

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет „Харківський політехнічний інститут”
Національна Академія Наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ТКАЧЕНКО ВІКТОРІЯ ВАЛЕРІЇВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ
ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

01.02.04– механіка деформівного твердого тіла
Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В.В.Ткаченко

Науковий керівник

Курпа Лідія Василівна,
докторка технічних наук, професорка

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради /Ясінський А.В./

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Ткаченко В.В. Нелінійні коливання та стійкість шаруватих пластин складної форми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 „Механіка деформівного твердого тіла”. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 2019.

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітично-числового методу дослідження геометрично нелінійних коливань, статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми, навантажених в серединній площині.

За темою роботи виконано огляд літератури, з якого зроблено висновок, що існує обмежена кількість робіт, в яких розвинуті та застосовані аналітичні методи, які враховують неоднорідний докритичний стан та складну геометрію пластини. В даній роботі запропоновано метод дослідження параметричних коливань, статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів.

В дисертації розглянуто багатошарові пластини симетричної та антисиметричної будови пакету шарів в рамках класичної та в рамках уточненої теорії типу Тимошенка. Система доповнюється відповідними крайовими умовами.

В рамках обраних теорій запропоновані методи розв’язання задач стійкості та нелінійних коливань. Алгоритм реалізації методу зводиться до поетапного виконання проміжних задач: визначення неоднорідного докритичного стану пластини, розв’язок задачі про лінійні коливання багатошарової пластини, яка навантажена в серединній площині, зводиться до знаходження критичного навантаження і передбачає власне рішення задачі стійкості, розв’язування геометрично нелінійної задачі про коливання пластини.

Виконано дискретизацію нелінійної системи рівнянь руху. В роботі розглянуто випадок, коли в рядах утримано по одному члену, тоді після використання процедури Бубнова-Гальоркіна, вихідну систему нелінійних рівнянь руху зведено до нелінійного звичайного диференціального рівняння відносно часу. З лінеаризованої частини цього рівняння методом Болотіна В.В., знайдено зони динамічної стійкості (нестійкості) пластини, в якій виникає головний параметричний резонанс, тобто вирішується задача про параметричні коливання пластини. Розв'язуючи нелінійне рівняння методом Бубнова-Гальоркіна або Рунге-Кутта, знаходиться залежність амплітуди від відповідного співвідношення нелінійної частоти до лінійної та будуються скелетні криві.

Запропоновані методи було програмно реалізовано в рамках системи POLE-RL та протестовано на низці задач. Порівняння одержаних результатів з відомими підтвердило вірогідність та універсальність розроблених методів та створеного програмного забезпечення. Для пластин складної геометричної форми вірогідність одержаних результатів перевірялась шляхом зменшення вирізів або отворів і зведенням області до відповідної пластини канонічної форми. Крім того, досліджено збіжність результатів при збільшенні кількості координатних функцій. Для ілюстрації можливостей розроблених методів, було досліджено пластини різноманітних форм та різними варіантами навантаження. Завдяки використанню теорії R-функцій, побудовано відповідні структури розв'язків та системи координатних функцій, які точно задовольняють головні крайові умови. Розроблене програмне забезпечення протестовано та використано для розв'язування нових задач з метою дослідження впливу на значення критичного навантаження, зони динамічної стійкості \ нестійкості та скелетні криві геометричних та механічних параметрів: наявності отворів чи вирізів, крайових умов, степені ортотропії, кількості шарів, тощо.

Ключові слова: багат шарові пластини, складна геометрія, статична стійкість, енергетичний метод, динамічний метод, параметричні коливання,

геометрично нелінійні коливання, теорія R-функцій, варіаційні методи, зони динамічної нестійкості, амплітудно-частотні характеристики.

ANNOTATION

Tkachenko V.V. Nonlinear vibration and stability of laminated plates with difficult form. – Qualification scientific work with the manuscript copyright.

The thesis for a candidate of physics and mathematics science degree in speciality 01.02.04 «Solid mechanics». – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv, 2019.

The Thesis is devoted to the development of a numerical-analytical method for studying geometrically nonlinear oscillations, static and dynamic stability of multilayer plates of complex form, loaded in the median plane.

On the topic of the work, a review of literature has been made, from which it is concluded that there is a limited number of works in which developed and applied analytical methods that take into account the heterogeneous subcritical state and complex geometry of the plate. In this paper, we propose a method for investigating parametric oscillations, static and dynamic stability of multilayer plates of complex shape, which is based on the use of the theory of R-functions and variational methods.

In the dissertation are considered multilayer plates of symmetric and antisymmetric structure of the layer package in the framework of the classical and within the framework of the refined theory of the Tymoshenko type. The system is supplemented by appropriate boundary conditions.

In the framework of selected theories, methods for solving stability problems and nonlinear oscillations are proposed. The algorithm for implementing the method is reduced to the phased implementation of intermediate tasks: the definition of a non-uniform subcritical state of a plate, the solution of the problem of linear oscillations of a multilayered plate, which is loaded in the median plane, is reduced to

finding a critical load and involves the solution of the problem of stability itself, solving a geometrically nonlinear problem about fluctuations of the plate.

The discretization of the nonlinear system of equations of motion is executed. In this paper we consider the case when there is one member in the ranks, then, after using the Bubnov-Galerkin procedure, the original system of nonlinear equations of motion is reduced to a nonlinear ordinary differential equation with respect to time. From the linearized part of this equation by the Bolotin VV method, we find the zones of dynamic stability (instability) of the plate, in which the main parametric resonance arises, that is, the problem of parametric oscillations of the plate is solved.

Solving a nonlinear equation using the Bubnov-Galerkin or Runge-Kutta method is the dependence of the amplitude on the corresponding ratio of the nonlinear frequency to the linear and constructed skeletal curves.

The proposed methods were programmed within the framework of the Field-RL system and tested on a number of tasks. Comparison of the results with the known confirmed the probability and versatility of the developed methods and created software. For plates of complex geometric form, the probability of the results obtained was verified by reducing the cutouts or apertures and reducing the area to the corresponding plate of the canonical form. In addition, the convergence of results with the increase in the number of coordinate functions is investigated. To illustrate the possibilities of the developed methods, plates of various forms and different loading variants were investigated. Due to the use of the theory of R-functions, the corresponding structures of solutions and coordinate functions systems that exactly satisfy the main boundary conditions are constructed. The developed software has been tested and used for solving new problems with the aim of studying the impact on critical load values, dynamic stability / instability zones and skeletal curves of geometric and mechanical parameters: the presence of openings or cutouts, boundary conditions, degrees of orthotropy, number of layers, etc.

Keywords: laminated plates, complex geometry, static stability, energy method, dynamic method, parametric vibration, theory of R-functions, variational methods, dynamic instability zones, amplitude-frequency characteristics.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Lidya Kurpa, Olga Mazur, Victoria Tkachenko Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Lat. Am. j. solids struct.* 2013, vol.10, n.1. P.175-188.
2. Курпа. Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багат шарових пластин складної форми. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – 56, № 2. С. 136–150.
Те саме: Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametric vibration of multilayer plates of complex shape *J. Math. Sci.* – 2014. – 203, No. 2. – P. 165–184. DOI 10.1007/s10958-014-2098-2
3. Курпа. Л. В., Ткаченко В. В. Исследование колебаний и устойчивости сжатых многослойных пластин с помощью метода R-функций. *Теоретическая и прикладная механика*, 2010, №1(47). С. 95-105.
4. Курпа. Л. В., Линник Г. Б., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багат шарових пластин симетричної будови за допомогою методу R-функцій. *Машинознавство*, 2010, №3-4. С. 3-8.
5. Курпа. Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багат шарових пластин симетричної структури зі складною геометричною формою. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій* 2012, вип. 19. С 193-204.
6. Курпа Л. В., Ткаченко В. В. Розв'язання задач стійкості шаруватих пластин з отворами за допомогою методу R-функцій. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. –61, № 2. С. 100-110. .
7. Ткаченко В. В. Колебания и устойчивость сжатых многослойных пластин в рамках классической и уточненной теорий. *Вісник НТУ"ХП"*, 2010, №69. С. 146-155.
8. Курпа. Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багат шарових пластин під дією періодичного навантаження. *Вісник НТУ"ХП"*, 2011, №3. С. 134-145.

9. Мазур О. С., Ткаченко В. В. Динамічна стійкість багатошарових пластин складної форми. *Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ", №6 2014. С. 124-129 .
10. Ткаченко В. В. Исследование динамической устойчивости многослойных пластин с отверстиями. *Вестник НТУ "ХПИ"*, 2018, №3 (1279). С. 129-136.
11. Lidya Kurpa, Olga Mazur, Victoria Tkachenko Parametric vibrations of laminated plates with complex shape. *11th conference on dynamical systems theory and applications*, December 5-8, 2011. Lodz, Poland. P. 289-294.
12. Linnik A., Mazur O., Tkachenko V. Nonlinear analyses of the laminated plates of the symmetric structure subjected to static in the plane forces. "Nonlinear Dynamics – 2010", The Proceedings of the 3rd International conference. Sept., 21-24, 2010, Kharkov. P. 369-374.
13. Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametric vibrations and dynamic instability of thin laminated plates with complex form. *Shell Structures: Theory and Applications*. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference, 2013, P. 309-312.
 The same: L.V. Kurpa, O.S. Mazur & V.V. Tkachenko. Parametric Vibrations and Dynamic Instability of thin laminated plates with complex form. *Shell Structures: Theory and Applications*, 2014 Taylor & Francis Group, London,UK. V.3. P.309-312.
14. Lidya Kurpa, Olga Mazur, Victoria Tkachenko Investigation of the Parametric Vibration of Laminated Plates by RFM. *Nonlinear dynamics -2016*. The 5th international conference. Proceedings, Kharkov, September, 27-30, 2016 – Kharkov: NTU "KPI", 2016. P.445-450.
15. Курпа Л. В., Ліннік А. Б., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багатошарових пластин за допомогою метода R-функцій. *Математичне моделювання в механіці і системах*. Международная научная конференция MicroCAD - [НТУ "ХПИ"](#), 2009. С. 56.
16. Курпа. Л. В., Ткаченко В. В., Шматко Т. В. Дослідження стійкості багатошарових пластин з отворами складної форми за допомогою теорії R-

- функцій та варіаційних методів. *Сучасні проблеми механіки та математики*. Збірник наукових праць. Львів 2018. С. 175-176.
17. Курпа. Л. В., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багатошарових пластин симетричної будови навантажених в серединній площині. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Збірник. Львів 2010 С. 171.
 18. Курпа. Л. В., Ткаченко В. В. Застосування теорії R-функцій для дослідження параметричних коливань багатошарових пластин антисиметричної структури” *XVIII International Conference dynamical system modelling and stability investigation, modelling & stability*. Abstracts of conference reports. Kiev, Ukraine May 24-26, 2017. С. 123.
 19. Курпа. Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметрические колебания многослойных пластин под действием периодической нагрузки. *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях*. Тезисы докладов международной конференции. 17-22 апреля 2011г., Харьков – с. 70-71.
 20. Курпа. Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Исследование динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы. *Інформаційні технології*. Тези доповідей ХХ міжнародної науково-практичної конференції, 15-17 травня 2012, Харків. С. 60.
 21. Мазур О. С., Ткаченко В. В. Динамічна стійкість багатошарових пластин зі складною геометрією. *Modelling and stability*. Abstracts of conference reports. Kyev, May25-27, 2011 С. 297.
 22. Мазур О. С., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багатошарових пластин складної форми під дією періодичного навантаження. *Математичне моделювання в механіці і системах*. Международная научная конференция MicroCAD : Секція №2 - нту "хпи", 2011. С. 57.
 23. Мазур О. С., Ткаченко В. В. Исследование параметрических колебаний многослойных пластин сложной формы с помощью метода R-функций. *Математичне моделювання та математична фізика*, м. Кременчук, 21 – 24 вересня 2011 р. С. 203.

24. Ткаченко В. В. Дослідження статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми плану. *Тезиси докладов I Международной научно-технической конференции*. Харьков 10-14 сентября 2018г. С.140-141.
25. Ткаченко В. В. Исследование устойчивости многослойных пластин с отверстиями под действием периодической нагрузки. *XXV міжнародна науково-практична конференція MicroCAD-2017*. Тези доповідей. 17-19 травня 2017р. С.80.
26. Ткаченко В. В. Исследование устойчивости многослойных пластин симметричного строения с помощью метода R-функций. *XIII международная научная конференция им. Кравчука*, Тезисы докладов. Киев, 13-15 мая 2010. С.124.

ЗМІСТ

ВСТУП		14
РОЗДІЛ 1	СТАН ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА НОВИХ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕНЬ (Огляд літератури)	22
	1.1 Огляд існуючих методів розв’язання задач про статичну та динамічну стійкість та параметричні коливання багатошарових пластин під дією періодичного навантаження	22
	1.2 Застосування методу R-функцій для дослідження стійкості та геометрично нелінійних коливань багатошарових пластин складної форми	32
	1.3 Постановка актуальних задач досліджень	34
	1.4 Висновки до розділу 1	36
РОЗДІЛ 2	МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН НАВАНТАЖЕНИХ В СЕРЕДИННІЙ ПЛОЩИНІ	37
	2.1 Математична постановка задачі – загальні положення	37
	2.2 Математична постановка в рамках класичної теорії	39
	2.2.1 Пластини симетричної будови	41
	2.2.2 Пластини антисиметричної будови	45
	2.3 Математична постановка задачі в рамках уточненої теорії	47
	2.3.1 Пластини симетричної будови	49
	2.3.2 Пластини антисиметричної будови	51
	2.4 Об’єднане представлення математичної постановки для класичної та уточненої теорії типу теорії С. П. Тимошенко	52
	2.5 Крайові умови	54

	2.6	Висновки до розділу 2	55
РОЗДІЛ 3		МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН НАВАНТАЖЕНИХ В СЕРЕДИННІЙ ПЛОЩИНІ	57
	3.1	Загальна схема запропонованого метода	57
	3.2	Визначення неоднорідного докритичного стану пластини	59
	3.3	Розв'язок задачі про лінійні коливання пластини, навантаженої в серединній площині	65
	3.4	Розрахунок критичного навантаження	66
	3.4.1	Енергетичний підхід для визначення критичного навантаження в рамках класичної теорії	67
	3.4.2	Динамічний підхід для визначення критичного навантаження	68
	3.5	Розв'язок нелінійної задачі про коливання пластини	69
	3.5.1	Метод дискретизації системи руху в рамках класичної теорії	69
	3.5.2	Метод дискретизації системи руху в рамках уточненої теорії	74
	3.6	Побудова скелетних кривих	75
	3.7	Визначення зон динамічної стійкості / нестійкості	76
	3.8	Висновки до розділу 3	77
РОЗДІЛ 4		ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ БЕЗ ОТВОРИВ	78
	4.1	Аналіз вірогідності розробленого методу та створеного на його основі програмного забезпечення.	78

Тестові задачі.	
4.1.1	Стійкість прямокутної багат шарової пластини під дією статичного навантаження в серединній площині 79
4.1.2	Порівняння критичного навантаження, що одержано за допомогою динамічного та енергетичного підходів. 82
4.1.3	Дослідження стійкості прямокутної багат шарової пластини, що стискається вздовж сторони, яка протилежна жорстко закріпленій стороні 84
4.1.4	Динамічна стійкість прямокутної багат шарової пластини під дією періодичного навантаження в серединній площині. 86
4.2	Дослідження багат шарових пластин складної форми без отворів 91
4.2.1	Вплив геометричної форми на статичну стійкість багат шарової квадратної пластини з відсіченими кутами 92
4.2.2	Вплив зусиль, що стискають, на критичне навантаження Н-подібної пластини 95
4.2.3	Вплив одноосного стискання на критичне навантаження пластини складної форми. 97
4.2.4	Вплив механічних властивостей на динамічну стійкість шаруватої пластини складної форми. 101
4.2.5	Вплив розташування врізів на динамічну стійкість багат шарової Н-подібної пластини. 106
4.2.6	Дослідження параметричних коливань для Т-подібної пластини в рамках класичної теорії 109

для рівнянь, що представлені в змішаній формі

	4.3	Висновки до розділу 4	112
РОЗДІЛ 5		РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ З ОТВОРАМИ	114
	5.1	Тестування методу на прикладі дослідження критичного навантаження багатошарової пластини з квадратним отвором.	115
	5.2	Вплив розміру отвору на власні частоти, зони динамічної нестійкості та криві відгуку багатошарової пластини з квадратним отвором.	117
	5.3	Дослідження статичної та динамічної стійкості п'ятишарової хрестоподібної пластини з круглим отвором.	123
	5.4	Дослідження впливу крайових умов на отворі складної форми на критичне навантаження та зони динамічної нестійкості багатошарової пластини	130
	5.5	Дослідження прямокутних багатошарових пластин з двома прямокутними отворами. Вивчення впливу розташування отворів, їх розмірів, та умов закріплення на критичне навантаження та зони динамічної нестійкості пластин.	137
	5.6	Висновки до розділу 5	145
		ВИСНОВКИ	146
		СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	148
		ДОДАТОК А	168
		ДОДАТОК Б	169
		ДОДАТОК В	174

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Шаруваті пластини і оболонки широко використовуються у різних галузях промисловості – машинобудуванні, ракетобудуванні, авіаційній, будівельній, морській інженерії, як складові елементи конструкцій - будинків, кораблів, літаків, дамб, мостів і т.і. Щоб одержати більш міцну конструкцію, зменшити її вагу, покращити корозійну стійкість чи теплоізоляційні властивості багато елементів сучасних конструкцій виготовляють з композитних матеріалів. З огляду на це важливе значення має розробка методів і програмного забезпечення розрахунку міцності таких елементів конструкцій. Однією із важливих складових розрахунку є знаходження власних частот та значень критичного навантаження, перевищення якого може призвести до руйнування конструкції.

Дослідження стійкості та коливань навантажених багатошарових пластин істотно ускладнюється у випадку, коли пластини мають складну форму, вирізи або отвори, які є необхідними для розміщення болтів, протягування кабелів, вентиляцій, з'єднання різних частин конструкції, тощо.

Враховуючи широке використання композитних шаруватих пластин, на сьогодні запропоновано багато теорій та методів розв'язування задач їх стійкості та коливань. Слід зазначити, що через складності математичних моделей цих задач для їх розв'язування зазвичай використовують наближені методи, серед яких найбільш універсальним і популярним є метод скінченних елементів.

Не дивлячись на велику кількість публікацій, які стосуються задач стійкості та коливань навантажених багатошарових пластин, існує ціла низка питань, які потребують подальшого вивчення, а саме:

1. Більшість робіт стосується дослідження статичної стійкості шарнірно обпертих або жорстко закріплених прямокутних пластин. Існує незначна

кількість робіт, в яких розглядаються пластини іншої геометричної форми або мішані крайові умови та динамічне навантаження в серединній площині.

2. У роботах, в яких досліджуються параметричні коливання та динамічна стійкість, зазвичай припускають, що докритичний стан навантаженої пластини є однорідним. Таке припущення може призводити до похибок розрахунків.

3. При дослідженні пластин з отворами, автори обмежуються вільними отворами прямокутної або круглої форми. Але на практиці отвори можуть мати різну геометричну форму і бути закріпленими.

Отже, розробка ефективних методів дослідження нелінійних коливань, динамічної та статичної поведінки багат шарових пластин зі складною формою плану, що враховують неоднорідний докритичний стан, наявність отворів різної геометричної форми, різні типи крайових умов, залишається актуальною. Розв'язання цієї проблеми і стосується дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.

Робота виконана на кафедрі «Прикладна математика» Національного Технічного Університету «Харківський політехнічний інститут» МОН України в період з 2008 р. по 2019 р. та проводилась відповідно до:

- держбюджетної теми «Створення на базі теорії R-функцій методів розв'язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.);

- держбюджетної теми «Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багат шарових пластин та пологих оболонок» згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1177, від 30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.);

- держбюджетної теми "Розробка методів математичного моделювання поведінки нових та композиційних матеріалів для оцінки ресурсу та

прогнозування надійності елементів конструкцій" (№ держреєстрації 0117U004969, з 2017 р. і по т.ч.).

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розроблення аналітично-числового підходу до дослідження нелінійних коливань, статичної і динамічної стійкості елементів тонкостінних конструкцій, навантажених в серединній площині, які моделюються багат шаровими пластинами довільної форми плану за різних видів крайових умов.

Досягнення мети передбачає вирішення таких завдань:

– здійснити варіаційні постановки задач для розрахунку докритичного стану багат шарових пластин складної форми симетричної та антисиметричної структури пакету шарів в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку типу С. П. Тимошенка;

– розробити алгоритми розв'язування лінійних задач коливання та стійкості навантажених в серединній площині багат шарових пластин з урахуванням неоднорідного докритичного стану;

– розробити метод зведення вихідної нелінійної системи руху до звичайного нелінійного диференційного рівняння та здійснити варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язки яких дадуть змогу реалізувати запропонований алгоритм;

– чисельно реалізувати метод знаходження областей динамічної нестійкості та амплітуд усталених коливань в зонах резонансу, який ґрунтується на дослідженнях В.В.Болотіна;

– розвинути конструктивні засоби теорії R-функцій для цього класу задач (побудувати структури розв'язку, що задовольняють різні крайові умови);

– розробити програмне забезпечення в рамках системи POLE-RL та провести тестування запропонованого методу і програмного забезпечення;

– застосувати розроблений метод до розв'язування нових задач дослідження статичної та динамічної стійкості, а також параметричних коливань багат шарових пластин складної геометричної форми при різних

видах крайових умов з метою виявлення впливу геометричних та механічних параметрів на динамічні характеристики пластин.

Об'єкт дослідження – пружні механічні системи, елементи яких моделюються багатошаровими пластинами складної форми.

Предмет дослідження – статична та динамічна стійкість багатошарових пластин складної форми при різних видах крайових умов.

Методи дослідження.

Для досягнення поставленої мети використано комплексне застосування теорії R-функцій, методу Рітца, процедури Гальоркіна, методу Рунге-Кутта.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у розробленні аналітично-числового підходу до дослідження параметричних коливань, статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми, який ґрунтується на використанні теорії R- функцій. Метод розроблено для класичної та уточненої теорії типу Тимошенка, яка враховує деформації зсуву. При цьому:

- вперше для багатошарових пластин антисиметричної будови в рамках уточненої теорії типу Тимошенко побудовано варіаційні постановки задач для визначення докритичного стану пластини;

- вперше розроблено алгоритми визначення критичного навантаження багатошарових пластин з урахуванням докритичного стану пластини;

- розроблено методику зведення вихідної нелінійної системи руху багатошарових пластин до звичайного нелінійного диференційного рівняння типу Матьє, побудовано нові варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язки яких дають змогу реалізувати запропонований алгоритм;

- одержано аналітичні формули, які дають змогу обчислювати коефіцієнти рівняння Матьє у разі складної геометрії пластини;

- розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL, яке дало змогу провести дослідження статичної та динамічної стійкості та нелінійних коливань багатошарових пластин різної геометричної форми як з отворами так і без них, та з різними крайовими умовами;

- розв'язано нові задачі про статичну та динамічну стійкість і параметричні коливання багат шарових пластин складної форми. Для кожної із розв'язаних задач за допомогою теорії R-функцій побудовано структури розв'язків та відповідні послідовності базисних функцій.

- на основі числових досліджень для багат шарових пластин виявлено низку закономірностей впливу геометричних та механічних параметрів на критичне навантаження, власні частоти, області динамічної нестійкості, амплітудно частотні характеристики.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю математичних постановок задач; використанням апробованих математичних методів; контролем практичної збіжності результатів при збільшенні числа координатних функцій; порівнянням окремих результатів, отриманих в роботі, з відомими у літературі; дослідженням збіжності результатів до відомих при виродженні багат шарової пластини складної форми в пластину, форма якої близька до прямокутної або круглої.

Практичне значення отриманих результатів полягає у тому, що для елементів тонкостінних конструкцій, розрахункові моделі яких є багат шаровими пластинами складної форми, розроблено алгоритми та створено відповідне програмне забезпечення для розрахунку значень критичного навантаження, областей динамічної нестійкості лінійних та нелінійних частот пластин, які навантажені в серединній площині. Отримані в роботі результати можуть бути застосовані в подальших прикладних дослідженнях, а також для порівняння аналогічних результатів, одержаних за допомогою інших методів.

Результати дисертаційної роботи використано у навчальному процесі при читанні курсу "Варіаційне числення та рівняння математичної фізики" на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ" МОН України.

Особистий внесок здобувача.

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. Роботи [26, 27, 36-41, 46-49, 55-58, 138,139,142-144,149] виконані у

співавторстві з Л.В. Курпою, О.С. Мазур, А.Б. Ліннік та Т.В.Шматко. У спільних наукових працях особистий внесок здобувача складає: участь у поширенні методу дослідження статичної стійкості на клас багат шарових пластин; поширення методу дослідження параметричних коливань на клас багат шарових пластин; розроблення програмного забезпечення для дослідження нових задач; дослідження параметричних коливань нових класів задач багат шарових пластин; розроблення динамічного підходу для знаходження критичного навантаження; проведення дослідження впливу різноманітних чинників на статичну стійкість багат шарових пластин; розв'язування нових задач параметричних коливань багат шарових пластин складної форми; участь у розробці алгоритму дослідження параметричних коливань багат шарових пластин антисиметричної будови та аналіз результатів.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати роботи доповідалися та обговорювалися на:

1. Міжнародних конференціях «Інформаційні технології: Наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» MicroCAD (Харків, 2009, 2011, 2012, 2013, 2017);
2. 3-й Міжнародній конференції «Nonlinear Dynamics» (Харків, 2010);
3. 11-й конференції «Conference on dynamical systems theory and applications» (Лодзь, Польща, 2011);
4. конференції «Modelling and stability» (Київ, 2011);
5. Міжнародній конференції «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях (Тараповские чтения)» (Харків, 2011);
6. XIII Міжнародній науковій конференції ім. Кравчука (Київ, 2010);
7. Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2010, 2013, 2018);
8. конференції «Математичне моделювання та математична фізика» (Кременчук, 2011);

9. 5-th International conference «Nonlinear dynamics-2016» (Харків, 2016);
10. XVIII International Conference dynamical system modelling and stability investigation, modelling & stability (Київ, 2017);
11. I Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2018).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася та обговорювалася на:

- науковому семінарі кафедри прикладної математики Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут” МОН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Ю.В. Міхліна;
- науковому семінарі відділу моделювання композитних структур і складних систем під керівництвом д.ф.-м.н., проф. М.В. Марчука;
- на науковому семінарі відділу обчислювальних методів інституту механіки ім. С.П. Тимошенка під керівництвом академ. НАН України, д.т.н., проф. Я.М. Григоренка та д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренка;
- загальноінститутському науковому семінарі “Математичні проблеми механіки руйнування та поверхневих явищ” під керівництвом чл.-кор. НАН України д.ф.-м.н., проф. Кіта Г.С. Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Публікації.

За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 26 друкованих праць. Серед них 5 статей [27, 40, 41, 47, 48] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України, 5 статей [39, 56, 78, 81, 139] в інших журналах та вісниках, 4 праці [138, 142, 144, 149] у збірниках матеріалів наукових конференцій, 12 публікацій [26, 36-38, 46, 49, 55, 57, 58, 77, 79, 80] у збірниках тез наукових конференцій, а також два репринта. Праці [41, 48, 139] опубліковані у журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus. Праці [77-81] опубліковано автором одноосібно.

Структура і обсяг дисертації.

Дисертація складається зі вступу, п'ятьох розділів, які містять 57 рисунків і 26 таблиць, висновків, списку використаних джерел із 190 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 177 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 133 сторінки

РОЗДІЛ 1

СТАН ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА НОВИХ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Огляд існуючих методів розв'язання задач про статичну та динамічну стійкість та параметричні коливання багат шарових пластин під дією періодичного навантаження

Дослідження статичної та динамічної стійкості пластин має доволі давню історію та сягає 1831 року, коли був відкритий параметричний резонанс. Явище параметричного збудження вперше спостерігалось Фарадеєм [110]. Параметричний резонанс у випадку вібрації струни був записаний Мельде [154]. А Беляєв [95] вперше запропонував теоретичний аналіз параметричного резонансу, займаючись стійкістю призматичних стержнів. Це кілька перших робіт.

Теорія нелінійних коливань почала активно розвиватися з кінця 19 сторіччя в класичних роботах А. Пуанкаре та А.М. Ляпунова.

Требі відмітити, що задачі про статичну та динамічну стійкість елементів конструкцій типу пластин та оболонок щільно пов'язані з іншими задачами теорії нелінійних коливань пластин.

Фундаментальну роль в розробці нелінійної теорії пластин та оболонок зіграли роботи таких вчених, як С. О. Амбарцумян, В. В. Болотін, В. З. Власов, А. С. Вольмір, К. З. Галімов, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, О. М. Гузь, В. І. Гуляєв, С. Г. Лехніцкій, Б. Я. Кантор, О. С. Космодаміанський, С. А. Лур'є, Х. М. Муштарі, В. В. Новожилов, П. М. Огібалов, В. М. Паймушин, В. Г. Піскунов, О. О. Рассказов, В. Л. Рвачев, С. П. Тимошенко, А. W. Leissa, Librescu, J. N. Reddy та інші.

Суттєвий вклад в розвиток методів розв'язання даної проблеми внесли А. Я. Александров, Є. В. Алтухов, К. В. Аврамов, М. А. Алфатов, В. А. Баженов, О. Я. Григоренко [13,14,114], В. З. Грищак, О. С. Кіров,

С. О. Калоєров, Г. С. Кіт, Т. С. Краснопольська, Л. В. Курпа, Р. М. Кушнір, І. А. Лоза, М. В. Марчук [50,58,150], В. В. Михаськів, Ю. В. Міхлін, Б. Г. Попов, Я. Г. Савула, В. І. Сторожев, Е. А. Стрельнікова, Г. Т. Сулим, А. Н. Шупіков, Awrejcewicz J., Datta, Michael P. Nemeth, Salim, Sahu S. K. і багато інших.

Останні декілька десятиріч зростає використання композиційних матеріалів у аерокосмічній промисловості, машинобудуванні, вітровій енергетиці та інших галузях інженерії. Різноманітні конструктивні елементи, такі як ротори, крила та балки виготовлені з композитних матеріалів. Композити забезпечують кращі показники стійкості до пошкоджень в порівнянні зі звичайними металами, також вони легкіші. Вони забезпечують чудову стійкість до корозії і хімічної атаки. Зростаючий попит для стійкої та відновлюваної енергії, такої, як енергія вітру, та необхідності економічних методів транспортування сприяє до збільшення використання композитів у автомобільних і аерокосмічних проектах. Вивчення властивостей композиційних матеріалів, створення програмного забезпечення є актуальною задачею для багатьох дослідників.

Побудові теорії багатошарових пластин і її застосуванням до вирішення різноманітних конкретних завдань присвячена велика кількість літератури. Створення і розвиток цієї теорії пов'язане з іменами таких вчених, як Н.А. Алфутів, С.О. Амбарцумян, І.Ю. Бабіч, А.Е. Богданович, В.В. Болотін, Г.А. Ванин, А.Т. Василенко, В.В. Васильєв, В.Е. Вериженко, К.З. Галімов, М.С. Танєєва, М.С. Герштейн, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, А.М. Гузь, В.М. Корнев, В.И. Королев, В.Д. Кошур, В.А. Крисько, Г.М. Куліков, А.К. Малмейстер, М. В. Марчук, В.Л. Нарусберг, Ю.В. Немировський, Ю.Н. Новічков, И.Ф. Образцов, В.Н. Паймушин, Б.Л. Пелех, В.В. Пікуль, В.Г. Піскунов, А.В. Плеханов, Б.Г. Попов, В.Д. Протасов, А.П. Прусаков, О.О. Рассказов, А.Ф. Рябов, В.І. Самсонов, Н.П. Семенюк, В.П. Тамуж, А.Г. Терегулов, Г.А. Тетере, А.Н. Уляшина, Л.П. Хорошун, В.Е. Чепига, П.П. Чулков, R.M. Christensen, L. Librescu, J.N. Reddy, E. Reissner і багато інших. Ними

складені варіанти основних диференціальних рівнянь і відповідних крайових умов, дані постановки задач міцності, стійкості, динаміки композитних багатошарових пластин та оболонок, розроблені методи їх вирішення, вирішено багато конкретних задач. Результати досліджень по теорії багатошарових пластин і оболонок узагальнені в монографіях Н.А. Алфутова, Н.А. Зінов'єва, Б.Г. Попова [2], С.А. Амбарцумяна [3,4,5], А.Е. Богдановича, В.В.Болотина [6,7] і Ю.Н. Новичкова, Г.А. Ванина, Н.П. Семенюка, Р.Ф. Емельянова, Г.А. Ванина і Н.П. Семенюка, В.В. Васильєва, Ш.К. Галимова, Э.И. Григолюка и П.П. Чушкова, Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова, Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко [10], Я.М. Григоренко [15], А.Т. Василенко, Г.П. Голуб, Я.М. Григоренко та Н.Н. Крюкова, А.Н. Елпатьевского и В.В. Васильєва, В.И. Королева, В.Л. Нарусберга і Г.А. Тетерса, И.Ф. Образцова, В.В. Васильєва, В.А. Бунакова, Б.Л. Пелеха та А.А. Сяського, Б.Л. Пелеха та В.А. Лазько, В.В. Пикуля, В.Г. Пискунова и В.Е. Вериженко, А.О. Рассказова, И.И. Соколовской, Ж.А. Шульги, Р.Б. Рикардса та Г.А. Тетерса, А.Ф. Рябова, Ю.М. Тарнопольского, И.Ю. Хомы та ін.

Дослідження динамічної стійкості має велике технічне значення для аналізу динамічних систем під час періодичних навантажень. У механіці динамічній стійкості вчені приділяють значну увагу вже протягом багатьох років. В тому числі особливу увагу приділяють аналізу області динамічної стійкості \ нестійкості. Для визначення цих областей використовують як аналітичні, так і чисельні методи дослідження композитних матеріалів. Болотін в 1964 році у своїй праці про динамічну стійкість [6] дає ретельний огляд проблем, пов'язаних з параметричним збудженням структурних елементів. Дослідження цього великого пласту задач можна умовно розділити на три основні групи задач – коливання, статична стійкість, динамічна стійкість.

На даний момент є багато статей про статичну стійкість, в тому числі багатошарових пластин. Вчені переважно досліджують пластини канонічних форм або пластини з отворами. Інженерні споруди можуть бути зруйновані через надмірне напруження. Коли пластина піддається стискаючому

навантаженню, вона спочатку залишається плоскою в стані рівноваги. Але, коли навантаження збільшується до певної величини, пластина стає нестійкою, а її конфігурація змінюється. Навантаження, при якому пластина втрачає стан рівноваги і стає нестійкою, називається критичним навантаженням. В минулому сторіччі вчені вивчали поведінку одношарових ізотропних та ортотропних пластин, та зараз використовують композитні матеріали, що складається з двох або більше матеріалів і мають властивості, які не могли бути досягнуті лише з одного з складових його матеріалів. У таких матеріалах головними несучими елементами є волокна, що забезпечують гнучкість структури, які можуть повністю забезпечити стійкість структури. Волокнисті армовані композити часто існують у вигляді тонких багатошарових пластин. Вони в більшості випадків піддаються стискаючим навантаженням, які, коли вони досягають критичного навантаження, можуть привести до руйнування. Отже, дослідження стійкості композитів було головною проблемою для вчених.

Книги Болотіна [6,7], Шмідта [84] та Nayfeh і Mook [162] присвячені основній теорії динамічної стійкості систем при параметричних збудженнях.

На даний момент не існує точного рішення рівнянь системи диференціальних рівнянь другого порядку з періодичними коефіцієнтами. Вчені довгий час були зацікавлені в дослідженні різних методів вирішення цього класу задач. Дві основні цілі цього класу досліджень - встановити наявність періодичних рішень та їх стійкість. Коли рівняння руху для системи зводиться до рівняння типу Матьє-Хілла, використовують деякі добре відомі методи, - це метод запропонований Болотініним на основі теорії Флоке, техніка збурень та ітерацій, Метод Галеркіна, другий метод Ляпунова та асимптотичні методи Крилова, Боголюбова і Мітроплоського.

Докладний огляд публікацій присвячених дослідженню стійкості та параметричних коливань, можна знайти в роботах В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчука [21], Є.А. Коган та А.А.Юрченко [20], Г. Шмідта [84], S. K. Sahu, P. K. Datta [175], R.A. Ibrahim [122-128], G.I. Simites [182], A.H. Nayfeh and D.T. Mook [162].

Опубліковано оглядові статті про параметричний резонанс. Evan-Iwanowski [109], Ibrahim та інш. [122-128], Aboudi [87] та Simitzes [182] дали вичерпний виклад літератури про вібрацію та стійкість параметрично збуджених систем. Огляд статті Nabir [115] дає уявлення про дослідження сендвіч-структур. Статті Nakra [159-161] широко розглядають аспект контролю коливань з в'язкопружними матеріалами.

В останні роки використання багат шарових пластин як структурних елементів значно зросло. Завдяки своїй легкій вазі та високій жорсткості вони широко використовуються у багатьох інженерних додатках, таких як літаки, ракети, суднобудування, автопром, будівництво. Ефективне використання таких ламінатів вимагає більш складного аналізу при зовнішньому навантаженні, ніж раніше досліджувалися одношарові пластини.

Геометричний нелінійний аналіз складових пластин, що включає нелінійний згин та великі амплітудні коливання, великі прогини, значно складніші, ніж для одношарових пластини. Це пояснюється тим, що необхідно враховувати властивості матеріалу, посиленого волокном та геометрію ламінування (орієнтація на волокна та послідовність складання).

Композитні структури можуть мати складну геометричну форму, що обумовлено метою використання та способів виготовлення. Крім того, можуть бути будь-які типи отворів для збирання елементів в цілісну конструкцію (для закріплення болтами, наприклад) та для проходження кабелів та механізмів контролю, для огляду, обслуговування та приєднання до інших частин. На малюнку (рис. 1) зображено гвинтокрил, який зібрано з композитних структур, що передбачає отвори для скріплення, приєднання одних частин до інших. Окремим класом задач можна виділити дослідження багат шарових пластин з отворами, бо напруги та деформації є найсильнішими навколо цих отворів. Дослідження ускладнюються врахуванням механічних властивостей кожного шару, геометричною нелінійністю, геометрією об'єкту, схемами розташування шарів, видами навантажень.

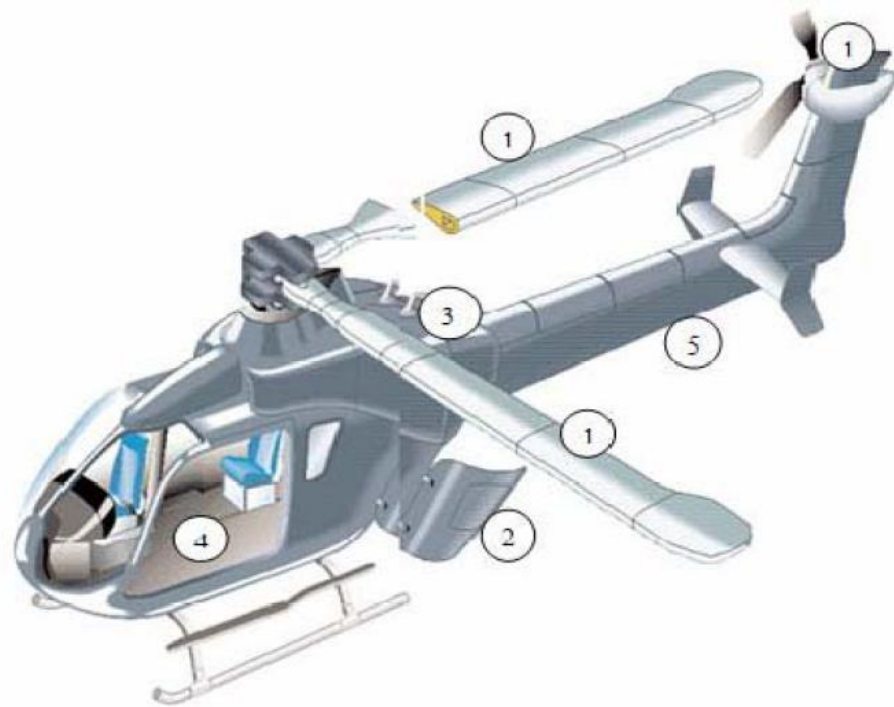


Рис. 1. Гвинтокрил складається з таких частин, що представляють собою багат шарові пластини: 1. роторні леза, 2. головні та вантажні двері, 3. панелі фюзеляжу, 4. фюзеляж, 5. хвостовий відділ.

Існуючі роботи з дослідження геометрично нелінійних коливань та статичної і динамічної стійкості пластин можна умовно розділити на декілька груп:

- багат шарові пластини канонічних форм (коло, прямокутник, трикутник, тощо);
- багат шарові пластини канонічних форм з отворами;
- багат шарові пластини з тріщинами;
- скошені багат шарові пластини з отворами чи без.

Більшість публікацій стосується досліджень пластин прямокутної форми. Коливання тришарових кругових пластин досліджувалися в роботах Sherif Н.А. [180-181] та Du Guo-jun [106-108]. R.Sircar в роботі [184] для пластин у вигляді правильного трикутника та рівнобедреної трапеції, жорстко защемлених по контуру, було визначені періоди коливань в залежності від амплітуди та значення коефіцієнта постелі.

Наведемо деякі з робіт, в яких розглядаються пластини з отворами.

Akbarov, Yahnioğlu and Babuscu Yesil [88] вивчали примусові коливання статично напруженої прямокутної пластини з ортотропного матеріалу, яка підтримується з усіх боків, а прямокутний отвір знаходиться з краю. Динамічний аналіз виконується за допомогою тривимірного методу скінчених елементів.

Bailer, Hicks [93] розробили теоретичний метод визначення поведінки навантажених пластин, повністю перфорованих з тісно розташованими круглими отворами. Метод рішення був підтверджений експериментальною роботою. За допомогою програмного забезпечення були отримані комплексні рішення для розподілу напруги на пластинах з отворами.

Stahl, Keer [186] проаналізував власні значення прямокутних пластин з тріщинами. Проблеми коливань та зсуву вирішуються для пластини з тріщиною, що виходить з одного краю, і для пластини з внутрішньою тріщиною, розташованою в центрі. Постановка задачі зводиться до однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Чисельні результати для частот та розподілів моментів порівнюються з роботою інших дослідників.

В роботі Jwalamalini, Sundaravadivelu, Vendhan, Ganapathy [131] стійкість вільнооперної квадратної пластини з отворами під навантаженням в площині аналізується за допомогою програми скінчених елементів BUCSAP (Програма структурного аналізу згладжування). Отвори розглянуті прямокутні та розташовані по центру.

Cheng [99] отримав формальний розв'язок задачі дифракції пластини з круговими отворами, геометрія розташування є довільною. Числові результати для двох однакових дірок представлені детально.

Myung Jo Jhung, Young Hwan Choi та Yongho Ryu [157] запропонували аналіз коливань круглої пластини з отвором, зануреним у рідину, вивчали власні частоти та форми коливань пластини.

Liew, Ng та Kitipornchai [147] зробили полуаналітичний аналіз вільних коливань пластин з розривами в поперечному перерізі та змінною товщиною. Процедура Ритца використовується для отримання частот і форм коливань.

Bicos, George, Springer [96] було виведено рівняння, що описують вільні коливання багат шарових пластин і оболонок, виготовлених з волокнами армованих органічних матричних композитів. Метод кінцевих елементів застосовувався для одержання рішень цих рівнянь. Написано програмне забезпечення, яке може бути використано для розрахунку власних частот, форм коливань прямокутних пластин, циліндрів та циліндричних панелей з вільними, затиснутими або вільно опертими краями, а також з круговими вирізами або без них. Було розраховано власні частоти та форми коливань для ізотропних та композитних пластин, циліндрів та циліндричних панелей, та порівняно з попередніми аналітичними, чисельними та експериментальними результатами. Результати цього дослідження добре узгоджується з тими, що повідомляються попередніми дослідниками.

Schlack [178] застосував метод Рэлея-Ритца для аналізу зсувного поведінки простої квадратної пластини з круглим отвором. Martin [151] дослідив вигин квадратних одноосних компресійних навантажених композитних пластин, які мають виріз. Marshall I.H., Little W.El., Tayeb M.M. та Williams J. [152] представили результати для вигину особливо ортотропних прямокутні пластини з поздовжнім ексцентричним круговим вирізом. Nemeth Michael, P. Stein, Manuel Johnson, Eric R. [163] підсумували приблизний аналіз і дали додаткові аналітичні результати для квадратів, зокрема ортотропних графіто-епоксидних пластин, що мають центральний круговий виріз. Lee [146] розглянув поведінку зсуву квадратної пластинки з центральною дірою круга методом кінцевих елементів. Унікальна поведінка послідовної ламінованої композиційної плитки, кожен із центральним круговим вирізом, була представлена Lin Chien- Chang і Kuo Ching- Suong [148]. Ко William [133] вивчив механічну та термоударність поведінки прямокутних сталевих пластин з центральним круговим та квадратним вирізом. Rouse Marshall [172] представив

експериментальне дослідження пошкодженої та пошкодженої поведінки квадратних графітово-епоксидних та графітових термопластичних пластин, завантажених в зсув. Yasui Yoshiaki [188] представив дослідження поведінки ламінованих композитних плит з центральним вирізом, який був отриманий методом скінчених елементів. Jameel H. Therib [129] вивчав поведінку пластини з круглим отвором.

В роботі Harsh Kumar Bhardwaj, Jyoti Vimal та Avadesh Kumar Sharma [117] представлений аналіз коливань композитної багат шарової пластини з отвором у вигляді паралелограму методом кінцевих елементів (FEM) на основі теорії першого порядку (FSDT).

Yogesh G. Jadhav та P. V. Deshmukh в роботі [189] поєднане експериментальне та чисельне дослідження вільних коливань епоксидних композитних пластин зі скла, що мають круглий, прямокутний, трикутний чи еліптичний отвір з однаковою площею. Результатами дослідження є рекомендації, яка форма отвору є більш доцільною та безпечною з точки зору застосування.

Hani Aziz Ameen [116] вивчав структурну поведінку композитних ламінованих пластин (E-glass polyester plate) з вирізами, визначаючи критичні навантаження на вигин. Він робив скруглення кутів квадратного вирізу для розрахунку коливань стиснутих пластин за допомогою програми ANSYS, програми зі скінченими елементами для аналізу критичного навантаження на згин. Експериментальне дослідження проводилося на багатьох зразках композиційних матеріалів з волокнистих армованих пластмасових матеріалів з різними носіями, з різною кількістю шарів і круглим або прямокутним отворами, зразок яких виготовлявся за допомогою E-glass та поліестеру.

У роботі Mohammed Ismael Hamed [156] досліджено вплив кругового отвору крила повітряного судна на власні частоти методом кінцевих елементів з використанням програмного забезпечення ANSYS (рис. 2). Параметри, які були вивчені, - це розмір отвору, розташування отвору вздовж крила, та кількості

отворів. Результати показали, що наявність отвору викликало невелике зменшення власних частот.

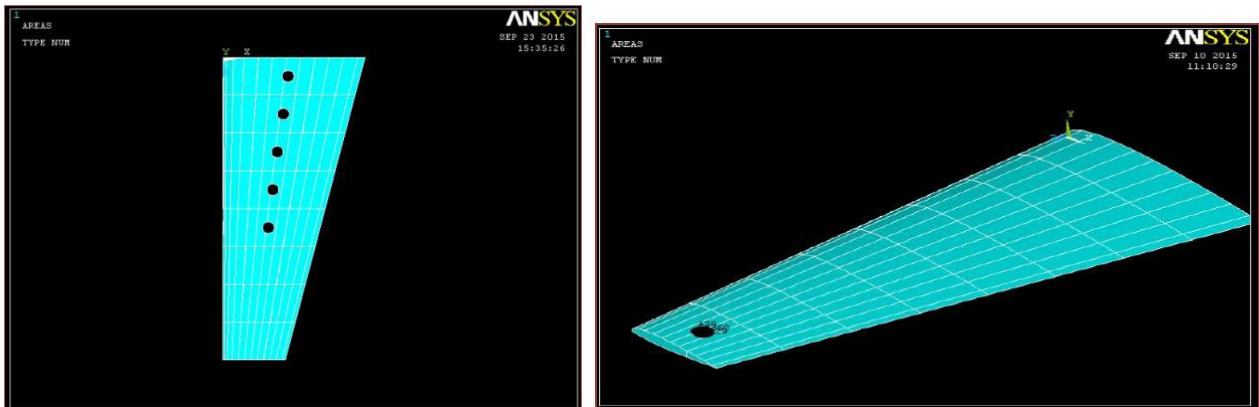


Рис. 2. Дослідження кругового отвору крила повітряного судна в роботі [156].

Lakshmi Narayana, Krishnamohana Rao R. та Vijaya Kumar в роботі [145] було проведено чисельне дослідження з використанням методу кінцевих елементів (FEM) для вивчення впливу співвідношення сторін пластини та розташування вирізу на поведінку вигину шістнадцятишарової квазіізотропної графітово-епоксидної симетрично ламінованої прямокутної композиційної пластини $[0^\circ / +45^\circ / -45^\circ / 90^\circ]_{2s}$ з квадратним і прямокутним вирізом, під дією навантаження, що діє за лінійним законом.

Щодо класу робіт, де досліджуються скошені багат шарові пластини з отвором чи без нього, то таких робіт досить багато. Виконано порівняння між результатами, одержаними в різних роботах С.V. Srinivasa, Y.J. Suresh, W.P. Prema Kumar. в роботі [185]. Також скошені багат шарові пластини досліджуються в багатьох роботах, наприклад, Ganapathi M., Prakash T. та Sundararajan [112], Hsuan-The, Hu. Chia-Hao Yang та Fu-Ming Lin. [120], Partha Dey, та Singha M.K. [166], Chakrabarti A., та Sheikh A.H. [98], Prakash T., Singha M.K. та Ganapathi M. [112] Civalek O. [100] Rupesh D. and Singha M.K. [173] та іншими.

В роботі Partha Dey та M.K. Singha [166] досліджуються динамічна стійкість скошеної багат шарової пластини під періодичним навантаженням, з використанням методу кінцевих елементів. Межі регіонів нестабільності

отримані за методом Болотіна в залежності від впливу різних параметрів, таких як кут нахилу пластини, орієнтація волокна та статичне навантаження на серединну площину.

Kode Srividya та інші [134] визначають перші п'ять власних частот чотиришарової жорсткозацімленої по зовнішньому периметру скошеної пластини з круглим вільним отвором.

З указанного вище випливає, що, незважаючи на велику кількість існуючих робіт, присвячених дослідженню статичної та динамічної стійкості багат шарових пластин, дана задача все ще потребує подальшого дослідження. У зв'язку з цим, розробка нових чисельно-аналітичних методів дослідження стійкості багат шарових пластин під дією періодичного навантаження, що дозволяють враховувати складну форму плану, різні крайові умови, тобто неоднорідний докритичний стан пластини, є актуальною.

1.2. Застосування методу R-функцій до дослідження стійкості та геометрично нелінійних коливань багат шарових пластин складної форми

Із огляду праць, в котрих проводилось дослідження пластин складної форми, можна зробити висновок, що, здебільшого, дослідженні вільнооперті пластини прямокутної форми з вільними отворами. Це обумовлено складністю розрахунків, що мають враховувати складну геометричну форму та неоднорідний докритичний стан пластини в цілому. Тому виникла задача розробки чисельно-аналітичних, особливо безсіткових (meshless) методів, що дозволяють враховувати неоднорідний докритичний стан багат шарових пластин складної форми та різні способи закріплення, тобто методів, які зможуть точно враховувати крайові умови.

Метод R-функцій [67], назва якого має міжнародну аббревіатуру RFM, був запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачевим у 70-80 роках минулого сторіччя. Пізніше, він зазнав широкого використання до розв'язання

задач теорії пластин та оболонок, тому на даний момент є багато публікацій за цією тематикою.

Метод застосовано як для розв'язання задач згину та лінійних коливань, так і для розв'язання задач геометрично нелінійних коливань пластин та оболонок. Огляд праць с 1967 по 1998 рік можна знайти в монографіях [67, 70, 71, 75] та статті [68], а з 1999 по 2016 роки – в оглядовій роботі [138].

В монографії [43] описано методи та зібрані основні результати дослідження лінійних задач теорії пластин та пологих оболонок зі складною формою плану та різними крайовими умовами. Представлено рішення лінійних задач згину, знаходження власних форм і частот поперечних коливань ортотропних пластин та пологих оболонок зі складною формою плану.

Щодо дослідження стійкості за допомогою методу R-функцій, то цей розділ досліджень розпочато з фундаментальної роботи [67]. Дослідження одношарових пластин на статичну стійкість було запропоновано авторами Рвачев В.Л., Курпа Л.В., Ліннік А.Б. та Мазур О.С. [23-25, 28, 53-57]. В цих роботах розглянуто переважно пластини складної форми з ізотропного матеріалу.

Далі дослідження торкнулися динамічної стійкості одношарових пластин під дією періодичного навантаження. При цьому розроблено алгоритм, що базується на методі R-функцій, та застосовується до пластин складної форми плану і різних видів крайових умов. Курпа Л.В. та Мазур О.С. в роботах [32, 34, 137] розроблено алгоритм побудови областей динамічної стійкості \ нестійкості для ортотропних пластин складної геометричної форми; в роботі [28] запропоновано метод дослідження нелінійних коливань пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного навантаження; в роботі [33] представлено метод дослідження параметричних коливань в випадку, коли рівняння руху представлено в мішаній формі; в роботі [31] запропоновано алгоритм дослідження параметричних коливань пластин при багатомодовій апроксимації прогину.

В монографії [42] крім розв'язання задач стійкості та параметричних коливань ортотропних пластин, запропоновано алгоритм і розв'язані задачі стійкості та параметричних коливань багатошарових пластин.

Як показав огляд літератури, метод R-функцій може бути застосовано до розв'язання широкого класу як лінійних, так и нелінійних задач теорії пластин. Головною перевагою RFM є можливість на аналітичному рівні враховувати складну форму та різноманітні умови закріплення. Але задачі нелінійних коливань багатошарових пластин залишаються недостатньо дослідженими, тому розробка алгоритмів їх розв'язку, за допомогою метода R-функцій залишається актуальною.

1.3. Постановка актуальних задач досліджень

Виходячи з представленого огляду літератури, можна зробити наступні висновки:

- серед представлених публікацій існує досить велика кількість робіт, присвячених розробці методів дослідження параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин з прямокутною формою плану,

- існує певна кількість публікацій, в яких розглядаються статична та динамічна стійкість багатошарових прямокутних пластин з прямокутними або круглими отворами,

- методи, викладені в цих роботах, переважно дозволяють досліджувати тільки деякі види вільно опертих пластин з вільними отворами,

- робіт, в яких враховано докритичний напружений стан пластини, практично немає.

Таким чином, дослідження нелінійних коливань багатошарових пластин під дією періодичного навантаження є актуальною проблемою. Метою даної роботи є розробка аналітично-числового методу дослідження геометрично нелінійних коливань багатошарових пластин зі складною формою плану при різних крайових умовах та з урахуванням докритичного стану пластини.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- виконати варіаційні постановки задач для розрахунку докритичного стану багатошарових пластин складної форми симетричної та антисиметричної структури пакету шарів в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку типу С. Тимошенко;
- розробити алгоритми розв'язання лінійних задач про коливання та стійкість навантажених в серединній площині багатошарових пластин;
- розробити алгоритми визначення критичного навантаження багатошарових пластин з урахуванням неоднорідного докритичного стану;
- розробити алгоритм зведення вихідної нелінійної системи руху до звичайного нелінійного диференційного рівняння, та побудувати варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язки яких дозволяють реалізувати запропонований алгоритм;
- чисельно реалізувати метод Болотіна В.В. для дослідження параметричних коливань багатошарових пластин під дією періодичного навантаження;
- чисельно реалізувати метод знаходження границь областей динамічної нестійкості та амплітуд усталених коливань в зонах резонансу;
- розвинути конструктивні засоби теорії R-функцій для даного класу задач (побудувати структури розв'язку, що задовольняють різним крайовим умовам);
- розробити програмне забезпечення в рамках системи POLE-RL та провести тестування запропонованого підходу і програмного забезпечення;
- застосувати розроблений метод до розв'язання нових задач дослідження статичної та динамічної стійкості, а також параметричних коливань багатошарових пластин складної геометричної форми при різних видах крайових умов та надання практичних рекомендацій.

1.4. Висновки до розділу 1

1. Виконано огляд літератури, що присвячена дослідженню нелінійних коливань, статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин.
2. Проаналізовано роботи, в яких було використано теорію R-функцій для розв'язання статичних та динамічних задач теорії пластин.
3. З огляду існуючої літератури зроблено висновки про стан проблеми та існуючі методи її розв'язання.
4. Визначено клас задач, для розв'язання яких необхідно розробити нові ефективні аналітико-числові методи.
5. Сформульовано постановки нових задач досліджень для аналізу статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми під дією періодичного навантаження.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН НАВАНТАЖЕНИХ В СЕРЕДИННІЙ ПЛОЩИНІ

2.1 Математична постановка задачі – загальні положення

Розглянемо багатошарову тонку пластину постійної товщини h , що складається із n однорідних шарів, в припущенні відсутності їх проковзування та деламінації. Пластина знаходиться під дією стискаючих зусиль, що визначаються як:

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t, \quad (2.1)$$

де p_0 і p_t - це статична та динамічна частини навантаження відповідно, θ – збуджуюча частота діючого навантаження.

Серединну площину пластини будемо обирати таким чином, щоб площина $z=0$ розділяла пластину на дві рівні частини по висоті, як зображено на рисунку 3.

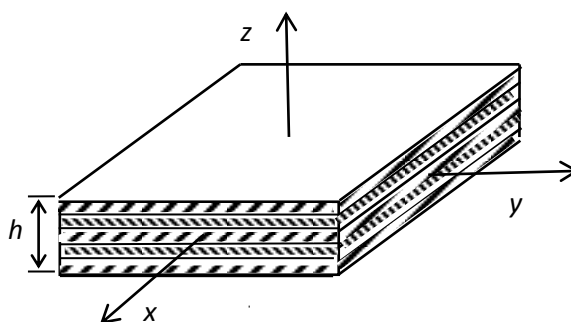
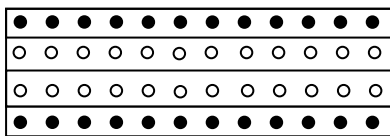


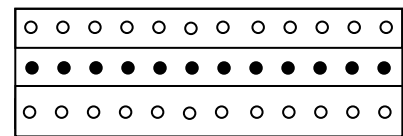
Рис. 3. Загальний вигляд багатошарової пластини

В роботі виконана математична постановка задачі для двох теорій – класичної та уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка. Розглянемо пластини, що відносяться до найбільш розповсюджених типів багатошарових пластин - утворених з шарів одно направленого матеріалу. Це можуть бути

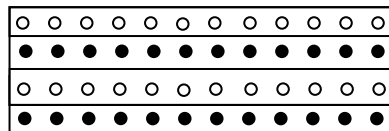
пластини ортогонально-армовані, коли вісі орієнтації будуть чергуватися, чи можуть кути повороту вісі змінюватися за іншими правилами. Пластина може мати симетричну будову, тобто структура пакету шарів симетрична до серединної площини (наприклад, $0^\circ \setminus \theta^\circ \setminus \theta^\circ \setminus 0^\circ$, $-\theta^\circ \setminus \theta^\circ \setminus \theta^\circ \setminus -\theta^\circ$, або $0^\circ \setminus \theta^\circ \setminus 0^\circ$, тощо), а може мати антисиметричну будову, коли структура пакету шарів розташована антисиметрично до серединної площини (наприклад, $0^\circ \setminus \theta^\circ \setminus 0^\circ \setminus \theta^\circ$). Типи пластин, що розглядаються в роботі, схематично наведено на рисунку 4. Звісно, кут нахилу волокон може бути не обов'язково перпендикулярним до вісей. Чорними та білими кружечками позначені просто два різних кута нахилу волокон.



Пластини симетричної структури пакету з парною загальною кількістю шарів n



Пластини симетричної структури пакету з непарною загальною кількістю шарів n



Пластини антисиметричної структури пакету шарів

Рис. 4. Типи пластин в залежності від будови

Таким чином, в роботі розглядається декілька класів задач, які зведено на рисунку 5. Математична постановка кожного класу задач має свої особливості.

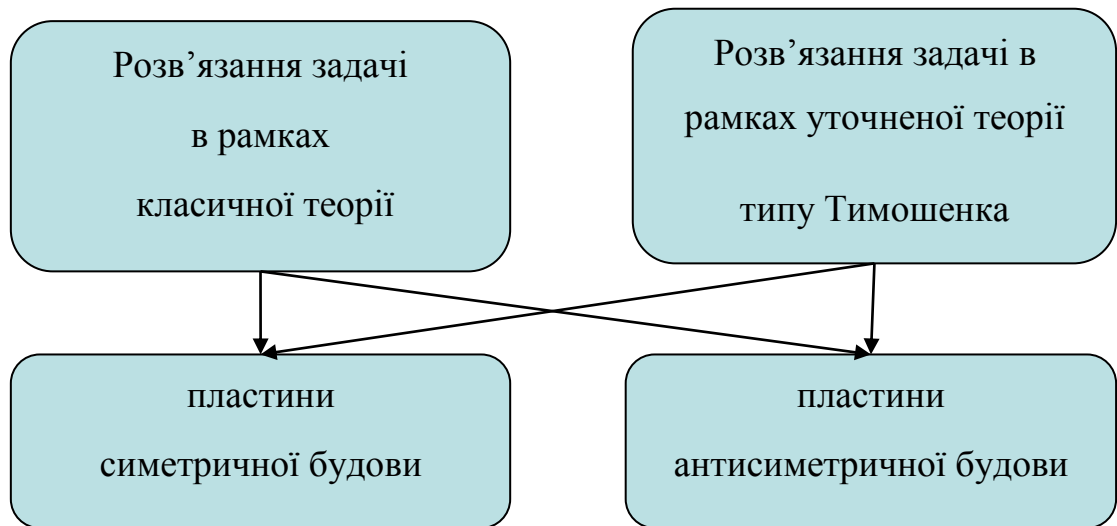


Рис. 5. Класи задач, що досліджуються.

Математична постановка задачі в рамках класичної теорії виконана в параграфі 2 другої глави (2.2.1 та 2.2.2 для пластин симетричної та несиметричної будови відповідно). Постановка задачі в рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка виконана в параграфі 3 другої глави (2.3.1 та 2.3.2 для пластин симетричної та несиметричної будови відповідно). Постановка задачі в загальному вигляді, з урахуванням класу задач, запропоновано в параграфі 4 цієї глави. Система рівнянь завжди доповнюється крайовими умовами, деякі варіанти яких наведені в параграфі 5.

2.2 Математична постановка задачі в рамках класичної теорії.

В сучасній інженерній практиці для дослідження тонких багаточарових пластин часто використовують класичну теорію, яка забезпечує задовільні для практики результати у разі, коли $\frac{1}{20} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$, де a - характерний розмір.

Постановка задачі в рамках класичної теорії ґрунтується на наступних гіпотезах:

- 1) пластина навантажена у своїй площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- 2) докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо;
- 3) згин пластини моделюється за допомогою гіпотез Кірхгофа-Лява;
- 4) всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру λ .

В рамках цих припущень, компоненти деформацій можуть бути представлені як [42]

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + z\chi_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + z\chi_{22}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + z\chi_{12}, \quad (2.2)$$

де $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0$ - деформації пластини в серединній площині. Враховуючи, що далі ми будемо розглядати прогин серединної площини, який може бути одного порядку з товщиною, деформації $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0$ обчислюються наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{22}^0 &= \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

згинальні деформації кривизни $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ визначаються за допомогою формул:

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.4)$$

тут u^0, v^0, w^0 - величини переміщень пластини в серединній площині в напрямках осей Ox, Oy, Oz відповідно.

Для подальших викладок, знадобляться лінеаризовані деформації, тобто деформації $\varepsilon_{11}^L, \varepsilon_{22}^L, \varepsilon_{12}^L$, що обчислюються наступним чином:

$$\varepsilon_{11}^L = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_{22}^L = \frac{\partial v^0}{\partial y}, \varepsilon_{12}^L = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Нульові індекси далі опустимо.

2.2.1 Пластини симетричної будови.

Вирази для зусиль та моментів у випадку багат шарових пластин симетричної будови визначаються по відомим формулам [3].

$$\begin{aligned} N_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{16}\varepsilon_{12}, \\ N_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{26}\varepsilon_{12}, \\ N_{12} = N_{21} &= C_{16}\varepsilon_{11} + C_{26}\varepsilon_{22} + C_{66}\varepsilon_{12}, \\ M_{11} &= D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} + D_{16}\chi_{12}, \\ M_{22} &= D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + D_{26}\chi_{12}, \\ M_{12} = M_{21} &= D_{16}\chi_{11} + D_{26}\chi_{22} + D_{66}\chi_{12}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

або в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

якщо ввести позначення

$$\vec{N} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T, \vec{M} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T, \quad (2.8)$$

$$\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T, \vec{\chi} = \{\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}\}^T \quad (2.9)$$

то залежності (2.7) можна записати більш компактно, як:

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

або $\vec{N} = [C]\{\varepsilon\}$, $\vec{M} = [D]\{\chi\}$,

де матриці C і D мають вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Жорсткісні характеристики C_{ij}, D_{ij} ($ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$), які співпадають з елементами матриць C і D визначаються наступним чином [3]:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz. \quad (2.12)$$

де B_{ij}^s – пружні сталі s -го шару пластини.

Якщо шари пластини виготовлені з ортотропного матеріалу, головні напрямки пружності яких не співпадають з напрямками осей координат x і y , тоді пружні постійні B_{ij} кожного шару визначаються за формулами, що наведено нижче [3]:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \tilde{B}_{11} \cos^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \sin^4 \theta, \\ B_{22} &= \tilde{B}_{11} \sin^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \cos^4 \theta, \\ B_{12} &= \tilde{B}_{12} + (\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ B_{16} &= \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \sin^2 \theta - \tilde{B}_{11} \cos^2 \theta + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta, \\ B_{26} &= \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \cos^2 \theta - \tilde{B}_{11} \sin^2 \theta - (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta, \\ B_{66} &= \tilde{B}_{66} + [\tilde{B}_{22} + \tilde{B}_{11} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де, в свою чергу, пружні сталі \tilde{B}_{ij} визначаються як:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1\nu_2)} = \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, \\ \tilde{B}_{66} &= G_{12}, \quad \tilde{B}_{44} = G_{23}, \quad \tilde{B}_{55} = G_{13}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де E_1, E_2 – модулі пружності, G_{12} – модуль зсуву, ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона.

Рівняння руху пластини при відсутності об'ємних сил мають наступний вигляд [51]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} = \\ = \lambda \left(N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.15)$$

де $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$ - зусилля, які відповідають значенню параметра $\lambda = 1$, а

$$m_1 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(s)} dz, \quad \rho_0^{(s)} - \text{щільність } s\text{-того шару.}$$

Рівняння руху (2.15) для пластин симетричної будови можна представити в операторній формі:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v = -Nl_1(w) + m_1 u_{,u}, & (2.16) \\ L_{21}u + L_{22}v = -Nl_2(w) + m_1 v_{,u}, & (2.17) \\ L_{33}w = -Nl_3(u, v, w) - \Delta_d m_1 \frac{\partial w}{\partial t} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & (2.18) \end{cases}$$

В останньому рівнянні (2.18) додано доданок $\Delta_d m_1 \frac{\partial w}{\partial t}$, який відповідає демпфуванню системи з коефіцієнтом демпфування Δ_d .

Лінійні оператори L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) визначаються як

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (2.19)$$

$$L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (2.20)$$

$$L_{12} = L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (2.21)$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.22)$$

Можна довести, що вирази для правих нелінійних частин $Nl_k(w)$ ($k=1,2,3$) системи рівнянь (2.16)-(2.18) мають наступний вигляд:

$$Nl_1 = \frac{\partial w}{\partial x} L_{11} w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{12} w, \quad (2.23)$$

$$Nl_2 = \frac{\partial w}{\partial x} L_{12} w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{22} w, \quad (2.24)$$

$$Nl_3 = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.25)$$

Враховуючи вирази (2.6) для N_{11}, N_{22}, N_{12} , представимо вираз $Nl_3(w)$ в більш розгорнутому вигляді:

$$Nl_3(u, v, w) = \varepsilon_{11} L_4 w + \varepsilon_{22} L_5 w + \varepsilon_{12} L_6 w; \quad (2.26)$$

або

$$Nl_3(u, v, w) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) L_4 w + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) L_5 w + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) L_6 w; \quad (2.27)$$

де оператори L_4, L_5, L_6 мають вигляд:

$$L_4 = C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.28)$$

$$L_5 = C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.29)$$

$$L_6 = C_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2C_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.30)$$

2.2.2. Пластини антисиметричної будови.

У випадку пластин антисиметричної будови вирази для зусиль \vec{N} , та моментів \vec{M} , мають більш складний вигляд, ніж (2.6), а саме:

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{16}\varepsilon_{12} + K_{11}\chi_{11} + K_{12}\chi_{22} + K_{16}\chi_{12}, \\
 N_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{26}\varepsilon_{12} + K_{12}\chi_{11} + K_{22}\chi_{22} + K_{26}\chi_{12}, \\
 N_{12} = N_{21} &= C_{16}\varepsilon_{11} + C_{26}\varepsilon_{22} + C_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\chi_{11} + K_{26}\chi_{22} + K_{66}\chi_{12}, \\
 M_{11} &= K_{11}\varepsilon_{11} + K_{12}\varepsilon_{22} + K_{16}\varepsilon_{12} + D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} + D_{16}\chi_{12}, \\
 M_{22} &= K_{12}\varepsilon_{11} + K_{22}\varepsilon_{22} + K_{26}\varepsilon_{12} + D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + D_{26}\chi_{12}, \\
 M_{12} = M_{21} &= K_{16}\varepsilon_{11} + K_{26}\varepsilon_{22} + K_{66}\varepsilon_{12} + D_{16}\chi_{11} + D_{26}\chi_{22} + D_{66}\chi_{12},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & K \\ K & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix}, \tag{2.32}$$

$$\vec{N} = [C]\{\varepsilon\} + [K]\{\chi\}, \quad \vec{M} = [K]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\},$$

матриці C і D мають вигляд, як і раніше (2.11):

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

а K – матриця з наступними елементами:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Приведені жорсткостні коефіцієнти визначаються за формулами:

$$(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z, z^2) dz, \tag{2.34}$$

Відносні деформації розтягу і зсуву $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$ та згинальні деформації кривизни $\chi = (\chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{22})$ середині поверхні визначаються так само, як і в випадку пластин симетричної будови, тобто за формулами (2.3-2.4).

В даному випадку рівняння руху в зусиллях мають такий саме вигляд, як для пластин симетричної будови (2.15), а в переміщеннях рівняння руху ускладнюються, та мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = Nl_1(w) + m_1u_{,u}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = Nl_2(w) + m_1v_{,u}, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = -Nl_3(u, v, w) + m_1w_{,tt} - \varepsilon_d m_1 h w_{,t}, \end{cases} \quad (2.35)$$

де оператори $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, L_{33}$, а також вирази для нелінійних членів $Nl_i(w)$, ($i = 1, 2$) визначаються, як і раніше (2.19-2.24), але для зручності, приведемо їх знову:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \\ Nl_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} L_{11}w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{12}w, \\ Nl_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} L_{12}w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{22}w. \end{aligned}$$

Решта операторів визначається наступним чином:

$$-L_{13} = L_{31} = K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}, \quad (2.36)$$

$$-L_{23} = L_{32} = K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \quad (2.37)$$

А $Nl_3(w)$, який визначається за формулою

$$Nl_3 = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

в розгорнутому вигляді можна представити як:

$$\begin{aligned}
 Nl_3(u, v, w) = & \left(u_{,x}^0 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) L_4 w + \left(v_{,y}^0 + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) L_5 w + \left(u_{,y}^0 + v_{,x}^0 + w_{,x} w_{,y} \right) L_6 w - \\
 & - w_{,x} L_{31} w - w_{,y} L_{32} w + 2(K_{12} - K_{66}) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

2.3. Математична постановка задачі в рамках уточненої теорії першого порядку.

Для пластин середньої товщини, тобто якщо $\frac{1}{5} \leq \frac{h}{a} \leq 5$, де a - характерний розмір пластини, використання класичної теорії може призвести до великих похибок, які породжуються нехтуванням деформації зсуву. Однією з найбільш поширених та досить простих теорій, яка враховує деформації зсуву, є уточнена теорія першого порядку типу Тимошенка, що ґрунтується на гіпотезі прямої лінії: прямолінійний, нормальний до координатної площини елемент після деформації залишається прямолінійним, але не перпендикулярним до деформованої поверхні.

Постановка задачі в рамках уточненої теорії ґрунтується на наступних гіпотезах:

- 1) пластина навантажена у своїй площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- 2) докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо;
- 3) згин пластини моделюється за допомогою гіпотези прямої лінії;
- 4) всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру λ .

Переміщення довільної точки u, v, w визначається наступним чином

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + z \cdot \psi_x, \\
v &= v_0 + z \cdot \psi_y, \\
w &= w_0,
\end{aligned}
\tag{2.39}$$

де ψ_x, ψ_y - кути повороту прямолінійного елемента.

Вирази для кутів повороту мають вигляд:

$$\psi_x = \beta_x - w_{,x}, \quad \psi_y = \beta_y - w_{,y}, \tag{2.40}$$

де β_x, β_y - «інтегральні» кути повороту відрізка нормалі.

В рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка рівняння руху мають вигляд:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \tag{2.42}$$

$$N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0; \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_2 - m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0; \tag{2.45}$$

де m_1 визначається, як і раніше, а $m_2 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(s)} z^2 dz$; $\rho_0^{(s)}$ щільність матеріалу

S-того шару.

Компоненти деформацій $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ мають такий саме вигляд, як і раніше (2.3), а $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ та $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ визначаються як [42]

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{13} = (w_{0,x} + \psi_x), \quad \varepsilon_{23} = (w_{0,y} + \psi_y), \tag{2.46}$$

$$\chi_{11} = \psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}). \tag{2.47}$$

Перерізуючи сили обчислюються за формулами:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{54} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}, \quad (2.48)$$

де

$$C_{ij} = K^2 \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s dz, \quad i, j = 4, 5. \quad (2.49)$$

де K^2 – корегуючий множник зсуву, величину якого частіше всього приймають рівною $\frac{5}{6}$. В загальному випадку, коли вісі анізотропії не співпадають з напрямленнями осей Ox і Oy пружні константи s -того шару $B_{ij}^{(s)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) обчислюються через пружні сталі $\tilde{B}_{ij}^{(s)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) по відомим формулам (2.13).

Зауважимо, що далі приймається $C_{54} = C_{45}$.

2.3.1. Пластини симетричної будови.

У випадку пластин симетричної будови жорсткостні коефіцієнти $K_{ij}, i, j = 1, 2, 6$ приймають нульове значення. Тому частина операторів зануляється. Зусилля та моменти будуть визначатися, як для пластин антисиметричної будови в рамках класичної теорії (2.10), а саме

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix}.$$

Компоненти деформацій визначаються за формулами (2.46-2.47).

Тоді система (2.41-2.45) в переміщеннях для багатошарових пластин симетричної будови приймає вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11}u + L_{12}v = -Nl_1(w) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}u + L_{22}v = -Nl_2(w) + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = -Nl_3(u, v, w) - \varepsilon_d \rho h w_{,t} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ L_{43}w + (L_{44} - C_{55})\psi_x + (L_{45} - C_{54})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ L_{53}w + (L_{54} - C_{45})\psi_x + (L_{55} - C_{44})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Диференціальні оператори $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ співпадають з однойменними операторами для пластин симетричної будови, а оператори $L_{33}, L_{34}, L_{35}, L_{43}, L_{44}, L_{45}, L_{53}, L_{55}$ та вирази для нелінійних доданків $Nl_i, i = 1, 2, 3$ визначаються за наступними формулами:

$$L_{33} = C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{45} + C_{54}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (2.54)$$

$$L_{34}(C_{ij}) = C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y}; \quad (2.55)$$

$$L_{35}(C_{ij}) = C_{54} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y}; \quad (2.56)$$

$$L_{43}(C_{ij}, K_{ij}) = -L_{34}(C_{ij}) = -\left(C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad (2.57)$$

$$L_{44}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.58)$$

$$L_{45}(C_{ij}, D_{ij}) = L_{54}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.59)$$

$$L_{53}(C_{ij}, K_{ij}) = -L_{35}(C_{ij}, K_{ij}) = -\left(C_{54} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2.60)$$

$$L_{55}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.61)$$

Nl_1 та Nl_2 мають вигляд як і раніше (2.23 – 2.24)

А $Nl_3(w)$, який визначається за формулою (2.25) в розгорнутому вигляді можна представити як:

$$Nl_3(u, v, w) = \varepsilon_{11}L_4w + \varepsilon_{22}L_5w + \varepsilon_{12}L_6w \quad (2.63)$$

де оператори L_4, L_5, L_6 визначаються як

$$L_4 = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad (2.64)$$

$$L_5 = C_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad (2.65)$$

$$L_6 = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \quad (2.66)$$

2.3.2 Пластини антисиметричної будови.

Для пластин антисиметричної будови при застосуванні уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка зусилля та моменти будуть визначатися, як для пластин антисиметричної будови в рамках класичної теорії (2.32), а саме

$$\begin{Bmatrix} \overline{N} \\ \overline{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & K \\ K & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix}.$$

Але деформації $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ та $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ визначаються за формулами (2.46-2.47), тобто

$$\varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{13} = (w_{0,x} + \psi_x), \varepsilon_{23} = (w_{0,y} + \psi_y),$$

$$\chi_{11} = \psi_{x,x}, \chi_{22} = \psi_{y,y}, \chi_{12} = (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}).$$

Систему рівнянь руху для даного випадку запишемо в переміщеннях:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = -Nl_1(w) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = -Nl_2(w) + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = -Nl_3(u, v, w) - \Delta_d \rho h w_{,t} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Диференціальні оператори L_{ij} ($i, j = \overline{1,5}$) и Nl_i ($i = \overline{1,3}$) співпадають з виразами (2.51-2.61), Δ_d , як і раніше – коефіцієнт демпфування, а Nl_3 визначається як:

$$Nl_3(u, v, w) = -(\varepsilon_{11}L_4w + \varepsilon_{22}L_5w + \varepsilon_{12}L_6w + \chi_{11}L_7w + \chi_{22}L_8w + \chi_{12}L_9w); \quad (2.68)$$

де

$$\begin{aligned} L_7 &= K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2K_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ L_8 &= K_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2K_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ L_9 &= K_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2K_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$Nl_4(w) = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{41}w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{42}w \right)$$

$$Nl_5(w) = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{51}w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{52}w \right)$$

2.4 Об'єднане представлення математичної постановки для класичної та уточненої теорії типу теорії С. П. Тимошенко

Для того, щоб узагальнити всі чотири математичні постановки, що були представлені вище, введемо параметри, які будуть приймати лише 2 значення і

будуть грати роль умовного «перемикача». В залежності від того, для якого класу задач потрібні формули, треба підставити значення «перемикачів» - предикатів, які є індикаторними функціями:

$$\Delta = \begin{cases} 0 - \text{для класичної теорії} \\ 1 - \text{для уточненої теорії} \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\delta = \begin{cases} 0 - \text{для симетричних пластин} \\ 1 - \text{для антисиметричних пластин} \end{cases} \quad (2.71)$$

Тоді компоненти деформацій можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \Delta \cdot (w_{0,x} + \psi_x), \quad \varepsilon_{23} = \Delta \cdot (w_{0,y} + \psi_y), \quad (2.73)$$

$$\chi_{11} = \Delta \cdot \psi_{x,x} - (1 - \Delta) \cdot \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.74)$$

$$\chi_{12} = \Delta \cdot (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - (1 - \Delta) \cdot \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.75)$$

$$\chi_{22} = \Delta \cdot \psi_{y,y} - (1 - \Delta) \cdot \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2.76)$$

Моменти та зусилля матимуть вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \Delta \cdot K \\ \Delta \cdot K & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

де жорсткості характеристики визначаються наступним чином:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

$$K = \delta \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Перерізуючи сили, які потрібні для задач в рамках уточненої теорії

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \Delta \cdot \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}, \quad (2.80)$$

де $C_{ij} = K^2 \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s dz, \quad i, j = 4, 5.$

В цих термінах рівняння руху матимуть вигляд:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} (1 - \Delta) \cdot \left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} \right) = \\ = (1 - \Delta) \cdot \left(\lambda \left(N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.84)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.85)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_2 - m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.86)$$

2.5. Крайові умови

Система рівнянь доповнюється відповідними крайовими умовами, які залежать від способу кріплення краю пластини та теорії, яку використовують для дослідження багатошарових пластин.

На навантаженій частині контуру, при зусиллях, що стискають, крайові умови мають вигляд:

$$N_n = -p, T_n = 0. \quad (2.87)$$

Величини N_n, T_n визначаються наступним чином:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \quad (2.88)$$

$$T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{22} - N_{11})lm, \quad (2.89)$$

де l і m – напрямні косинуси нормалі до границі області:

$$l = \cos\alpha, m = \sin\alpha, \quad (2.90)$$

тут $\alpha = (n, \hat{Ox})$ – кут між нормаллю n і віссю Ox .

Таблиця 1. Деякі приклади крайових умов:

Класична теорія	Уточнена теорія
Жорстке защемлення	
$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$
Шарнірне опирання (рухомий шарнір)	
$N_n = 0, T_n = 0, w = 0, M_n = 0$	$N_n = v = w = M_n = \psi_y = 0.$
Нерухомий шарнір	
$u = 0, v = 0, w = 0, M_n = 0$	$u = v = w = M_n = Q_2 = 0$

2.6. Висновки до розділу 2

В другому розділі дисертаційної роботи

-На базі відомих співвідношень для функцій зусиль та моментів представлено нелінійну систему диференціальних рівнянь руху шаруватих пластин в операторному вигляді. Вид лінійних диференціальних операторів одержано для пластин симетричної та антисиметричної будови в рамках двох теорій: класичної та теорії типу Тимошенко.

-Для подальшої зручності і розробки методів розв'язання поставленої проблеми, деформації, зусилля та моменти представлено у вигляді лінійних та нелінійних доданків, завдяки чому в правій частині

одержаних диференціальних рівнянь було угруповано нелінійні функції відносно прогину і знайдено їх аналітичні вирази.

- Для компактного представлення вихідної системи нелінійних диференціальних рівнянь руху для різних схем розташування шарів та вживаних теорій було виконано систематизацію одержаних рівнянь та відповідних функціоналів, завдяки введенню індикаторних функцій.
- Сформульовано крайові умови для шаруватих пластин зі складною формою плану (табл. 1).

РОЗДІЛ 3

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН НАВАНТАЖЕНИХ В СЕРЕДИННІЙ ПЛОЩИНІ.

3.1 Загальна схема запропонованого метода.

В роботі пропонується метод розв'язання геометрично нелінійної задачі про коливання та стійкість багатошарових пластин, навантажених в серединній площині, який суттєво використовує теорію R-функцій і зводить вихідну задачу до послідовного розв'язання низки лінійних задач.

Перш за все, запропонований метод передбачає розрахунок пластин різної геометричної форми та, в разі необхідності, дозволяє дослідити докритичний стан навантаженої пластини. Далі визначається критичне навантаження, власні частоти та форми лінійних коливань, які використовуються для дослідження нелінійних коливань. Для лінеаризації вихідної системи руху в роботі розвинуто метод, який було запропоновано раніше в роботах [24, 28-35]. В результаті лінеаризації вихідної системи руху за часом, задача зводиться до розв'язання нелінійного звичайного диференціального рівняння.

Для дослідження на динамічну стійкість багатошарових пластин в роботі використовується підхід В.Болотіна. А для дослідження нелінійних коливань використовується метод Рунне-Кутта.

Алгоритм розв'язку задачі представлено на рисунку 6.



Рис. 6. Схема алгоритму.

Далі кожен із пунктів описано детальніше. В п. 3.2 описано метод визначення неоднорідного стану. В п. 3.3 описано розв'язок задачі про лінійні коливання пластини, навантаженої в серединній площині. В п. 3.4 представлено розрахунок докритичного стану енергетичним та динамічним методом (в пп. 3.4.1 і 3.4.2 відповідно). В п. 3.5 представлено розв'язок нелінійної задачі про коливання. Дослідження нелінійних коливань пластин, стислих статичним навантаженням та побудова скелетних кривих описано в п. 3.6. Побудова областей динамічної нестійкості і визначення амплітуд коливань в зонах параметричного резонансу представлено в п. 3.7.

Кожен етап буде реалізовано для двох теорій та різних схем розташування шарів (симетричної та антисиметричної будови). Щоб представити всі формули в загальному вигляді, знову буде використано індикаторні функції (2.70-2.71)

Для зручності, зведемо всі значення індикаторних функцій в таблицю 2.

	Класична теорія	Уточнена теорія
Симетрична будова	$\Delta = 0, \delta = 0,$	$\Delta = 1, \delta = 0,$
Антисиметрична будова	$\Delta = 0, \delta = 1,$	$\Delta = 1, \delta = 1,$

Таблиця 2. Значення індикаторних функцій,
в залежності від теорії та будови пластини.

3.2 Визначення неоднорідного докритичного стану пластини.

Для визначення неоднорідного докритичного стану необхідно розв'язати відповідну систему диференціальних рівнянь, яка доповнюється заданими крайовими умовами.

Для пластин симетричної будови в рамках класичної або уточненої теорії, ця система має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для пластин антисиметричної будови в рамках класичної теорії до рівнянь (3.1) додається ще одне рівняння, тобто одержуємо систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

Для пластин антисиметричної будови в рамках уточненої теорії розглядається система наступного вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 = 0 \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_2 = 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

На навантаженній частині контуру система доповнюється крайовими умовами

$$N_n = -1, T_n = 0. \quad (3.4)$$

Всі останні крайові умови залежать від способу закріплення пластини

Розв'язок цієї задачі будемо виконувати за допомогою методу R-функцій (RFM). З цією метою сформулюємо варіаційну постановку задачі.

Для зручності подальших викладок, представимо деформації ε_{ij}^0 ($i, j = 1, 2$) у вигляді

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{11}^L + \varepsilon_{11}^N, \quad \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{22}^L + \varepsilon_{22}^N, \quad \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{12}^L + \varepsilon_{12}^N, \quad (3.5)$$

компоненти формули (3.5) мають вигляд:

$$\varepsilon_{11}^L = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^L = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12}^L = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{11}^N = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{22}^N = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{12}^N = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Тоді зусилля також можна представити у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків:

$$\{N\} = \{N^{(L)}\} + \{N^{(N)}\},$$

де

$$\{N^{(L)}; N^{(N)}\} = [C] \cdot \{\varepsilon^{(L)}; \varepsilon^{(N)}\}. \quad (3.8)$$

В роботі доведено, що розв'язання рівнянь (3.1-3.3) зводиться до еквівалентної варіаційної проблеми про знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$\begin{aligned}
 I(u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L) + \\
 & + \delta \cdot (M_{11}^L \chi_{11}^{(1)} + M_{22}^L \chi_{22}^{(1)} + M_{12}^L \chi_{12}^{(1)}) + \\
 & + \Delta \cdot \left(Q_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \psi_{x_1} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \psi_{y_1} \right) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

де $u_n = ul + vm$, l та m - направляючі косинуси зовнішньої нормалі до границі області, P_1^0 - інтенсивність зовнішнього стискаючого зусилля, $\partial\Omega_1$ - частина границі області, на яку діють зовнішні зусилля. індикаторні функції приймають значення відповідно формулі (3.1-3.2).

Варіаційна постановка задачі зводиться до знаходження точки стаціонарності функціоналу (3.9), яка співпадає зі значеннями невідомих функцій $u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}$, які задовольняють відповідним рівнянням (3.1-3.3).

Знаючи ці функції, можна обчислити значення зусиль $\vec{N}^0 = (N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0)^T$ згідно формул

$$\vec{N}^0 = [C] \varepsilon^L + \delta [K] \chi^{(1)}, \tag{3.10}$$

де

$$\varepsilon^L = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^T; \quad \chi^{(1)} = (\chi_{11}^{(1)}, \chi_{22}^{(1)}, \chi_{12}^{(1)})^T; \tag{3.11}$$

У випадку антисиметричної будови пакету шарів, як в рамках класичної теорії, так і в рамках уточненої теорії, функціонали було отримано вперше.

Розглянемо, наприклад, задачу визначення неоднорідного докритичного стану пластини у випадку антисиметричної будови в рамках класичної теорії. Математична постановка цієї задачі в переміщеннях описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

де оператори мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \\ -L_{13} = L_{31} &= K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}; \\ -L_{23} = L_{32} &= K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Доведемо, що рівняння (3.12) є рівняннями Ейлера – Остроградського – Пуассона для функціоналу, який одержано з (3.9) при $\Delta = 0, \delta = 1$, тобто:

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1, w_1) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L + \\ &+ M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

З цією метою визначимо варіацію функціонала (3.14). Для спрощення, ведемо позначення:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q_2, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_3, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_3, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = s_3. \quad (3.15)$$

Тоді

$$\varepsilon_{11}^L = p_1, \quad \varepsilon_{22}^L = q_2, \quad \varepsilon_{12}^L = q_1 + p_2, \quad \chi_{11} = -p_3, \quad \chi_{22} = -q_3, \quad \chi_{12} = -s_3. \quad (3.16)$$

Компоненти зусиль в нових змінних матимуть вигляд:

$$N_{11} = C_{11}p_1 + C_{12}q_2 + C_{16}q_1 + C_{16}p_2 - K_{11}p_3 - K_{12}q_3 - K_{16}s_3, \quad (3.17)$$

$$N_{22} = C_{12}p_1 + C_{22}q_2 + C_{26}q_1 + C_{26}p_2 - K_{12}p_3 - K_{22}q_3 - K_{26}s_3, \quad (3.18)$$

$$N_{12} = C_{16}p_1 + C_{26}q_2 + C_{66}q_1 + C_{66}p_2 - K_{16}p_3 - K_{26}q_3 - K_{66}s_3, \quad (3.19)$$

$$M_{11} = K_{11}p_1 + K_{12}q_2 + K_{16}q_1 + K_{16}p_2 - D_{11}p_3 - D_{12}q_3 - D_{16}s_3, \quad (3.20)$$

$$M_{22} = K_{12}p_1 + K_{22}q_2 + K_{26}q_1 + K_{26}p_2 - D_{12}p_3 - D_{22}q_3 - D_{26}s_3, \quad (3.21)$$

$$M_{12} = K_{16}p_1 + K_{26}q_2 + K_{66}q_1 + K_{66}p_2 - D_{16}p_3 - D_{26}q_3 - D_{66}s_3, \quad (3.22)$$

Підставимо компоненти зусиль (3.17-3.22) у функціонал (3.14). Тоді підінтегральна функція прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} F = & C_{11}p_1^2 + 2C_{12}q_2p_1 + 2C_{16}q_1p_1 + 2C_{16}p_2p_1 - 2K_{11}p_3p_1 - 2K_{12}q_3p_1 - 2K_{16}s_3p_1 + \\ & + C_{22}q_2^2 + 2C_{26}q_1q_2 + 2C_{26}p_2q_2 - 2K_{12}p_3q_2 - 2K_{22}q_3q_2 - 2K_{26}s_3q_2 + C_{66}q_1^2 + \\ & + 2C_{66}p_2q_1 - 2K_{16}p_3q_1 - 2K_{26}q_3q_1 - 2K_{66}s_3q_1 + C_{66}p_2^2 - 2K_{16}p_3p_2 - 2K_{26}q_3p_2 - \\ & - 2K_{66}s_3p_2 + 2D_{11}p_3^2 + 2D_{12}q_3p_3 + 2D_{16}s_3p_3 + D_{22}q_3^2 + 2D_{26}s_3q_3 + D_{26}s_3^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Як відомо [85], система рівнянь Остроградського- Пуассона для функціоналів виду (3.14) має вигляд:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_1} = 0, \quad (3.24)$$

$$F_v - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_2} = 0, \quad (3.25)$$

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w'_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{w''_x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{w''_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{w''_y} = 0. \quad (3.26)$$

Після обчислення похідних, застосовуючи введені позначення (3.15), вираз (3.26) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{p_3} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{s_3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{q_3} = 0. \quad (3.27)$$

Знайдемо вираз (3.24).

$$F_{p_1} = 2C_{11}p_1 + 2C_{12}q_2 + 2C_{16}q_1 + 2C_{16}p_2 - 2K_{11}p_3 - 2K_{12}q_3 - 2K_{16}s_3,$$

$$F_{q_1} = 2C_{16}p_1 + 2C_{26}q_2 + 2C_{66}q_1 + 2C_{66}p_2 - 2K_{16}p_3 - 2K_{26}q_3 - 2K_{66}s_3,$$

Тоді, повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} + \frac{\partial}{\partial y} F_{q_1} = & 2(C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\ & - K_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - K_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - K_{66} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}) = 2(L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w) = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи одержаний вираз в рівняння (3.24) одержуємо

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0.$$

Аналогічно знайдемо вираз (3.25).

$$F_{p_2} = 2C_{16}p_1 + 2C_{26}q_2 + 2C_{66}q_1 + 2C_{66}p_2 - 2K_{16}p_3 - 2K_{26}q_3 - 2K_{66}s_3,$$

$$F_{q_2} = 2C_{12}p_1 + 2C_{22}q_2 + 2C_{26}q_1 + 2C_{26}p_2 - 2K_{12}p_3 - 2K_{22}q_3 - 2K_{26}s_3,$$

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{p_2} + \frac{\partial}{\partial y} F_{q_2} = & 2((C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2})u + (C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \\ & + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2})v - (K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3})w) = \\ = & 2(L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w). \end{aligned}$$

Таким чином отримаємо друге рівняння системи.

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0.$$

Аналогічно обчислимо вираз (3.27).

$$F_{p_3} = -2K_{11}p_1 - 2K_{12}q_2 - 2K_{16}q_1 - 2K_{16}p_2 + 2D_{11}p_3 + 2D_{12}q_3 + 2D_{16}s_3,$$

$$F_{q_3} = -2K_{12}p_1 - 2K_{22}q_2 - 2K_{26}q_1 - 2K_{26}p_2 + 2D_{12}p_3 + 2D_{22}q_3 + 2D_{26}s_3,$$

$$F_{s_3} = -2K_{16}p_1 - 2K_{26}q_2 - 2K_{66}q_1 - 2K_{66}p_2 + 2D_{16}p_3 + 2D_{26}q_3 + 2D_{66}s_3,$$

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{p_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{s_3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{q_3} &= -2 \left((K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\
&+ K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}) u + (K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}) v + \\
&+ (D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}) w) = \\
&= -2(L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w).
\end{aligned}$$

Таким чином одержимо третє рівняння системи (3.13)

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = 0.$$

Аналогічно показано справедливість функціоналу у випадку антисиметричних пластин в рамках уточненої теорії типа Тимошенка (Додаток Б).

Мінімум функціонала будемо відшукувати на множині функцій, що задовольняють головним (кінематичним) крайовим умовам.

Послідовність координатних функцій у випадку областей довільної форми будується за допомогою теорії R-функцій.

Після знаходження мінімуму функціонала, можна визначити значення зусиль $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$, використовуючи формули (3.10).

Зауважимо, що для пластин симетричної будови в рамках класичної теорії ця задача відповідає плоскій задачі теорії пружності.

Зміна значень параметра P_1^0 призводить до зміни інтенсивності прикладеного контурного навантаження. Для кожного P_1^0 обчислюються відповідні значення власних частот стислої багат шарової пластини.

3.3 Розв'язок задачі про лінійні коливання пластини, навантаженої в серединній площині.

Частота коливань навантаженої пластини та власні функції можуть бути знайдені за допомогою методу Рітця в результаті мінімізації наступного функціоналу:

$$I = \Pi_{\max} - \Omega^2 T_{\max}, \quad (3.28)$$

де T_{\max} - кінетична енергія пластини:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [m_1(\delta(u^2 + v^2) + w^2) + \Delta \cdot m_2(\psi_x^2 + \psi_y^2)] d\Omega, \quad (3.29)$$

а Π_{\max} - повна потенціальна енергія пластини, яка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12}) + \delta_1 (N_{11}^L \varepsilon_{11} + N_{22}^L \varepsilon_{22} + N_{12}^L \varepsilon_{12}) + \\ & + \Delta \cdot (Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right))] + \\ & + P_1^0 \left(N_{11}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{22}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big] dx dy \end{aligned} \quad (3.30)$$

Де вирази для зусиль, моментів та деформацій визначаються в залежності від обраної теорії та будови пластини (2.77), а індикаторні функції визначаються за формулами (2.70 -2.71). Результатом розв'язання цієї задачі є лінійні частоти Ω_L та власні функції $u^c, v^c, w^c, \psi_x^c, \psi_y^c$ які відповідають навантаженню p_1^0 в серединній площині.

3.4 Розрахунок критичного навантаження.

Третій етап алгоритму зводиться до знаходження критичного навантаження і передбачає власне рішення задачі стійкості.

Задача розрахунку критичного навантаження для пластин симетричної та антисиметричної будови зводиться до необхідності розв'язання наступної системи

- в рамках класичної теорії:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} = \lambda \left(N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

- в рамках уточненої теорії:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = 0 \quad (3.33)$$

$$N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_2 = 0 \quad (3.36)$$

3.4.1 Енергетичний підхід для визначення критичного навантаження в рамках класичної теорії.

Варіаційна постановка системи (3.31) або (3.32-3.36) зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12} \right) + \\ & + \delta \cdot \left(N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L \right) + \Delta \cdot \left(Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right) + \\ & + \lambda \cdot \left(N_{11}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{22}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds \end{aligned} \quad (3.37)$$

В функціоналі (3.37) $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$ - відомі величини (знайдені під час реалізації пункту 1), індикаторні функції Δ та δ обираються відповідно

таблиці 2. Зусилля та моменти визначаються за формулами (2.77), а деформації за формулами (2.72-2.76), як і раніше.

Мінімізацію функціоналу будемо виконувати на множині функцій, які задовольняють головним крайовим умовам.

3.4.2 Динамічний підхід для визначення критичного навантаження.

Зміна значень параметра P_1^0 призводить до зміни інтенсивності прикладеного контурного навантаження. Для кожного P_1^0 обчислюються відповідні значення власних частот стислої багатошарової пластини.

Розв'язуючи динамічну задачу, одночасно з частотами можна знайти також і критичне навантаження. Цей підхід до знаходження критичного навантаження названо динамічним [6]. У цьому випадку P_1^0 буде варійованим параметром. Змінюючи значення цього параметру, отримаємо сукупність власних частот, що відповідають різним стискаючим навантаженням. До того часу, поки всі частоти виходять дійсними, пластина коливається біля положення рівноваги, тобто стан рівноваги стійкий.

Зі збільшенням P_1^0 можуть бути отримані нульові або уявні значення власної частоти. В такому випадку, положення рівноваги є нестійким. Значення параметру P_1^0 , відповідне найменшому невід'ємному значенню власної частоти, і буде критичним.

Даний метод реалізовано як в рамках класичної, так і в рамках уточненої теорії, що відповідає мінімізації наступного функціоналу:

$$\begin{aligned}
 I(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12}) + \\
 & + \delta(N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L) + \Delta \cdot \left(Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right)] + \\
 & + P_1^0 \cdot \left(N_{11}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{22}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.5 Розв'язок нелінійної задачі про коливання пластини.

Для розв'язання задачі про геометрично нелінійні коливання стислої пластини застосуємо метод дискретизації нелінійної системи рівнянь руху. Метод дискретизації нелінійної системи рівнянь запропоновано для двох теорій: класичної в п. 3.5.1 та уточненої теорії в п. 3.5.2 з урахуванням схем розташування шарів.

3.5.1 Метод дискретизації системи руху в рамках класичної теорії

При розв'язанні геометрично нелінійних задач, будемо у вихідній системі рівнянь нехтувати інерційними доданками $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

Тоді система нелінійних рівнянь у випадку багатошарових пластин симетричної будови пакету шарів прийме вигляд:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v = Nl_1(w), \\ L_{21}u + L_{22}v = Nl_2(w), \\ L_{33}w = -Nl_3(u, v, w) + m_1 w_{,tt} - \Delta_d m_1 h w_{,t}, \end{cases} \quad (3.39)$$

Відповідно до запропонованого методу, невідомі функції u, v, w представимо у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = y_1(t)u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)u_2(x, y), \\ v(x, y, t) = y_1(t)v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)v_2(x, y), \\ w(x, y, t) = y_1(t)w_1^{(c)}(x, y). \end{cases} \quad (3.40)$$

де функції $u_1^{(c)}(x, y)$, $v_1^{(c)}(x, y)$ та $w_1^{(c)}(x, y)$ - власні функції, які відповідають навантаженню P_1^0 та знаходяться з умов мінімуму функціоналу (3.28), якщо $\delta = 0, \Delta = 0$, тобто

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_{11}^L \chi_{11} + M_{22}^L \chi_{22} + M_{12}^L \chi_{12}) + \right. \\ \left. + P_1^0 \left(N_{11}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{22}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy - \Omega^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_1 w^2 d\Omega,$$

а $u_2(x, y)$ та $v_2(x, y)$ - задовольняють наступній системі диференціальних рівнянь

$$L_{11}(u_2) + L_{12}(v_2) = -Nl_1^{(2)}(w_1^{(c)}) \quad (3.41)$$

$$L_{21}(u_2) + L_{22}(v_2) = -Nl_2^{(2)}(w_1^{(c)}) \quad (3.42)$$

яка доповнена наступними крайовими умовами на навантаженій частині:

$$N_n^L(u_2, v_2) = -N_n^N(w_1^{(c)}) \quad (3.43)$$

$$T_n^L(u_2, v_2) = -T_n^N(w_1^{(c)}) \quad (3.44)$$

Варіаційна постановка задачі (3.41-3.44) зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u_2, v_2, \psi_{x_2}, \psi_{y_2}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(N_{11}^{(L)} \varepsilon_{11}^L + N_{22}^{(L)} \varepsilon_{22}^L + N_{21}^{(L)} \varepsilon_{12}^L - 2(Nl_1^{(2)} u_2 + Nl_2^{(2)} v_2) \right) d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} \left(N_n^{(N)} (u_2 l + v_2 m) + T_n^{(N)} (v_2 l - u_2 m) \right) d\Omega_1 \quad (3.45)$$

Після підстановки виразів (3.40) у систему рівнянь (3.39) можна переконатися, що перші два рівняння системи задовольняються тотожно. Дійсно,

$$L_{11}(y_1(t)u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)u_2(x, y)) + L_{12}(y_1(t)v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)v_2(x, y)) = \\ = y_1(t)(L_{11}u_1^{(c)} + L_{12}v_1^{(c)}) + y_1^2(t)(L_{11}u_2 + L_{12}v_2) = -y_1^2(t)Nl_1(w_1^{(c)}); \\ y_1^2(t)(L_{11}u_2 + L_{12}v_2 + Nl_1(w_1^{(c)})) = 0;$$

$$L_{11}u_2 + L_{12}v_2 = -Nl_1(w_1^{(c)});$$

Аналогічно розглянемо друге рівняння системи (3.39):

$$L_{21}(y_1(t)u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)u_2(x, y)) + L_{22}(y_1(t)v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)v_2(x, y)) = \\ = y_1(t)(L_{21}u_1^{(c)} + L_{22}v_1^{(c)}) + y_1^2(t)(L_{21}u_2 + L_{22}v_2) = -y_1^2(t)Nl_2(w_1^{(c)});$$

$$y_1^2(t)(L_{21}u_2 + L_{22}v_2 + Nl_2(w_1^{(c)})) = 0;$$

$$L_{21}u_2 + L_{22}v_2 = -Nl_2(w_1^{(c)});$$

Третє рівняння системи (3.39), при нехтуванні демпфування, прийме наступний вигляд:

$$y_1(t)L_{33}w_1^{(c)} =$$

$$= y_1^2(t)\left(\frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x}L_4w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y}L_5w_1^{(c)} + \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y}L_6w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x}L_6w_1^{(c)}\right) +$$

$$+ y_1^3(t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}L_4w_1^{(c)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x}\right)^2L_4w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}L_5w_1^{(c)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x}\right)^2L_5w_1^{(c)} + \right. \quad (3.46)$$

$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial y}L_6w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}L_6w_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y}L_6w_1^{(c)}\right) - m_1y_1''w_1^{(c)} = y_1^2(t)Nl_{31} +$$

$$y_1^3(t)Nl_{32} - m_1y_1''w_1^{(c)};$$

Враховуючи, що,

$$L_{33}w_1^{(c)} = -m_1\omega_1^2w_1^{(c)}(x, y);$$

Вираз (3.46) прийме вигляд:

$$-y_1m_1\omega_1^2w_1^{(c)}(x, y) + y_1''m_1w_1^{(c)}(x, y) - y_1^2(t)Nl_{31} - y_1^3(t)Nl_{32} = 0; \quad (3.47)$$

Застосовуючи процедуру Бубнова-Гальоркіна до рівняння (3.46) та враховуючи властивості власних функцій

$$\iint_{\Omega} w_i^{(c)}w_j^{(c)}d\Omega = \begin{cases} \|w_i^{(c)}\|^2, & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (3.48)$$

отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення невідомих функцій $y_1(t)$:

$$y_1''(t) + y_1(t) + \beta y_1^2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0; \quad (3.49)$$

де

$$\beta = \frac{-1}{m_1\|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{31}w_1^{(c)}d\Omega; \quad (3.50)$$

$$\gamma = -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{32} w_1^{(c)} d\Omega; \quad (3.51)$$

де

$$Nl_{31} = \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y} L_5 w_1^{(c)} + \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x} L_6 w_1^{(c)}; \quad (3.52)$$

$$Nl_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_4 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_5 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_5 w_1^{(c)} + \\ + \frac{\partial u_2}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)}. \quad (3.53)$$

Оператори L_4, L_5, L_6 мають вигляд як раніше (2.28-2.30).

Аналогічно, застосовується метод дискретизації в рамках класичної теорії для пластин антисиметричної будови, для яких система рівнянь руху має вигляд:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = Nl_1(w) + m_1 u_{,u}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = Nl_2(w) + m_1 v_{,u}, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = -Nl_3(u, v, w) + m_1 w_{,u} - \varepsilon_d m_1 h w_{,t}, \end{cases} \quad (3.54)$$

Для зведення системи (3.54) до звичайного диференціального рівняння за часом, представимо невідомі функції u, v, w у вигляді (3.40), де, як і раніше, функції $u_1^{(c)}(x, y)$, $v_1^{(c)}(x, y)$ та $w_1^{(c)}(x, y)$ - власні функції, які відповідають навантаженню P_1^0 та знаходяться з умов мінімуму функціоналу (3.28), якщо $\delta = 1, \Delta = 0$, а $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ - розв'язки системи (3.44-3.45)

Можна показати, що перші два рівняння системи (3.54) задовольняються тотожно.

Підставимо (3.40) у третє рівняння системи (3.54), ігноруючи доданок з демпфуванням:

$$\begin{aligned}
& -Nl_3 + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m_1 y_1'' w_1^{(c)} - y_1^2(t) \left(\frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y} L_5 w_1^{(c)} + \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \right. \\
& + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x} L_6 w_1^{(c)} - \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} L_{31} w_1^{(c)} - \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} L_{32} w_1^{(c)} - 2(K_{12} - K_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \left. \right) + \\
& + y_1(t) 2(K_{12} - K_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} - y_1^3(t) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_4 w_1^{(c)} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_5 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_5 w_1^{(c)} + \frac{\partial u_2}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} \right); \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Якщо все зібрати разом, отримаємо:

$$y_1'' m_1 w_1^{(c)}(x, y) + y_1 m_1 \omega_1^2 w_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t) Nl_{31} + y_1^3(t) Nl_{32} = 0; \tag{3.56}$$

Застосовуючи процедуру Бубнова-Гальборкіна до рівняння (3.56), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення невідомих функцій $y_1(t)$:

$$y_1''(t) + y_1(t) + \beta y_1^2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0; \tag{3.57}$$

де

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{31} w_1^{(c)} d\Omega; \quad \gamma = -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{32} w_1^{(c)} d\Omega; \tag{3.58}$$

де

$$\begin{aligned}
Nl_{31} w_1^{(c)} = & \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y} L_5 w_1^{(c)} + \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x} L_6 w_1^{(c)} + \\
& + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} L_{31} w_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} L_{32} w_1^{(c)} + 2(K_{12} - K_{66}) \left(\left(\frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right); \tag{3.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Nl_{32} = & \frac{\partial u_2}{\partial x} L_4 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_4 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_5 w_1^{(c)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2 L_5 w_1^{(c)} + \\
& + \frac{\partial u_2}{\partial y} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} L_6 w_1^{(c)} + \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} L_6 w_1^{(c)}. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Оператори L_4, L_5, L_6 мають вигляд як і раніше (2.28-2.30).

3.5.2 Метод дискретизації системи в рамках уточненої теорії

Як і раніше, при розв'язанні геометрично нелінійних задач в рамках уточненої теорії, будемо у вихідній системі нехтувати силами інерції в

площині пластини та силами інерції обертання $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}$.

Тоді система нелінійних рівнянь у випадку багат шарових пластин антисиметричної будови в рамках уточненої теорії прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = Nl_1(w), \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = Nl_2(w), \\ L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = -Nl_3(u, v, w) - \varepsilon_d \rho h w_{,t}, \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = Nl_4(w), \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = Nl_5(w). \end{cases} \quad (3.59)$$

Для розв'язання системи (3.59) представимо невідомі функції u, v, w, ψ_x, ψ_y у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = y_1(t)u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)u_2(x, y), \\ v(x, y, t) = y_1(t)v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)v_2(x, y), \\ w(x, y, t) = y_1(t)w_1^{(c)}(x, y) \\ \psi_x(x, y, t) = y_1(t)\psi_{x_1}^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)\psi_{x_2}(x, y), \\ \psi_y(x, y, t) = y_1(t)\psi_{y_1}^{(c)}(x, y) + y_1^2(t)\psi_{y_2}(x, y), \end{cases} \quad (3.60)$$

де функції $u_1^{(c)}(x, y), v_1^{(c)}(x, y), \psi_{x_1}^{(c)}(x, y), \psi_{y_1}^{(c)}(x, y)$ - власні функції лінійних коливань пластини, а функції $u_2(x, y), v_2(x, y), \psi_{x_2}(x, y), \psi_{y_2}(x, y)$ - є розв'язками наступної системи

$$\begin{cases} L_{11}u_2 + L_{12}v_2 + L_{14}\psi_{x_2} + L_{15}\psi_{y_2} = Nl_1(w^{(c)}), \\ L_{21}u_2 + L_{22}v_2 + L_{24}\psi_{x_2} + L_{25}\psi_{y_2} = Nl_2(w^{(c)}), \\ L_{41}u_2 + L_{42}v_2 + L_{44}\psi_{x_2} + L_{45}\psi_{y_2} = Nl_4(w^{(c)}), \\ L_{51}u_2 + L_{52}v_2 + L_{54}\psi_{x_2} + L_{55}\psi_{y_2} = Nl_5(w^{(c)}). \end{cases} \quad (3.61)$$

Перші два рівняння системи (3.59) задовольняються тотожно. Підставимо (3.60) у третє рівняння системи (3.59), ігноруючи доданок з демпфуванням та враховуючи розкладений вигляд $Nl_3(u, v, w)$:

$$-y_1 m_1 \omega_1^2 w_1^{(c)}(x, y) + y_1'' m_1 w_1^{(c)}(x, y) - y_1^2(t) Nl_{31} - y_1^3(t) Nl_{32} = 0; \quad (3.62)$$

Застосовуючи процедуру Бубнова-Гальоркіна до рівняння (3.62) отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення невідомих функцій $y_1(t)$:

$$y_1''(t) + \omega_1^2 y_1(t) + \beta y_1^2(t) + \gamma y_1^3(t) = 0; \quad (3.63)$$

де

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{31} w_1^{(c)} d\Omega; \quad (3.64)$$

$$\gamma = -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} Nl_{32} w_1^{(c)} d\Omega; \quad (3.65)$$

Нелінійні оператори Nl_{31}, Nl_{32} мають вигляд (3.52-3.53), але оператори L_4, L_5, L_6 визначаються за формулами (2.32).

Аналогічно застосовується метод дискретизації в рамках уточненої теорії для пластин симетричної будови.

3.6 Дослідження нелінійних коливань пластин, стислих статичним навантаженням, побудова скелетних кривих.

У разі статичного навантаження $p_t = 0$, тобто при $k = 0$, дослідження зводиться до розв'язання рівняння:

$$y''(t) + \Omega_L^2 (y(t) + \gamma y^3(t)) = 0; \quad (3.66)$$

тут $\varepsilon = 0$. Застосування до останнього рівняння методу Бубнова-Гальоркіна дозволяє отримати залежність амплітуди нелінійних коливань від відносини

нелінійної частоти до лінійної $\nu = \frac{\omega_N}{\Omega_L}$:

$$v = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\gamma A^2}. \quad (3.67)$$

3.7. Визначення зон динамічної стійкості\нестійкості.

Рівняння (3.66) представляє собою класичне рівняння, яке описує параметричні коливання системи з однією степеню свободи при наявності одного параметру нелінійності γ . Це рівняння містить параметри періодичного навантаження, динамічну складову p_t та частоту зовнішнього навантаження θ в якості параметрів. Якщо ці параметри зменшуються періодично за часом, тут може мати місце так звані параметричні коливання. Задача про динамічну стійкість є нелінійною, однак, згідно з роботами В.В. Болотіна [6], для визначення областей динамічної нестійкості в разі систем з періодичними коефіцієнтами в першому наближенні достатньо використовувати лінійну теорію.

У разі дії на пластину періодичної навантаження виникає необхідність визначення зон динамічної нестійкості системи. Для дослідження стійкості, як показано в [6], досить розглянути лінеаризоване рівняння, тобто при $\gamma = 0$:

$$y''(t) + 2\varepsilon y'(t) + \Omega_L^2 (1 - 2k \cos(\theta t)) y(t) = 0; \quad (3.68).$$

Відомо, що для рівняння (3.68), яке в літературі називається рівнянням Матьє, головна область нестійкості (біля $\theta = 2\Omega_L$) обмежена кривими [6]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2}} \quad (3.69)$$

де через $\tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}$ обзначено декремент затухання [6]. При $\varepsilon = 0$ маємо

$$\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1 - k}, \quad (3.70)$$

$$\theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1 + k}.$$

У цьому інтервалі виникає головний параметричний резонанс.

Для визначення амплітуд згасаючих коливань в зоні головного параметричного резонансу, був використаний підхід, викладений в [6], і отримана залежність між частотним відношенням $\theta/2\Omega_L$ і амплітудою коливань A :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2}}. \quad (3.71)$$

3.8. Висновки до розділу 3

1. Запропоновано аналітично-числові методи дослідження геометрично нелінійних коливань багатошарових пластин симетричної та антисиметричної будови в рамках класичної і уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка. В основі розроблених методів лежить застосування теорії R-функцій і варіаційних методів.

2. Розроблено новий метод зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь руху в частинних похідних до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

3. Одержано нові варіаційні постановки і запропоновано метод розв'язання послідовності допоміжних лінійних задач, завдяки яким вихідну систему рівнянь зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь.

4. Вперше побудовано функціонали для визначення неоднорідного докритичного стану багатошарових пластин антисиметричної будови в рамках класичної теорії так уточненої теорії першого порядку типа Тимошенка.

РОЗДІЛ 4.

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНОГО МЕТОДА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ БЕЗ ОТВОРІВ

Запропонований метод розв'язання задач про статичну та динамічну стійкість може бути використано для пластин складної форми плану та кількості шарів з симетричною та антисиметричною будовою пакету шарів. Для чисельної реалізації запропонованого методу було створено програмне забезпечення для системи POLE-RL.

В даному розділі представлені числові результати дослідження багат шарових пластин різної форми плану, в залежності від геометричних та механічних параметрів матеріалу, геометрії області, крайових умов, кількості шарів, типу навантаження, тощо.

4.1. Аналіз вірогідності розробленого методу та створеного на його основі програмного забезпечення. Тестові задачі.

Даний пункт розділу 4 присвячено тестуванню запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення. Оскільки в загальному випадку не існує точного рішення, виконаємо порівняння отриманих результатів з результатами робіт, в яких застосовувалися інші наближені методи. Але через малу кількість робіт з дослідженням пластин складної геометричної форми, порівняння зроблено для пластин канонічної форми, та для квадратної пластини з квадратним вільним отвором. Розроблене програмне забезпечення дозволяє досліджувати пластини різноманітних форм з різними крайовими умовами. Щоб показати можливості запропонованого методу, розв'яжемо декілька задач. Для дослідження вірогідності, в роботі контролювалась збіжність завдяки збільшенню кількості координатних функцій та виродження пластин складної геометричної форми до тих, що вже було досліджено.

4.1.1. Стійкість прямокутної багат шарової пластини під дією статичного навантаження в серединній площині.

Розглянемо квадратну ортогонально армовану багат шарову пластину симетричної будови (рис. 7). Передбачається, що пластина вільно оперта і стискається зусиллями спрямованими паралельно вісі Ox .

Механічні властивості матеріалу для тестової задачі прийняті наступними:

$$\frac{G}{E_2} = 0,5; \nu_1 = 0,25. \quad (4.1)$$

При цьому будемо варіювати ступінь ортотропії матеріалу, тобто розглянемо різні варіанти відношення:

$$\frac{E_1}{E_2} = 3; 10; 20; 30; 40. \quad (4.2)$$

Основні геометричні параметри пластини прийняті наступними [171]:

$$\frac{a}{b} = 1; \frac{h}{2b} = 0,1 \quad (4.3)$$

де h - це загальна товщина пластинки при рівних товщинах всіх шарів, а $2b$ - характерний розмір пластинки.

Критичне навантаження визначається як

$$P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}, \quad (4.4)$$

де $\lambda_{кр}$ – безрозмірний параметр критичного навантаження.

Зв'язок між розмірними та безрозмірними параметрами навантаження встановлюється наступними співвідношеннями

$$\bar{\theta} = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \theta,$$

$$\bar{p}_0 = \frac{a^2 p_0}{h^3 E_2}, \quad \bar{p}_t = \frac{a^2 p_t}{h^3 E_2}.$$

Риски в (3.25) і в подальшому викладенні відкинуті.

Розв'язання задач виконується за допомогою двох описаних вище методів (енергетичного (глава 3.3.1) і динамічного (глава 3.3.2)).

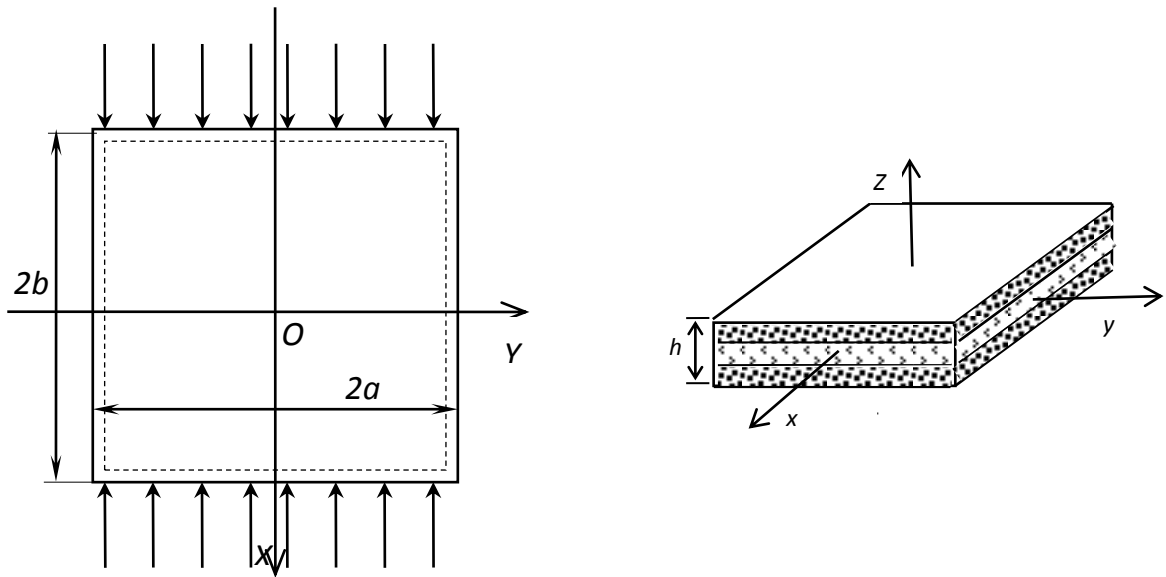


Рис. 7.

У таблиці 3 наведено значення безрозмірного частотного параметра для тришарової, п'ятишарової і дев'ятишарової пластини, отримані в рамках класичної і уточненої теорій при зміні ступеня ортотропії матеріалу та результати, отримані в роботі [171] – в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку та в роботі [165], де автор приводить результати, знайдені в рамках уточненої теорії першого порядку.

Як впливає з таблиці, відхилення отриманих результатів в рамках класичної теорії від результатів, представлених в роботі [171] не перевищує 0,13%. При цьому значення критичного навантаження є однаковим для різної кількості шарів. Знаходження рішення в рамках класичної теорії може бути отримано з певною допустимою точністю.

Результати досліджень в рамках уточненої теорії порівнювалися з результатами робіт [171] і [165]. Значення критичного навантаження, отримане за допомогою RFM, практично завжди знаходиться між значеннями, представленими в роботах [171] і [165]. Відмінність одержаних результатів від результатів, наведених в статті [81] не перевищує 1,1%.

Таблиця 3. Значення безрозмірного частотного параметра для квадратної пластини в залежності від кількості шарів, ступеня ортотропії та обраної теорії.

		$\lambda_{кр}$						
Кількість шарів	Метод розв'язання			$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
3	Класична теорія	RFM	5.72	11.49	19.72	27.94	36.17	
		[171]	5.75	11.49	19.71	27.94	36.16	
	Уточнена теорія	RFM	5.39	9.87	14.98	19.02	22.31	
		[171]	5.40	9.96	15.35	19.76	23.45	
		[165]	5.30	9.76	15.02	19.30	22.88	
	5	Класична теорія	RFM	5.72	11.49	19.72	27.94	36.17
[171]			5.75	11.49	19.71	27.94	36.16	
Уточнена теорія		RFM	5.41	10.07	15.73	20.48	24.54	
		[171]	5.41	10.14	15.96	20.91	25.19	
		[165]	5.32	9.96	15.65	20.47	24.59	
9		Класична теорія	RFM	5.72	11.49	19.72	27.94	36.17
	[171]		5.75	11.49	19.71	27.94	36.16	
	Уточнена теорія	RFM	5.41	10.07	16.06	21.11	25.49	
		[171]	5.42	10.19	16.15	21.26	25.71	
		[165]	5.34	10.04	15.92	20.96	25.34	

Як загальну тенденцію поведінки критичного навантаження, слід зазначити його зростання в залежності від зростання ступеня ортотропії матеріалу. Також важливо відмітити і відмінність результатів між двома теоріями, в рамках яких проводилося дослідження, яка також зростає зі збільшенням ступеня ортотропії. З проведеного дослідження можна надати наступні практичні рекомендації: по-перше, пластини з матеріалу з більшим ступенем ортотропії мають вищі значення критичного навантаження, по-друге,

кількість шарів при даній укладці незначно впливає на значення критичного навантаження. Щодо доцільності використання класичної або уточненої теорії, можна відмітити, що різниця між результатами при менших значеннях степені ортотропії незначна. В той час, як при більших значеннях степені ортотропії різниця між результатами більш відсутня. Зі збільшенням кількості шарів, значення критичного навантаження несуттєво збільшується. Але вплив кількості шарів на значення критичного навантаження краще можна відстежити на значеннях, отриманих в рамках уточненої теорії, в той час, як в рамках класичної теорії, цей вплив майже не помітний.

4.1.2. Порівняння критичного навантаження, що одержано за допомогою динамічного та енергетичного підходів.

Для порівняння двох запропонованих методів знаходження значення критичного навантаження – енергетичного та динамічного, які описані в главі 3, розглянемо квадратну ортогонально армовану тришарову пластину симетричної будови (рис. 7).

Механічні властивості матеріалу, ступінь ортотропії матеріалу та основні геометричні параметри співпадають з (4.1) (4.2) та (4.3).

Передбачається, що пластина вільно оперта та стискається зусиллями, діючими паралельно осі Ox . Результати проведених досліджень про вплив степені ортотропії матеріалу на власні частоти стислої пластини представлені в табл. 4.

Позначимо λ_1 безрозмірний параметр $P_{кр} = \lambda_1 \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}$, а Λ - значення власних частот, безрозмірні значення яких визначаються за формулою:

$$\Lambda = \Omega_L \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}.$$

Критичне значення параметру λ_1 виділено жирним шрифтом. Як впливає із таблиці, при збільшенні степеню ортотропії, критичне навантаження збільшується.

Таблиця 4. Динамічний метод визначення критичного навантаження.

E_2/E_1	λ_1, Λ							
40	λ_1	10	20	30	35	36	36,17	36,18
	Λ	0,161	0,126	0,078	0,034	0,013	0,002	$\Lambda < 0$
30	λ_1	10	15	20	25	27	27,94	28,95
	Λ	0,131	0,113	0,089	0,054	0,031	0,003	$\Lambda < 0$
20	λ_1	5	10	15	19	19,5	19,72	19,73
	Λ	0,121	0,098	0,068	0,027	0,015	0,0021	$\Lambda < 0$
10	λ_1	1	5	8	10	11	11,49	11,50
	Λ	0,102	0,08	0,059	0,039	0,022	0,002	$\Lambda < 0$
3	λ_1	1	4	5	5,5	5,7	5,75	5,76
	Λ	0,069	0,042	0,027	0,016	0,007	0,003	$\Lambda < 0$

Наряду із застосуванням динамічного методу, для знаходження безрозмірного параметру критичного навантаження $\lambda_{кр}$ було використано також енергетичний метод. Результати, отримані за допомогою цих двох підходів, представлено в таблиці 5. Тут же зроблено їх порівняння з результатами роботи [171]

Таблиця 5. Порівняння енергетичного та динамічного методів знаходження критичного навантаження.

Метод розв'язання	$\lambda_{кр}$				
	$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
RFM (енергетичний)	5.76	11.51	19.74	27.97	36.20
RFM (динамічний)	5.76	11.49	19.72	27.94	36.17
[171]	5.75	11.49	19.71	27.94	36.16

Як видно з таблиці 5, відхилення результатів не перевищує 0,13%. Причому, розв'язок, отриманий динамічним методом, ближче до результатів, отриманих в роботі [171].

4.1.3. Дослідження стійкості прямокутної багатошарової пластини, що стискається вздовж сторони, яка протилежна жорстко закріпленій стороні

Нижче представлено задачу про стійкість пластин, що стискаються навантаженням, прикладеним лише однією стороною (рис. 9). В такому випадку, навантаження урівноважується способом закріплення пластини. Такого типу задачі часто виникають на практиці.

Проведемо дослідження статичної стійкості тришарової квадратної пластини $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ з комбінованим типом крайових умов (рис. 8). Передбачається, що навантаження прикладене до сторони CD та діє паралельно осі Ox . Геометричні параметри та пружні сталі матеріалу, із якого виготовлена пластина, прийняті такими ж як в (4.1) (4.2) та (4.3).

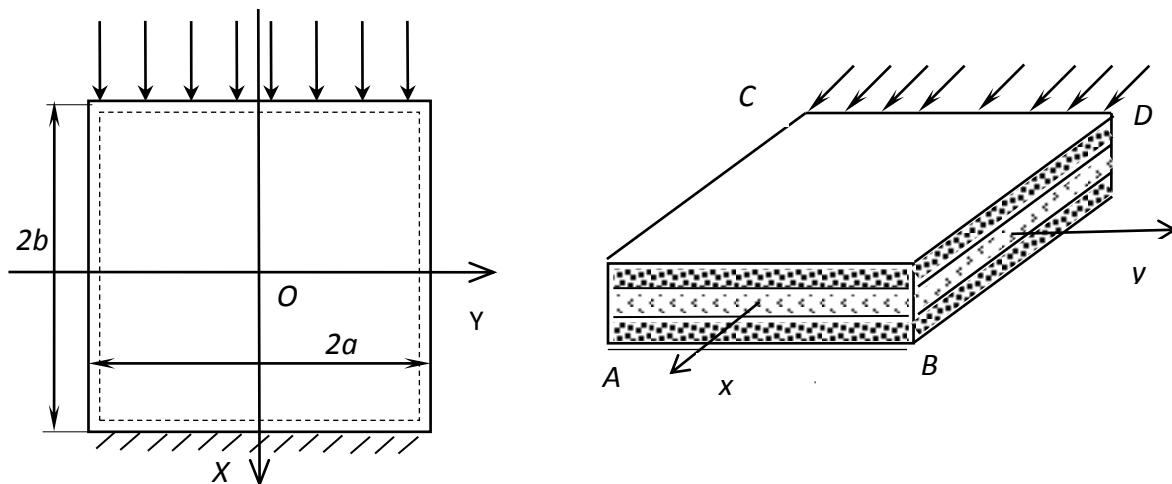


Рис. 8. Однією стороною навантажена багатошарова прямокутна пластина.

Крайові умови поставленої задачі визначаються наступним чином:

- вздовж AB ($\partial\Omega_1$)

$$u|_{\partial\Omega_1} = v|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad w|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (4.5)$$

- вздовж CD :

$$N_n = P, S_n = 0; \quad w = 0, M_n = 0. \quad (4.6)$$

- вздовж AC та BD :

$$N_n = 0, S_n = 0; \quad w = 0, M_n = 0. \quad (4.7)$$

В таблиці 6 представлено результати значень частот, в залежності від степеня ортотропії матеріалу та інтенсивності навантаження, визначаємого значенням параметру λ_1 , що отримано динамічним методом. Як і в попередньому випадку, поставлена задача також була розв'язана енергетичним методом. Порівняння значень критичного параметру, отриманого за допомогою двох підходів, представлено в табл. 7.

Таблиця 6. Динамічний метод визначення критичного навантаження однобічно навантаженої багаточислової прямокутної пластини.

E_1 / E_2	λ_1, Λ					
40	λ_1	10	25	36	36,18	36,19
	Λ	0,161	0,105	0,013	0,002	$\Lambda < 0$
30	λ_1	10	20	27	27,94	28,95
	Λ	0,133	0,089	0,031	0,002	$\Lambda < 0$
20	λ_1	5	10	19	19,72	19,73
	Λ	0,121	0,098	0,027	0,002	$\Lambda < 0$
10	λ_1	1	5	11	11,49	11,5
	Λ	0,102	0,080	0,022	0,002	$\Lambda < 0$
3	λ_1	1	3	5	5,72	5,73
	Λ	0,069	0,052	0,027	0,002	$\Lambda < 0$

Таблиця 7. Порівняння енергетичного та динамічного методів знаходження критичного навантаження однобічно навантаженої багат шарової прямокутної пластини

Метод рішення	$\lambda_{кр}$				
	$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
RFM (енергетичний)	5.72	11.49	19.72	27.94	36.17
RFM (динамічний)	5,72	11,49	19,72	27,95	36,18
Задача 4.1.2.	5.76	11.49	19.72	27.94	36.17

Значення критичного навантаження, які отримано за допомогою енергетичного та динамічного підходів добре узгоджуються. Різниця результатів не перевищує 0,05%. Крім того, можна зробити висновок, що значення критичного навантаження поставленої задачі практично співпадають з відповідними значеннями задачі 4.1.2, що відповідає фізичному змісту цих задач.

4.1.4. Динамічна стійкість прямокутної багат шарової пластини під дією періодичного навантаження в серединній площині.

Для тестування розв'язку нелінійної задачі, розглянемо наступний приклад. Будемо вивчати параметричні коливання багат шарових пластин з різними механічними характеристиками, які наведено в табл. 8.

Таблиця 8. Матеріали пластин, що досліджуються.

матеріал	E_1 / E_2	G / E_2	$\nu_1 = \nu_2 E_1 / E_2$
glass-епoxy	3	0.6	0.25
boron-епoxy	10	0.33	0.22
graphite	40	0.6	0.25

Вважаємо, що всі шари мають однакову товщину, а загальну товщину пластини приймаємо такою, що

$$\frac{h}{a} = 0,01;$$

де a – характерний розмір плану пластини.

Розглянемо різні види крайових умов.

(C1) – жорстко затиснена пластинка:

$$u_n = 0, v_n = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad (4.8)$$

(SS2) – вільно оперта нерухома в площині пластинка

$$u_n = 0, v_n = 0; w = 0, M_n = 0; \quad (4.9)$$

(SS3) – вільно оперта частково рухома в площині:

$$u_n = 0, T_n = 0, w = 0, M_n = 0. \quad (4.10)$$

Розглянемо коливання п'ятишарової пластини (рис. 9) з різними видами крайових умов (SS2, SS3, C1) та способами укладки шарів.

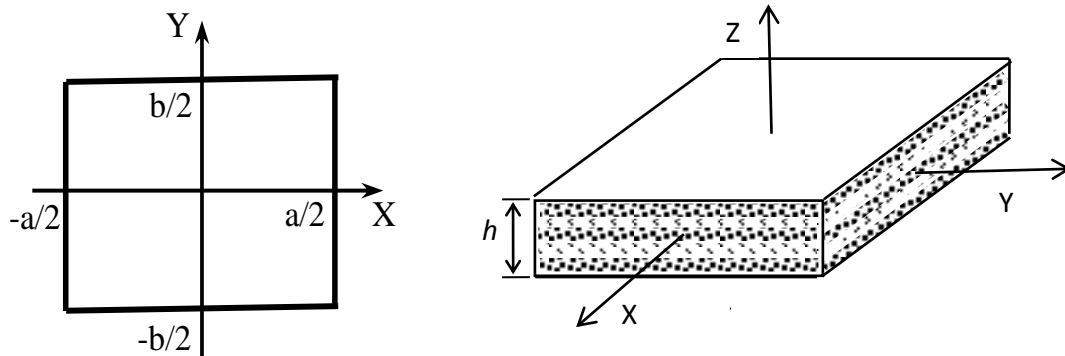


Рис. 9 – Форма пластини, що досліджується

В табл. 9 наведені значення частотного відношення $\nu = \frac{\omega_N}{\omega_L}$ (ω_L – частота лінійних коливань ненавантаженої пластини).

Відхилення отриманих результатів від результатів роботи [103] не перевищує 3%. Найсуттєвіше відхилення простежується для способу укладки шарів $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$.

Таблиця 9 – Порівняння значень частотного відношення $\nu = \frac{\omega_N}{\omega_L}$ для

п'ятишарової квадратної пластини

$\nu = \frac{\omega_N}{\omega_L}$						
Крайові умови						
	SS2		SS3		C1	
A	RFM	[103]	RFM	[103]	RFM	[103]
Ортотропна пластина (graphite), $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$						
0.2	1.03128	1.03147	1.00150	1.00165	1.00783	1.00847
0.4	1.11989	1.12099	1.00599	1.00658	1.03095	1.03347
0.6	1.25373	1.25723	1.01342	1.01473	1.06838	1.07390
0.8	1.42007	1.42805	1.02373	1.02599	1.11868	1.12820
1.0	1.60886	1.62368	1.03684	1.04023	1.18021	1.19461
1.2	1.81310	1.83697	1.05264	1.05729	1.25130	1.27141
Ортотропна пластина (graphite), $45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$						
0.2	1.01332	1.01473	1.00930	1.00796	1.00850	1.00717
0.4	1.05227	1.05776	1.03671	1.03135	1.03356	1.02834
0.6	1.11417	1.12601	1.08084	1.06885	1.07404	1.06258
0.8	1.19545	1.21542	1.13975	1.11848	1.12828	1.10855
1.0	1.29246	1.32185	1.21129	1.17837	1.19436	1.16474
1.2	1.40195	1.44162	1.29337	1.24629	1.27054	1.22969

Для розглянутої пластини знайдено основні частоти коливань пластини під дією статичного навантаження в площині для крайових умов SS1. В табл. 10,11 представлені результати аналізу впливу навантаження на частотний параметр

$$\Lambda = \Omega_L \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \text{ для квадратної та прямокутної пластин (} b/a = 2 \text{).}$$

Таблиця 10 – Залежність частотного параметру Λ від навантаження p_0 ,
 $b/a = 1$.

α \ p_0/p_{kr}	Glass-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	1
0	25.836	22.375	18.270	12.921	8.176	5.755
30 ⁰ /-30 ⁰ /30 ⁰ /-30 ⁰ /30 ⁰	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.147
45 ⁰ /-45 ⁰ /45 ⁰ /-45 ⁰ /45 ⁰	29.183	25.276	20.640	14.599	9.240	7.456
60 ⁰ /-60 ⁰ /60 ⁰ /-60 ⁰ /60 ⁰	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.119
α \ p_0/p_{kr}	Boron-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	1
0	35.269	30.55	24.953	17.665	11.210	10.542
30 ⁰ /-30 ⁰ /30 ⁰ /-30 ⁰ /30 ⁰	46.274	40.086	32.743	23.172	14.683	18.354
45 ⁰ /-45 ⁰ /45 ⁰ /-45 ⁰ /45 ⁰	48.790	42.274	34.539	24.454	15.507	20.188
60 ⁰ /-60 ⁰ /60 ⁰ /-60 ⁰ /60 ⁰	46.274	40.097	32.767	23.213	14.744	17.970

Таблиця 11 – Залежність частотного параметру Λ від навантаження p_0 ,
 $b/a = 2$.

α \ p_0/p_{kr}	Glass-epoxy				
	0	0.25	0.5	0.75	1
0	76.706	66.430	54.241	38.358	12.683
30 ⁰ /-30 ⁰ /30 ⁰ /- 30 ⁰ /30 ⁰	75.447	65.343	53.357	37.739	12.295
45 ⁰ /-45 ⁰ /45 ⁰ /- 45 ⁰ /45 ⁰	70.674	61.211	49.985	35.358	10.794
60 ⁰ /-60 ⁰ /60 ⁰ /- 60 ⁰ /60 ⁰	64.162	55.568	45.375	32.092	8.903

Розглянемо параметричні коливання пластини. На рис.10,11,12 представлені області динамічної нестійкості, побудовані для

$$p_0 / p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75, \quad b/a = 2$$

та крайових умов SS1.

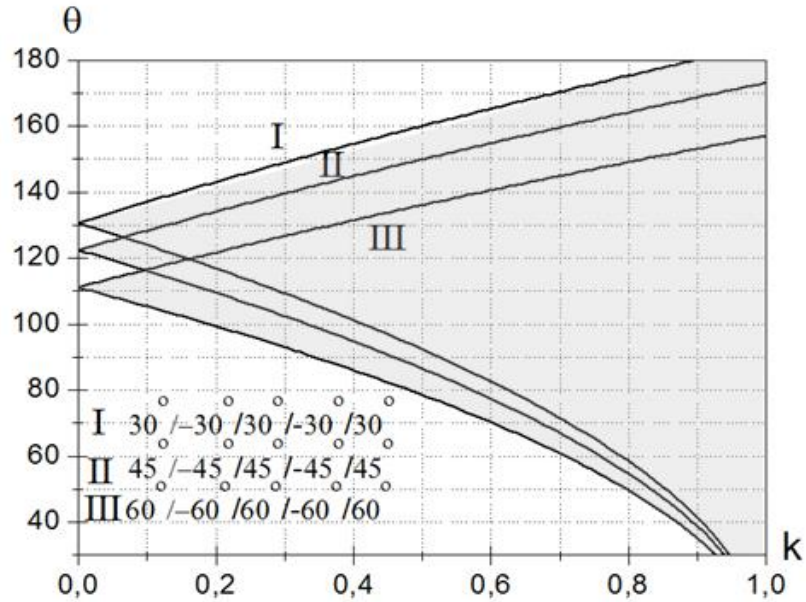


Рисунок 10 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.25$)

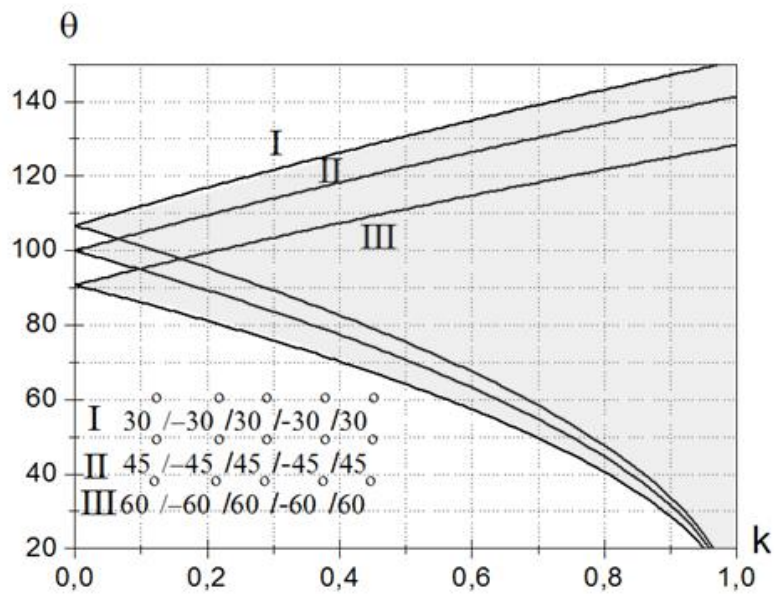


Рисунок 11 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.5$)

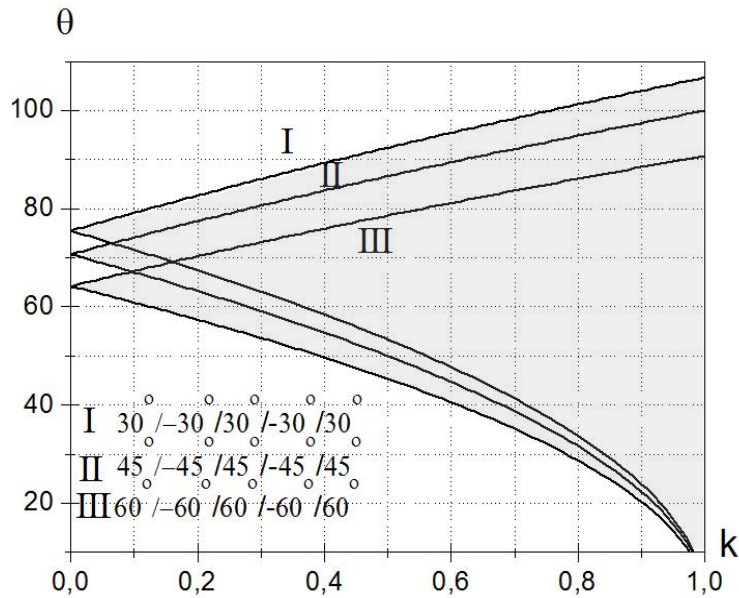


Рисунок 12 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.75$)

Аналізуючи отримані результати, можна зауважити, що нестійкість виникає при більших значеннях збуджуючої частоти для пластин з поворотом осей ортотропії на кут $\alpha = 30^\circ$, тобто $30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/30^\circ$. При укладці шарів $60^\circ/-60^\circ/60^\circ/-60^\circ/60^\circ$. ОДН відповідають меншим значенням збуджуючої частоти.

4.2. Дослідження багатошарових пластин складної форми без отворів.

Запропоновані методи дослідження нелінійних коливань, статичної та динамічної стійкості спеціально розроблені для застосування до багатошарових пластин складної форми. На практиці пластини можуть моделювати кришу автомобіля, стелю танку чи трактору, крило літака, тощо. крім того, це можуть бути запчастини до високотехнологічного обладнання.

В цій главі розглянуто вплив геометричних параметрів, виду крайових умов, жорсткісних характеристик, кількості шарів на значення критичного навантаження, зони стійкості або нестійкості, та амплітудно-частотні характеристики багатошарових пластин складної форми без отворів.

4.2.1. Вплив геометричної форми на статичну стійкість багатошарової квадратної пластини з відсіченими кутами.

Розглянемо тришарову ортотропну вільно оперту пластину симетричної будови з наступним укладанням шарів $0^0/90^0/0^0$ (рис. 13), виготовлену з матеріалу з такими ж жорсткостними властивостями, як і в тестовому прикладі

4.1.1. Геометричні характеристики прийняті наступними: $\frac{a}{b} = 1$. Товщина всієї

пластини визначається за формулою $\frac{h}{2b} = 0,1$. Пластина є тонкою, тому для дослідження можна використовувати як класичну теорію, так і уточнену теорію. Ми використаємо останню.

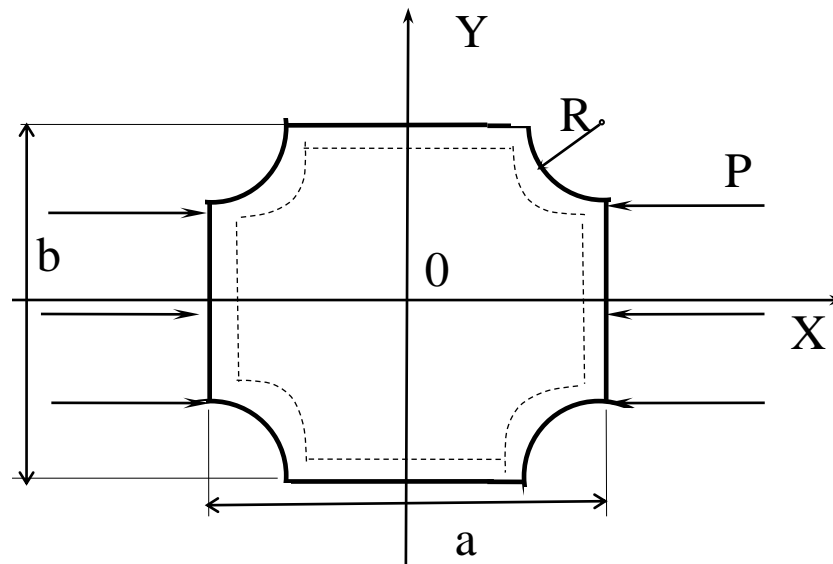


Рис. 13. Серединний шар багатошарової пластини.

Пластина стискається зусиллями паралельно осі Ox і діючими вздовж сторін BC і GF . Крайові умови на границі області $\partial\Omega$ мають вигляд

- вздовж BC і GF :

$$N_n = P, S_n = 0, w = 0, M_n = 0. \quad (4.11)$$

- вздовж решти контуру ($CDEF \cup GHAB$):

$$N_n = 0, S_n = 0, w = 0, M_n = 0. \quad (4.12)$$

В рамках уточненої теорії першого порядку на всій границі $\partial\Omega$ ще діє умова $Q_n = 0$. Структура розв'язку, яка відповідна даній комбінації крайових умов та задовольняє головним крайовим умовам має вигляд:

$$u = P_1, v = P_2, w = \omega \cdot P_3 \quad (4.13)$$

або

$$u = P_1, v = P_2, w = \omega \cdot P_3, \varphi_x = P_4, \varphi_y = P_5. \quad (4.14)$$

Формула (4.17) використовується в рамках класичної теорії; а формула (4.18) в рамках уточненої теорії.

Використовуючи теорію R-функцій, побудуємо рівняння границі області розглянутої пластини:

$$\omega = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 \overline{(F_3 \vee_0 F_4 \vee_0 F_5 \vee_0 F_6)}, \quad (4.15)$$

де

F_1 - вертикальна смуга між прямими $x = \pm a$ визначається за формулою

$$F_1 = \left(\sigma_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \geq 0 \right) \quad (4.16)$$

F_2 - горизонтальна смуга між прямими $y = \pm b$ визначається за формулою

$$F_2 = \left(\sigma_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0 \right) \quad (4.17)$$

F_3 - область, яка розташована всередині кола радіуса R з центром в точці $(a; b)$ аналітично описується як

$$F_3 = \left(\sigma_3 = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad (4.18)$$

F_4 - область, яка розташована всередині кола радіуса R з центром в точці $(a; -b)$ визначається як

$$F_4 = \left(\sigma_4 = \frac{(x-a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad (4.19)$$

F_5 – область, яка розташована всередині кола радіуса R з центром в точці $(-a; b)$ аналітично описується як:

$$F_5 = \left(\sigma_5 = \frac{(x+a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad (4.20)$$

F_6 – область, яка розташована всередині кола радіуса R з центром в точці $(-a; -b)$ визначається наступною формулою:

$$F_6 = \left(\sigma_6 = \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) \quad (4.21)$$

У таблиці 12 наведені результати дослідження впливу глибини вирізу на величину безрозмірного параметра критичного навантаження $\lambda_{кр}$ в рамках уточненої теорії.

Критичне навантаження визначається як і раніше, $P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}$.

Таблиця 12. Безрозмірний параметр критичного навантаження в залежності від глибини вирізів.

$\lambda_{кр}$					
$R/2b$	$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
0.05	5.55	10.10	15.26	19.33	22.63
0.075	5.74	10.31	15.50	19.58	22.88
0.1	5.83	10.41	15.68	19.80	23.13
0.125	6.14	10.89	16.23	20.41	23.78
0.15	6.38	11.31	16.68	21.08	24.53

Зауважимо, що якщо $R \rightarrow 0$ то форма плану даної пластини стримиться до квадратної. Тому отримані значення стримляться до відповідних значень квадратної пластини. Цей факт використано для контролю достовірності отриманих результатів.

При збільшенні розмірів вирізів пластинки спостерігається тенденція до зростання безрозмірного параметру критичного навантаження $\lambda_{кр}$. Однак, швидкість росту $\lambda_{кр}$ для пластинки, виготовленої з матеріалу з більшим ступенем ортотропії, менше, ніж для пластинки, виготовленої з матеріалу з меншим ступенем ортотропії. Так, при зміні $R/2b$ від 0,05 до 0,15, в разі, коли ступінь ортотропії матеріалу $\frac{E_1}{E_2} = 3$ критичне навантаження збільшилось на 15,5%, а в разі, коли $\frac{E_1}{E_2} = 40$ критичне навантаження збільшилося на 8,4%.

4.2.2. Вплив зусиль, що стискають, на критичне навантаження Н-подібної пластини.

На практиці бувають випадки, коли навантаження прикладене не до всього контуру а на певний його відрізок. Тоді докритичний стан пластини стає неоднорідним і розповсюджені методи дослідження (такі для МКЕ) не працюють. Для таких класів задач можливе використання лише без сіткових методів, до якого відноситься запропонований в роботі метод.

Розглянемо наступну задачу, а саме тришарову пластину ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) зі складною формою плану та механічними характеристиками, як і в попередній задачі. Спосіб навантаження такий, що сила діє тільки на частині контуру (рис.14). Геометричні параметри та параметри вирізу фіксуємо:

$$\frac{a}{b} = 1. \quad \frac{h}{2b} = 0,01. \quad \frac{a_1}{2b} = 0,3. \quad \frac{b_1}{2b} = 0,4. \quad (4.22)$$

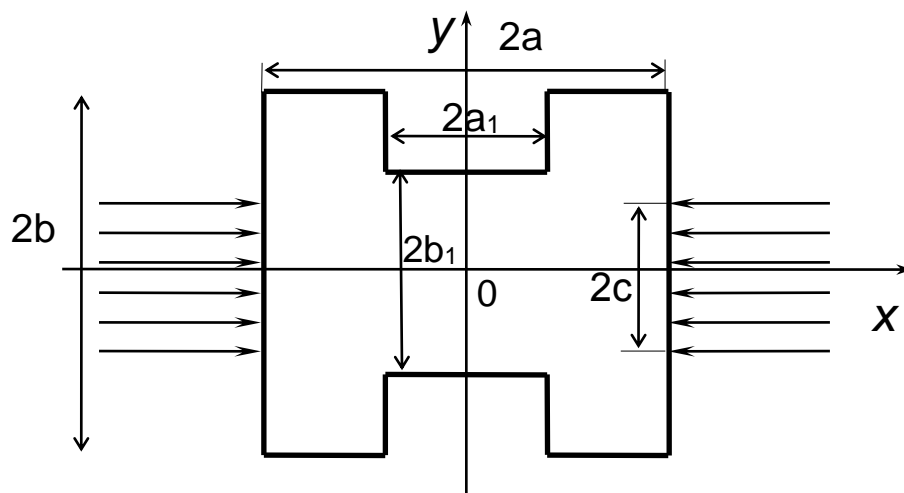


Рис. 14. Пластина, що навантажена по частині контуру

Проаналізуємо вплив крайових умов та механічних параметрів на величину критичного навантаження. Результати проведених досліджень наведено на рис. 15.

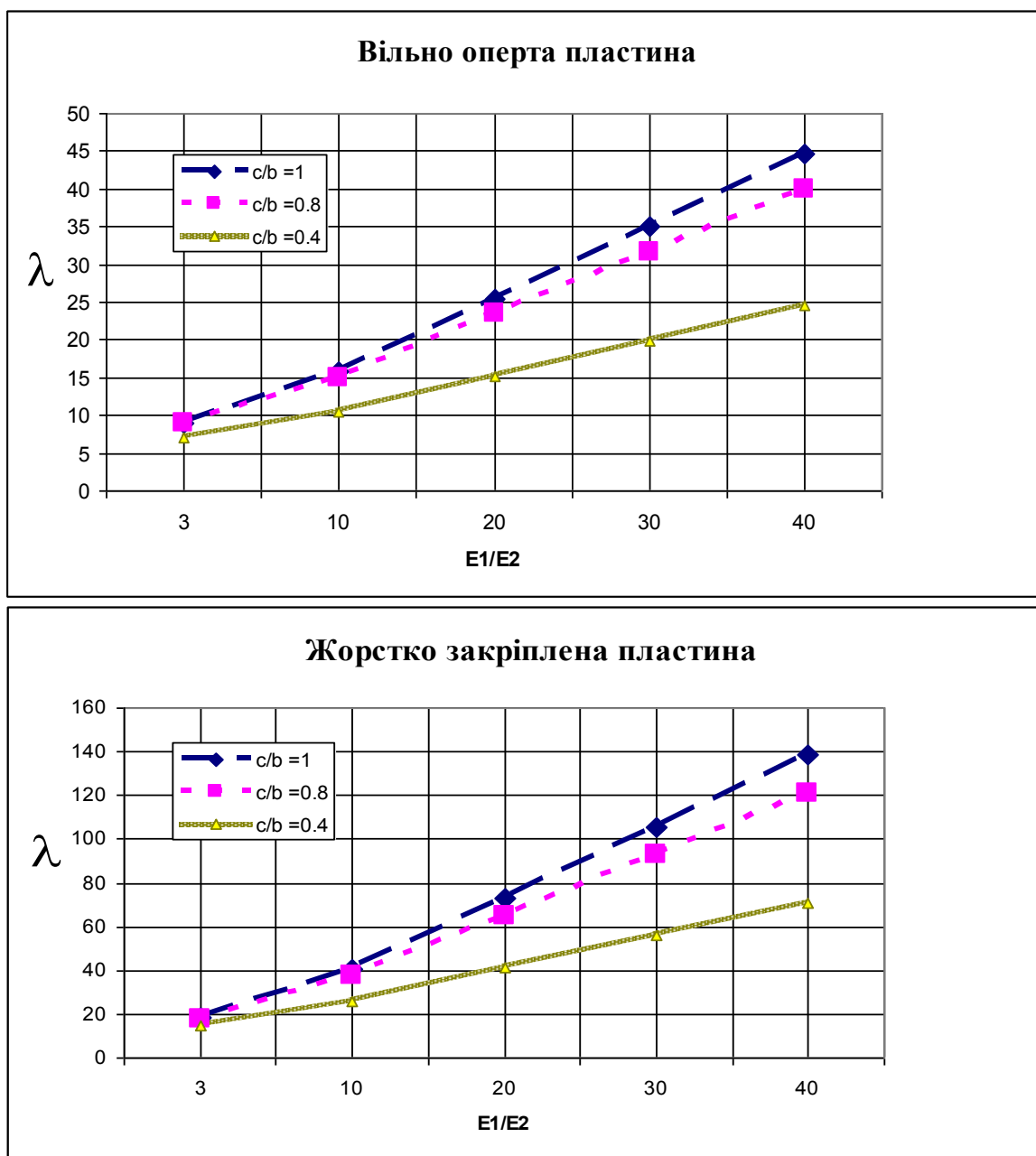


Рис. 15. Безрозмірний параметр $\lambda_{кр}$ критичного навантаження для тришарової пластини

За результатами проведених досліджень (рис. 15), можна зробити деякі висновки, а саме: якісний характер впливу ширини ділянки навантаження на критичне значення є подібним до відповідної поведінки прямокутної пластини, яка була проаналізована в роботі [136]. Тобто при зменшенні ділянки, на якій діє сила, критичне навантаження зменшується, а відношення параметру критичного навантаження до відповідного параметру пластини, навантаженої

уздовж всієї сторони збільшується. Крім того, зауважимо, що зменшення ступеню ортотропії, зменшує відхилення між результатами для різної ширини ділянки навантаження.

Суттєвий вплив на критичне навантаження мають крайові умови. З наведених графіків випливає, що значення критичного параметру для жорстко закріпленої пластини майже втричі перебільшує відповідні величини для вільно опертої тришарової пластини.

4.2.3. Вплив одноосного стискання на критичне навантаження пластини складної форми.

Розглянемо пластину з круглими врізами на сторонах, що паралельні осі абсцис, закріплену вздовж основи АВ та навантажену вздовж сторони CD зусиллями, що є паралельними осі Ох (рис. 16). Пластина складається з трьох шарів ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$), виготовлених з матеріалу с наступними властивостями:

$$E_1 / E_2 = 10; G / E_2 = 0.6; \nu_1 = 0.25 \quad (4.23)$$

з геометричними параметрами

$$a/b = 1; h/2b = 0.01. \quad (4.24).$$

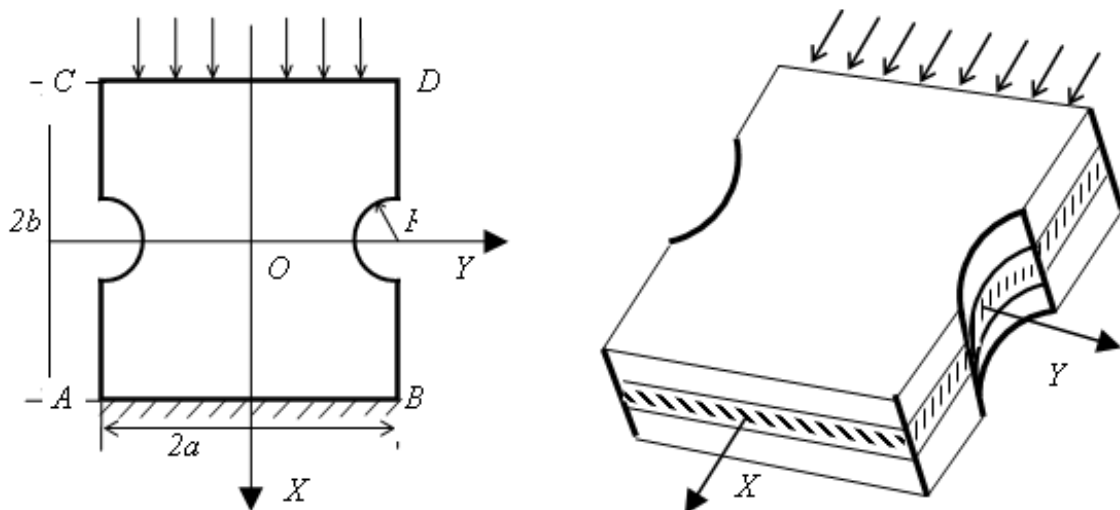


Рис. 16 Форма пластини, що досліджується.

Крайові умови співпадають прийняті наступними:

- вздовж АВ ($\partial\Omega_1$)

$$u|_{\partial\Omega_1} = v|_{\partial\Omega_1} = 0; w|_{\partial\Omega_1} = 0; \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

- вздовж CD :

$$N_n = P; S_n = 0; w = 0; M_n = 0.$$

- вздовж AC та BD :

$$N_n = 0; S_n = 0; w = 0; M_n = 0.$$

Знайдемо значення $\lambda_{кр}$ за допомогою динамічного методу.

Згідно запропонованого алгоритму, розв'яжемо задачу теорії пружності. В даному випадку структура рішення цієї задачі визначається виразами

$$u = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \Phi_2 + \omega_2 \Phi_3, v = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \Phi_2 + \omega_2 \Phi_4. \quad (4.25)$$

Тут $\Phi_i, i = \overline{1,4}$ - невизначені компоненти структурних формул, що належать до класу $C^2(\Omega_2)$.

Враховуючи симетрію задачі, невизначені компоненти $\{\Phi_2\}, \{\Phi_3\}$ та $\{\Phi_4\}$ будемо апроксимувати наступними системами степеневих поліномів:

$$\{\Phi_2\}, \{\Phi_3\}: 1, x, x^2, y^2, x^3, xy^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^5, x^3y^2, xy^4 \dots \quad (4.26)$$

$$\{\Phi_4\}: y, xy, x^2y, y^3, x^3y, xy^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^5y, x^3y^3, xy^5 \dots \quad (4.27)$$

При розв'язку задачі стійкості, для функції прогину використаємо структуру $w = \omega \Phi_1$, апроксимуючі невизначену компоненту Φ_1 так само як і Φ_2 та Φ_3 . Рівняння границі області може бути побудовано в вигляді

$$\omega(x, y) = F_1 \wedge_0 F_2 \wedge_0 F_3 \wedge_0 F_4, \quad (4.28)$$

де \wedge_0 - знак R-кон'юнкції [71], функції F_1, F_2 - множина точок плоскості, що знаходяться всередині смуг, які описуються, відповідно, нерівностями

$$F_1 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad F_2 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0 \quad (4.29)$$

Функції F_3, F_4 описують зовнішності окружностей радіуса R , центри яких знаходяться в точках $(-\alpha; 0)$ та $(\alpha; 0)$ відповідно:

$$F_3 = \frac{(x+a)^2 + (y)^2 - R^2}{2R} \geq 0, \quad F_4 = \frac{(x-a)^2 + (y)^2 - R^2}{2R} \geq 0. \quad (4.30)$$

Дослідимо стійкість пластини, в залежності від співвідношення $\frac{R}{2b}$, $0.05 \leq \frac{R}{2b} \leq 0.2$.

Результати розрахунків представлено в табл. 13.

Таблиця 13.

		Динамічний підхід					$\lambda_{кр}$ (енерг. підхід)
$\frac{R}{2b} = 0.05$	λ_1	5	10	15	17.12	17.13	17.14
	Λ	0.110	0.084	0.046	0.001	$\Lambda < 0$	
$\frac{R}{2b} = 0.1$	λ_1	5	10	15	20.89	20.90	20.91
	Λ	0.126	0.105	0.077	0.001	$\Lambda < 0$	
$\frac{R}{2b} = 0.15$	λ_1	10	15	20	26.50	26.51	26.51
	Λ	0.130	0.108	0.081	0.002	$\Lambda < 0$	
$\frac{R}{2b} = 0.2$	λ_1	10	20	30	35.60	35.61	35.66
	Λ	0.165	0.129	0.077	0.001	$\Lambda < 0$	

Як можна бачити з табл. 13 при збільшенні параметру λ_1 частота власних коливань Λ зменшується. Швидкість зменшення власних частот залежить від глибини врізів. А саме, при більших значеннях співвідношення $\frac{R}{2b}$ швидкість зменшення власних частот стає більш повільною.

Значення безрозмірного параметру критичного навантаження збільшується зі збільшенням співвідношення $\frac{R}{2b}$.

Розв'язки поставленої задачі, отримані енергетичним (п. 3.3.1.) та динамічним (п. 3.3.2.) методами співпадають до трьох знаків.

З метою перевірки вірогідності отриманих результатів зменшувалися розміри $\frac{R}{2b}$. При цьому значення $\lambda_{кр}$ також зменшувалося та прагнуло до відповідного значення для прямокутної пластини, що свідчить про правильність отриманих розв'язків.

Для дослідження практичної збіжності отриманих результатів було виконано розрахунковий експеримент при використанні різної кількості координатних функцій (табл. 4).

Таблиця 14. Розрахунковий експеримент при використанні різної кількості координатних функцій.

Число координатних функцій	$\lambda_{кр}$				
	N_w	$\frac{R}{b} = 0.05$	$\frac{R}{b} = 0.1$	$\frac{R}{b} = 0.15$	$\frac{R}{b} = 0.2$
64	14	16,95	20,59	26,14	35,35
84	16	16,89	20,49	26,07	35,25
100	18	16,85	20,42	26,01	35,18
121	20	16,80	20,38	25,96	35,16
144	22	16,76	20,35	25,93	35,13

Було встановлено, що результати стабілізуються в третьому знаку при збереженні кількості координатних функцій для прогину від 36 та більше (табл. 14). В табл. 14 наведено результати для багат шарової пластини (рис. 16) з ступенем ортотропії $E_1 / E_2 = 10$.

4.2.4. Вплив механічних властивостей на динамічну стійкість шаруватої пластини складної форми.

Розглянемо параметричні коливання тришарової пластини (укладка шарів $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) з двома круговими вирізами, формою, як в пункті 4.2.3, але

навантажену з двох сторін (рис. 17), що знаходиться під дією періодичного навантаження вздовж сторін, які паралельні вісі OX.

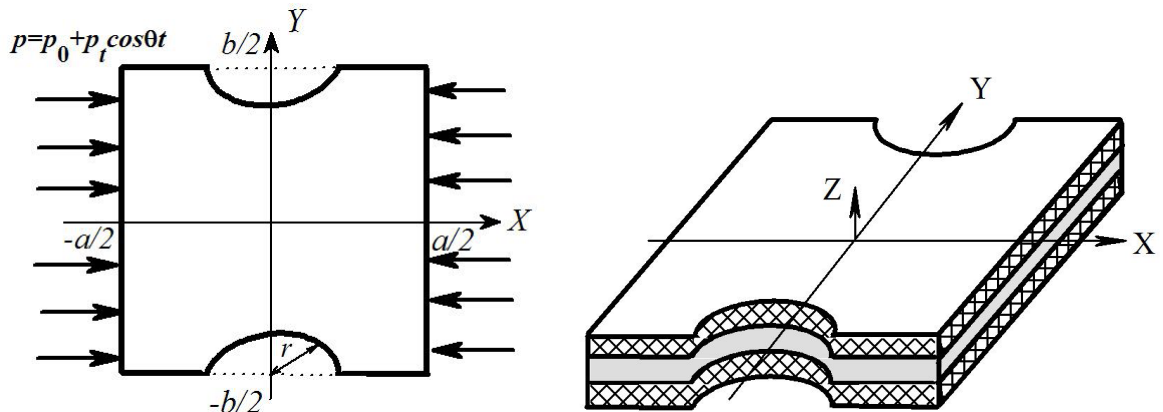


Рис. 17 Форма пластини, що досліджується.

Коливання пластини досліджено для видів матеріалів, що представлено в таблиці 15.

Таблиця 15. Механічні властивості матеріалів пластин, що досліджуються.

Матеріал	Властивості матеріалу		
	E_1 / E_2	G / E_2	$\nu_1 = \nu_2 E_1 / E_2$
Glass-epoxy(g-e)	3	0.6	0.25
Boron-epoxy(b-e)	10	0.33	0.22
Graphite (gr)	40	0.6	0.25

Значення геометричних параметрів прийняті наступними:

$$\frac{b}{a} = 1, \quad \frac{2r}{a} = 0.5, \quad \frac{h}{a} = 0.01. \quad (4.31)$$

Розглядаються крайові умови виду:

$$N_n = -p, T_n = 0, w = 0, M_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \quad (4.32)$$

$$N_n = 0, T_n = 0, w = 0, M_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 := \partial\Omega / \partial\Omega_2 \quad (4.33)$$

Зауважимо, що у даному випадку докритичний стан пластини буде неоднорідним. Тому необхідно виконати всі пункти запропонованого алгоритму.

В табл. 16 представлені значення частотного параметру $\lambda = \Omega_L a^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_2 h^2}}$ при різних значеннях відношення p_0 / p_{kr} та значення критичного навантаження $\bar{p}_{kr} = a^2 N_x / E_2 h^3$ для різних матеріалів.

Таблиця 16. Значення частотного параметру λ та критичного навантаження

	\bar{p}_{kr}	λ		
		p_0 / p_{kr}		
		0,25	0,5	0,75
Glass-epoxy	9,45	46,680	38,331	27,299
Boron-epoxy	16,22	57,421	46,953	33,265
Graphite	46,11	92,292	75,553	53,704

Вплив постійної складової навантаження p_0 на розташування зон нестійкості (ОДН, $\bar{\theta}_1 = 2\Omega_L \sqrt{1-k}$, $\bar{\theta}_2 = 2\Omega_L \sqrt{1+k}$) для різних видів матеріалів можна простежити за допомогою рис. 18-20. Як і у випадку пластин прямокутної форми, при збільшенні навантаження p_0 нестійкість пластини виникає при менших значеннях збуджуючої частоти.

За допомогою рис. 21-24 можна зробити висновки про вплив параметрів навантаження та видів матеріалів на амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) нелінійних усталених коливань, що виникають після втрати стійкості. На рис. 21-22 криві побудовані для різних значень відношення p_t / p_{kr} (glass-epoxy, graphite).

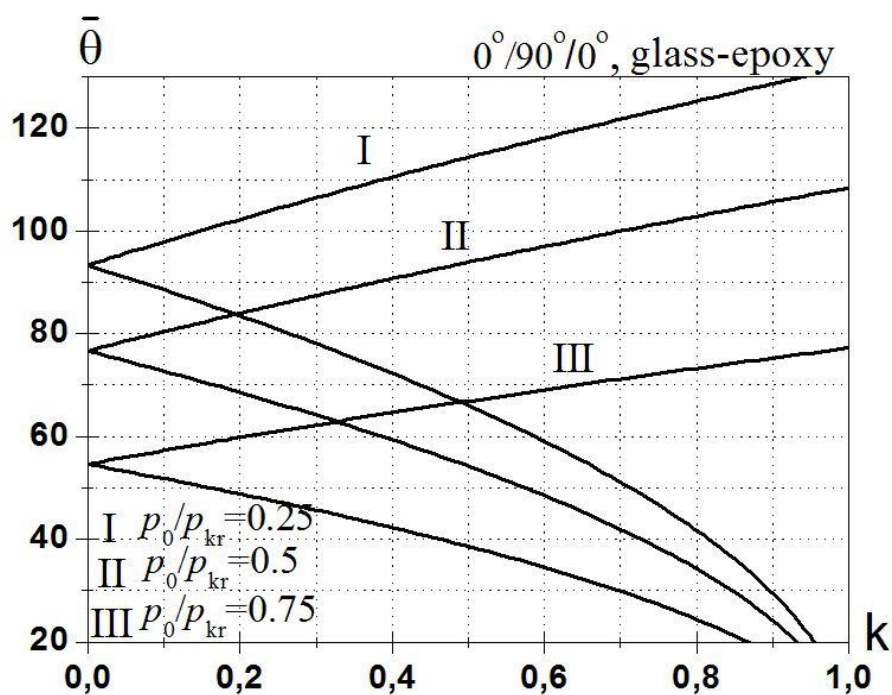


Рис. 18. ОДН при $p_0/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$, glass-эпоху.

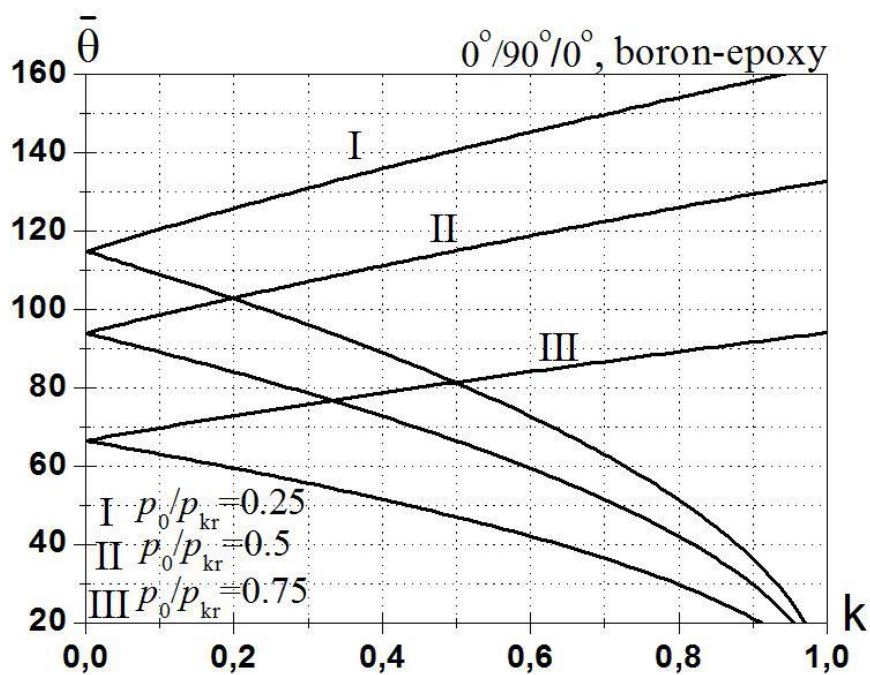


Рис. 19. ОДН при $p_0/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$, борон-эпоху.

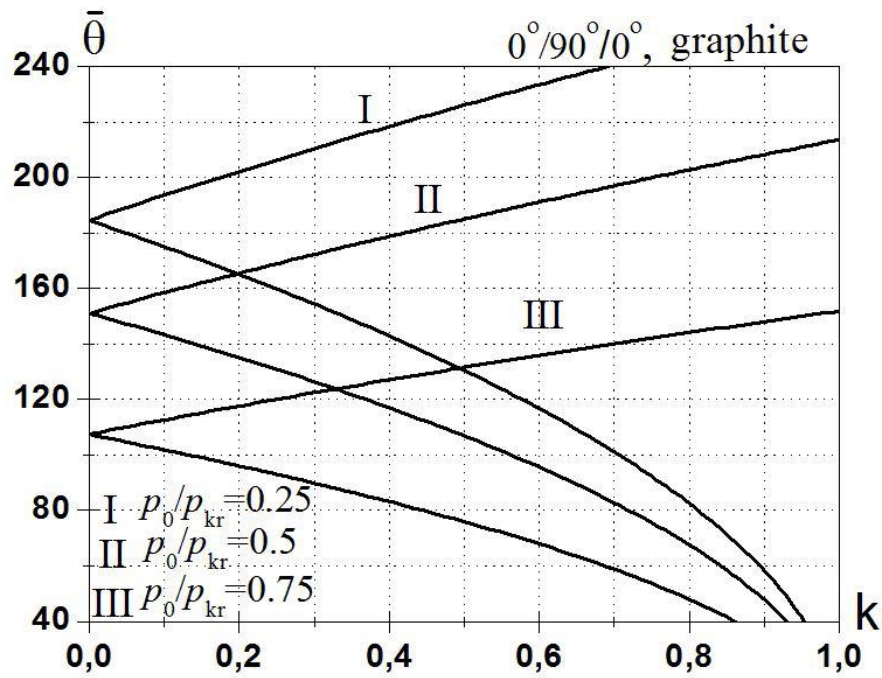


Рис. 20. ОДН при $p_0/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$, graphite.

На рис. 21-22 зображені амплітудно-частотні залежності, отримані для матеріалу graphite при різних значеннях відношення p_0/p_{kr} . Зменшення амплітуди змінної частини навантаження p_t приводить до зближення гілок АЧХ, зміна постійної складової навантаження впливає на нахил кривих.

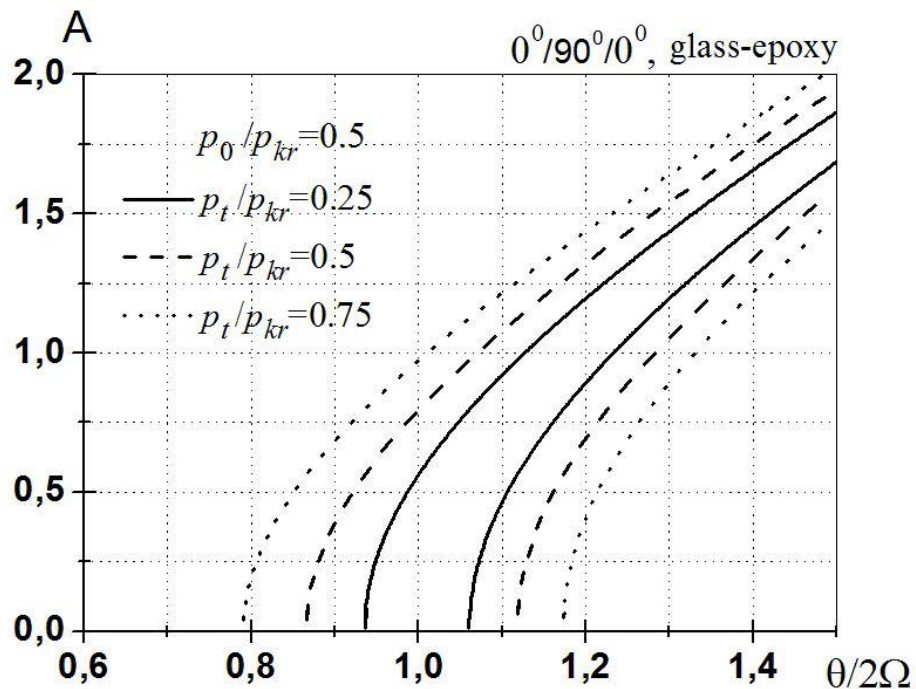


Рис. 21. АЧХ при $p_t/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$, glass-epoxy.

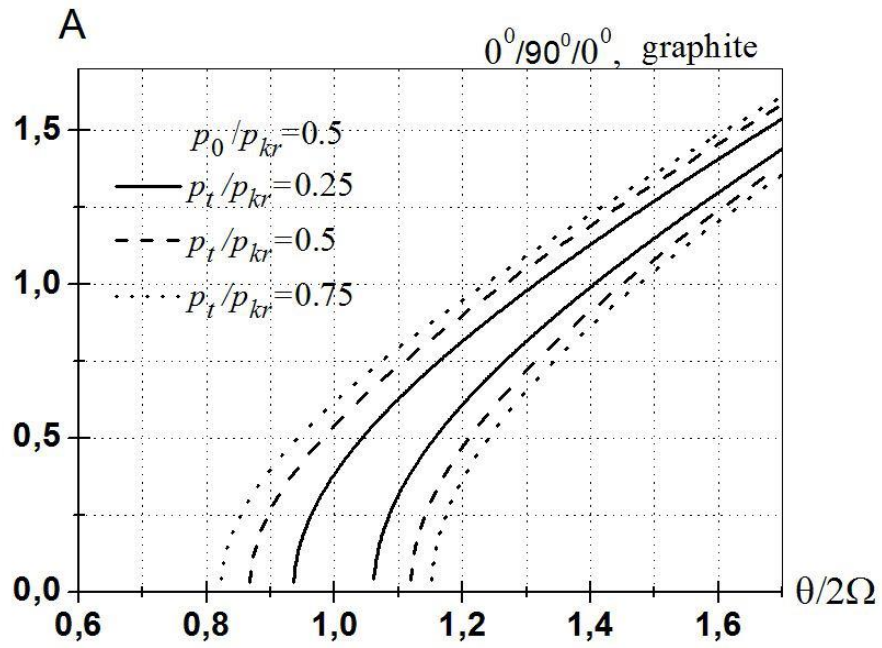


Рис. 22. АЧХ при $p_t/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$, graphite.

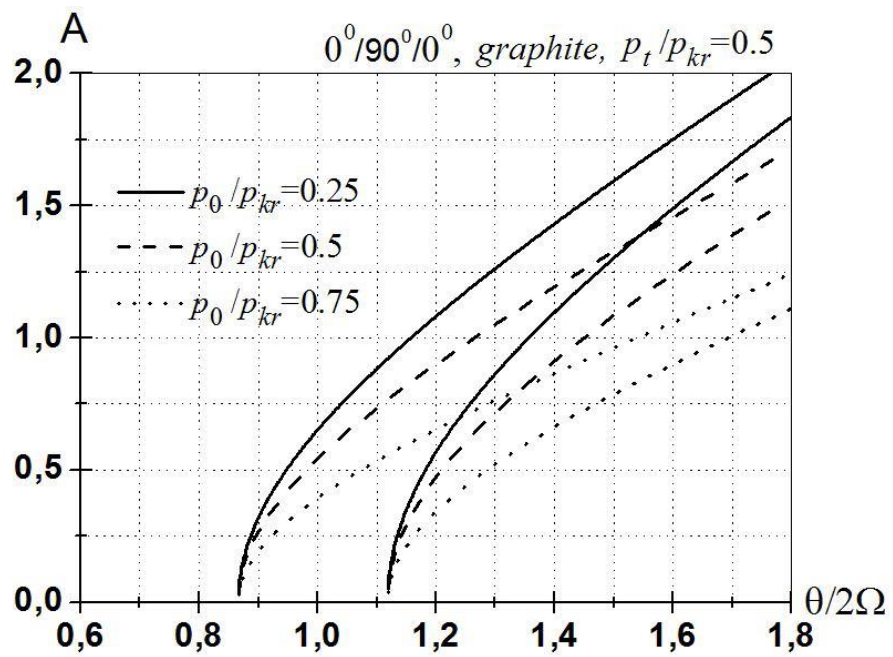


Рис. 23. АЧХ при $p_0/p_{kr} = 0,25; 0,5; 0,75$,

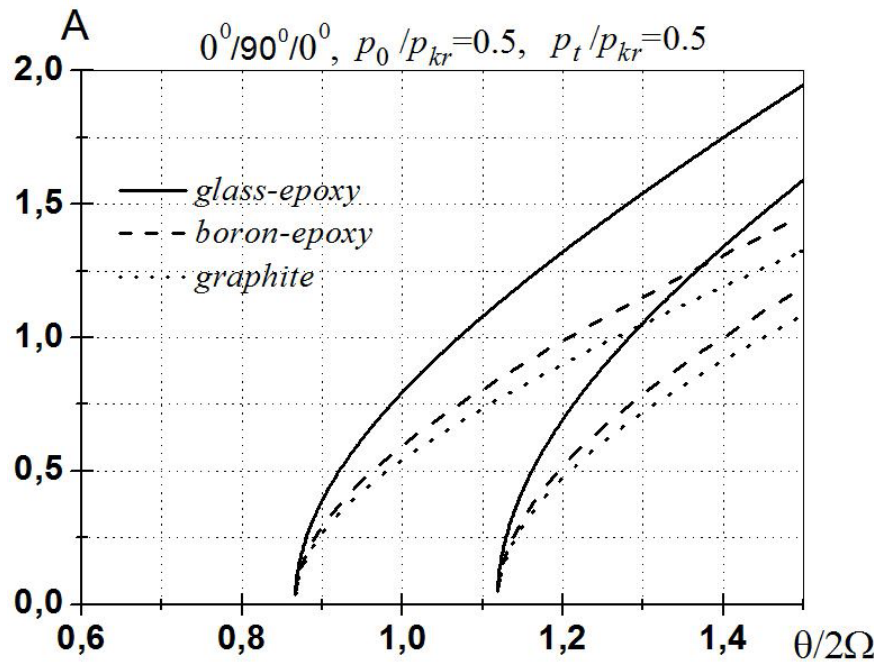


Рис. 24. АЧХ при різних видах матеріалів.

Аналіз впливу виду матеріалу на залежність амплітуди від частоти нелінійних коливань (рис. 24) дозволяє зробити висновок, що при однакових геометричних параметрах, крайових умовах та параметрах навантаження суттєву роль відіграє матеріал, з якого виготовлена пластина. А саме, найбільші значення амплітуди характерні для матеріалу glass-epoxy, якщо ж пластина виготовлена з графіту (graphite), амплітуди коливань будуть відповідно меншими.

4.2.5. Вплив розташування врізів на динамічну стійкість багатошарової Н-подібної пластини.

Розглянемо задачу про параметричні коливання пластини складної форми, що знаходиться під дією періодичного навантаження, прикладеного вздовж сторін $x = \pm \frac{a}{2}$ паралельно осі Ox , рис. 25. Дослідження було проведено для крайових умов SS1 та параметрів, що наведено нижче:

$$\frac{a}{b} = 1. \quad \frac{l}{b} = 0,2. \quad \frac{d}{b} = 0,4. \quad \frac{r}{a} = 0,4. \quad (4.34)$$

Структура розв'язку для розглянутих крайових умов для прогину має вигляд

$$W = \omega P_0, \quad (4.35)$$

де $\omega(x, y) = 0$ – рівняння границі області.

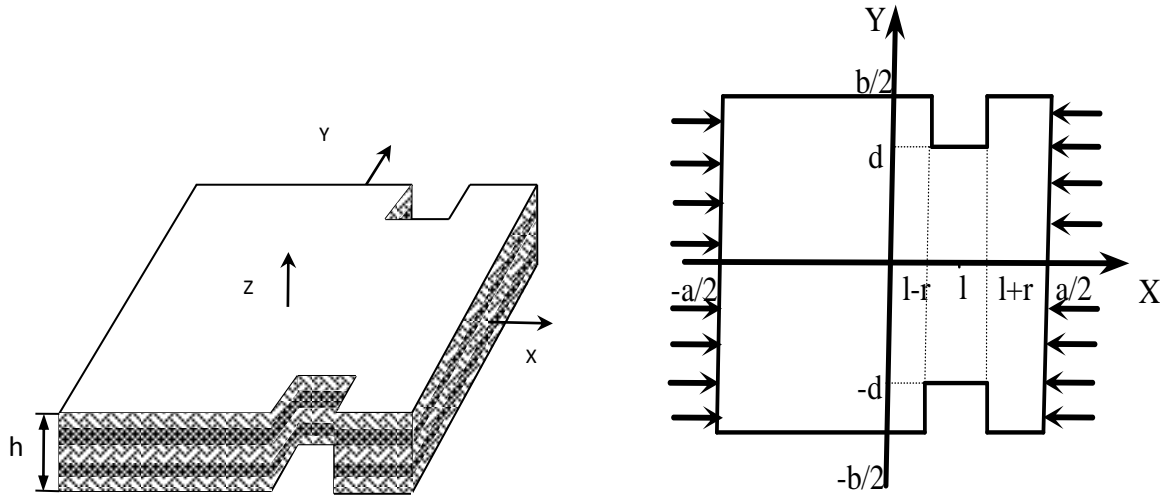


Рис. 25. – Форма пластини

Функцію $\omega(x, y)$ побудуємо за допомогою теорії R-функцій [71]:

$$\omega(x, y) = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 (\bar{f}_3 \vee_0 f_4), \quad (4.36)$$

де функції f_1, f_2, f_3, f_4 , визначаються за наступними формулами,

$$f_1 = \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_2 = \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0, \quad (4.37)$$

$$f_3 = \frac{1}{2r} \left(r^2 - (x-l)^2 \right) \geq 0, \quad f_4 = \frac{1}{2d} \left(d^2 - y^2 \right) \geq 0$$

Символи $\wedge_0, \vee_0, \bar{\quad}$ в (4.36) визначають R-кон'юнкцію, R- диз'юнкцію та R-заперечення [71]. Структури розв'язку для переміщень в площині пластини, вибрано у вигляді

$$u_i = P_i, v_i = P_{i+2}, i = 1, 2 \quad (4.38)$$

В формулах (4.38) $P_i, i = 0..4$ – невизначені компоненти структури.

В таблиці 17 представлені частотні параметри Λ , що відповідають різним значенням навантаження P_0 . На рисунку 26-27 зображено залежності амплітуди від частотного співвідношення $\theta/2\Omega$. Амплітудно-частотні залежності побудовані для багат шарових пластин з укладкою шарів $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$, $90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$. Результати отримані при варіюванні амплітуди P_i змінної частини навантаження.

Таблиця 17. Залежність частотного параметру Λ від навантаження пластини P_0

α	P_0 / P_{kr}					P_{kr}
	0.	0.5	0.75	0.9		
0	37.2	26.7	19.1	12.2	10.5	
	33	37	76	9	10	
$0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$	38.4	28.0	20.4	13.2	10.2	
	77	36	00	54	74	
$90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$	39.0	29.6	22.1	14.5	7.85	
	95	78	03	02	3	

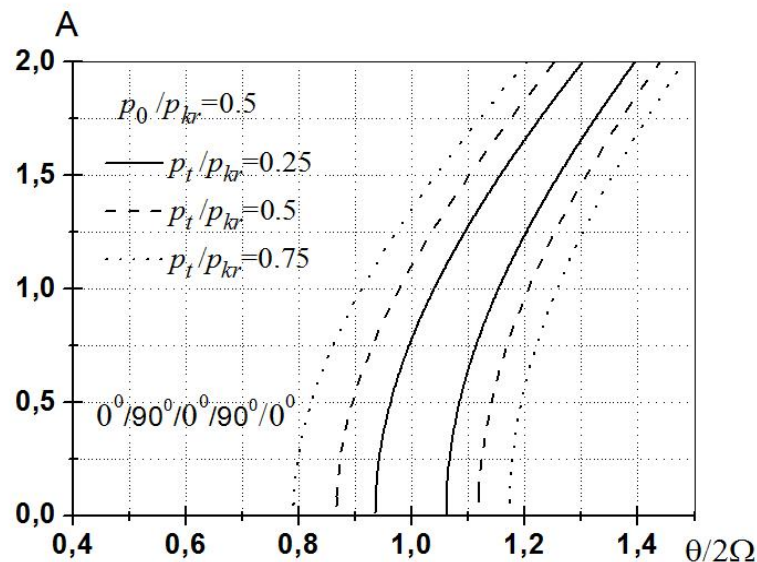


Рисунок 26. Амплітудно-частотні залежності для пластини, зображеної на рис.25 з укладкою $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$.

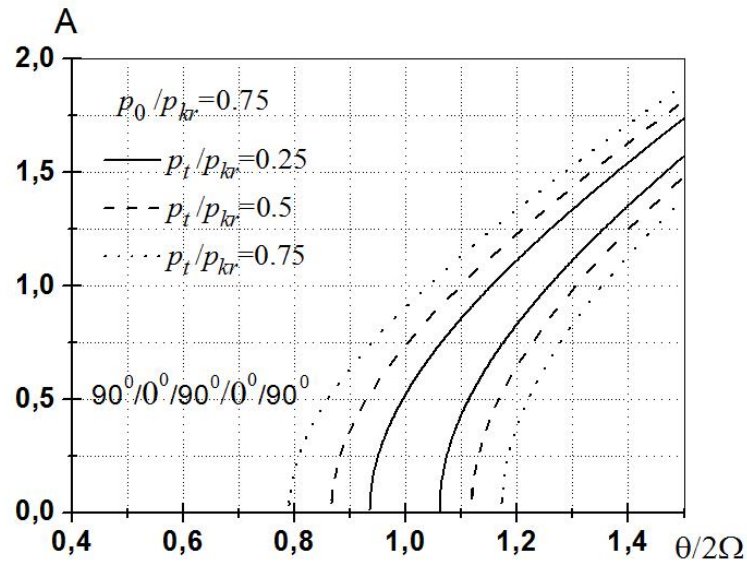


Рисунок 27. Амплітудно-частотні залежності для пластини, зображеної на рис.18 з укладкою $90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$.

Слід відмітити, що зі збільшенням співвідношення $p_t/p_{кр}$ коридор, що утворюють амплітудно-частотні залежності, стає ширшим. А співвідношення $p_0/p_{кр}$ впливає на швидкість зростання кривих. Для більшого $p_0/p_{кр}$ амплітудно-частотні залежності зростають повільніше.

4.2.6. Дослідження параметричних коливань, зон динамічної нестійкості для Т-подібної пластини в рамках класичної теорії для рівнянь, представлених у змішаній формі

Проілюструємо запропонований алгоритм на прикладі тришарової пластини, представленої на рис.28. Нехай пластина навантажена періодичними зусиллями, які прикладені вздовж сторін паралельних осі Oy та направлені паралельно осі Ox .

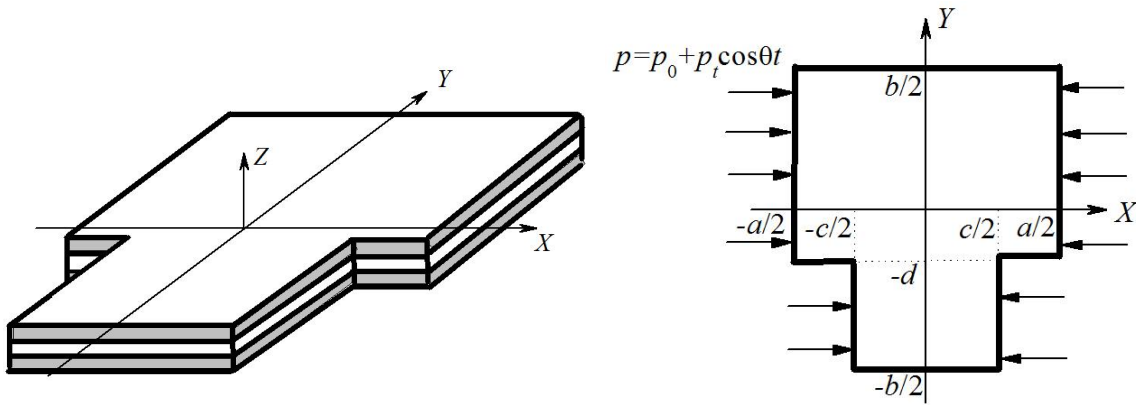


Рис. 28 – Форма пластини

Шари пластини виготовлені з графіту, механічні характеристики якого визначаються як:

$$E_1 / E_2 = 40, G / E_2 = 0.6, \nu_1 = 0.25, \quad (4.39)$$

Також будемо вважати, що всі шари мають однакову товщину, загальна товщина пластини дорівнює: $h/a = 0.01$. Шари укладено згідно закону: $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$. Будемо вважати, що на границі виконуються наступні умови:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -p, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad (4.40)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2, \quad (4.41)$$

де $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ – навантажена та ненавантажена частини контуру відповідно.

Зауважимо, що в розглянутій задачі маємо однорідний докритичний стан, а

тому функції Φ_0 буде мати вигляд: $\Phi_0 = -\frac{y^2}{2}$.

В табл. 18 представлені значення параметру критичного навантаження $\bar{p}_{кр} = p_{кр} \cdot \frac{a^2}{E_2 h^3}$ розглянутої пластини. Результати отримані за допомогою динамічного підходу. Також в табл. 18 наведено значення параметру критичного навантаження для квадратної пластини отримані в [5] та [47]. Зауважимо, що в останній роботі авторами запропоновано методи знаходження критичного навантаження, які також використовують теорію R -функцій, але початкова система руху представлена в переміщеннях.

Таблиця 18. Значення безрозмірного параметру критичного навантаження

$$\bar{p}_{кр} = p_{кр} \cdot \frac{a^2}{E_2 h^3}$$

	$c/a=0.6,$ $d/a=0.3,$ $b/a=1$	$c/a=0.8,$ $d/a=0.4,$ $b/a=1$	Квадратна	Квадратна, [47]	Квадратна [5]
$\bar{p}_{кр}$	42.43	37.31	36.18	36.20 ^(а) , 36.17 ^(б)	36.16

(а) – енергетичний підхід,

(б) – динамічний підхід

Зменшення розміру вирізів приведе до виродження пластини в квадратну, відповідно значення критичного параметру навантаження наближаються до значення критичного параметру квадратної пластини.

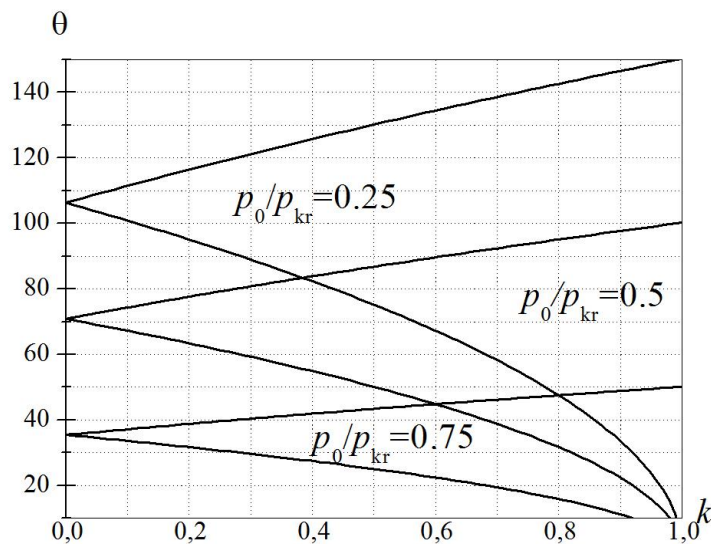


Рис. 29 – Области динамічної нестійкості

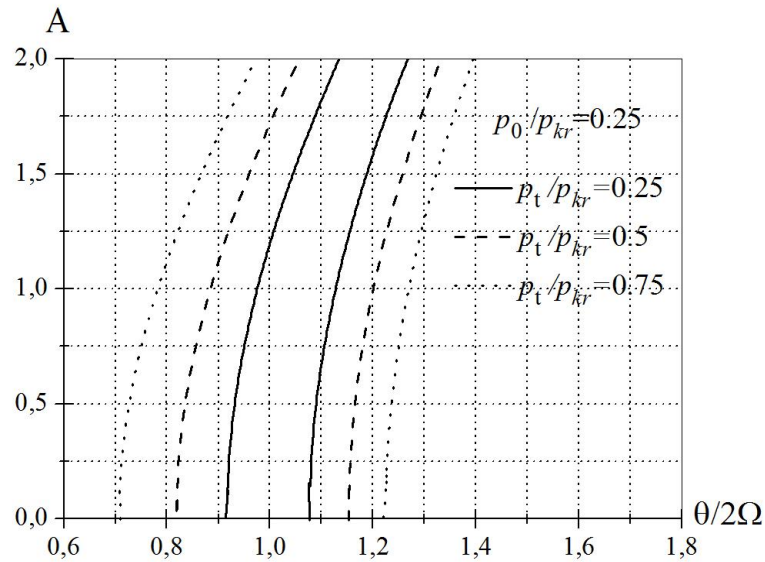


Рис. 30 – Амплітудно-частотні залежності

Наступні результати отримані при геометричних параметрах:

$$c/a = 0.6, \quad b/a = 1, \quad d/a = 0.3. \quad (4.42)$$

На рис. 29 побудовані області динамічної нестійкості в залежності від постійної складової навантаження p_0 ($p_0/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75$). При більших значеннях p_0 нестійкість виникає при менших значеннях збуджуючої частоти θ . На рис. 30 побудовані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для різних значень амплітуди змінної частини навантаження p_t : $p_t/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75$ та $p_0/p_{kr} = 0.25$. Зменшення цього параметру приводить до зближення гілок АЧХ.

4.3. Висновки до розділу 4.

1. В четвертому розділі розроблений метод застосовано для дослідження геометрично нелінійних коливань та стійкості багат шарових пластин складної форми без отворів в рамках класичної і уточненої теорії першого порядку.

2. Розв'язано низку тестових задач за допомогою розробленого програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL. Одержані результати було порівняно з відомими. Досліджено збіжність та визначено необхідну кількість координатних функцій для розв'язання тестових задач.

3. Досліджено вплив геометричних параметрів, кількості шарів, крайових умов, властивостей матеріалу на значення критичного навантаження, зони динамічної стійкості \ нестійкості та амплітудно-частотні характеристики.

4. Зроблено наступні практичні висновки:

- на значення критичного навантаження в першу чергу впливає степінь ортотропії, зі зростанням якої, збільшується і значення критичного навантаження;

- при збільшенні кількості шарів критичне навантаження збільшується, але несуттєво;

- на зони динамічної нестійкості найбільший вплив мають крайові умови.

РОЗДІЛ 5.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ТА ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ З ОТВОРАМИ

В літературі існує цілий пласт робіт, присвячених дослідженню багатошарових пластин з отвором. Це пов'язано з частою потребою обслуговувати різні потреби – кріплення пластин до інших елементів конструкції, проведення кабелів та інше. Цей клас задач ускладнюється тим, що при різних видах крайових умов докритичний стан не неоднорідний. Тому дослідження багатошарових пластин з отворами є важливою задачею.

На рис. 31 представлено деякі приклади багатошарових пластин складної форми, переважно з отвором, які використовуються на практиці. Запропонований в роботі метод може бути застосовано до розрахунку подібних пластин.

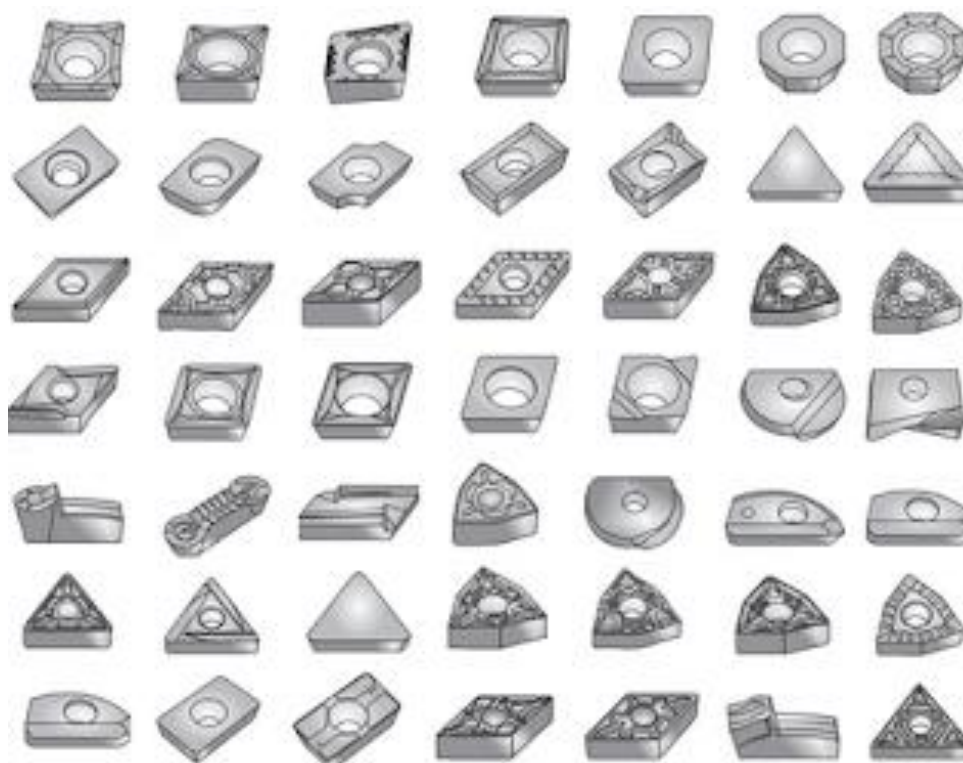


Рис. 31. Приклади багатошарових пластин складної форми.

5.1. Тестування методу на прикладі дослідження критичного навантаження багат шарової пластини з квадратним отвором.

Розглянемо тришарову пластину з квадратним отвором (рис. 32) В цьому випадку необхідно визначити попередній напружений стан багат шарової пластини. Припустимо, що пластина навантажується уздовж країв, паралельних осі Oy ($x = \pm \frac{a}{2}$).

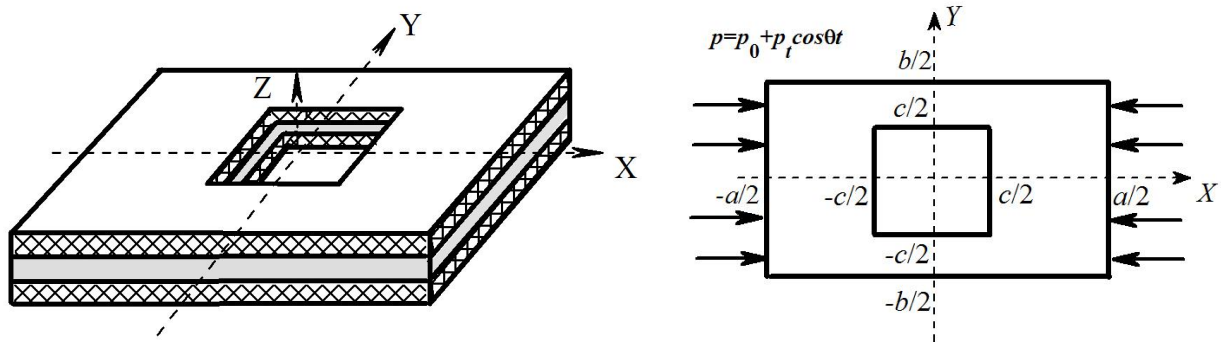


Рис. 32. Форма пластини

Розглянуто наступні крайові умови. Пластина вважається вільно опертою на зовнішній границі, а отвір вільним (SS-F):

- на сторонах, що паралельні Oy діють наступні умови:

$$w = 0, M_x = 0, N_x = -p, N_{xy} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \quad (4.43)$$

- на сторонах, що паралельні Ox діють наступні умови:

$$w = 0, M_y = 0, u = 0, N_y = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 : y = \pm \frac{b}{2} \quad (4.44)$$

- на внутрішньому отворі діють наступні умови:

$$M_n = 0, Q_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega / (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \quad (4.45)$$

Отримано чисельні результати для матеріалу з такими співвідношеннями для коефіцієнтів пружності: $E_{11}=141.0$ Гра, $E_{22}=9.23$ Гра, $G_{12}=G_{13}=5.95$ Гра, $G_{23}=2.96$ Гра, $\nu_{12}=0.313$.

Структури розв'язку для вищезгаданих крайових задач взяті у вигляді:

$$w_1 = \omega_0 \cdot P_0; u_i = \omega_2 \cdot P_i; v_i = P_{i+2}, i = 1, 2; \quad (4.46).$$

де $P_0, P_j (j = \overline{1,4})$ є невизначеними компонентами структури, представленими як розкладання деякої повної системи функцій (тригонометричні поліноми, сплайни тощо), $\omega(x, y) = 0, \omega_0(x, y) = 0, \omega_2(x, y) = 0$ є рівняннями границі області та його частин $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ і $\partial\Omega_2$. Для побудови функцій $\omega(x, y), \omega_0(x, y), \omega_2(x, y)$, які дорівнюють нулю відповідно на всій границі $\partial\Omega$ та її частках $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \\ \omega_0(x, y) &= f_1 \wedge_0 f_2, \quad \omega_2(x, y) = f_2\end{aligned}\quad (4.47)$$

де \wedge_0, \vee_0 R-оператори [71] відповідно

$$\begin{aligned}x \wedge_0 y &= x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Функції $f_i, i = 1..4$ в (4.12) визначаються як

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_2 = \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0, \\ f_3 &= \frac{1}{c} \left(x^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right) \geq 0, \quad f_4 = \frac{1}{c} \left(y^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right) \geq 0\end{aligned}\quad (4.49)$$

Для перевірки запропонованого підходу ми досліджуємо чотиришарову багатошарову пластину із вільним отвором, крайовими умовами (4.8-4.10) та розмірами $a = b = 0,5$ м, $h = 0,005$ м. Ця проблема була вирішена Dash S. та іншими в [103]. Точність та ефективність даного методу встановлюються шляхом порівняння безрозмірного параметру критичного навантаження

$$\bar{\lambda} = \frac{N_x b^2}{E_2 h^3} \text{ з [103], рис. 33.}$$

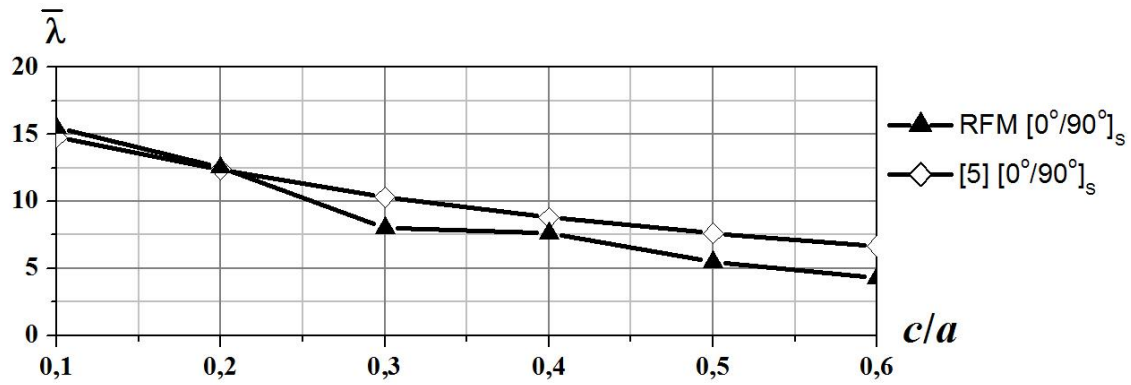


Рис. 33. Порівняння безрозмірного параметру критичного навантаження з відомим.

Певне відхилення результатів можна прокоментувати різними методами дослідження, а також тим, що в роботі [103] не враховується неоднорідний докритичний стан пластини.

5.2. Вплив розміру отвору на власні частоти, зони динамічної нестійкості та криві відгуку багат шарової пластини з квадратним отвором.

Продовжимо розв'язувати задачу про параметричні коливання пластини з квадратним отвором (рис. 32). Крім крайових умов SS-F (де пластинка вважається вільно опертою на зовнішній границі, а отвір вільним), розглянемо ще вільне опирання по всьому контуру (SS-SS):

$$\begin{aligned}
 w = 0, M_x = 0, N_x = -p, N_{xy} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \\
 w = 0, M_x = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_4, \partial\Omega_4 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1; \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Структури розв'язку тоді матимуть вигляд

$$w_1 = \omega \cdot P_0; u_i = P_i, v_i = P_{i+2}, i = 1, 2. \quad (4.51)$$

Подальші розрахунки проводяться для геометричних параметрів $a/b = 2$, $h = 0.005\text{m}$ і крайових умовах (4.43). В таблиці 19 наведено вплив розміру вирізу

на безрозмірні частоти $\Lambda = \Omega_L a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$ для різних значень статичної складової навантаження p_0 .

Таблиця 19. Вплив розміру отвору на власні частоти $\Lambda = \Omega_L a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$

c/b	$0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$			$0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$			$0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$		
	p_0 / p_{kr}								
	0	0.25	0.75	0	0.25	0.75	0	0.25	0.75
0.1	19.197	16.894	10.051	19.290	16.886	9.923	19.038	16.605	9.733
0.2	22.937	19.979	11.684	22.533	19.602	11.453	22.082	19.194	11.185
0.25	24.237	21.169	12.535	23.825	20.842	12.556	23.354	20.388	12.080
0.4	32.835	29.564	20.527	31.874	28.546	19.504	30.879	27.447	17.993

Вплив параметра розміру отвору ($c/b = 0.1, 0.2, 0.25, 0.4$) на області динамічної стійкості \ нестійкості ($\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1-k}$, $\theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1+k}$.) вивчено для $p_0 / p_{kr} = 0.25, 0.75$, рис. 34-35. Отримані результати демонструють однакову поведінку в обох випадках: при збільшенні значення c/a втрата нестійкості відбувається при більших значеннях частоти збудження θ , а відповідні зони займають більшу площу. Слід також зазначити, що зони нестійкості для $p_0 / p_{kr} = 0.25$ відповідають більшій величині частоти збудження θ .

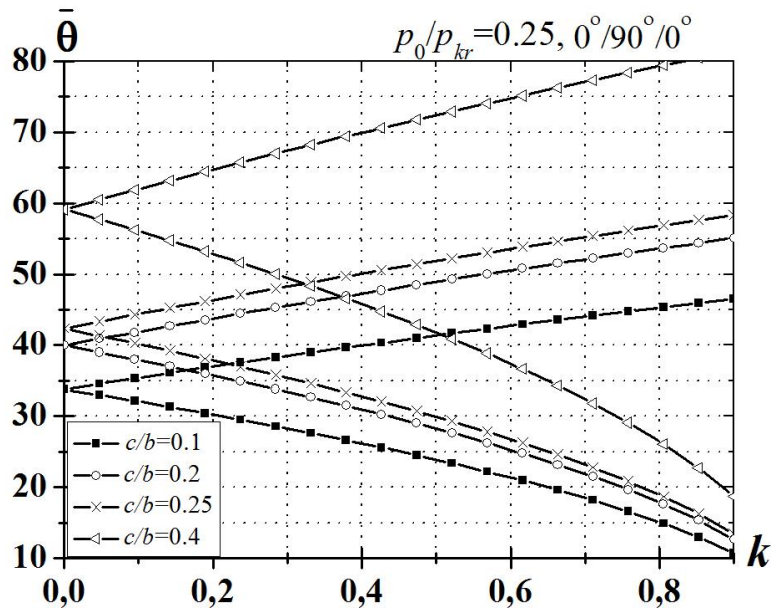


Рис. 34. Зони динамічної нестійкості для різних параметрів отвору (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$).

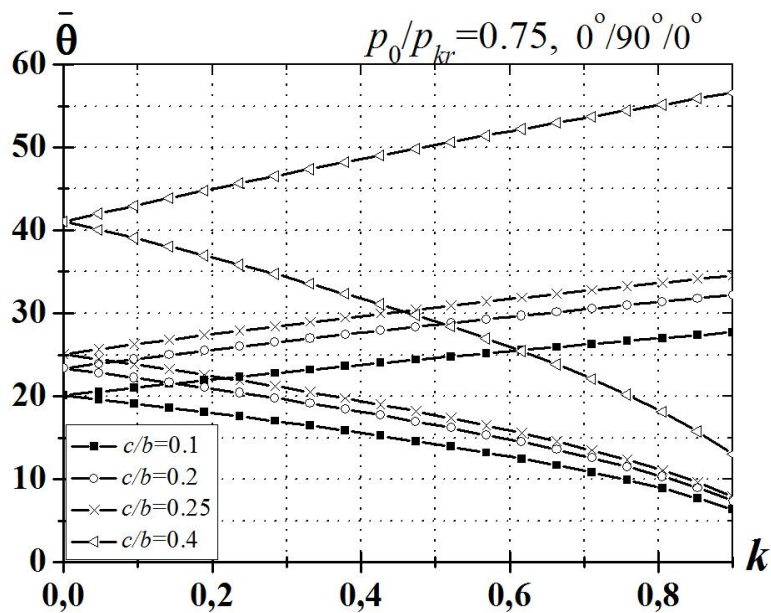


Рис. 35. Зони динамічної нестійкості для різних параметрів отвору (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.75$).

Аналіз нестійкості виконується для три-, чотири- та п'ятишарових пластин. (рис. 36-37). Результати отримані для $p_0/p_{kr}=0,25$ і $c/b=0,2,0,4$.

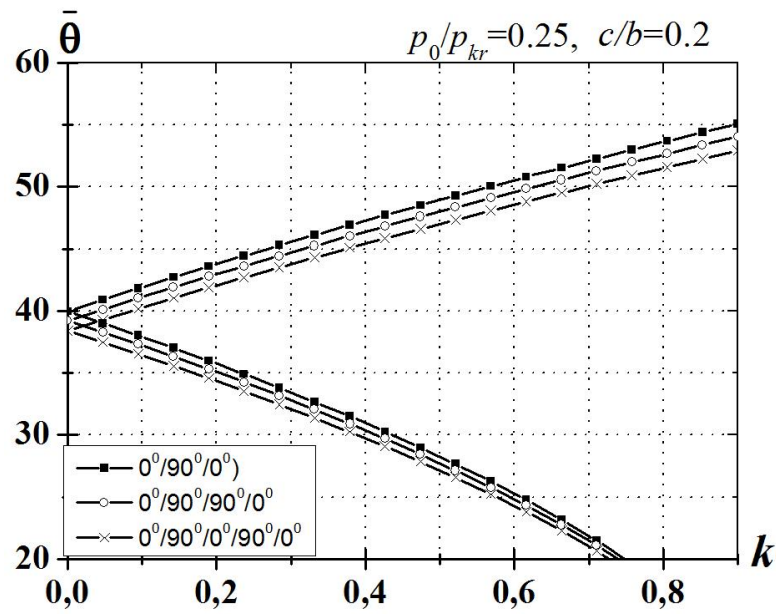


Рис. 36. Зони нестійкості для різного числа шарів (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$, $c/b=0.2$).

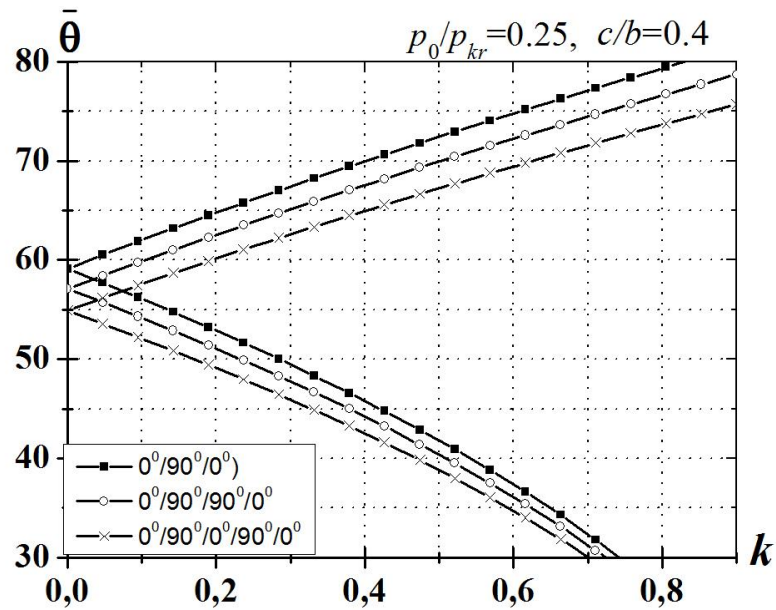


Рис. 37. Зони нестійкості для різного числа шарів (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$, $c/b=0.4$).

Досліджено нелінійні параметричні коливання для 3-шарових пластин. Вплив параметра навантаження p_t на криві відповідності показано на рис. 38-

39. Розрахунки виконуються для $c/b=0.1, 0.2$, $p_0/p_{kr}=0.25$. Зменшення параметру p_t призводить до збіжності кривих.

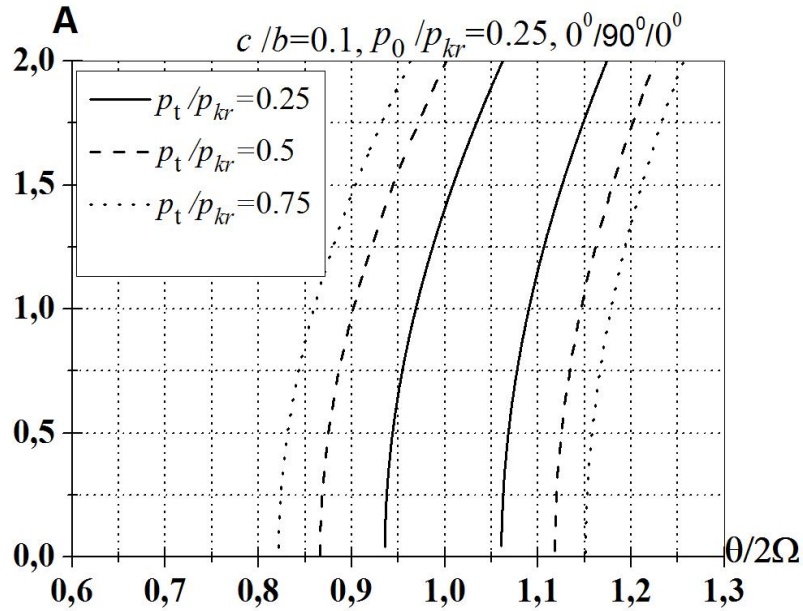


Рис. 38. Крива відгуку для різних значень параметра p_t (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$, $c/b=0.1$).

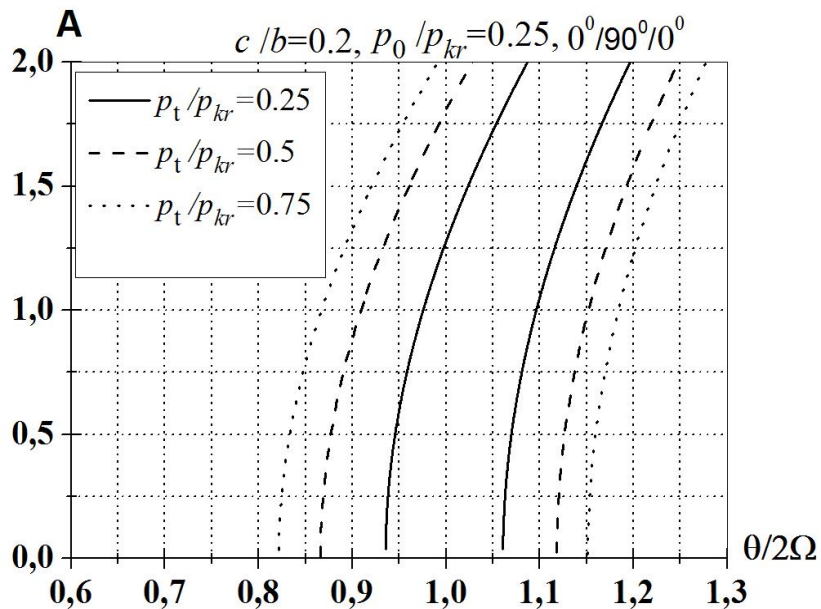


Рис. 39. Крива відгуку для різних значень параметра p_t (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$, $c/b=0.2$).

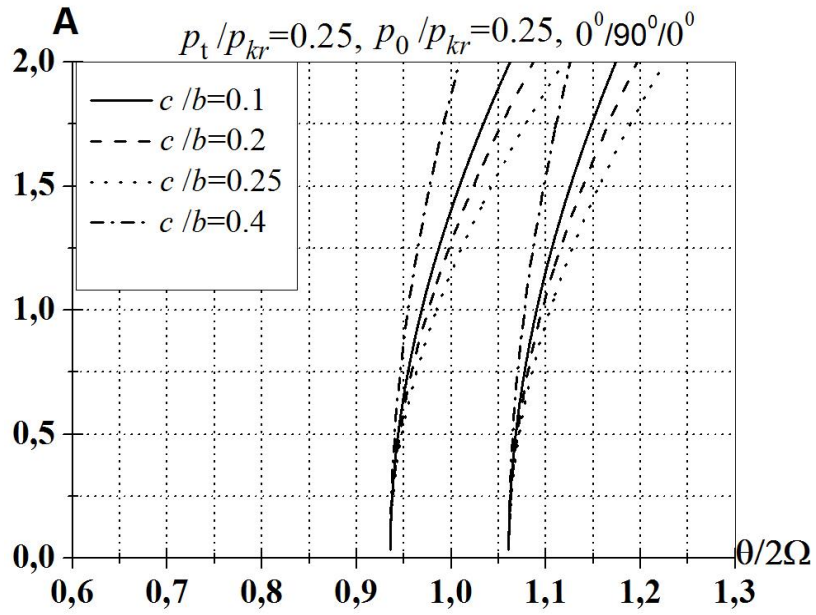


Рис. 40. Крива відгуку для різних розмірів вирізу (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.25$).

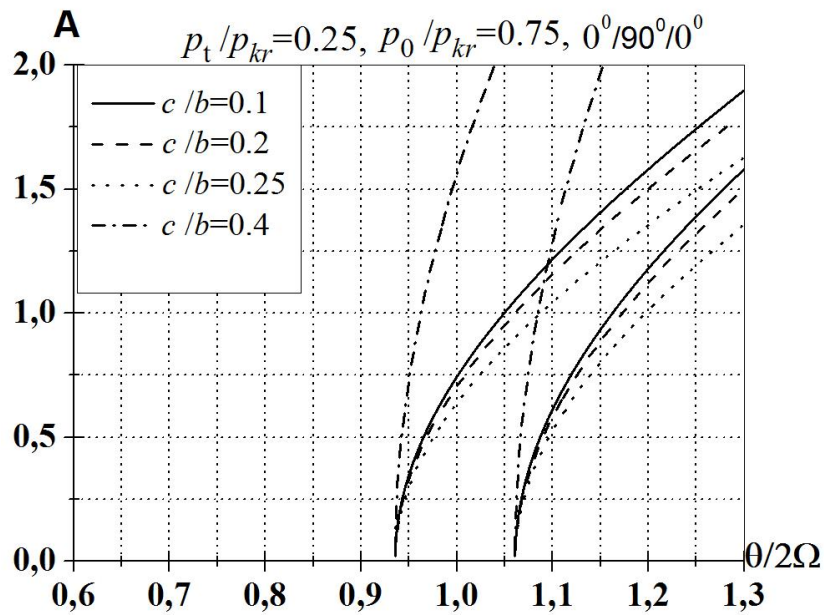


Рис. 41. Крива відгуку для різних розмірів вирізу (SS-SS, $p_0/p_{kr}=0.75$).

Ефект впливу розміру вирізу на скелетні криві аналізується для $p_0/p_{kr}=0.25, 0.75$, $p_t/p_{kr}=0.25$ (рис. 41). Збільшення отвору призводить до

збільшення амплітуди вібрації. Зміна статичної складової навантаження p_0 впливає на схил кривих відповідей.

5.3. Дослідження параметричних коливань п'ятишарової пластини з кутовими вирізами та центральним круговим отвором.

Розглянемо п'ятишарову пластину (рис. 42) симетричної будови з укладкою шарів $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Форма пластини ускладнюється кутовими вирізами та отвором всередині.

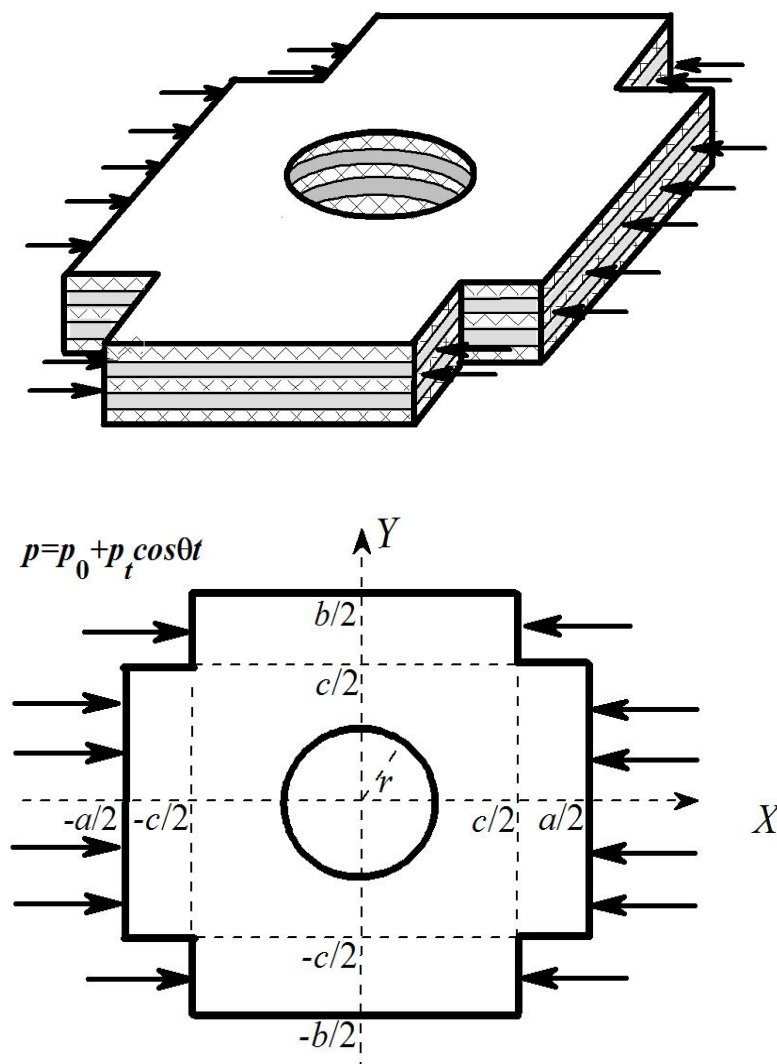


Рис. 42. Форма пластини, що досліджується

Нехай навантаження прикладене вздовж сторін паралельних осі Oy . Також будемо вважати, що на зовнішньому контурі функція прогину задовольняє умови

$$w = 0, M_n = 0, \quad (4.52)$$

внутрішній контур є вільним. Для переміщень у площині пластини на навантаженій частині контуру крайові умови приймають вид

$$N_n = -p, T_n = 0; \quad (4.53)$$

на ненавантаженій -

$$N_n = 0, T_n = 0. \quad (4.54)$$

В роботі досліджено пластину з наступними геометричними параметрами:

$$b/a=1, h/a=0.01, c/a=0.35, \quad (4.55)$$

розмір отвору, тобто значення r/a будемо варіювати. Властивості розглянутих матеріалів надано у таблиці 4.

Структуру розв'язку оберемо наступним чином:

$$u = \Phi_1, v = \Phi_2, w = \omega_2 \Phi_3, \quad (4.56)$$

де $\omega_2(x, y) = 0$ - рівняння зовнішньої межі області:

$$\omega_2(x, y) = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \quad (4.57)$$

де функції f_1, f_2, f_3, f_4 , мають вигляд:

$$f_1 = \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0; \quad f_2 = \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0; \quad (4.58)$$

$$f_3 = \frac{1}{c} \left(\left(\frac{c}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0; \quad f_4 = \frac{1}{c} \left(\left(\frac{c}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0;$$

Символи \wedge_0, \vee_0 , в (4.57) визначають R-операції:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

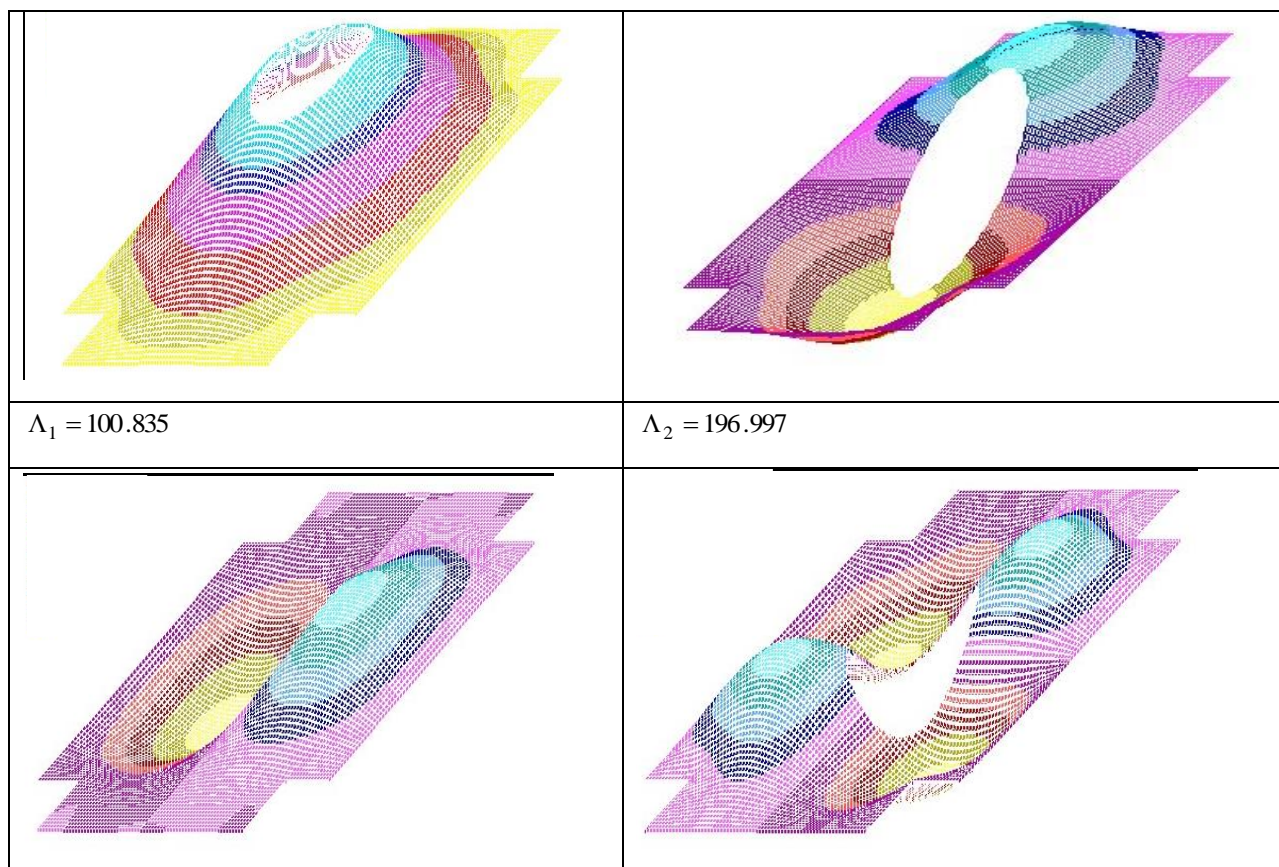
В таблиці. 20 наведено значення частотного параметру $\Lambda_i = \Omega_i a^2 \sqrt{\frac{12(1-\mu_1\mu_2)}{E_2 h^2}}$, $i = \overline{1,4}$, які отримані для різних матеріалів при $r/a = 0.15$.

Таблиця 20 – значення частотного параметру $\Lambda_i = \Omega_i a^2 \sqrt{\frac{12(1-\mu_1\mu_2)}{E_2 h^2}}$, $i = \overline{1,4}$.

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Glass-epoxy	41.069	79.561	86.414	143.419
Boron-epoxy	55.157	108.418	128.919	202.165
Graphite	100.835	196.997	244.552	371.306

В таблиці 21 зображені відповідні форми коливань для матеріалу «graphite» та значення відповідних частот. Втрата стійкості проходить по першій формі коливань.

Таблиця 21. Форми коливань пластини (graphite).



$\Lambda_3 = 244.552$	$\Lambda_4 = 371.306$
-----------------------	-----------------------

В табл. 22 представлено значення частотного параметру $\Lambda = \Omega a^2 \sqrt{\frac{12(1-\mu_1\mu_2)}{E_2 h^2}}$ для різних розмірів отвору та матеріалів.

Таблиця 22. Залежність безрозмірного частотного параметру Λ від розміру отвору.

Матеріал	r/a	p_0 / p_{kr}			
		0	0.25	0.5	0.75
Glass-epoxy	0.1	39.275	34.261	28.228	20.194
	0.15	41.069	36.022	29.868	21.529
	0.2	45.287	40.112	33.621	24.552
	0.25	53.446	48.904	42.797	33.927
Boron-epoxy	0.1	53.896	46.837	38.399	27.288
	0.15	55.157	48.091	39.578	28.257
	0.2	59.817	52.474	43.461	31.241
	0.25	68.808	64.201	54.791	43.115
Graphite	0.1	99.030	86.016	70.474	50.039
	0.15	100.835	87.864	72.254	51.529
	0.2	109.007	95.347	78.720	56.416
	0.25	124.439	113.496	98.537	76.815

З наведених даних можна зробити висновок, що зі збільшенням навантаження на пластину частотний параметр зменшується, а в залежності від розміру отвору, в обраному інтервалі $0.1 \leq R/a \leq 0.25$, Λ збільшується зі збільшенням отвору.

На рис. 43-44 представлені області динамічної нестійкості (ОДН) для різних видів матеріалів, розмірів отвору, значеннях статичного навантаження та демпфування.

Розмір отвору суттєво впливає на розташування ОДН, його збільшення приводить до зсуву областей нестійкості вбік більших значень збуджуючої частоти. Також зазначимо, що втрата стійкості для пластин виготовлених з матеріалу «graphite» виникає при значно більших значеннях збуджуючої частоти. При збільшенні постійної складової навантаження p_0 область динамічної нестійкості зміщується убік менших значень збуджуючої частоти. Збільшення значення коефіцієнту затухання призводить до зменшення ОДН.

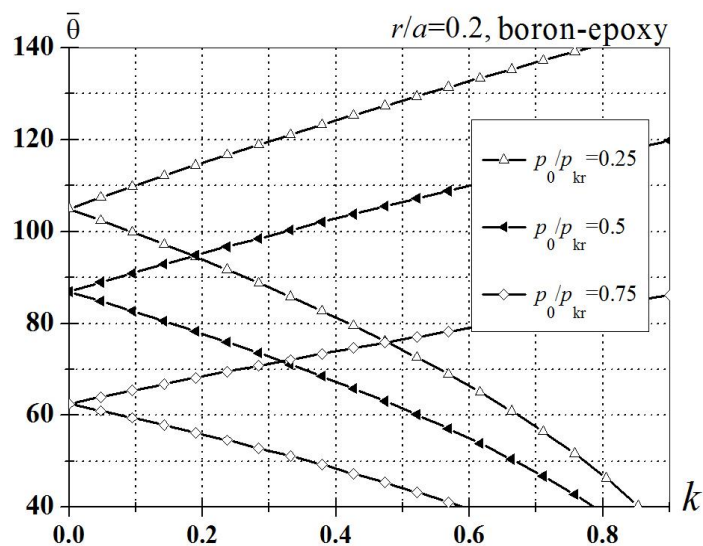


Рис. 43. ОДН при різних значеннях параметру навантаження p_0 .

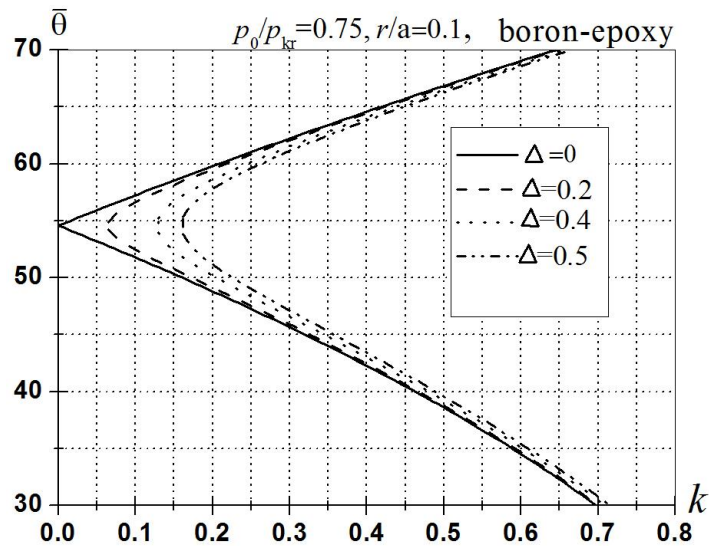


Рис. 44. ОДН при різних значеннях декременту затування.

Для аналізу нелінійних коливань пластини в зоні головного параметричного резонансу побудовано амплітудно-частотні характеристики для різних навантажень (рис. 45, 46) та матеріалів (рис. 47). На рис. 48 представлені амплітудно-частотні залежності отримані при наступних значеннях параметрів $r/a=0.1, p_0/p_{kr}=0.25, p_t/p_{kr}=0.25, 0.5, 0.75, \varepsilon=0$, boron-epoxy. Отримані результати дозволяють зробити висновок, що зменшення амплітуди змінної частини навантаження p_t приводить до зближення гілок АЧХ.

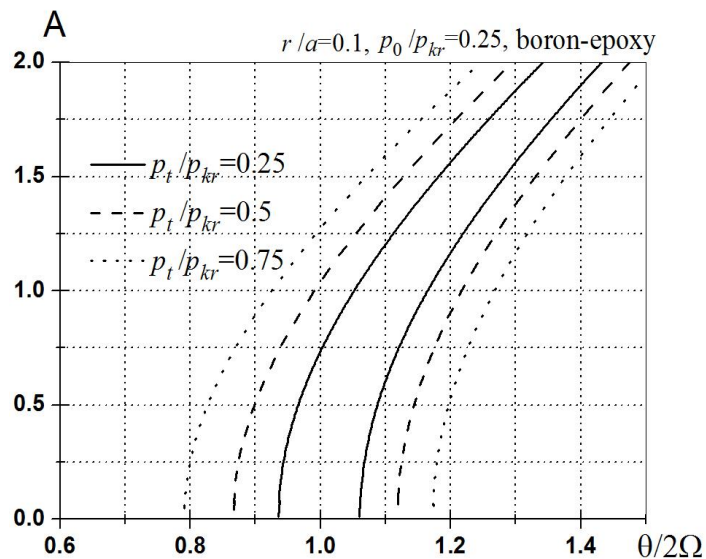
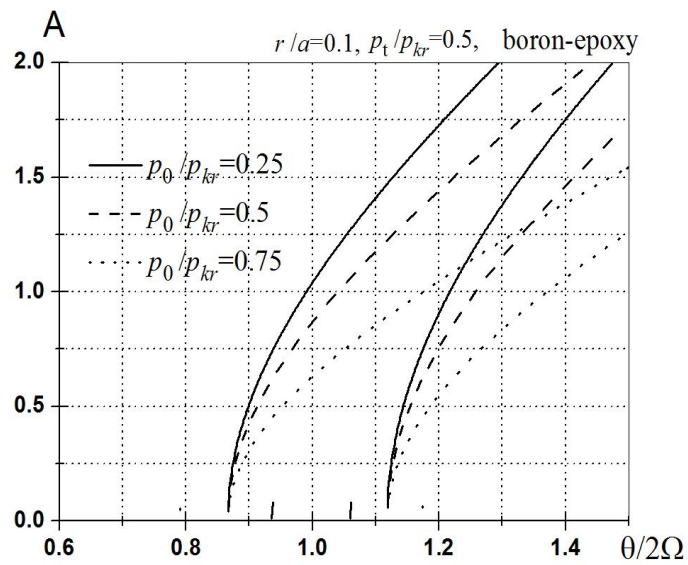
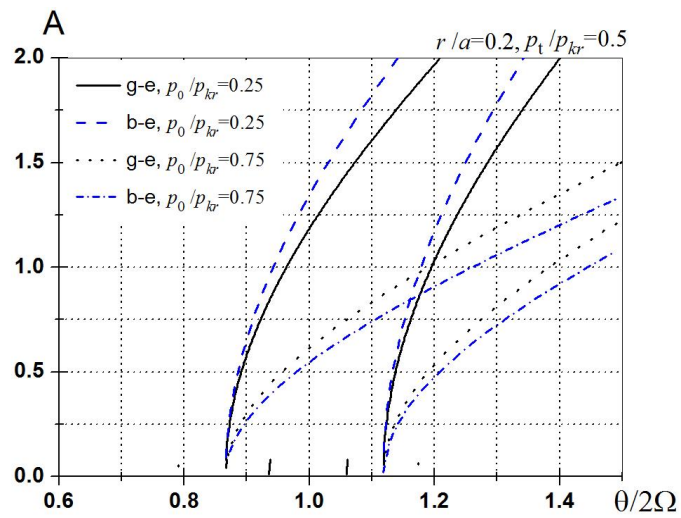


Рис.45. – АЧХ при різних p_t / p_{kr} Рис.46. – АЧХ при різних p_0 / p_{kr} Рис. 47. – АЧХ при різних значеннях відношення p_0 / p_{kr} та для різних матеріалів.

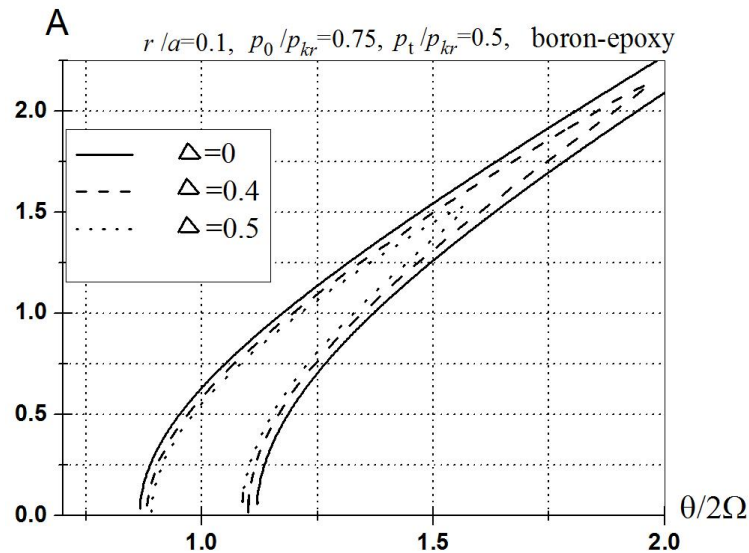


Рис. 48. – АЧХ при різних значеннях декременту затухання.

Результати дослідження впливу постійної складової навантаження на АЧХ представлені на рис. 48 ($r/a=0.1, p_0/p_{kr}=0.25,0.5,0.75, p_t/p_{kr}=0.5, \varepsilon=0$, «boron-epoxy») та на рис. 47 ($r/a=0.2, p_0/p_{kr}=0.25,0.5,0.75, p_t/p_{kr}=0.5, \varepsilon=0$, «glass-epoxy», «boron-epoxy»). Зміна постійної складової навантаження впливає на нахил кривих, в той же час вплив є суттєвішим для пластини, виготовленої з матеріалу «boron-epoxy».

5.4. Дослідження впливу крайових умов, що діють на отворі складної форми на критичне навантаження та зони динамічної нестійкості багат шарової пластини.

Розглядається тришарова пластинка (рис. 49) з укладанням шарів $0^0/90^0/0^0$ і хрестоподібним отвором. При цьому важливо, що отвір може бути не тільки вільним, але і вільно опертим або жорстко затисненим. Основною метою дослідження є аналіз впливу закріплення отвору на динамічну стійкість пластини.

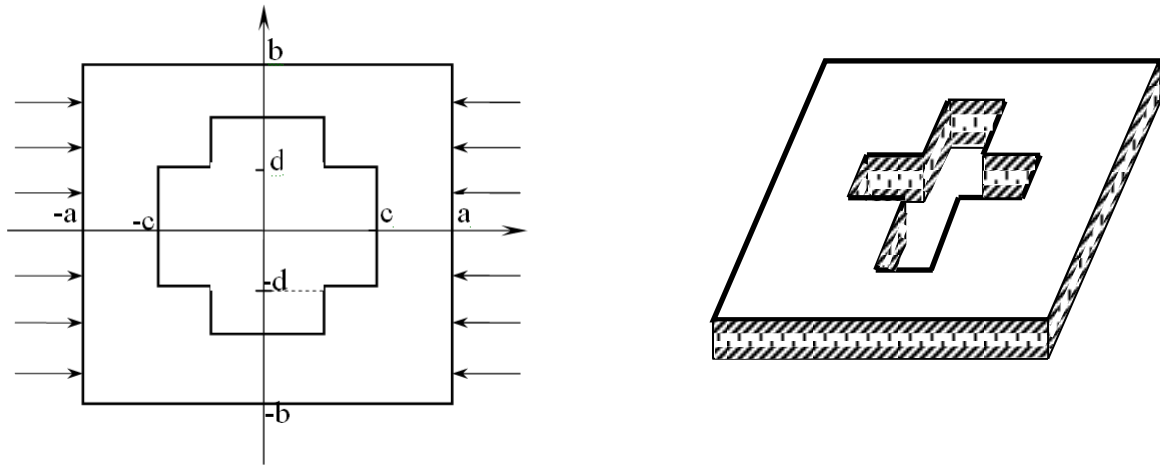


Рис. 49. – Зображення пластини, що досліджується.

Розглянемо два варіанти ступеня ортотропії матеріалу, а саме

$$\frac{E_1}{E_2} = 3, \quad i \frac{E_1}{E_2} = 10. \quad (4.59)$$

Основні геометричні параметри пластини прийняті наступними:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{h}{2b} = 0,01, \quad (4.60)$$

де h – це загальна товщина пластинки при рівних товщинах всіх верств, а $2b$ – характерний розмір пластинки. Розміри отвору c і d варіюються .

Розглянемо наступні 4 типи крайових умов:

I. Вільне спирання по зовнішньому контуру, отвір вільний

$$M_x = 0, \quad N_x = -p, \quad N_{xy} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \quad (4.61)$$

$$w = 0, \quad M_y = 0, \quad u = 0, \quad N_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2, \quad \partial\Omega_2 : y = \pm \frac{b}{2}; \quad (4.62)$$

$$M_n = 0, \quad Q_n = 0, \quad N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_3, \quad \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2). \quad (4.63)$$

II. Вільне спирання по всьому контуру.

Виконуються умови (4.33), а також такі, на решті ділянці контуру:

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_4, \quad \partial\Omega_4 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1. \quad (4.64)$$

III. Вільне опирання по зовнішньому контуру, отвір - жорстко закріплений.

Виконуються умови (4.33-4.34), а на решті контуру наступні:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2). \quad (4.65)$$

IV. Жорстко закріплена по контуру.

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega, \text{ на всьому контурі } \partial\Omega. \quad (4.66)$$

Відповідно методу R-функцій (RFM), побудуємо структури рішення для всіх випадків закріплення пластини:

$$\text{I тип. } w = \omega_{\text{внешн}} \Phi. \quad (4.67)$$

$$\text{II тип. } w = \omega \Phi. \quad (4.68)$$

$$\text{III тип. } w = \omega \omega_{\text{внутр}} \Phi. \quad (4.69)$$

$$\text{IV тип. } w = \omega^2 \Phi, \quad (4.70)$$

де Φ - невизначені компоненти побудованих структур рішення, $\omega(x, y) = 0$ -нормалізоване рівняння кордону всій області, яке в даному випадку може бути побудовано як

$$\omega(x, y) = \omega_{\text{внешн}} \wedge_0 \overline{\omega_{\text{внутр}}}, \quad (4.71)$$

де $\omega_{\text{внешн}}(x, y) = (F_1 \wedge_0 F_2)$, $\omega_{\text{внутр}}(x, y) = (F_3 \wedge_0 F_4) \vee_0 (F_5 \wedge_0 F_6)$, $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ - R-оператори [71]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} = -x. \quad (4.72)$$

Функції $F_i, i = 1..6$ визначаються наступним чином:

$$F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0, \quad F_2 = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0, \quad F_3 = \frac{1}{2c}(c^2 - x^2) \geq 0, \\ F_4 = \frac{1}{2d}(d^2 - y^2) \geq 0, \quad F_5 = \frac{1}{2d}(d^2 - x^2) \geq 0, \quad F_6 = \frac{1}{2c}(c^2 - y^2) \geq 0. \quad (4.73)$$

Критичне навантаження визначається як $P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}$, де $\lambda_{кр}$ - безрозмірний параметр.

Раніше [глава 4.1.3], для крайових умов першого типу були отримані значення безрозмірного параметра $\lambda_{кр}$ для квадратної пластини з жорсткостними характеристиками, такими ж, як в даній задачі.

Наприклад, в разі $\frac{E_1}{E_2} = 3$, значення безрозмірного параметра $\lambda_{кр}$ для квадратної пластини знайдено 5,43. Т.ч. при отворі, розмір якого прагне до нуля, значення безрозмірного параметра збільшується і прагне до значення для квадратної пластини без отвору. Аналогічно, для випадку $\frac{E_1}{E_2} = 10$, критичне навантаження квадратної пластинки має значення $\lambda_{кр} = 11,49$.

При устремлінні хрестоподібного отвору до нуля, також значення критичного навантаження спрямовується до критичного навантаження квадрата. Що свідчить про достовірність отриманих результатів і розробленого програмного забезпечення.

В результаті проведення обчислювального експерименту, пов'язаного з дослідженням збіжності при збільшенні кількості координатних функцій, було встановлено, що обчислення можуть бути виконані при використанні 14-го ступеня апроксимуючого полінома для прогину $w(x,y)$ і 11-го ступеня апроксимуючих поліномів для кожного з переміщень $u(x,y)$ і $v(x,y)$, що відповідає 36 координатним функцій для прогину і 21 координатним функцій для кожного з переміщень.

У таблиці 23 представлені значення безрозмірного частотного параметра для тришарової пластинки з різними крайовими умовами, різного ступеня ортотропії та розмірів отвору.

Таблиця 23. Значення безрозмірного параметра $\lambda_{кр} = N_{кр} (2b)^2 / E_2 h^3$ в залежності від ступеня ортотропії та розмірів отвору.

гран. умови		$\frac{E_1}{E_2} = 3$					$\frac{E_1}{E_2} = 10$				
		$c/2b$	$d/2b$								
1 тип	0,05	4,79	4,59	4,44	4,33	4,21	9,29	8,69	8,25	7,91	7,59
	0,075	4,60	4,30	4,10	3,93	3,76	8,73	7,79	7,13	6,62	6,11
	0,1	4,56	4,20	3,96	3,81	3,64	8,60	7,45	6,69	6,18	5,67

2 тип	0,05	28,29	28,69	31,83	33,33	36,35	77,52	78,41	84,32	85,36	89,51
	0,075	27,23	31,94	32,36	35,30	38,31	76,40	82,11	86,84	90,71	93,83
	0,1	27,98	29,17	33,61	36,51	38,78	79,39	81,69	91,35	93,61	95,63
3 тип	0,05	29,47	32,16	34,92	37,91	39,78	80,69	86,49	90,97	94,94	97,40
	0,075	30,73	33,41	36,47	39,22	42,56	84,74	90,20	94,59	98,29	103,18
	0,1	32,44	34,91	37,69	40,85	49,39	90,16	94,80	97,93	100,90	104,68
4 тип	0,05	53,46	57,56	60,99	65,05	68,03	145,55	153,16	158,90	164,92	170,49
	0,075	54,69	58,20	62,36	65,67	70,73	145,21	152,35	159,06	165,42	174,93
	0,1	57,12	59,32	61,76	65,70	69,39	147,83	151,39	154,87	160,79	168,58

Зі збільшенням розмірів отвору, значення критичного навантаження для вільно опертої пластини з вільним отвором зменшується. Для трьох інших досліджуваних типів крайових умов спостерігається протилежна тенденція. Зі збільшенням розмірів отвору, значення критичного навантаження збільшується.

Для будь-якого типу крайових умов значення критичного навантаження пластини для матеріалу, що характеризується відношенням $\frac{E_1}{E_2}=10$ вище, ніж для такої ж пластини з відношенням $\frac{E_1}{E_2}=3$. Причому, для четвертого типу крайових умов це значення відрізняється боєм, ніж в два рази.

Якщо аналізувати ситуацію в цілому, то найменше значення критичного навантаження мають пластини з крайовими умовами першого типу (вільно оперта пластина з вільним отвором). Для вільно опертої по всьому контуру пластини результати критичного навантаження значно вище. Для вільно опертої по зовнішньому контуру і жорстко затиснена по контуру отвору пластини значення критичного навантаження трохи перевершують результати, отримані для другого типу крайових умов. І найбільші значення критичне навантаження приймає при четвертому типі крайових умов (жорстко затиснена по всьому контуру пластина).

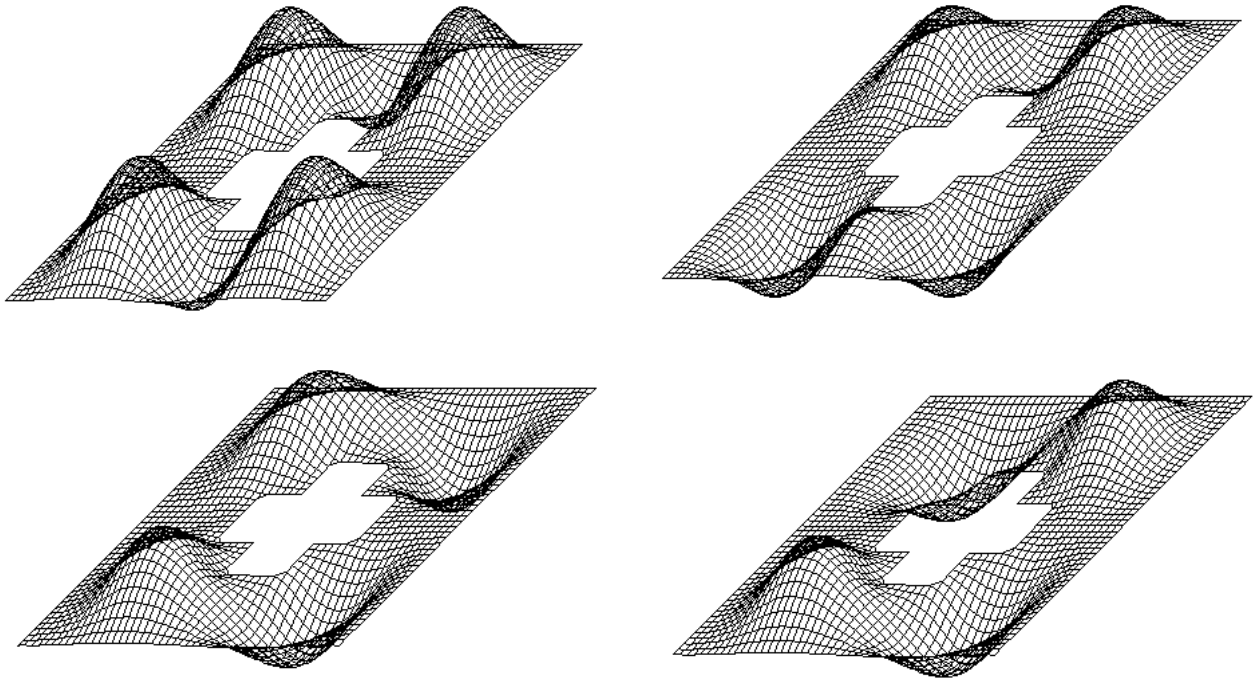


Рис. 50. Форми коливань пластини, що досліджується

На рисунку 50 зображені перші чотири форми коливання жорстко затисненої по всьому контуру пластини при $c = 0,2$ і $d = 0,075$. Втрата стійкості відбувається за першою формою.

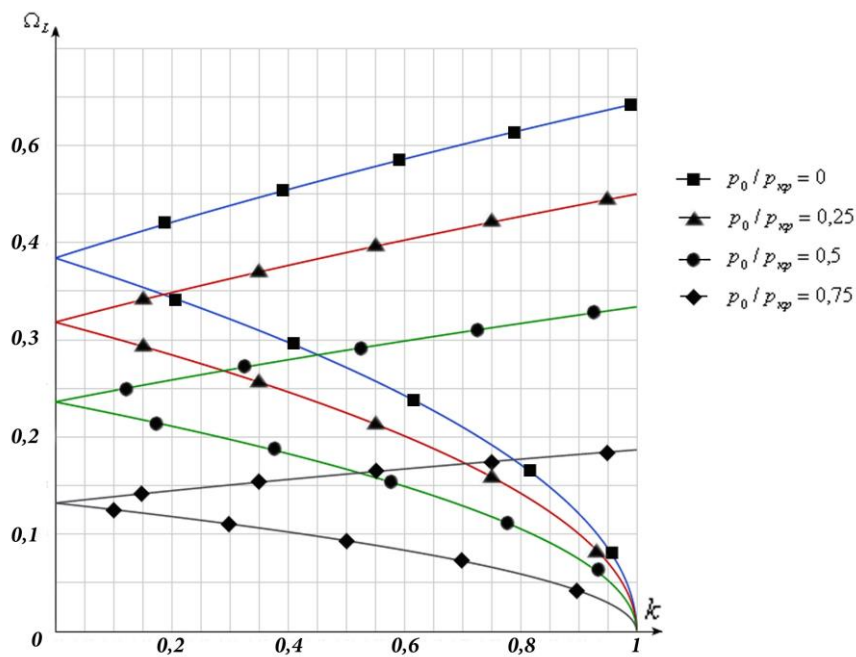


Рис. 51. ОДН в залежності від постійної складової

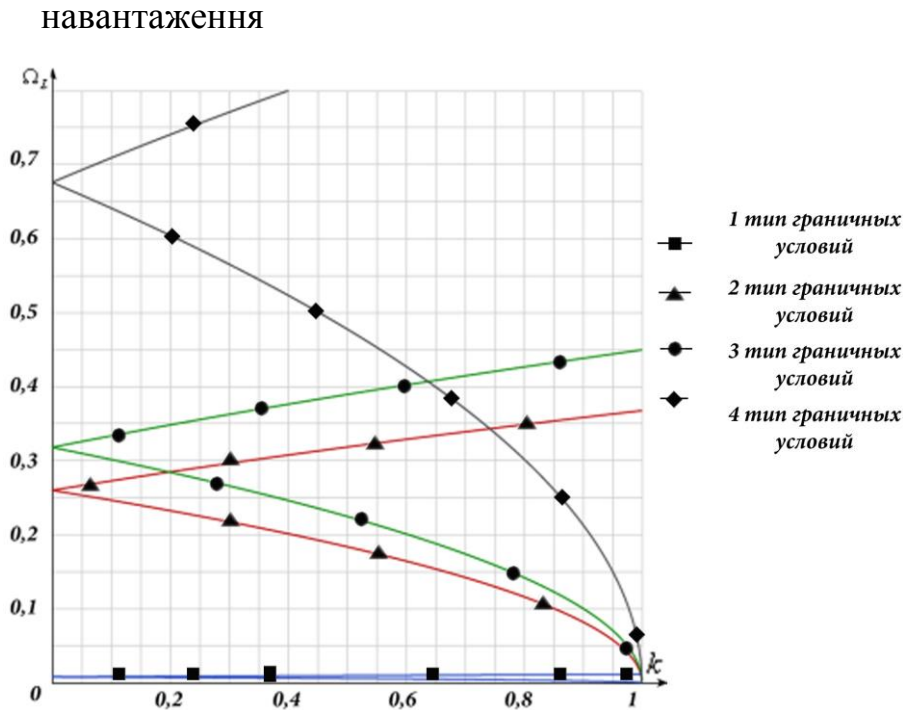


Рис. 52. ОДН в залежності від типу крайових умов.

На рисунку 51 наведено зони динамічної нестійкості для вільно опертої по зовнішньому контуру і жорстко затисненої по контуру отвору пластини з параметрами вирізу $c = 0,15$ і $d = 0,075$ з відношенням $\frac{E_1}{E_2} = 3$ в залежності від навантаження. Чим менше відношення $p_0 / p_{кр}$, тим вище розташована зона нестійкості і тим більше площа самої зони.

На рисунку 52 наведено зони динамічної нестійкості для різних видів крайових умов пластини при фіксованих розмірах отвору ($c = 0,15$ і $d = 0,075$), навантаженні $p_0 / p_{кр} = 0,25$ і $\frac{E_1}{E_2} = 3$. Для першого типу крайових умов характерна найменша зона динамічної нестійкості (обмежена кривими, зазначеними квадратиками на рис. 52, де на графіку в даному масштабі вони практично зливаються). Здн для другого і третього типу крайових умов відрізняються не дуже суттєво. Найбільша площа зони динамічної нестійкості виникає для крайових умов четвертого типу (обмежена кривими, зазначеними ромбиками на рис. 52).

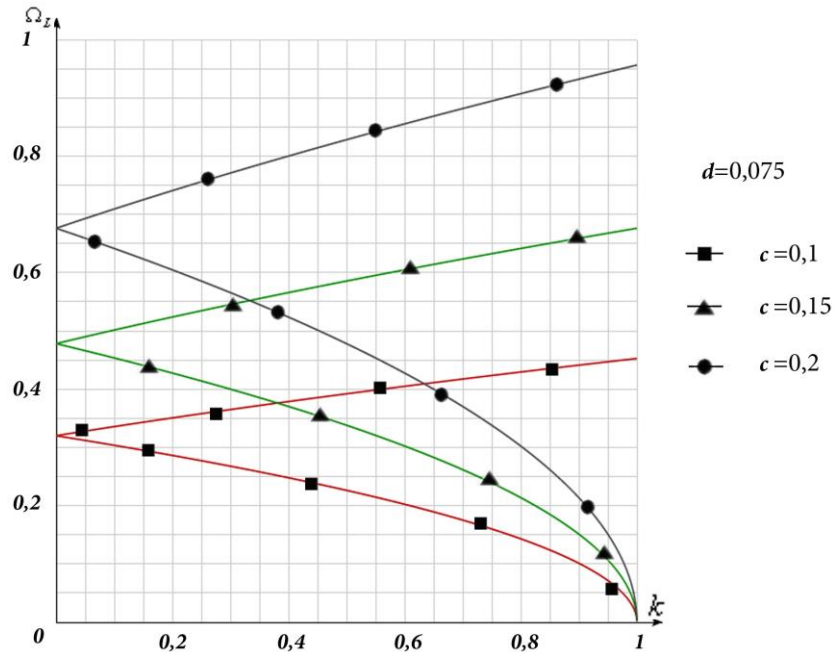


Рис. 53. ОДН в залежності від розміру вирізів.

На рисунку 53 наведені зони динамічної нестійкості жорстко затисненої по всьому контуру пластини при навантаженні $p_0 / p_{kr} = 0.25$ з жорсткостним співвідношенням $\frac{E_1}{E_2} = 3$ в залежності від розміру отвору. Очевидно, що зі збільшенням отвору, збільшується і зона динамічної нестійкості.

5.5. Дослідження прямокутних багат шарових пластин з двома прямокутними отворами. Вивчення впливу розташування отворів, їх розмірів, та умов закріплення на критичне навантаження та зони динамічної нестійкості пластин.

Для того щоб проілюструвати можливості теорії R-функцій і створеного програмного забезпечення у рамках системи POLE-RL, розглянемо тришарові ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) пластини (рис. 54а) з двома отворами, розташованими симетрично відносно осей Ox або Oy , як показано на рис. 54б та рис. 54в відповідно. Загальна товщина пластини дорівнює $h/2b = 0.1$. Товщини шарів приймаємо однаковими.

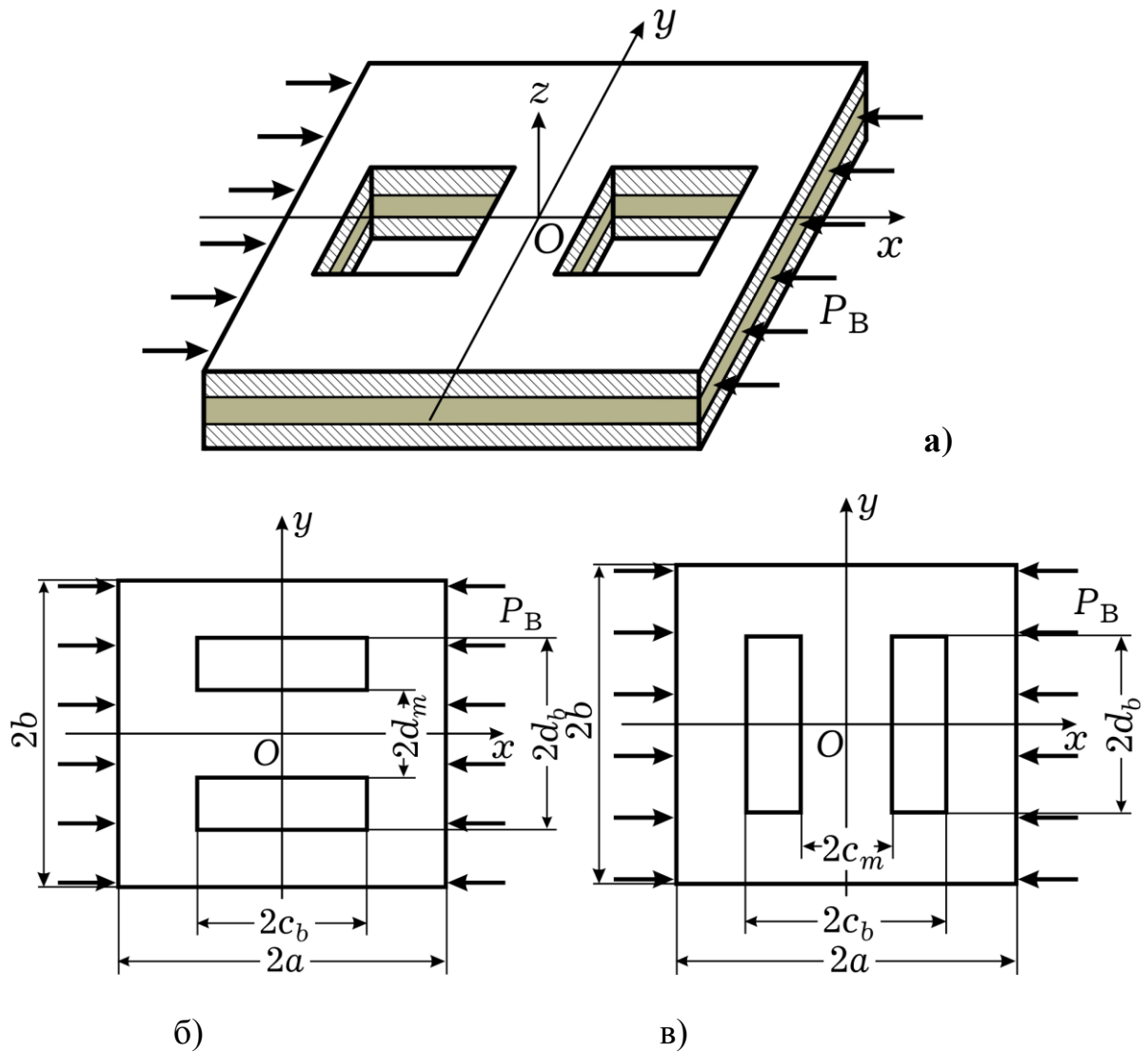


Рис. 54. Форми плану пластин з двома отворами.

Дослідимо вплив на критичне навантаження крайових умов і геометричних параметрів пластини.

При обчисленнях значення механічних характеристик шарів приймаємо такими:

$$E_1 / E_2 = 10, G / E_2 = 0.6, \nu_1 = 0.25. \quad (4.74)$$

Відношення розмірів сторін зовнішнього прямокутника a/b варіюються в інтервалі [1,1.5]. Варіанти розмірів отворів, їх розташування та закріплення представлені нижче.

I. Отвори розташовані симетрично відносно осі абсцис Ox (рис. 54б) на відстані один від одного $d_m/b = 0.2$. Варіанти розмірів отворів:

- I–i: квадратні отвори $c_b / b = 0.05, d_b / b = 0.2,$
 I–ii: прямокутні отвори $c_b / b = 0.2, d_b / b = 0.2,$
 I–iii: прямокутні отвори $c_b / b = 0.2, d_b / b = 0.25.$

II. Отвори розташовані симетрично відносно осі ординат $0y$ (рис. 54в) на відстані один від одного $c_m / b = 0.2$. Варіанти розмірів отворів:

- II–i: квадратні отвори $c_b / b = 0.2, d_b / b = 0.05,$
 II–ii: прямокутні отвори $c_b / b = 0.2, d_b / b = 0.2,$
 II–iii: прямокутні отвори $c_b / b = 0.25, d_b / b = 0.2.$

Розглянемо два типи крайових умов для досліджуваної пластини.

1-й тип: пластина вільно оперта по зовнішньому прямокутнику та є вільною на отворах.

У цьому випадку повинні виконуватися крайові умови

$$w = 0, \psi_y = 0, u = 0, N_x = -p, N_{xy} = 0, \quad (4.75)$$

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm a/2, -b/2 \leq y \leq b/2;$$

$$w = 0, \psi_y = 0, v = 0, N_y = 0, N_{xy} = 0, \quad (4.76)$$

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 : y = \pm b/2, -a/2 \leq x \leq a/2;$$

на границі отвору повинні виконуватись наступні умови:

$$M_n = 0, M_{n\tau} = 0, Q_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, \quad (4.77)$$

Вирази для $M_n, M_{n\tau}, Q_n, N_n, T_n$ можна знайти в роботі [42]. Крайові умови, що задані на границі області, є природними, тому при застосуванні методу Рітця їм можна не задовольняти, бо вони виконуються автоматично в інтегральному сенсі.

2-й тип: пластина жорстко закріплена по всьому контуру (рухоме закріплення).

У цьому випадку крайові умови будуть наступними:

$$w = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$N_{xy} = 0, N_x = 0, (x, y) \in \partial\Omega^{(Y)}, \quad (4.78)$$

$$N_y = 0, N_{xy} = 0, (x, y) \in \partial\Omega^{(X)},$$

де $\partial\Omega^{(y)}$, $\partial\Omega^{(x)}$ – частини границі, паралельні відповідно до осей Oy , Ox .

Відповідно до методу R-функцій, побудуємо структури розв'язків для всіх випадків закріплення пластини:

$$\text{1-й тип: } w = \omega_{ext} \Phi_1, u = \Phi_2, v = \Phi_3, \psi_1 = \Phi_4, \psi_2 = \Phi_5,$$

$$\text{2-й тип: } w = \omega \Phi_1, u = \Phi_2, v = \Phi_3, \psi_1 = \omega \Phi_4, \psi_2 = \omega \Phi_5.$$

Тут $\Phi_i, i = 1, \dots, 5$ – невизначені компоненти структур розв'язку, $\omega(x, y) = 0$ – рівняння границі всієї області, яке в розглядуваному випадку можемо побудувати як

$$\omega(x, y) = \omega_{ext} \wedge_0 \overline{\omega_{hol}}, \quad \omega_{ext}(x, y) = (F_1 \wedge_0 F_2), \quad (4.79)$$

де ω_{hol} – функція, за допомогою якої задаємо рівняння границі отвору.

Якщо отвори розташовані симетрично відносно осі Ox , то ω_{hol} визначаємо таким чином:

$$\omega_{hol}(x, y) = (F_3 \vee_0 F_5) \vee_0 F_6. \quad (4.80)$$

Для пластин з отворами, розташованими симетрично відносно осі Oy , функція ω_{hol} має вигляд

$$\omega_{hol}(x, y) = (F_4 \vee_0 F_6) \vee_0 F_5. \quad (4.81)$$

де $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ – символи R-операцій.

Функції $F_i, i = 1, \dots, 6$ визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0, & F_2 &= \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0, \\ F_3 &= \frac{1}{2c_m}(c_m^2 - x^2) \geq 0, & F_4 &= \frac{1}{2d_m}(d_m^2 - y^2) \geq 0, \\ F_5 &= \frac{1}{2c_b}(x^2 - c_b^2) \geq 0, & F_6 &= \frac{1}{2d_b}(y^2 - d_b^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.82)$$

На рис. 55 представлено графіки обчислених залежностей критичного навантаження $N_{cr} = \lambda_{cr} \frac{E_2 h^3}{4b^2}$, де λ_{cr} – безрозмірний параметр, від співвідношення сторін a/b для випадку пластин з отворами, симетричними відносно осі Ox (рис. 54б), для різних варіантів розмірів отворів (крива 1

відповідає варіанту I–i, крива 2 – варіанту I–ii, крива 3 – варіанту I–iii) при крайових умовах 1-го типу. обчислення виконано при $d_m/b = 0.1$,.

Аналогічні графіки для пластин у випадку крайових умов 2-го типу наведено на рис. 56.

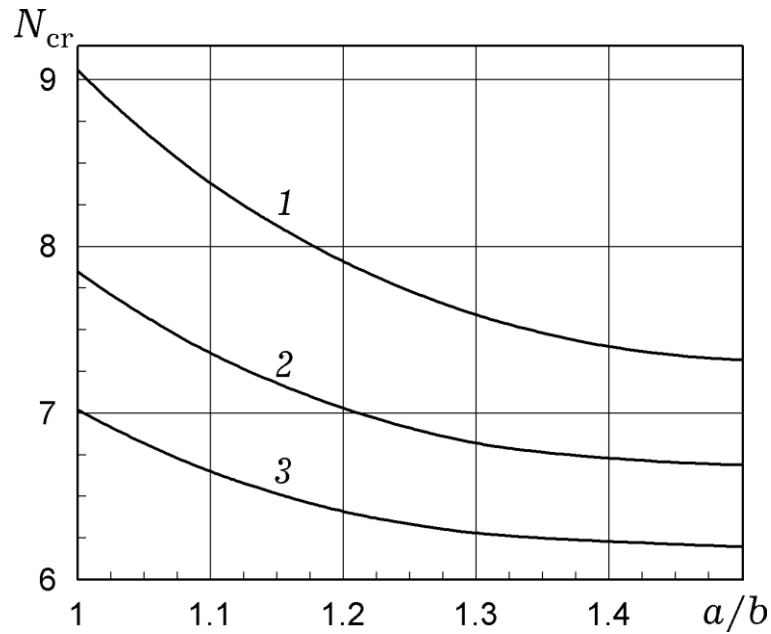


Рис. 55. Критичне навантаження в залежності від співвідношення сторін.

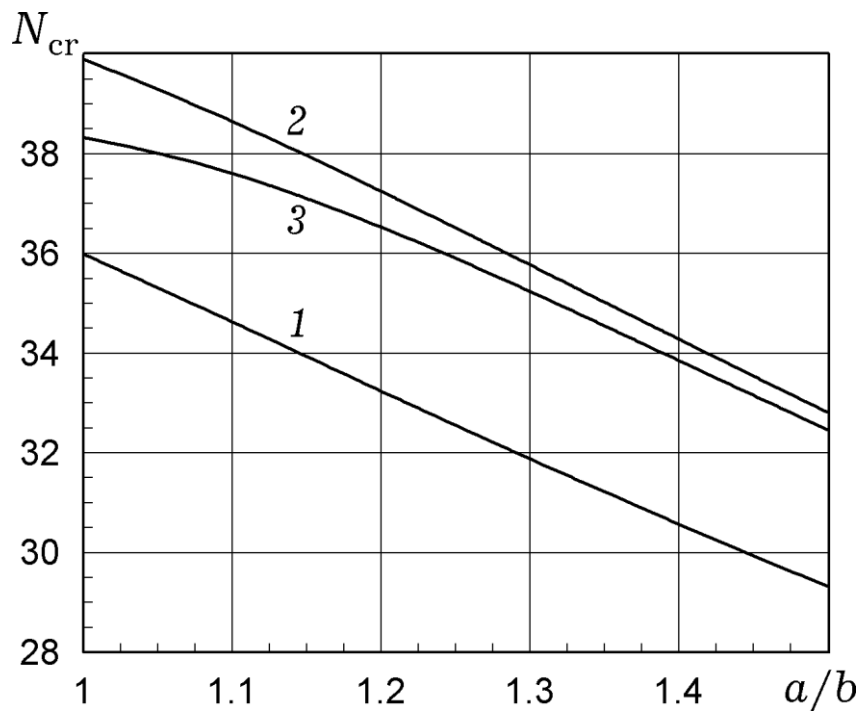


Рис. 56. Критичне навантаження в залежності від співвідношення сторін.

На рисунках бачимо, що значення критичного навантаження N_{cr} монотонно спадає при зростанні відношення довжин сторін a/b для усіх трьох розглянутих варіантів розмірів отворів і для обох типів крайових умов.

Поведінка кривих критичного навантаження N_{cr} у випадку пластини з вільними отворами, симетричними відносно осі Oy (рис. 54в), є подібною до розглянутого вище випадку симетрії отворів відносно осі Ox .

Числові значення критичного навантаження N_{cr} для пластин з вільними отворами, симетричними відносно осі Ox (рис. 54б), у випадку крайових умов 1-го типу для усіх трьох варіантів розмірів отворів наведено в табл. 24.

Числові значення критичного навантаження N_{cr} для пластин з отворами, симетричними відносно осі Ox (рис. 54б), у випадку крайових умов 2-го типу для усіх трьох варіантів розмірів отворів наведено в табл. 25.

Таблиця 24. Значення критичного навантаження N_{cr} для пластин з вільними отворами, симетричними відносно осі Ox (рис. 54б), у випадку крайових умов 1-го типу в залежності від розмірів отворів.

a/b	N_{cr}					
	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
Варіант розмірів отвору						
I-i	9.08	8.39	7.91	7.59	7.40	7.31
I-ii	7.76	7.35	6.99	6.85	6.75	6.72

I-iii	6.65	6.54	6.43	6.35	6.32	6.30
-------	------	------	------	------	------	------

Таблиця 25. Значення критичного навантаження N_{cr} для пластин з вільними отворами, симетричними відносно осі Ox (рис. 54б), у випадку крайових умов 2-го типу в залежності від розмірів отворів.

		N_{cr}					
a/b							
Варіант розмірів отвору		1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
	I-i		36.99	36.20	35.19	34.02	32.79
I-ii		33.05	33.51	33.72	33.82	33.58	32.80
I-iii		26.29	29.09	30.60	30.83	31.03	31.23

Аналіз одержаних результатів показує, що при крайових умовах 2-го типу значення критичного навантаження значно перевищує відповідні значення для випадку крайових умов 1-го типу. Таким чином, пластини з крайовими умовами 2-го типу є більш стійкими порівняно з пластинами 1-го типу.

На рис. 57 наведено перші чотири форми коливань жорстко закріпленої квадратної пластини $a/b = 1$ з крайовими умовами 2-го типу з двома отворами, симетричними відносно осі Oy (рис. 54в), при $c_m/b = 0.2$ для варіанту розмірів отворів I-iii. Безрозмірні власні частоти визначали за формулою

$$\Lambda_i = \Omega_i (2b)^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_2 h^2}}, i = 1, \dots, 4.$$

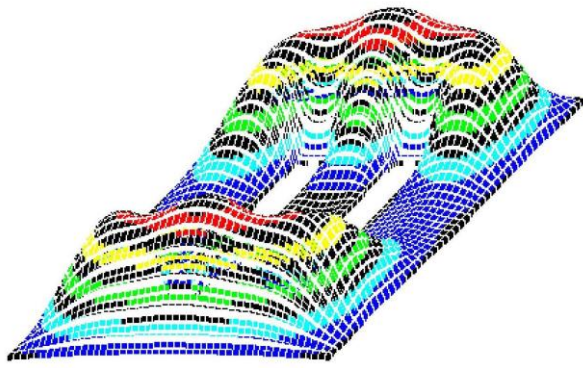
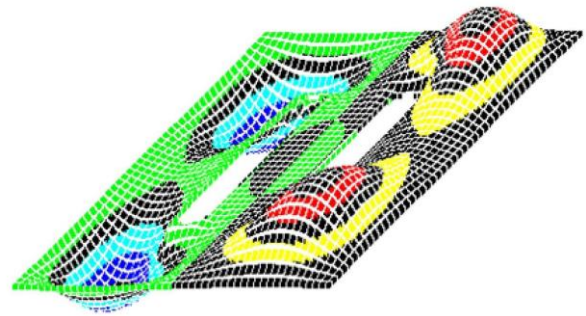
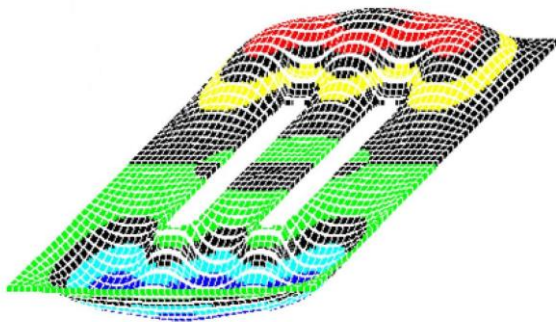
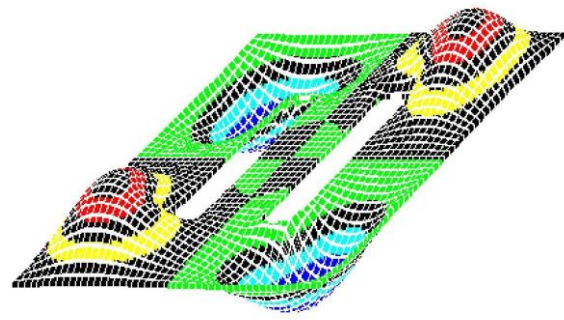
а) $\Lambda_1 = 35.83$ б) $\Lambda_2 = 40.85$ в) $\Lambda_3 = 35.94$ г) $\Lambda_4 = 41.03$

Рис. 57. Перші чотири форми коливань жорстко закріпленої квадратної пластини $a/b=1$ з крайовими умовами 2-го типу з двома отворами, симетричними відносно осі Oy (рис. 54в).

У табл. 26 наведено значення власних частот Λ_1 для різних значень навантаження P_{load} для жорстко закріплених квадратної, $a/b=1$, і прямокутної, $a/b=1.5$, пластин з двома отворами при крайових умовах 2-го типу для декількох варіантів розмірів отворів.

Таблиця 26. Значення власних частот Λ_1 для різних значень навантаження.

		Λ_1					
a/b	P_B/N_{cr}	0	0.25	0.5	0.75	0.95	0.99
	Варіант						

	розмірів отвору						
1	I-i	16.66	13.17	9.32	5.05	1.14	0.03
	I-ii	28.75	26.77	20.41	10.92	2.39	0.05
	II-i	10.14	9.12	8.02	6.51	1.80	0.04
	II-ii	26.40	24.99	22.73	14.09	3.90	0.01
1.5	I-i	6.36	4.94	3.45	1.85	0.40	0.01
	I-ii	10.68	8.21	5.65	2.97	0.64	0.01
	II-i	7.24	6.43	5.04	2.84	0.62	0.01
	II-ii	11.72	9.02	6.20	3.26	0.72	0.01

Для пластин з отворами, розташованими симетрично відносно осі Ox (рис. 54б), значення власних частот більші, ніж відповідні значення для пластин з отворами, симетричними відносно осі Oy (рис. 54в). Зі зростанням навантаження власні частоти зменшуються, що відповідає фізичному сенсу.

5.6. Висновки до розділу 5.

1. В п'ятому розділі розроблений метод застосовано для дослідження геометрично нелінійних коливань та стійкості багат шарових пластин складної форми з отворами в рамках класичної і уточненої теорії першого порядку.

2. Розв'язано тестові задачі за допомогою розробленого програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL. Одержані результати було порівняно з відомими. Досліджено збіжність результатів при зменшенні отворів та наближенні результатів до відомих для пластин без отворів.

3. Як і для пластин без отворів, досліджено вплив геометричних параметрів, кількості шарів, крайових умов, властивостей матеріалу на

значення критичного навантаження, зони динамічної стійкості \ нестійкості та ампліудно-частотні характеристики.

4. Практичні висновки повторюють висновки, зроблені для пластин без отворів. При цьому отвори мають наступний вплив:

- зі збільшенням отвору значення критичного навантаження пластини зменшується;

- збільшення розміру отвору пластини призводить до збільшення амплітуди коливань;

- значення критичного навантаження пластин з отворами суттєво залежить від способу закріплення отвору та його розмірів.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне науково-практичне завдання з розвитку методу дослідження нелінійних коливань та стійкості шаруватих пластин складної форми за допомогою теорії R-функцій та варіаційних методів. При цьому за результатами даної дисертаційної роботи можна зробити такі висновки:

1. Розроблено ефективний аналітично-числовий підхід для дослідження параметричних коливань та стійкості багат шарових пластин складної форми як в рамках класичної теорії, що базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, так і уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка, що враховує деформації зсуву. Запропонований підхід ґрунтується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методах.

2. Побудовані варіаційні постановки задач в межах класичної та уточненої теорій для визначення докритичного стану багат шарових пластин симетричної та антисиметричної будови.

3. Одержано варіаційні постановки допоміжних задач, розв'язок яких використовується для побудови шуканого розв'язку вихідної нелінійної системи рівнянь руху.

4. Для багат шарових пластин антисиметричної будови отримані аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів нелінійного диференціального рівняння, до якого зведено вихідну нелінійну систему руху.

5. Для пластин складної геометричної форми за допомогою теорії R-функцій побудовано структури розв'язку та відповідні системи координатних функцій для методу Рітца. Розроблений підхід реалізовано в обчислювальному комплексі POLE-RL.

6. З метою підтвердження вірогідності запропонованого підходу та розробленого програмного забезпечення розв'язано тестові задачі та проведено порівняння результатів з відомими в літературі в рамках двох теорій: класичної та теорії типу Тимошенка.

7. Розроблений програмний комплекс дав змогу розв'язувати задачі даного класу за різних геометричних та механічних характеристиках пластин та довільних умов їх закріплення. На основі числових досліджень було виявлено низку закономірностей впливу геометричних та механічних характеристик, а також статичної та динамічної складової діючого навантаження на власні частоти, критичне навантаження, області динамічної нестійкості та амплітудно-частотні характеристики шаруватих пластин різної структури. Висновки про залежність наведених характеристик від значень геометричних та фізичних параметрів зроблено за допомогою представлених графіків та таблиць.

8. Виявлено суттєве зростання критичного навантаження за наявності жорстко закріплених отворів пластин; показано, що місце розташування отворів пластин також значно впливає на частоти та значення критичного навантаження; власні частоти та критичні навантаження майже вдвічі вище для ортогонально-армованих пластин ніж для перехрестно-армованих, орієнтація шарів також впливає на АЧХ; кількість шарів у разі жорстко закріплених пластин несуттєво впливає на динамічні характеристики, але для інших способів закріплення цей вплив більш суттєвий; при зростанні коефіцієнту демпфування зони динамічної нестійкості зменшуються;

9. Наведені числові результати для динамічних характеристик багатошарових пластин можуть бути використані для оцінки точності інших числових підходів, а також аналізу поведінки конкретних тонкостінних конструктивних елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А. Я. Расчет элементов авиационных конструкций, трехслойные пластины и оболочки. Москва: Машиностроение, 1985. 203 с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва: Машиностроение, 1984. 264 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. Москва: ГИФМЛ, 1961. 384 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. Москва: Наука, 1987. 360 с.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва: Гостехиздат, 1956. 500 с.
7. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. Москва: *Расчеты на прочность*. 1965. Вып. 11. С. 31 - 63.
8. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1968. 464 с.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542 с.
10. Василенко А.Т., Григоренко Я.М. Решение на основе моделей различного уровня задач и анализ напряженного состояния анизотропных неоднородных оболочек. *Прикл. мех.* 1993. т. 29. №10. С. 77-86.
11. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Москва: Наука, 1982. 286 с.
12. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Успехи математических наук*. 1961. т.16. №3. С. 171 - 174.

13. Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Пузирьов С. В. Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* - 2006. - 49, № 3. - С. 153-161.
14. Григоренко О. Я., Бергульов А.С., Яремченко С.М. Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин. *Доповіді Національної академії наук України.* - 2010. - № 10. - С. 44-51.
15. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова Думка, 1973. 228 с.
16. Гуртовий А.Г., Пискунов В.Г. Новые расчетные модели и сравнение приближенных уточненных с точными трехмерными решениями задач изгиба слоистых ортотропных пластин. *Мех. композит, матер.* 1988. №1. С. 93-101.
17. Заруцкий В.А., Телалов А.И. Колебания тонкостенных оболочек с конструктивными особенностями. Обзор экспериментальных исследований. *Прикл. мех.* 1991. т. 27. №4. С. 3 - 9.
18. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости. Москва: *VI-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин.* 1966. С. 355-368.
19. Кармишин А.В., Мяченков В.И., Репин А.А., Фролов А.Н. Единый метод решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения. Москва: *Теория пластин и оболочек.* 1971. С. 141-146.
20. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор). *Известия МГТУ «МАМИ»* №1(19), 2014, т.4. С. 55-71.
21. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор). *Прикл. механика*, 1998, т.34, № 8, С. 3 – 31.
22. Куликов Г.М. Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов. *Ж. прикл. мех. и техн. физ.* 1988. №5. С. 157 -162.

23. Курпа Л. В., Линник А. Б.. Исследование колебаний пластин переменной толщины, нагруженных в срединной плоскости. *Прикладная механика*. 2005. №41. С. 85-93.
24. Курпа Л.В., Линник Г.Б., Мазур О.С.. Исследование колебаний пластин сложной формы, находящихся под действием продольной нагрузки. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: *Динаміка і міцність машин*. 2005. № 21 С. 61-67.
25. Курпа Л.В., Линник А.Б. Применение теории R-функций к задаче устойчивости зубчатого диска пилы. *Вестник НТУ «ХПИ»*. 2002. № 8. С. 104-108.
26. Курпа Л.В., Ліннік А.Б., Ткаченко В.В. Дослідження стійкості багат шарових пластин за допомогою метода R-функцій. *Международная научная конференция MicroCAD: Секция №2. Математичне моделювання в механіці і системах*. НТУ "ХПИ", 2009. С. 56.
27. Курпа Л.В., Линник Г.Б., Ткаченко В.В. Дослідження стійкості багат шарових пластин симетричної будови за допомогою методу R-функцій. *Журнал „Машинознавство”*, 2010, №3-4. С. 3-8.
28. Курпа Л. В., Мазур О. С. Исследование нелинейных колебаний пластин сложной геометрии, сжимаемых статической нагрузкой. *Прикладная механика*. 2006. № 12. С.124-132.
29. Курпа Л.В., Мазур О.С. Исследование нелинейных колебаний пластин сложной формы, нагруженных в своей плоскости. *Пятое Окуневские чтения. Международная конференция: Тезисы докладов*. Санкт-Петербург, Типография БГТУ. 26-30 июня 2006. Санкт-Петербург. 2006. С.43.
30. Курпа Л.В., Мазур О.С. Метод R-функций в исследовании нелинейных колебаний пластин сложной формы, сжимаемых в своей плоскости. *Прикладные задачи математики и механики: Материалы XIV межд. науч. конф. ученых Украины, Белоруссии, России*. Севастополь, 11-15 сентября 2006. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006 – С.7-11.

31. Курпа Л. В., Мазур О. С. Метод R-функцій для дослідження параметричних коливань ортотропних пластин складної форми. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2009. №4. С. 117-126.
32. Курпа Л.В., Мазур О.С. Параметрические колебания пластин и пологих оболочек сложной геометрии. *Міжнародна технічна конференція пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського: Тези доповідей*, Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007. Дніпропетровськ: Изд-во ДНУ, 2007 – С. 263-264.
33. Курпа Л. В., Мазур О. С. Параметричні коливання пластин складної форми плану. *Машинознавство*. 2008. №3 (33). С. 9-15.
34. Курпа Л.В., Мазур О.С. Применение метода R-функций для исследования областей динамической неустойчивости пластин сложной формы. *International Conf. Dynamical System Modelling and Stability Investigation : Thesis of reports*, Kiev (Ukraine), May 22-25, 2007. Киев, 2007 P. 301.
35. Курпа Л.В., Мазур О.С., Пильгун Г.В., Тимченко Г.Н. R-функции для исследования нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек сложной планформы при больших амплитудах. *IX всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Тезисы докладов*, Нижний Новгород, 22-28 августа 2006. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. Т.1. С.79.
36. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Дослідження стійкості багат шарових пластин симетричної будови навантажених в серединній площині. *Збірник «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»*, Львів 2010, с. 171.
37. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Исследование динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы. *Інформаційні технології. Тези доповідей XX міжнародної науково-практичної конференції*, 15-17 травня 2012, Харків, с. 60.
38. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Параметрические колебания многослойных пластин под действием периодической нагрузки. *Тезисы*

докладов міжнародної конференції «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях» 17-22 апреля 2011г., Харьков, с.70-71.

39. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Параметричні коливання багат шарових пластин під дією періодичного навантаження. *Вісник НТУ"ХПИ"*, 2011, №3, с. 134-145.
40. Курпа Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багат шарових пластин симетричної структури зі складною геометричною формою. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012, Вип. 19. С 193-204.
41. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Параметричні коливання багат шарових пластин складної форми. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. 56, № 2. С. 136–150.
Те саме: Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametric vibration of multilayer plates of complex shape // *J. Math. Sci.* – 2014. – 203, No. 2. – P. 165–184. DOI 10.1007/s10958-014-2098-2.
42. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. Харьков, НТУ ХПИ, 2016. 492 с.
43. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. Харьков: НТУ"ХПИ", 2009. 407с.
44. Курпа Л. В. , Онуфриенко О. Г. , Пильгун Г. В. Исследование геометрически нелинейных колебаний тонких пластин с помощью теории R-функций. *Теоретическая и прикладная механика*. 2003. Вып.37. С.151-156.
45. Курпа. Л. В., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багат шарових пластин симетричної будови навантажених в серединній площині. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Збірник. Львів 2010 С. 171
46. Курпа. Л.В., Ткаченко В.В. Застосування теорії R-функцій для дослідження параметричних коливань багат шарових пластин антисиметричної структури” *XVIII International Conference dynamical system modelling and*

stability investigation, modelling & stability; abstracts of conference reports.

Kiev, Ukraine May 24-26, 2017 – с. 123.

47. Курпа Л.В., Ткаченко В.В. Исследование колебаний и устойчивости сжатых многослойных пластин с помощью метода R-функций. *Журнал «Теоретическая и прикладная механика»*, 2010, №1(47), с. 95-105.
48. Курпа Л. В., Ткаченко В. В. Розв'язання задач стійкості шаруватих пластин з отворами за допомогою методу R-функцій. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. –61, № 2. С. 100-110.
49. Курпа. Л.В., Ткаченко В.В., Шматко Т.В. Дослідження стійкості багатошарових пластин з отворами складної форми за допомогою теорії R-функцій та варіаційних методів. *Сучасні проблеми механіки та математики. Збірник наукових праць.* Львів 2018. С. 175-176.
50. Кушнір Р. М., Марчук М. В., Осадчук В. А. Нелінійні задачі статички і динаміки податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела.* – Донецьк: Юго-Восток, 2006. – С. 238–240.
51. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва: Гостехиздат. – 1957. – 464с.
52. Мазур О. С. Определение областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии. *Вестник национального технического университета «ХПИ» Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Динамика и прочность машин».* Харьков, 2006. № 32. С.112-119.
53. Мазур О.С. Применение метода R-функций к исследованию геометрически нелинейных колебаний пластин сложной планформы, нагруженных в срединной плоскости. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы IV Международной научной конференции, посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского,* Донецк - Мелекино, 12-14 июля 2006 г. Донецк: Юго-Восток, 2006. С. 241.

- 54.Мазур О.С., Ткаченко В.В. Динамічна стійкість багатошарових пластин зі складною геометрією. *Тези на конференції Modelling and stability. Abstracts of conference reports*. Київ, Мау 25-27, 2011. р. 297.
- 55.Мазур, О.С., Ткаченко В.В.. Динамічна стійкість багатошарових пластин складної форми. *Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ": Математичне моделювання в техніці та технологіях №6*. Вестник НТУ "ХПИ", 2014. С. 124-129.
- 56.Мазур О.С., Ткаченко В.В. Дослідження стійкості багатошарових пластин складної форми під дією періодичного навантаження. *Международная научная конференция MicroCAD : Секція №2 - Математичне моделювання в механіці і системах*. НТУ "ХПИ", 2011. с.57.
- 57.Мазур О.С., Ткаченко В.В. Исследование параметрических колебаний многослойных пластин сложной формы с помощью метода R-функций. *Тези на конференції «Математичне моделювання та математична фізика»*, м. Кременчук, 21 – 24 вересня 2011 р., с. 203
- 58.Марчук М. В., Хом'як М. М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. - Львів: *Національна академія наук України*. ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 2003. - 216 с.
- 59.Немировский Ю.В., Резников В.С. О механизме разрушения армированных балок при изгибе. 1. Разрушение от сдвига. *Мех. полимеров*. 1973. №4. С. 698 - 709.
60. Паймушин В.Н., Демидов В.Г. Об одном варианте соотношений теории среднего изгиба многослойных оболочек сложной геометрии. *Статика и динамика оболочек*. Казань: КФТИ АН СССР, 1979. - Вып. 12. - С. 53 - 60.
61. Пискунов В.Г., Рябов А.Ф., Сидиков А.С. Уравнения колебаний многослойных пластинок. *Расчет пространственных строительных конструкций*. Куйбышев, 1971. - Вып. 2. - С. 40 - 46.
- 62.Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. Київ: Будівельник. 1986. 176 с.

63. Плеханов А.В. О построении теории изгиба многослойных пластин средней толщины. *Сопрот. матер, и теория сооруж.* Киев, 1977. №31. С. 67 - 72.
64. Плеханов А.В. Развитие неклассической теории пологих слоистых оболочек несимметричной структуры. Днепропетровск: Днепропетр. инж.-строит.ин-т. 1987. 13 с.
65. Плеханов А.В. Уточненный вариант прикладной теории пологих слоистых оболочек. *Изв. вузов. Стр-во и архит.* 1991. - №1. - С. 22 - 25.
66. Поляков В.А., Таневский В.В. Влияние соотношений слоев на характер разрушения при растяжении слоистых углепластиков с тремя углами армирования. *Мех. композит, матер.* 1980. - №6. - С. 1029 - 1035.
67. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. Київ: Наук. думка, 1987. 174 с.
68. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. Применение теории R- функций к исследованию пластин и оболочек сложной формы. *Проблемы машиностроения.* – 1998. – т.1, № 1.– С.33-53.
69. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. Решение задач устойчивости пластин методом R- функций. *Проблемы прочности.* – 1987, №6.–С.100-103.
70. Рвачев В.Л., Курпа Л.В., Склепус Н.Г., Учишвили Л.А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Наук. думка, 1973. 123с.
71. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. – 552с.
72. Рябов А.Ф. Розрахунок богатошарових оболонок. Київ: Будівельник, 1968. - 96 с.
73. Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л. Уточненная теория многослойных композитных оболочек в задачах статики и динамики. *Сопротивление матер, и теория сооружений.* Киев. 1986. №49. С. 38 - 41.

74. Сипетов В.С., Демчук О.Н. К сравнению двух вариантов расчета слоистых анизотропных пологих оболочек. *Изв. вузов. Стр. и ар-хит.* 1989. №2. С. 36 - 39.
75. Стоян Ю.Г., Проценко В.С., Манько Г.П. и др. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. Київ: Наук. думка, 1986. – 264 с.
76. Тетере Г.А. Пластинки и оболочки из полимерных и композиционных материалов (обзор). *Мех. полимеров.* 1977. №3. С. 486 -493.
77. Ткаченко В.В. Дослідження статичної та динамічної стійкості багатошарових пластин складної форми плану. *Тезиси докладов I Международной научно-технической конференции 10-14 сентября 2018 г. с.* 140-141.
78. Ткаченко В.В. Исследование динамической устойчивости многослойных пластин с отверстиями. *Вестник НТУ "ХПИ"*, 2018, №3 (1279). с. 129-136.
79. Ткаченко В.В. Исследование устойчивости многослойных пластин симметричного строения с помощью метода R-функций. *Тезиси докладов XIII международной научной конференции им. Кравчука*, Киев, 13-15 мая 2010, с.124.
80. Ткаченко В.В. Исследование устойчивости многослойных пластин с отверстиями под действием периодической нагрузки. *Тези доповідей XXV міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2017*, 17-19 травня 2017р., с.80.
81. Ткаченко В.В. Колебания и устойчивость сжатых многослойных пластин в рамках классической и уточненной теорий. *Вісник НТУ "ХПИ"*, 2011, №13, с. 134-145.
82. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
83. Шматко Т. В. Построение математической модели для исследования устойчивости форм нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек сложной формы в плане. *Вестник НТУ «ХПИ». Серия «Динамика и прочность машин».* 2002. т. 9, № 9. С. 127–133.

84. Шмидт Г. Параметрические колебания. Москва: изд. «Мир», 1978. – 333с.
85. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисления. Москва: Книга по Требованию, 2012. – 424 с.
86. Abe Akira, Yukinori Kobayashi, Gen Yamada. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells weith one-to-one internal resonance. *J. Sound and Vibration*. 2007. №304. P. 957 – 968.
87. Aboudi J, Cederbaum G and Elishakoff I. Dynamic stability analysis of viscoelastic plates by Lyapunov exponents, *Journal of Sound and Vibration*, (1990) volume 139 (3), page no 459-467.
88. Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. and Babuscu Yesil U. (2010) Forced vibration of aninitially stressed thick rectangular plate made of an orthotropic material with a cylindrical hole. *Mechanics of Composite Materials*. September 2010, Volume 46, Issue 3, pp. 287–298.
89. Awrejcewicz J., A.V. Kryś'ko Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov-Galerkin approach. *Applied Mechanics*. 2003. 73. P. 495 – 504.
90. Awrejcewicz Jan, Lidiya Kurpa, Olga Mazur. Dynamical instability of laminated plates with external cutout. *Int.J.of Non-linear Mechanics* (81), 2016, p.103-114.
91. Awrejcewicz J., L. Kurpa, O. Mazur On the parametric vibrations and meshless discretization of orthotropic plates with complex shape. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2010, V. 11, Is. 5, P. 371–386.
92. Awrejcewicz J., L. Kurpa, O. Mazur Research of stability and nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. *Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems*. UK, Springer, 2009. P.179-189.
93. Bailer R. Hicks R. Behaviour of Perforated Plates under Plane Stress. *Journal of Mechanical Engineering Science* 1982 Volume: 2 issue: 2, pp: 143-165.
94. Basharia A.A. Yousef, Mohamed H. Elsheikh, Mohd F. M. Sabri, Hakim S. S. Aljibori, Suhana M. Said. Effect of Buckling on Glass Fiber/Epoxy Plate - *International Journal of Engineering Research and Development* (2012) Volume 5, Issue 5, PP. 60-68

95. Beliaev N.M. Stability of prismatic rods subjected to variable longitudinal forces. *Collection of papers: Eng. Construct, Struct. Mech., Put', Leningrad*, 149 – 167, 1924
96. Bicos A.S., Springer G.S. Analysis of free damped vibration of laminated composite plates and shells. *Int. J. Solids Struct.* 1989, 25, pp. 129-149.
97. Buket Okutan Baba: Buckling of laminar composite plates. *Journal of reinforced plastics and composites*, Vol. 26, (2007) No. 16
98. Chakrabarti A., and Sheikh A.H. Buckling of laminated sandwich plates using an efficient plate model. *International Shipbuilding Progress*. 2007. Vol.54. P.63-81.
99. Cheng S.L. Dynamic stresses in a plate with circular holes. *J. Appl. Mech* (1972) 39(1), 129-132.
100. Civalek O. Free vibration and buckling analyses of composite plates with straight-sided quadrilateral domain based on DSC approach. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2007. Vol.43. pp.1013-1022.
101. Datta P. K. and Biswas S. Research Advances on Tension Buckling Behavior of Aerospace Structures: A Review. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, vol. 12, issue 1, P. 1-15.
102. Darvizeh M., A. Darvizeh, R. Ansari, C.B. Sharma. Buckling analysis of generally laminated composite plates. *Journal of composite structures*, vol.63 (2004), pages 69-74.
103. Dash S., Asha, A. V., Sahu, S K. Stability of laminated composite curved panels with cutout using finite element method. *Proceedings of the International Conference on Theoretical, Applied Computational and Experimental Mechanics (ICTACEM 2004)*, December 28-31, 2004 IIT, Kharagpur.
104. Deepanshu Bhatt, Yogesh Mishra, Dr. P.K. Sharma. A Review of Static and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plate by using Finite Element Method. *International Journal of Advanced Engineering and Global Technology* Vol-2, Issue-10, October 2014.
105. Dey P., M.K. Singha. Dynamic stability analysis of composite skew plates subjected to periodic in-plane load. *Thin-Walled Structures*. 44 (2006) 937–942

106. Du Guo-jun, Yingyong Shuxue He Lixue. Large amplitude vibration of circular sandwich plates. *Appl. Math. and Mech.* 1994, v. 15, № 5, p. 435-442.
107. Du Guo-jun., Chen Yingjie. Further study on large amplitude vibration of circular sandwich plates. *Appl. Math. And Mech. Engl. Ed.* 1996, v. 17, № 11, p. 1087-1094.
108. Du Guo-jun., Ma Jian-ging. Nonlinear vibration of circular sandwich plates. *Appl. Math. and Mech. Engl. Ed.*, 2006, v. 27, № 10, p. 1417-1424.
109. Evan – Iwanowski R. M. On the “parametric response of structures”. *Applied Mechanics review*, volume 18, page no 699 – 702, 1965.
110. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans., Roy. Soc., London*, 299 – 318, 1831.
111. Ferreira A.J.M., L.M. Castro, C.M.C. Roque, J.N. Reddy, S. Bertoluzza. Buckling analysis of laminated plates by wavelets. *Computers and Structures* 89 (2011) 626–630
112. Ganapathi, M., Prakash, T., and Sundararajan, N. Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads. *Journal of Engineering Mechanics*. 2006. Vol.132(8). 902-905.
113. Ganapathi M., B.P. Patel, P. Boisse, M. Touratier. Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. Vol.35. 2000. P. 467 – 480.
114. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov V.V. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. Kiev, *Akadem periodika*, 2009. –549 p.
115. Habip, L.M., A survey of modern developments in the analysis of sandwich Structures. *Applied Mechanics Reviews*, 1965, volume 18, pp. 93-98.
116. Hani Aziz Ameen Buckling Analysis of Composite Laminated Plate with Cutouts *Eng. & Tech. Journal*, Vol. 27 ,No.8 ,2009 Eng, 1611– 1621.
117. Harsh Kumar Bhardwaj, Jyoti Vimal, Avadesh Kumar Sharma Study of Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates with Skew Cut-outs based on

- FSDT. *Journal of Civil Engineering and Environmental Technology* Print ISSN: 2349-8404; Online ISSN: 2349-879X; Volume 1, Number 3; August, 2014 p. 71-75
118. Hongzhi Zhong, Chao Gu. Buckling of symmetrical cross-ply composite rectangular plates under a linearly varying in-plane load. *Composite Structures*, Volume-80, (2007) pp 42-48
119. Hsuan-The, Hu. Chia-Hao Yang, and Fu-Ming Lin. 2006. Buckling analyses of composite skew plates with material nonlinearity. *Composites: Part B*.37. 26-36.
120. Hsuan-Teh Hu & Bor-Horng Lin, Buckling Optimization of Symmetrically Laminated Plates with Various Geometries and End Conditions. *Composites Science and Technology*. Vol.55 (1995), pp 277-285.
121. Husam Al Qablan, Hasan Katkhuda and Hazim Dwairi: Assessment of the Buckling Behavior of Square Composite Plates with Circular Cutout Subjected to In-Plane Shear. *Jordan Journal of Civil Engineering*, (2009) Volume 3, No. 2
- 122.Ibrahim, R. A. and Barr, A. D. S., Parametric vibration, Part I: Mechanics of linear problems. *Shock Vib. Dig.*, volume 10(1), page no 15 – 29, 1978.
- 123.Ibrahim, R. A. and Barr, A. D. S., Parametric vibration, part II: Mechanics of nonlinear problems. *Shock Vib. Dig.*, volume 10(20), page no 9 – 24, 1978.
- 124.Ibrahim, R. A., Parametric vibration, Part III: Current problems (1). *Shock vib. Dig.*, Volume 10 (3), page no 41 –57, 1978.
- 125.Ibrahim., R. A., Parametric vibration, Part IV : Current problems (2). *Shock Vib Dig.*, Volume 10 (4), page no:19 – 47, 1978.
- 126.Ibrahim., R. A., and Roberts, J. W., Parametric vibration, Part V: Stochastic problems. *Shock Vib. Dig.*, volume 10 (5),page no: 17 – 38, 1978.
- 127.Ibrahim., R. A., Parametric vibration, Part Vi : Stochastic problems (2). *Shock Vib. Dig.*, volume 13 (9), page no 23 – 35, 1981.
128. Ibrahim., R. A. , Parametric Random Vibration, Research Studies Press Ltd. ,England ,1985.

129. Jameel, H, Therib. An investigation of elastic buckling for perforated plates in aircraft structures. *M.Sc. thesis* , Al-Rasheed College , of Engineering and Science, University of Technology, 2004 .
130. Jia Xie, Qing-Qing Ni and Masaharu Iwamoto. Buckling analysis of laminated composite plates with internal supports. *Journal of composite structures*, vol.69 (2005), pages 201-208.
131. Jwalamalini R. Sundaravadivelu, R., Vendhan, C.P. , and Ganapathy, C. Stability of initially stressed square plates with square openings. *Marine Structures*. Volume 5, Issue 1, 1992, Pages 71-84.
132. Khalili M.R. K. Malekzadeh, R.K. Mittal. A new approach to static and dynamic analysis of composite plates with different boundary conditions. *Journal of Composite Structures*, Vol. 69 (2005), pp 149–155.
133. Ko, William, L, “ Mechanical- and thermal – buckling behavior of rectangular plates with different central cutouts”, NASA-TM- 1998-206542, 1998.
134. Kode Srividya, V. Balakrishna Murthy and M.R.S. Satyanarayana. Effect of Boundary Conditions on Free Vibration Analysis of Thick Fiber Reinforced Plastic Skew Laminate with Circular Cutout. *International Journal of Engineering Sciences & Research Technology* June, 2014 [292-297]
135. Komur M. Aydin, Faruk Sen, Akın Atas, Nurettin Arslan. Buckling analysis of laminated composite plates with an elliptical/circular cutout using FEM. *Advances in Engineering Software* 41 (2010) 161–164
136. Kormannikova E., I. Mamuzic. Buckling analysis of a laminated plate. *Metalurgija*. – 2008 – 47(2). – P. 129-132.
137. Kurpa L., O. Mazur. Analysis of the nonlinear vibrations and dynamic instability of plates and shallow shells with complex form by R-functions method. *Nonlinear dynamics. The second international conference. Proceedings*, Kharkov, September, 25-28, 2007 – Kharkov: NTU "KPI", 2007. – P.176-181.
138. Kurpa L. Application of the R-function theory to problems of Nonlinear Dynamics of Laminated Composite Shallow Shells and Plates: Review. *Nonlinear*

- dynamics -2016. The 5th international conference. Proceedings, Kharkov, September, 27-30, 2016. Kharkov: NTU "KPI", 2016. – P.431-437.*
139. Kurpa Lidya, Olga Mazur, Victoria Tkachenko. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Lat. Am. j. solids struct.* 2013, vol.10, n.1 – p.175-188.
140. Kurpa L., Olga Mazur, Victoria Tkachenko. Investigation of the Parametric Vibration of Laminated Plates by RFM. *Nonlinear dynamics -2016. The 5th international conference. Proceedings, Kharkov, September, 27-30, 2016 – Kharkov: NTU "KPI", 2016. – P.445-450.*
- 141.L.Kurpa, O.Mazur. Investigation of Parametric Vibrations of Laminated plates by R-functions Method// ENOC,2014 Vienna, p. 6-11.
- 142.Kurpa L. V., O. S. Mazur, V. V. Tkachenko. Parametric vibrations and dynamic instability of thin laminated plates with complex form. *Shell Structures: Theory and Applications - Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference, 2013, P. 309-312.*
- 143.L.V. Kurpa,O.S.Mazur & V.V.Tkachenko. Parametric Vibrations and Dynamic Instability of thin laminated plates with complex form. *Shell Structures: Theory and Applications, 2014 Taylor & Francis Group, London,UK.- V.3,p.309-312.*
- 144.Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Parametric vibrations of laminated plates with complex shape. *Тези на конференції: 11th conference on dynamical systems theory and applications, December 5-8, 2011. Lodz, Poland p. 289-294.*
- 145.A. Lakshmi narayana, Krishnamohana Rao R. Vijaya Kumar Effect of location of cutout and plate aspect ratio on buckling strength of rectangular composite plate with square/rectangular cutout subjected to various linearly varying in-plane loading using FEM. *International journal of mechanics.* Issue 4, Volume 7, 2013 508-518
146. Lee. Y.J. Lin H.J. Lin C.C. A study on the buckling behavior of an orthotropic square plate with a central circular hole. *Composite structural.* Vol. 13, no.3, pp.173-188,1989.

147. Liew K.M., Yang, T., Kitipornchai S. A semi analytical solution for vibration of rectangular plates with abrupt thickness variation. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 38, Issues 28–29, July 2001, Pages 4937-4954.
148. Lin, Chien- Chang; and Kuo, Ching- Suong. Buckling of Laminated Plates with Holes. *J. Composit. Mater*, vol. 23, June 1989, pp.536-553.
149. Linnik A., Mazur O., Tkachenko V. Nonlinear analyses of the laminated plates of the symmetric structure subjected to static in the plane forces. *The Proceedings of the 3rd International conference of “Nonlinear Dynamics – 2010”*, sept., 21-24, 2010, Kharkov. p. 369-374.
150. Marchuk M. V., Pakosh V. S., Kharchenko V. M. Natural frequencies of layered composite plates-strips with components compliant to transverse shear and compression. *J. Math. Sci.* – 2014. – 203, No. 2. – P. 185–192.
151. Martin, James. Buckling and postbuckling of laminated composite square plates with reinforced central holes. Ph.D. Diss., Case Western Reserve Univ., 1972 .
152. Marshall I. H., Little W. El., Tayebby M. M., Williams J. Buckling of perforated composite plates – an approximate solution. *Proceedings of the Second International. Conference on Fiber Reinforced Composites*, Mech. Eng. Publ., pp,29-33, 1986.
153. Mazur O., Linnik A., Tkachenko V. Nonlinear analyses of the laminated plates of the symmetric structure subjected to static in the plane forces. *Тези на конференції: The Proceedings of the 3rd International conference of “Nonlinear Dynamics – 2010”*, sept., 21-24, 2010, Kharkov, p. 369-374
154. Melde, F., über erregung stehender wellen eines fadenformigen korpers. *ANN. P Hys. Chem.*, volume 109, 1859, page no: 193 – 215.
155. Michael P. Nemeth. Buckling and postbuckling behavior of laminated composite plates with a cutout, 1996, Nasa technical paper 3587.
156. Mohammed Ismael Hamed. Free vibration analysis of composite aircraft wing with circular cutout using finite element method. *Second Engineering Scientific*

- Conference*. College of Engineering-University of Diyala, 16-17 Dec. 2015 pp. 740-752
157. Myung Jo Jung, Young Hwan Choi and Yong ho Ryu. Free vibration analysis of circular plate with eccentric hole submerged in fluid. *Nuclear Engineering and Technology*. 2009. Vol.41(3) p. 355-364.
158. Nagendra Singh Gaira, Nagendra Kumar Maurya and Rakesh Kumar Yadav: Linear Buckling Analysis of Laminar Composite Plates. *International Journal of Engineering Science and Advanced Technology*. IJESAT, Volume-2, Issue-4 (2010) pp 886 – 891
159. Nakra B.C. Vibration control with viscoelastic materials. *The Shock and Vibration Digest*, volume 8, page no 3-12, 1976.
160. Nakra B.C. Vibration control with viscoelastic materials-II. *The Shock and Vibration Digest*, volume 13, page no 17-20, 1981.
161. Nakra B.C. Vibration control with viscoelastic materials-III. *The Shock and Vibration Digest*, volume 16, page no: 17-22, 1984.
162. Nayfeh A. H., D. T. Mook Non-linear oscillations. New York, Wiley, 1979. – 705p.
163. Nemeth M., Michael, P., Stein, Manuel. Johnson, Eric R. An approximate buckling analysis for rectangular orthotropic plates with centrally located cutouts. NASA TP- 2528, 1986.
164. Ng T.Y., Lam K.Y, Reddy J.N. Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells, 1998. *Int. J. Mech. Sci.* 40(8), P. 805-823.
165. Noor A.K. Stability of multilayered composite plates. *Fiber Science and Technology*, 1975. Vol. 8. pp. 81-89.
166. Partha Dey, and Singha M.K.. Dynamic stability analysis of composite skew plates subjected to periodic in-plane load. *Thin-walled structures*. 2006. Vol. 44. pp.937-942.
167. Prakash, T., Singha, M.K., and Ganapathi, M.. Thermal post buckling analyses of FGM skew plates. *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. pp. 22–32.

168. Putcha N.S., J.N. Reddy. Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory. *J. Sound and Vibration*, 1986. Vol. 104(2). P. 285 – 300.
169. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures*, Volume 93, Issue 1, December 2010, P. 14-31.
170. Qing-Qing Ni, Jia Xie and Masaharu Iwamoto. Buckling analysis of laminated composite plates with arbitrary edge supports. *Journal of composite structures*, vol.69 (2005), pages 209- 217.
171. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition. USA: CRC PRESS, – 2004. – p.834.
172. Rouse Marshall Effect of cutouts or low – speed impact damage on the postbuckling behavior of composite plates loaded in shear. *Proceedings of the 31st AIAA, ASME, ASCE, ASC, Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pp.877-891,1990.
173. Rupesh, D., and Singha, M.K.. Influence of corner stresses on the stability characteristics of composite skew plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2009. Vol. 44. pp. 138- 146.
174. Sahu S. K., Datta P. K. Dynamic stability of curved panels with cutouts. *Journal of Sound and Vibration*. V. 251, Issue 4, 2002, P. 683–696
175. P. K. Datta, S. K. Sahu. Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts. *Journal of engineering mechanics* - november 2003 - pp. 1245-1253.
176. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987-2005 — Part1: conservative system - *Applied mechanics reviews*. 2007. Vol.60. P.65-75.
177. Salim S., N.G.R. Iyengar, D. Yadav. Buckling of a laminated plates with random material characteristics. *Applied Composite Materials*. 1998. Vol.5. P. 1-9.
178. Schlack, Alois,L, Jr. Elastic stability of pierced square plates, *Experimental Mechanics*, DRYDEN Flight Research Center, PP.167-175, 1964.

179. Sharma K.. Review on Stress and Vibration Analysis of Composite Plates. *Journal of Applied Sciences* 10(23):3156-3166, 2010.
180. Sherif H.A. Free flexural vibrations of clamped circular sandwich plates. *Journ. of Sound and Vibr.*, 1992, v. 157, № 3, p. 531 – 537.
181. Sherif H.A. Non-linear forced flexural vibration of a clamped circular unsymmetrical sandwich plate. *Journ. of Sound and Vibr.*, 1995, v. 182, № 3, p. 495-503.
182. Simitzes G. J. Instability of dynamically loaded structures. *Applied mechanics reviews*. 1987. P. 1403–1408.
183. Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, p.541-554.
184. Sircar R. Vibration of rectilinear plates on elastic foundation at large amplitude. *Bull. Acad. pol. sci. techn*, 1974, v. 22, № 4. p. 293-299.
185. C.V. Srinivasa, Y.J. Suresh, W.P. Prema Kumar. Buckling Studies on Laminated Composite Skew Plates. *International Journal of Computer Applications*. (0975 – 8887) Volume 37– No.1, January 2012 p. 35-47
186. Stahl, L. M. Keer, Vibration and stability of cracked rectangular plates, *International Journal of Solids Structures* 8(1) (1972) 69-91.
187. Umut Topal and Ümit Uzman. Maximization of buckling load of laminated composite plates with central circular holes using MFD method. *Struct Multidisc Optim* (2008) 35:pp131–139
188. Yasui Yoshiaki. The buckling of rectangular composite plates with cutout under uniaxial and biaxial compression. *Proceedings the 18th International Conference on Composite Materials*, pp.4-B-1– 4-B-8, 1991.
189. Yogesh G. Jadhav, P. V. Deshmukh. Effect of cut-out shape on free vibration of composite plates international journal of current engineering and scientific research (IJCESR) ISSN (PRINT): 2393-8374, (ONLINE): 2394-0697, VOLUME-3, ISSUE-6, 2016 48-53

190. Zhang Y.X., Yang C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, Vol. 88, No. 1. (March 2009), P. 147-157.

ДОДАТОК А

„ЗАТВЕРДЖУЮ”

ПРОРЕКТОР З НАУКОВОЇ РОБОТИ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ „ХАРКІВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

_____ проф. А.П. Марченко

_____ 2019 р.

АКТ

Із застосування розробок та результатів досліджень дисертаційної роботи
Ткаченко Вікторії Валеріївни

Розробки та результати дисертаційної роботи Ткаченко Вікторії Валеріївни були використані при виконанні держбюджетних тем: «Створення на базі теорії R-функцій методів розв’язку задач нелінійної динаміки пластин та пологих оболонок» за наказом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1044 від 27.11.2007), ДР № 0108U001443 (в період з 2008 р. по 2011 р.); «Розробка методів дослідження нелінійних задач динаміки багаточарових пластин та пологих оболонок» згідно з координаційним планом Міністерства освіти та науки, молоді та спорту України (№1177, від 30.11.2010), ДР № 0111U002260 (в період з 2011 р. по 2013 р.), а також на кафедрі прикладної математики НТУ "ХПІ" у навчальному процесі при викладанні курсу „Рівняння математичної фізики”.

Науковий керівник тем, зав. каф.

„Прикладна математика” НТУ „ХПІ”, д.т.н., проф.Л.В.Курпа

Директор інженерно-фізичного

інституту НТУ „ХПІ”, д.т.н.О.О.Ларін

ДОДАТОК Б

Варіаційна постановка задачі визначення неоднорідного докритичного стану навантаженої багат шарової пластин у разі антисиметричної будови пакету шарів в рамках теорії типу Тимошенка.

Розглянемо задачу визначення неоднорідного докритичного стану пластини у випадку антисиметричної будови в рамках уточненої теорії. Математична постановка цієї задачі в переміщеннях описується наступною системою рівнянь:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = 0$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = 0$$

$$L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = 0$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y - Q_1 = 0$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y - Q_2 = 0$$

де оператори мають вигляд

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{12} = L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{33} = C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{45} + C_{54}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{34}(C_{ij}) = C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y};$$

$$L_{35}(C_{ij}) = C_{54} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y};$$

$$L_{44}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{45}(C_{ij}, D_{ij}) = L_{54}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{55}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

А перерізуючі сили визначаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}.$$

Доведемо, що варіаційна постановка задачі зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left((N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L) + \right. \\ &+ (M_{11}^L \chi_{11}^{(1)} + M_{22}^L \chi_{22}^{(1)} + M_{12}^L \chi_{12}^{(1)}) + \\ &\left. + \left(Q_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \psi_{x_1} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \psi_{y_1} \right) \right) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds \end{aligned}$$

Для зручності, опустимо індекси „1”, тобто $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$,
 $\psi_x = \psi_{x_1}$, $\psi_y = \psi_{y_1}$.

Розглянемо підінтегральну функцію

$$\begin{aligned} F &= N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L + M_{11}^L \chi_{11}^{(1)} + M_{22}^L \chi_{22}^{(1)} + M_{12}^L \chi_{12}^{(1)} + \\ &+ Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right). \end{aligned} \quad (Д-1)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= p_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = p_3, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = p_4, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = p_5, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= q_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q_2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = q_3, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = q_4, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = q_5. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^L &= p_1, \quad \varepsilon_{22}^L = q_2, \quad \varepsilon_{12}^L = q_1 + p_2, \\ \chi_{11} &= p_4, \quad \chi_{22} = q_5, \quad \chi_{12} = q_4 + p_5, \\ \varepsilon_{13} &= p_3 + \psi_x, \quad \varepsilon_{23} = q_3 + \psi_y.\end{aligned}$$

Компоненти зусиль в нових змінних матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}N_{11} &= C_{11}p_1 + C_{12}q_2 + C_{16}q_1 + C_{16}p_2 + K_{11}p_4 + K_{12}q_5 + K_{16}q_4 + K_{16}p_5, \\ N_{22} &= C_{12}p_1 + C_{22}q_2 + C_{26}q_1 + C_{26}p_2 + K_{12}p_4 + K_{22}q_5 + K_{26}q_4 + K_{26}p_5, \\ N_{12} &= C_{16}p_1 + C_{26}q_2 + C_{66}q_1 + C_{66}p_2 + K_{16}p_4 + K_{26}q_5 + K_{66}q_4 + K_{66}p_5, \\ M_{11} &= K_{11}p_1 + K_{12}q_2 + K_{16}q_1 + K_{16}p_2 + D_{11}p_4 + D_{12}q_5 + D_{16}q_4 + D_{16}p_5, \\ M_{22} &= K_{12}p_1 + K_{22}q_2 + K_{26}q_1 + K_{26}p_2 + D_{12}p_4 + D_{22}q_5 + D_{26}q_4 + D_{26}p_5, \\ M_{12} &= K_{16}p_1 + K_{26}q_2 + K_{66}q_1 + K_{66}p_2 + D_{16}p_4 + D_{26}q_5 + D_{66}q_4 + D_{66}p_5.\end{aligned}$$

Перерізуючи сили примуть вигляд:

$$\begin{aligned}Q_1 &= C_{55} \cdot p_3 + C_{55} \cdot \psi_x + C_{54} \cdot q_3 + C_{54} \cdot \psi_y; \\ Q_2 &= C_{45} \cdot p_3 + C_{45} \cdot \psi_x + C_{44} \cdot q_3 + C_{44} \cdot \psi_y.\end{aligned}$$

Зауважимо, далі $C_{45} = C_{54}$.

Підставимо компоненти зусиль у функцію (Д-1). Тоді підінтегральна функція прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned}F &= C_{11}p_1^2 + C_{12}q_2p_1 + C_{16}q_1p_1 + C_{16}p_2p_1 + K_{11}p_4p_1 + K_{12}q_5p_1 + K_{16}q_4p_1 + \\ &+ K_{16}p_5p_1 + C_{12}p_1q_2 + C_{22}q_2^2 + C_{26}q_1q_2 + C_{26}p_2q_2 + K_{12}p_4q_2 + K_{22}q_5q_2 + \\ &+ K_{26}q_4q_2 + K_{26}p_5q_2 + C_{16}p_1q_1 + C_{26}q_2q_1 + C_{66}q_1^2 + C_{66}p_2q_1 + K_{16}p_4q_1 + \\ &+ K_{26}q_5q_1 + K_{66}q_4q_1 + K_{66}p_5q_1 + C_{16}p_1p_2 + C_{26}q_2p_2 + C_{66}q_1p_2 + C_{66}p_2^2 + \\ &+ K_{16}p_4p_2 + K_{26}q_5p_2 + K_{66}q_4p_2 + K_{66}p_5p_2 + K_{11}p_1p_4 + K_{12}q_2p_4 + K_{16}q_1p_4 + \\ &+ K_{16}p_2p_4 + D_{11}p_4^2 + D_{12}q_5p_4 + D_{16}q_4p_4 + D_{16}p_5p_4 + K_{12}p_1q_5 + K_{22}q_2q_5 + \\ &+ K_{26}q_1q_5 + K_{26}p_2q_5 + D_{12}p_4q_5 + D_{22}q_5^2 + D_{26}q_4q_5 + D_{26}p_5q_5 + K_{16}p_1q_4 + \\ &+ K_{26}q_2q_4 + K_{66}q_1q_4 + K_{66}p_2q_4 + D_{16}p_4q_4 + D_{26}q_5q_4 + D_{66}q_4^2 + D_{66}p_5q_4 + \\ &+ K_{16}p_1p_5 + K_{26}q_2p_5 + K_{66}q_1p_5 + K_{66}p_2p_5 + D_{16}p_4p_5 + D_{26}q_5p_5 + D_{66}q_4p_5 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{66}p_5^2 + C_{55}p_3^2 + 2C_{55}p_3\psi_x + C_{55}\psi_x^2 + C_{54}q_3p_3 + C_{54}q_3\psi_x + C_{54}p_3\psi_y + C_{54}\psi_y\psi_x + \\
& + C_{45}p_3q_3 + C_{45}p_3\psi_y + C_{45}\psi_xq_3 + C_{54}\psi_y\psi_x + C_{44}q_3^2 + 2C_{44}q_3\psi_y + C_{44}\psi_y^2.
\end{aligned}$$

Як відомо [85], система рівнянь Ейлера-Остроградського для функціоналів такого виду має вигляд:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_1} = 0, \quad (\text{Д-2})$$

$$F_v - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_2} = 0, \quad (\text{Д-3})$$

$$F_{\psi_x} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_4} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_4} = 0, \quad (\text{Д-4})$$

$$F_{\psi_y} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_5} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_5} = 0, \quad (\text{Д-5})$$

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_3} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_3} = 0. \quad (\text{Д-6})$$

Після обчислення похідних, застосовуючи введені позначення, вирази (Д-2) - Д-6) представимо у розгорнутому вигляді.

$$\begin{aligned}
& - 2(C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \\
& + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\
& + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0.
\end{aligned} \quad (\text{Д-7})$$

В операторно му вигляді вираз (Д-7) може бути записано як:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = 0.$$

Аналогічно представимо вираз (Д-3).

$$\begin{aligned}
& - 2(C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \\
& + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} +
\end{aligned} \quad (\text{Д-8})$$

$$+ K_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0.$$

Або в операторній формі:

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = 0.$$

Вираз (Д-4) представимо наступним чином:

$$\begin{aligned} & 2C_{55}p_3 + 2C_{55}\psi_x + 2C_{54}q_3 + 2C_{54}\psi_y - 2(K_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & + K_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, вираз (Д-4) в операторній формі прийме вигляд:

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y - Q_1 = 0.$$

Представимо вираз (Д-5) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & 2C_{45}p_3 + 2C_{45}\psi_x + 2C_{44}q_3 + 2C_{44}\psi_y - 2(K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & + K_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & + K_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, наступне рівняння системи прийме вид:

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y - Q_2 = 0.$$

Вираз (Д-5) представимо, як записано нижче, а саме:

$$\begin{aligned} & C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + C_{54} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{54} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \\ & + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + C_{54} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{54} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Тобто, в операторній формі:

$$L_{33}w + L_{34}\psi_x + L_{35}\psi_y = 0.$$

Таким чином, одержано всі п'ять рівнянь, що доказує справедливість функціоналу для визначення неоднорідного докритичного стану багат шарової пластини при антисиметричному пакеті шарів в рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка.

ДОДАТОК В

Варіаційна постановка допоміжних задач для визначення функцій u_2, v_2 , які використовуються для дискретизації системи рівнянь руху в рамках теорії типу Тимошенка для пластин антисиметричної будови пакету шарів

Розглянемо систему

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = Nl_1(w), \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = Nl_2(w), \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = Nl_4(w), \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = Nl_5(w). \end{cases}$$

для якої $u_2, v_2, \psi_{x_2}, \psi_{y_2}$ - це розв'язки. А $Nl_1(w), Nl_2(w), Nl_3(w), Nl_4(w)$ - відомі функції.

Покажемо, що знаходження розв'язків системи еквівалентно знаходженню точки стаціонарності наступного функціоналу:

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L + \\ & + M_{11}^L \chi_{11}^L + M_{22}^L \chi_{22}^L + M_{12}^L \chi_{12}^L + K_s^2 C_{66} (\psi_{x_1}^2 + \psi_{y_1}^2) + \\ & + 2(Nl_1(w_1^c)u_2 + Nl_2(w_1^c)v_2 + Nl_4(w_1^c)\psi_{x_2} + Nl_5(w_1^c)\psi_{y_2})) d\Omega \end{aligned}$$

Розглянемо підінтегральну функцію

$$\begin{aligned} F = & N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L + M_{11}^L \chi_{11}^L + M_{22}^L \chi_{22}^L + M_{12}^L \chi_{12}^L + \\ & + K_s^2 C_{66} (\psi_{x_1}^2 + \psi_{y_1}^2) + 2(Nl_1(w_1^c)u_2 + Nl_2(w_1^c)v_2 + Nl_4(w_1^c)\psi_{x_2} + Nl_5(w_1^c)\psi_{y_2}). \end{aligned} \quad (Д-9)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = p_4, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = p_5, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q_2, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = q_4, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = q_5. \end{aligned}$$

Тоді

$$\varepsilon_{11}^L = p_1, \quad \varepsilon_{22}^L = q_2, \quad \varepsilon_{12}^L = q_1 + p_2,$$

$$\chi_{11} = p_4, \quad \chi_{22} = q_5, \quad \chi_{12} = q_4 + p_5.$$

Компоненти зусиль в нових змінних матимуть вигляд:

$$N_{11} = C_{11}p_1 + C_{12}q_2 + C_{16}q_1 + C_{16}p_2 + K_{11}p_4 + K_{12}q_5 + K_{16}q_4 + K_{16}p_5,$$

$$N_{22} = C_{12}p_1 + C_{22}q_2 + C_{26}q_1 + C_{26}p_2 + K_{12}p_4 + K_{22}q_5 + K_{26}q_4 + K_{26}p_5,$$

$$N_{12} = C_{16}p_1 + C_{26}q_2 + C_{66}q_1 + C_{66}p_2 + K_{16}p_4 + K_{26}q_5 + K_{66}q_4 + K_{66}p_5,$$

$$M_{11} = K_{11}p_1 + K_{12}q_2 + K_{16}q_1 + K_{16}p_2 + D_{11}p_4 + D_{12}q_5 + D_{16}q_4 + D_{16}p_5,$$

$$M_{22} = K_{12}p_1 + K_{22}q_2 + K_{26}q_1 + K_{26}p_2 + D_{12}p_4 + D_{22}q_5 + D_{26}q_4 + D_{26}p_5,$$

$$M_{12} = K_{16}p_1 + K_{26}q_2 + K_{66}q_1 + K_{66}p_2 + D_{16}p_4 + D_{26}q_5 + D_{66}q_4 + D_{66}p_5.$$

Тоді підінтегральну функцію (Д-9) запишемо в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} F = & C_{11}p_1^2 + C_{12}q_2p_1 + C_{16}q_1p_1 + C_{16}p_2p_1 + K_{11}p_4p_1 + K_{12}q_5p_1 + K_{16}q_4p_1 + \\ & + K_{16}p_5p_1 + C_{12}p_1q_2 + C_{22}q_2^2 + C_{26}q_1q_2 + C_{26}p_2q_2 + K_{12}p_4q_2 + K_{22}q_5q_2 + \\ & + K_{26}q_4q_2 + K_{26}p_5q_2 + C_{16}p_1q_1 + C_{26}q_2q_1 + C_{66}q_1^2 + C_{66}p_2q_1 + K_{16}p_4q_1 + \\ & + K_{26}q_5q_1 + K_{66}q_4q_1 + K_{66}p_5q_1 + C_{16}p_1p_2 + C_{26}q_2p_2 + C_{66}q_1p_2 + C_{66}p_2^2 + \\ & + K_{16}p_4p_2 + K_{26}q_5p_2 + K_{66}q_4p_2 + K_{66}p_5p_2 + K_{11}p_1p_4 + K_{12}q_2p_4 + K_{16}q_1p_4 + \\ & + K_{16}p_2p_4 + D_{11}p_4^2 + D_{12}q_5p_4 + D_{16}q_4p_4 + D_{16}p_5p_4 + K_{12}p_1q_5 + K_{22}q_2q_5 + \\ & + K_{26}q_1q_5 + K_{26}p_2q_5 + D_{12}p_4q_5 + D_{22}q_5^2 + D_{26}q_4q_5 + D_{26}p_5q_5 + K_{16}p_1q_4 + \\ & + K_{26}q_2q_4 + K_{66}q_1q_4 + K_{66}p_2q_4 + D_{16}p_4q_4 + D_{26}q_5q_4 + D_{66}q_4^2 + D_{66}p_5q_4 + \\ & + K_{16}p_1p_5 + K_{26}q_2p_5 + K_{66}q_1p_5 + K_{66}p_2p_5 + D_{16}p_4p_5 + D_{26}q_5p_5 + D_{66}q_4p_5 + \\ & + D_{66}p_5^2 + K_s^2 C_{66}(\psi_{x_1}^2 + \psi_{y_1}^2) + 2(Nl_1(w_1^c)u_2 + Nl_2(w_1^c)v_2 + Nl_4(w_1^c)\psi_{x_2} + Nl_5(w_1^c)\psi_{y_2}) \end{aligned}$$

Система рівнянь Ейлера-Остроградського для функціоналів такого виду має вигляд:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_1} = 0, \quad (\text{Д-10})$$

$$F_v - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_2} = 0, \quad (\text{Д-11})$$

$$F_{\psi_x} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_4} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_4} = 0, \quad (\text{Д-12})$$

$$F_{\psi_y} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_5} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_5} = 0, \quad (\text{Д-13})$$

Після обчислення похідних, застосовуючи введені позначення, представимо вирази (Д-10 – Д-13).

Вираз Д-10 представимо в вигляді

$$\begin{aligned} & 2Nl_1(w_1^c) - 2(C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \\ & + K_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0. \end{aligned}$$

В операторному вигляді отримаємо

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{14}\psi_x + L_{15}\psi_y = Nl_1(w_1^c).$$

Аналогічно, представимо вираз (Д-11).

$$\begin{aligned} & 2Nl_2(w_1^c) - 2(C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \\ & + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0. \end{aligned}$$

Який в операторній формі має вигляд

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{24}\psi_x + L_{25}\psi_y = Nl_2(w_1^c).$$

Вираз (Д-12) можна представити наступним чином.

$$\begin{aligned}
& 2Nl_4(w_1^c) - 2(K_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \\
& + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
& + K_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0.
\end{aligned}$$

Або в операторному вигляді:

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{44}\psi_x + L_{45}\psi_y = Nl_4(w_1^c).$$

Вираз (Д-13) представимо наступним чином:

$$\begin{aligned}
& 2Nl_4(w_1^c) - 2(K_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \\
& + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
& + K_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}) = 0.
\end{aligned}$$

Тобто в операторному вигляді:

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{54}\psi_x + L_{55}\psi_y = Nl_5(w_1^c).$$

Таким чином, одержано всі чотири рівняння, що показує справедливність функціоналу для визначення невідомих функцій u_2 , v_2 , ψ_{x_2} , ψ_{y_2} . при дискретизації системи рівнянь у разі багат шарової пластини антисиметричного пакету шарів в рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка.