 235. Cazacu O. Multiscale Modeling of Heterogeneous Materials. ISTE Ltd., 2008. 360 p.
 236. Chatterjee J., Chatterjee, J., Ma, F., Henry, D.P., Banerjee, P.K. Advanced Boundary Element Analysis of Three-Dimensional Elastic Solids with Fiber Reinforcements. *Journal of Engineering Mechanics*. 2008. Vol. 134. No 9. P. 739–749.
 237. Chaudhuri R.A. Three-dimensional singular stress field near a partially debonded cylindrical rigid fiber. *Composite Structures*. 2006. Vol. 72. No 2. P. 141–150.
 238. Chen H.S., Acrivos A. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at nori dilute concentrations. *Int. J. Solids and Structures*. 1978. Vol. 14. P. 349–364.
 239. Chen T., Dvorak G.J., Yu C.C. Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses. *Acta Mechanica*. 2007. Vol. 188. No 1–2. P. 39–54.
 240. Chen T., Dvorak G.J., Benveniste Y. Mori-tanaka estimates of the overall elastic moduli of certain composite materials. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1992. Vol. 59. No 3. P. 539–546.
 241. Choo V. Fundamentals of composite materials. *Knowen Academic Press*, 1990. 322 p.
 242. Christensen R.M., Lo K.N. Solutions for Effective Shear Properties in three

- phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1979. Vol. 27. No 4. P. 315–330.
243. Chudinovich I. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems. *Math. Methods Appl. Sci.* 1993. No 16. P. 203–215.
 244. Chudinovich I., Constanda C. Boundary Equations in Dynamic Problems of the Theory of Elasticity. *Math. Meth. Of Solids*. 2001. Vol. 6. No 2. P. 175–191.
 245. Clelland N.L., Warchol N., Kerby R.E., Katsube N., Seghi R.R. Influence of interface surface conditions on indentation failure of simulated bonded ceramic onlays. *Dental Materials*. 2006. Vol. 22. No 2. P. 99–106.
 246. Clouteau D., Elhabre M.L., Aubry D. Periodic BEM and FEM-BEM coupling. *Comp. Mech.* 2000. Vol. 25 No 6. P. 567–577.
 247. Crolet J.L., Maisonneuve G. Construction of a universal scale of severity for hydrogen cracking Orlando, Florida, Houston TX: NACE International, 2000. P. 00127.
 248. Cruse T.A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computers and Structures*. 1973. Vol. 3. No 3. P. 509–527.
 249. Cruse T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computers and Structures*. 1974. Vol. 4. No 4. P. 741–754.
 250. Cruse T.A. BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments. *Computational Mechanics*. 1996. Vol. 18. No 1. P. 1–11.
 251. Danishevs'ky V. V., Kaplunov J. D., Rogerson G. A. Anti-plane shear waves in a fibre-reinforced composite with a non-linear imperfect interface. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 76. P. 223–232.
 252. Dekret V.A. Two-dimensional buckling problem for a composite reinforced with a periodic row of collinear short fibers. *International Applied Mechanics*. 2006. Vol. 42. No 6. P. 684–691.
 253. Dekret V.A. Plane instability problem for a composite reinforced with a

- periodic row of short parallel fibers. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44. No 5. P. 498–504.
254. Dekret V.A. Stability of composite materials with two parallel short fibers (International Applied Mechanics (2009) 45:12 (1344-1348)). *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No 12. P. 1344–1348.
 255. Dekret V.A., Bystrov V.M., Zelenskii V.S. Numerical Analysis of the Buckling of Near-Surface Short Fibers in a Weakly Reinforced Composite Material. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No 6. P. 687–699.
 256. Dong C.Y. Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. No 25–26. P. 7919–7938.
 257. Dong C.Y., Cheung Y.K., Lo S.H. An integral equation approach to the inclusion-crack interactions in three-dimensional infinite elastic domain. *Computational Mechanics*. 2002. Vol. 29. No 4–5. P. 313–321.
 258. Dong C.Y., Pan E. Boundary element analysis of nanoinhomogeneities of arbitrary shapes with surface and interface effects. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011. Vol. 35. No 8. P. 996–1002.
 259. Dong C.Y., Zhang G.L. Boundary element analysis of three dimensional nanoscale inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50. No 1. P. 201–208.
 260. Duan H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Luo, Z.Y. Stress concentration tensors of inhomogeneities with interface effects. *Mechanics of Materials*. 2005. Vol. 37. No 7. P. 723–736.
 261. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. № 7 (53). C. 1574–1596.
 262. Duan H.L., Jiao, Y., Yi, X., Huang, Z. P., Wang, J. Solutions of inhomogeneity problems with graded shells and application to core-shell nanoparticles and composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No

7. P. 1401–1425.
263. Duan H. L., Karihaloo B. L., Wang J. Thermo-elastic size-dependent properties of nano-composites with imperfect interfaces. *IUTAM Bookseries*. 2009. Vol. 13. P. 201–209.
264. Duan H.L., Huang Z.P., Wang J. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: Part II—Application and scaling laws. *Mechanics of Materials*. 2007. Vol. 39. No 1. P. 94–103.
265. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. Theory of Elasticity at the Nanoscale. *Advances in Applied Mechanics*. 2009. Vol. 42 P. 1–68.
266. Duan H.L., Yi X. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part I: Theoretical framework. *Mechanics of Materials*. 2007. Vol. 39. No 1. P. 81–93.
267. Dyson F.W. On evaluation of own value functions of the intergal operator with singular kernal. *Quart J. Math. Oxford: Oxford Univ.* 1891. (Ser. 25). C. 259–288.
268. Eischen J.W., Torquato S. Determining elastic behavior of composites by the boundary element method. *J. Appl. Phys.* 1993. Vol. 74. No 1. P. 159–170.
269. Erdogan F, Gupta G.D. No Title On the numerical solution of singular integral equations. *Quart. Appl. Math.* 1972. Vol. 29. No 4. P. 525–534.
270. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical*. 1957. Vol. 241. No 1226. P. 376–396.
271. Eshelby J.D. Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion. *Proceedings of the Royal Society A*. 1959. Vol. 252. No 1271. P. 561–569.
272. Eshelby J.D. Elastic Inclusions and Inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics*. 1961. No 2. P. 89–140.
273. Fredholm I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*. 1903. Vol. 27 P. 365–390.
274. Fredholm I. Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*. 1906. Vol. 2. No 928. P. 3–8.

275. Gao X. W., Zhang C., Guo L. Boundary-only element solutions of 2D and 3D nonlinear and nonhomogeneous elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2007. Vol. 31. No 12. P. 974–982.
276. Gibbs J.W. The scientific papers of J. Willard Gibbs: In two volumes. – Vol. 1. Thermodynamics. London etc.: Longmans, Green & Co., 1906. 434 p.
277. Goh K.L., Aspden R.M., Mathias K.J., Hukins D.W. Finite-element analysis of the effect of material properties and fibre shape on stresses in an elastic fibre embedded in an elastic matrix in a fibre-composite material. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2004. Vol. 460. No 2048. P. 2339–2352.
278. Goh K.L., Aspden R.M., Mathias K.J., Hukins D.W. Effect of fibre shape on the stresses within fibres in fibre-reinforced composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1999. Vol. 455. P. 3351–3361.
279. Goh K.L., Aspden R.M., Hukins D.W. Finite element analysis of stress transfer in short-fibre composite materials. *Composites science and technology*. 2004. Vol. 64. No 9. P. 1091–1100.
280. Goodier J.N. Concentration of Stress Around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws. *J. Appl. Mech.* 1933. Vol. 1. No 2. P. 39–44.
281. Grinchenko V.T., Ulitko A.F. On local singularities in mathematical models of physical fields. *Journal of Mathematical Sciences*. 1999. Vol. 97. No 1. P.3777–3795.
282. Gu S. T., He Q. C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphases as imperfect interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. No 7. P. 1413–1426.
283. Gu Y., Chen W., Gao H., Zhang Ch. A meshless singular boundary method for three-dimensional elasticity problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2016. Vol. 107. P. 109–126.
284. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1975. Vol. 57. No 4. P. 291–

323.

285. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*. 1978. Vol. 14. No 6. P. 431–440.
286. Guz A.N., Dekret V.A. On two models in the three-dimensional theory of stability of composites. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44. No 8. P. 839–854.
287. Guz A.N., Dekret V.A. Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review). *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52. No 1. P. 1–48.
288. Guz A.N., Khoma Y.I. Integral formulation for a circular cylindrical cavity in infinite solid and a finite length coaxial cylindrical crack compressed axially. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2006. Vol. 45. No 3. P. 204–211.
289. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. Springer Cham, 2020. 490 p.
290. Guz A.N., Dekret V.A. Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review). *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52. P. 1–48.
291. Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: approaches and results. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40. P. 1323–1359.
292. Guz I., Menshykov O., Menshykov V. Application of boundary integral equations to elastodynamics of an interface crack. *International Journal of Fracture*. 2006. Vol. 140. No 1–4. P. 277–284.
293. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. Mechanical models for nanomaterials под ред. Sattler K. D., Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2010. P. 24.1–24.12.
294. Harris J. G., Rebinsky D. A., Wickham G. An integrated model of scattering from an imperfect interface. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1996. Vol. 99. No 6. P. 1315–1325.
295. Hashemi M., Zhuk Y.A. The influence of temperature on the cyclic properties of the transversely isotropic nanocomposite system under kinematic harmonic

- loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 236. P. 185-198.
296. Hashin Z. The spherical inclusion with imperfect interface. *J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. P. 444–449.
 297. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. Vol. 50. No 12. P. 2509–2537.
 298. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11. No 2. P. 127–140.
 299. He L. H., Li Z. R. Impact of surface stress on stress concentration. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. No 20. P. 6208–6219.
 300. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11. No 5. P. 357–372.
 301. Hill R.A. Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. and Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. P. 213–222.
 302. Hori M., Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*. 1993. Vol. 14. No 3. P. 189–206.
 303. Huang J.H. Some closed-form solutions for effective moduli of composites containing randomly oriented short fibers. *Materials Science and Engineering A*. 2001. Vol. 315. No 1–2. P. 11–20.
 304. Huang J.H., Furuhashi R., Mura T. Frictional sliding inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41. No 2. P. 247–265.
 305. Huang Q., Cruse T.A. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993. Vol. 36. No 15. P. 2643–2659.
 306. Huang Z.M., Zhang C.C., Xue Y. De Stiffness prediction of short fiber reinforced composites. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. No 8. P. 161–162.

307. Jammes M., Mogilevskaya S.G., Crouch S.L. Multiple circular nano-inhomogeneities and/or nano-pores in one of two joined isotropic elastic half-planes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2009. Vol. 33. No 2. P. 233–248.
308. Jasiuk I. Elastic moduli of composites with rigid sliding inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*. 1992. Vol. 40. No 2. P. 373–391.
309. Jia Z.H., Shippy D.J., Rizzo F.J. Three-Dimensional Crack Analysis Using singular boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989. Vol. 28. No 10. P. 2257–2273.
310. Jones R. Mechanics of composite materials. London: Taylor&Francis, 1998. 535 p.
311. Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews*. 1992. Vol. 45. No 8. P. 304–336.
312. Kachanov M., Sevostianov I. Inclusion and inhomogeneity in an infinite space (eshelby problems) Berlin: Springer, 2018. 127–188 p.
313. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Applied Mechanics Reviews*. 1994. Vol. 47. No 1. P.151–174.
314. Kaminski A., Selivanov M. Growth of a penny-shaped crack with a nonsmall fracture process zone in a composite. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44. No 8. P. 866–871.
315. Kaminsky A.A., Selivanov M.F. Determination and analysis of the effective relaxation properties of a composite with viscoelastic components. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. No 1. P. 18–27.
316. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chernoiyan Y.A. Subcritical growth of a mode III crack in a viscoelastic composite body. *International Applied Mechanics*. 2013. Vol. 49. No 3. P. 293–302.
317. Kanaun S.K., Levin V.M. Self-Consistent Methods for Composites. Springer, 2008. 376 p.

318. Lee K., Choi H. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks. *Engineering Fracture Mechanics*. 1988. Vol. 29. No 4. P. 461–472.
319. Kant R. Bogy D.B. The elastostatic axisymmetric problem of a cracked sphere. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1980. Vol. 47. No 3. P. 538–544.
320. Kassir M.K., Sih G.C. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. *ASME J. Appl. Mech.* 1966. Vol. 33. P. 601–611.
321. Kaw A.K. Composite Materials. New York: Taylor & Francis Group, LLC, 2006. 474 p.
322. Kharchenko L.E. Kunta O. E., Zvirko O.I., Savula R.S., Duryahina Z.A. Diagnostics of hydrogen macrodelamination in the wall of a bent pipe in the system of gas mains. *Materials Science*. 2016. Vol. 51. No 4. P. 530–537.
323. Khoroshun L.P., Nazarenko L.V. Deformation and microdamage of a discrete-fibrous composite with transversely isotropic components. *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39. No 6. P. 696–703.
324. Khoroshun L.P. Elastic properties of materials reinforced by uni-directional short fibers. *Soviet Applied Mechanics*. 1972. Vol. 8. No 8. P. 1358–1363.
325. Kim S. Numerical solution of Cauchy singular integral equations using generalized inverses. *Int. J. Math. Appl.* 1999. Vol. 38. No 5,6. P. 183–195.
326. Kindratsky B.I., Stasiuk B.M. Three-dimensional elastic problem for a limited bodies with crack. *Fracture Mechanics of Materials. proc. Second Ukrainian-Greek Symposium (Lviv, October 3–7 2011)*. Lviv: SPOLOM. 2011. P. 39–42.
327. Kinoshita N., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media. *Phys. Stat. Sol. (a)*. 1971. Vol. 5 P. 759–768.
328. Kirilyuk V.S. Interaction of an ellipsoidal inclusion with an elliptic crack in an elastic material under triaxial tension. *Int. Appl. Mech.* 2003. Vol. 39. No 3. P. 829–839.
329. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Electroelastic stress state of a piezoceramic body

- with a paraboloidal cavity. *International Applied Mechanics*. 2006. Vol. 42. No 9. P. 1011–1020.
330. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. On the stressed state of a transversely isotropic piezoceramic material with arbitrarily oriented spheroidal inhomogeneity. *Strength of Materials*. 2008. Vol. 40. No 2. P. 246–252.
331. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Mathematical Modeling of the Stress State for the Displacement and Rotation of the Rigid Penny-Shaped Inclusion Embedded in a Piezoelectric Space. *Advanced Structured Materials*. 2023. Vol. 191. P. 239–250.
332. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhas'kiv V.V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM. *Engineering Fracture Mechanics*. 1996. Vol. 55. No 2. P. 191–207.
333. Kollar P. *Mechanics of Composite Structures*. New York: Cambridge University Press, 2003. 494 p.
334. Krenk S. On quadrature formulae for singular integral equations of first and second kind. *Quart.Appl.Math.* 1975. Vol. 33. No 3. P. 225–232.
335. Krishnan S., Katsube N., Sundaresan V. Finite strain elasticity based cohesive zone model for mechanoluminescent composite interface: Part II. Interface damage characteristics. *Smart Materials and Structures*. 2021. Vol. 30. No 1. P. 015009.
336. Krishnasamy G., Rizzo F. J., Liu Y. Boundary integral equations for thin bodies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. No 1. P. 107–121.
337. Krishnasamy G., Schmerr L.W., Rudolph T.J., Rizzo F.J. Hypersingular boundary integral equations. Some applications in acoustic and elastic wave scattering. *American Society of Mechanical Engineers*. 1990. Vol. 57. No 2. P. 404–414.
338. Kushch V.I. Stressed state and elasticity moduli of a periodic composite, reinforced with layered spherical inclusions. *Mechanics of Composite Materials*. 1994. Vol. 29. No 6. P. 601–605.

339. Kushch V.I. Stressed state and effective elastic moduli of a medium reinforced by a periodic array of spheroidal inclusions. *International Applied Mechanics*. 1995. Vol. 31. No 3. P. 190–196.
340. Kushch V.I. Elastic equilibrium of a medium containing a finite number of aligned spheroidal inclusions. *International Journal of Solids and Structures*. 1996. Vol. 33. No 8. P. 1175–1189.
341. Kushch V.I. Interacting cracks and inclusions in a solid by multipole expansion method. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 57. No 6. P. 1751–1762.
342. Kushch V.I. Stress concentrations in the particulate composite with transversely isotropic phases. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 23. No 23. P. 6369–6388.
343. Kushch V.I., Mogilevskaya S.G., Stolarski H.K., Crouch S.L. Elastic interaction of spherical nanoinhomogeneities with Gurtin-Murdoch type interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. No 9. P. 1702–1716.
344. Kushch V.I., Mogilevskaya S.G., Stolarski H.K., Crouch S.L. Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50. No 7–8. P. 1141–1153.
345. Kushch V.I. Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface. *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. P. 79–96.
346. Kushch V.I., Sevostianov I. Ellipsoidal inhomogeneity in elliptically orthotropic elastic solid. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 206. P. 282–291.
347. Kushch V.I., Shmegeera S.V., Mykhas'kiv V.V. Multiple spheroidal cavities with surface stress as a model of nanoporous solid. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 152–153. P. 261–271.
348. Kushch V.I. Elastic equilibrium of a medium containing a finite number of

- arbitrarily oriented spheroidal inclusions. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. No 12. P. 1187–1198.
349. Kushch V.I. Stress state of an elastic medium containing interacting circular cracks and spheroidal inclusions. *International Applied Mechanics*. 1998. Vol. 34. No 5. P. 440–445.
 350. Kushch V.I. Interacting cracks and inclusion in a solid by multipole expansion method. *Int. J. Solids Struct.* 1998. Vol. 35. P. 1751–1762.
 351. Kushch V.I. Micromechanics of composites: Multipole expansion approach. Elsevier Inc., 2013. 489 p.
 352. Kushch V.I., Sevostianov I., Giraund A. Local fields and effective conductivity tensor of ellipsoidal particle composite with anisotropic constituents. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2017. Vol. 473. No 2207. P. 1-19.
 353. Lee H.K., Tran X.H. On stress analysis for a penny-shaped crack interacting with inclusions and voids. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. No 5. P. 549–558.
 354. Li J.Y. Magneto-electroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials. *International Journal of Engineering Science*. 2000. Vol. 38. No 18. P. 1993–2011.
 355. Li S., Gao X.-L. Handbook of micromechanics and nanomechanics. CRC Press, 2013. 1256 p.
 356. Lim C.W., Li Z.R., He L.H. Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. No 17. P. 5055–5065.
 357. Lingyun P., Adams D. O., Rizzo F. J. Boundary element analysis for composite materials and a library of green's functions. *Computers and Structures*. 1998. Vol. 66. No 5. P. 685–693.
 358. Liu Y.J., Mukherjee S., Nishimura N., Schanz M., Ye W., Sutradhar A., Pan E., Dumont N.A., Frangi A., Saez A. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *Applied Mechanics Reviews*.

2011. Vol. 64. No 3. P. 1-38.
359. Liu Y. J., Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006. Vol. 30 No 5. P. 371–381.
 360. Liu Y., Nishimura N., Otani Y. Large-scale modeling of carbon-nanotube composites by a fast multipole boundary element method. *Computational Materials Science*. 2005. Vol. 34. No 2. P. 173–187.
 361. Liu Y.J., Xu N, Luo J.F. Modeling of Interphases in Fiber-Reinforced Composites Under Transverse Loading Using the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*. 2000. Vol. 67. No 3. P. 41–49.
 362. Liu Y.J., Zhang D.M., Rizzo F.J. Nearly singular and hypersingular integrals in the boundary element method. *Transactions on Modelling and Simulation*. Vol. 1. 1993. P. 453–468.
 363. Lytvyn V., Popov V.H. Interaction of Harmonic Longitudinal Shear Waves with V-Shaped Inclusions. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2019. Vol. 240. No 2. P. 113–128.
 364. Manolis G.D., Dineva P.S., Rangelov T., Sfyris D. Mechanical models and numerical simulations in nanomechanics: A review across the scales. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021. Vol. 128. No 2. P. 149–170.
 365. Margetan F.J., Thompson, R.B., Rose J.H., Gray T.A. The interaction of ultrasound with imperfect interfaces: Experimental studies of model structures. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 1992. Vol. 11. No 3–4. P. 109–126.
 366. Margetan F. J., Thompson R. B., Gray T. A. Interfacial spring model for ultrasonic interactions with imperfect interfaces: Theory of oblique incidence and application to diffusion-bonded butt joints. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 1988. Vol. 7. No 3–4. P. 131–152.
 367. Matus V., Kunets Y., Mykhas'kiv V., Bostrom A., Zhang Ch. Wave propagation in 2D elastic composites with partially debonded fibres by the null field approach. *Waves in Random and Complex Media*. 2009. Vol. 19. No 4. P. 654–669.

368. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1873. 425 p.
369. Menshykov O.V., Guz I.A., Menshykov V.A. Boundary integral equations in elastodynamics of interface cracks. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2008. Vol. 366. No 1871. P. 1835–1839.
370. Menshykov O.V., Menshykova M.V., Guz I.A. Boundary integral equations in the frequency domain for interface linear cracks under impact loading. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. No 8. P. 3461–3471.
371. Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Numerical solution of three-dimensional static problems of elasticity for a body with a noncanonical inclusion. *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43. No 4. P. 380–387.
372. Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix. *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51. No 6. P. 640–647.
373. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 2000. Vol. 11. No 3. P. 139–147.
374. Milton G. W. The Theory of Composites. Cambridge University Press, 2004. 749 p.
375. Mogilevskaya S.G., Crouch S.L., La Grotta A., Stolarski H.K. The effects of surface elasticity and surface tension on the transverse overall elastic behavior of unidirectional nano-composites. *Composites Science and Technology*. 2010. Vol. 70. No 3. P. 427–434.
376. Mogilevskaya S. G., Crouch S. L., Stolarski H. K. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. No 6. P. 2298–2327.
377. Mogilevskaya S. G., Kushch V. I., Zemlyanova A. Y. Displacements representations for the problems with spherical and circular material surfaces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2019. Vol. 72. No 4. P. 449–471.

378. Moraru G. Concentration of stresses near a debonded flexible inclusion in plane elasticity. *Rev. Roum. Sci. Techn. – M'ec. Appl.* 2008. Vol. 53. No 2. P. 175–182.
379. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*. 1973. Vol. 21. No 5. P. 571–574.
380. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*. 1973. Vol. 21. No 5. P. 571–574.
381. Mura T. *Micromechanics of defects in solids*. Boston; London: Martinus Nijhoff, 1987. 587 p.
382. Mura T. Inclusion problem. *Appl. Mech. Rev.* 1988. Vol. 41. P. 15–20.
383. Murakami Y. *Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions*. Elsevier, 2002. 369 p.
384. Murr L.E. *Interfacial phenomena in metals and alloys*. MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1975. 376 p.
385. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic Moduli of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers Brno:, 2016. P. 452–455.
386. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 452–455.
387. Mykhas'kiv V.V., Khay O. M., Zhang Ch., Boström A. Effective dynamic properties of 3D composite materials containing rigid penny-shaped inclusions. *Waves in Random and Complex Media*. 2010. Vol. 20. No 3. P. 491–510.
388. Mykhas'kiv V.V., Butrak I.O., Khay O.M., Kilnytska T.I., Zhang Ch. A frequency-domain BIEM combining DBIEs and TBIEs for 3-D crack-inclusion interaction analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2011. Vol. 200. No 47–48. P. 3270–3279.
389. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Stress intensification due to the crack outside/inside a finite fiber in 3-D elastic matrix. *Theoretical and Applied Fracture*

- Mechanics*. 2015. Vol. 80. P. 133–142.
390. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B. M. Effective Elastic Moduli of Short-Fiber Composite with Sliding Contact Conditions at Interfaces. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. Vol. 57. No 5. P. 635–646.
 391. Mykhas'kiv V.V., Stepanyuk O.I. BIE method for 3D problems of rigid disk-inclusion and crack interaction in elastic matrix. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2005. Vol. 10. No 1. P. 45–63.
 392. Mykhas'kiv V.V., Zhabadynskyi I., Zhang Ch. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2010. Vol. 26. P. 1934–1946.
 393. Navadeh N., Goroshko I.O., Zhuk Y.A., Fallah A.S. An FEM-based AI approach to model parameter identification for low vibration modes of wind turbine composite rotor blades. *European Journal of Computational Mechanics*. 2017. Vol. 26. No 5–6. P. 541–556.
 394. Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic components and aligned ellipsoidal inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 136–137. P. 220–240.
 395. Nazarenko L., Bargmann S., Stolarski H. Influence of interfaces on effective properties of nanomaterials with stochastically distributed spherical inclusions. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. No 5. P. 954–966.
 396. Nazarenko L., Bargmann S., Stolarski H. Energy-equivalent inhomogeneity approach to analysis of effective properties of nanomaterials with stochastic structure. *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 59. P. 183–197.
 397. Nazarenko L., Bargmann S., Stolarski H. Closed-form formulas for the effective properties of random particulate nanocomposites with complete Gurtin–Murdoch model of material surfaces. *Continuum Mechanics and*

- Thermodynamics*. 2016. Vol. 29. No 1. P. 77–96.
398. Nazarenko L., Bargmann S., Stolarski H. Lurie solution for spherical particle and spring layer model of interphases: Its application in analysis of effective properties of composites. *Mechanics of Materials*. 2016. Vol. 96. P. 39–52.
 399. Nazarenko L., Stolarski H. Energy-based definition of equivalent inhomogeneity for various interphase models and analysis of effective properties of particulate composites. *Composites Part B: Engineering*. 2016. Vol. 94. P. 82–94.
 400. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of short-fiber composites with Gurtin-Murdoch model of interphase. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 97–98. P. 75–88.
 401. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interphase and its application to analysis of short-fiber composites. *Composite Structures*. 2017. Vol. 160. P. 635–652.
 402. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A Definition of Equivalent Inhomogeneity Applicable to Various Interphase Models and Various Shapes of Inhomogeneity. *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 21. P. 63–70.
 403. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Thermo-elastic properties of random particulate nano-materials for various models of interphase. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. Vol. 126. P. 130–141.
 404. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. On modeling and analysis of effective properties of Carbon Nanotubes Reinforced Materials. *Composite Structures*. 2018. Vol. 189. P. 718–727.
 405. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Modeling Cylindrical Inhomogeneity of Finite Length with Steigmann–Ogden Interface. *Technologies*. 2020. Vol. 8. No 4. P. 1–15.
 406. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of particulate nano-composites including Steigmann–Ogden model of material surface. *Computational Mechanics*. 2021. Vol. 68. No 3. P. 651–665.
 407. Nazarenko L.V. Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages. *Journal of Mathematical*

- Sciences*. 2010. Vol. 167. No 2. P. 217–231.
408. Nemat-Nasser S., Iwakuma T., Hejazi M. On composites with periodic structure. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. No 3. P. 239–267.
 409. Nikolaev A.G., Kurenkov S.S. Problem for a Half-Space With a Motionless. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2004. Vol. 77. No 1. P. 209–215.
 410. Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2002. Vol. 55. No 4. P. 299–324.
 411. Nishimura N., Yoshida K. I., Kobayashi S. A fast multipole boundary integral equation method for crack problems in 3D. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1999. Vol. 23. No 1. P. 97–105.
 412. Nykyforchyn H.M., Zvirko O.I., Tsyrlunyk O.T., Kret N.V. Analysis and mechanical properties characterization of operated gas main elbow with hydrogen assisted large-scale delamination. *Eng. Failure Analysis*. 2017. Vol. 82. P. 364–377.
 413. Okada H., Fukui Ya., Kumazawa N. Homogenization analysis for particulate composite materials using the boundary element method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2004. Vol. 5. No 2. P. 135–149.
 414. Orowan E. Surface energy and surface tension in solids and liquids. *Proc. Roy. Soc. London. A*. 1970. Vol. 316. No 1527. P. 473–491.
 415. Padron L.A., Aznarez J.J., Maeso O. BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2007. Vol. 31. P. 473–484.
 416. Pagano N. J., Brown H. W. The full-cell cracking mode in unidirectional brittle-matrix composites. *Composites*. 1993. Vol. 24. No 2. P. 69–83.
 417. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. Vol. 36. No 12. P. 1931–1941.
 418. Pasternak Ia. M., Sulym H., Oleksandr H. Thermoelasticity and effective properties of solids containing flexible and deformable thread-like inhomoge-

- neities. *International Journal of Engineering Science*. 2022. Vol. 178. No 6. P. 103729.
419. Pasternak Ia., Sulym H. Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013. Vol. 78. No 1. P. 167–180.
 420. Pasternak Ia. Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelectroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. No 1. P. 167–175.
 421. Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. No 2. P. 419–433.
 422. Pasternak Ia., Sulym H. Thermoelasticity of solids containing thread-like inhomogeneities. I. Nondeformable thread-like inclusions. *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 232. P. 111–176.
 423. Pasternak Ia., Sulym H. Integral Equation of the Elastic Medium Containing a Deformable Thread-Like Inclusion. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 73. P. 1607–1621.
 424. Pasternak Ia., Sulym H. Modeling of Deformable Thermoelastic Thread-Like Inclusions in Isotropic Media. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274. P. 660–677.
 425. Piskozub J.Z. Effect of surface stresses on the tensely deformed state of thin interface microinclusion. *Mathematical modeling and computing*. 2021. Vol. 8. No 1. P. 69–77.
 426. Podil'chuk Y.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems. *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39. No 2. P. 132–170.
 427. Podil'chuk Y.N., Dashko O.G. Stress state of a soft ferromagnetic with an ellipsoidal cavity in a homogeneous magnetic field. *International Applied*

- Mechanics*. 2005. Vol. 41. No 3. P. 283–290.
428. Podil'chuk Y. N., Myasoedova I. G. Stress state of a transversely isotropic piezoceramic body with a spheroidal cavity. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40. No 11. P. 1269–1280.
 429. Povstenko Y.Z. Generalization of Laplace and Young equation involving couples. *J. Colloid Interface Sci.* 1991. Vol. 144. No 2. P. 497–506.
 430. Povstenko Y.Z. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. Vol. 41. No 9. P. 1499–1514.
 431. Reuss A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung. *Ztschr. Angew. Math. und Mech.* 1933. Vol. 13. No 5. P. 365–370.
 432. Richard T. G. The Mechanical Behavior of a Solid Microsphere Filled Composite. *Journal of Composite Materials*. 1975. Vol. 9. No 2. P. 108–113.
 433. Riederer K., Duenser C., Beer G. Simulation of linear inclusions with the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2009. Vol. 33. No 7. P. 959–965.
 434. Rizzo F.J., Shippy D.J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1977. Vol. 11. No 11. P. 1753–1768.
 435. Ru C.Q. Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2010. Vol. 53. No 3. P. 536–544.
 436. Rubin M.B., Benveniste Y. A Cosserat shell model for interphases in elastic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004. Vol. 52. No 5. P. 1023–1052.
 437. Saleh A.L., Aliabadi M.H. Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete Using BEM. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998. Vol. 124. No 9. P. 949–958.
 438. Sato H., Shindo Y. Influence of microstructure on scattering of plane elastic

- waves by a distribution of partially debonded elliptical inclusions. *Mechanics of Materials*. 2002. Vol. 34. No 7. P. 401–409.
439. Schadler L.S., Giannaris S.C., Ajayan P.M. Load transfer in carbon nanotube epoxy composites. *Applied Physics Letters*. 1998. Vol. 73. No 26. P. 3842–3844.
 440. Selivanov M.F. Effective properties of a linear viscoelastic composite. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No 10. P. 1084–1091.
 441. Selivanov M.F., Bogdanov V.L., Altenbach H. Solving Some Problems of Crack Mechanics for a Normal Edge Crack in Orthotropic Solid Within the Cohesive Zone Model Approach. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. P. 335–362.
 442. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *International Journal of Fracture*. 2018. Vol. 212. No 1. P. 113–121.
 443. Selvadurai A.P.S. An inclusion at a bi-material elastic interface. *Journal of Engineering Mathematics*. 2000. Vol. 37. P. 155–170.
 444. Selvadurai A.P.S. Mechanics of a rigid circular disc bonded to a cracked elastic half-space. *Int. J. of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. P. 6035–6053.
 445. Sevostianov I., Kachanov M. Compliance tensors of ellipsoidal inclusions. *International Journal of Fracture*. 1999. Vol. 96. No 1. P. 3–7.
 446. Shafiro B., Kachanov M. Materials with fluid-filled pores of various shapes: Effective elastic properties and fluid pressure polarization. *International Journal of Solids and Structures*. 1997. Vol. 34. No 27. P. 3517–3540.
 447. Sharma P., Dasgupta A. Average elastic fields and scale-dependent overall properties of heterogeneous micropolar materials containing spherical and cylindrical inhomogeneities. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*. 2002. Vol. 66. No 22. P. 1–10.
 448. Shodja H.M., Alemi B. Effective shear modulus of solids reinforced by randomly oriented-aligned-elliptic nanofibers in couple stress elasticity. *Composites Part B: Engineering*. 2017. Vol. 117. P. 150–164.

449. Shodja H.M., Rad I.Z., Soheilifard R. Interacting cracks and ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Vol. 51. No 5. P. 945–960.
450. Shodja H.M., Roumi F. Effective Moduli of Coated Particulate Composites with BCC Structure at High Concentration. *Journal of Engineering Mechanics*. 2006. Vol. 132. No 8. P. 882–888.
451. Shodja H.M., Rad I.Z., Soheilifard R. Inreacting cracks and ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. Vol. 51. P. 945–960.
452. Shuttleworth R. The Surface Tension of Solids. *Proc. Phys. Soc. Sect. A*. 1950. Vol. 63. No 5. P. 444–456.
453. Sih G.C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions. *Developments in mechanics, vol.3, Pt.1. Solid Mech. and Mater.* 1965. Vol. 3. P. 61–79.
454. Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V.V., Stankevych V.Z. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2003. Vol. 27. No 3. P. 203–213.
455. Srivastava D., Atluri S.N. Computational nanotechnology: A current perspective. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2002. Vol. 3. No 5. P. 531–538.
456. Stasyuk B. M. Method of effective stress field in three-dimensional problems of interaction of plane cracks. *Materials Science*. 2009. Vol. 45. No 1. P. 28–40.
457. Stasyuk B.M., Kret N.V., Zvirko O.I., Shtoiko I.P. Analysis of the stressed state of a pipe of gas pipeline with hydrogen-induced macrodefect. *Materials Science*. 2019. Vol. 55. No 1. P. 124–129.
458. Stasyuk B. M. Effects of the Surface Tension of a Spherical-Cylindrical Nanopore in the Elastic Medium. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 263. No 1. P. 52–61.
459. Stasyuk B.M. Influence of a gas-filled cavity of complex shape on stresses in

- the vicinity of a neighboring crack. *Materials Science*. 2014. Vol. 49. No 6. P. 734–742.
460. Steigmann D.J., Ogden R.W. Elastic surface-substrate interactions. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 455. No 1982. P. 437–474.
 461. Sulym H., Pasternak Ia., Kutsyk S., Grodzki W. Doubly periodic sets of thin branched inclusions in the elastic medium: stress concentration and effective properties. *Acta mechanica et automatica*. 2013. Vol. 7. No 1. P. 48–52.
 462. Sulym H., Pasternak Ia. Modelling of stress state of elastic medium containing perfectly and imperfectly bonded thin inclusions and overlays. *Mechanics and Control*. 2011. Vol. 30. No 3. P. 176–181.
 463. Sulym H., Pasternak Ia. Jump function method and BEM technique for determination of thermal stresses in solids with thin inclusions. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / ed. R.B. Hetnarski. 2014. Vol. 5. P. 2605–2618.
 464. Sun C.Q. Thermo-mechanical behavior of low-dimensional systems: The local bond average approach. *Progress in Materials Science*. 2009. Vol. 54. No 2. P. 179–307.
 465. Tabor D. Surface forces and surface interactions. *J. Colloid and Interface Sci.* 1977. Vol. 58. No 1. P. 2–13.
 466. Tanaka M., Cruse T.A. *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*. Tokio: Tokio Press, 1988. P. 556.
 467. Tanaka M., Slaclek V., Sladek J. Regularization techniques applied to boundary element methods. *Applied Mechanics Reviews*. 1994. Vol. 47. No 10. P. 457–499.
 468. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. A method of numerical solution of Cauchy-type singular integral equations with generalised kernels and arbitrary complex singularities. *Comput. Phys.* 1979. Vol. 30. No 3. P. 309–323.
 469. Tokovyy Yu., Yasinsky A., Kalynyak B. An efficient method for analysis of steady-state stresses and optimal heating control in inhomogeneous composites. XVI International Conference “Mechanics of Composite Mate-

- rials: Institute of Polymer Mechanics, University of Latvia, Riga, Latvia: Institute of Polymer Mechanics, 2010. P. 97.
470. Turner M.J. Clough R.W., Martin H.C., Topp J.L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. of Aeronautic Sciences*. 1956. No 23. P. 805–823.
 471. Tvergaard V. Debonding of short fibres among particulates in a metal matrix composite. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. No 25. P. 6957–6967.
 472. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der physik*. 1889. Vol. 274. No 12. P. 573–587.
 473. Wacker G., Bledzki A.K., Chate A. Effect of interphase on the transverse Young's modulus of glass/epoxy composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 1998. Vol. 29. No 5–6. P. 619–626.
 474. Wagner H.D., Lourie O., Feldman Y., Tenne R. Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix. *Applied Physics Letters*. 1998. Vol. 72. No 2. P. 188–190.
 475. Wang J., Duan, H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2006. Vol. 462. No 2069. P.1355–1363.
 476. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2011. Vol. 24. No 1. P. 52–82.
 477. Wang J., Karihaloo B.L., Duan H.L. Scaling Laws for Properties of Materials with Imperfect Interfaces. *IUTAM Bookseries*. 2009. Vol. 10. P. 157–163.
 478. Wang S., Xing S., Chen Z., Gao C. A Nanoscale Hole of Arbitrary Shape with Surface Elasticity. *Journal of Elasticity*. 2019. Vol. 136. No 2. P. 123–135.
 479. Wang W., Zeng X., Ding J. Finite Element Modeling of two-dimensional Nanoscale Structures with Surface Effects. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2010. Vol. 48. No 12. P. 865–870.

480. Wang Y., Huang Z. A Review of Analytical Micromechanics Models on Composite Elastoplastic Behaviour. *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 1283–1290.
481. Wang Z., Zhu, J., Jin X.Y., Chen W.Q., Zhang Ch. Effective moduli of ellipsoidal particle reinforced piezoelectric composites with imperfect interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2014. Vol. 65. No 1. P. 138–156.
482. Weissmüller J., Duan H. L., Farkas D. Deformation of solids with nanoscale pores by the action of capillary forces. *Acta Materialia*. 2010. Vol. 58. No 1. P. 1–13.
483. Wolfe W.E. Nanophysics and nanotechnology: an introduction to modern concepts in nanoscience. John Wiley & Sons, 2006. 292 p.
484. Wu M. S. Effective moduli of finite anisotropic media with cracks. *Mechanics of Materials*. 1993. Vol. 15. No 2. P. 139–158.
485. Xiao Z.M., Lim M.K., Liew K.M. Stress intensity factor of an elliptical crack as influenced by a spherical inhomogeneity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1994. Vol. 21. No 3. P. 219–232.
486. Yang F. Size-dependent effective modulus of elastic composite materials: Spherical nanocavities at dilute concentrations. *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 95. No 7. P. 3516–3520.
487. Yi X., Duan H.L., Karihaloo B.L., Wang J. Eshelby formalism for multi-shell nano-inhomogeneities. *Archives of Mechanics*. 2007. Vol. 59. No 3. P. 259–281.
488. Yin H. M., Sun L. Z., Paulino G.H. Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. *Acta Materialia*. 2004. Vol. 52. No 12. P. 3535–3543.
489. Yoshida K.I., Nishimura N., Kobayashi S. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001. Vol. 50. No 3. P. 525–547.
490. Zemlyanova A.Y., Mogilevskaya S.G. On spherical inhomogeneity with

- Steigmann-Ogden interface. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 2018. Vol. 85. No 12. JAM-18-1444.
491. Zhang C., Savaidis A., Savaidis G., Zhu H. Transient dynamic analysis of a cracked functionally graded material by a BIEM. *Computational Materials Science*. 2003. Vol. 26. P. 167–174.
492. Zhang C., Gao X.W., Sladek J., Sladek V. Fracture analysis of functionally graded materials. *The 2nd International ISCM Symposium. American Institute of Physics*. 2010. Vol. 1233. No 41. P. 41–50.
493. Zhang J., Katsube N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed rigid inclusions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995. Vol. 38. No 10. P. 1635–1653.
494. Zhang J., Katsube N. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed elastic inclusions. *Finite Elements in Analysis and Design*. 1995. Vol. 19. No 1–2. P. 45–55.
495. Zhang T.Y., Wang Z.J., Chan W.K. Eigenstress model for surface stress of solids. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*. 2010. Vol. 81. No 19. P. 1–12.
496. Zhang X., Dong P., Ma J., Wang R., Li W. Prediction of temperature dependent effective moduli of metal particle composites with debonding damage. *International Journal of Solids and Structures*. 2024. Vol. 294. P. 112775.
497. Zhao Y.H., Tandon G.P., Weng G.J. Elastic moduli for a class of porous materials. *Acta Mechanica*. 1989. Vol. 76. P. 105–131.
498. Zheng S.F., Denda M., Weng G.J. Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite. *Mechanics of Materials*. 2000. Vol. 32. No 12. P. 695–709.
499. Zhong Z., Meguid S.A. On the imperfectly bonded spherical inclusion problem. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1999. Vol. 66. No 4. P. 839–846.
500. Zhong Z., Meguid S.A. On the Elastic Field of a Spherical Inhomogeneity with an Imperfectly Bonded Interface. *Journal of Elasticity*. 1997. Vol. 46. No 2.

P. 91–113.

501. Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite elements and approximation. Dover Publications, 2006. 352 p.
502. Zozulya V.V. Regularization of the hypersingular integrals in 3-D problems of fracture mechanics. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2008. Vol. 47. No 6. P. 219–228.
503. Zozulya V.V., Men'shikov V.A. Solution of three-dimensional problems of the dynamic theory of elasticity for bodies with cracks using hypersingular integrals. *International Applied Mechanics*. 2000. Vol. 36. No 1. P. 74–81.
504. Zozulya V.V., Lukin A.N. Solution of three-dimensional problems of fracture mechanics by the method of integral boundary equations. *International Applied Mechanics*. 1998. Vol. 34. No 6. P. 544–551.
505. Zuiker J., Dvorak G.J. The effective properties of functionally graded composites. Extension of the Mori–Tanaka method to linearly varying fields. *Composites Engineering*. 1994. Vol. 4. No 1. P. 19–35.

Додаток А

А.1. Функції форми чотирикутного граничного елемента.

$$R_1^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1);$$

$$R_2^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2);$$

$$R_3^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1);$$

$$R_4^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_1);$$

$$R_5^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1);$$

$$R_6^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2);$$

$$R_7^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1);$$

$$R_8^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_1).$$

А.2. Функції форми трикутного граничного елемента.

$$R_1^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{6}(\xi_1\sqrt{3} + \xi_2)(\xi_1\sqrt{3} + \xi_2 - \sqrt{3});$$

$$R_2^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{3}(\xi_1\sqrt{3} - \xi_2 + \sqrt{3})(\xi_1\sqrt{3} + \xi_2 - \sqrt{3});$$

$$R_3^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{6}(\xi_1\sqrt{3} - \xi_2)(\xi_1\sqrt{3} - \xi_2 + \sqrt{3});$$

$$R_4^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{3}\xi_2(\xi_1\sqrt{3} - \xi_2 + \sqrt{3});$$

$$R_5^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{3}\xi_2(2\xi_2 - \sqrt{3});$$

$$R_6^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{3}\xi_2(-\xi_1\sqrt{3} - \xi_2 + \sqrt{3}).$$

A.3. Похідні функцій форми чотирикутного граничного елемента.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_1^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{4} (1 - \xi_2)(2\xi_1 + \xi_2); & \frac{\partial R_2^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= -\xi_1 (1 - \xi_2); \\
 \frac{\partial R_3^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{4} (1 - \xi_2)(2\xi_1 - \xi_2); & \frac{\partial R_4^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{2} (1 - \xi_2^2); \\
 \frac{\partial R_5^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_2)(2\xi_1 + \xi_2); & \frac{\partial R_6^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= -\xi_1 (1 + \xi_2); \\
 \frac{\partial R_7^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_2)(2\xi_1 - \xi_2); & \frac{\partial R_8^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= -\frac{1}{2} (1 - \xi_2^2); \\
 \frac{\partial R_1^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{4} (1 - \xi_1)(2\xi_2 + \xi_1); & \frac{\partial R_2^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= -\frac{1}{2} (1 - \xi_1^2); \\
 \frac{\partial R_3^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_1)(2\xi_2 - \xi_1); & \frac{\partial R_4^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= -\xi_2 (1 + \xi_1); \\
 \frac{\partial R_5^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_1)(2\xi_2 + \xi_1); & \frac{\partial R_6^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2); \\
 \frac{\partial R_7^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{4} (1 - \xi_1)(2\xi_2 - \xi_1); & \frac{\partial R_8^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= -\xi_2 (1 - \xi_1).
 \end{aligned}$$

A.4. Похідні функцій форми трикутного граничного елемента.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_1^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_2 - \frac{1}{2}; & \frac{\partial R_2^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= -2\xi_1; \\
 \frac{\partial R_3^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \xi_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_2 + \frac{1}{2}; & \frac{\partial R_4^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \xi_2; \\
 \frac{\partial R_5^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= 0; & \frac{\partial R_6^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \xi_2; \\
 \frac{\partial R_1^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_2 - \frac{1}{2} \right); & \frac{\partial R_2^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{2}{3} (\xi_2 - \sqrt{3}); \\
 \frac{\partial R_3^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_2 + \frac{1}{2} \right); & \frac{\partial R_4^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} &= \frac{2}{3} (\xi_1 \sqrt{3} - 2\xi_2 + \sqrt{3});
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_5^{(3)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \frac{1}{3}(4\xi_2 - \sqrt{3}); \quad \frac{\partial R_6^{(4)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \frac{2}{3}(-\xi_1\sqrt{3} - 2\xi_2 + \sqrt{3}).$$

A.5. Апроксимаційні функції чотирикутного граничного елемента.

$$M_1^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2);$$

$$M_2^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2);$$

$$M_3^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2);$$

$$M_4^{(4)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2).$$

A.6. Апроксимаційні функції трикутного граничного елемента.

$$M_1^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \xi_1\sqrt{3} - \xi_2);$$

$$M_2^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \xi_1\sqrt{3} - \xi_2);$$

$$M_3^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2.$$

Додаток Б

Б.1. Двовимірні гіперсингулярні інтеграли з круговою областю інтегрування одиничного радіуса $y \in \tilde{S}^C$ [10].

$$I_{0000}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} d_y S = -\pi^2;$$

$$I_{1000}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_1 - y_1) d_y S = -\frac{\pi^2}{2} \tilde{x}_1;$$

$$I_{0100}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_2 - y_2) d_y S = -\frac{\pi^2}{2} \tilde{x}_2$$

$$I_{1100}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_1-y_1)(\tilde{x}_2-y_2) d_{\mathbf{y}} S = \frac{\pi^2}{8} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2;$$

$$I_{2000}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_1-y_1)^2 d_{\mathbf{y}} S = \frac{\pi^2}{16} [4-\tilde{x}_1^2-3\tilde{x}_2^2];$$

$$I_{0200}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_2-y_2)^2 d_{\mathbf{y}} S = \frac{\pi^2}{16} [4-3\tilde{x}_1^2-\tilde{x}_2^2];$$

$$I_{0020}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^2 d_{\mathbf{y}} S = -\frac{\pi^2}{2};$$

$$I_{0002}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_2-y_2)^2 d_{\mathbf{y}} S = -\frac{\pi^2}{2};$$

$$I_{2011}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^3 (\tilde{x}_2-y_2) d_{\mathbf{y}} S = \frac{\pi^2}{16} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2;$$

$$I_{0211}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1) (\tilde{x}_2-y_2)^3 d_{\mathbf{y}} S = \frac{\pi^2}{16} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2;$$

$$I_{0011}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1) (\tilde{x}_2-y_2) d_{\mathbf{y}} S = 0;$$

$$I_{1020}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^3 d_{\mathbf{y}} S = -\frac{3\pi^2}{8} \tilde{x}_1;$$

$$I_{0102}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_2-y_2)^3 d_{\mathbf{y}} S = -\frac{3\pi^2}{8} \tilde{x}_2$$

$$I_{1011}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^C} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^2 (\tilde{x}_2-y_2) d_{\mathbf{y}} S = -\frac{\pi^2}{8} \tilde{x}_2;$$

$$I_{0111}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^c} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)(\tilde{x}_2-y_2)^2 d_y S = -\frac{\pi^2}{8} \tilde{x}_1$$

$$I_{1111}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^c} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^2 (\tilde{x}_2-y_2)^2 d_y S = \frac{\pi^2}{32} [2-\tilde{x}_1^2-\tilde{x}_2^2];$$

$$I_{2000}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^c} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^3} (\tilde{x}_1-y_1)^2 d_y S = \frac{\pi^2}{16} [4-\tilde{x}_1^2-3\tilde{x}_2^2];$$

$$I_{2020}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^c} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_1-y_1)^4 d_y S = \frac{\pi^2}{32} [6-\tilde{x}_1^2-5\tilde{x}_2^2];$$

$$I_{0202}(\tilde{\mathbf{x}}) = \iint_{\tilde{S}^c} \frac{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}|^5} (\tilde{x}_2-y_2)^4 d_y S = \frac{\pi^2}{32} [6-5\tilde{x}_1^2-\tilde{x}_2^2].$$

Б.1. Двовимірні гіперсингулярні інтеграли з еліптичною областю інтегрування S^e з півосями a і b , $\mathbf{y} \in S^e$, $k = \sqrt{1-b^2/a^2}$ [10].

$$I_{0000}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_1^2}{a^2}-\frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{2\pi}{a^3(1-k^2)} E(k);$$

$$I_{1000}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_1^2}{a^2}-\frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} (x_1-\xi_1) dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{2\pi x_1}{a^3 k^2} [K(k)-E(k)];$$

$$I_{0100}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_1^2}{a^2}-\frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} (x_2-\xi_2) dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{2\pi x_2}{a^3 k^2} \left[\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right];$$

$$I_{1100}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_1^2}{a^2}-\frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} (x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{2\pi x_1 x_2}{a^3 k^4} [(2-k^2)K(k)-2E(k)];$$

$$I_{2000}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} (x_1 - \xi_1)^2 dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\pi}{a^3 k^2} \left\{ K(k) - E(k) - \right. \\ \left. - \frac{x_1^2}{k^2} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right] - \frac{x_2^2}{k^2} \left[(2 - k^2) E(k) - 2(1 - k^2) K(k) \right] \right\} ;$$

$$I_{0200}(\mathbf{x}) = \iint_{\tilde{S}^e} \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2}}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} (x_2 - \xi_2)^2 dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\pi}{a^3 k^2} \left\{ \frac{E(q)}{1 - q^2} - K(q) - \right. \\ \left. - \frac{x_1^2}{k^2} \left[\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E(k) - 2K(k) \right] - \frac{x_2^2}{k^2} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right] \right\} .$$

ДОДАТОК В

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

1. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Stress intensification due to the crack outside/inside a finite fiber in 3-D elastic matrix. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 80. P. 133–142. (10.1016/j.tafmec.2015.10.002).
2. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. 2016. Vol. 258. P. 452–455. (10.4028/www.scientific.net/SSP.258. 452).
3. Stasyuk B.M. Interacting cracks 3D analysis using boundary integral equation method. *AIMS Materials Science*. 2016. 3(4). P. 1796–1810. (10.3934/materialsci.2016.4.1796).
4. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. О численном решении трехмерных статических задач теории упругости для тела с включением неканонической формы. *Прикладная механика*. 2007. 43 (4). С. 27–35.
 The same: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Numerical solution of three-dimensional static problems of elasticity for a body with a noncanonical inclusion. *International Applied Mechanics*. 2007. 43 (4). P. 380–387. (10.1007/s10778-007-0033-7).
5. Стасюк Б.М. Метод ефективного поля напружень в тривимірних задачах про взаємодію плоских тріщин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2009. 45 (1). С. 33–42.
 The same: Stasyuk B.M. Method of effective stress field in three-dimensional problems of interaction of plane cracks. *Materials Science*. 2009. 45(1). P. 28–40. (10.1007/ s11003-009-9157-8).
6. Стасюк Б.М. Вплив газонаповненої порожнини складної форми на напруження в околі сусідньої тріщини. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. 49 (6). С. 28–35.

- Te same: Stasyuk B.M. Influence of a Gas-Filled Cavity of Complex Shape on Stresses in the Vicinity of a Neighboring Crack. *Materials Science*. 2014. 49 (6). P. 734–742 (10.1007/s11003-014-9668-9).
7. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Упруге состояние включения неканонической формы при условии скользящего контакта с трехмерной матрицей. *Прикладная механика*. 2015. 51 (6). С. 42–51.
Te same: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix. *International Applied Mechanics*. 2015. 51 (6). P. 640–647. (10.1007/s10778-015-0720-8).
 8. Стасюк Б.М., Крет Н.В., Звірко О.І., Штойко І.П. Аналіз напруженого стану труби газопроводу з макродефектом, ініційованим воднем. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2019. 55 (1). С. 113–118.
Te same: Stasyuk B. M., Kret N.V., Zvirko O.I., Shtoiko I.P. Analysis of the Stressed State of a Pipe of Gas Pipeline with Hydrogen-Induced Macrodefect. *Materials Science*. 2019. 55 (1). P. 1–6. (10.1007/s11003-019-00259-2).
 9. Стасюк Б.М. Ефекти від поверхневого натягу сфероциліндричної нанопори у пружному середовищі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2019. 62 (3). С. 48–56.
Te same: Stasyuk B.M. Effects of the surface tension of a spherical-cylindrical nanopore in the elastic medium. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. 263 (1). P. 52–61. (10.1007/s10958-022-05906-9).
 10. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Эффективные модули упругости коротковолокнистого композита при скользящем контакте на межфазных поверхностях. *Механика композитных материалов*. 2021. 57 (5). С. 901–916.
Te same: Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic moduli of short-fiber composite with sliding contact conditions at interfaces. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. 57 (5), P. 635–646. (10.1007/s11029-021-09985-8).
 11. Хай М.В., Станкевич В.З., Стасюк Б.М. До теорії механіки руйнування. *Машинознавство*. 2002. № 11. С. 3–19.
 12. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *Машинознав-*

- ство. 2005. № 2. С. 17–21.
13. Стасюк Б.М. Напружений стан гранульованих композитів у випадку рівності коефіцієнтів Пуассона матеріалів матриці і включення. *Машинознавство*. 2006. № 5. С. 14–22.
 14. Стасюк Б.М. Приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии компланарных дискообразных трещин в упругом пространстве. *Теоретическая и прикладная механика*. 2008. Вып. 44. С. 48–54.
 15. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. *Машинознавство*. 2009. № 10. С. 9–14.
 16. Стасюк Б.М. Напруження у порожнистому циліндрі, послабленому множинними тріщиноподібними дефектами. *Допов. НАН України. Механіка*. 2021. № 3. С. 33–39.
 17. Хай М.В., Стасюк Б.М. Про спрощення розрахунку на міцність пружних тіл, що містять плоскі тріщини. *5-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп.* (Львів, 16-18 травня 2001). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2001. С. 16–17.
 18. Хай М.В., Стасюк Б.М. Модифікований метод граничних інтегральних рівнянь при розрахунку на міцність тіл, послаблених великою кількістю взаємодіючих тріщин. *6-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доповіді.* (Львів, 21-23 травня 2003). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2003. С. 44.
 19. Стасюк Б.М. Про міцність тіла, послабленого плоскою неоднорозв'язною тріщиною з коловими контурами. *Вісник НУ "Львівська політехніка". Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*. 2003. № 483. С. 90–97.
 20. Стасюк Б.М. Визначення концентрації напружень в околі багатов'язної плоскої тріщини з внутрішніми контурами змінної кривини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: Матеріали 3-ї міжнародної конференції під редакцією В.В. Панасюка.* (Львів, 2004). Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка. 2004. С. 333–340.

21. Стасюк Б.М. Розмірні ефекти динамічної взаємодії тріщин. *7-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 18-20 травня 2005). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2005. С. 44.
22. Стасюк Б.М. Вплив наявності тріщин на напружений стан гранульованого композита. *8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 23-25 травня 2007). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2007. С. 53.
23. Стасюк Б.М. Взаємодія тріщин та порожнин складної форми у безмежному пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій*: тези доп. 2-ї міжнародної конференції. (Львів, 22-24 жовтня, 2008). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2008. С. 77–78.
24. Стасюк Б.М. Вплив міжфазного шару на напружений стан об'ємного пружного включення. *9-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*: тези доп. (Львів, 20-22 травня 2009). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2009. С. 100–102.
25. Стасюк Б.М., Кіндрацький Б.І. Взаємодія в безмежному тілі плоских тріщин та тонких пружних включень малої жорсткості. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Матеріали 4-ї міжнародної конференції під ред. З. Назарчука, Б.І. Кіндрацького. (Львів, 11-13 листопада, 2010). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2010. – С. 485–490.
26. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Децик Т.Б. Гранично-рівноважний стан бруса круглого попереччя з внутрішньою тріщиною під поперечним згином. *Вісник НУ „Львівська політехніка”, фізико-математичні науки*. 2011. № 718. С. 81–85.
27. Kindratsky B. I., Stasiuk B. M. Three-dimensional elastic problem for a limited bodies with crack. *Fracture Mechanics of Materials*. proc. Second Ukrainian-Greek Symposium (Lviv, October 3–7 2011). Lviv: SPOLOM. 2011. P. 39–42.
28. Стасюк Б. М. Пружна рівновага об'ємного включення довільної форми, що містить плоску тріщину. *10-й міжнародний симпозіум українських*

- інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 25-27 травня 2011). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2011. С. 114–116.*
29. Стасюк Б. М. Взаємодія газонаповнених об'ємних порожнин у пружному тілі. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. 3-ї міжнародної конференції. (Львів, 7-9 листопада, 2012). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2012. С. 56–57.*
 30. Михаськів В.В., Стасюк Б.М. Концентрація напружень в околі плоскої тріщини та об'ємного пружного включення за умови їх взаємодії. *Сучасні проблеми механіки і математики. Збірник наукових праць т. 2. Під ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. Львів. 2013. С. 74–76.*
 31. Стасюк Б.М. Модель гладкого контакту об'ємного пружного включення довільної форми з безмежним тілом. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 15-17 травня 2013). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2013. С. 54–55.*
 32. Стасюк Б.М. Напружено-деформований стан магістрального трубопроводу, послабленого приповерхневою осьовою тріщиною. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. 4-ї міжнародної конференції. (Львів, 30-31 жовтня, 2014). Львів: КІНДПАТРИ ЛТД. 2014. С. 91–92.*
 33. Стасюк Б.М. Експериментальне та теоретичне визначення ефективних модулів пружності фібробетону. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наук. праць IX Міжнародної наукової конференції за ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2014. С. 156–158.*
 34. Myk'as'kiv V. V., Stasyuk B. M. Effective elastic properties of 3D nanocomposites reinforced by short-fiber with Gurtin-Murdoch model of interphase. *Nanotechnology and nanomaterials. Abstract Book of participants of the international research and practice conference. (Kyiv, August 27-30). Kyiv: SME Burlaka. 2018. P. 243.*

35. Стасюк Б.М. Моделювання поверхневого натягу в тривимірних нанокompозитах за умови змінної кривини міжфазної поверхні. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. збірник наукових праць X Міжнародної наукової конференції за ред. Р.М. Кушніра, Г.С. Кіта. Львів: ІП-ПММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. 2019. С. 144–145.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались і обговорювались на: Міжнародній науковій школі «13th Summer School on Fracture Mechanics» (Вроцлав, 2013); Міжнародних симпозіумах українських інженерів-механіків у Львові (2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013); міжнародних конференціях «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення та експлуатації машинобудівних конструкцій» (2008, 2010, 2012, 2014); «Second Ukrainian-Greek Symposium on Fracture Mechanics of Materials» (2011); «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (2014, 2019); «International Conference on Materials Structure & Micromechanics of Fracture» (Брно, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції «Нанотехнології та наноматеріали» (Київ, 2018).

У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.В. Матуса; на загальноінститутському науковому семінарі “Математичні проблеми механіки деформівного твердого тіла” Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом академіка НАН України Р.М. Кушніра; на спільному науковому семінарі відділів динаміки та стійкості суцільних середовищ, обчислювальної механіки та техніки, механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В.Л. Богданова; на об’єднаному науковому семінарі кафедр обчислювальної математики та прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України під керівництвом проф. Р.С. Хапка.