МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

ВЕНГЕРСЬКИЙ ПЕТРО СЕРГІЙОВИЧ

УДК 519.876.5:517.958

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ПОТОКІВ ТА ЇХ ВЗАЄМОДІЯ НА ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

01.05.02 – математичне моделювання та
обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант
Трофимчук Олександр Миколайович,
член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор

Львів – 2017

ЗМІСТ

Вступ..... 6

РОЗДІЛ І. Огляд стану проблеми 20

РОЗДІЛ ІІ. Математичні моделі формування водних потоків на території водозбору..... 61

2.1 Загальні задачі руху рідини 61

2.2 Математичні моделі формування поверхневого стоку води з території водозбору 62

2.2.1 Рівняння поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні 65

2.2.1.1 Закони збереження маси та імпульсу. 65

2.2.1.2 Геометричні характеристики об’єму рідини 66

2.2.2.3. Проекційні рівняння законів збереження. 69

2.2.1.4 Напівдискретизація проекційних рівнянь.....71

2.2.1.5 Двовимірні рівняння руху поверхневої води 78

2.2.1.6 Напівдискретизоване проекційне рівняння для вертикальної складової u_3. 80

2.2.1.7 Спрощення рівнянь поверхневої води з врахуванням зміни тиску. 84

2.2.1.8 Запис рівнянь руху у безрозмірному вигляді. 85

2.2.2 Рівняння стоку поверхневої води в наближенні кінематичної хвилі 86

2.3 Математичні моделі процесів фільтрації рідини в грунті.....91

2.3.1 Опис різних підходів до моделювання руху води в грунті.....92

2.3.2 Вивід основних рівнянь фільтрації в гідродинамічному підході.....93

2.3.3 Опис моделі планової лінійної фільтрації в насиченій зоні грунту.....96

2.4 Математична модель сумісного руху поверхневих і грунтових потоків.....98
2.4.1 Початково-крайова задача взаємодії водних потоків. 100
2.5 Висновки.....103
РОЗДІЛ III. Чисельне розв'язування варіаційних задач з використанням МСЕ. 104
3.1 Задача поверхневого стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні 105
3.1.1 Дискретизація задачі в часі.....105
3.1.2 Дискретизація задачі за просторовими змінними.....111
3.1.3 Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні.....116
3.2 Задача поверхневого стоку води в кінематичному наближенні.....123
3.2.1 Дискретизація варіаційної задачі за просторовими і часовою змінними.....123
3.2.2 Застосування інтервальних ітераційних методів для розв'язування системи проекційних нелінійних рівнянь. 126
3.3 Варіаційна задача фільтрації рідини в грунті.....127
3.3.1 Планова лінійна задача фільтрації води в насиченій зоні грунту.....128
3.3.2 Рівняння фільтрації у гідродинамічному наближенні.....131
3.4 Варіаційна задача комбінованої моделі руху поверхневих 135
і грунтових вод.....135
3.5 Висновки 144
Розділ IV. Побудова та аналіз інтервальних ітераційних методів та їх застосування до систем проекційних рівнянь 145
4.1 Двохсторонні та інтервальні ітераційні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь. 145

4.2 Стійкість інтервального ітераційного методу типу Рунге. 150
4.2.1 Аналіз порядку збіжності методу наближення оберненої матриці. 158
4.2.2 Оцінка оптимальної глибини рекурсії. 161
4.3 Дослідження інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю 164
4.3.1 Побудова одного класу інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю 165
4.3.2 Дослідження збіжності побудованих інтервальних методів ...169
4.4 Висновки. 171
РОЗДІЛ V.Дослідження рекурентних схем розв'язків варіаційних задач..... 172
5.1 Дослідження рекурентних схем моделей поверхневих потоків 172
5.1.1 Дослідження рекурентної схеми задачі поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні 172
5.1.2 Оцінка множника стабілізаційної схеми варіаційної задачі загальних рівнянь Нав'є-Стокса 180
5.1.3 Дослідження стійкості та збіжності лінеаризованої рекурентної схеми розв'язку задачі поверхневого стоку води в кінематичному наближенні 185
5.2 Дослідження існування та збіжності рекурентної схеми грунтового стоку води при плановій фільтрації 194
5.3 Дослідження існування та збіжності рекурентної схеми сумісної моделі руху поверхневих і грунтових потоків 194
5.3.1 Властивості складників і норми варіаційної задачі взаємодії водних потоків. 194
5.3.2 Енергетичні рівняння сумісного стоку. 195

5.3.3 Рівняння балансу енергії сумісного поверхневого і грунтового водних потоків. 198
5.3.4 Регулярність даних задачі про сумісний водний потік. 201
5.3.5 Єдиність та обмеженість розв'язку варіаційної задачі про сумісний рух поверхневого і грунтового потоків. 203
5.4 Висновки....204
Розділ VI. Тестові приклади та аналіз обчислювальних експериментів 206
6.1 Аналіз результатів поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні 206
6.2 Аналіз результатів лінеаризованої задачі поверхневого стоку води в наближенні кінематичної хвилі....222
6.3 Порівняння результатів розв'язку лінеаризованої задачі про кінематичну хвилю і нелінійної задачі з інтервальним підходом....226
6.4 Аналіз результатів сумісної моделі стоку поверхневої і ґрунтової води 228
6.5 Висновки....230
Розділ VII. Застосування геоінформаційних технологій для формування даних і результатів моделювання руху води на території водозбору 232
7.1. Опис розробленої технології. 232
7.2. Опис системи для ArcGIS Server....235
7.3 Використання GIS-компоненти для ArcGIS Server'а. 236
7.4 Використання GIS-компоненти для ArcMap 238
7.5 Висновки....240
ВИСНОВКИ 241
Список використаних джерел 244

ВСТУП

Актуальність теми. Важливим питанням для життя та діяльності людини є ефективне використання водних ресурсів планети. Для передбачення імовірних наслідків використання та управління водними ресурсами, необхідно вивчати та моделювати цикл кругообігу води в природі. Важливу роль у вивченні його відіграють гідрологічні системи, які складаються з багатьох взаємопов'язаних між собою етапів. В загальному дослідження цілої такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, що бере участь в кругообігу води, найчастіше в ролі її виступає територія водозбору. В розглядуваній області проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – ця область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов. Насправді, тому актуальним є розвиток теорії формування водних потоків, як основи для керування гідрологічними системами. Моделі гідрологічного циклу можуть бути використані як в задачах, пов'язаних із проектуванням та експлуатацією воднoресурсних систем, так і при врахуванні різного активного впливу на формування стоку та якості води на водозборі. Тому математичне дослідження гідрологічних процесів на територіях водозборів є **актуальною та важливою** задачею, яка вимагає побудови адекватних моделей та розробки наближених числових методів для аналізу їх характеристик.

Один із найбільш важливих процесів гідрологічного циклу стосується так званих поверхневих або схилових потоків. Часто серед них використовують рівняння поверхневої води. Ці рівняння описують

процеси, які мають хвильовий характер із довжиною хвилі, набагато більшою від вертикальних розмірів потоку і знаходять застосування в акустиці, газовій динаміці, гідравліці, метеорології, сейсмології та інших галузях. Розробкою та дослідженням моделей поверхневого стоку поверхневої води, які отримуються з рівнянь Нав'є-Стокса, займалися Марчук Г.І.[141], Вольцінгер Н.Е., Пясковський Р.В.[92,93], Васильченко Т.Н.[16], Грішанін К.В.[96], Гуревіч М.І.[98], , Хрущ В.К., Беляєв Н.М.[186,187], Картвелішвілі Н.А.[113-118], Кучмент Л.С., Ладиженська О.А.[132], Ладіков-Роєв Ю.П.[131], Леві І.І.[134], Литвинов В.Г.[135], Лойцянський Л.Г.[137,138], Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.[17], Маханов С.С., Семенов А.Ю.[142,143,160], Селезов І.Т.[166,290,291], Шеренков І.А.[154], Попов Е.Г.[152], Уізем Дж.[197], Стокер Дж.[171], Темам Р.[177], Carrera J.[217], Ciakson P.A.[223], Durran D.R.[232], Lighthill M.J.[269], Lions P.-L.[270-272], Walters R.A.[294-198] та інші. В роботах цих авторів не існує повного врахування всіх внутрішніх і поверхневих напружень та взаємодії рідини з донною поверхнею. Це зумовлено складністю числової реалізації задач стоку поверхневої води через наявність нелінійних доданків у рівняннях.

Якщо врахувати поповнення поверхневих водних потоку з грунту, то виникає необхідність дослідити моделі руху грунтової води, так звані моделі фільтрації води в грунті. Вивченням і дослідженням таких проблем займалися Полубарінова-Кочина П.Я.[150], Картвелішвілі Н.А.[113-118], Згуровський М.З., Скопецький В.В.,Хрущ В.К., Беляев Н.М.[104,177], Олійник А.Я., Кремез В.С., Добронравов А.А.[103,148], Булавацький В.М.[15], Селезов І.Т., Кривонос Ю.Г.[166], Сеймов І.Т.,Трофимчук О.М., Савицький О.А.[159,168,178], Поляков В.Л.[151], Дейнека В.С., Сергієнко І.В.[94,100], Грищенко О.Ю., Ляшко С.І., Молодцов О.І.[97] , Шестаков В.М.[195], Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.[188], Власюк А.П., Мартинюк П.М.[91], Бомба А.Я.[11], Hamilton D. A.[245], Weiyan T.[315], Yao Y.F.,

Thomas T.G., Sandham N.D., Williams J.J.R.[321], Launverier H.[262], Lobo Ferreira J.P.[24], Singh R., Fransini I.[289] та інші. У випадку залежності коефіцієнта рівнепровідності(п'єзопровідності) від невідомої змінної - рівня грунтових вод, отримується нелінійна задача, яка вимагає побудови проекційних схем її розв'язування. Також у випадку гідродинамічного підходу, коли невідомими величинами виступають: п'єзометричний тиск, швидкість та густина потоку фільтрації, такі фільтраційні моделі є мало досліджені.

Так як процеси поверхневого і грунтового потоків зв'язані, то доцільною задачею є розгляд їх спільного потоку в розглядуваній області. Побудовою та дослідженням таких систем займалися Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.[1], Шайдуров В.В.[192], Кучмент Л.С.[126-130], Корявов П.П.[124], Антонцев С.Н., Меєрманов А.М.[2,3], Злотник В.А.,Усенко В.С.[107], Сусідко М.М.[176], Лукнер Л.[140]., Лобода Н.С., Гопченко Е.Д.[136], Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A.[216,286, 287], Zang T. A.[216], Lions J.-L.[270-272], Temam R.[177], Yang C.-T., Aluri S.N.[318-320], Bernardi C., Rebollo T. C., Marmol M. G., Lewandowski R., Murat F.[207], Discacciati M., Miglio E.[228-230] та інші. В більшості робіт названих дослідників дві моделі розглядалися окремо і будувалися ітераційні процедури для переходу між ними, що не завжди адекватно описує динаміку руху рідини, яка є природнім суцільним середовищем і вимагає одночасного спільного опису її руху.

За останні десятиліття зросло застосування методу скінченних елементів (МСЕ) до розв'язання задач гідрологічних процесів. Теоретичні основи та практичне використання цього методу для рівнянь в'язкої нестисливої рідини відображені в працях Бреббіа К., Коннора Дж.[12], Літвінова В.Г.[135], Флейшмана Н.П., Зубова В.Н.[181], Савули Я.Г.[154-158], Шинкаренка Г.А.[156,157, 196,110,111], Зубова В.Н.[109-111,181], Козаревської Ю.С.[121], Трушевського В.М.[179,180], Демковича

О.Р.[33,37,58], Коковської Я.В.[36,39,40,122,140-143], Смушак Н.Я.[158], Brebbia C.A., Patridge P.W.[208], Brezzi F.[210-214], Chippada S.,Drawson C.N.,Martinez M.I.,Wheeler M.F.[218-221], Girault V., Raviart P.A.[239,240], Keramsi M.A.[257], Yang C.-T.,Aluri S.N.[318-330], Walters R.A.,Werner F.E.[310-314], Zienkiewicz O.Z.[322-324] та інших вчених. Для застосування МСЕ до гідродинамічних задач актуальними залишаються проблеми формулювання їх варіаційних постановок, розробки чисельних схем дискретизації за просторовими та часовою змінними, побудови адаптивних та стабілізаційних схем їх розв’язування.

Часто такі чисельні проекційні схеми зводяться до розв'язування нелінійних операторних рівнянь, систем нелінійних алгебричних чи трансцендентних рівнянь у класичному сенсі. Вони розв'язуються, зазвичай, ітераційними методами. Застосування інтервального підходу до побудови цих методів вирішує проблему вибору початкового наближення і врахування різного типу похибок. Значний вклад у цьому напрямку зробили Шокін Ю.І.[9], Шайдуров В.В.[102,192], Шарий С.П.[193], Добронец Б.С.[102], Глазунов М.М.[95], Грищенко О.Ю.[97], Гладкий А.В.,Сергієнко І.В., Скопецький В.В.[94], Бартіш М.Я. , Сеньо П.С.[7,8], Хіміч О.М., Яковлєв М.Ф.[183,184], Alefeld G. , Herzberber J.[199], GaoW, Chen JJ, Cui MT, Cheng Y.[236], Kearfott R.B.,Nakao M.T., Neumaier A, Rump S.M., Shary S.P., Henterryck P.[256] та інші. Актуальним і важливим напрямом досліджень і нині є розширення класу задач, до яких можна застосувати ці методи та розробка нових ефективних інтервальних методів розв'язування систем нелінійних операторних рівнянь спеціального виду.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Праця виконана в рамках держбюджетних науково-дослідних тем кафедри інформаційних систем Львівського національного університету імені Івана Франка:

“Математичне моделювання та інформаційні технології у проблемно-орієнтованих системах” (I кв. 2002 р. – IV кв. 2002 р., № держ. реєстрації 0100U001426);

“Адаптивні та стабілізовані апроксимації методу скінченних елементів для еволюційних проблем механіки, біофізики та охорони довкілля” (I кв. 2003 р. – IV кв. 2005 р., № держ. реєстрації 0103U001926).

“Методи обчислювальної математики для сингулярно збурених та еволюційних задач фізики і механіки” (2006–2007 рр., № держреєстрації 0103U001926);

"Побудова та аналіз чисельних методів для диференціаль-них та інтегральних рівнянь математичної фізики і механіки" (I кв. 2010 р. – IV кв. 2014 р., № держ. реєстрації 0103U001926).

При виконанні цих науково-дослідних тем автор приймав участь у дослідженнях математичних моделей задач стоку поверхневої води і розробці стабілізаційних схем МСЕ для їх розв’язування.

Дослідження були підтримані Австрійським агенством міжнародної кооперації в освіті і дослідженнях OEAD у 2012 р.

Мета і задачі дослідження. Побудова і дослідження математичних моделей стоку поверхневої води з поверхні водозбору у гідродинамічному та кінематичному наближеннях і грунтової води при плановій фільтрації та гідравлічному підході; створення сумісної моделі взаємодії поверхневих і грунтових вод; формулювання початково-крайових і варіаційних постановок розглянутих задач; обгрунтування стійкості і збіжності розроблених рекурентних схем; створення нових ефективних інтервальних ітераційних методів розв’язування систем проекційних рівнянь; апробація алгоритмів розроблених методів на тестових прикладах; застосування новітні геоінформаційних технологій для збору і візуалізації даних досліджень.

Для досягнення зазначеної мети виникла потреба розв'язати такі задачі:

- формулювання початково-крайових та варіаційних задач поверхневого стоку поверхневої води, грунтової води і сумісного руху потоків з території водозбору; розробка алгоритму чисельного розв'язування отриманих варіаційних задач з використанням МСЕ; побудова стабілізаційних схем МСЕ для задач стоку поверхневої води; дослідження умов стійкості та оцінка швидкості збіжності отриманих чисельних схем;
- застосування ефективних інтервальних ітераційних методів для розв'язування системи проекційних нелінійних рівнянь; дослідження та аналіз збіжності ітераційних процесів до розв’язків задач; чисельна апробація розроблених методів на тестових прикладах;
- використання геоінформаційних технологій для розробки GIS-компоненти за допомогою ArcGIS Server'a з умовою мінімального використання ArcObjects тільки на стороні сервера та жодного використання на стороні клієнта.

Об'єктом дослідження є процеси поверхневого і грунтового стоку води з поверхні водозбору.

Предметом дослідження є створення математичних моделей поверхневого і грунтового стоку води на території водозбору та розробка чисельних методів для розв’язування початково-крайових задач цих моделей.

Методи дослідження. Для розв’язування поставлених задач було використано методи функціонального аналізу та обчислювальної математики. Варіаційні задачі розв’язувались за допомогою напівдискретизації Гальоркіна та однокрокових рекурентних схем

інтегрування в часі. Для розв’язування проекційних систем нелінійних рівнянь використовувались аналоги інтервальних ітераційних методів високих порядків збіжності. Доведення стійкості і аналіз збіжності побудованих чисельних схем здійснювалося аналізом відповідних енергетичних норм.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому , що **вперше:**

- побудовано і обгрунтовано варіаційні задачі математичних моделей поверхневого стоку води у гідродинамічному та кінематичному наближенні. Запропоновано стабілізаційні схеми задач поверхневого стоку. Доведено і обгрунтовано оцінку стабілізаційного множника цієї схеми для розв'язування варіаційної задачі Нав'є - Стокса.
- виведено основні рівняння фільтрації грунтової води у гідродинамічному наближенні. Сформульовано постановки початково-крайової та варіаційної задач.
- побудовано математичну модель сумісного руху поверхневих і грунтових вод, виведено умови контакту води на спільній границі.
- розроблено чисельні схеми з використанням скінченних елементів для дискретизації задач за просторовими змінними з використанням кусково-лінійних апроксимацій для розходів потоків і кусково-постійних - для глибини та однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі. Проведено дослідження стійкості та збіжності побудованих рекуренних схем.
- показано застосування інтервальних ітераційних методів для розв'язування проекційних системи нелінійних рівнянь задачі про кінематичну хвилю.Досліджено стійкість інтервального ітераційного методу типу Рунге зумовлену апроксимацією оберненого оператора і вибором початкових операторів в апроксимаціях. Побудовано і досліджено один клас двосторонніх рекурсивних ітераційних

методів. Проведено оцінку глибини рекурсії цього класу двосторонніх методів. Побудовано і досліджено збіжність класу інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю.

- запропоновано веб-технології з використання ГІС-компоненти для збору даних і візуалізації результатів моделювання руху води на території водозбору. Показано використання GIS-компоненти для ArcGIS Server'a і ArcMAP.

Практичне значення отриманих результатів полягає у формулюванні варіаційних постановок початково-крайових задач стоку поверхневої води у гідродинамічному і кінематичному наближеннях та чисельних схем їх розв’язування. Розроблена Веб –компонента дозволяє розв’язувати задачі стоку рідини з довільною поверхнею водозбору та різною природою притоків рідини.

Отримані результати використані при виконанні держбюджетних тем і увійшли у звіти НДЧ Львівського національного університету імені Івана Франка (2001–2014 рр.). Вони також використовуються при читанні спеціальних курсів для студентів факультету прикладної математики та інформатики цього ж університету, при виконанні курсових, дипломних та магістерських робіт.

Результати дисертаційного дослідження можуть бути використані при розв’язуванні широкого класу практичних задач, в основі яких лежать довгохвильові процеси, зокрема, в задачах акустики, газової динаміки, гідравліки, метеорології, сейсмології та інших.

Особистий внесок здобувача Усі наведені в роботі основні наукові результати, моделі та методи отримані автором самостійно. У спільних публікаціях [6–12, 14–16, 19, 26–28, 30, 33, 37] з В.М. Трушевським, Д.В. Косаревим, Ю.О. Чоботком, В.Н. Карповим, Ю.Я. П'єцом, Н.Я.Смушак, Я.В. Коковською, І.Я.Кіщак, О.Р.Демковичем автору належить постановка

задачі, участь у математичному обґрунтуванні методів, аналіз результатів. У працях [1, 8, 25, 36, 40, 53], які написані в співавторстві з М.Я. Бартішем, П.С.Сеньо автору належить постановка задачі, отримання основних теоретичних результатів, проведення чисельних експериментів. У статті [2] з П.С.Сеньо, М.П. Диваком, Г.М. Гладій автору належить обговорення структури алгоритмів, їх інтервальна реалізація та застосування. У праці [29], спільної з О.В.Єфремовим, Б.М.Стрихалюком, автору належать побудова методів, обгрунтування їх збіжності, аналіз чисельних результатів. У спільних із Г.А. Шинкаренком публікаціях [4, 5, 7-11, 21, 22], співавтору належить побудова проекційних схем чисельних методів, відповідні розрахунки обчислень та участь в аналізі тестових прикладів. У спільних працях з О.М. Трофимчуком [20, 35, 55–57], автору належить формулювання постановок задач та отримання чисельних результатів. Науковому консультанту, окрім того, належить вибір напрямів практичних застосувань отриманих наукових результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових семінарах: кафедри диференціальних рівнянь (Польща, Вроцлавський університет, кер. проф. П. Білер, 2013, 2014), кафедри теплообміну і теплоперенесення (Австрія, Віденський технологічний університет, кер. проф. А. Кульман, 2012), кафедри інформатики та комп'ютерних наук (Польща, Жешувський університет, кер. проф. З. Сурай, 2015, 2016) і конференціях: "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях" (1989–1999 рр.), 7 Всесоюзній школі–семінарі "Розпаралелювання обробки інформації" (Львів, 1989), симпозіумі "Питання оптимізації обчислень" (Київ, 1993), "Моделювання і дослідження стійкості систем" (Київ, 2008-2015), Третій Міжнародній конференції ім. акад. Кравчука (Київ, 1994), Другій

Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика–95" (Львів, 1995), "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано–Франківськ, 1996), Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики" (Київ, 1998), Всеукраїнських наукових конференціях "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (Львів, 2002–2015), міжнародних конференціях "Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності" PDMU (Бердянськ, 2005; Чернівці, 2007; Крим: Новий світ, 2008; смт. Східниця, 2009; Кам'янець–Подільський – Сатанів, 2009; Львів, 2010; Ялта, 2010; Форос, 2014;Ческі-Рудоліц, Чехія, 2015; Брно, Чехія, 2016), Міжнародній конференції "Сучасні проблеми прикладної математики" (Новосибирск, Росія, 2011), Міжнародній науково-практичній конференції “Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях”(Київ, 2016), Міжнародній науковій конференції " Сучасні проблеми термомеханіки "(Львів, 2016).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на наукових семінарах Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України, а саме: кафедри інформаційних систем (керівник – д.ф.-м.н., проф. Г.А. Шинкаренко), кафедри обчислювальної математики (керівник – д.ф.-м.н., проф. Р.С. Хапко), кафедри теорії оптимальних процесів (керівник – д.ф.-м.н., проф. М.Я. Бартіш), загальнофакультетському науковому семінарі (керівник – д.ф.-м.н., проф. Я.Г. Савула); розширеному науковому семінарі відділу числових методів математичної фізики (керівник – д.ф.-м.н., проф. М.М. Войтович) та загальноінститутському науковому семінарі за напрямом «Математичне моделювання та обчислювальні методи» Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Чекурін); науковому семінарі відділу гідродинаміки хвильових процесів Інституту гідромеханіки НАН України (керівник –

д.ф.-м.н., проф. І.Т.Селезов); розширеному науковому семінарі відділу чисельних методів та комп'ютерного моделювання Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. О.М.Хіміч); науковому семінарі "Моделювання та оптимізація систем з неповними даними" кафедри моделювання складних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України (керівник – д.т.н., проф. Ф.Г. Гаращенко); розширеному міському науковому семінарі "Математичне моделювання та обчислювальні методи" м.Рівне (керівник - д.т.н., проф. А.Я. Бомба); науковому семінарі кафедри проектування радіоелектронних систем літальних апаратів Національного аерокосмічного університету ім.М.С.Жуковського"ХАІ" МОН України (керівник – д.т.н., проф. Г.Я.Красовський); науковому семінарі "Математичне моделювання та обчислювальні методи" Інституту телекомунікацій та глобального інформаційного простору НАН України (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. С.О. Довгий).

Публікації. Основний зміст дисертації викладено у 35-и наукових статтях та 22-ох тезах і матеріалах конференцій. Серед них 4 статті [3, 21, 23, 25] у журналах, зареєстрованих у міжнародних наукометричних базах, одна публікація [26] у рецензованому іноземному електронному науковому виданні, 21 стаття [1–3, 5–20, 22, 24] у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України. Праці [27, 30, 31, 33–43, 45, 46, 49–51, 53–57] опубліковані у збірниках статей, матеріалах вітчизняних та міжнародних наукових конференцій, конгресів та симпозіумів. Праці [3, 17, 18, 32, 44, 46–48] опубліковані автором одноосібно. Всього за темою дисертації опубліковано 94 наукові праці.

На захист виносяться наступні результати отримані в даній праці:

- Запроповано і обгрунтовано математичні моделі стоку поверхневої води у гідродинамічному підході і в наближенні кінематичної хвилі на основі загальних законів збереження кількості руху і маси

шляхом їхнього усереднення за глибиною потоку та збереженням усіх складових тензора напружень в рівняннях руху, Узагальнені і уточнені постановки початково-крайових та варіаційних задач.

- Розроблено стабілізаційну схему методу скінченних елементів для дискретизованої в часі задачі повехневого стоку у гідродинамічному наближенні при великих значеннях чисел Рейнольдса, яка базується на використанні функцій-бульбашок та методу найменших квадратів. Отримано верхню оцінку стабілізаційного множника цієї схеми варіаційної задачі загальних рівнянь Нав'є-Стокса.
- Виведено систему основних рівнянь фільтрації грунтової води із загальних законів збереження енергії, маси і стану рідини відносно невідомого вектора швидкості і густини потоку. Сформульовано постановки початково-крайової та варіаційної задач.
- Розроблено уточнені постановки початково-крайових та варіаційних задач фільтрації грунтової води, виходячи з рівняння Бусинеска. Показано і обгрунтовано постановку задачі у випадку залежності коефіцієнта фільтрації від невідомої величини п'єзометричного тиску. Проведено лінеаризацію дискретизованої задачі в часі і використано ефективні методи для розв'язування системи лінійних рівнянь.
- Побудовано математичну модель сумісного руху поверхневих і грунтових вод. Для опису руху поверхневих потоків використано узагальнені рівняння Нав'є-Стокса і для грунтових - рівняння, виведені з гідравлічного підходу. Такий підхід дає змогу прийняти однакові гіпотези для спільного потоку. Враховуючи закони механіки суцільного середовища, з варіаційної постановки задачі виведено умови взаємодії поверхневої і грунтової води через спільну границю областей.

- Розроблені чисельні схеми з використанням трикутних скінченних елементів для дискретизації задачі поверхневого стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні за просторовими змінними з використанням кусково-лінійних апроксимацій для розходів потоків і кусково-постійних - для глибини та однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі.
- Побудовано чисельну схему методу скінченних елементів для знаходження розв'язків задачі поверхневого стоку у наближенні кінематичної хвилі. Для цієї схеми вибирались кусково-лінійні апроксимації для невідомої величини глибини. Наведено застосування методу лінеаризації для зведення дискретизованої задачі за часом до системи лінійних рівнянь. Доведено коректність поставленої варіаційної задачі та збіжність чисельної схеми.

  Також для розв'язування проекційної системи нелінійних рівнянь показано використання інтервального ітераційного методу типу Рунге, який для початкового наближення використовує проміжки поділу за часом.
- Досліджено стійкість інтервального ітераційного методу типу Рунге зумовлену збуреннями оберненого оператора і вибором початкових операторів в його апроксимаціях. Побудовано і досліджено один клас двосторонніх рекурсивних ітераційних методів типу Рунге. Розроблено і досліджено клас інтервальних методів для розв'язування систем рівнянь з домінуючою діагоналлю.
- Проведено аналіз результатів чисельного розв'язування побудованих математичних моделей. Проведено апробацію на тестових прикладах чисельної схеми розв'язування задачі сумісного руху поверхневих і грунтових потоків води. Показано порівняння результатів розв'язку лінеаризованої задачі про кінематичну хвилю і

знаходження розв'язку системи нелінійних проекційних рівнянь інтервальними ітераційними методами.

- Розроблено геоінформаційну систему для збору даних про характеристики водних потоків на вибраній території. Показано використання розроблених алгоритмів для обчислення швидкостей та глибини потоків. Проведено візуалізацію результатів роботи програм на реальних річкових системах деяких водозборів.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, семи розділів, які містять 55 рисунків і 5 таблиць, висновків і списку використаних джерел, що охоплює 309 найменувань та займає 19 сторінок. Загальний обсяг дисертації – 284 сторінки.

РОЗДІЛ І. ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ

Загальна система рівнянь для опису динаміки рідини базується на універсальних законах збереження [2, 14, 16, 85, 86, 92, 93, 105,108, 112], які складаються з рівнянь нерозривності, кількості руху та енергії. Для аналізу поведінки потоків рідини цих рівнянь недостатньо і вони повинні бути доповнені певними кінематичними та фізичними співвідношеннями. Одна з найбільш поширених моделей гідродинаміки заснована на рівняннях Нав'є-Стокса, яка для випадку в'язкої неоднорідної нестисливої рідини записується у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} = 2\mu e_{ij}, \\ e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \ i, j = 1,2,3 \ \ в \ D \times (0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

де $\vec{u} = \{u_i(x,t)\}_{i=1}^{3}, \rho(x,t)$ та $p=p(x,t)$ – відповідно вектор швидкості частинок рідини, густина та гідростатичний тиск в точці x на момент часу t, $F=\{f_i(x,t)\}^3_{i=1}$ – вектор масових сил, $\mu=const>0$ – коефіцієнт в'язкості рідини, $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ – тензори швидкостей деформації та напружень рідини відповідно, δ_{ij} – символ Кронекера.

Рівняння руху рідини (1.1) складні у своєму застосуванні до природніх водозборів через наявність великої кількості змінних та наявності залежності від простору і часу, тому в більшості практичних

задач використовуються спрощені моделі [113, 119, 124, 130, 135, 136, 143, 152].

Одна з спрощених моделей руху рідини, яка отримується з системи рівнянь Нав'є-Стокса – це модель примежевого шару. З експериментальних спостережень Прандтль встановив, що поблизу твердої стінки існує тонкий шар рідини, в якому в'язкі ефекти настільки ж суттєві, як і інерційні, якою б малою не була в'язкість. Прандтль прийшов до висновку, що можна використовувати спрощені моделі рівнянь при виконанні двох умов: в'язкий шар розміром δ повинен бути тонким у порівняні з характерним розміром L області потоку ($\delta/L<<1$) та головний в'язкий доданок повинен мати той самий порядок, що і довільний з інерційних доданків. Рівняння динаміки рідини зводяться до безрозмірного вигляду. Перевага такої форми запису в тому, що отримуються характеризуючі потік параметри (число Рейнольдса), а також параметри потоку "нормалізуються", так що їх величини змінюються у визначених межах. Враховуючи те, що другими похідними у вертикальному напрямку можна знехтувати у порівнянні з відповідними похідними у горизонтальному напрямку, то можна взагалі не розглядати рівняння руху у вертикальному напрямку. Методику виведення рівнянь примежового шару детально викладено в праці Андерсона Д., Таннехилла Дж., Плетчера Р. [1] на прикладі стаціонарного двовимірного потоку в'язкої нестисливої рідини. В цій роботі, виходячи з рівняння Нав'є-Стокса (1.1) для двовимірного випадку, рівняння примежевого шару набувають вигляду

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

де u та v – невідомі складові швидкості, Re – число Рейнольдса.

Рівняння (1.2) доповнюються граничними умовами

$$u(x,0) = v(x,0) = 0.$$

Градієнт тиску шукається за відомим потоком на зовнішній межі. В системі рівнянь (1.2) відкинуто проекцію рівняння руху на вертикальну вісь координат.

Класична модель гідродинаміки – рівняння Ейлера для ідеальної нестисливої рідини – мають вигляд

$$\begin{cases} \rho\left[\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right] + \nabla p = \rho\vec{f}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho = 0,\ div\,\vec{u} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ці рівняння – частковий випадок моделі (1.1), коли в’язкість $\mu = 0$. Не дивлячись на те, що з фізичної точки зору модель ідеальної нестисливої рідини є сильно спрощеною, вона і на даний час використовується у гідродинаміці. Крайові задачі для рівнянь (1.3) розглядалися в працях [123, 163].

Великий методичний інтерес являють собою рівняння Стокса – лінеаризований варіант стаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса [132, 173, 177, 238,239]:

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{u} + grad\ p = \vec{f}, \\ div\,\vec{u} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

В значній мірі це пов’язано з тим, що багато властивостей чисельних методів, які застосовуються для розв'язування нелінійних та

нестаціонарних рівнянь гідродинаміки, проявляються на більш простих рівняннях Стокса. Крім того, рівняння (1.4) викликають загальний інтерес, оскільки описують повільні течії ньютонівської нестисливої рідини [149, 240].

Вважається, що нестаціонарні рівняння Нав'є-Стокса повністю описують турбулентний рух. Для розв'язування задач з турбулентним рухом в літературі застосовують різні підходи.

Один з них полягає в усередненні рівнянь Нав'є-Стокса в часі. Усереднені рівняння називають рівняннями Рейнольдса [1, 12, 82, 107, 118]. Ідея цього усереднення полягає в тому, що хаотичний рух частинок рідини створює явище пульсації швидкості і тиску у фіксованих точках простору. Якщо граничні умови потоку не змінюються з часом, то коливання швидкості і тиску в кожній точці здійснюються навколо усереднених значень. Усереднені в часі значення отримуються у вигляді

$$\bar{f}(x,t)=\frac{1}{T_0}\int\limits_{t-\frac{1}{2}T_0}^{t+\frac{1}{2}T_0} f(x,t+\tau)d\tau,$$

де T_0 – період усереднення.

Період T_0 повинен бути великим у порівнянні з найбільшим періодом випадкових коливань функції f та малим у порівнянні з найменшим періодом можливих невипадкових змін цієї функції [41]. В процедурі усереднення Рейнольдса випадкові зміни величин заміняються на усереднені в часі плюс пульсації навколо цих середніх значень

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u_i', \quad i=1,2,3, \\ p &= \bar{p} + p'. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Провівши підстановку (1.5) в систему рівнянь (1.1), отримуються рівняння Рейнольдса

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\rho\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i\overline{u}_j\right)-f_i\right)-\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial \overline{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}=0, \\ \overline{\sigma}_{ij}=-\overline{p}\delta_{ij}+\mu\left(\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i'u_j'}, \\ div\,\overline{u}=0,\ i,j=1,2,3\ \ в\ D\times(0,T], \end{cases} \tag{1.6}$$

З системи рівнянь (1.6) видно, що при усередненні рівнянь Нав'є-Стокса виникають нові доданки, які носять назву турбулентних напружень [1, 96]. Для замикання системи рівнянь (1.6) необхідно задати напруження турбулентної в'язкості $\rho\overline{u_i'u_j'}$ $(i,j=1,2,3)$. Моделі турбулентності для замикання рівнянь Рейнольдса поділені на дві великі групи [1]. В першій групі використовується гіпотеза Буссінеска:

$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=\mu_T\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\mu_T\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\rho\bar{k}\right)\ (i,j,k=1,2,3.),$$

де μ_T – коефіцієнт турбулентної в'язкості, $\bar{k}=\overline{u_i'u_i'}/2$ - кінетична енергія турбулентності. Друга група називається моделями рейнольдсевих напружень або моделями з рівняннями для напружень. Отже, для розв'язання задачі (1.6) необхідно задавати ще додаткові умови на турбулентні напруження.

Один з найбільш вживаних класів задач у гідрологічному циклі стосується руху рідини на мілководді, до нього належать: дощовий та русловий стоки, стік рідини з поверхні водозбору, ряд океанологічних задач. Процеси, які лежать в основі цієї моделі носять хвильовий характер

з довжиною хвилі набагато більшою від вертикальних розмірів потоку. Океанологічні процеси, які характеризуються довгохвильовими збуреннями, знаходять аналогію у різних галузях механіки та геофізики: акустиці, газовій динаміці, гідравліці, метеорології, сейсмології та інші. Отже, ці моделі являють собою загальний інтерес, розробкою та дослідженням яких займалися Антонцев С.Н, Мейрманов А.М. [3], Марчук Г.И. [141], Вольцінгер Н.Е., Пясковський Р.В. [92, 93], Васильченко Т.Н. [16], Грішанін К.В. [96], Гуревіч М.І. [98], Грищенко О.Ю. [97], Згуровський М.З., Скопецький В.В, Хрущ В.К., Беляєв Н.М. [104], Картвелішвілі Н.А. [113-118], Кобельков Г.М.[119], Кучмент Л.С. [126-130], Ладіков-Роєв Ю.П., Панчук В.И., Чечко Г.А. [131], Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Є.І., Розумнюк Н.В.[13], Леві І.І. [134], Маханов С.С., Семенов А.Ю [142, 143], Уізем Дж. [137], Стокер Дж. [171], Темам Р. [177], Durran D.R. [232], Lighthill M.J., Whitham C.C. [269], Lions P.-L. [270-272], а також інші вчені.

Стік поверхневої води є турбулентним процесом. Отже, цю задачу можна розв'язувати виходячи із рівнянь Нав'є-Стокса (1.1) або з рівнянь Рейнольдса (1.6). Вважаємо, що ми знаходимось в умовах в’язкої нестисливої рідини. Основне припущення для цих моделей полягає в тому, що горизонтальні масштаби руху рідини набагато більші вертикальних, в результаті чого вертикальний рух має незначний вплив. На основі зробленого припущення проводиться усереднення (1.1) або (1.6) (в залежності від вибраного підходу) за вертикальною складовою потоку.

Детальне виведення усереднених рівнянь поверхневої води за вертикальною складовою з рівнянь Рейнольдса можна знайти в працях Вольцінгера Н.Е., Пясковського Р.В. [92, 93], Бреббіа К., Коннора Дж. [12]. Система рівнянь (1.6) доповнюється крайовими та граничними умовами у вигляді (1.3)-(1.4), які конкретизуються для даної задачі.

Оскільки вільна поверхня потоку $\xi(x_1, x_2, t)$ є невідомою величиною, для неї записується кінематичне співвідношення [12, 92, 115, 118] у вигляді

$$u_3\big|_{\xi} = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} u_j\big|_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}. \qquad (1.7)$$

За даними багатьох теоретичних та експериментальних досліджень [12, 93, 115, 116] дотичні напруження на дні можна записати у вигляді

$$\tau_{i\tau}(\eta) = \frac{\rho g |u| u_i}{C^2}, \; i = 1,2, \qquad (1.8)$$

де C – коефіцієнт Шезі, який застосовується найбільш часто для врахування сил опору. Складові напруження тертя на поверхні води часто обумовлені дією вітру і можуть бути знайдені за формулами

$$\tau_{i\tau}(\xi) = \chi \frac{\rho_a}{\rho} V_a^2 \cos\psi, \; i=1,2, \qquad (1.9)$$

де χ – емпіричний коефіцієнт вітрових напружень, ρ_a – густина повітря, V_a – швидкість вітру, ψ – кут між віссю x_1 та напрямом вітру.

З огляду (1.6)-(1.9) усереднені рівняння Рейнольдса [12] набувають вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{q_i q_j}{h}\right) = \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial N_p}{\partial x_i} + B_i, \\ N_{ij} \approx \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial q_j}{\partial x_i}\right), \\ \dfrac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1,2, \end{cases} \tag{1.10}$$

де ε_{ij} – коефіцієнт вихрової в'язкості, $q_i = hu_i$ – невідомі значення потоків, $B_i = \tau_i\big|_\xi - \tau_i\big|_\eta + p_a \dfrac{\partial h}{\partial x_i} + \rho g h \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}$ $(i = 1,2)$, $N_p = \rho g \dfrac{h^2}{2} + h p_a$, p_a – атмосферний тиск, ξ – вільна поверхня потоку, η – рельєф дна, h – глибина стоку, $\tau_i\big|_\xi$ та $\tau_i\big|_\eta$ – напруження на вільній поверхні та на дні відповідно. В моделі (1.10) нехтують доданками, які містять вихрову в’язкість, і враховуються лише напруження на вільній поверхні та на дні [12].

Виведення усереднених рівнянь поверхневої води із рівнянь Нав'є-Стокса викладене в працях Кучмента Л.С. [127-130], Картвелішвілі Н.А. [113-118]. В роботі Кучмента Л.С. [127] кінематична умова на вільній поверхні записується у вигляді

$$u_3\big|_\xi + R = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} u_j\big|_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x_j}, \tag{1.11}$$

де R – швидкість дощового притоку.

Усереднені рівняння Нав’є-Стокса з [127] набувають вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + g\dfrac{\partial h}{\partial x_i} + \dfrac{\left(u_i - u_i^0\right)R - u_i I}{h} = -g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{F_i}{h} - \dfrac{\partial\left(R\Lambda\right)}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(hu_j\right)}{\partial x_j} = R - I, \ i = 1,2, \end{cases} \tag{1.12}$$

де u_i – невідомі значення швидкості, h – невідома глибина стоку, u_i^0 – швидкість на вільній поверхні потоку, g – прискорення земного тяжіння, I – швидкість інфільтрації рідини в грунт, R – швидкість дощового притоку, η - рельєф донної поверхні, Λ - швидкість падіння краплин дощу, F_i – доданки, які враховують дотичні напруження на дні та на вільній поверхні потоку. В рівняннях руху (1.12) з в'язких доданків залишились лише дотичні напруження на вільній поверхні та на дні, решта відкинуто, враховуючи умови поверхневої води. В результаті усереднення системи рівнянь (1.1) за глибиною стоку та врахування умов поверхневої води, третє рівняння руху перетворюється у гідростатичний закон для тиску, який є характерним для рівнянь поверхневої води

$$p(z) = p(\xi) - \rho f_3(\xi - z). \tag{1.13}$$

В літературі можна зустріти різні формулювання рівнянь поверхневої води. Всі ці рівняння отримуються з тривимірної моделі руху в'язкої нестисливої рідини, в якій горизонтальні розміри руху набагато переважають вертикальні. В тривимірному випадку модель руху рідини (1.1)-(1.2) для поверхневої води може бути записана у вигляді [127, 276]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = F + \dfrac{1}{\rho}\nabla \cdot \tau, \\ \nabla \cdot V = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

де $V(x, y, z, t)=(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ – швидкість потоку, τ – тензор зсувних напружень, p – тиск, ρ – густина, $0<\mu$ – в'язкість, F – масові сили.

На верхній межі потоку $z = \xi(x, y, t)$ задаються граничні умови у вигляді

$$\begin{cases} w = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} u + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} v, \\ \tau = \tau^{(1)}, \\ p = p_a, \end{cases} \tag{1.15}$$

де $p_a(x,y,t)$ – атмосферний тиск, $\tau^{(1)} = \left\{\tau_x^{(1)}, \tau_y^{(1)}\right\}$ – дотичні напруження на вільній поверхні.

На донній поверхні потоку $z = \eta(x, y)$ задаються наступні умови

$$\begin{cases} V = 0, \\ \tau = \tau^{(2)}, \end{cases} \tag{1.16}$$

де $\tau^{(2)} = \left\{\tau_x^{(2)}, \tau_y^{(2)}\right\}$ – дотичні напруження на дні потоку.

Одне з формулювання рівнянь поверхневої води, яке можна отримати виходячи з моделі (1.14)-(1.16) – це хвильове формулювання. Відомо, що в основі теорії поверхневої води лежать довгохвильові процеси. Серед цих процесів найбільш значимі є морські приливи та штормові нагони. Океанологічні процеси, які характеризуються довгохвильовими збуреннями, знаходять аналогію у різних галузях механіки та геофізики: акустиці, газовій динаміці, гідравліці, метеорології, сейсмології та інші. Отже, їх дослідження являє собою загальний інтерес. Теорія довгих хвиль належить до класичних розділів гідродинаміки. Вихідним положенням

цієї теорії є гідростатичний закон для тиску (1.13). Найбільше число застосувань, цінних результатів за допомогою теорії довгих хвиль досягнуто при вивченні астрономічних приливів в океані. Хвильове формулювання рівнянь поверхневої води можна знайти в працях [92, 93, 115, 171, 216-223, 260, 274, 278, 312-314].

Рух довгої хвилі описується диференціальним рівнянням (Стокер[171], 1959):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)U = F - g\nabla\xi, \tag{1.17}$$

де $U = \{u(x, y; t), v(x, y; t)\}$ та $F = \{F_x(x, y; t), F_y(x, y; t)\}$ – швидкість та зовнішня сила на одиницю маси, які не залежать від вертикальної координати, g – прискорення сили тяжіння, ξ - підвищення рівня рідини над її положенням рівноваги (Рис. 1.1).

Рівняння (1.17) виражає закон збереження кількості руху. Зовнішніми силами для цих задач є крім сили тяжіння, сила тертя вітру з вільною поверхнею, сила тертя рідини з донною поверхнею та атмосферний тиск. Ці сили задаються як функції просторових координат і часу та входять у вираз для зовнішніх сил F. Віднесемо прискорення частинок рідини в (1.17) до системи відліку, яка нерухомо зв’язана з землею, тоді рівняння можна записати [115]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)U + 2\omega \times U = F - g\nabla\xi, \tag{1.18}$$

де ω - вектор кутової швидкості обертання Землі.

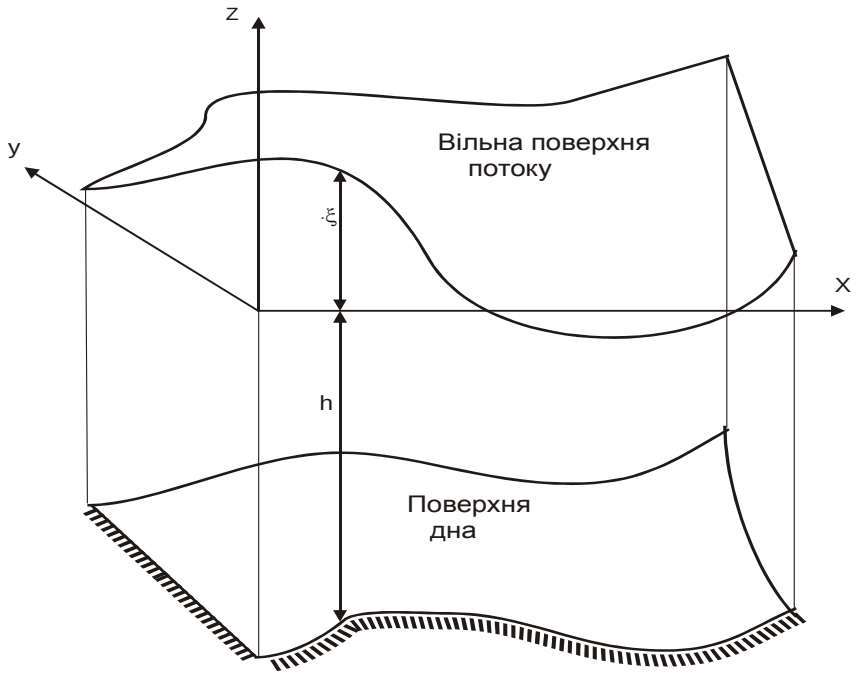


Рис. 1.1. Графічне зображення поверхні стоку.

Отримане рівняння Ейлера (1.18) у гідростатичному наближенні описує рух довгої хвилі ідеальної нестисливої рідини з врахуванням сили Коріоліса.

Рівняння (1.18) доповнюється ще рівнянням нестисливості

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Hu + \frac{\partial}{\partial y} Hv = 0\,, \tag{1.19}$$

де $H(x,y,t) = h + \xi$, $h(x, y)$ – незбурена глибина рідини.

Вивід рівнянь довгої хвилі для в’язкої нестисливої рідини можна проводити виходячи з системи рівнянь Нав'є-Стокса [115]. Провівши усереднення рівнянь за глибиною потоку та зробивши оцінки доданків, врахувавши умови довгої хвилі, отримається система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + g(h+\xi)\dfrac{\partial(h+\xi)}{\partial x_i} = f_i, \\ \dfrac{\partial(h+\xi)}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{1.20}$$

де $f_i = \Omega u_j - \dfrac{(h+\xi)}{\rho}\dfrac{\partial p_a}{\partial x} + \tau_i^{(1)} - \tau_i^{(2)} + \dfrac{\partial h}{\partial x_i}$, $i, j = 1,2$, $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}$ - напруження на вільній поверхні та на дні, $\Omega = 2\omega sin\varphi$, φ – географічна широта в точці місцевості, ρ- густина рідини, p_a – атмосферний тиск.

Виключаючи з системи рівнянь(1.20) u_i, отримається хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gh\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{1.21}$$

Рівняння (1.20) є вихідним для вивчення цілого ряду неусталених хвильових коливань наступних видів в'язкої нестисливої рідини: сейшів, приливів, цунамі, морських повеней, тощо.

Найбільш часто використовуване в літературі формулювання рівнянь поверхневої мілкої води відоме під назвою – Primitive Formulation Shallow Water Equation (P-SWE) [217 -271, 276]. Рівняння нерозривності в операторній формі можна записати у вигляді [259, 260, 276]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot Q = 0, \tag{1.22}$$

де $Q = HU$ – розхід потоку, $U(x,t) = \left(\hat{u}(x,t), \hat{v}(x,t)\right)$ – усереднена за глибиною швидкість($\hat{u} = \dfrac{1}{H}\int\limits_{\eta}^{\xi} u dz$, $\hat{v} = \dfrac{1}{H}\int\limits_{\eta}^{\xi} v dz$), H=(ξ - η) – глибина стоку.

Неконсервативні рівняння руху (non-conservative momentum equations (*NCME*)) записуються наступним чином [276, 315]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U + g\nabla\xi - \frac{\mu}{H}\Delta Q + \tau^{(2)}U + f_c n \times U + F = 0, \qquad (1.23)$$

де

n – одиничний вектор у вертикальному напрямку,

$F = \left(-\frac{1}{H}\tau^{(1)} + \nabla p_a - g\nabla N \right)$, g – прискорення земного тяжіння,

$N(x,t)$ – коефіцієнт потенціалу Ньютона, $f_c(x)$ – сила Коріоліса.

Консервативні рівняння руху (conservative momentum equations (*CME*)) отримуються з (1.26):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{Q^2}{H} \right) + gH\nabla\xi - \mu\Delta Q + \tau^{(2)}Q + f_c n \times Q + HF = 0\,. \qquad (1.24)$$

Формулювання рівнянь поверхневої води у вигляді (1.22)-(1.23) або (1.22)-(1.24) відомі як *P-SWE*. Цей запис зручніший ніж хвильовий, оскільки в рівняння явно входять глибина потоку та швидкість. При виводі цих моделей ряд доданків з кінематичною в’язкістю відкидаються, враховуючи умови поверхневої мілкої води.

Спрощена задача стоку поверхневої води розв'язується в деякій двовимірній області Ω. Для завершення постановки задачі рівняння поверхневої води доповнюються початковими та граничними умовами. Граничні умови в літературі поділяють на дві частини: ті, які задаються на жорсткій межі стоку та на відкритій границі. На кожній з границь необхідно задати дві умови: нормальні і дотичні складові напружень або швидкостей. Для моделі (1.10) задаються лише нормальні складові [12]:

на жорсткій межі

$$q_n = 0 \text{ або } q_n = \overline{q}_n,$$

на рухомій межі

$$N_{nn} = \overline{N}_{nn}.$$

Це пояснюється тим, що в моделі (1.10) відкинуті доданки, які враховують вихрову в'язкість, отже дотичні складові напружень або потоків нема потреби задавати.

Розглянемо ще один варіант задання граничних умов. Нехай Ω - проекція потоку рідини на двовимірну площину(Рис.1.2). Межа області Ω ділиться на наступні частини: Γ_B – фіксована межа водорозділу, Γ_R – межа русла (рідина вливається), Γ_S – відкрита межа моря (рідина може як вливатися, так і витікати див. рис. 1.2).

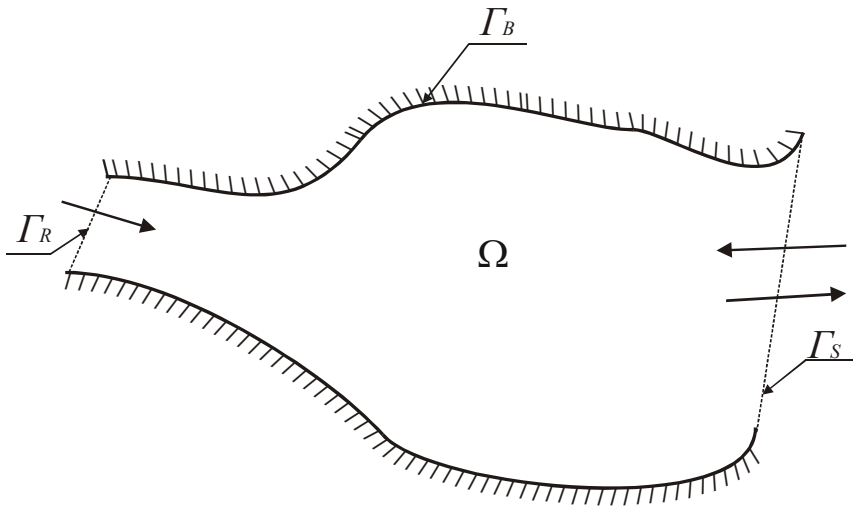


Рис. 1.2. Проекція стоку рідини на горизонтальну площину.

Найчастіше граничні умови для двовимірної задачі поверхневої води (1.22)-(1.23) або (1.22)-(1.24) записуються у вигляді [228, 276, 314]:

- на фіксованій межі потоку Γ_B задають

$$U \cdot \nu = 0, \quad \nabla U_\tau \cdot \nu = 0,$$

де ν та τ – одиничні вектори нормалі та дотичної до межі області, U_τ – тангенціальні складові швидкості;

- на межі втікання рідини:

$$U \cdot \nu = \hat{U} \cdot \nu, \quad \mu \frac{\partial U}{\partial \nu} \cdot \tau = 0,$$

де μ - коефіцієнт в'язкості;

- на відкритій межі моря граничні умови можна задати у вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = 0.$$

З узагальненої моделі поверхневої води (1.12) можна отримати більш спрощені задачі. В одновимірній ідеалізації усереднені рівняння (1.12) носять назву рівнянь Сен-Венана [127]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + g \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{g u^2}{C^2 h} + \dfrac{(u - u_0)R}{h} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u \dfrac{\partial h}{\partial x} + h \dfrac{\partial u}{\partial x} = R, \end{cases} \tag{1.25}$$

де u_0 – швидкість на вільній поверхні потоку.

Ці рівняння можуть бути застосовані для одновимірного схилового стоку.

Припустивши, що рух рідини відбувається в умовах рівноваги сил опору та сил тяжіння, з усереднених рівнянь Нав'є-Стокса (1.12) отримається ще одна спрощена модель. Такий рух має вигляд хвиль, які виникають внаслідок зміни в часі складових водного балансу, і тому Лайтхілл і Уізем [269] назвали їх кінематичними хвилями. На відміну від динамічних хвиль, які можуть поширюватися як вниз, так і вверх за

течією, кінематичні хвилі поширюються тільки вниз за течією. Динамічні хвилі на річних схилах поширюються зі швидкістю набагато більшою ніж кінематичні і швидко зникають [269]. Отже, основна частина поверхневих хвиль рухається зі швидкістю, близькою до швидкості кінематичної хвилі. Модель кінематичної хвилі розглянута в працях Кучмента Л.С. [126-130], Уизема Дж. [197], Ладикова-Роєва Ю.П., Панчука В.И., Чечко Г.А. [131] і може бути застосована для розв'язання задач руслового та схилового стоків рідини. В одновимірному випадку ці рівняння набувають вигляду

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=R-I,\quad q=\alpha h^m,\quad \text{в області } (0,L)\times(0,T], \tag{1.26}$$

де $\alpha=Ci_0^{1/2}$, $m=\frac{3}{2}$ - за формулою Шезі для турбулентного руху або $\alpha=\frac{gi_0}{2v}, m=3$ - для ламінарного руху, v - кінематична в'язкість, i_0 – нахил донної поверхні до горизонту [127].

Отримання аналітичних розв'язків задач гідродинаміки в багатьох практично важливих випадках є неможливим. Тому для розв'язання задач такого класу широко використовуються чисельні методи [3,4,6, 105, 112, 128, 134, 283]. Довгий час при розв'язанні задач механіки рідини переважали скінченно-різницеві методи [14, 155, 177, 178, 244], які застосовувались до різних моделей системи рівнянь Нав'є-Стокса. Одна з них використовує запис рівнянь відносно змінних вихря та функції току (ω, ψ - формулювання). Цей підхід характеризується тим, що функція току ψ вибирається таким чином, щоб умова $div\,\vec{u}=0$ виконувалась тотожньо. Особливістю ω, ψ - формулювання рівнянь Нав'є-Стокса є проблема постановки та реалізації граничних умов [118, 157, 168].

В одному з підходів Бруяцкий Е.В, Костін А.Г., Никифорович Є.І,[14] запропоновано для чисельного розв’язування скінченними різницями повної системи рівнянь Нав’є-Стокса в змінних швидкість-тиск використати метод на встановлення. Тоді для визначення тиску отримується еліптичне рівняння Пуасона шляхом підстановки виразів для компонент швидкостей із рівнянь руху в рівняння нерозривності, подібно МАС – методу.

Інша модель використовує $\vec{u}$ - p формулювання рівнянь Нав'є-Стокса. Вона об’єднує в собі декілька різних підходів, які задовольняють умову нестисливості [9,94, 101, 102, 112,113, 125, 126, 164, 167, 169]. Одним із можливих прийомів є застосування методу збурень, який запропонував Темам (1968). В основі цього методу лежить заміна умови нестисливості наближеним рівнянням, яке залежить від деякого малого параметру ε

$$\varepsilon p + div\vec{u} = 0, \quad \varepsilon = const > 0. \tag{1.27}$$

При ε прямуючим до нуля рівняння перетворюється у вихідне. Рівняння (1.30) дає можливість виключити тиск p з системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Крім методу скінченних різниць, до розв’язання задач гідродинаміки застосовувались також спектральні методи. Детальний огляд методів викладений в працях Бахвалова Н.С., Кобелькова Г.М. [112, 113], Кузнецова Б.Г., Сироченко В.П.[118], Овсянникова Л.В.[139], Скиби Ю.Н.[155], Семенова А.Ю., Маханова С.С.[153], Смагулова Ш.К., Орунхаева М.К.[156,157], Таруніна Е.Л.[167,168], Темама Р. [169], Андерсона Д., Таннехилла Дж., Плетчера Р. [1], Хруща В.К., Беляєва Н.Н. [177,178]. Практичне застосування різних методів зроблено в багатьох авторів [2,10, 14, 84, 96, 129, 154, 162, 166, 167, 173, 176, 180, 181, 184].

Для розв'язування задач гідродинаміки також використовують МСЕ. Основні принципи цього методу викладено в працях Бате К., Андерсона М. [195], Деклу Ж. [94], Зенкевича О. [98, 99], Зенкевича О., Тейлора Р. [307-309], Одена Ж. [272,273], Савули Я.Г., Шинкаренка Г.А., Вовка В.М. [150], Сегерлинда Л. [151], Стренга Г. та Фикса Дж. [164], Сьярле Ф. [165], Бреббиа К., Коннор Дж. [12], Girault V., Raviart P.A. [156-157] та інші [116,142,151]. Практичне застосування цього методу для рівнянь в'язкої нестисливої рідини можна знайти в працях [12, 101-104, 200-204, 229, 237, 247, 267].

Один з підходів для реалізації МСЕ полягає в застосуванні проекційно-сіткового методу. Такий підхід можна знайти в працях [101-104, 154, 173, 186, 190]. На даний час вже сформувалась тенденція до використання апроксимацій МСЕ для дискретизації варіаційних задач за просторовими змінними та проекційних апроксимацій типу скінченних різниць для дискретизації за часом [12, 101-104, 186, 247, 267, 274, 275].

За останнє десятиліття зросло застосування МСЕ до розв'язання задач поверхневої води [194, 213, 217, 245]. Практичне використання цього методу для рівнянь в'язкої нестисливої рідини можна знайти в працях Бреббіа К., Коннор Дж. [12], Keramsi M.A. [247], Martinez M. L. [267]. та в інших вчених. Застосовуючи МСЕ до розв'язання задач поверхневої води виникла проблема – появи "паразитичних" осциляцій у розв'язку задачі при великих значеннях чисел Рейнольдса. Авторами використовувались різні способи для того, щоб позбутися цієї проблеми [282, 297-299]. Наприклад, Patridge P.W. та Brebbia C.A. [274], використовуючи квадратичні апроксимації на трикутних елементах, задавали надмірні сили тертя рідини з донною поверхнею. King I.P. та Norton W.R. [249, 250] вибирали змішані апроксимації на трикутних елементах: лінійні апроксимації для глибини стоку та квадратичні апроксимації для швидкості, задаючи надмірну в'язкість в рівняннях руху.

Ці підходи суттєво погіршували відповідність обчислювальних результатів реальним процесам. Декілька років пізніше Gresho P.M. та Lee R. L. [231] була висунута гіпотеза, що осциляції виникають через неадекватний вибір сітки в місцях великих значень градієнтів швидкості. Справа в тому, що при великих значеннях числа Рейнольдса (Re>100) розв'язки задачі можуть мати внутрішні та примежові шари – дуже вузькі області, де самі розв'язки та їх градієнти різко змінюються. Внаслідок цього чисельні розв'язки, побудовані за схемою Гальоркіна, де параметр дискретизації занадто великий, щоб врахувати всі ці шари, можуть сильно осцилювати у всій області визначення. В працях [193, 214, 215, 224, 227, 228, 231, 268, 295-299] запропоновані різні способи вибору задовільної апроксимації. У багатьох випадках такі підходи приводять до величезної кількості степенів свободи і, таким чином, до неможливості ефективного відшукання чисельного розв'язку.

Для усунення цієї проблеми багатьма авторами побудовані різні стабілізаційні схеми МСЕ [150, 192, 200-204, 217, 223, 236, 239-242, 248, 253]. Найбільшого поширення набули стабілізаційна схема Петрова-Гальоркіна та підхід, що базується на понятті функцій-бульбашок.

Нехай варіаційна задача стоку поверхневої води записується у вигляді

$$\begin{cases} \textit{Знайти} \quad u \in W, \\ a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \tag{1.28}$$

де $a(u,v)$ – вихідна білінійна форма, $W \subset V = H_0^1(\Omega)$ – заданий скінченноелементний простір.

Детальна побудова стабілізаційної схеми наведена в праці Baiochi C., Brezzi F., Franca L.P. [204]. Ефект стабілізації може бути досягнений за

рахунок розширення простору апроксимацій. Для кожного скінченного елемента T визначається простір функцій-бульбашок $B = \left\{\forall b \in B : b\big|_T \in H_0^1(T)\right\}$. Якщо $W \cap B = \{0\}$, тоді кожен елемент v простору $H := W \oplus B$ визначається однозначно у вигляді $v = v_w + v_B$, де $v_w \in W$ та $v_B \in B$. Далі, замість (1.28), розглядається задача

$$\begin{cases} \textit{Знайти} \quad u_H = u_w + u_B, u_H \in H, \\ a(u_H, v) = (f, v) \; \forall v \in H. \end{cases} \tag{1.29}$$

З (1.29) на одному скінченному елементі виключаються функції з простору бульбашок B, в результаті чого отримаємо[192]

$$\begin{cases} \textit{Знайти} \quad u \in W, \\ a(u, v) - \sum\limits_T \mu(T)\left(Au - f, A^* v\right)_T = (f, v) \quad \forall v \in W. \end{cases} \tag{1.30}$$

Важливою задачею, для побудови стабілізаційної схеми є також оцінка стабілізаційного множника $\mu(T)$ в (1.30). В праці [192] наведений детальний вивід верхньої оцінки стабілізаційного множника для рівнянь адвекції-дифузії.

В роботах [114, 196, 248] для рівнянь Нав'є-Стокса верхня оцінка цього множника записується у вигляді

$$\mu(T) = \frac{h_T}{a\|u(x)\|}\gamma(\mathrm{Re}), \tag{1.31}$$

де a – деяка константа, Re – число Рейнольдса, $\gamma(z) = \begin{cases} z, \, 0 \le z \le 1, \\ 1, \, 1 \le z < \infty \end{cases}$.

Існує узагальнений підхід до побудови стабілізаційних схем МСЕ. Він оснований на використанні функції Гріна знаходження додаткової

компоненти. Основи такого підходу розглядаються в роботах T.J. Hughes і інших авторів [238-242]. Також в цих роботах приведено доведення співвідношення для стабілізаційного множника $\mu(T)$.

Серед усіх оглянутих вище моделей руху рідини, в даній роботі розглядається рух поверхневої води, оскільки це один з найбільш вживаних класів задач у гідрологічному циклі. Рівняння поверхневої води отримуються з рівнянь Нав'є-Стокса шляхом усереднення їх за глибиною потоку та врахуванням крайових умов для границь поверхневої води. В наведеній літературі, при отриманні рівнянь поверхневого стоку, нехтують всіма доданками в рівняннях руху, які містять складові напружень, залишаючи лише на вільній поверхні та на дні потоку. Підхід, представлений в цій роботі, зберігає всі складові напружень в перших двох рівняннях руху.

Для розв'язування моделей поверхневих потоків був обраний метод скінченних елементів. При великих значеннях чисел Рейнольдса для стабілізації розв'язку використовувався підхід, який базується на понятті функцій-бульбашок.

Моделі для опису фільтрації води в різних шарах грунту відрізняються одна від одної забезпеченістю даними, можливістю перевірки на адекватність в реальних умовах.

Для опису процесу фільтрації пропонується два основних підходи: гідравлічний та гідродинамічний [9,10].

При гідравлічному підході в області фільтрації виділяють елементарний об'єм для якого записують рівняння балансу притоку та відтоку води. Для отримання рівняння, що описує процес фільтрації використовують граничний перехід, коли виділений об'єм грунту прямує до нуля. Отримане рівняння називають рівнянням Буссінеска. З допомогою даного рівняння можна знайти скалярну характеристику потоку фільтрації – п'єзометричний тиск. Для опису часткових видів

фільтрації на основі рівняння Буссінеска будують його спрощені формулювання, які відомі в літературі під назвами рівнянь планової та профільної фільтрації.

Використовуючи гідродинамічний підхід для отримання рівнянь, що описують процес фільтрації, застосовується підхід механіки суцільного середовища до опису руху середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями фільтрації. Невідомими величинами, що входять в дані рівняння є п'єзометричний тиск, швидкість та густина потоку фільтрації.

Основними величинами, що визначають стан рідини в природному ґрунті, є густина ρ, тиск p і швидкість фільтрації υ. Характеристикою ґрунту або іншого середовища, у якому відбувається фільтрація, є пористість m.

В основі теорії фільтрації лежить закон, установлений експериментально у 1852–1855 рр. французьким інженером А. Дарсі. Згідно з цим законом, кількість рідини чи газу пропорційна падінню гідродинамічного тиску в напрямку потоку рідини:

$$\nu_n = -k\frac{\partial p}{\partial n} \tag{1.32}$$

де p – тиск, n – нормаль до одиничної площадки, а k – коефіцієнт фільтрації.

Якщо ρ – густина, то кількість рідини ΔQ_1, зібраної в деякому об'ємі Ω за відрізок часу $[t_1, t_2]$, визначається інтегралом

$$\Delta Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} m\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz. \tag{1.33}$$

Кількість рідини Q_1 у Ω (1.33), що відповідає заданій густині, визначається інтегралом

$$Q_1 = \iiint\limits_{\Omega} m\rho dxdydz\,,\ \Delta Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{S} v_n \rho\, d\delta\,.$$

При виведенні рівняння фільтрації рідини або газу в пористому середовищі необхідно використати рівняння руху в'язкої рідини Нав'є – Стокса, а також рівняння нерозривності та стану. Їх використання обумовлене тим, що на відміну від теплопровідності й дифузії, процес фільтрації визначається густиною ρ, тиском p і швидкістю фільтрації υ. Безпосереднє інтегрування рівнянь Нав'є – Стокса у випадку обтікання нескінченно великого числа частинок (при фільтрації) не можна виконати. Тому застосовують підхід, що базується на використанні рівнянь руху Ейлера (Чарний И.А., Тумашев Г.Г., Борисов Ю.П.[180]):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X_1 + X_2 - \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y_1 + Y_2 - \dfrac{\partial v}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = Z_1 + Z_2 - \dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad (1.34)$$

де X_1, Y_1, Z_1 – вектор масових сил, X_2, Y_2, Z_2 – вектор сил опору, u, v, w – вектор швидкості.

Вважатимемо, що компонентами сил ваги є $X_1 = 0, Y_1 = 0, \mathrm{Z}_1 = -g$, де g – прискорення сили ваги. Знак "-" вибрано відповідно до вибору напрямку осі OZ. Такі рівняння часто використовують для дослідження моделей нелінійної фільтрації в гірничо–добувній промисловості([90],[95],[96],[130],[144],[154],[160],[205-206]).

Сили опору X_2, Y_2, Z_2, що виникають при обтіканні рідиною частинок пористого середовища, визначаються за допомогою закону Дарсі:

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}, v = -k\frac{\partial p}{\partial y}, \mathrm{w} = -k\frac{\partial p}{\partial \mathrm{z}} \ . \qquad (1.35)$$

Для їх визначення в рівняннях (1.34) нехтують силами інерції та силою ваги. Це приводить до такого рівняння:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X_2, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y_2, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = Z_2. \qquad (1.36)$$

Використовуючи закон Дарсі (1.35), отримуємо

$$-\frac{u}{\rho k} = X_2, -\frac{v}{\rho k} = Y_2, -\frac{w}{\rho k} = Z_2.$$

Якщо підставити в рівняння (1.34) знайдені компоненти сил, то отримуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u}{k\rho} - \frac{\partial u}{\partial t},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{v}{k\rho} - \frac{\partial v}{\partial t},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g - \frac{w}{k\rho} - \frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

До цих рівнянь необхідно приєднати рівняння стану рідини чи газу (вони пов'язують густину ρ і тиск p)

$$\rho = f(\mathrm{p}) \tag{1.38}$$

і рівняння нерозривності

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\mathrm{v}}) = 0. \tag{1.39}$$

Однак така система рівнянь є невиправдано ускладненою. Як правило, сили інерції $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ досить малі, тому ними можна знехтувати в рівняннях (1.37). Тоді рівняння (1.37) спрощується:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u}{k}, \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{v}{k}, \frac{\partial p}{\partial x} = -g\rho - \frac{w}{k}. \tag{1.40}$$

Звідси випливають рівняння фільтрації:

$$-k\frac{\partial p}{\partial x} = u, -\mathrm{k}\frac{\partial p}{\partial y} = v, -\mathrm{k}\frac{\partial p}{\partial x} - kg\rho = w. \tag{1.41}$$

Підставляючи знайдені (1.41) у рівняння нерозривності й ураховуючи рівняння стану(1.38), отримаємо основне рівняння фільтрації відносно тиску p :

$$m\frac{\partial f(p)}{\partial t} + div(kf(p)grad\ p) = \frac{\partial}{\partial z}(kgf(p)). \qquad (1.42)$$

Якщо рідина нестислива, то рівняння стану (1.38) у цьому випадку не використовується, а рівняння нерозривності набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (div\ \vec{v} = 0). \qquad (1.43)$$

Якщо ввести функцію напору (п’єзометричного напору)

$$p = g\varphi - gz, \quad \varphi = \frac{p}{g} + z. \qquad (1.44)$$

то рівняння фільтрації (1.42) матимуть вигляд

$$-kg\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \ -\mathrm{kg}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \ -\mathrm{kg}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = w. \qquad (1.45)$$

Підставляючи (1.45) у (1.44), запишемо рівняння для знаходження напору :

$$div(kg\ grad\ \varphi) = 0. \qquad (1.46)$$

Якщо g і k=const, то воно зводиться до рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (1.47)$$

Таку модель розглянуто у роботах [162],[157],[180],[142-143],[131],[279],[304].

В даній роботі розглянуто модель отриману з використанням основних рівнянь фільтрації. Особливістю цієї моделі є врахування густини фільтруючої рідини, що є важливим при дослідженні фільтрації стисливих рідин, а також при напірній фільтрації води з великими значеннями тиску.

Для розгляду спільного руху поверхневих і грунтових вод в працях багатьох дослідників ([3],[100],[133],[179],[188],[197],[218]-[220],[257],[260],[277],[300]) розглянуто двохетапний алгоритм дослідження кожної моделі окремо і ітераційна процедура для переходу між ними.

Так Г.П.Епихов в своїй статті “Алгоритм построения математической модели речного бассейна с учетом взаимодействия стока в речной сети и плановой фильтрации подземних вод”(1979 р.) розглядає потоки на водозборі описані рівняннями Сен-Венана в наступній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{Q|Q|}{k^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} - I = 0, \\ k = \dfrac{1}{u}\dfrac{w^{5/3}}{x^{2/3}}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} + B\dfrac{\partial z}{\partial t} = d, \\ z(x,0) = z^0(x), Q(0,t) = Q_0(t), Q(L,t) = Q_L(t) \end{cases}$$

де $z(x,t)$-глибина, $Q(x,t)$- розхід через поперечний переріз $u(z)$, $x(z)-$ змочений периметр, $B(z)$- ширина річки, $I(z)$- нахил дна, $u(x)$- коефіцієнт шероховатості.

Планова фільтрація описувалася рівнянням Буссинеска, для якого виконувалися допущення Дюпюі і закон Дарсі:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial H}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}(T\dfrac{\partial H}{\partial x})+\dfrac{\partial}{\partial y}(T\dfrac{\partial H}{\partial y})+\varepsilon, \\ H(x,y,0)=H_0(x,y), H(x,y,t)\big|_P=H_P(t), \end{cases}$$

де $H(x,y,t)$- відмітки оверхні підземних вод(або напір), $\mu(x,y)$- коефіцієнт водовіддачі, $\varepsilon(x,y,t)$- функція джерел.

Граничні умови спряження з річної сіткою обчислюються, у випадку гідравлічного зв'язку, за формулою:

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{n}}=\lambda(H-(\mathrm{z}+\mathrm{z}_g)),$$

де z_g-відмітки дна русла, $\lambda(x,\mathrm{y})$-параметр, що характеризує неоднорідність фільтраційного потоку і закольматованість русла річки.

В книзі "Математические модели совместного движения поверхностних и подземних вод"[3] Антонцев С.Н., Мейерманов А.М. для опису невстановленого руху води у відкритих руслах використовують рівняння Сен-Венана у формі:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\upsilon\omega)+\frac{\partial}{\partial t}(\upsilon^2\ \omega)+\mathrm{g}\frac{\partial U}{\partial t}=-g\frac{\upsilon|\upsilon|}{\gamma^2 R^{4/3}}, \qquad (1.48)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S}(\upsilon\omega) = \Im \tag{1.49}$$

де S - довжина русла, $\omega(S,U)$ - площа живого поперечного перерізу, $\gamma(S)$ - коефіцієнт шероховатості, $R(S,U)$ - гідравлічний радіус, $\Im(S,t)$ - поповнення води із зовнішніх джерел.

Для більшості природніх рік і каналів можна знехтувати локальним прискоренням $\frac{\partial}{\partial t}(\upsilon\omega)$ і інерційним доданком $\frac{\partial}{\partial t}(\upsilon^2\ \omega)$. В цьому випадку з (1.48) знаходиться швидкість

$$\upsilon = \gamma R^{2/3}\ |U_s|^{1/2}\ sign\ U_s,$$

і підстановка її в (1.49) зводить систему до параболічного рівняння для функції $U\ (S,t)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial S}\left[\ \psi(s,U).\varphi(U_s)\ \right] = \Im, \\ &\psi = \gamma.\omega.R^{2/3}\ ,\varphi(p) = |p|^{1/2}\ sign(p). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Отримані рівняння (1.50) називаються дифузійними аналогами рівнянь Сен-Венана(ДРСВ).

Для обчислення висоти вільної поверхні $u(x,t)$ використано рівняння фільтрації Буссинеска[3] у вигляді:

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = div\left[k(u-h)\nabla u\right],$$

де k - коефіцієнт фільтрації, m - пористість грунту, *h*- середня висота поверхні фільтрації.

Далі розглядається більш загальне рівняння

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = div\left[k.H.\nabla u\right] + f(x,t), \tag{1.51}$$

де $H(x,u)$ - задання функція, наприклад, $H = \left|u-h\right|^{p-2}$, $p>2$, а $f(x,t)$ - густина джерел і стоків в області Ω.

У випадку спільного руху поверхневих і підземних вод допускається, що рівень грунтових вод співпадає з рівнем води в річках:

$$u(x,t) = U(S,t), \tag{1.52}$$

а функція $\Im(S,t)$, що відповідає за розхід в (1.50), задовільняє співвідношення:

$$\Im = -\left[k.H.\frac{\partial U}{\partial n}\right] + f(x,t), \tag{1.53}$$

де $\left[k.H.\frac{\partial U}{\partial n}\right]$ - притік грунтових вод, $f(x,t)$ -опади, випаровування, тощо.

У формулах (1.48-1.53) нехтується прооміжком височування.

Також подібними проблеми займалися Лукнер Л.[133], Ладиков-Роев Ю.П., Панчук В.І., Чечко Г.А.[124], Злотник В.А., Усенко В.С.[100], Чапля Є., Чернуха О., Мороз Х.[179], Bernandi C.,Rebollo C.,Marnol G.,Lewandowski R/,Murat F.[197], Discacciati M.,Miglio E.,Qurteroni A.[218-220], Agoshkov V.I.,Ambrosi D., Quarteroni A., Saleri F.[188], Lions p.-l.,Temam R., Wang S.[260], Quarteroni A., Veneziani A.[277] та інші [300],[304],[306].

Так в роботах Quarteroni A.[218-220],[188],[277] для опису руху грунтової води вводилася змінна, так званий п’єзометричний тиск

$$\varphi = z + \frac{p_p}{\rho_f g},$$

де z- висота над рівнем моря, p_p - тиск грунтової води, ρ_f - густина рідини, g - прискорення вільного падіння.

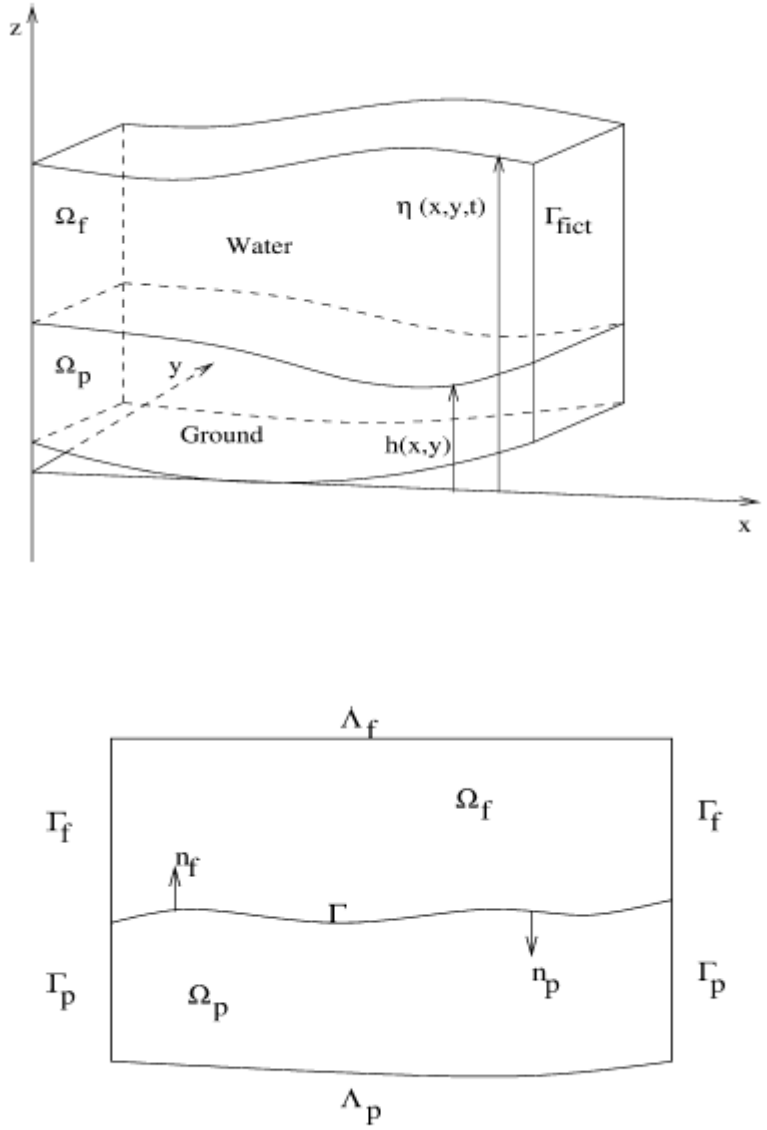


Рис. 1.3. Схематичне задання і вертикальний розріз області задачі.

Рух рідини в грунті в області Ω_p (Рис.1.3.), що задовільняє закону Дарсі $q = -K\nabla\varphi,$ де K -гідравлічний тензор провідності пористого середовища, описується наступною системою рівнянь

$$\begin{cases} S_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + div\ q = 0, \forall x \in \Omega_p, \\ q = -K\nabla\varphi, \forall x \in \Omega_p \end{cases} \tag{1.54}$$

де S_0 - коефіцієнт масопереносу.

Рух поверхневої води описується рівняннями Нав'є-Стокса у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_f}{\partial t} + div\ (V_f \otimes V_f) - div\ T(V_f, p_f) = g, \forall x \in \Omega_j, \\ div\ V_f = 0, \forall x \in \Omega_{f,} \end{cases} \tag{1.55}$$

де $T(V_f, p_f)$ -тензор напружень, визначений як

$T(V_f, p_f) = \nu(\nabla V_f + \nabla^T V_f) - p_f I,$ V_f і p_f - швидкість і тиск рідини.

Ці рівняння замінюються рівняннями поверхневої води (3D-NH-SWE), тоді наша система рівнянь (1.54)-(1.55) замінюється наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} \dfrac{DV_f}{Dt} - \dfrac{\partial}{\partial z}(\nu_\upsilon \dfrac{\partial V_f}{\partial z}) + \nabla q + diag(\mathrm{g}, \mathrm{g}, 0).\nabla\eta = f, \forall x \in \Omega_j, \\ div\ V_f = 0, \forall x \in \Omega_f, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + div \int_h^\eta u_f dz = \tilde{Q}, \forall (x, y) \in \hat{\Omega}. \end{cases} \tag{1.56}$$

де g – гравітаційне прискорення, $f = (f_x, f_y, 0)^T$ - векторо зовнішніх сил, $V_f = (u_f, w_f)^T$ - вектор швидкості, q – гідродинамічний тиск, $\tilde{Q}$ - нормальна компонента щвидкості V_f, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_f.\nabla$ - лагранжіан похідних.

Для руху спільного потоку рідини в умовах вільної поверхні і виконання закону Дарсі в [218] запропоновано наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} V_p.n_p = V_f.n_f, \\ \dfrac{\partial u_f}{\partial z} = \dfrac{\alpha_{BJ}\sqrt{3}}{\sqrt{tr\,K}}(u_f - u_p), \\ \rho_f g\varphi = \rho_f gH + p_p = p_f, \end{cases}$$

де $H = \eta - h$ повна висота рідини, $V_p = q \big/ n$ - швидкість грунтової води в області Ω_p.

У випадку рівнянь Нав'є- Стокса умови на спільній границі Г запишуться у виді:

$$\begin{cases} V_p.n_p = V_f.n_f, \\ -[(T(V_f, p_f).n_f].\tau_i = 0, i = 1,2, \\ -[(T(V_f, p_f).n_f].n_f = \rho_f g\varphi, \end{cases} \qquad (1.57)$$

де $\tau_i (i = 1,2)$ - тангенціальний вектор до границі Г(Рис. 1.3).

Слід зауважити що умови (1.57) узагальнюють умови Payne і Straughan, які записали ці умови у випадку плоскої задачі між вільною границею води і пористим середовищем, у такому вигляді:

$$\begin{cases} w_p = w_f, \\ \dfrac{\partial u_f}{\partial z} + \nabla_{xy} w_f = \dfrac{\alpha_{BJ}\sqrt{3}}{\sqrt{tr\,K}}\mathrm{u}_f, \\ -2\nu\dfrac{\partial w_f}{\partial z} + p_f = p_p, \end{cases} \tag{1.58}$$

Центральна умова (1.58) була отримана експериментально Beavers і Joseph та записани ними у такому формулюванні:

$$\frac{\partial u_f}{\partial z} + \nabla_{xy} w_f = \frac{\alpha_{BJ}\sqrt{3}}{\sqrt{tr\,K}}(\mathrm{u}_f - \mathrm{u}_p)$$

Фактично, в цих умовах показано[28], що реалізуються вони розв'язанням рівнянь відносно швидкості і тиску на спільній границі Г.Кожна ітерація обчислюється в своїй робочій області і для переходу між ними записується ітераційна процедура, яка зводиться до розв'язування рівняння Стеклова-Пуанкаре.

Після постановки початково- крайових або варіаційних задач проводиться дискретизація системи рівнянь за часовою і просторовими змінними, тоді ми отримуємо систему проекційних нелінійних рівнянь. Розв'язування такої системи становить свої підзадачу, яку потрібно розв'язати. Такі системи мають великі розмірності і свою визначену спеціальну структуру (часто блочно-діагональний вигляд), що для звичайних ітераційних методів з їх посиленими умовами на початкове наближення і умови збіжності не завжди ці вимоги задовільняються. Вирішенню таких задач присв'ячені роботи таких вчених: Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. [1], Антонцев С.Н.,Кажихов А.В., Монахов В.Н.[2], Бартіш М.Я., Сеньо П.С.[7,8], Бруяцкий Е.В.,Костин А.Г., Никифорович Е.И.[14], Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.[15], Гладкий

А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.[87], Глазунов Н.М. [88], Грищенко О.Ю.[90], Добронец Б.С.,Шайдуров В.В.[95], Кобельков Г.М.[112], Химич А.Н.,Герасимова Т.А.,Нестеренко А.Н., Яковлев М.Ф.[174, 175], Шарий С.П.[183], Alefeld G., Herzberger J.[189], Durran D.R.[222], Yfitjma H.M.[234], Kearfott R.B., Nakao M.N., Neumaier A., Rump S.M.,Shary S.P. [246], Lions P.-L.[262], Yao Y.F.,Thomas T.G.,Sandham N.D.,Williams J.R.[306] та інші.

Так при застосуванні інтервальних ітераційних методів, які враховують більшість видів похибок, включаючи і машинні операції, в роботі [189], використовувалася наступна ітераційна процедура:

(a) $F^{(k)} = f'(x^{(k)}) = D(x^{(k)}) - B(x^{(k)})$,

(b) *застосування методу Гауса до* $(F^{(k)}, f(m(x^{(k)})))$ *і знаходження* $w^{(k)}$,

(c) $\tilde{x}^{(k)} = \{m(x^{(k)}\} - w^{(k)}\} \cap x^{(k)}$,

(d) $x^{(k+1)} = \{m(x^{(k)}) - D(x^{(k)})^{-1}(B(x^{(k)})(m(x^{(k)}) - \tilde{x}^{(k)}) + f(m(x^{(k)}))\} \cap \tilde{x}^{(k)}$

Цей метод враховує структуру системи нелінійних рівнянь, її діагональний вигляд і обертання проводиться діагональної частини матриці, що приводить до відшукання обернених діагональних елементів .

Можна не застосовувати метод Гауса до інтервальних матриць, а використати в ролі оберненої матриці $f'(m(x))^{-1}$, в також підвищити швидкість збіжності застосувавши доданки х другою похідною, тоді отримаємо наступні пропозиції для кроку (d), а саме

$$k_1(\mathrm{x}) = \mathrm{m(x)} - \mathrm{Yf(m(x))} - \mathrm{Y(f''(x))(x-m(x))}^2,$$

$$k_2(\mathrm{x}) = \mathrm{m(x)} - \mathrm{Yf(m(x))} - \frac{1}{2}\mathrm{(Y(f''(x)(x-m(x)))}^2,$$

$$k_3(\mathrm{x}) = \mathrm{m(x)} - \mathrm{Yf(m(x))} + \{\mathrm{I} - \mathrm{Yf'(m(x))} - \frac{1}{2}\mathrm{Y(f''(x))(x-m(x))}\ \}\mathrm{(x-m(x))},$$

В роботі[189] пропонується не використовувати обертання матриці, а скористатися ітераційними процедурами для наближення оберненої матриці

$$x^{(k+1)} = \{m(x^{(k)}) - Y^{(k)} f(m(x^{(k)}))\} \cap x^{(k)},$$
$$Y^{(k+1)} = \{m(Y^{(k)}) + Y^{(k)}(I - \Im^{(k+1)} m(Y^{(k)}) \ ) \ \} \cap Y^{(k)},$$
$$\partial e \quad \Im^{(k)} = f'(x^{(k)}).$$

Для оцінки стійкості інтервальних ітераційних методівприведено побудову двохстороннього ітераційного методу і його рекурсиву версію

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(\mathrm{k})}, \\ y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}), 0 \le r \le m, \\ y^{(k+1)} = y^{(\mathrm{k,m+1})}, \\ x^{(k,0)} = x^{(\mathrm{k})}, \\ x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(\mathrm{x}^{(k,r)}), 0 \le r \le m, \\ x^{(k+1)} = x^{(\mathrm{k,m+1})}, \\ P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu} \left[\mathrm{B}(\mathrm{x}^{(\mathrm{k}+1)}, \mathrm{y}^{(k+1}) \, \mathrm{P}^{(k)} - I \right]^{\mu}, \\ k \ge 0. \end{cases}$$

В роботі [286] доведено, що цей метод збігається з порядком збіжності m+2. Також там показано побудову повнокрокових і короткокрокових ітераційних методів ньютонівського типу для знаходження розв’язків систем нелінійних рівнянь зі спеціальною матрицею діагонального типу.

Дана дисертаційна робота складається з шести розділів.

В **першому розділі** приведено огляд різних моделей для опису водних потоків на території водозбору. Показано, що одним з основних серед них є поверхневий або схиловий стік, для опису якого наводяться системи рівнянь, виходячи із загальних законів збереження імпульсу,

маси та енергії. Зроблено аналіз досліджень багатьох авторів, які отримали спрощені варіанти рівнянь для врахування дії різних природніх факторів.

Другий розділ присвячений побудові моделей поверхневого і грунтового стоків з поверхні водозбору. Показано, що часткові випадки моделей отримуються із загальної системи рівнянь Нав'є-Стокса, використовуючи спрощені варіанти наближень дії внутрішніх і зовнішніх сил. Особлива увага приділяється спрощеним моделям поверхневого руху рідини з перевагою горизонтальних масштабів над вертикальними (умови поверхневої води). Виходячи з цих умов, розглянуті задачі поверхневого стоку поверхневої води з врахуванням різних граничних умов.

Розгладаються різні підходи до побудови системи рівнянь руху грунтової води. Показано, що у випадках врахування швидкості фільтрації, необхідно використовувати загальні закони збереження енергії та стану рідини. Розглянуто умови спрощення отриманих систем рівнянь, показано їх використання для різних початкових і граничних умов.

Для спільного руху поверхневих і грунтових водних потоків розглянуті різні підходи, проаналізовано різні варіанти для запису контакних умов їх взаємодії.

Далі розглянуто застосування чисельних методів для розв'язування рівнянь розглянутих моделей, а саме використання МСЕ. Приведені відомі стабілізаційні схеми МСЕ для уникнення осциляцій, які виникають при розв’язанні рівнянь поверхневої води з великими числами Рейнольдса, показано необхідність врахування так званих доданків зі “штучною” в’язкістю для швидкозмінних градієнтів поверхні дна потоку.

Третій розділ присвячений побудові уточнених постановок початково-крайових та варіаційних задач стоку поверхневих і грунтових вод у гідродинамічному та кінематичному наближеннях.

В параграфі 3.1 розглянуті загальні рівняння Нав’є-Стокса руху суцільного середовища в безрозмірному вигляді. Проводиться усереднення рівнянь Нав’є-Стокса за глибиною потоку, враховуючи всі складові напружень в рівняннях руху. Рідина вважається в’язкою та нестисливою. При цьому всі доданки в рівняннях руху збережені, на відміну від моделей поверхневої води [12, 106, 119, 267], де відкинуті внутрішні напруження. Для отриманої початково-крайової задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні побудована варіаційна постановка. Розглянута спрощена задача побудованої моделі – двовимірна модель стоку поверхневої води в кінематичному наближенні. Побудована варіаційна постановка задачі.

Виведено рівняння для опису руху грунтової води в гідродинамічному і гідравлічному підходах. Сформульовані початково-крайові та варіаційні постановки задач. Показано врахування різних початкових і крайових умов.

Для спільного руху поверхневих і грунтових потоків, вибрані рівгяння руху поверхневої води і рівняння Бусинеска. Виведені умови спряження цих двох потоків. Наведено варіаційне формулювання задачі спільного руху потоків, з врахуванням крайових, контактних і початкових умов.

Розв’язані ці варіаційні задачі з використанням проекційно-сіткової схеми МСЕ. Для дискретизації задач в часі використовується однокрокова рекурентна схема та процедура методу Гальоркіна.

При дискретизації задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні за просторовими змінними, використовуються кусково-лінійні апроксимації на трикутних елементах для розходів рідини зі сталою глибиною. При великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їх градієнти різко змінюються, в результаті чого отриманий розв'язок задачі втрачає свою стійкість та з'являються "паразитичні"

осциляції. В даному розділі побудована стабілізаційна схему МСЕ для покращення розв’язку, що базується на основі функцій-бульбашок з використанням методу найменших квадратів [114]. Побудована оцінка стабілізаційного множника для рівнянь Нав’є-Стокса, використовуючи [192, с.123].

Проведено дискретизацію варіаційної задачі стоку поверхневої води в кінематичному наближенні в часі та за просторовими змінними. Побудовано однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі.

У четвертому розділі показано застосування інтервальних ітераційних методів для розв’язування нелінійних систем проекційних рівнянь. Побудовано інтервальний метод типу Рунге, який використовує подібну до методу Ньютона апроксимацію оберненого оператора, але володіє більшим порядком збіжності. Проведено аналіз збіжності, показано порядок збіжності методу при виконанні певних умов, проаналізовано стійкість методу при збуреннях оберненого оператора і при виборі його початкового наближення.

Побудовано і досліджено клас інтервальних ітераційних методів для розв’язування систем нелінійних проекційних рівнянь з домінуючою діагоналлю. Показано, що такі системи утворюються в багатьох задачах після дискретизації системи в часі або за просторовими змінними методом скінченних різниць або скінченних елементів. Побудовані рекурсивні аналоги побудованих класів інтервальних методів. Показано їх застосування до різних прикладних задач.

У п’ятому розділі досліджується стійкість та збіжність побудованих рекурентних схем для задач стоку поверхневої води у гідродинамічному та кінематичному наближеннях. Проводиться аналіз отриманих чисельних результатів.

Для моделі стоку рідини в наближенні кінематичної хвилі проведені обчислення на тестових прикладах із різними дощовим притоком та

рельєфом поверхні. При розв'язуванні задачі кінематичної хвилі на поверхнях із складним рельєфом спостерігаються осциляції розв’язку. Приведені результати модифікованої моделі з доданою штучною в'язкістю. Обчислені порядки збіжності чисельних результатів за просторовими та часовою змінними, а також абсолютна та відносна похибки розв'язку.

Проведений аналіз чисельних результатів для задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні. Обчислення проводяться при різних значеннях чисел Рейнольдса. При числах Рейнольдса більших 100 розв'язок втрачає свою стійкість та виникають осциляції. Побудована стабілізаційна модель порахована на тестових та реальних зображеннях рельєфу поверхні стоку із заданою дощовою притокою. Для отриманих чисельних результатів обчислені порядки збіжності та відносні похибки. Наведено порівняння двох моделей – стоку рідини у гідродинамічному та кінематичному наближеннях при заданні однакових початкових та крайових умов.

Проведено аналіз результатів сумісної моделі стоку поверхневих і грунтових вод, досліджуються енергетичні рівняння сумісного потоку, доведена єдиність та обмеженість розв’язку варіаційної задачі сумісного потоку.

Шостий розділ присвячений програмній реалізації побудованих чисельних схем з використанням геоінформаційних технологій.

Розроблена веб-компонента, яка дозволяє на стороні клієнта, не витрачаючи кошти на купівлю програмного забезпечення, вводити дані про річкові системи розташовані на вибраній території, моделювати рух водних потоків та візуалізувати отримані результати чисельних експериментів. Всі необхідні обчислення переносяться на сервер, який підтримується за допомогою ArcGIS Servera, за підтримки Інституту досліджень навколишнього середовища (ESRI). Наведені використання

GIS-компоненти для двох різних типів обслуговуючих програм ArcMap і ARCGISServer. Показано їх застосування для деяких основних річок на території України.

РОЗДІЛ ІІ. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ ВОДНИХ ПОТОКІВ НА ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

Зростаючі вимоги до оптимального використання водних ресурсів, дефіцит води у багатьох районах земної кулі, зниження її якості роблять важливими розвиток теорії формування вод суші, як основи керування водними ресурсами. Моделі гідрологічного циклу можуть бути використані не тільки в задачах, пов’язаних із проектуванням та експлуатацією воднoресурсних систем, але і при створенні методів активного впливу на формування стоку та якості води на водозборі.

2.1 Загальні задачі руху рідини

Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі (Рис.2.1) відіграють гідрологічні системи. Гідрологічні системи складаються з багатьох взаємозв’язуючих між собою етапів кругообігу води на планеті.

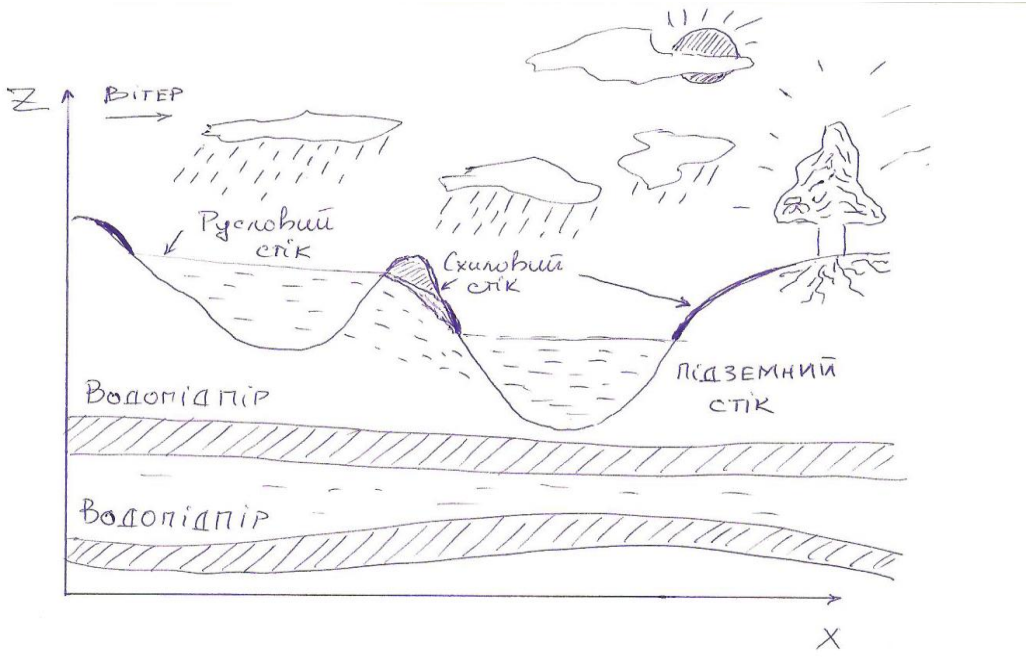


Рис. 2.1. Вертикальна декомпозиція руху рідини.

Гідрологічні процеси визначають проходження екологічних процесів і в той же час часто самі суттєвим чином залежать від цих процесів.

В загальному дослідженні цілої такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, що бере участь в кругообігу води. Найвирогіднішим елементом частини території може виступати територія водозбору (Рис.2.2), яка характеризується подібними кліматичними умовами і знаходиться під впливом інших факторів, що впливають на рух води.

2.2 Математичні моделі формування поверхневого стоку води з території водозбору

Для спрощення опису руху вологи на водозборі проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – вся область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху.

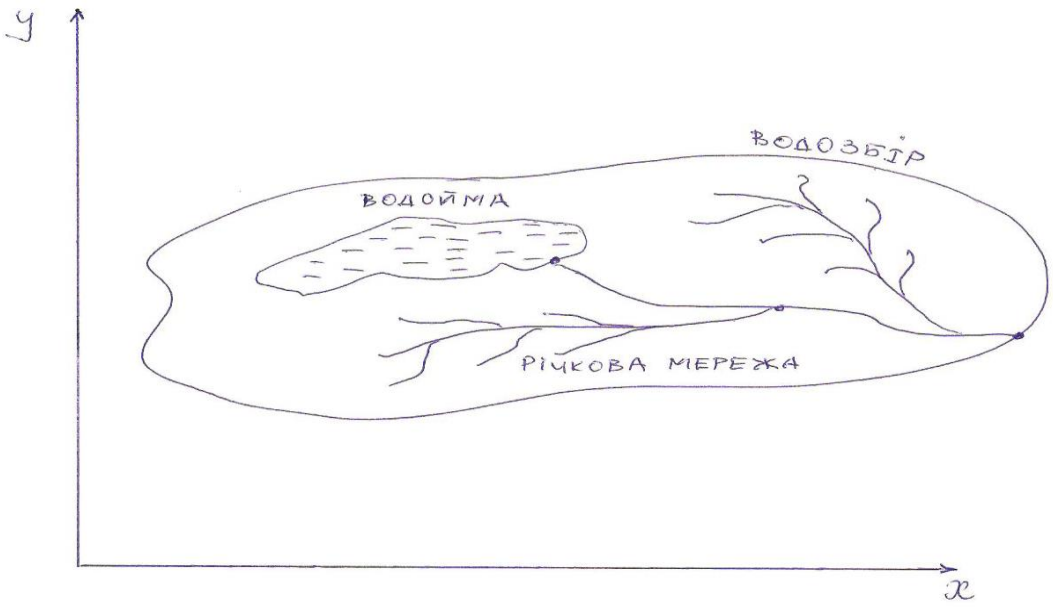


Рис.2.2. Графічне зображення території водозбору.

В приземному шарі атмосфери проходять процеси випаровування, випадання дощу, снігу, тощо і перехоплювання опадів рослинністю, а також перенесення вологи повітряними потоками. На поверхні землі проходять русловий стік, стік в пойму ріки при розливі, схиловий стік, рух води в озерах та водоймах, а також накопичення снігу і його таяння. В ненасиченій зоні проходять процеси фільтрації води, капілярного підйому і випаровування, вбирання води коренями рослин. У водоносних напірних горизонтах рух води проходить між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія між потоком і вище та нижче розташованими водоносними шарами при наявності проникливого водопідпору. В кожному шарі для опису руху вологи використовуються моделі різної розмірності, їх розв’язки з’єднуються за допомогою граничних умов.

Описати рух вологи на великих водозборах, які включають різні гідрологічні об’єкти, задача нелегка. Рух нестаціонарний і проходить в трьохмірному просторі і в різних середовищах. Сама волога може знаходитися в різних фазових станах – газоподібному, рідкому або твердому. Основні рівняння, що описують рух води і перехід її з однієї

фази в іншу – це рівняння математичної фізики, які отримуються із законів збереження маси, кількості руху і енергії.

Серед усіх моделей руху рідини, тут ми розглянемо рух рідини на мілководді, оскільки це один з найбільш вживаних класів задач у гідрологічному циклі. В основі теорії поверхневої води лежать два основних фактори – перевага горизонтальних масштабів руху над вертикальними та гідростатичний закон для тиску. Процеси, що лежать в основі цієї теорії носять хвильовий характер з довжиною хвилі набагато більшою вертикальних масштабів руху. Серед них найбільш значимі морські приливи, повені, цунамі, сейші в гаванях та інші. Ці явища знаходять також аналогію в різних сферах механіки та геофізики: в акустиці, газовій динаміці, метеорології, гідравліці тощо.

Таким чином, математичне моделювання стоку поверхневої(поверхневої) води має широке практичне застосування.

Формування стоку води з поверхні водозбору являє собою складне природне явище, яке обумовлено великою кількістю факторів. Оцінка і виміри факторів надзвичайно складні через наявність залежності від простору та часу . Отже, побудова математичної моделі формування стоку вимагає спрощення та схематизації основних процесів.

Розглянемо побудову моделів стоку поверхневої води, отриманих з тривимірних рівнянь руху суцільного середовища. Ці рівняння складні у своєму застосуванні до природних водозборів через наявність великої кількості невідомих і тому вимагають спрощення. Основними етапами спрощення є усереднення рівнянь за товщиною стоку та врахування умов мілкості потоків. В результаті отримуються рівняння поверхневого руху води у гідродинамічному наближенні з врахуванням всіх в’язких доданків. Формулюється початково-крайова задача стоку води з поверхні водозбору у гідродинамічному наближенні. Як частковий випадок

розглянуто початково-крайові задачі стоку поверхневої води в кінематичному наближенні.

2.2.1 Рівняння поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні

Щоб перейти до побудови початково-крайової постановки задачі, запишемо рівняння руху поверхневої води, виходячи із законів збереження маси та імпульсу. Але спочатку визначимо область водозбору(частина території) та структуру та властивості деякого виділеного об'єму рідини на ній.

2.2.1.1 Закони збереження маси та імпульсу.

Розглянемо загальні рівняння Нав'є-Стокса руху суцільного середовища. Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар $D(t) \in R^3$.

Нехтуючи температурними ефектами, будемо вважати, що стан суцільного середовища при дії масових сил $F=\{f_i(x)\}^3_{i=1}$ описується рівняннями збереження імпульсу та маси

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} = 2\mu e_{ij}, \\ e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \ i, j = 1,2,3 \ \textit{в} \ D \times (0,T], \end{cases} \tag{2.1.1}$$

де $\{u_i(x,t)\}^3_{i=1}$ та $p=p(x,t)$ шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно, $\rho=\rho(x,t)>0$, $\mu=\mu(x)>0$, $\{e_{ij}\}^3_{i,j=1}$, $\{\sigma_{ij}\}^n_{i,j=1}$ – густина маси, коефіцієнт в'язкості, тензори деформації швидкостей та напружень рідини в точці x та момент часу t, δ_{ij} – символ Кронекера.

2.2.1.2 Геометричні характеристики об'єму рідини

Виділимо частину об'єму рідини, так званий контрольний об'єм, який в даний момент часу знаходиться на поверхні водозбору і запишемо для нього характеристики.

2.2.1.2.1 Структура контрольного об'єму рідини.

Нехай ми знаходимось в умовах руху в'язкої нестисливої рідини, що формує на нерухомій поверхні $x_3= z_-(x_1, x_2)$ певного водозбору деякий шар рідини $D=D(t)$ (Рис. 2.3) в кожен момент часу $t \in [0, T]$, $0< T < +\infty$, тобто

$$D(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid \ z_-(x) < x_3 < z_+(x,t), \ \ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}. \quad (2.1.2)$$

Проекцію шару рідини $D(t)$ на горизонтальну площину місцевої системи координат $\{x_i\}^3_{i=1}$ позначимо через Ω, де координата x_3 визначає висоту потоку рідини, наприклад, над рівнем моря. Припускаємо, що межа Г області Ω неперервна за Ліпшицем.

Позначимо його нижню поверхню через

$$B(x):=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \;\middle|\; x_3=z_-(x),\ \forall x=(x_1,x_2)\in\Omega\right\} \qquad (2.1.3)$$

та верхню поверхню

$$A(t):=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \;\middle|\; x_3=z_+(x,t)\ \ \forall x=(x_1,x_2)\in\Omega\right\}, \qquad (2.1.4)$$

відповідно. Решту поверхні цього об’єму

$$S(t):=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \;\middle|\; z_-(x)<x_3<z_+(x,t)\ \ \forall x=(x_1,x_2)\in\partial\Omega\right\} \qquad (2.1.5)$$

будемо називати бічними поверхнями об’єму $D(t)$.

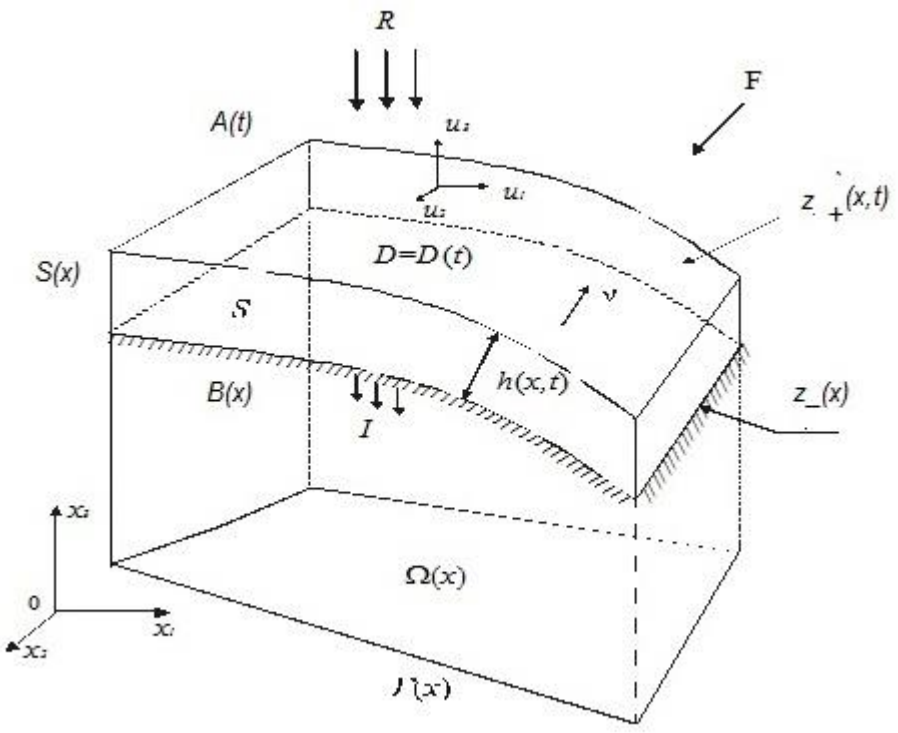


Рис. 2.3. Графічне зображення контрольного об’єму.

2.2.1.2.2 Швидкість руху поверхонь об’єму.

Оскільки *D(t)* змінює свою конфігурацію в часі, то важливо знати швидкість руху її поверхонь, наприклад, *B(t)*.

Компоненти вектора швидкості точки визначаються з рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_i(x_1, x_2, x_3, t),\ i = 1,2,3,$$

тоді

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{dz_+(t)}{dt} = \frac{\partial z_+}{\partial t} + \frac{\partial z_+}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial z_+}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial z_+}{\partial x_\alpha}, \alpha = 1,2. \quad (2.1.6)$$

2.2.1.2.3 Нормаль до поверхонь об’єму.

Позначимо через $\nu = \{\nu_j(x,t)\}_{j=1}^3$- одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі області $D(t)$. Обчислимо компоненти цього вектора на вільній поверхні потоку $F(t)$, наприклад, добре відомо, що вектор

$$N(z_+) := \left\{\frac{\partial z_+}{\partial x_1}, \frac{\partial z_+}{\partial x_2}, -1\right\} \quad (2.1.7)$$

є вектором нормалі до поверхні $x_3 = z_+(x_1, x_2, t)$. Тому

$$\nu_{z_+} = -\frac{1}{|N(z_+)|}\cdot\left\{\frac{\partial z_+}{\partial x_1}, \frac{\partial z_+}{\partial x_2}, -1\right\} = |N(z_+)|^{-1} N(z_+) \quad (2.1.8)$$

є одиничним вектором зовнішньої нормалі до $D(t)$ на поверхні *A*(*t*).

Очевидно, що вектор

$$\nu_{z_-} = \frac{1}{\left|N\left(z_-\right)\right|} \cdot \left\{ \frac{\partial z_-}{\partial x_1}, \frac{\partial z_-}{\partial x_2}, -1 \right\} = \left|N\left(z_-\right)\right|^{-1} N\left(z_-\right) \qquad (2.1.9)$$

є одиничним вектором зовнішньої нормалі до $D(t)$ на поверхні $B(t)$.

2.2.2.3. Проекційні рівняння законів збереження.

Тут ми сформулюємо проекційні рівняння для побудови моделей та методів їх дослідження.

2.2.2.3.1 Збереження маси.

Нехай $D(t)$ – обмежена область з R^3 - повністю заповнена рухомим суцільним середовищем. Будемо вважати, що межа області $\partial D(t)$ є неперервною за Ліпшицем і $\nu = \{\nu_i\}_{i=1}^3$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial D(t)$.

Виберемо довільну функцію $\varphi = \varphi(x)$ і припускаючи, що ρ та $\{u_i(x,t)\}^3{}_{i=1}$ задовільняють рівняння (2.1.1), знайдемо, що

$$0 = \int\limits_{D(t)} \varphi \{ \frac{\partial}{\partial t}\rho + \sum_{j=1}^{3} (\rho u_j) \} dx. \qquad (2.1.10)$$

Якщо $\varphi \in H^1(D(t))$, то інтегруванням частинами в (2.1.10) можна отримати наступне проекційне рівняння

$$0 = \int_{D(t)} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial t}\rho - \sum_{j=1}^{3} (\rho u_j) \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \right\} dx + \\ + \int_{\partial D(t)} \sum_{j=1}^{3} \varphi \rho u_j \nu_j ds, \ \forall \varphi \in H^1(D(t)) \tag{2.1.11}$$

Другий доданок в (2.1.11) надає нам можливість врахувати взаємодію поверхневого потоку з довкіллям, наприклад, з атмосферним потоком і врахувати всі зовнішні природні впливи на цю поверхню, такі як потоки вітру, випадання дощу, тощо.

2.2.2.3.2 Збереження імпульсу.

Виберемо довільний вектор $\upsilon = \{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$ скалярно перемножимо перше рівняння (2.1.1) на нього і результат проінтегруємо по *D(t)*. Будемо мати

$$0 = \int_{D(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}\right) - \rho f_i \right\} \upsilon_i dx, \\ i = 1,2,3, \ \upsilon \in L^2(D(t)). \tag{2.1.12}$$

Якщо компоненти $\upsilon = \{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$ є достатньо гладкими фукціями, то отримаємо

$$0 = \int_{D(t)} \left\{ \upsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}\right) e_{ij}(\upsilon) - \rho f_i \upsilon_i \right\} dx + \\ + \int_{\partial D(t)} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}\right) \nu_j \upsilon_i dx, \ \upsilon \in H^1(D(t)) \tag{2.1.13}$$

З (2.1.13) ми бачимо знову, подібно до (2.1.11), взаємодію поверхневого потоку з довкіллям і, крім того, ще потік може передавати вектор напружень

$$\sigma_i = \left\{\sigma_{ij}\nu_j\right\}_{i=1}^{3} \qquad на \quad \partial D(t)\,. \tag{2.1.14}$$

В рівнянні (2.1.13) ми ввели симетричний тензор $e_{ij}(\upsilon)$ згідно правила

$$e_{ij}(\upsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right),$$

який відомий в гідродинаміці під назвою тензора швидкостей деформацій. Його компоненти характеризують кінематику потоків рідини.

Зокрема, якщо

$$e_{ij}(\upsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_j = 0 \qquad в\ D(t),$$

то потік рідини з таким розподілом швидкостей $\left\{\upsilon_j\right\}$ не може змінювати свого об’єму в процесі руху і називається нестисливим.

2.2.1.4 Напівдискретизація проекційних рівнянь.

Розглянемо питання напівдискретизації рівнянь опису нашої моделі, шляхом усереднення рівнянь за глибиною потоку.

2.2.1.3.1 Збереження маси.

Ми розглянемо наступний вигляд рівняння

$$0 = \int\limits_{D(t)} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial t}\rho - \sum_{j=1}^{3}(\rho u_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \right\} dx_1 dx_2 dx_3 + \int\limits_{\partial D(t)} \sum_{j=1}^{3} \varphi \rho u_j \nu_j ds$$

$$= \int\limits_{\Omega(t)} dx_1 dx_2 \left\{ \int\limits_{z_-}^{z_+} (\varphi \frac{\partial}{\partial t}\rho - \sum_{j=1}^{3}(\rho u_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi)\,\mathrm{d}x_3 + \varphi\rho u\nu \Big|_{A(t)} - \varphi\rho u\nu \Big|_{\mathrm{B}(t)} \right\} +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega(t)} d\gamma \int\limits_{z_-}^{z_+} \varphi\rho u\nu \, dx_3.$$

(2.1.15)

Тепер візьмемо

$$\varphi = \varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \tag{2.1.16}$$

і введемо такі характеристики

$$\begin{cases} h(x,t) := z_+(x,t) - z_-(x,t) = z\,|_{z_-}^{z_+}; \\ u_j^*(x,t) := \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{z_-}^{z_+} u(x_1,x_2,t)dx_3, x \in \Omega(t), t \in (0,T]; \\ \rho^*(x,t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{z_-}^{z_+} \rho(x_1,x_2,t)dx_3; \end{cases} \tag{2.1.17}$$

Це насправді ми хочемо перейти до усереднених характеристик поверхневих потоків, проінтегрувавши (2.1.15) по глибині $h = z_+ - z_-$ потоку.

Відзначимо, що

$$\int_{z_-}^{z_+} \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \int_{z_-}^{z_+} \rho u_j dx_3 = \rho^* h u_j^* \ \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_j = \rho^* h \sum_{\alpha=1}^{2} u_\alpha^* \ \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \tag{2.1.18}$$

Із врахуванням наведених перетворень рівняння (2.1.15) набирає вигляду

$$0 = \int\limits_{D(t)} \Big\{ \varphi \frac{\partial}{\partial t}\rho - \rho^* h u_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi + (\rho \mathrm{u} \nu^+)\big|_{z_-}^{z_+} \varphi \Big\} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ + \int\limits_{\Gamma(t)} \varphi \rho^* h u_\alpha^* \nu_\alpha d\gamma \tag{2.1.19}$$

або після інтегрування частинами другого доданку

$$0 = \int\limits_{\Omega(t)} \{ \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho^* h u_\alpha^*) \} \varphi dx_1 dx_2 dx_3 + \\ + \int\limits_{\Omega(t)} (\rho u \nu^+)\big|_{z_-}^{z_+} \varphi dx + \int\limits_{\Gamma(t)} \varphi \rho^* h u_\alpha^* \nu_\alpha d\gamma \tag{2.1.20}$$

Нехай П – обмежена область в Ox_1x_2, така що $\Omega(t) \subset \Pi, \forall t \in [0,T]$, тоді

(2.1.19) має сенс для будь-якої функції $\varphi \in H^1(\Pi)$,

(2.1.20) має сенс для будь-якої функції $\varphi \in H^0(\Pi)$.

Таким чином, ми маємо можливість сформулювати задачу для рівняння нерозривності

$$\begin{cases} \textit{знайти } \rho^*, \{u_\alpha^*\} \textit{ такі, що} \\ \int\limits_{\Omega(t)} \Big\{ \varphi \frac{\partial}{\partial t}\rho - \rho^* h u_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi \Big\} dx = \int\limits_{\Omega(t)} (\rho u \nu^+)\big|_{z_-}^{z_+} \varphi \Big\} dx - \int\limits_{\Gamma(t)} \varphi \rho^* h u_\alpha^* \nu_\alpha d\gamma \\ \forall \varphi \in H^1(\Pi) \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Зауваження.

1. Внаслідок довільності $\Omega(t) \subset \Pi, \forall t \in [0,T]$ знаходимо усереднене диференціальне рівняння збереження маси

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho^* h u_\alpha^*) = (\rho u \nu^+)\Big|_{z_-}^{z_+},$$
$$в \quad \Omega(t), \ \forall t \in [0, T] \tag{2.1.22}$$

2. Якщо рідина нестислива, то $\rho = const > 0$ і рівняння (2.1.22) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho^* h u_\alpha^*) = (\rho u \nu^+)\Big|_{z_-}^{z_+}. \tag{2.1.23}$$

3. Ми сподіваємося, що праві частини (2.1.16),(2.1.17) перетворяться в лінійні функціонали після того, як ми врахуємо крайові умови на *A(t),B(t)* та *S(t).*

2.2.1.3.1 Збереження імпульсу.

Підставимо в рівняння (2.1.13) вектор

$$\upsilon = \{\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), 1\}, \quad x \in \Pi. \tag{2.1.24}$$

В результаті дістанемо

$$0 = \int_{D(t)} \{\upsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + [\rho u_\alpha u_\beta + p\delta_{ij} - \tau_{\alpha\beta}] e_{\alpha\beta}(\upsilon) - \rho f_i \upsilon_i\} dx +$$
$$+ \int_{\partial D(t)} [\rho u_i u_j - \sigma_{ij}(p,u)] \nu_j \upsilon_i ds, \ \forall \upsilon \in H^1(D(t)). \tag{2.1.25}$$

Введемо такі усереднені характеристики тиску та об’ємних сил

$$\begin{cases} p^*(x,t) := \int_{z_-}^{z_+} p(x_1, x_2, t)dx_3; \\ f_i^*(x,t) = \frac{1}{h}\int_{z_-}^{z_+} f_i(x_1, x_2, t)dx_3, i = 1,2,3. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

Зауважимо, що

$$\int_{D(t)} \{\upsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right)dx_1dx_2dx_3 = \int_{\Omega(t)} \upsilon_i \{\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_-}^{z_+} \rho u_i dx_3 - \rho u_i \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{z_-}^{z_+}\}dx =$$
$$\int_{\Omega(t)} \{\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* h u_i^*) - \rho u_i \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{z_-}^{z_+}\}\upsilon_i dx \tag{2.1.27}$$

Перетворимо наступний доданок

$$\int_{D(t)} e_{\alpha\beta}(\upsilon)[\rho u_\alpha u_\beta + p\delta_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}(\mathrm{u})]dx_1dx_2dx_3 =$$
$$\int_{D(t)} e_{\alpha\beta}(\upsilon)\{\int_{z_-}^{z_+}[\rho u_\alpha u_\beta + p\delta_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}(\mathrm{u})]dx_3\}dx_1dx_2 =$$
$$\int_{\Omega(t)} \{\rho^* h u_\alpha^* u_\beta^* + p^* h\delta_{\alpha\beta} - \mu[\frac{\partial}{\partial x_\beta}(hu_\alpha^*) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(hu_\beta^*) -$$
$$(u_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\beta} + u_\beta \frac{\partial z}{\partial x_\alpha})\Big|_{z_-}^{z_+}]\, e_{\alpha\beta}(\upsilon)dx_1dx_2 =$$
$$\int_{\Omega(t)} \{\rho^* h u_\alpha^* u_\beta^* + p^* h\delta_{\alpha\beta} - \mu[h(\frac{\partial}{\partial x_\beta}u_\alpha^* + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}u_\beta^*)$$
$$+u_\alpha^* \frac{\partial h}{\partial x_\beta} + u_\beta^* \frac{\partial h}{\partial x_\alpha}) - (u_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\beta} + u_\beta \frac{\partial z}{\partial x_\alpha})\Big|_{z_-}^{z_+}]\}\, e_{\alpha\beta}(\upsilon)dx_1dx_2. \tag{2.1.28}$$

Зроблені в (2.1.28) перетворення показують на доцільність введення нових невідомих

$$q_\alpha := hu_\alpha, \alpha = 1,2. \tag{2.1.29}$$

Це так званий роххід потоку, або в літературі вживається термін просто “потік”.

Покажемо

$$r_{\alpha\beta} = (\mathrm{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathrm{z} + \mathrm{u}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathrm{z}) \Big|_{z_-}^{z_+} \tag{2.1.30}$$

Тензор $r_{\alpha\beta}$ буде симетричним і він буде задавати відомі швидкості на верхніх і нижніх поверхнях *D(t).*

Вибір структури (2.1.24) вектора υ робить нульовими деякі компоненти тензора $\{e_{ij}\}$, а саме:

$$e_{13}(\upsilon) = e_{23}(\upsilon) = e_{33}(\upsilon) = 0 \tag{2.1.31}$$

З використанням (2.1.29) вираз (2.1.27) набуває вигляду:

$$\int\limits_{D(t)} \upsilon_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_i) - \rho u_i \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{z_-}^{z_+} \right\} \upsilon_i\, dx \tag{2.1.32}$$

Перетворимо також і (2.1.28), будемо мати:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{D(t)} e_{\alpha\beta}(\upsilon)\left[\rho u_\alpha u_\beta + p\,\delta_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}(u)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3 = \\ &\int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \rho^* \frac{1}{h} q_\alpha q_\beta + h p^*\, \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right\} e_{\alpha\beta}(\upsilon) dx + \\ &+ \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \mu \left(u_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\beta} + u_\beta \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} \right) \Big|_{z_-}^{z_+} \right\} e_{\alpha\beta}(u)\, dx \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

Підсумовуючи (2.1.32), (2.1.33) приходимо до варіаційного рівняння збереження імпульсу

$$\begin{cases} \textit{Знайти}\ \ \rho^*,\ h,\ p^*,\ \{\mathrm{q}_i\}_{i=1}^3,\ \textit{такі, що} \\ \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_i) - \rho^* h\ f_i^* \right] \upsilon_i - \left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + h p^*\ \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right] e_{\alpha\beta}(\upsilon) \right\} dx = \\ \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \left[\sigma_{ij}(u,p)\nu_j^{\,+} + \rho u_i \left(\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial t} - uv^+ \right) \right] \Big|_{\mathrm{z}_-}^{\mathrm{z}_+}\ \upsilon_i \right\} dx + \\ \int\limits_{\Gamma(t)} \left\{ \mu \left[2e_{\alpha\beta}(q)\nu_\alpha\ \upsilon_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(q_3)\nu_\alpha\ \upsilon_3 \right] - h p^*\ \upsilon_i\ \nu_i - \frac{1}{h}\rho^* q_\alpha\ \nu_\alpha\ q_i\ \upsilon_i \right\} d\gamma \\ \forall \upsilon \in H^1(\Pi) \end{cases} \tag{2.1.34}$$

Проінтегруємо частинами доданок із множниками $e_{\alpha\beta}(\upsilon)$ в (2.1.34), будемо мати

$$\begin{aligned} & -\int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + h p^*\ \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right] e_{\alpha\beta}(\upsilon) dx = \\ & = \int\limits_{\Omega(t)} \upsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + h p^*\ \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right] dx \\ & - \int\limits_{\Gamma(t)} \upsilon_\alpha \left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + h p^*\ \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right] \nu_\beta\ d\gamma \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Підставивши цей вираз в (2.1.34) обчислимо, що

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_i) - \rho^* h\ f_i^* \right] \upsilon_i + \upsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + h p^*\ \delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q) \right] \right\} dx = \\ & \int\limits_{\Omega(t)} \left\{ \left[\sigma_{ij}(u,p)\nu_j^{\,+} + \rho u_i \left(\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial t} - uv^+ \right) \right] \Big|_{\mathrm{z}_-}^{\mathrm{z}_+} \right\} \upsilon_i\, dx + \int\limits_{\Gamma(t)} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(q_3)\nu_\alpha - \frac{1}{h}\rho^* q_\alpha\ \nu_\alpha\ q_3 \right] \upsilon_3\, d\gamma \end{aligned}$$

Звідки, внаслідок довільності $\Omega(t)$ остаточно знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_\alpha) - \rho^* h\ f_\alpha^* + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + hp^*\delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q)\right] = \left[e_{\alpha\beta}(u,p)\nu_\beta^{+} + \rho u_\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial t} - uv^{+}\right)\right]\Bigg|_{z_-}^{z_+},\ \ \alpha = 1,2 \tag{2.1.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_3) - \rho^* h\ f_3^* = \left[\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^{+} + \rho u_3\left(\frac{\partial z}{\partial t} - uv^{+}\right)\right]\Bigg|_{z_-}^{z_+},\ в\ \Omega(t) \tag{2.1.37}$$

2.2.1.5 Двовимірні рівняння руху поверхневої води

Доповнимо рівняння (2.1.36) рівнянням нерозривності потоку, будемо мати:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho^* q_\beta) = -\rho(uv^{+})\Big|_{z_-}^{z_+},\ \beta = 1,2 \tag{2.1.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_\alpha) - \rho^* h\ f_\alpha^* + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta + hp^*\delta_{\alpha\beta} - 2\mu e_{\alpha\beta}(q)\right] = \left[e_{\alpha\beta}(u,p)\nu_\beta^{+} + \rho u_\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial t} - uv^{+}\right)\right]\Bigg|_{z_-}^{z_+},\ \ \alpha = 1,2 \tag{2.1.39}$$

Ці три рівняння містять чотири невідомих $\rho^*(\rho), \{q_i\}_{i=1,2}$ *та* p^*, тому нам буде потрібно ще одне рівняння для замикання системи.

Зауважимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}[(\rho^* h)\frac{1}{h}q_\alpha] = \rho^* h\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h}q_\alpha) + \frac{1}{h}q_\alpha\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* h),\ \ \alpha = 1,2 \tag{2.1.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta\right] = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[(\rho^* q_\beta)\frac{1}{h}q_\alpha\right] = \\ = \rho^* q_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\frac{1}{h}q_\alpha) + \frac{1}{h}q_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho^* q_\beta\ ) \tag{2.1.41}$$

З врахуванням (2.1.40) і (2.1.41), у виразі (2.1.39) перші два рівняння перепишуться

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}[\frac{1}{h}\rho^* q_\alpha q_\beta] = \frac{1}{h}\mathrm{q}_\alpha\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* h) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho^* q_\beta)\} \\ +\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h}\mathrm{q}_\alpha) + \frac{1}{h}\mathrm{q}_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\frac{1}{h}\mathrm{q}_\beta)\},\ \ \alpha = 1,2 \tag{2.1.42}$$

Тоді (2.1.39) набуде вигляду

$$\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h}q_\alpha) + \frac{1}{h}q_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\frac{1}{h}q_\alpha)\} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}[-p^* h\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}(q)] - \rho^* h f_\alpha^* = \\ = [\rho(u\nu^+ - \frac{\partial z}{\partial t})(\frac{1}{h}q_\alpha - u_\alpha) + \sigma_{\alpha j}\nu_j^+]\Big|_{z_-}^{z_+}, \alpha = 1,2 \tag{2.1.43}$$

Скористаємося раніше введеними нами позначеннями для u^*, тоді будемо мати

$$\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}\ u_\alpha^* + u_\beta^*\frac{\partial}{\partial x_\beta}u_\beta^*\} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}[-p^* h\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}(hu^*)] - \rho^* h f_\alpha^* = \\ = [\rho(u\nu^+ - \frac{\partial z}{\partial t})(u_\alpha^* - u_\alpha) + \sigma_{\alpha j}(u,p)\nu_j^+]\Big|_{z_-}^{z_+}, \alpha = 1,2 \tag{2.1.44}$$

і рівняння нерозривності

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho^* h u_\alpha^*)=-\rho(\mathrm{u}\nu^+)\big|_{z_-}^{z_+} \tag{2.1.45}$$

Зауважимо, що можемо допустити $u_\alpha^*-u_\alpha\cong 0$, тоді (2.1.45) перепишеться

$$\begin{aligned}&\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}\ u_\alpha^*+u_\beta^*\frac{\partial}{\partial x_\beta}u_\beta^*\}-\frac{\partial}{\partial x_\beta}[-p^* h\delta_{\alpha\beta}+\tau_{\alpha\beta}(hu^*)]-\rho^* h f_\alpha^*=\\&=[\sigma_{\alpha j}(u,p)\nu_j^+]\big|_{z_-}^{z_+},\alpha=1,2\end{aligned} \tag{2.1.46}$$

2.2.1.6 Напівдискретизоване проекційне рівняння для вертикальної складової u_3.

Тоді з (2.1.44) для $\upsilon=(0,\,0,\,\upsilon_3)$ отримаємо

$$0=\int_{D(t)}\left\{\upsilon_3\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_3)-[\rho u_3 u_j+p\,\delta_{3j}-\tau_{3j}(u)]\frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_3-\rho f_3\upsilon_3\right\}dx_1dx_2\,dx_3+$$

$$+\int_{\partial D(t)}[\rho u_3 u_j-\sigma_{3j}(\mu,u)]\nu_j\upsilon_3 dS=\int_{D(t)}\int_{z_-}^{z_+}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\upsilon_3\rho u_3)-\right.$$

$$\left.-[\rho u_3^2+p-\tau_{33}(u)]\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}-\rho\upsilon_3\ f_3\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3+$$

$$\int_{D(t)}\left\{[\rho u_3\,u\cdot\nu^+-\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+]\upsilon_3\Big|_{z_-}^{z_+}\right\}dx+$$

$$+\int_{\Gamma(t)} d\gamma \int_{z_-}^{z_+} \{\upsilon_3(\rho u_3 u\cdot\nu-\sigma_{3j}(u,p))\nu_j\}dx_3 =$$

$$=\int_{\Omega(t)} \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* h u_3^* \upsilon_3^*)-\rho^* h\, f_3^* \upsilon_3^* -[\rho^* h u_3^* u_3^* +\rho^* h]\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\right\}dx +$$

$$+\int_{\Omega(t)} \left\{\rho u_3\upsilon_3\left(u\nu^+ -\frac{\partial z}{\partial t}\right)-\upsilon_3\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+ +2\mu u_3\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\right\}\Bigg|_{z_-}^{z_+} dx +$$

$$\int_{\Gamma(t)} \left\{\upsilon_3^*[\rho^* h u_3^* u^*\nu-\sigma_{3j}^*(u,p)\nu_j]\right\}d\gamma =$$

$$=\int_{\Omega(t)} \left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho^* u_3^* \int_{z_-}^{z_+}\upsilon_3 dx_3]-\rho^* f_3^* \int_{z_-}^{z_+}\upsilon_3 dx_3 -\int_{z_-}^{z_+}(\rho u_3^2+p)\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}dx_3\right\}dx +$$

$$+\int_{\Omega(t)} \left\{[\rho u_3(u\nu^+ -\frac{\partial z}{\partial t})-\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+]\upsilon_3 +2\mu\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}u_3\right\}\Bigg|_{z_-}^{z_+} dx + \qquad (2.1.47)$$

$$+\int_{\Gamma(t)} \left\{[\rho^* h u_3^* u^*\nu-\sigma_{3j}^*(u,p)\nu_j]\int_{z_-}^{z_+}\upsilon_3 dx_3\right\}d\gamma$$

Так як ми маємо мілку воду, то допустимо

$$u_3^* = \int_{z_-}^{z_+} u_3 dx_3 \to 0 \qquad (2.1.48)$$

Тоді

$$\int_{\Gamma(t)} \left\{[\,\rho^* h u_3^* u^*\nu-\sigma_{3j}^*(u,p)\nu_j\,]\int_{z_-}^{z_+}\upsilon_3 dx_3\right\}d\gamma = 0 \qquad (2.1.49)$$

Виберемо функцію $\upsilon_3 = \upsilon_3(x_3) = Ax_3 + B$.

Тоді

$$\frac{d\upsilon_3}{dx_3} = A \qquad (2.1.50)$$

$$\int_{z_-}^{z_+}\upsilon_3 dx_3=\int_{z_-}^{z_+}(Ax_3+B)dx_3=(A\frac{x_3}{2}+Bx_3)\Big|_{z_-}^{z_+}=A\frac{z_+^2-z_-^2}{2}+B(z_+-z_-)=$$
$$=A\frac{(z_+-z_-)(z_++z_-)}{2}+B(z_+-z_-)=Ah\frac{(z_++z_-)}{2}+Bh= \qquad (2.1.51)$$
$$=h(A\frac{(z_++z_-)}{2}+B)=h(Az^*+B)=h\upsilon_3^*$$

Так, враховуючи (2.1.48)-(2.1.51), вираз (2.1.46) перепишеться

$$\int_{\Omega(t)}\left\{-\rho^* hA-\rho^* f_3^* h(A\frac{z_+-z_-}{2}+B)\right\}dx+$$
$$+\int_{\Omega(t)}\left\{[\rho u_3(u\nu^+-\frac{\partial z}{\partial t})-\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+](Ax_3+B)+2\mu Au_3\right\}\Big|_{z_-}^{z_+}dx=0 \qquad (2.1.52)$$

Звідси приходимо до рівняння для усередненого тиску:

$$p^*=-\frac{1}{A}\rho^* f_3^*(A\frac{z_+-z_-}{2}+B)+\frac{1}{Ah}$$
$$\left\{[\rho u_3(u\nu^+-\frac{\partial z}{\partial t})-\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+](Ax_3+B)++2\mu Au_3\right\}\Big|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.53)$$

Спростимо ще доданки у вставці з (2.1.53), будемо мати

$$\left(u\nu^+-\frac{\partial z}{\partial t}\right)\Big|_{z_-}^{z_+}=\left\{u\nu^+-\left|N(z)\right|u\nu^+\right\}=u\nu^+\left\{1-\left|N(z)\right|\right\}\Big|_{z_-}^{z_+}=\left|\nabla z\right|u\nu^+\Big|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.54)$$

та

$$\sigma_{3j}(u,p)\nu_j^+ = -p\nu_3^+ + 2\mu\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_3}\right)\right\}\nu_j^+ =$$
$$-p\nu_3^+ + \mu\left\{\frac{\partial(u\nu^+)}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial \nu^+}\right\} = \sigma_{3i}(u,p) \qquad (2.1.55)$$

Тоді, з врахуванням (2.1.54) і (2.1.55), вираз (2.1.53) перепишеться

$$p^* = -\frac{1}{A}\rho^* f_3^*\left(A\frac{z_+ - z_-}{2}+B\right)+\frac{1}{Ah}$$
$$\left\{[\rho u_3|\nabla z|u\nu^+ - \sigma_{3i}(u,p)](Ax_3+B)++2\mu A u_3\right\}\Big|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.56)$$

Таким чином, підставляючи (2.1.56) у вираз (2.1.46), ми отримаємо замкнену систему диференціальних рівнянь для відшукання невідомих глибини h та усереднених швидкостей $u_\alpha^*(x,t)$, $\alpha = 1,2$.

Зауваження.

1.У випадку $\upsilon_3 = 1$, (тобто $A = 0, B = 1$), будемо мати спрощений вираз для p^*, а саме

$$p^* = -\rho^* f_3^* + \frac{1}{h}\left\{[\rho u_3|\nabla z|u\nu^+ - \sigma_{3i}(u,p)]\right\}\Big|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.57)$$

2.У випадку усереднення по глибині $h = z_+ - z_-$ (тобто, A=1, B=0), отримаємо

$$p^* = -\rho^* f_3^* z^* + \frac{1}{h}\left\{[\rho u_3|\nabla z|u\nu^+ - \sigma_{3i}(u,p)]_z + 2\mu u_3\right\}\Big|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.58)$$

3.Для мілководних процесів $u_3 << u_1, u_3 << u_2$, тоді (7.9)(або (7.8)) буде мати вигляд

$$p^* = -\rho^* f_3^* z^* \tag{2.1.59}$$

або

$$p^* = -\frac{1}{2}\rho^* f_3^* (z_+ + z_-) \tag{2.1.59'}$$

2.2.1.7 Спрощення рівнянь поверхневої води з врахуванням зміни тиску.

Перетворимо окремо доданок зі змінною тиску

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho^* h) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\beta}[\rho^* f_3^* h(z_+ + z_-)] =$$
$$-\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho^* f_3^*)h(z_+ + z_-) + \rho^* f_3^* (\frac{\partial(z_+ h)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(z_- h)}{\partial x_\beta})]. \tag{2.1.60}$$

Припустимо, що рідина нестислива і зовнішні сили f_3^* не залежать від x_β, тоді

$$\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(p^* h) = \frac{1}{2} f_3^* (\frac{\partial(z_+ h)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(z_- h)}{\partial x_\beta}), \beta = 1, 2. \tag{2.1.61}$$

В роботах [12,15,16] запропоновано співвідношення для зв'язку тиску зі швидкістю наступну формулу

$$p = -\frac{1}{\varepsilon} div\ u,\ де\ \varepsilon = const > 0 \tag{2.1.62}$$

Тоді з врахуванням (2.1.61) і (2.1.62), вираз (2.1.46) перепишеться

$$\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}\ u_\alpha^* + u_\beta^* \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\beta^*\} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}[\frac{1}{\varepsilon} div\, u\, \delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}(hu^*)] - \rho^* h f_\alpha^* =$$
$$= [\sigma_{\alpha j}(u, p)\nu_j^+]|_{z_-}^{z_+}, \alpha = 1,2 \qquad (2.1.63)$$

З формули (2.1.45) для нестисливої рідини будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_\alpha^* = (\mathrm{u}\nu^+)|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.64)$$

Підставимо (2.1.64) у формулу (2.1.63), отримаємо

$$\rho^* h\{\frac{\partial}{\partial t}\ u_\alpha^* + u_\beta^* \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\beta^*\} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}[\tau_{\alpha\beta}(hu^*)] - \rho^* h f_\alpha^* =$$
$$= [\frac{1}{2} u\nu^+ + \sigma_{\alpha j}(u, p)\nu_j^+]|_{z_-}^{z_+}, \alpha = 1,2 \qquad (2.1.65)$$

Перейдемо до розходів потоків у (2.1.65), будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h} q_\alpha) + \frac{1}{h} q_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\frac{1}{h} q_\alpha) - \frac{1}{\rho^* h} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tau_{\alpha\beta}(q) =$$
$$f_\alpha^* + \frac{1}{\rho^* h}[\frac{1}{\varepsilon} \mathrm{u}\nu^+ + \sigma_{\alpha j}(\mathrm{u}, \mathrm{p})\nu_j^+]|_{z_-}^{z_+} \qquad (2.1.66)$$

2.2.1.8 Запис рівнянь руху у безрозмірному вигляді.

Приведемо рівняння (2.1.66) до безрозмірного вигляду. Такий запис дає змогу отримати безрозмірні критерії, що характеризують суцільне середовище потоку, наприклад, числа Рейнольдса.

Введемо наступні величини [17]

$$\bar{x}_i = \frac{x_i^*}{L}, \bar{t}_i = \frac{t^*}{L/V_\infty}, \ \bar{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, \ \bar{u}_i = \frac{u_i^*}{V_\infty}, \ \bar{h} = \frac{h^*}{h_\infty},$$
$$\bar{f}_i = \frac{f_i^*}{f_\infty}, \ \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \ де \ i = 1,2, \tag{2.1.67}$$

$L, V_\infty, \ \rho_\infty, \ \mu_\infty, \ h_\infty, \ f_\infty$ - характерні значення просторових розмірів, швидкості, густини, в'язкості, глибини та масових сил суцільного середовища.

Домножимо рівняння (2.1.67) на $\frac{L h_\infty}{V_\infty^2},$ в результаті отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{1}{\bar{h}} \bar{q}_\alpha\right) + \frac{1}{\bar{h}} \bar{q}_\beta \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta}\left(\frac{1}{\bar{h}} \bar{q}_\alpha\right) - \frac{1}{\mathrm{Re}\, \bar{\rho}\, \bar{h}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta}(\bar{\tau}_{\alpha\beta}(\bar{q})) =$$
$$= \bar{f}_\alpha + \frac{1}{\rho^* h}\left[\frac{1}{\varepsilon} u \nu + \sigma_{\alpha j}(u, p) \nu^+{}_j\right]_{z_-}^{z_+} \tag{2.1.68}$$

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = 2\bar{\mu}\, \bar{e}_{\alpha\beta}$$
$$\bar{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \ \alpha, \beta = \overline{1,2}.$$
$$\bar{q}_\alpha = \bar{h}\, \bar{u}_\alpha, \ \alpha = \overline{1,2},$$
$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty L V_\infty}{\mu_\infty}$ - число Рейнольдса.

Надалі, для спрощення запису символ"¯" будемо опускати, а всі попередні величини позначимо символом "~".

Таким чином,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q_\alpha}{h}\right) + \frac{q_\beta}{h} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{q_\alpha}{h}\right) - \frac{1}{\mathrm{Re}\, \rho h} \frac{\partial e_{\alpha\beta}(q)}{\partial x_\beta} =$$
$$= f_\alpha + \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{h}}\left[\frac{1}{\varepsilon} \tilde{u} \nu + \sigma_{\alpha j}(\tilde{u}, \tilde{p}) \nu_j^+\right]_{z_-}^{z_+} \tag{2.1.69}$$

2.2.2 Рівняння стоку поверхневої води в наближенні кінематичної хвилі

Важливе значення серед гідрологічних моделей відіграють моделі схилового стоку (дощовий стік, русловий стік) [16]. Основна властивість цих моделей полягає в тому, що переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сил тяжіння. Рівняння, які описують ці процеси отримуються з загальних рівнянь поверхневої води у гідродинамічному наближенні і носять назву кінематичних рівнянь.

Розглянемо модель стоку поверхневої води в кінематичному наближенні. Покажемо, як отримуються кінематичні рівняння з рівнянь руху поверхневої води у гідродинамічному наближенні.

Враховуючи, що G=$\frac{L}{V_\infty^2}$g (g – сила тяжіння), запишемо систему рівнянь стоку поверхневої води (2.2.18) в наступному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(q_i \dfrac{q_j}{h} \right) + \dfrac{L}{V_\infty^2} gh \dfrac{\partial h}{\partial x_i} - \dfrac{1}{\rho \,\mathrm{Re}} \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial \left(\tau_{ij} h \right)}{\partial x_j} = \\ = gh \dfrac{L}{V_\infty^2} \left(\dfrac{V_\infty^2 |q| q_i}{L \,\mathrm{Re}\, C^2 h^3} - \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial q_j}{\partial x_j} = R. \end{cases} \tag{2.2.24}$$

У рівняннях (2.2.24) з’являються два безрозмірні критерії [67]:
число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_\infty}{\sqrt{gL}} \tag{2.2.25}$$

та параметр

$$K_W = \frac{gL\beta_i h}{V_\infty^2} = \frac{\beta_i h}{Fr^2}, \tag{2.2.26}$$

де $\beta_i = \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}$ – тангенс кута нахилу дна русла до горизонтальної площини (i=1,2).

Тоді рівняння (2.2.24) запишуться наступним чином

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_i}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(q_i \dfrac{q_j}{h} \right) + \dfrac{h}{Fr^2} \dfrac{\partial h}{\partial x_i} - \dfrac{1}{\rho \,\mathrm{Re}} \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial \left(\tau_{ij} h \right)}{\partial x_j} = \\ = K_W \left(\dfrac{V_\infty^2 |q| q_i}{L \,\mathrm{Re}\, C^2 h^3 \beta_i} - 1 \right), \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial q_j}{\partial x_j} = R. \end{cases} \tag{2.2.27}$$

Для великих значень параметра K_W всіма доданками лівої частини (2.2.27) можна знехтувати і вважати, що переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сили тяжіння. Такий рух має вигляд хвиль, які виникають внаслідок зміни в часі складових водного балансу і тому Лайтхілл та Уізем [16] назвали їх кінематичними хвилями. На відміну від динамічних хвиль, які можуть поширюватися як вниз, так і вверх за течією, кінематичні хвилі поширюються тільки вниз за течією. Динамічні хвилі на природніх водозборах та на річних схилах розповсюджуються з набагато більшою швидкістю ніж кінематичні і тому швидко зникають. В результаті чого, більша частина паводкових хвиль рухається зі швидкістю близькою до швидкості кінематичної хвилі. Якщо використовувати для задання сил опору формулу Маннінга з Fr=3/2 або формулу Шезі з Fr=2, тоді швидкості поширення динамічних та кінематичних хвиль будуть однакові. Вказані значення є критичними для застосування рівнянь кінематичної хвилі, оскільки при цих числах Фруда виникає нестійкість потоку [8]. За оцінками Вулхайзера та Ліггета [8], кінематичне наближення дає найкращі результати при $1<Fr<2$ або $K_W>10$.

Отже, спрощені рівняння стоку поверхневої води у вигляді рівнянь кінематичної хвилі набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{\partial q_j}{\partial x_j} = R, \\ q_i = \alpha_i h^m, i = 1,2 \ в \ \Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{2.2.28}$$

де

$$m=3/2,\ \alpha_i = C\frac{\beta_i}{\sqrt{|grad\ \eta|}},\ i=1,\ 2, \tag{2.2.29}$$

C – коефіцієнт Шезі, $\eta(x_1, x_2)$ – функція рельєфу поверхні стоку.

Доповнимо систему рівнянь (2.2.28) наступними крайовими

$$(q \cdot n)\big|_{\Gamma_в} = 0, (q \cdot n)\big|_{\Gamma_р} = \hat{q}, \tag{2.2.30}$$

та початковою умовами

$$h\big|_{t=0} = h_0, \tag{2.2.31}$$

де $\hat{q}$ – відомий витік рідини, $\Gamma_в$ – лінія водорозділу, $\Gamma_р$ – лінія русла (див.рис.5).

Отже, ми отримали математичну модель стоку поверхневої води в кінематичному наближенні, яка описується початково-крайовою задачею (2.2.28) - (2.2.31).

Для регуляризації розв’язку до рівняння (2.2.28) додамо другі похідні по глибині, в результаті отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{2} \left(\dfrac{\partial q_j}{\partial x_j} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \right) = R, \\ q_i = \alpha_i h^m, i = 1,2 \quad в \ \Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{2.2.32}$$

де Re – число Рейнольдса.

Доповнимо систему рівнянь (2.2.32) наступними крайовими

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial h}{\partial n}+q\cdot n\right)\Big|_{\Gamma_в}=0, \\ \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial h}{\partial n}+q\cdot n\right)\Big|_{\Gamma_р}=\hat{q}, \end{cases} \tag{2.2.33}$$

та початковою умовою у вигляді (2.2.31).

Регуляризована задача стоку поверхневої води в кінематичному наближенні набула вигляду (2.2.32) з початковою умовою (2.2.31) та крайовими умовами (2.2.33).

Побудовану задачу будемо розв’язувати методом скінченних елементів по аналогії до задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні. Для побудови варіаційної постановки задачі (2.2.32), (2.2.31), (2.2.33) введемо простір допустимих функцій $V \coloneqq H^1(\Omega)$ та домножимо рівняння (2.2.32) на довільну функцію $\varphi \in V$

$$\int_\Omega \left(h' + \nabla\cdot q - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta h\right)\varphi dx - \int_\Omega R\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in V. \tag{2.2.34}$$

Інтегруючи (2.2.34) частинами та враховуючи граничні умови (2.2.33), отримаємо

$$\int_\Omega \left(h'\varphi - q\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla h\cdot\nabla\varphi\right)dx - \int_\Omega R\varphi dx + \int_{\Gamma_р}\hat{q}\varphi d\Gamma = 0 \quad \forall\varphi\in V. \tag{2.2.35}$$

Введемо

$$(h,\varphi) := \int_{\Omega} h\varphi dx,\ c(h,\varphi) := \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \varphi dx,\ b(\xi;h,\varphi) := \int_{\Omega} \xi^{m-1} h\alpha \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \xi, h, \varphi \in V \quad (2.2.36)$$

та лінійний функціонал

$$\langle l, \varphi \rangle := \int_{\Omega} R\varphi dx - \int_{\Gamma_p} \hat{q}\varphi dx. \quad (2.2.37)$$

Враховуючи позначення (2.2.36) – (2.2.37), варіаційне формулювання задачі (2.2.32), (2.2.31), (2.2.33) набуде вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано } l \in L^2(0,T;V'), h_0 \in V; \\ \textit{знайти } h \in V \textit{ таку, що} \\ (h'(t),\varphi) + b(h(t);h(t),\varphi) + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} c(h(t),\varphi) = \langle l(t),\varphi \rangle \qquad \forall t \in (0,T], \\ (h(0) - h_0, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in V. \end{cases} \quad (2.2.38)$$

Побудована варіаційна постановка задачі стоку поверхневої води в кінематичному наближенні (2.2.38) дає можливість знаходити глибину стоку в довільний момент часу.

2.3 Математичні моделі процесів фільтрації рідини в грунті

Одним з важливих етапів руху вологи є процес фільтрації води в грунті. Цей процес є важливим для вивчення режимів функціонування гідроспоруд, а також управління водними ресурсами.

Закони фільтрації води можуть бути розповсюджені на рух через пористі середовища. Дослідження такого руху має важливі практичні застосування такі як: сушка та зволоження деревини і тканини, гідроізоляція, нафтодобування та інші. Тому фільтрація носить загальний

характер, що підкреслює важливість дослідження її закономірностей пов’язаних з властивостями середовища фільтрації та речовини що в ньому фільтрується.

Моделі для опису руху води в різноманітних шарах грунту відрізняються одна від одної в міру різноманітності, забезпеченості даними, можливостями перевірки на адекватність в реальних умовах. Для спрощення опису руху води проводиться вертикальна декомпозиція задачі – весь простір на виділеній території розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв’язки з’єднуються за допомогою граничних умов.

В приземному шарі відбувається русловий потік, потік у річному руслі при розливі, схиловий стік, потік у озерах і водоймах, а також накопичення і танення снігу. В насиченій зоні відбуваються процеси фільтрації води [16], капілярного підйому, випаровування та вбирання води корінням рослин, рух грунтової води вздовж водопідпору, взаємодія з русловим стоком, з водою в насиченій зоні. В напірному шарі рух відбувається між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія з русловим стоком [17] і вищими або нижчими водоносними шарами при наявності проникливого водопідпору.

Для виведення рівнянь, що описують процес фільтрації відомі два підходи гідравлічний та гідродинамічний.

2.3.1 Опис різних підходів до моделювання руху води в грунті

Гідравлічний підхід до виведення рівнянь полягає в тому що виділяється в безнапірному потоці нескінченно малий елемент, для якого записується балансове рівняння притоку та відтоку води. Висота грані

виділеного об’єму (глубини потоку) співпадає з аплікатою вільної поверхні і діючим напором. Допускається, що всі лінії току, що пересікаються з однією і тією ж вертикалю потоку, близькі до паралельних кривих. За рахунок інфільтрації з поверхні землі у виділеному об’ємі проходить приріст маси рідини, який викликає підвищення вільної поверхні зі збільшенням глубини потоку. Так були отримані рівняння, які носять назву рівнянь Ж.Бусінеска[18] або рівнянь планової фільтрації. Загальним для випадків планової теорії фільтрації є нехтування вертикальною складовою швидкості фільтрації, яка може бути знайдена з рівняння нерозривності потоку у вигляді лінійної залежності від z (рідина - нестислива, середовище- недеформівне).

Гідродинамічний підхід полягає в тому, що припускаємо фільтраційний потік підпорядковується загальному закону руху суцільного середовища. Для цього середовища записуються закони збереження маси та енергії і отримуються рівняння що описують рух середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями теорії фільтрації. Основні рівняння теорії фільтрації не утворюють замкнуту систему рівнянь тому їх як правило доповнюють рівнянням стану рідини.

2.3.2 Вивід основних рівнянь фільтрації в гідродинамічному підході

Розглянемо рівняння отримані при застосуванні гідродинамічного підходу та використаємо їх для побудови замкнутої системи рівнянь задачі фільтрації.

Записавши закон збереження енергії отримуємо рівняння

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon}+\nabla h=\mathbf{0} \qquad (2.3.1)$$

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \tag{2.3.2}$$

в яке входить невідомі вектор-функція швидкості $\boldsymbol{\upsilon}$, визначена в області фільтрації та функція п'єзометричного напору h (2.3.2), визначена в області фільтрації та залежна від густини рідини ρ, тиску p. В цьому рівнянні k - швидкість фільтрації (величина залежна від властивостей середовища фільтрації, визначається експериментальним шляхом), g - прискорення вільного падіння.

Зі закону збереження маси отримуємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho \boldsymbol{\upsilon}) = 0 \tag{2.3.3}$$

в котре входить вектор-функція швидкості $\boldsymbol{\upsilon}$ визначена в області фільтрації, функція густини рідини ρ, функція пористості середовища фільтрації n.

Рівняння (2.3.1)-(2.3.3) не утворюють замкнуту систему рівнянь тому додамо рівняння стану

$$\rho = \rho(p) \tag{2.3.4}$$

Використаємо рівняння стану у вигляді

$$\rho = \rho_0 e^{\beta\left(p - p_0\right)}, \tag{2.3.5}$$

в якому ρ_0, p_0 певні початкові значення густини та тиску відповідно.

Виразимо залежність тиску та п'єзометричного напору від густини рідини

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), \tag{2.3.6}$$

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right) + z \tag{2.3.7}$$

Виключивши з системи рівнянь (2.3.1)-(2.3.4) невідомі p та h та використавши (2.3.6),(2.3.7), зведемо (2.3.1)-(2.3.4) до замкнутої системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon} + f(\rho)\nabla\rho + \overrightarrow{i_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho\boldsymbol{\upsilon}) = 0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g}\ln(\frac{\rho}{\rho_0})\right)$$

Отримана система рівнянь (2.3.8) характерна тим, що в ній враховується змінна густина рідини, що фільтрується. Така постановка є важлива для стисливих рідин.

Розглянемо систему рівнянь (2.3.8) в області

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon} + f(\rho)\nabla\rho + \overrightarrow{i_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho\upsilon) = 0 \end{cases} \quad в\ \Omega\times[0,T) \tag{2.3.9}$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g}\ln(\frac{\rho}{\rho_0})\right)$$

Початкові умови приймемо у вигляді

$$\begin{cases} \boldsymbol{\upsilon}|_{t=0} = \boldsymbol{\upsilon}^* \\ \rho|_{t=0} = \rho^* \end{cases} в\ \Omega \tag{2.3.10}$$

Крайову умову приймемо у вигляді

$$\rho\boldsymbol{\upsilon}.\mathbf{n} = q^*\ на\ \Gamma_1 \subset \partial\Omega,\ \ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \tag{2.3.11}$$

2.3.3 Опис моделі планової лінійної фільтрації в насиченій зоні грунту

Розглянемо рівняння, що описує процес фільтрації, отримане при застосуванні гідравлічного підходу. Це рівняння називають рівнянням Бусинеска[16,18]:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(K\dfrac{\partial H}{\partial y}\right) + E \quad в \quad \Omega\times(0;T], \\ -K\nabla H\cdot\vec{n} = \overset{*}{q} \quad на \quad \Gamma = \partial\Omega, \\ H\big|_{t=0} = H_0 \quad в \ \Omega, \end{cases} \tag{2.3.12}$$

де

$$K = K(x,y,t) = \begin{cases} k_s\left(\eta(x,y) - \eta_0(x,y)\right), & H(x,y,t) \ge \eta(x,y); \\ k_s\left(H(x,y,t) - \eta_0(x,y)\right), & \eta_0(x,y) < H(x,y,t) < \eta(x,y); \\ 0, & H(x,y,t) \le \eta_0(x,y). \end{cases} \tag{2.3.13}$$

$H = H(x,y,)$ —рівень грунтової води (для напірного руху - п’єзометричний напір),

$\mu = \mu(x,y)$ —коефіцієнт питомої водовіддачі,

$K = K(x,y,t)$ —коефіцієнт рівнепровідності для безнапірного руху або п’єзопровідності для напірного руху,

$k_s = k_s(x,y)$ —коефіцієнт фільтрації, залежить від типу грунту,

$E = E(x,y,t)$ —відома функція джерел притоку води,

$\eta = \eta(x,y)$, $\eta_0 = \eta_0(x,y)$ —відмітки поверхні землі та поверхні водоупору (див. рис. 2.4).

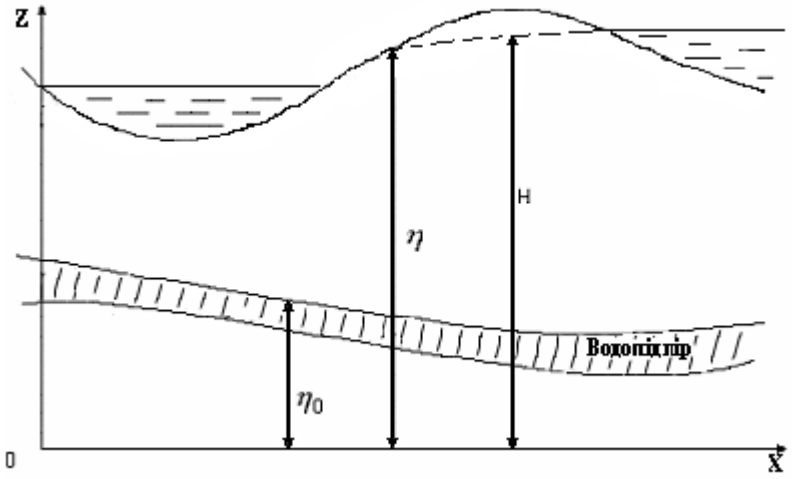


Рис 2.4. Геометрична структура грунтового шару.

Для коефіцієнтів задачі виконуються наступні включення:

$$\begin{cases} \mu, \eta, \eta_0, k_s \in L^{\infty}(\Omega); \ H_0 \in L^2(\Omega); \\ E \in L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \end{cases}$$

Невідомою величиною в (2.3.13) виступає функція $H = H(x,y,t)$.
Рівняння задачі (2.3.12) запишемо так:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_s\left(\Psi - \eta_0(x,y)\right)\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_s\left(\Psi - \eta_0(x,y)\right)\frac{\partial H}{\partial y}\right) + E, \qquad (2.3.14)$$

де

$$\Psi = \begin{cases} \eta(x,y), & H(x,y,t) \geq \eta(x,y); \\ H(x,y,t), & \eta_0(x,y) < H(x,y,t) < \eta(x,y); \\ \eta_0(x,y), & H(x,y,t) \leq \eta_0(x,y). \end{cases}$$

Якщо $\Psi = \eta(x,y)$ або $\Psi = \eta_0(x,y)$, то рівняння (2.3.14) є параболічного типу. Коли $\Psi = H(x,y,t)$, то рівняння стає нелінійним відносно функції Н.

2.4 Математична модель сумісного руху поверхневих і грунтових потоків

Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. В загальному дослідження цілостності такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, що бере участь в кругообігу води. Найвирогіднішим елементом частини території може виступати *територія водозбору* (рис.2.5), яка характеризується подібними кліматичними умовами і знаходиться під впливом подібних факторів, що впливають на рух вологи.

Для спрощення опису руху водних потоків на водозборі проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – вся область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху, тощо.

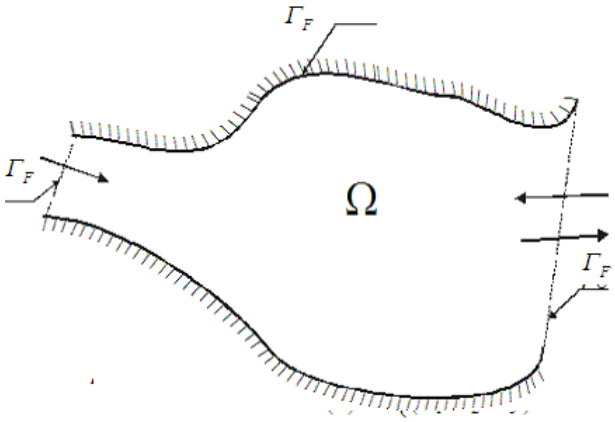


Рис.2.5. Двомірна проекція території водозбору на площину X_1OX_2.

В приземному шарі атмосфери проходять процеси випаровування, випадання дощу, снігу, перехоплювання опадів рослинністю, а також перенесення вологи повітряними потоками. На поверхні землі проходять русловий стік, стік в пойму ріки при розливі, схиловий стік, рух води в озерах та водоймах, а також накопичення снігу і його танення. В

ненасиченій зоні проходять процеси фільтрації води, капілярного підйому і випаровування, вбирання води коренями рослин. У водоносних напірних горизонтах рух води проходить між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія між потоком і вище та нижче розташованими водоносними шарами при наявності проникливого водопідпору. В кожному шарі для опису руху вологи використовуються моделі різної розмірності і їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов.

Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий поверхневий шар $F(t) \in R^3$ (Рис.2.5) такої структури

$$\Omega_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x) < x_3 < \nu(x,t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}.$$

Позначимо проекції його нижньої

$$\Omega(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \;\middle|\; x_3 = \eta(x), \ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

та верхньої

$$\Lambda_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \;\middle|\; x_3 = \nu(x,t) \ \ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

основ на площину $0x_1x_2$. Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x) < x_3 < \nu(x,t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

будемо називати бічною поверхнею шару $F(t)$.

Аналогічно позначимо частину рідини, яка рухається в грунті, так

$$\Omega_P(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \mathrm{h}(x) < x_3 < \eta(x), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}.$$

проекція нижньої частини (поверхня водопідпору) запишеться

$$\Lambda_P(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \;\middle|\; x_3 = h(x),\ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

Тоді, шар грунтової води

$$\Gamma_P(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3,\quad \mathrm{h}(x) < x_3 < \eta(x) \quad \forall x \in \Gamma_P(t) \right\}$$

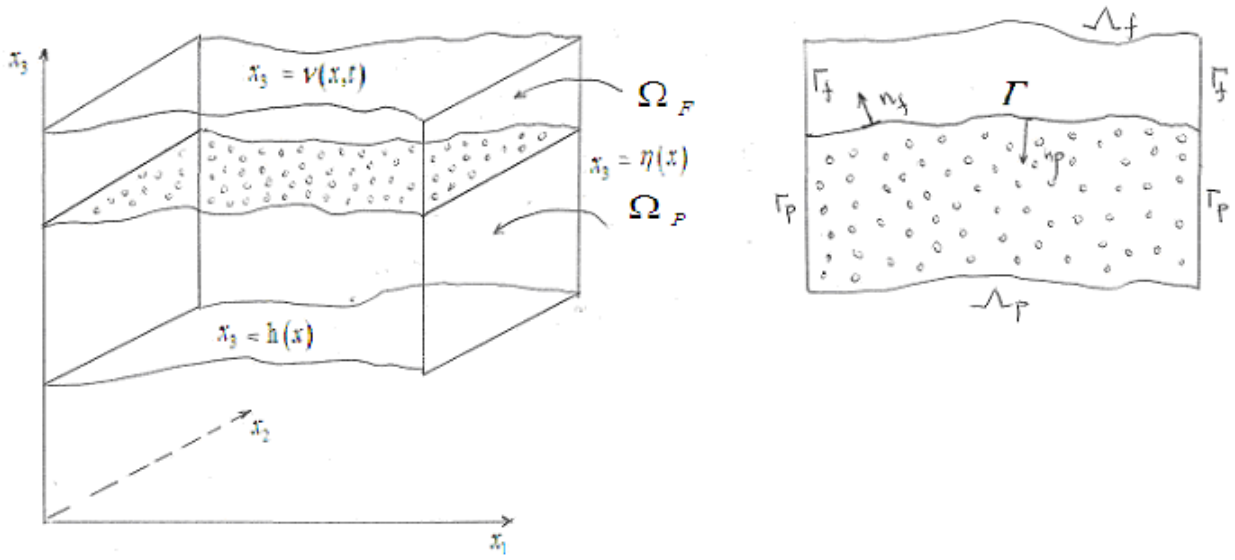


Рис. 2.6. Загальне зображення моделі потоків та їх поперечний розріз.

2.4.1 Початково-крайова задача взаємодії водних потоків.

Сформулюємо початково-крайову задачу руху поверхневих і грунтоаих потоків по поверхні водозбору з врахуванням крайових та початкових умов.

Знайти невідомі величини $\{u, p, \varphi\}$ *такі, що задовольняють наступну систему рівнянь:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\, u_i u_k\right) - \rho\, f_i - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{2.4.1}$$

$$\sigma_{ij} = -p_F \delta_{ij} + \tau_{ij},$$

$$\tau_{ij} = 2\mu\, e_{ij}, i, j = 1,2,3$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\left(\rho\, u_k\right)}{\partial x_k} = 0, \qquad в \quad \Omega_F \times (0, T], \tag{2.4.2}$$

$$m\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + \varepsilon \quad в \quad \Omega_P \times (0; T], \tag{2.4.3}$$

де

$\{u_i(x,t)\}^3_{i=1}$ та $p_F = p_F(x,t)$ - шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно;

$F = \{g\ \ f_i(x)\}_{i=1}^3$ - масові сили;

ρ=ρ(*x*,*t*)>0 –густина маси води потоку;

μ=μ(*x*)>0 – коефіцієнт в'язкості;

$\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$ –тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t;

δ_{ij} – символ Кронекера;

$k = k(x,t)$ - коефіцієнт фільтрації;

$m = m(x,t)$ - коефіцієнт питомої водовіддачі;

$\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ - відома функція джерел притоку води;

$$\varphi = x_3 + \frac{p_p}{\rho g} \text{ - п'єзометричний напір;} \tag{2.4.4}$$

$q = -k\nabla\varphi$ - потік (розхід потоку); (2.4.5)

$\upsilon = \upsilon(x,t)$ - вектор швидкості рідини в грунті;

$\upsilon = \frac{q}{\omega}$, ω- об'ємна пористість;

$\overrightarrow{n_F} = -\overrightarrow{n_P}$ - вектори нормалі до границі області Ω_F та Ω_P відповідно;

$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_F} \cup \overline{\Omega_P}, \Omega_F \cap \Omega_P = \{\varnothing\}, \overline{\Omega_F} \cap \overline{\Omega_P} = \Gamma,$

$\partial\Omega_F = \Gamma_F \cup \Lambda_F \cup \Gamma; \partial\Omega_P = \Gamma_P \cup \Lambda_P \cup \Gamma.$

Крайові умови:

$$\vec{u}_i = 0 \text{ на } \Gamma_F, i = 1, 2,3, \tag{2.4.6}$$

$$\sigma_{n\tau} = \hat{\sigma}, \text{ на } \Lambda_F, \tag{2.4.7}$$

$$u_3 + R = \frac{\partial \nu}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial \nu}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial \nu}{\partial x_2} \text{ в } \Omega_F \times (0, T], \tag{2.4.8}$$

де R - швидкість падіння капель дощу,

u_1^0, u_2^0 - горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні $\nu(x.t)$ (Λ_F);

$$\upsilon \cdot \overrightarrow{n_P} = \hat{\upsilon} \quad на \quad \Gamma_P; \tag{2.4.9}$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0 \quad на \quad \Lambda_P, \tag{2.4.10}$$

$$\upsilon_3 = -I \quad на \quad \Lambda_P, \tag{2.4.11}$$

де I – відома функція, яка описує швидкість потоку рідини через поверхню Λ_P.

та початкові умови:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0, \\ p|_{t=0} &= p_0, \quad \text{в } \Omega. \\ \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

2.5 Висновки

У даному розділі побудовані уточнені постановки задач стоку води з поверхні водозбору, які отримуються виходячи з загальних рівнянь руху суцільного середовища. Рівняння динаміки суцільного середовища приведені до безрозмірного вигляду з метою отримання критеріїй подібності, таких як, числа Рейнольдса. З метою спрощення загальних рівнянь руху суцільного середовища проведено їх усереднення за товщиною шару, в результаті чого в системі рівнянь були введені середні значення величин (значення потоків) та виключено тиск.

Розглядаються різні підходи до побудови системи рівнянь руху грунтової води. Показано, що у випадках врахування швидкості фільтрації, необхідно використовувати загальні закони збереження енергії та стану рідини. Розглянуто умови спрощення отриманих систем рівнянь, показано їх використання для різних початкових і граничних умов. Виведено рівняння для опису руху грунтової води в гідродинамічному і гідравлічному підходах. Сформульовані початково-крайові та варіаційні постановки задач. Показано врахування різних початкових і крайових умов.

Для спільного руху поверхневих і грунтових потоків, вибрані рівгяння руху поверхневої води в гідродинамічному наближенні і рівняння Бусинеска. Виведені умови спряження цих двох потоків. Наведено варіаційне формулювання задачі спільного руху потоків з врахуванням крайових, контактних і початкових умов.

РОЗДІЛ ІІІ. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ МСЕ.

В обчислювальній практиці найбільшого розповсюдження набули проекційно-сіткові методи розв'язування крайових та початково-крайових задач з кусково-визначеними поліноміальними просторами апроксимацій. Побудова цих методів передбачає покриття області визначення шуканого розв'язку деякою сіткою скінченних елементів. Використання сучасних засобів теорії апроксимації і концепції узагальнених функцій робить такі методи в багатьох випадках математично обґрунтованими. На даний час сформувалась тенденція до використання апроксимацій методу скінченних елементів для дискретизації варіаційних задач за просторовими змінними та проекційних апроксимацій типу скінченних різниць для дискретизації в часі.

Даний розділ присвячений розв'язанню побудованих варіаційних задач стоку поверхневої води з використанням проекційно-сіткової схеми МСЕ. Будуючи чисельну схему розв'язування варіаційних задач, скористаємось проекційним методом для дискретизації задачі в часі [12, 100, 125, 168, 182, 189] та процедурою методу Гальоркіна [49, 50, 64, 81, 83, 87, 94, 96, 97, 118, 125, 138, 164, 200].

При великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їх градієнти різко змінюються, в результаті чого розв'язок задачі стоку поверхневої води втрачає свою стійкість та з'являються "паразитичні" осциляції. Для покращення розв'язку запропоновано стабілізаційну схему МСЕ. Побудова стабілізаційної схеми базується на основі методу найменших квадратів [63] та проводиться вже для дискретизованої варіаційної задачі в часі, яка підміняється збуреною задачею.

3.1 Задача поверхневого стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні

Для дискретизації варіаційної задачі (2.2.23) в часі можливе застосування різних методів [4, 38, 56, 77]. В даній праці скористаємось проекційним методом, за яким отримуємо однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі [125]. Дискретизуючи задачу за просторовими змінними, будемо використовувати кусково-лінійні апроксимації на трикутних елементах для потоків зі сталою глибиною.

Для покращення розв'язку задачі стоку поверхневої води при великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) побудуємо стабілізаційну схему МСЕ та проведемо оцінку стабілізаційного множника для рівнянь Нав'є-Стокса.

3.1.1 Дискретизація задачі в часі

Проведемо дискретизацію варіаційної задачі (2.2.23) в часі. Розіб'ємо відрізок часу $[0,T]$ на N_T+1 однакові частини $[t_k, t_{k+1}]$ довжиною $\Delta t=t_{k+1}-t_k$

$$h_{\Delta t}(x,t)=h^k(x)\{1-\omega(t)\}+h^{k+1}(x)\omega(t), \tag{3.1.1}$$

$$q_{\Delta t}(x,t)=q^k(x)\{1-\omega(t)\}+q^{k+1}(x)\omega(t), \tag{3.1.2}$$

де $\omega(t)=\dfrac{t-t_k}{\Delta t}$, $t\in[t_k, t_{k+1}]$, $k=0,\ldots,N_T$, $h^k\in\Phi$, $q^k\in Q_0$ - відомі глибина та потік у момент часу t_k, $h^{k+1}\in\Phi$, $q^{k+1}\in Q_0$ – невідомі глибина та потік у момент часу t_{k+1}. Для функціоналу $s(t)$ з (2.2.23) будемо використовувати апроксимацію вигляду

$$s_{\Delta t}(t) = s_{k+1/2} = s(t_k + \Delta t/2) \qquad \forall t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Введемо швидкість зміни глибини в часі $H^{k+\frac{1}{2}} = \frac{h^{k+1} - h^k}{\Delta t}, H^{k+\frac{1}{2}} \in \Phi$ та швидкість зміни потоку в часі $U^{k+\frac{1}{2}} = \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}, U^{k+\frac{1}{2}} \in Q_0$, тоді вирази (3.1.1) та (3.1.2) для апроксимацій глибини та потоку набудуть вигляду

$$h(x,t) \approx h_{\Delta t}(x,t) = h^k(x) + H^{k+\frac{1}{2}}(x)\Delta t\, \omega(t), \tag{3.1.3}$$

$$q(x,t) \approx q_{\Delta t}(x,t) = q^k(x) + U^{k+\frac{1}{2}}(x)\Delta t\, \omega(t), \tag{3.1.4}$$
$$\forall x \in \Omega, \forall t \in [t_k, t_{k+1}],\ k=0,\ldots,N_T.$$

Підставляємо апроксимації для глибини та потоку в (2.2.23), нехтуючи доданками порядку $(\Delta t)^2$ та використовуємо апроксимаційну схему дискретизації задачі в часі [111, стор.265, схема 5.1], [168]. В результаті інтеграли з похідними по часу набудуть вигляду

$$\int_\Omega q'(t)\cdot p dx = \int_\Omega U^{k+\frac{1}{2}}\cdot p dx = a(U^{k+\frac{1}{2}}, p),\ \int_\Omega h'(t)\cdot \theta dx = \int_\Omega H^{k+\frac{1}{2}}\cdot \theta dx = a(H^{k+\frac{1}{2}}, \theta). \tag{3.1.5}$$

Інтеграли від конвективних доданків після дискретизації запишуться наступним чином

$$\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((q_iq_j)/h\right)\right)p_i dx=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((q_i^k+U_i^{k+\frac12}\Delta t\omega(t))(q_j^k+U_j^{k+\frac12}\Delta t\omega(t))/h^k\right)\right)p_i dx=$$

$$=\int_\Omega\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((q_i^kq_j^k)/h^k\right)p_i dx+\Delta t\omega(t)\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((q_i^kU_j^{k+\frac12})/h^k\right)p_i dx+\right.$$

$$\left.+\int_\Omega\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((q_j^kU_i^{k+\frac12})/h^k\right)p_i dx\right)=b\left(q^k/h^k;q^k,p\right)+$$

$$+\Delta t\omega(t)\left(b(q^k/h^k;U^{k+\frac12},p)+b(U^{k+\frac12};q^k/h^k,p)\right),\ i=1,2. \qquad (3.1.6)$$

Інтеграли від в'язких доданків приймуть вигляд

$$\frac{1}{\mathrm{Re}\rho}\int_\Omega h\sum_{j=1}^{2}\tau_{ij}(q/h)\frac{\partial p_i}{\partial x_j}dx=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}\rho}\int_\Omega(h^k+H^{k+\frac12}\Delta t\omega(t))\sum_{j=1}^{2}\tau_{ij}\left((q^k+U^{k+\frac12}\Delta t\omega(t))/h^k\right)\frac{\partial p_i}{\partial x_j}dx=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}\rho}\int_\Omega(h^k+H^{k+\frac12}\Delta t\omega(t))\sum_{j=1}^{2}\left(\tau_{ij}\left(q^k/h^k\right)+\Delta t\omega(t)\tau_{ij}(U^{k+\frac12}/h^k)\right)\frac{\partial p_i}{\partial x_j}dx=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c\left(h^k;q^k/h^k,p\right)+\Delta t\omega(t)\left(c(H^{k+\frac12};q^k/h^k,p)+c(h^k;U^{k+\frac12}/h^k,p)\right)\right],\ i=1,2.$$

(3.1.7)

Апроксимуємо інтеграли з невідомою глибиною

$$\frac12\int_\Omega Gh^2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}dx=\frac12\int_\Omega G\left(h^k+H^{k+\frac12}\Delta t\omega(t)\right)^2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}dx,\ i=1,2. \qquad (3.1.8)$$

Квадратичну функцію апроксимуємо наступним чином

$$\left(h^k + H^{k+\frac{1}{2}}\Delta t\omega(t)\right)^2 = \left(h^k\right)^2 + 2H^{k+\frac{1}{2}}h^k\Delta t\omega(t) + O\left((\Delta t)^2\right). \qquad (3.1.9)$$

Нехтуючи в (3.1.9) доданками порядку $O((\Delta t)^2)$, інтеграл (3.1.8) запишеться у вигляді

$$\frac{1}{2}\int_\Omega Gh^2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}dx = \frac{1}{2}\int_\Omega G\left(h^k\right)^2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}dx + \Delta t\omega(t)\int_\Omega GH^{k+\frac{1}{2}}h^k\frac{\partial p_i}{\partial x_i}dx =$$

$$= d\left(h^k; h^k, p\right) + 2\Delta t\omega(t)d\left(H^{k+\frac{1}{2}}; h^k, p\right),\ i = 1, 2. \qquad (3.1.10)$$

Доданки, які містять рельєф дна, запишуться

$$\int_\Omega G\eta\frac{\partial\left(hp_i\right)}{\partial x_i}dx = \int_\Omega G\eta\frac{\partial((h^k + H^{k+\frac{1}{2}}\Delta t\omega(t))\,p_i)}{\partial x_i}dx =$$

$$= l\left(\eta; h^k, p\right) + \Delta t\omega(t)l(\eta; H^{k+\frac{1}{2}}, p),\ i = 1, 2. \qquad (3.1.11)$$

Дотичні напруження на дні потоку вважаємо відомими з попереднього кроку

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\Omega\frac{g|q|q_i p_i}{C^2h^2}dx = \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\Omega\frac{g\left|q^k\right|q_i^k p_i}{C^2\left(h^k\right)^2}dx = \frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{R}\left(h^k; q^k, p\right),\ i = 1, 2. \qquad (3.1.12)$$

Інтеграли з рівняння для глибини перепишуться у вигляді

$$\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial q_j}{\partial x_j}\theta dx=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial(q_j^k+U_j^{k+\frac{1}{2}}\Delta t\omega(t))}{\partial x_j}\theta dx=m\left(q^k,\theta\right)+\Delta t\omega(t)m(U^{k+\frac{1}{2}},\theta).$$

(3.1.13)

Значення для відомого потоку на межі русла вибираємо у середній точці проміжку по часу $[t_k,\ t_{k+1}]$, тоді відомі функції $F(\hat{q})$ та $V(\hat{q})$ на заданому проміжку апроксимуються наступним чином

$$F(\hat{q}(t_{k+1/2}))=F_{k+1/2},\ V(\hat{q}(t_{k+1/2}))=V_{k+1/2}.$$

Враховуючи апроксимації інтегралів (3.1.5)-(3.1.13), з системи рівнянь (2.2.23) отримуємо лінеаризовані рівняння

$$\begin{cases} a(U^{k+\frac{1}{2}},p)+\Delta t\omega(t)\Big[b(q^k/h^k;U^{k+\frac{1}{2}},p)+b(U^{k+\frac{1}{2}};q^k/h^k,p)-2d(H^{k+\frac{1}{2}};h^k,p)- \\ -l(\eta;H^{k+\frac{1}{2}},p)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(c(H^{k+\frac{1}{2}};q^k/h^k,p)+c(h^k;U^{k+\frac{1}{2}}/h^k,p)\right)\Big]=d\left(h^k;h^k,p\right)+ \\ +l\left(\eta;h^k,p\right)-b\left(q^k/h^k;q^k,p\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c\left(h^k;q^k/h^k,p\right)-\bar{R}\left(h^k;q^k,p\right)\right]-a(F_{k+1/2},p), \\ a(H^{k+\frac{1}{2}},\theta)+\Delta t\omega(t)m(U^{k+\frac{1}{2}},\theta)=<s_{k+1/2},\theta>-m(q^k,\theta)-a(V_{k+1/2},\theta). \end{cases} \quad (3.1.14)$$

У просторі $L^2((t_j,t_{j+1}))$ виберемо функцію ξ(t) таку, що $\int_{t_j}^{t_{j+1}}\xi(\tau)d\tau\neq 0$.

Домножимо систему рівнянь (3.1.14) на $\xi(t)$ і проінтегруємо по часу від t_k до t_{k+1} та будемо вимагати, щоб рівняння були ортогональні цій функції

відносно скалярного добутку простору $L^2((t_k,t_{k+1}))$, тоді дискретизована в часі система рівнянь прийме вигляд

$$\begin{cases} a(U^{k+\frac{1}{2}},p)+\lambda\Delta t\left[b(q^k/h^k;U^{k+\frac{1}{2}},p)+b(U^{k+\frac{1}{2}};q^k/h^k,p)-2d(H^{k+\frac{1}{2}},h^k,p)-l(\eta,H^{k+\frac{1}{2}},p)+\right. \\ \left.+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(c(H^{k+\frac{1}{2}};q^k/h^k,p)+c(h^k;U^{k+\frac{1}{2}}/h^k,p)\right)\right]=d\left(h^k;h^k,p\right)+l\left(\eta;h^k,p\right)-b\left(q^k/h^k;q^k,p\right)- \\ -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c\left(h^k;q^k/h^k,p\right)-\bar{R}\left(h^k;q^k,p\right)\right]-a(F_{k+1/2},p), \\ a(H^{k+\frac{1}{2}},\theta)+\lambda\Delta t m(U^{k+\frac{1}{2}},\theta)=<s_{k+1/2},\theta>-m(q^k,\theta)-a(V_{k+1/2},\theta). \end{cases}$$

де

$$\lambda=\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\omega(t)\xi(t)\,dt\right)/\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\xi(t)\,dt\right).$$

Отримана система рівнянь дає змогу визначити невідомі швидкості зміни глибини та розходу в часі на проміжку $[t_k,\ t_{k+1}]$. Запишемо рекурентну схему для визначення невідомої глибини h^{k+1} та розходу q^{k+1} в момент часу t_{k+1}

$$
\begin{cases}
\textit{задано} \quad q^0 \in Q_0, h^0 \in \Phi \textit{ та } \lambda \in (0,1]; \\
\textit{знайти } U^{k+\frac{1}{2}} \in Q_0, H^{k+\frac{1}{2}} \in \Phi \textit{ такі, що} \\
a(U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \lambda\Delta t\Bigg[b(q^k / h^k; U^{k+\frac{1}{2}}, p) + b(U^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) - 2d(H^{k+\frac{1}{2}}; h^k, p) - \\
- l(\eta; H^{k+\frac{1}{2}}, p) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(c(H^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) + c(h^k; U^{k+\frac{1}{2}} / h^k, p) \right)\Bigg] = d\left(h^k; h^k, p\right) + \\
+ l\left(\eta; h^k, p\right) - b\left(q^k / h^k; q^k, p\right) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c\left(h^k; q^k / h^k, p\right) - \overline{R}\left(h^k; q^k, p\right)\right] - a(F_{k+1/2}, p), \\
a(H^{k+\frac{1}{2}}, \theta) + \lambda\Delta t m(U^{k+\frac{1}{2}}, \theta) = < s_{k+1/2}, \theta > - m(q^k, \theta) - a(V_{k+1/2}, \theta), \\
q^{k+1} = q^k + \Delta t U^{k+\frac{1}{2}}, h^{k+1} = h^k + \Delta t H^{k+\frac{1}{2}}, k = 0, ..., N_T .
\end{cases}
\tag{3.1.15}
$$

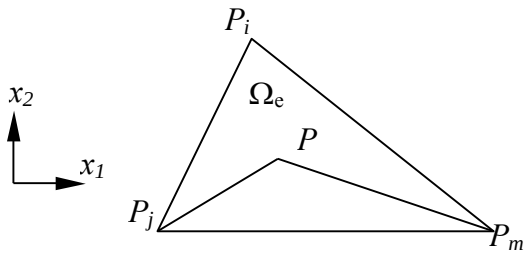
При $\lambda=1/2$ отримаємо однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі, яка носить назву Кранка-Ніколсона [1, 125].

Система рівнянь (3.1.15) дозволяє визначити глибину h та потік q в області Ω у довільний момент часу, якщо відомі глибина та потік у початковий момент часу.

3.1.2 Дискретизація задачі за просторовими змінними

Для завершення побудови чисельної схеми розв’язування варіаційної задачі стоку поверхневої води скористаємось процедурою методу Гальоркіна.

Припустимо, що двовимірна область Ω поділена на Ne скінченних елементів Ω_e трикутної форми з вершинами P_1, P_2, P_3, Np – загальна кількість розрахункових вузлів.



Введемо на трикутнику Ω_e функцію $L_i(x_1, x_2)=S_{Pjm}/ S_{ijm}$, де S_{Pjm}, S_{ijm} – площі трикутників PP_jP_m та $P_iP_jP_m$ [4, 12, 49, 50, 94, 96, 117]. Використовуючи відомі співвідношення для обчислення площі через координати його вершин, знайдемо

$$L_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\Delta}(a_i + b_i x_1 + c_i x_2),$$

де $a_i = x_1^j x_2^m - x_2^j x_1^m, b_i = x_2^j - x_2^m, c_i = x_1^m - x_1^j, \Delta = 2S_{ijm}$.

Побудуємо на об’єднанні трикутників Ω_e кусково-лінійні базові функції

$$\varphi_i(x_1, x_2) = \begin{cases} L_i(x_1, x_2), P_i \in \Omega_e, \\ 0 \quad , P_i \notin \Omega_e. \end{cases}$$

Для відшукання глибини введемо базисні функції вигляду

$$\psi_e(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, P \in \Omega_e, \\ 0, P \notin \Omega_e. \end{cases}$$

Розкладемо за базисними функціями

$$U^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{Np} U_l^{k+\frac{1}{2}} \varphi_l \,,\; q^k = \sum_{l=1}^{Np} q_l^k \varphi_l \,,\; H^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{Ne} H_i^{k+\frac{1}{2}} \psi_i \,,\; h^k = \sum_{i=1}^{Ne} h_i^k \psi_i$$

$$F^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{Np} F_l^k \varphi_l \, , \; V^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{Np} V_l^k \varphi_l \, .$$

На межі русла розхід води та швидкість зміни розходу розкладаємо через нормальні і тангенціальні складові для врахування граничних умов

$$U^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{Np} \left(U_{Nl}^{k+\frac{1}{2}} + U_{\zeta l}^{k+\frac{1}{2}} \right) \varphi_l , q^k = \sum_{l=1}^{Np} \left(q_{Nl}^k + q_{\zeta l}^k \right) \varphi_l \, .$$

Оскільки тангенціальні складові потоку на $\Gamma_p = 0$ рівні нулю, то наближення приймуть вигляд

$$U^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{Np} \left(\hat{U}_{Nl}^{k+\frac{1}{2}} \right) \varphi_l , q^k = \sum_{l=1}^{Np} \left(\hat{q}_{Nl}^k \right) \varphi_l \, .$$

Апроксимація для лінійного функціоналу запишеться

$$\left\langle s_{k+1/2}, \varphi_n \right\rangle = \sum_{l=0}^{Np} s_l^k a\left(\varphi_l, \varphi_n\right).$$

У задачу (3.1.15) замість p по черзі підставимо φ_n (n=0,...,Np) та замість θ – ψ_j (j=0,...,Ne)

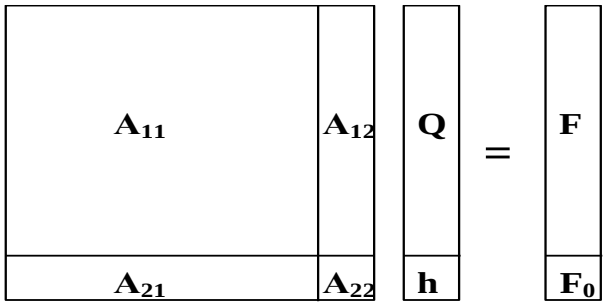
$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{Np}\left\{a(\phi_l,\phi_n)+\lambda\Delta t\left[b(q^k/h^k;\phi_l,\phi_n)+b(\phi_l;q^k/h^k,\phi_n)+\frac{1}{Re}c(h^k;\phi_l/h^k,\phi_n)\right]\right\}U_l^{k+\frac{1}{2}}+ \\ +\lambda\Delta t\sum_{i=0}^{Ne}\left\{\frac{1}{Re}c(\psi_i;q^k/h^k,\phi_n)-2d(\psi_i;h^k,\phi_n)-l(\eta;\psi_i,\phi_n)\right\}H_i^{k+\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{Ne}\left\{d\left(h^k;\psi_i,\phi_n\right)+l\left(\eta;\psi_i,\phi_n\right)\right\}h_i^k+ \\ +\sum_{l=0}^{Np}\left\{\frac{1}{Re}\left[\bar{R}\left(h^k;\phi_l,\phi_n\right)-c\left(h^k;\phi_l/h^k,\phi_n\right)\right]-b\left(q^k/h^k;\phi_l,\phi_n\right)\right\}q_l^k-\sum_{l=0}^{Np}a(\phi_l,\phi_n)F_l^k, \\ \sum_{i=0}^{Ne}a(\psi_i,\psi_j)H_i^{k+\frac{1}{2}}+\lambda\Delta t\sum_{l=0}^{Np}m(\phi_l,\psi_j)U_l^{k+\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{Np}a(\phi_l,\psi_j)s_l^k-\sum_{l=0}^{Np}m(\phi_l,\psi_j)q_l^k-\sum_{l=0}^{Np}a(\phi_l,\psi_j)V_l^k, \\ \forall\phi_n\in Q_0,\forall\psi_j\in\Phi,n=1,...,N\ p,j=1,...,Ne. \end{cases} \tag{3.1.16}$$

Отже, ми отримали систему лінійних рівнянь (3.1.16) для знаходження невідомої глибини та швидкості потоку.

Припускаємо, що на одному скінченному елементі глибина h^k стала. Розхід та швидкість зміни розходу апроксимуються наступним чином $U^{k+\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{2}U_l^{k+\frac{1}{2}}L_l, q^k=\sum_{l=0}^{2}q_l^kL_l$. Система рівнянь (3.1.16) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{2}\left\{a(L_l,L_n)+\lambda\Delta t\left[b(q^k;L_l,L_n)/h^k+b(L_l;q^k,L_n)/h^k+\frac{1}{\mathrm{Re}}c(h^k;L_l,L_n)/h^k\right]\right\}U_l^{k+\frac{1}{2}}+ \\ +\lambda\Delta t\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}}c(1;q^k,L_n)/h^k-2d(1;h^k,L_n)-l(\eta;1,L_n)\right\}H^{k+\frac{1}{2}}=(h^k)^2d\left(1;1,L_n\right)+l\left(\eta;1,L_n\right)+ \\ +\sum_{l=0}^{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[h^k\bar{R}(1;L_l,L_n)-c(1;L_l,L_n)\right]-b\left(q^k;L_l,L_n\right)/h^k\right\}q_l^k-\sum_{l=0}^{Np}a(L_l,L_n)F_l^k, \\ a(1,1)H^{k+\frac{1}{2}}+\lambda\Delta t\sum_{l=0}^{Np}m(L_l,1)U_l^{k+\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{Np}a(L_l,1)s_l^k-\sum_{l=0}^{Np}m(L_l,1)q_l^k-\sum_{l=0}^{Np}a(L_l,L_n)V_l^k, \\ \forall L_n\in Q_0,n=0,1,2. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Схематично систему лінійних рівнянь можна зобразити у вигляді



де A_{11} – матриця розмірності 6 х 6, що відповідає двом рівнянням потоків, A_{21} – вектор розмірності 1 х 6, який відповідає рівнянню для глибини, A_{12} – вектор розмірності 6 х 1, який відповідає коефіцієнтам при невідомій глибині, Q – вектор невідомих швидкостей розходів води, F – вектор правої частини розмірності 6 х 1, A_{22} – коефіцієнт, що стоїть при невідомій глибині, F_0 – права частина рівняння для глибини. Легко бачити, що на одному скінченному елементі можна виключити з системи рівнянь (3.1.17) невідому *h*. З останнього рівняння системи визначимо *h*

$$h = A_{22}^{-1}\left(F_0 - A_{21}Q\right) \tag{3.1.18}$$

та підставимо у систему $A_{11}Q + A_{12}h = F$. Отже, отримаємо систему для визначення вектора Q

$$\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)Q = F - A_{12}A_{22}^{-1}F_0. \tag{3.1.19}$$

Зі співвідношенням (3.1.18) визначаємо значення глибини на кожному скінченному елементі.

Для того, щоб чисельна схема (3.1.16) була стійкою, необхідно, щоб виконувалось співвідношення між розбиттям в часі та розбиттям за

просторовими змінними (критерій Куранта-Фрідрікса-Леві [1]) $u\Delta t \le r/2$, де r – діаметр скінченного елемента , u – швидкість потоку.

Побудована система лінійних рівнянь (3.1.16) розв'язується методом Гауса, в результаті чого ми отримаємо розв'язок варіаційної задачі (2.2.23).

3.1.3 Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні

При великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їх градієнти різко змінюються, в результаті чого отриманий у попередньому розділі 3.1.2 розв'язок задачі (2.2.23) втрачає свою стійкість та з'являються "паразитичні" осциляції. Для їх усунення багатьма авторами запропоновані різні протипотокові схеми МСЕ [95, 127, 134, 138, 151, 169]. Розглянемо протипотокову схему Петрова-Гальоркіна та підхід, що базується на понятті функцій-бульбашок.

Проведемо дискретизацію задачі (2.2.18) в часі, використовуючи апроксимації для глибини та потоків (3.1.3)-(3.1.4) та нехтуючи доданками порядку $(\Delta t)^2$. Дискретизована задача (2.2.18) набуде вигляду

$$
\begin{cases}
U^{k+\frac{1}{2}} + \Delta t\omega(t)\left[\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k U_j^{k+\frac{1}{2}})/h^k) + \sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_j}((q_j^k U_i^{k+\frac{1}{2}})/h^k) + G\dfrac{\partial(H^{k+\frac{1}{2}}h^k)}{\partial x_i} + \right. \\
\left. + GH^{k+\frac{1}{2}}\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\dfrac{\partial(\tau_{ij}(U^{k+\frac{1}{2}}/h^k)h^k)}{\partial x_j} + \dfrac{\partial(\tau_{ij}(q^k/h^k)H^{k+\frac{1}{2}})}{\partial x_j}\right)\right] = \dfrac{g|q^k|q_i^k}{\mathrm{Re}C^2(h^k)^2} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k q_j^k)/h^k) - \dfrac{1}{2}G\dfrac{\partial(h^k)^2}{\partial x_i} - Gh^k\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\rho\mathrm{Re}}\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial(\tau_{ij}(q^k/h^k)h^k)}{\partial x_j}, \quad i=1,2, \\
H^{k+\frac{1}{2}} + \Delta t\omega(t)\sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial U_j^{k+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} = R - \sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial q_j^k}{\partial x_j}.
\end{cases}
$$

(3.1.20)

В операторному вигляді систему (3.1.20) можна записати наступним чином

$$\begin{cases} L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} = l_1, \\ L_3 U^{k+\frac{1}{2}} + L_4 H^{k+\frac{1}{2}} = l_2, \end{cases} \tag{3.1.21}$$

де L_1, L_2, L_3, L_4 – лінійні оператори, l_1, l_2 – відомі функціонали.

Далі, проводячи міркування аналогічні до пункту (3.1.1), отримаємо однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі задачі (3.1.15).

Задачу (3.1.15) будемо розв'язувати за допомогою МСЕ з використанням кусково-лінійних апроксимацій на скінченних елементах трикутної форми. Апроксимації для потоків та глибини на кожному елементі будемо вибирати аналогічно до пункту 3.1.2.

Нехай $T_h = \{\Omega_e\}_e$ - розбиття області Ω на трикутні скінченні елементи, де $h = \max_e diam(\Omega_e)$. Для кожного елемента Ω_e визначимо простір функцій-бульбашок $B_e = H_0^1(\Omega_e)$ та простір $Q_B = \oplus_e B_e$. Так як ми допускаємо, що невідома глибина є постійною в межах скінченного елемента Ω_e, тоді $H^{k+\frac{1}{2}}$ не впливає на поведінку розв'язку на елементі.

Будемо шукати розв'язок задачі (3.1.15) у просторі $Q_h = Q_0 \oplus Q_B$. Кожна довільна функція $p_h \in Q_h$ може бути представлена у вигляді

$$p_h = p + p_B \in Q_h, \;\; p_B = \sum_e p_{B,e}, p_{B,e} \in B_e.$$

Ввівши наступні позначення

$$(L_1 u, p) = a(u, p) + \lambda \Delta t[b(q^k / h^k; u, p) + b(u; q^k / h^k, p) + \frac{1}{\mathrm{Re}} c(h^k; u / h^k, p)],$$

$$(L_2u,p)=\lambda\Delta t\left[-2d(u,h^k,p)-l(\eta,u,p)+\frac{1}{\mathrm{Re}}c(u;q^k/h^k,p)\right],$$

$$(L_3u,\theta)=a(u,\theta),\ (L_4u,\theta)=\lambda m(u,\theta),$$

$$(l_1,p)=d(h^k;h^k,p)+l(\eta;h^k,p)-b(q^k/h^k;q^k,p)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c(h^k;q^k/h^k,p)-\bar{R}(h^k;q^k,p)\right]-a(F_{k+1/2},p)$$

,

$$(l_2,p)=<s_{k+1/2},p>-m(q^k,\theta)-a(V_{k+1/2},\theta),$$

рекурентна схема (3.1.15) зведеться до вигляду:

$$\begin{cases} \textit{задано}: q^0=Q_0,\ h^0=\Phi, \\ \textit{знайти}: U_h^{k+\frac{1}{2}}=U^{k+\frac{1}{2}}+U_B^{k+\frac{1}{2}}\in Q_h, H^{k+\frac{1}{2}}\in\Phi, \\ (L_1U^{k+\frac{1}{2}},p)+\sum_e(L_1U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},p)_e+(L_2H^{k+\frac{1}{2}},p)=(l_1,p),\ \forall p\in Q_0, \\ (L_1U^{k+\frac{1}{2}},p_{B,e})_e+(L_1U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},p_{B,e})_e+(L_2H^{k+\frac{1}{2}},p_{B,e})_e=(l_1,p_{B,e})_e,\ \forall p_{B,e}\in Q_{B,e}, \\ (L_3H^{k+\frac{1}{2}},\theta)+(L_4U^{k+\frac{1}{2}},\theta)+\sum_e(L_4U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},\theta)_e=(l_2,\theta),\ \forall\theta\in\Phi. \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Нехай L_{1e}^* та L_{4e}^* - спряжені лінійні оператори відповідно до L_1 та L_4 на Ω_e. Тоді, враховуючи, що

$$(L_1u,p)_e=(u,L_{1e}^*p)_e,\ (L_4u,\theta)_e=(u,L_{4e}^*\theta)_e$$

отримаємо

$$\sum_e(L_1U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},p)=\sum_e(U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},L_{1e}^*p),\sum_e(L_4U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},\theta)=\sum_e(U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}},L_{4e}^*\theta)$$

З другого та третього рівнянь системи (3.1.22) можемо записати

$$(L_1 U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}}, p_{B,e})_e = -[(L_1 U^{k+\frac{1}{2}}, p_{B,e})_e + (L_2 H^{k+\frac{1}{2}}, p_{B,e})_e - (l_1, p_{B,e})_e],$$

$$(L_4 U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}}, \theta)_e = -[(L_4 U^{k+\frac{1}{2}}, \theta)_e + (L_3 H^{k+\frac{1}{2}}, \theta)_e - (l_2, \theta)_e]$$

або

$$\begin{cases} L_1 U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}} = -[L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} - l_1], \\ L_4 U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}} = -[L_4 U^{k+\frac{1}{2}} + L_3 H^{k+\frac{1}{2}} - l_2], \\ U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \text{ на } \partial\Omega_e. \end{cases} \qquad (3.1.23)$$

Для кожного $U^{k+\frac{1}{2}}, H^{k+\frac{1}{2}}$ задача (3.1.23) має єдиний розв'язок $U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}} \in B_e$, який можемо знайти з співвідношення

$$U_{B,e}^{k+\frac{1}{2}} = M_e((L_1 + L_4)U^{k+\frac{1}{2}} + (L_2 + L_3)H^{k+\frac{1}{2}} - (l_1 + l_2)), \qquad (3.1.24)$$

де M_e – обмежений оператор визначений як M_e: $Q(\Omega_e) \to B_e$

Підставимо (3.1.24) в систему (3.1.22), в результаті отримаємо

$$\begin{cases} (L_1 U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \sum_e (M_e(L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} - l_1), L_{1e}^* p) + (L_2 H^{k+\frac{1}{2}}, p) = (l_1, p), \forall p \in Q_0, \\ (L_3 H^{k+\frac{1}{2}}, \theta) + (L_4 U^{k+\frac{1}{2}}, \theta) + \sum_e (M_e(L_4 U^{k+\frac{1}{2}} + L_3 H^{k+\frac{1}{2}} - l_2), L_{4e}^* \theta) = (l_2, \theta), \forall \theta \in \Phi. \end{cases}$$

(3.1.25)

Як було показано в [63] в (3.1.25) можна не знаходити спряжені оператори L_{1e}^{*} та L_{4e}^{*}, а взяти безпосередньо L_1 та L_4. Враховуючи кусково-лінійні апроксимації потоків та глибини з системи (3.1.21) знаходимо

$$L_1 p = p + \Delta t\lambda\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k p_j)/h^k) + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}((q_j^k p_i)/h^k)\right],$$

$$L_4\theta = 0.$$

У результаті будемо мати наступну систему рівнянь для знаходження розв'язку

$$\begin{cases}(L_1 U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \sum_e (M_e(L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} - l_1), L_1 p) + (L_2 H^{k+\frac{1}{2}}, p) = (l_1, p), \forall p \in Q_0, \\ (L_3 H^{k+\frac{1}{2}}, \theta) + (L_4 U^{k+\frac{1}{2}}, \theta) = (l_2, \theta), \forall \theta \in \Phi. \end{cases}$$

Отже, рівняння для глибини залишається без змін, а доданок, який стабілізує рівняння потоків набуде вигляду

$$\left(L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} - l_1, L_1 p\right) = \int_{\Omega_e} U^{k+\frac{1}{2}} \cdot p dx + \Delta t\lambda\left[\int_{\Omega_e}\sum_{j=1}^{2}\left((\frac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k U_j^{k+\frac{1}{2}}) + (q_j^k U_i^{k+\frac{1}{2}}))/h^k\right) p dx\right.$$

$$+ \int_{\Omega_e}\left(U_i^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(q_i^k q_j^k)/h^k + Gh^k\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - \frac{g|q^k|q_i^k}{\mathrm{Re}C^2\left(h^k\right)^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k p_j) + (q_j^k p_i))/h^k\right) dx + \int_{\Omega_e} GH^{k+\frac{1}{2}}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} p dx\Bigg] -$$

$$- \int_{\Omega_e}\frac{g|q^k|q_i^k p_i}{\mathrm{Re}C^2(h^k)^2} dx + \int_{\Omega_e}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}((q_i^k q_j^k)/h^k) p dx + \int_{\Omega_e} Gh^k\frac{\partial\eta}{\partial x_i} p dx = S(U^{k+\frac{1}{2}}, H^{k+\frac{1}{2}}, q^k, h^k, p), \quad (3.1.26)$$

де i=1, 2.

Рекурентна схема для відшукання розв'язку збуреної задачі запишеться

$$
\begin{cases}
\textit{задано} \quad q^0 \in Q_0, h^0 \in \Phi \textit{ та } \lambda \in (0,1]; \\
\textit{знайти} \quad U^{k+\frac{1}{2}} \in Q_0, H^{k+\frac{1}{2}} \in \Phi, \\
a(U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \lambda\Delta t\left[b(q^k / h^k; U^{k+\frac{1}{2}}, p) + b(U^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) - 2d(H^{k+\frac{1}{2}}; h^k, p) - \right. \\
\left. - l(\eta; H^{k+\frac{1}{2}}, p) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(c(H^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) + c(h^k; U^{k+\frac{1}{2}} / h^k, p) \right) \right] + \\
+ \sum_e M_e S(U^{k+\frac{1}{2}}, H^{k+\frac{1}{2}}, q^k, h^k, p)_e = d\left(h^k; h^k, p\right) + l\left(\eta; h^k, p\right) - \\
- b\left(q^k / h^k; q^k, p\right) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[c\left(h^k; q^k / h^k, p\right) - \overline{R}\left(h^k; q^k, p\right) \right] - a(F_{k+1/2}, p), \ \forall p \in Q_0, \\
a(H^{k+\frac{1}{2}}, \theta) + \lambda m(U^{k+\frac{1}{2}}, \theta) = < s_{k+1/2}, \theta > - m(q^k, \theta) - a(V_{k+1/2}, \theta), \ \forall \theta \in \Phi, \\
q^{k+1} = q^k + \Delta t U^{k+\frac{1}{2}}, h^{k+1} = h^k + \Delta t H^{k+\frac{1}{2}}, k = 0, \ldots, N_T .
\end{cases}
\tag{3.1.27}
$$

Ввівши позначення

$$
S1(w; q, p) = \int_{\Omega_e} q_i \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} ((w_i p_j) + (w_j p_i)),
$$

$$
S2(h; q, p) = \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_i q_j \right) / h + gh \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{g|q|q_i}{\mathrm{Re} C^2 h^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} ((q_i p_j) + (q_j p_i)) / h \right) dx .
$$

З врахуванням вище наведених позначень, (3.1.26) перепишеться у вигляді

$$
\left(L_1 U^{k+\frac{1}{2}} + L_2 H^{k+\frac{1}{2}} - l_1, L_1 p \right) = a(U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \Delta t \lambda \left[b(U^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) + b(q^k / h^k; U^{k+\frac{1}{2}}, p) + \right.
$$

$$+ S1(U^{k+\frac{1}{2}}; q^k / h^k, p) + S2(h^k; q^k, p) + d(H^{k+\frac{1}{2}}; p, \eta)\Big] -$$

$$- \frac{1}{\mathrm{Re}} \overline{R}(h^k; q^k, p) + b(q^k / h^k; q^k, p) + d(h^k; p, \eta). \qquad (3.1.28)$$

Враховуючи (3.1.28), дискретизована задача (3.1.27) в часі та за просторовими змінними на одному скінченному елементі Ω_e буде мати вигляд

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{2} \{(1+M_e)a(L_l, L_n) + \lambda\Delta t\Big[(1+M_e)(b(q^k; L_l, L_n)/h^k + \\ + b(L_l; q^k, L_n)/h^k) + M_e S1(L_l; q^k, L_n)/h^k + \frac{1}{\mathrm{Re}} c(h^k; L_l, L_n)/h^k\Big]\}U_l^{k+\frac{1}{2}} + \\ + \lambda\Delta t\{\frac{1}{\mathrm{Re}} c(1; q^k, L_n)/h^k + M_e d(1; L_n, \eta) - 2d(1; h^k, L_n) - l(\eta; 1, L_n)\}H^{k+\frac{1}{2}} = \\ = (h^k)^2 d(1;1, L_n) + l(\eta;1, L_n) - M_e d(h^k; L_n, \eta) + \sum_{l=0}^{2} \{(1+M_e)(\frac{h^k}{\mathrm{Re}} \overline{R}(1; L_l, L_n) - \\ - b(q^k; L_l, L_n)/h^k) - \frac{1}{\mathrm{Re}} c(1; L_l, L_n) - \lambda\Delta t h^k M_e S2(1; L_l, L_n)\}q_l^k - \sum_{l=0}^{Np} a(L_l, L_n)F_l^k, \\ a(1,1)H^{k+\frac{1}{2}} + \lambda\Delta t \sum_{l=0}^{Np} m(L_l,1)U_l^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{Np} a(L_l,1)s_l^k - \sum_{l=0}^{Np} m(L_l,1)q_l^k - \sum_{l=0}^{Np} a(L_l, L_n)V_l^k, \\ \forall L_n \in Q_0, n = 0, 1, 2. \end{cases} \qquad (3.1.29)$$

Далі, проводячи міркування аналогічні до пункту 3.1.2, виключаємо глибину з системи рівнянь (3.1.29) і отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження потоків на одному скінченному елементі.

Залишається проблема вибору стабілізаційного множника M_e.

3.2 Задача поверхневого стоку води в кінематичному наближенні

Побудуємо чисельні схеми варіаційних задач стоку поверхневої води у кінематичному наближенні, застосовуючи проекційно-сіткову схему МСЕ. Для дискретизації задач у часі була використана однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.

3.2.1 Дискретизація варіаційної задачі за просторовими і часовою змінними

Будемо проводити дискретизацію варіаційної задачі (2.2.38) аналогічно до пункту 3.1.1. Розіб'ємо відрізок часу $[0,T]$ на N_T+1 однакові частини $[t_k,t_{k+1}]$ довжиною $\Delta t=t_{k+1} - t_k$ та виберемо апроксимацію для глибини у вигляді

$$h(x,t) \approx h_{\Delta t}(x,t) = h^k(x)\{1-\omega(t)\} + h^{k+1}(x)\omega(t),\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \qquad (3.2.1)$$

де $\omega(t) = \dfrac{t-t_k}{\Delta t}$, $t \in [t_k,\ t_{k+1}]$, k=0,...,N_T, $h^k \in V$ - відома глибина в момент часу t_k; $h^{k+1} \in V$ - невідома глибина в момент часу t_{k+1}.

Для функціоналу $l(t)$ з (2.2.38) будемо використовувати апроксимацію вигляду

$$l_{\Delta t}(t) = l_{k+1/2} = l(t_k + \Delta t/2)\ \ \forall t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Введемо швидкість зміни глибини в часі $H^{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{h^{k+1}-h^k}{\Delta \mathrm{t}}, H^{k+\frac{1}{2}} \in V$, тоді вираз (3.2.1) для апроксимації глибини запишеться

$$h_{\Delta t}(x,t) = h^k(x) + H^{k+\frac{1}{2}}(x)\,\Delta t\,\omega(t) \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \tag{3.2.2}$$

Підставимо апроксимацію для глибини в (2.2.38). Враховуючи розклад у ряд Тейлора

$$\left(h^k + H^{k+\frac{1}{2}}\Delta t\,\omega\right)^m = h^{k\,m} + m h^{k\,m-1} H^{k+\frac{1}{2}}\Delta t\,\omega + o\left(\Delta t^2\right)$$

та нехтуючи членами порядку $o(\Delta t^2)$, отримаємо лінеаризовану задачу у вигляді

$$(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \Delta t\omega(mb(h^k; H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \frac{1}{\mathrm{Re}}c(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi)) =$$

$$= \langle l_{k+1/2},\varphi\rangle - b(h^k; h^k,\varphi) - \frac{1}{\mathrm{Re}}c(h^k,\varphi). \tag{3.2.3}$$

У просторі $L^2((t_k,t_{k+1}))$ виберемо функцію $\xi(t)$ таку, що $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi(\tau)d\tau \neq 0$, та будемо вимагати, щоб нев'язка рівняння (3.2.3) була ортогональна цій функції відносно скалярного добутку простору $L^2((t_k,t_{k+1}))$, тоді

$$(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \Delta t\lambda(mb(h^k; H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \frac{1}{\mathrm{Re}}c(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi)) =$$

$$\langle l_{k+1/2},\varphi\rangle - b(h^k; h^k,\varphi) - \frac{1}{\mathrm{Re}}c(h^k,\varphi) \quad \forall\varphi \in V,\ k = 0,\ldots,N_T, \tag{3.2.4}$$

де $\lambda = \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt\right) / \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi(t)\,dt\right)$.

Рівняння (3.2.4) дає змогу визначити невідому зміну швидкості глибини в часі $H^{k+\frac{1}{2}}$ на проміжку $[t_k,\ t_{k+1}]$. Побудуємо рекурентну схему для відшукання невідомої глибини у момент часу t_{k+1}

$$\begin{cases} \textit{задано}\, h^0 \in V\ \textit{та}\ \lambda \in (0,1];\ \textit{знайти}\, H^{k+\frac{1}{2}} \in V, \\ (H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \Delta t\lambda(mb(h^k; H^{k+\frac{1}{2}},\varphi) + \frac{1}{\mathrm{Re}} c(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi)) = \\ = \langle l_{k+1/2},\varphi\rangle - b(h^k; h^k,\varphi) - \frac{1}{\mathrm{Re}} c(h^k,\varphi) \quad \forall \varphi \in V, \\ h^{k+1} = h^k + \Delta t H^{k+\frac{1}{2}},\ k = 0,\ldots,N_T. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Отримана схема дає змогу обчислити значення глибини у довільний момент часу, якщо вона задана у початковий момент часу.

Для дискретизації задачі за просторовими змінними розіб'ємо область Ω на Ne скінченних елементів Ω_e трикутної форми, Np – загальна кількість розрахункових вузлів. Введемо на трикутнику Ω_e кусково-лінійні базисні функції φ_i $(x_1,\ x_2)$ аналогічно до розділу 3.1.2. Використовуючи розклади за базисними функціями

$$H^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{Np} H_i^{k+\frac{1}{2}} \varphi_i\,, \quad h^k = \sum_{i=1}^{Ne} h_i^k \varphi_i$$

та апроксимацію для лінійного функціоналу

$$\langle l_{k+1/2}, \varphi_n \rangle = \sum_{i=0}^{Np} l_i^k a(\varphi_i, \varphi_n),$$

у задачу (3.2.5) замість φ по черзі підставимо φ_n (n=0,...,Np)

$$\sum_{i=0}^{Np}\left[(\varphi_i,\varphi_n)+\Delta t\theta(mb(h^k;\varphi_i,\varphi_n)+\frac{1}{\mathrm{Re}}c(\varphi_i,\varphi_n))\right]H_i^{k+\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{Np}\left[(\varphi_i,\varphi_n)l_i^k-\left(b(h^k;\varphi_i,\varphi_n)+\frac{1}{\mathrm{Re}}c(\varphi_i,\varphi_n)\right)h_i^k\right],\ k=0,...,N_T. \qquad (3.2.6)$$

Для розв'язання двовимірної задачі стоку поверхневої води в кінематичному наближенні отримана лінійна система рівнянь (3.2.6), яка дозволяє знайти невідому глибину в кожний момент часу.

3.2.2 Застосування інтервальних ітераційних методів для розв'язування системи проекційних нелінійних рівнянь.

Запишемо варіаційне співвідношення для дискретизованої по часу задачі про кінематичну хвиллю у вигляді

$$(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi)+b\left(\left(H^{k+\frac{1}{2}}\right)^{m-1};H^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right)+\Delta t\omega\frac{1}{\mathrm{Re}}c(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi))=$$

$$=\langle l_{k+1/2},\varphi\rangle-b(h^k;h^k,\varphi)-\frac{1}{\mathrm{Re}}c(h^k,\varphi). \qquad (3.2.7)$$

Систему рівнянь (3.2.) можна записати у наступному виді

$$(f(H^{k+\frac{1}{2}},h^k,l_{k+\frac{1}{2}}),\varphi)=0, \qquad (3.2.7')$$

де $f:D\subset R^n\to R^n$ і залежить від вектора невідомих $H^{k+\frac{1}{2}}$.

Для розв’язування системи нелінійних рівнянь (3.2.7´) використаємо інтервальний ітераційний метод типу Рунге [7,8]:

$$Y^k = x^k - [1/4\, f'(x^k) + 3/4\, f'(x^k + 2/3(X^k - x^k))]^{-1}\, f(x^k),$$
$$X^{k+1} = X^k \cap Y^k$$

де

$x^k \in X^k$ - поточний інтервал розбиття;

f - вектор-функція системи(3.2.7´);

3.3 Варіаційна задача фільтрації рідини в грунті

Важливим процесом для дослідження є етап фільтрації [5,6,10] оскільки він вагомо залежить від решти етапів гідрологічної системи, таких як випадання опадів, русловий стік, потік в озерах і водоймах. Також процес фільтрації безпосередньо залежить від діяльності людини (меліорація, будівля гідроспоруд), тому його вивчення дає можливість зрозуміти процес формування ґрунтових вод і передбачувати наслідки діяльності людини.

З огляду на те, що для багатьох задач фільтрації є характерна наявність вільної поверхні [9,10,12], наводиться побудова та дискретизація варіаційної задачі фільтрації. Для побудови дискретизованої задачі використовувалась схема Гальоркіна та однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі [14]. Отриману дискретизовану задачу можна розв’язати методом скінченних елементів [11,14], який дозволяє знаходити вигляд змінної області визначення задачі в часі без її перерозбиття на скінченні елементи [12].

Розглянемо основні рівняння, які використовуються для побудови математичної моделі процесу фільтрації рідини в грунті.

3.3.1 Планова лінійна задача фільтрації води в насиченій зоні грунту

Для даної задачі побудовано варіаційну задачу. Приймемо такі позначення

$$m(H',v)=\iint_{\Omega}\mu H'v\,d\Omega;$$

$$a(\Psi,H,v)=\iint_{\Omega}k_s\left(\Psi-\eta_0(x,y)\right)\nabla H\cdot\nabla v\,d\Omega;$$

$$K(H)\equiv K(x,y),\quad \forall(x,y)\in\Omega$$

$$<l(t),v>=\iint_{\Omega}Ev\,d\Omega-\int_{\Gamma}q^{*}v\,d\gamma$$

тоді варіаційна задача запишеться так:

$$\begin{cases} \text{Задано } H_0\in L^2(\Omega),\ l\in L^2(0,T;V'); \\ \text{знайти функцію } H\in L^2(0,T;V) \text{ таку, що} \\ m(H',v)+a(\Psi,H,v)=<l(t),v>;\quad \forall v\in V \\ m(H(0)-H_0,v)=0 \end{cases}$$

де

$$\Psi=\begin{cases}\eta(x,y), & H(x,y,t)\ge\eta(x,y)\\ H(x,y,t), & \eta_0(x,y)<H(x,y,t)<\eta(x,y);\\ \eta_0(x,y), & H(x,y,t)\le\eta_0(x,y)\end{cases}$$

$V:=\left\{v\in H^1(\Omega)\right\}$; $V':=\left\{v\in H^{-1}(\Omega)\right\}$ є простір допустимих функцій та спряжений до нього простір.

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів $\{V_h\}$ із простору V таку, що

$$\begin{cases} dim V_h = N(h) \to \infty, \quad при \quad h \to 0 \\ \bigcup_{h>0} V_h \quad щільно\ вкладене\ в\ V, тобто: \\ \forall v \in V \ \forall \delta > 0 \ \exists h > 0, v_h \in V_h : || v - v_h || \leq \delta \\ \{\phi_i\}_{i=1}^{N} - базис\ простору\ V_h \end{cases}$$

тоді напівдискретизована задача запишеться так:

$$\begin{cases} Задано\ h > 0, H_0 \in L^2(\Omega), l \in L^2(0,T;V'); \\ знайти\ функцію\ H_h \in L^2(0,T;V_h)\ таку, що \\ m(H_h'(t), v) + a(\Psi_h, H_h(t), v) = < l(t), v >; \quad \forall v \in V_h \\ m(H_h(0) - H_0, v) = 0 \end{cases}$$

де

$$\Psi_h = \begin{cases} \eta(x,y), & H_h(t) \geq \eta(x,y) \\ H_h(t), & \eta_0(x,y) < H_h(t) < \eta(x,y) \\ \eta_0(x,y), & H_h(t) \leq \eta_0(x,y) \end{cases}$$

Оскільки ми прийняли, що $H_h \in L^2(0,T;V_h)$, то функцію H_h ми можемо розкласти за базисом цього простору:

$$H_h(t) = \sum_{k=1}^{N} H_k(t) \phi_i(x,y).$$

Тепер задача звелась до відшукання коефіцієнтів

$$H(t) = \{H_k(t) \in L^2(0,T)\}_{k=1}^{N}$$

Розіб'ємо відрізок часу [0,T] на (N_T+1) рівних частин $[t_j,t_{j+1}]$, $j=0,\ldots,N_T+1$.

Для дискретизації по часу використаємо однокрокову рекурентну схему

$$H_{h\Delta t}(t)=H_h{}^{j}+\Delta t\omega(t_j,t)\dot{H}_h{}^{j+\frac{1}{2}};\quad t\in\left[t_j,t_{j+1}\right],\ j=0,\ldots,N_T$$

$$\text{де}\quad \dot{H}_h{}^{j+\frac{1}{2}}=\frac{H_h{}^{j+1}-H_h{}^{j}}{\Delta t};$$

Тут невідомими виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функції H_h в моменти часу t_j, t_{j+1}, тобто $H_h{}^{j}, H_h{}^{j+1}$.

Для апроксимації лінійного функціоналу використаємо кусково-постійні апроксимації:

$$<l_{\Delta t},v>=<l_{j+\frac{1}{2}},v>=<l(t_{j+\frac{1}{2}}),v>,\ t_{j+\frac{1}{2}}=t_j+\frac{1}{2}\Delta t,\ \forall t\in\left[t_j,t_{j+1}\right]. \qquad (3.3.0)$$

Отже, тепер приймаємо, що $H_h(t)\cong H_{h\Delta t}(t), <l(t),v>=<l_{j+\frac{1}{2}},v>$ і підставляємо апроксимації в напівдискретизовані рівняння та початкову умову. Після підстановки ми отримаємо рівняння з залежністю від часу. Для того, щоб позбутись цієї залежності з отриманих рівнянь будуємо проекційні рівняння.

Початкова умова дає нам рівняння для знаходження початкового наближення H_h^0

$$m\left(H_h^0-H_0,v\right)=0,\forall v\in V_h$$

$$\begin{cases} \text{задано параметри } \Delta t > 0, \theta > 0 \text{ та } H_h^0 \in V_h; \\ \text{знайти } H_h^{j+1} \in V_h \text{ таку , що} \\ m(\dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}}, v) + \theta \Delta t\, \tilde{a}(\Psi_h, \dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}}, v) = < l_{j+\frac{1}{2}}, v > - a(\Psi_h, H_h^j, v);\ \forall v \in V_h, \\ H_h^{j+1} = H_h^j + \Delta t\, \dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}};\ j = 0, \ldots, N_T - 1 \end{cases}$$

тут

$$\tilde{a}(\Psi_h, \dot{H}_h^{j+\frac{1}{2}}, v) = \begin{cases} \end{cases}$$

$\theta = \dfrac{\left(\xi, \omega\left(t_j, t\right)\right)}{\left(\xi, 1\right)}$, де $\xi(t) \in L^2\left(\left(t_j, t_{j+1}\right)\right)$, $(.,.)$ скалярний добуток в

$L^2\left(\left(t_j, t_{j+1}\right)\right)$ і функція задовольняє умові $\left(\xi, 1\right) = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\, dt \neq 0$.

3.3.2 Рівняння фільтрації у гідродинамічному наближенні

Варіаційна постановка задачі (3.3.1)-(3.3.5) має формулювання

$$\begin{cases} \text{Задано } \boldsymbol{\upsilon}_0,\ \rho_0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right),\ l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\ \text{Знайти} \quad \boldsymbol{\upsilon} \in L^2\left(0,T;V_1\right),\ \rho \in L^2\left(0,T;V_2\right) \text{ такі, що} \\ \dfrac{1}{g}(\boldsymbol{\upsilon}',\varphi)+\dfrac{1}{k}(\boldsymbol{\upsilon},\varphi)+(\mathbf{i}_2,\varphi)+b(f(\rho),\nabla\rho,\varphi)=0; \quad \forall\varphi\in V_1 \\ ((\rho n)',\psi)-b_n(\rho;\boldsymbol{\upsilon},\psi)=-<l,\psi>; \quad \forall\psi\in V_2 \\ \left(\boldsymbol{\upsilon}(0)-\boldsymbol{\upsilon}_0,\phi\right)=0, \\ \left(\rho(0)-\rho_0,\psi\right)=0, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

де V_2' - спряжений до V_2 простір.

Форми, що входять в (3.3.1), мають наступний вигляд:

$$<l,u>=\int_{\Gamma_1}\left\{q^* u\right\}d\gamma,$$

$$b(c;\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_{\tilde{\Omega}}\{c\,\mathbf{u}.\mathbf{v}\}d\tilde{\Omega},$$

$$b_n(c;\mathbf{u},v)=b(c;\mathbf{u},\nabla v)-\int_{\Gamma_2}\{c\mathbf{u}.\mathbf{v}\,v\}d\gamma,$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_{\tilde{\Omega}}\{\mathbf{u}.\mathbf{v}\}\,d\tilde{\Omega}.$$

Виберемо послідовність щільно вкладених скінченновимірних просторів $\left\{V_h^1\right\}\subset V_1$ та $\left\{V_h^2\right\}\subset V_2$ таких що $\dim V_h^i=N(h)\xrightarrow[h\to 0]{}\infty$, $i=1,2$.

Розкладемо шукані величини за базисом вибраних відповідних скінченновимірних просторів:

$$\mathbf{\upsilon}_h(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{\upsilon}_k(t) C_i(x,y),$$

$$\rho_h(t) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k(t) L_i(x,y), \qquad (3.3.2)$$

тоді напівдискретизована варіаційна задача задачі (3.3.1) запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \textit{Задано } h>0,\ \mathbf{\upsilon}_0,\ \rho_0 \in L^2(\tilde{\Omega}),\ l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\ \textit{Знайти} \quad \mathbf{\upsilon}_h \in L^2\left(0,T;V_h^1\right),\ \rho_h \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \textit{такі, що} \\ \frac{1}{g}(\mathbf{\upsilon}_h{}',\varphi) + \frac{1}{k}(\mathbf{\upsilon}_h,\varphi) + (\mathbf{i}_2,\varphi) + b(f(\rho_h),\nabla\rho_h,\varphi) = 0; \quad \forall \varphi \in V_1 \\ ((\rho_h n)',\psi) - b_n(\rho_h;\mathbf{\upsilon}_h,\psi) = -<l,\psi>; \quad \forall \psi \in V_2 \\ \left(\mathbf{\upsilon}_h(0) - \mathbf{\upsilon}_0,\phi\right) = 0, \\ \left(\rho_h(0) - \rho_0,\psi\right) = 0, \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

Врахувавши (3.5.1) очевидно, що розв'язання задачі (3.3.1) звелось до відшукання коефіцієнтів $\mathbf{\upsilon_h}(\mathbf{t}), \rho_h(t)$ з (5.2).

Розіб'ємо відрізок часу [0,T] на $\left(\mathrm{N_T}+1\right)$ рівних частин $[t_j, t_{j+1}],\ j=0,\ldots,N_T+1$.

Застосувавши до (5.2) однокрокову рекурентну схему дискретизації в часі, метод побудови проекційного рівняння [14] та знехтувавши нелінійними доданками порядку $O(\Delta t^2)$, перейдемо до дискретизованої рекурентної системи рівнянь.

$$
\begin{cases}
\textit{Задано параметри } \Delta t>0, \theta>0 \textit{ та } h>0, \mathbf{\upsilon}_h^0, \rho_h^0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right), l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\
\textit{Знайти} \quad \mathbf{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^1\right), \rho_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \textit{такі, що} \\
\Delta t \frac{1}{g} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} (\mathbf{i}_\mathbf{m}, \varphi) + \frac{1}{k} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta (\mathbf{i}_\mathbf{m}, \varphi) + \rho_i^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta b(f(\rho), L_i, \varphi) = \\
-(\mathbf{i}_2, \varphi) - \frac{1}{k} \upsilon_m^j (i_m, \varphi) - \rho_i^j b(f(\rho), L_i, \varphi); \quad \forall \varphi \in V_1 \\
\rho_i^{j+\frac{1}{2}} (n_m^{j+1} + \theta \Delta t n_m^{j+\frac{1}{2}}) (L_i L_m, \psi) - \\
\Delta t \theta (\rho_i^{j+\frac{1}{2}} \upsilon_m^j + \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \rho_i^j) b_n (L_i; C_m, \psi) = \\
< l_{j+\frac{1}{2}}, \psi > - \rho_i^j n_m^{j+\frac{1}{2}} (L_i L_m, \psi) + \rho_i^j \upsilon_m^j b_n (L_i; C_m, \psi); \quad \forall \psi \in V_2 \\
\mathbf{\upsilon}_h^{j+1} = \mathbf{\upsilon}_h^j + \Delta t \mathbf{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}}; j = 0, \ldots, N_T - 1; \\
\rho_h^{j+1} = \rho_h^j + \Delta t \rho_h^{j+\frac{1}{2}}; j = 0, \ldots, N_T - 1
\end{cases}
\tag{3.3.4}
$$

де

$$
\mathbf{\upsilon}_{h\Delta t}(t) = \mathbf{\upsilon}_h{}^j + \Delta t \omega(t_j, t) \mathbf{\upsilon}_h{}^{j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right], j = 0, \ldots, N_T,
$$

$$
\mathbf{\upsilon}_h{}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{\upsilon}_h{}^{j+1} - \mathbf{\upsilon}_h{}^j}{\Delta t},
$$

$$
\rho_{h\Delta t}(t) = \rho_h{}^j + \Delta t \omega(t_j, t) \rho_h{}^{j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right], j = 0, \ldots, N_T,
$$

$$
\rho_h{}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_h{}^{j+1} - \rho_h{}^j}{\Delta t},
$$

$$
< l_{\Delta t}, v > = < l_{j+\frac{1}{2}}, v > = < l(t_{j+\frac{1}{2}}), v >, t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t, \ \forall t \in \left[t_j, t_{j+1}\right].
$$

Невідомими в (3.3.4) виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функцій υ_h, ρ_h в момент часу t_{j+1} ,тобто $\upsilon_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$. Значення $\upsilon_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$знаходяться за допомогою рекурентної формули, стартові значення для якої $\upsilon_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$ ми отримуємо з початкових умов задачі (3.3.5).

3.4 Варіаційна задача комбінованої моделі руху поверхневих і грунтових вод

Щоб побудувати варіаційне формулювання початково-крайової задачі (2.4.1)-(2.4.12) спочатку введемо простір допустимих векторів швидкості

$$V := \left\{ \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^3 \in H^1(\Omega_F)^3 \mid \xi \cdot n_F \mid_{\Gamma_F} = 0 \right\}.$$

Тепер домножимо рівняння руху (2.4.1) на довільну функцію $\xi \in V$ і результат проінтегруємо по області Ω_F з використанням інтегрування частинами

$$\int_{\Omega_F} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^3 \rho\, u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_{\Omega_F} \rho\, f_i \xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(u, p_F) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds$$
$$- \int_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^3 \overline{\sigma}_{ik}(u, p_F) \overline{n}_{F_k} d\gamma = 0, i = \overline{1,3} \qquad (3.4.1)$$

Далі перейдемо до рівняння нерозривності (2.4.2). Домножимо це рівняння на $\theta \in Q$, де $Q = L^2(F)$. Проінтегрувавши його,будемо мати

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta \, ds + \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} \theta \, ds = 0 \tag{3.4.2}$$

Якщо водний потік є нестисливим, то густина ρ є постійна по часу і отримаємо

$$\int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \theta \, ds = \int_{\Omega_F} div \, u \; \theta ds \tag{3.4.3}$$

Перейдемо до інтегралу по границі області F , будемо мати

$$\int_{\partial\Omega_F} u.n_F \theta d\gamma - \int_F u.\nabla\theta ds = 0 \tag{3.4.4}$$

Розпишемо значення інтегралу в (3.4.4) через складові границі області Ω_F

$$\int_{\partial\Omega_F} u.n_F \theta d\gamma = \int_{\Gamma_F} u.n_F \theta d\gamma + \int_{\Gamma} u.n_F \theta d\gamma + \int_{\Lambda_F} u.n_F \theta d\gamma \tag{3.4.5}$$

Враховуючи те, що нормальні складові вектора швидкості на границі водозбору рівні нулю і кінематичну умову (2.4.8) , вираз (3.4.5) перепишемо

$$\int_{\Gamma} u.n_F \theta d\gamma + \int_{\Lambda_F} u_n^0 \, \theta d\gamma - \int_{\partial\Omega_F} u.\nabla\theta ds = 0 \tag{3.4.6}$$

Введемо простір:

$$W := \left\{ \ \psi \in H^1(\Omega_P) \,|\, \psi\,|_{\Gamma_p \cup \Omega_p} = 0 \right\} \tag{3.4.7}$$

Домножимо це рівняння на $\frac{\rho\, g\psi}{\omega}$ і проінтегруємо по області $\partial\Omega_P$

$$\int_{\Omega_P} m \frac{\rho\, g}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi\, dp = \int_{\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \frac{\rho\, g}{\omega} \psi\, dp + \int_{\Omega_P} \frac{\varepsilon\, \rho\, g}{\omega} \psi\, dp$$

Використаємо крайові умови в правій частині, для цього перейдемо до інтегрування по границі

$$\int_{\Omega_P} m \frac{\rho\, g}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi\ dp - \int_{\partial\Omega_P} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma + \int_{\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi \rho g) dp -$$
$$- \int_{\Omega_P} \frac{\varepsilon(x,t) \rho\, g \psi}{\omega} dp = 0 \tag{3.4.8}$$

Додамо вирази (3.4.1) та (3.4.8):

$$\sum_{i=1}^{3} [\int_{\Omega_F} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3} \rho\, u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_{\Omega_F} \rho\ f_i \xi_i ds\ + \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds$$
$$- \int_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma\ \ ] +$$
$$\int_{\Omega_P} m \frac{\rho\, g}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp - \int_{\partial\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_P} \rho g \psi\, d\gamma + \int_{\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi \rho g)\, dp -$$
$$- \int_{\Omega_P} \frac{\varepsilon(x,t) \rho\, g \psi}{\omega} dp = 0 \tag{3.4.9}$$

Розглянемо інтеграли на границях областей Ω_F і Ω_P :

$$-\int\limits_{\partial\Omega_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma - \int\limits_{\partial\Omega_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma$$

Розкладемо ці інтеграли по складових границі областей Ω_F і Ω_P:

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Lambda_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma - \int\limits_{\Gamma_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma \\
&-\int\limits_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k}\, d\gamma - \int\limits_{\Lambda_P} \sum_{j=1}^{3} k(x,t) \frac{\partial\varphi}{\partial n_P} \frac{\rho g \psi}{\omega} d\gamma - \\
&-\int\limits_{\Gamma_P} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma - \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n_P} \rho g \psi\, d\gamma
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Якщо область Ω є територією водозбору, то інтеграли на Γ_F будуть рівні нулю, так як на границі Ω вода стікає тільки всередину області.

Якщо вважати, що область Ω_P обмежена знизу поверхнею непроникливого шару (водопідпором) і частини до цієї поверхні не прилипають, то інтеграл по Λ_P буде також рівний нулю.

Проаналізуємо інтеграли на спільній границі Γ

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma - \int\limits_{\Gamma} k \frac{\partial\varphi}{\partial n_p} \psi \frac{\rho g}{\omega} d\gamma = \\
&= -\int\limits_{\Gamma} (\xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma + k \frac{\partial\varphi}{\partial n_p} \psi \frac{\rho g}{\omega}) d\gamma = \\
&= -\int\limits_{\Gamma} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma - \int\limits_{\Gamma} \frac{k}{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n_p} \psi \rho g d\gamma
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

З означення тензора напружень, будемо мати

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

тоді

$$\sigma_{nn}\ (u, p_F) = \left[(-p_F \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}).\bar{n}_{F_i} \right].\bar{n}_{F_i} =$$
$$= (-p_F \delta_{in} + 2\mu e_{in}).\bar{n}_{F_i} = \qquad (3.4.12)$$
$$= -p_F + 2\mu \nabla.u$$

$$\sigma_{\tau n}(u, p_F) = \left[(-p\ \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}).\bar{n}_{F_i} \right].\tau_i =$$
$$= \left[-p\ \delta_{in} + 2\mu e_{in} \right].\tau_i =$$
$$= 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right).\tau_i = \qquad (3.4.13)$$
$$= \mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) = \tau_{n\tau}(u)$$

Враховуючи умову нерозривності (3.4.3), вираз (3.4.11) запишеться

$$-\int_\Gamma (\xi_n p_F + \xi_\tau \tau_{\tau n} + k \frac{\nabla \varphi . n_P}{\omega} \psi \rho g) d\gamma \qquad (3.4.14)$$

Враховуючи суцільність середовища, з (3.4.14) запишемо умови поведінки потоків води на спільній границі Г:

1) $\sigma_{nn}(u, p_F) = p_p$,
2) $\sigma_{\tau n} = 0$, (3.4.15)
3) $u_n = -\upsilon_n$.

Проаналізуємо перший доданок у виразі (3.4.10), отримаємо

$$-\int_{\Lambda_F} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) n_{F_k} \, d\gamma = \\ -\int_{\Lambda_F} (\xi_n \sigma_{nn} + \xi_\tau \sigma_{\tau n}) d\gamma \tag{3.4.16}$$

Так як на поверхні потоку тиск рівний атмосферному тиску p_a, то

$$\sigma_{nn}(u, p_F) = p_a.$$

Також відомо, що складові напружень тертя на вільній поверхні потоку часто зумовлені дією вітру і з [6] візьмемо, що вони пропорційні квадрату швидкості потоку:

$$\tau_{in} = \chi \frac{\rho_a}{\rho} \upsilon_a^2 \cos\psi, i = 1,2;$$

де

ρ_a - густина повітря,

χ - емпіричний коефіцієнт напружень,

υ_a - швидкість вітру.

Спростимо доданки у виразі (3.4.9), які містять напруження:

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_F) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds \tag{3.4.17}$$

Розкладемо елементи вектора ξ через компоненти тензорів деформацій і поворотів

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) = e_{ik}(\xi) + \omega_{ik}(\xi)$$

Так як $\omega_{ik}(\xi)_{i,k=1}^{3}$ утворюють кососиметричну матрицю, то вираз (3.4.17) перепишеться:

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_P) e_{ik}(\xi) ds$$

Оскільки $\sigma_{ik} = -p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)$, тоді

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (-p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_F \delta_{ik} e_{ik}(\xi) ds +$$

$$+\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3} p_F e_{ii}(\xi) ds +$$

$$\int_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds = -\int_{\Omega_F} p_F div\xi ds + \int_{\Omega_F} 2\mu e(u) : e(\xi) ds$$

Спростимо інтеграл по області Ω_p

$$\int_{\Omega_p} \sum_{j=1}^{3} \frac{k(x,t)}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi \rho\, g) dp$$

Допустимо $\varphi \in H^1(\Omega_P), div \nabla \varphi \in L^2(\Omega_P),$ то в цьому випадку має місце формула Гріна:

$$\int_{\Omega_p} \frac{k(x,t)}{\omega} \nabla \varphi \cdot \nabla (\psi \rho\, g)\, dp = \int_{\partial\Omega_p} \frac{k(x,t) \cdot \nabla \varphi}{\omega} \cdot \overline{n}_p \rho\, g \psi d\gamma -$$

$$\int_{\Omega_p} div(\frac{k(x,t)\cdot\nabla\varphi}{\omega})\rho\ g\psi dp \tag{3.4.18}$$

З (2.4.9) на границі Γ_p задано швидкість потоку грунтової води:

$$-\frac{k(x,t)\nabla\varphi}{\omega}\cdot\overline{n}_p=\upsilon \tag{3.4.19}$$

Тоді (3.4.19) запишеться

$$\int_{\partial\Omega_p}\upsilon\rho\ g\psi\ d\gamma-\int_{\Omega_p} div(\frac{k(x,t)\cdot\nabla\varphi}{\omega})\rho\ g\psi dp=\int_{\Gamma_p}\upsilon\ \rho\ g\psi d\gamma+$$

$$\int_{\Lambda_P}\upsilon_n\rho\ g\psi d\gamma+\int_{\Gamma}\upsilon_n\rho\ g\psi d\gamma-\int_{\Omega_p} div\ \upsilon\ \rho\ g\psi dp$$

Введемо такі білінійні форми:

$$M_v(r;w,q)=\int_v\sum_{i=1}^{3}rw_iq_ids,$$

$$N_v(w;u,q)=\int_v\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho w_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}q_ids,$$

$$C_v(w,q)=\int_v 2\mu\ e(w):e(q)ds,$$

$$A_v(w,q)=-\int_v w\ divqds,$$

$$Y_v(w,q)=-\int_v w\ q_nd\gamma,$$

$$B_v(p,w)=-\int_v\sum_{i=1}^{3}p\ .\nabla wds.$$

Введемо простори:

$$H_F := \left\{ \xi \in (H^1(\Omega_F))^3 \mid \xi = 0 \text{ на } \Gamma \right\}$$

$$H_p := \left\{ \psi \in H^1(\Omega_p) \mid \psi = 0 \text{ на } \Gamma \right\}$$

$$W := H_F \times H_P$$

$$\Im_j : W \to R,\ j = \overline{1,3}$$

$$\left\langle \Im_1, \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_F} \rho f_i \xi_i ds + \int_{\Lambda_F} (\xi_n p_a + \xi_\tau \cdot \hat{\sigma}) d\gamma$$

$$\left\langle \Im_2, \theta \right\rangle = - \int_{\partial\Lambda_F} u_n^0\ \theta\ d\gamma$$

$$\left\langle \Im_3, \psi \right\rangle = \int_{\Omega_p} \frac{\varepsilon(x,t)\rho g \psi}{\omega} dp - \int_{\partial\Lambda_p} \upsilon\, \psi\, \rho\, g d\gamma$$

Позначимо

$$\tilde{\psi} = \psi\ \rho\ g\,, \tilde{m} = \frac{m}{\omega}\ ,$$

тоді запишемо наступну варіаційну задачу:

$$\begin{aligned} &\textit{Знайти } \{u, p, \varphi\} \in V \times Q \times W, \\ &M_F(\rho; u', \xi) + N_F(u; u, \xi) + A_F(p, \xi) + C_F(u, \xi) \\ &+ Y_\Gamma(u, \xi) = \left\langle \Im_1, \xi \right\rangle, \forall\, \xi \in V \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

$$B_F(u, \theta) + Y_\Gamma(\theta, u) = \left\langle \Im_2, \theta \right\rangle, \forall\, \theta \in Q \tag{3.4.21}$$

$$M_P(\tilde{m}; \varphi', \tilde{\psi}) + A_P(\tilde{\psi}, \upsilon) + Y_\Gamma(\tilde{\psi}, \upsilon) = \left\langle \Im_3, \tilde{\psi} \right\rangle, \forall \psi \in W \tag{3.4.22}$$

Обчислюємо, враховуючи початкові умови (2.4.12) та крайову умову (2.4.6)-(2.4.11), значення змінних u та p зі співвідношень (3.4.20) та (3.4.21). Далі з умов спряження (3.4.15) та крайової умови (2.4.9) обчислюємо з (3.4.22) значення змінної φ.

3.5 Висновки

Варіаційні задачі з використанням проекційно-сіткової схеми МСЕ. Для дискретизації задач в часі використовується однокрокова рекурентна схема та процедура методу Гальоркіна. При дискретизації задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні за просторовими змінними, використовуються кусково-лінійні апроксимації на трикутних елементах для розходів рідини зі сталою глибиною. При великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їх градієнти різко змінюються, в результаті чого отриманий розв'язок задачі втрачає свою стійкість та з'являються "паразитичні" осциляції. В даному розділі побудована стабілізаційна схему МСЕ для покращення розв’язку, що базується на основі функцій-бульбашок з використанням методу найменших квадратів. При великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) потоки та їх градієнти різко змінюються, в результаті чого отриманий розв'язок задачі стоку поверхневої води втрачає свою стійкість та з'являються “паразитичні” осциляції. На цей випадок побудовано стабілізаційну схему МСЕ, що базується на функціях-бульбашках із використанням методу найменших квадратів. Оскільки глибина рідини вважається сталою на одному скінченному елементі, то вона на поведінку розв’язку не впливає.

РОЗДІЛ IV. ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО СИСТЕМ ПРОЕКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

В цьому розділі будуть розглянуті питання стійкості і збіжності ітераційних інтервальних методів, в тому числі інтервального методу типу Рунге, та їх застосування до розв'язування систем проекційних рівнянь. Побудовано аналог інтервальних методів високих порядків збіжності, також розглянуто і досліджено рекурсивні двосторонні методи. Проведено оцінку глибини рекурсії цих двосторонніх методів. Для нелінійних систем з домінуючою діагоналю побудовано спеціальний вид інтервальних ітераційних методів і досліджено його збіжність.

4.1 Двохсторонні та інтервальні ітераційні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Двохсторонні методи чисельного аналізу з'явились раніше інтервальних. Саме в цьому і є перевага цих методів над іншими ітераційними методами, оскільки, оцінюючи розв'язок з обох сторін, ми не тільки точніше наближаємо розв'язок, але й отримуємо гарантовану оцінку наближення. Для отримання двохсторонніх оцінок застосовуються різні прийоми та методи, в тому числі операторні нерівності, апостеріорні та апріорні оцінки похибки, оцінки залишкових членів та інше.

Початок появі двохсторонніх методів було покладено наступним простим фактом. Розглянемо систему нелінійних алгебраічних рівнянь

$$u = Au + f, \tag{4.1.1}$$

де матриця A має невід'ємні елементи, тобто $A \geq 0$. Використаємо для її розв'язку ітераційний процес

$$u^n = Au^{n-1} + f,\ n = 1,2,\ldots, \tag{4.1.2}$$

з початковим наближенням u^0. Віднімаючи (4.1.1) з (4.1.2), будемо мати рівняння для похибки

$$u^n - u = A(u^{n-1} - u). \qquad (4.1.3)$$

Нехай u^0 мажорує точному розв'язку u, тобто їх компоненти задовільняють нерівності $u_i^0 \geq u_i$, що запишемо як $u^0 \geq u$. Тоді на основі (4.1.3) та властивості $A \geq 0$ випливає, що $u^n \geq u$ для всіх $n = 1,2,...$. Аналогічно з умови $u^0 \leq u$ випливає, що всі наступні наближення так само задовільняють цій умові $u^n \leq u$ для всіх $n = 1,2,...$. Таким чином, маючи двосторонні початкові наближення, при умові збіжності можна отримати звужуючу послідовність двосторонніх наближень до точного розв'язку u.

Але клас задач з такими матрицями досить вузький. Тому дальніший розвиток пішов у двох напрямках: для нелінійних операторів A та більш загальних умов, ніж монотонність Наприклад, Л.В. Канторовичем властивість монотонності $A \geq 0$ була замінена можливістю представлення матриці (лінійного оператора) у вигляді $A = A^+ - A^-$, де $A^+ \geq 0$, $A^- \geq 0$. У цьому випадку ітераційний процес має вигляд.

$$u^{n+1} = A^+ v^n - A^- v^n + f,$$
$$v^{n+1} = A^+ v^n - A^- u^n + f, \quad n=0,1,... . \qquad (4.1.4)$$

Якщо вибрати початкові наближення u^0, v^0 так, щоб для точного розв'язку u задачі (4.1.1) $u^0 \leq u \leq v^0$, тоді всі наступні наближення зберігають умови монотонності: $u^n \leq u \leq v^n$ для всіх $n = 0,1,...$. Таким чином, отримується послідовність наближень, яка обмежує розв'язок з двох сторін та звужується при умові збіжності. Сучасний стан цього напрямку досліджень можна застосовувати до лінійних та нелінійних алгебраічних задач.

Основний недолік цих методів полягає в тому, що ми не можемо врахувати вплив похибок з обчислень на комп'ютерах, похибок

заокруглень та похибок при завданні початкових даних. Саме для вирішення цих проблем можемо застосувати інтервальні методи.

Фактично інтервальні методи є розширенням двохсторонніх. Вони містять не тільки двосторонні оцінки, але й операції з інтервалами, які саме і ускладнюють їх реалізацію. Але в цьому є свої переваги: враховуються похибки заокруглень, початкових даних, похибки дискретизації чисельних методів та інші. Переваги та властивості інтервальних обчислень можуть бути використані при побудові оцінок для двохсторонніх методів.

Широке коло задач з багатьох областей, таких, як обчислення траєкторії руху або дослідження коливальних систем, може бути сформульовано в термінах крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Наприклад, для дослідження вимушених коливань простого маятника виникають задачі типу

$$u'' = c \sin u + g(t), 0 \le t \le 1, u(0) = u(1) = 0. \qquad (4.1.5)$$

Більш загальним чином, ця задача може бути записана

$$u'' = f(t,u), \ 0 \le t \le 1, u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \qquad (4.1.6)$$

для якої задача (4.1.5) є частковим випадком. Якщо припустити, що функція f двічі неперервно-диференційована на множині

$$S = \{(t,y) \mid 0 \le t \le 1, \ -\infty < y < +\infty\} \qquad (4.1.7)$$

і що

$$f_Y(t,y) \ge \eta, \ \forall (t,y) \in S, \qquad (4.1.8)$$

тоді задача (4.1.6) має єдиний двічі неперервно-диференційований розв’язок.

Щоб знайти числове наближення до розв’язку задачі (4.1.6), розглянемо спочатку наступний її дискретний аналог. Нехай

$$t_J = jh, h = 1/(n+1), \qquad j = 0,\ldots,n+1,$$

- рівномірне розбиття відрізку [0,1] та у кожній точці t_J, j = 1,...,n, друга похідна $u^{//}(t_J)$ апроксимується другою скінченною різницею:

$$u^{//}(t_J)=[u(t_{J+1})-2u(t_J)+u(t_{J-1})]/h^2,\ j = 1,...,n \qquad (4.1.9)$$

Якщо використати у (4.1.6) цю апроксимацію, то ми знайдемо, що розв'язок u задовольняє у вузлових точках $t_1,...t_n$ рівнянням

$$[u(t_{J+1})-2u(t_J)+u(t_{J-1})]/h^2 = f(t_J, u(t_J)) + r(t_J, h),\ j = 1,...,n. \qquad (4.1.10)$$

де r (t_J, h) - похибки зв'язані з апроксимацією (2.5).

Можна довести, що $\lim_{h\to 0} r(t_j,h) = 0$ для припущення що розв'язок u достатнє число раз неперервно-диференційований.

Відкинемо тепер у (4.1.10) залишкові члени та визначимо апроксимації $x_1,...,x_n$ до значень u у вузлових точках t_J. Для цього потрібно, щоб x_J задовольняли системі n рівнянь

$$x_{J+1} - 2x_J + x_{J-1} = h^2 f(t_J,x_J),\ j = 1,...,n,$$
$$x_0=\alpha,\ x_{n+1}=\beta. \qquad (4.1.11)$$

Якщо ми введемо n × n-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & & \dots \\ . & . & . & \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4.1.12)$$

та відображення $\Phi : R^n \to R^n$, яке визначається наступним чином

$$\Phi(x) = h^2 \begin{pmatrix} f(t_1,x_1) - (\alpha / h^2) \\ f(t_2,x_2) \\ . \ . \ . \\ f(t_{n-1},x_{n-1}) \\ f(t_n,x_n) - (\beta / h^2) \end{pmatrix}, \qquad (4.1.13)$$

тоді систему рівнянь (4.1.11) можна записати у вигляді

$$Ax + \Phi(x) = 0 \qquad (4.1.14)$$

Система (4.1.14) може бути зведена до наступної системи:

$$F(x) = 0. \qquad (4.1.15)$$

Для розв'язування цієї системи існує багато різних методів. Далі проаналізуємо та виберемо найбільш ефективні з них.

Одним з ефективних методів для розв'язування такого типу систем є двохсторонній метод Ньютона, який вимагає, щоб виконувались наступні умови:

відображення F: $D \subset R^n \to R^n$ G-диференційоване та опукле на інтервалі (x^0,y^0), де

$$x^0 \le y^0,\ (x^0,y^0) \subset D,\ Fx^0 \le 0 \le Fy^0; \qquad (4.1.16)$$

матриця $F^{/}(y^k)^{-1}$ існує і невід'ємна.

Тоді двосторонній метод Ньютона збігається до розв'язку за формулами

$$y^{k+1} = y^k - F^{/}(y^k)^{-1}F(y^k),\ k = 0,1,..., \qquad (4.1.17)$$

$$x^{k+1} = x^k - F^{/}(y^k)^{-1}F(x^k),\ k = 0,1,... . \qquad (4.1.18)$$

Для розв'язування системи типу (4.1.17)-(4.1.18) можна застосовувати двохсторонні методи з інтервальними елементами. Вони зручні тим, що на функцію $F(x)$ накладається менше обмежень у порівнянні з методами (4.1.17),-(4.1.18), наприклад нехтується умовою опуклості функції.

Розглянемо загальну ітераційну схему [1] одного з таких видів двохсторонніх методів

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(k)}, \\ y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}),\ 0 \le r \le l, \\ y^{(k+1)} = y^{(k,l+1)}, \\ x^{(k,0)} = x^{(k)}, \\ x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(x^{(k,r)}),\ 0 \le r \le l, \\ x^{(k+1)} = x^{(k,l+1)}, \\ P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu} [B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I]^{\mu},\ k \ge 0. \end{cases} \qquad l,m \in N \qquad (4.1.19)$$

Будемо розглядати її при різних значеннях l та m ($l=0$, $m=0$; $l=0$, m-довільне; $l=m$). У даній ітераційній схемі застосовується наближення оберненої матриці до матриці $B(x^{(k)},y^{(k)})$. Але можливий випадок, коли матриця обертається точно

$$\begin{cases} y^{(k+1)} = y^{(k)} - P^{(k)} f(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - P^{(k)} f(x^{(k)}), \\ P^{(k)} = B(x^{(k)}, y^{(k)})^{-1}, \ \mathrm{k} \geq 0. \end{cases} \tag{4.1.20}$$

Елементи інтервального аналізу застосовуються лише для оцінки матриці $B(x^{(k)},y^{(k)})$, яка обчислюється як верхня оцінка відповідного інтервального розширення. Далі розглянемо метод (4.1.19) при l=0, m=1 та дослідимо його збіжність.

4.2 Стійкість інтервального ітераційного методу типу Рунге.

Ми будемо розглядати питання збіжності методів близьких в сенсі операторної норми до інтервального методу типу Рунге (4.1.19)-(4.1.20). Близькими будемо вважати методи, породжені апроксимацією оберненого оператора $1/4\,f'(x^{(k)})+3/4\,f'(x^{(k)}+2/3(X^{(k)}-x^{(k)}))^{-1}$ і вибором початкових операторів в апроксимаціях.

Стійкість методу (4.1.19)-(4.1.20) полягає: по-перше, в збіжності до одного і того ж граничного елементу про описаних вище збуреннях; по-друге, в збереженні порядку збіжності методу. Діапазон стійкості методу (4.1.19)-(4.1.20) з двох вище вказаних причин вказані у вигляді умов теореми 12. Результати цього досліджені природнім чином узагальнюються на збурення більш загального виду, так званими,

ітераційними рекурсіями, побудованими на основі методу (4.1.19)-(4.1.20).

Стійкість методу (4.1.19)-(4.1.20) була доведена в [18], але тут ми приведемо більш вдосконалений варіант твердження і його доведення, більше того, ми уточнимо оцінки отримані у [18]. Наші узагальнення і уточнення викладеніі в наступному твердженні.

Теорема 12. Нехай для точок $x, y \in [x^{(0)}, y^{(0)}] \subset D \subset R_n, (x \le y)$ виконуються умови:

1) відображення $f : D \subset R^n \to R^n$ двічі неперервно диференційоване за Фреше і

$$f(x^{(0)}) \le 0 \le f(y^{(0)});$$

2) відображення

$$A : ((x, y) \Big| [x^{(0)}, y^{(0)}] \times \Big| [x^{(0)}, y^{(0)}]) \to R^n \times R^n, \tag{4.2.1}$$

де $f(x) - f(y) = A(x, y)(x - y);$

3) неперервне відображення

$$B : ((x, y) \Big| [x^{(0)}, y^{(0)}] \times \Big| [x^{(0)}, y^{(0)}]) \to R^n \times R^n, \tag{4.2.2}$$

де $B = B(x, y) = 1/4 f'(y) + 3/4 f'(y + 2/3(x - y))$;

задовільняють співвідношення:

а) $B(\bar{x}, \bar{y}) \le B(x, y)$, якщо $x \le \bar{x} \le \tilde{y} \le y,$,

б) $A(x, y) \le B(x, y);$,

в) існує $B(x, y)^{-1}$ і $B(x, y)^{-1} \ge 0;$

4) матриця $P^{(0)} \in R^n \times R^n$ невироджена і:

а) $B(x^{(0)}, y^{(0)})P^{(0)} \le I$ (I − одинична матриця);

б) $P^{(0)} B(x^{(0)}, y^{(0)}) \le I;$

в) $P^{(0)} \ge 0.$

Тоді послідовності $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}, \{y^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}, \{P^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ визначені за формулами

$$\begin{cases} y^{(k+1)} = y^{(k)} - P^{(k)} f(y^{(k)}); \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - P^{(k)} f(x^{(k)}); \\ P^{(k+1)} = P^{(k)}(I + (I - B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})P^{(k)})(2I - B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})P^{(k)})); \end{cases} \quad (4.2.3)$$

задовільняють співвідношення:

$$x^{(0)} \le x^{(1)} \le .... \le x^{(k)} \le x^{(k+1)} \le y^{(K+1)} \le y^{(k)} \le ... \le y^{(1)} \ \le y^{(0)}; \quad (4.2.4)$$

$$f(x^{(k)}) \le 0 \ge f(y^{(k)}); \quad (4.2.5)$$

$$P^{(0)} \le P^{(1)} \le ... \le P^{(k)} \le P^{(k+1)} \le ...; \quad (4.2.6)$$

$P^{(k)}$ - невироджені; (4.2.7)

$$B(x^{(k)}, y^{(k)})P^{(k)} \le I; \quad (4.2.8)$$

$$P^{(k)} B(x^{(k)}, y^{(k)}) \le I; \quad (4.2.9)$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*, \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^* \text{ і } x^* = y^*; \quad (4.2.10)$$

$$P^* = \lim_{k\to\infty} P^{(k)} = B(x^*, y^*)^{-1}; \quad (4.2.11)$$

$$\lim_{k\to\infty} P^{(k)} = f'(x^*)^{-1}; \quad (4.2.12)$$

$$f(x^*) = f(y^*) = 0; \quad (4.2.13)$$

Всі розв'язки $\tilde{z}^*$ системи $f(x) = 0,$ належать інтервалу $[x^{(0)}, y^{(0)}]$, задовільняють умову

$$x^* \le \tilde{z}^* \le y^*. \quad (4.2.14)$$

Якщо для $f(x)$, крім цього, існує третя похідна за Фреше і вона задовільняє умову Ліпшіца:

$$\| f'''(x) - f'''(y) \| \le c \| x - y \|, (c - const), \quad (4.2.15)$$

тоді послідовності

$\{[x^{(k)}, y^{(k)}]\}_{k=0}^{\infty}, \{P^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \in I(R^n)$ збігаються відповідно до $[x^*, y^*], P^*,$ крім цього, порядок збіжності не нижче 3.

Доведення.

Доведення співвідношень (4.2.10)-(4.2.14) проводиться аналогічно *теоремі 1.21*[190]. Для встановлення збіжності послідовності $P^{(k)}$ розкладемо $B(x,y)$ наступним чином

$$B(x,y)=\frac{1}{4}f'(x)+\frac{3}{4}f'(x+\frac{2}{3}(y-x))=$$
$$\frac{1}{4}f'(x)+\frac{3}{4}(f'(x)+f''(x)\frac{2}{3}(y-x)+\frac{1}{2!}f'''(x+\frac{2}{3}\theta_1^3(y-x))(\frac{2}{3}(y-x))^2),\ 0<\theta_1^3<1. \qquad (4.2.16)$$
$$B(x,y)=f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)(y-x)+\frac{1}{3!}f'''(x+\frac{2}{3}\theta_1^3(y-x))(y-x)^2 .$$

Для функції $f(z)$ з теореми Тейлора маємо

$$f(z)=f(x)+(z-x)f'(x)+\frac{1}{2!}(z-x)^2f''(x)+\frac{1}{3!}(z-x)^3f'''(x+\theta_0^3(z-x)), \qquad (4.2.17)$$
де $0<\theta_0^3<1$.

Аналогічно до $f(x)$, для $f'(x)$ можемо записати

$$f'(z)=f'(x)+(z-x)f''(x)+\frac{1}{2!}(z-x)^2f'''(x+\theta_0^{3f}(z-x)),\ 0<\theta_0^{3f}<1.$$

З попереднього співвідношення і (4.2.15) маємо

$$\left\|f'(z)-B(x,y)\right\|\le\left\|(f''(x)-\frac{1}{2!}f''(x))(y-x)\right\|\le c\left\|x-y\right\| \quad , \qquad (4.2.18)$$

де $x^{(0)}\le x\le z\le y\le y^{(0)}$.

З (4.2.18) та (4.2.15) випливає (4.2.9) [190].

Встановимо порядок збіжності методу (4.2.3). З співвідношення (4.2.16) випливає

$$B\ (x^*, y^{(k)}) = f^{/}(x^*) + \frac{1}{2!} f^{//}(x^*)(y^{(k)} - x^*) + \frac{1}{3!} f^{///}(x^* + \frac{2}{3}\theta_1^{3B^{/}}(y^{(k)} - x^*))(y^{(k)} - x^*)^2 \tag{4.2.19}$$

З (4.2.17) та (4.2.2) можемо записати

$$A\ (x^*, y^{(k)}) = f^{/}(x^*) + \frac{1}{2!} f^{//}(x^*)(y^{(k)} - x^*) + \frac{1}{3!} f^{///}(x^* + \theta_1^{3A}(y^{(k)} - x^*))(y^{(k)} - x^*)^2, \tag{4.2.20}$$

$$f(y^{(k)}) = -A(x^{(k)}, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}). \tag{4.2.21}$$

З допомогою співвідношень (4.2.5), (4.2.14) та (4.2.15) будемо мати $P^{(k)} \le B(x^{(k)}, y^{(k)})^{-1}$. На основі (4.2.3) отримаємо

$$B(x^*, y^{(k)}) \le B(x^{(k)}, y^{(k)}),\ B(x^{(k)}, y^{(k)})^{-1} \le B(x^*, y^{(k)})^{-1},$$

тобто $P^{(k)} \le B(x^*, y^{(k)})^{-1}$. З того що $P^{(k+1)} \ge P^{(k)}$ виконується нерівність

$$P^{(k+1)} - B(x^*, y^{(k)})^{-1} \le P^{(k+1)} - P^{(k)}. \tag{4.2.22}$$

Аналогічно (4.2.22), запишемо

$$P^{(k+1)} - P^{(k)} \le P^* - P^{(k)}. \tag{4.2.23}$$

За допомогою (4.2.21) для методу (4.2.9) отримаємо

$$y^{(k+1)} - x^* = y^{(k)} - x^* - P^{(k)} f(y^{(k)}) + P^{(k+1)} f(y^{(k)}) - P^{(k+1)} f(y^{(k)}) = y^{(k)} - x^* +$$
$$(P^{(k+1)} - P^{(k)}) f(y^{(k)}) + P^{(k+1)} (f(x^*) - f(y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)})) +$$
$$P^{(k+1)} B(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}) = (P^{(k+1)} - P^{(k)}) f(y^{(k)}) + P^{(k+1)} (A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)})) \times$$
$$(x^* - y^{(k)}) + (P^{(k+1)} - B(x^*, y^{(k)})^{-1}) B(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}) = -(P^{(k+1)} - P^{(k)}) A(x^*, y^{(k)}) \times$$
$$(x^* - y^{(k)}) + P^{(k+1)} (A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}))(x^* - y^{(k)}) + (P^{(k+1)} - B(x^*, y^{(k)})^{-1}) \times$$
$$B(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}).$$

Враховуючи (4.2.22) та (4.2.22), далі запишемо

$$y^{(k+1)} - x^* \le -(P^{(k+1)} - P^{(k)}) A(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}) + (P^{(k+1)} - P^{(k)}) B(x^*, y^{(k)})(x^* - y^{(k)}) +$$
$$P^{(k+1)} (A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}))(x^* - y^{(k)}) = (P^{(k+1)} - P^{(k)})(B(x^*, y^{(k)}) - A(x^*, y^{(k)})) \times$$
$$(x^* - y^{(k)}) + P^{(k+1)} (A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}))(x^* - y^{(k)}) \le (P^* - P^{(k)})(B(x^*, y^{(k)}) - A(x^*, y^{(k)})) \times$$
$$(x^* - y^{(k)}) + P^{(k+1)} (A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}))(x^* - y^{(k)}).$$

Оцінимо норму $y^{(k+1)} - x^*$, тобто

$$\left\| y^{(k+1)} - x^* \right\| \le \left\| P^* - P^{(k)} \right\| \cdot \left\| B(x^*, y^{(k)}) - A(x^*, y^{(k)}) \right\| \cdot \left\| x^* - y^{(k)} \right\| +$$
$$\left\| P^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}) \right\| \cdot \left\| x^* - y^{(k)} \right\|.$$

Для $\left\| A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}) \right\|$ на основі (4.2.19), (4.2.20) та (4.2.18) маємо

$$\left\| A(x^*, y^{(k)}) - B(x^*, y^{(k)}) \right\| \le \frac{1}{3!} \left\| f^{///}(x^* + \theta_1^{3A}(y^{(k)} - x^*)) - f^{///}(x^* + \frac{2}{3}\theta_1^{3B'}(y^{(k)} - x^*)) \right\| \times$$
$$\left\| y^{(k)} - x^* \right\|^2 \le \frac{1}{3!} \cdot \theta \cdot c_1 \cdot \left\| y^{(k)} - x^* \right\|^3 \le k \left\| y^{(k)} - x^* \right\|^3, \ \theta = \theta_1^{3A} - \theta_1^{3B'}.$$

Отже, отримали наступну оцінку

$$\left\| y^{(k+1)} - x^* \right\| \le k \left\| y^{(k)} - x^* \right\|^4 \cdot \left\| P^* - P^{(k)} \right\| + \left\| P^{(k+1)} \right\| \cdot \left\| y^{(k)} - x^* \right\|^4 \le k_1 \cdot L \left\| y^{(k)} - x^* \right\|^4, \quad (4.2.24)$$

де $L = \max\{\left\| P^* - P^{(k)} \right\|, \left\| P^{(k+1)} \right\|\}$.

Аналогічно, можемо довести, що

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le L_2 \left\|x^{(k)} - x^*\right\|^4 \qquad (4.2.25)$$

Використовуючи властивості монотонності норми і теорему про еквівалентність норм, можемо записати (4.2.24), (4.2.25) наступним чином

$$\left\|y^{(k+1)} - x^*\right\| \le L_1 \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\| , \qquad (4.2.25^{/})$$

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le L_2 \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\| . \qquad (4.2.25^{//})$$

Введемо позначення $B^{(k+1)}=B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})$. З умови (4.2.9) отримаємо

$$\begin{aligned} &P^{(k+1)} - P^* = P^{(k)} - P^* + P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)} - I)^2 - P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)} - I) = P^{(k)} \\ &-P^* + P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - 2B^{(k+1)}P^{(k)} + I) - P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)} + P^{(k)} = P^{(k)} - \\ &P^* + P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - 2P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)} + P^{(k)} - P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)} + P^{(k)} = \\ &3P^{(k)} - P^* - 3P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)} + P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^2. \end{aligned} \qquad (4.2.26)$$

Для наступного виразу запишемо

$$\begin{aligned} &(P^{(k)} - P^*)(f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 = (P^{(k)} - P^*)(I - f'(x^*)P^{(k)})^2 = (P^{(k)} - P^*)\times \\ &(I - 2f'(x^*)P^{(k)} + (f'(x^*)P^{(k)})^2) = P^{(k)} - P^* - 2P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)} + 2P^*f'(x^*)P^{(k)} - \\ &P^*(f'(x^*)P^{(k)})^2 + P^{(k)}(f'(x^*)P^{(k)})^2 = 3P^{(k)} - P^* - 2P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)} - P^*(f'(x^*) \\ &P^{(k)})^2 + P^{(k)}(f'(x^*)P^{(k)})^2 = 3P^{(k)} - P^* - 3P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)} + P^{(k)}(f'(x^*)P^{(k)})^2 \end{aligned} \qquad (4.2.27)$$

Використавши (4.2.27), вираз (4.2.26) запишеться

$$P^{(k+1)} - P^* = (P^{(k)} - P^*)(f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 + 3P^{(k)} f'(x^*)P^{(k)} - 3P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)} + P^{(k)} \times (B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - P^{(k)}(f'(x^*)P^{(k)})^2 = (P^{(k)} - P^*)(f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 + 3P^{(k)}(f'(x^*) - B^{(k+1)})P^{(k)} + P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - (f'(x^*)P^{(k)})^2) = (P^{(k)} - P^*)(f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 + 3P^{(k)}(f'(x^*) - B^{(k+1)})P^{(k)} + P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - B^{(k+1)}P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)} + B^{(k+1)}P^{(k)}f'(x^*) P^{(k)} - (f'(x^*)P^{(k)})^2) = (P^{(k)} - P^*)(f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 + 3P^{(k)}(f'(x^*) - B^{(k+1)})P^{(k)} + P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}(B^{(k+1)} - f'(x^*))P^{(k)} + (B^{(k+1)} - f'(x^*))P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)}) = (P^{(k)} - P^*) \times (f'(x^*)(P^* - P^{(k)}))^2 + P^{(k)}(3I - B^{(k+1)}P^{(k)})(f'(x^*) - B^{(k+1)})P^{(k)} + P^{(k)}(B^{(k+1)} - f'(x^*)) \times P^{(k)}f'(x^*)P^{(k)}. \quad (4.2.28)$$

Розглянемо норму

$$\|3I - B^{(k+1)}P^{(k)}\| = \|f'(x^*)P^* - f'(x^*)P^{(k)} + f'(x^*)P^{(k)} - B^{(k+1)}P^{(k)} + 2I\| \le \|f'(x^*)\| \cdot \|P^* - P^{(k)}\| + \|f' - B^{(k+1)}\| \cdot \|P^{(k)}\| + 2 .$$

Використаємо її для наступної оцінки

$$\|P^{(k+1)} - P^*\| \le \|f'(x^*)\| \cdot \|P^{(k)} - P^*\|^3 + \|P^{(k)}\|^2 \|3I - B^{(k+1)}P^{(k)}\| \cdot \|f'(x^*) - B^{(k+1)}\| + \|P^{(k)}\|^3 \|f'(x^*)\| \cdot \|B^{(k+1)} - f'(x^*)\| \le \|f'(x^*)\| \cdot \|P^{(k)} - P^*\|^3 + \|P^{(k)}\|^2 \cdot \|f'(x^*)\| \cdot \|P^* - P^{(k)}\| \times \|f'(x^*) - B^{(k+1)}\| + \|P^{(k)}\|^3 \cdot \|f'(x^*) - B^{(k+1)}\|^3 + 2\|P^{(k)}\|^2 \cdot \|f'(x^*) - B^{(k+1)}\| + \|P^{(k)}\|^3 \cdot \|f'(x^*)\| \cdot \|B^{(k+1)} - f'(x^*)\|. \quad (4.2.29)$$

На основі (4.2.18), можемо записати $\|f'(x^*) - B^{(k+1)}\| \le c\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\|$. З (4.2.25$^{/}$) та (4.2.25$^{//}$) отримаємо

$$\|y^{(k+1)} - x^{(k+1)}\| \le K\|y^{(k)} - x^{(k)}\|^4 . \quad (4.2.30)$$

Введемо норму для матриць $A=(v,B) \in M_{n,n+1}(R)$

$$\|A\| = \max\{\|v\|, \|B\|\}$$

і позначимо $d^{(k)} = \|(y^{(k)} - x^{(k)}), (P^* - P^{(k)})\|$. Тоді справедливе співвідношення

$$\left\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\right\| \le \gamma_1 (d^{(k)})^3 + \gamma_2 (d^{(k)})^5 + \gamma_3 (d^{(k)})^4 + \gamma_4 \left\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right\|^3 \le \mu (d^{(k)})^3.$$

Таким чином, теорема доведена.

Метод (4.2.3) можна легко модифікувати в метод з більш високим порядком збіжності. Для цього зберігаємо матрицю $P^{(k)}$ незмінною протягом декількох кроків. Таким чином, отримаємо наступний алгоритм:

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(k)}, \\ y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}), 0 \le r \le m, \\ y^{(k+1)} = y^{(k,m+1)}, \\ x^{(k,0)} = x^{(k)}, \\ x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(x^{(k,r)}), 0 \le r \le m, \\ x^{(k+1)} = x^{(k,m+1)}, \\ P^{(k+1)} = P^{(k0} + P^{(k)} \sum\limits_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu} \left[B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I \right], k \ge 0. \end{cases} \tag{4.2.31}$$

Цей метод збігається в умовах теореми 12 і дослідимо його порядок збіжності. Покажемо уточнення оцінок зроблених в [18].

4.2.1 Аналіз порядку збіжності методу наближення оберненої матриці.

Дослідимо можливість підвищити порядок збіжності методу отримання оберненої матриці, так як це суттєво впливає на збіжність методу (4.2.3). Розглянемо для цього $P^{(k+1)}$ у виді

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu} (B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I)^{\mu}, \tag{4.2.32}$$

Покажемо, чи збільшення m приводить до підвищення порядку збіжності методу (4.2.3). Дослідження будемо проводити при виконанні умов *теореми1*.

Введемо наступні позначення: $B^{(k+1)}=B(x^{(k+1)},y^{(k+1)}),\ f^{/}=f^{/}(x^{*})$.

Розглянемо різницю $P^{(k+1)}-P^{(k)}$ при $m=2$. Таким чином, будемо мати

$$P^{(k+1)}-P^{*}=P^{(k)}-P^{*}-P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}-I)+P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}-I)^{2}-P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}-I)^{3}=$$
$$P^{(k)}-P^{*}-P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}+P^{(k)}+P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}-2P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}+P^{(k)}-P^{(k)}\times$$
$$(B^{(k+1)}P^{(k)})^{3}+3P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}-3P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}+P^{(k)}=4P^{(k)}-P^{*}-6P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}+$$
$$4P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}-P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{3}.$$

(4.2.33)

За допомогою розкладу

$$(P^{(k)}-P^{*})(f^{/}(P^{*}-P^{(k)}))^{3}=(P^{(k)}-P^{*})(I-f^{/}P^{(k)})^{3}=(P^{(k)}-P^{*})(I-3f^{/}P^{(k)}+$$
$$3(f^{/}P^{(k)})^{2}-(f^{/}P^{(k)})^{3})=P^{(k)}-3P^{(k)}f^{/}P^{(k)}+3P^{(k)}(f^{/}P^{(k)})^{2}-P^{(k)}(f^{/}P^{(k)})^{3}-P^{*}+3P^{(k)}-$$
$$3P^{*}(f^{/}P^{(k)})^{2}+P^{*}(f^{/}P^{(k)})^{3}=4P^{(k)}-P^{*}-6P^{(k)}f^{/}P^{(k)}+4P^{(k)}(f^{/}P^{(k)})^{2}-P^{k}(f^{/}P^{(k)})^{3}$$

формула (4.2.33) перепишеться у вигляді

$$P^{(k+1)}-P^{*}=(P^{(k)}-P^{*})(f^{/}(P^{*}-P^{(k)}))^{3}+6P^{(k)}f^{/}P^{(k)}-6P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}-4P^{(k)}(f^{/}P^{(k)})^{2}+$$
$$4P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}+P^{(k)}(f^{/}P^{(k)})^{3}-P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)})^{3}=(P^{(k)}-P^{*})(f^{/}(P^{*}-P^{(k)}))^{3}+$$
$$6P^{(k)}(f^{/}-B^{(k+1)})P^{(k)}+4P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}-(f^{/}P^{(k)})^{2})+$$
$$P^{(k)}((f^{/}P^{(k)})^{3}-(B^{(k+1)}P^{(k)})^{3}).$$

(4.2.34)

Справедливі наступні рівності

$$(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}-(f^{/}P^{(k)})^{2}=(B^{(k+1)}P^{(k)})^{2}+B^{(k+1)}P^{(k)}f^{/}P^{(k)}-B^{(k+1)}P^{(k)}f^{/}P^{(k)}-(f^{/}P^{(k)})^{2}=$$
$$B^{(k+1)}P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}-f^{/}P^{(k)})+(B^{(k+1)}P^{(k)}-f^{/}P^{(k)})f^{/}P^{(k)}=B^{(k+1)}P^{(k)}(B^{(k+1)}-f^{/})P^{(k)}+$$
$$(B^{(k+1)}-f^{/})P^{(k)}f^{/}P^{(k)};$$

(4.2.35)

$$(f'P^{(k)})^3 - (B^{(k+1)}P^{(k)})^3 = (f'P^{(k)})^3 + B^{(k+1)}P^{(k)}(f'P^{(k)})^2 - B^{(k+1)}P^{(k)}(f'P^{(k)})^2 -$$
$$(B^{(k+1)}P^{(k)})^3 = (f'P^{(k)} - B^{(k+1)}P^{(k)})(f'P^{(k)})^2 + B^{(k+1)}P^{(k)}((f'P^{(k)})^2 - (B^{(k+1)}P^{(k)})^2) =$$
$$(f' - B^{(k+1)})P^{(k)}(f'P^{(k)})^2 + B^{(k+1)}P^{(k)}((f'P^{(k)})^2 - (B^{(k+1)}P^{(k)})^2). \qquad (4.2.36)$$

Враховуючи (4.2.35) і (4.2.36), (4.2.33) прийме вигляд

$$P^{(k+1)} - P^* = (P^{(k)} - P^*)(f'(P^* - P^{(k)}))^3 + 6P^{(k)}(f' - B^{(k+1)})P^{(k)} + 4P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^2 -$$
$$(f'P^{(k)})^2) + P^{(k)}(f' - B^{(k+1)})P^{(k)}(f'P^{(k)})^2 + P^{(k)}B^{(k+1)}P^{(k)}((f'P^{(k)})^2 - (B^{(k+1)}P^{(k)})^2) =$$
$$(P^{(k)} - P^*)(f'(P^* - P^{(k)}))^3 + P^{(k)}(f' - B^{(k+1)})P^{(k)}(6I + (f'P^{(k)})^2) + (4I - P^{(k)}B^{(k+1)}) \times$$
$$P^{(k)}((B^{(k+1)}P^{(k)})^2 - (f'P^{(k)})^2) = (P^{(k)} - P^*)(f'(P^* - P^{(k)}))^3 + P^{(k)}(f' - B^{(k+1)})P^{(k)} \times$$
$$(6I + (f'P^{(k)})^2) + (4I - P^{(k)}B^{(k+1)})P^{(k)}(B^{(k+1)}P^{(k)}(B^{(k+1)} - f')P^{(k)} +$$
$$(B^{(k+1)} - f')P^{(k)}f'P^{(k)}) \qquad (4.2.37)$$

Перетворимо вираз $4I - P^{(k)}B^{(k+1)}$ наступним чином

$$4I - P^{(k)}B^{(k+1)} = 4P^*f' - 4P^{(k)}f' + P^{(k)}f' - P^{(k)}B^{(k+1)} + 3P^{(k)}f' = 4(P^* - P^{(k)})f' +$$
$$P^{(k)}(f' - B^{(k+1)}) + 3P^{(k)}f', \qquad (4.2.38)$$

$$B^{(k+1)}P^{(k)} = B^{(k+1)}P^{(k)} - f'P^{(k)} + f'P^{(k)} = (B^{(k+1)} - f')P^{(k)} + f'P^{(k)}. \qquad (4.2.39)$$

За допомогою (4.2.38) та (4.2.39), (4.2.33) запишеться у вигляді

$$P^{(k+1)} - P^* = (P^{(k)} - P^*)(f'(P^* - P^{(k)}))^3 + P^{(k)}(f' - B^{(k+1)})P^{(k)}(6I + (f'P^{(k)})^2) +$$
$$(4(P^* - P^{(k)})f' + P^{(k)}(f' - B^{(k+1)}) + 3P^{(k)}f')P^{(k)}(((B^{(k+1)} - f')P^{(k)} + f'P^{(k)})(B^{(k+1)} - f') \times$$
$$P^{(k)} + (B^{(k+1)} - f')P^{(k)}f'P^{(k)}). \qquad (4.2.40)$$

З (4.2.40) оцінимо норму

$$\left\|P^{(k+1)} - P^*\right\| \le \left\|f'\right\| \cdot \left\|P^* - P^{(k)}\right\|^4 + \left\|K_1\right\| \cdot \left\|f' - B^{(k+1)}\right\| + \left\|K_2\right\| \cdot \left\|P^* - P^{(k)}\right\| \cdot \left\|B^{(k+1)} - f'\right\| + \left\|K_3\right\| \times$$

$$\left\|P^* - P^{(k)}\right\| \cdot \left\|B^{(k+1)} - f'\right\|^2 + \left\|K_4\right\| \cdot \left\|B^{(k+1)} - f'\right\|^3 + \left\|K_5\right\| \cdot \left\|B^{(k+1)} - f'\right\|^2,$$

тоді

$$\left\|P^{(k+1)} - P^*\right\| \le l\left\|P^* - P^{(k)}\right\|^4 + k\left\|B^{(k+1)} - f'\right\|.$$

За допомогою (2.22), (2.34), (2.35) отримаємо

$$\left\|P^{(k+1)} - P^*\right\| \le \lambda \cdot (d^{(k)})^4$$

При підвищенні *m(m>2)* у співвідношенні (4.2.31), збіжність методу покращуватись не буде, оскільки при оцінці норми постійно залишається доданок $\left\|B^{(k+1)} - f'\right\|$, від якого і буде залежати порядок збіжності.

4.2.2 Оцінка оптимальної глибини рекурсії.

Для практичного застосування методів (1.1) важливим є питання вибору оптимальної глибини рекурсії (параметр *l=p*). Методику оцінки глибини рекурсії можна знайти в роботах [3], [8]. Для нашого випадку застосуємо інший підхід.

Встановимо глибину рекурсії методу (1.1) при $P^{(k)}=B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}$. Для цього оцінимо різницю $x^{(k,p+1)}-y^{(k,p+1)}$. Введемо позначення $A^{(k,p)}=A(x^{(k,p)},y^{(k,p)})$

$$\mathrm{x}^{(\mathrm{k,p+1})} - \mathrm{y}^{(\mathrm{k,p+1})} = \mathrm{x}^{(\mathrm{k,p})} - \mathrm{y}^{(\mathrm{k,p})} + \mathrm{P}^{(\mathrm{k})}(\mathrm{f}(\mathrm{y}^{(\mathrm{k,p})}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^{(\mathrm{k,p})})) = \mathrm{x}^{(\mathrm{k,p})} - \mathrm{y}^{(\mathrm{k,p})} + \mathrm{P}^{(\mathrm{k})}\mathrm{A}^{(\mathrm{k,p})} \times (\mathrm{y}^{(\mathrm{k,p})} - \mathrm{x}^{(\mathrm{k,p})}) = (\mathrm{I} - \mathrm{P}^{(\mathrm{k})}\mathrm{A}^{(\mathrm{k,p})})(\mathrm{x}^{(\mathrm{k,p})} - \mathrm{y}^{(\mathrm{k,p})}). \tag{4.2.41}$$

Аналогічно отримаємо

$$x^{(k,p)} - y^{(k,p)} = (I - P^{(k)} A^{(k,p-1)})(x^{(k,p-1)} - y^{(k,p-1)}).$$

Вираз (4.2.41) запишеться у вигляді

$$x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)} = (I - P^{(k)} A^{(k,p)})(I - P^{(k)} A^{(k,p-1)})(x^{(k,p-1)} - y^{(k,p-1)}).$$

Продовжуючи цей процес, будемо мати

$$x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)} = (I - P^{(k)} A^{(k,p)})(I - P^{(k)} A^{(k,p-1)}) \cdot \ldots \cdot (I - P^{(k)} A^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}), \qquad (4.2.42)$$

де $A^{(k)} = A^{(k,0)}$, $x^{(k)} = x^{(k,0)}$, $y^{(k)} = y^{(k,0)}$.

Розкладемо наступний вираз

$$I - P^{(k)} A^{(k,p)} = P^{(k)} B^{(k)} - P^{(k)} A^{(k,p)} = P^{(k)} (B^{(k)} - A^{(k,p)}).$$

Використовуючи розклади (2.23) та (2.24) далі запишемо

$$B^{(k)} - A^{(k,p)} = f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k,p)}) + \frac{1}{2!}(f''(x^{(k)})(y^{(k)} - x^{(k)}) - f''(x^{(k,p)})(y^{(k,p)} - x^{(k,p)})) +$$
$$\frac{1}{3!}(f'''(x^{(k)} + \frac{2}{3}\theta_1(y^{(k)} - x^{(k)}))(y^{(k)} - x^{(k)})^2 - f'''(x^{(k,p)} + \theta_2(y^{(k,p)} - x^{(k,p)}))(y^{(k,p)} - x^{(k,p)})^2),$$

де $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

Оцінимо наступну норму

$$\begin{aligned} &\left\|B^{(k)} - A^{(k,p)}\right\| \le \left\|f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k,p)})\right\| + \frac{1}{2!}\left\|f''(x^{(k)})\right\| \cdot \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\| + \frac{1}{2!}\left\|f''(x^{(k,p)})\right\| \times \\ &\left\|y^{(k,p)} - x^{(k,p)}\right\| + \left\|f_1'''\right\| \cdot \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|^2 + \left\|f_2'''\right\| \cdot \left\|y^{(k,p)} - x^{(k,p)}\right\|^2 \le c_1\left\|x^{(k)} - x^{(k,p)}\right\| + \\ &c_2\left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\| + c_3\left\|y^{(k,p)} - x^{(k,p)}\right\| + c_4\left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|^2 + c_5\left\|y^{(k,p)} - x^{(k,p)}\right\|^2. \end{aligned} \qquad (4.2.43)$$

Перетворимо різницю $x^{(k)} - x^{(k,p)}$ та оцінимо її норму

$$x^{(k)} - x^{(k,p)} = x^{(k)} - x^{(k,p)} + y^{(k)} - y^{(k)} = (x^{(k)} - y^{(k)}) + (y^{(k)} - x^{(k,p)}),$$
$$\left\|x^{(k)} - x^{(k,p)}\right\| \le \left\|x^{(k)} - y^{(k)}\right\| + \left\|y^{(k)} - x^{(k,p)}\right\| \le K\left\|x^{(k)} - y^{(k)}\right\|.$$

Тоді вираз (4.2.43) можна записати у вигляді

$$\left\|B^{(k)} - A^{(k,p)}\right\| \le M_1\left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|. \qquad (4.2.44)$$

Аналогічно попереднім міркуванням зробимо оцінки

$$\begin{aligned}
&\left\|B^{(k)} - A^{(k,p-1)}\right\| \le M_2 \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|,\\
&\left\|B^{(k)} - A^{(k,p-2)}\right\| \le M_3 \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|,\\
&\qquad\qquad . \quad . \quad .\\
&\left\|B^{(k)} - A^{(k)}\right\| \le M_p \left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|.
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

Тоді, використовуючи (4.2.42) та (4.2.45), запишемо оцінку

$$\left\|x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)}\right\| \le L\left\|y^{(k)} - x^{(k)}\right\|^{p+2}. \tag{4.2.46}$$

Використовуючи (4.2.46), можемо записати наступні співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left\|x^{(k)} - y^{(k)}\right\| \le L_1 \left\|x^{(k-1)} - y^{(k-1)}\right\|^{p+2},\\
&\left\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right\| \le LL_1 \left\|x^{(k-1)} - y^{(k-1)}\right\|^{(p+2)^2},\\
&\qquad\qquad . \quad . \quad .\\
&\left\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right\| \le L_0 \left\|x^{(0)} - y^{(0)}\right\|^{(p+2)^{(k+1)}}
\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

На n-ому кроці будемо мати

$$\left\|x^{(n)} - y^{(n)}\right\| \le M_0 \left\|x^{(0)} - y^{(0)}\right\|^{(p+2)^n} \tag{4.2.48}$$

Введемо позначення $\varepsilon = \left\|x^{(n)} - y^{(n)}\right\|$, $X_0 = \left\|x^{(0)} - y^{(0)}\right\|$. Тоді (4.2.48) запишеться у вигляді

$$\varepsilon \le M_0 \cdot X_0^{(p+2)^n}. \tag{4.2.49}$$

Нехай на обчислення $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ (k=1,...,n) витрачається N_1 обчислень (операцій, інтервал часу), а на обчислення $x^{(k,i)}$, $y^{(k,i)}$ (i=1,...,p+1) -N_2 . Тоді на обчислення $x^{(k+1)}$, $y^{(k+1)}$ при відомих $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ витрачається N_1+pN_2 обчислень. Починаючи з $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ необхідно провести $n(N_1+pN_2)$ обчислень. Параметр p будемо вибирати так, щоб об’єм обчислень для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ був мінімальним. Знайдемо вигляд функції $n=n(p)$.

Прологарифмуємо співвідношення (4.2.49)

$(p+2)^n = T$, де $T = (\ln \varepsilon - \ln M_0) / \ln X_0$

звідси $n = \ln T / \ln (p+2)$. (4.2.50)

Тоді на обчислення $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ витрачається $n(N_1+pN_2)$ $\ln T / \ln (p+2)$ обчислень. Будемо рахувати параметр p неперервним аргументом, тоді необхідною умовою мінімума обчислень є

$$\ln T \frac{(p+2)N_2 \ln(p+2) - N_1 - pN_2}{(p+2)\ln^2(p+2)} = 0, \text{ або}$$

$1+a / z = \ln z$, де $z = p + 2$, $a = N_1 / N_2 - 2$. (4.2.51)

Отже, оптимальна глибина рекурсії методу (1.1) визначається з співвідношення (4.2.51).

4.3 Дослідження інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю

При розв'язуванні систем проекційних рівнянь слід зауважити , що матриця отриманої системи має діагональну або подібну до неї структуру. Тому важливо побудувати такі інтервальні ітераційні методи, які б враховували цю особливість. В даному розділі запропоновано клас інтервальних методів для знаходження розв'язків систем нелінійних рівнянь з переважаючою роллю діагональних елементів. Такі системи отримуються при дискретизації багатьох крайових задач, а також інших проблем, які зводяться до системи нелінійних рівнянь з домінуючим впливом діагональних елементів.

4.3.1 Побудова одного класу інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю

Нехай маємо множину функцій $f_i(x_p), 1 \le i \le n$ векторної змінної $x_p = \left(x_1,...,x_n\right)^T$, які ми об'єднаємо у векторну функцію $f_p(x_p) = \left(f_1(x_p),...,f_n(x_p)\right)^T$. Припустимо, що похідна Фреше $f_p^{/}(x_p)$ функції $f_p(x_p)$ існує на множині і що $x^{(0)} = (X_1^{(0)},...,X_n^{(0)})^T \subseteq B$. Припустимо також, що для похідної Фреше існує інтервальна оцінка на $x^{(0)}$. Шукаємо розв'язок нелінійної системи рівнянь :

$$f_p(x_p) = 0_p.$$

Використовуючи теорему про середнє значення ми отримаємо :

$$f_i(x_\text{р}) = f_i(y_\text{р}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(y_\text{р} + \theta_i(x_\text{р} - y_\text{р}))(\text{x}_j - \text{y}_j),$$

$0 \le i \le n$, $0 < \theta_i < 1$, $x_\text{р}, y_\text{р} \in x^{(0)}$

і поклавши

$$\gamma_\text{р}(x_\text{р}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(y_\text{р} + \theta_i(x_\text{р} - y_\text{р})),$$

отримаємо рівняння

$$f_\text{р}(x_\text{р}) - f_\text{р}(y_\text{р}) = \gamma_\text{р}(x_\text{р})(x_\text{р} - y_\text{р}),$$

Якщо $y_{\text{р}}$ - розвязок вихідної системи рівнянь, який належить $x_{\text{р}}^{(0)}$, і ми представили матрицю $\gamma_{\text{р}}(x_{\text{р}})$ у вигляді

$$\gamma_{\text{р}}(x_{\text{р}}) = D_{\text{р}}(x_{\text{р}}) - A_{\text{р}}(x_{\text{р}}) - U_{\text{р}}(x_{\text{р}}) ,$$

де $D_{\text{р}}(x_{\text{р}})$ - діагональна матриця, $A_{\text{р}}(x_{\text{р}})$- строго нижня трикутна матриця $U_{\text{р}}(x_{\text{р}})$- строго верхня трикутна матриця, то з останнього рівняння випливає для невиродженої матриці $D_{\text{р}}(x_{\text{р}})$ співвідношення

$$y_{\text{р}} = x_{\text{р}} - D_{\text{р}}(x_{\text{р}})^{-1}\left\{B_{\text{р}}(x_{\text{р}})(x_{\text{р}} - y_{\text{р}}) + f_{\text{р}}(x_{\text{р}})\right\} ,$$

де $B_{\text{р}}(x_{\text{р}}) = A_{\text{р}}(x_{\text{р}}) + U_{\text{р}}(x_{\text{р}})$.

Оскільки $y_{\text{р}} + \theta_i(x_{\text{р}} - y_{\text{р}}) \in x^{(0)}$, $1 \le i \le n$, то з монотонності включення слідує, що

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(y_{\text{р}} + \theta_i(x_{\text{р}} - y_{\text{р}})) \in \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x^{(0)}) , \; 1 \le i, j \le n ,$$

Представимо тепер інтервальну матрицю

$$f'_{\text{р}}(x^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x^{(0)})$$

в такому ж вигляді, що і матрицю $\gamma_{\text{р}}(x_{\text{р}})$:

$$f'_{\text{р}}(x^{(0)})=D_{\text{р}}(x^{(0)})-A_{\text{р}}(x^{(0)})-U_{\text{р}}(x^{(0)})$$

Покладемо також $B_{\text{р}}(x^{(0)})=A_{\text{р}}(x^{(0)})+U_{\text{р}}(x^{(0)})$ і $x_{\text{р}}:=m(x^{(0)})$. Якщо ніякий діагональний елемент матриці $f'_{\text{р}}(x^{(0)})$ не містить нуля, то з допомогою монотонності включення ми отримаємо

$$y_{\text{р}}\in m(x^{(0)})-D_{\text{р}}(x^{(0)})^{-1}\left\{B_{\text{р}}(x^{(0)})(m(x^{(0)})-y_{\text{р}})+f_{\text{р}}(m(x^{(0)}))\right\}$$

Тут $D_{\text{р}}(x^{(0)})^{-1}$ - це діагональна матриця, отримана з діагональної матриці

$$D_{\text{р}}(x^{(0)})=diag(\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x^{(0)}))$$

оберненням діагональних елементів.

Якщо тепер вибраний інтервальний вектор $z^{(0)}$, який містить $y_{\text{р}}$, то з допомогою математичної індукції по номеру кроку ітерації в ітераційному методі

$$z^{(v+1)}=\left\{m(x^{(0)})-D_{\text{р}}(x^{(0)})^{-1}\left\{B_{\text{р}}(x^{(0)})(m(x^{(0)})-z^{(v)})-+f_{\text{р}}(m(x^{(0)}))\right\}\right\}\text{I}\ z^{(v)} \quad (4.3.1)$$

можна показати, що має місце $y_{\text{р}}\in z^{(v)}, v\geq 0$. Так як на кожному кроці береться перетин, послідовність $\left\{z^{(v)}\right\}_{v=0}^{\infty}$ збігається до деякої границі Z, і має місце $y_{\text{р}}\in Z$. Виходячи з $x^{(1)}:=z^{(1)}$, обчислюємо інтервальну матрицю $f'_{\text{р}}(x^{(1)})$, а з її допомогою - нову локаліацію $x^{(2)}$ розвязку $y_{\text{р}}$ і т. д. Але

ми виберемо інший шлях . В ітераційному методі (4.3.1) покладемо $z^{(0)}:=x^{(0)}$. З попередніх міркувань слідує , що

$$y_{\text{р}} \in z^{(1)} = \left\{ m(x^{(0)}) - D_{\text{р}}(x^{(0)})^{-1} \left\{ B_{\text{р}}(x^{(0)})(m(x^{(0)}) - x^{(0)}) + f_{\text{р}}(m(x^{(0)})) \right\} \right\} \text{I } x^{(0)}$$

і $z^{(1)} \subseteq x^{(0)}$. Природньо взяти $x^{(1)}:=z^{(1)}$ і обчислювати нову інтервальну матрицю $f'_{\text{р}}(x^{(1)})$ з допомогою цього інтервального вектора , який локалізує $y_{\text{р}}$ не гірше , ніж $x^{(0)}$. В ітераційному методі (4.3.1) для обрахування нової локалізації потрібен рівно один крок . Об'єднавши все це , ми в результаті отримаємо наступну ітераційну процедуру :

$$\begin{cases} u^{(k+1)} = \left\{ m(x^{(k)}) - D_{\text{р}}(x^{(k)})^{-1} \left\{ B_{\text{р}}(x^{(k)})(m(x^{(k)}) - x^{(k)}) + f_{\text{р}}(m(x^{(k)})) \right\} \right\} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} \cap u^{(k+1)}, k \geq 0 \end{cases} . \quad (4.3.2)$$

Таким чином , дана система нелінійних рівнянь перетвориться , в ситему лінійних рівнянь з інтервальними коефіцієнтами . По цій лінійній системі нова локалізація для $y_{\text{р}}$ обчислюється з допомогою методу , подібного до повнокрокового . Тому миназиваємо його повнокроковим методом ньютонівського типу .

По аналогії з попередніми міркуианнями ми бачимо , що (в позначеннях ($u^{(k)} = (U_i^{(k)}), x^{(k)} = (X_i^{(k)})$)) ітераційний метод

$$\begin{cases} U_i^{(k+1)} = m(X_i^{(k)}) - \dfrac{1}{\dfrac{\partial}{\partial x_i} f_i(x^{(k)})} \{ \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{\partial}{\partial x_j} f_i\ (x^{(k)})(m(X_j^{(k)}) - X_j^{(k+1)}) + \\ + \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j} f_i\ (x^{(k)})(m(X_j^{(k)}) - X_j^{(k+1)} \} \\ X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} \text{ I } U_i^{(k+1)}, k \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

породжує вектори $x^{(k)}$, які містять розвязок $y_{\text{р}}$. Ми назвемо його короткокроковим методом ньютонівського типу з використанням покомпонентних перетинів.

Якщо тепер замість f'(x) покласти 1/4 f'(X) + 3/4 f'(X+ 2/3(x- X)) , де X=m(x), то ми отримаємо метод, який назвемо ітераційним інтервальним методом типу Рунге.

4.3.2 Дослідження збіжності побудованих інтервальних методів

Тепер ми розглянемо умови збіжності до розвязку $y_{\text{р}} \in x^{(0)}$ для цих двох методів

Оскільки ми беремо перетин, кожний з цих методів породжує послідовність

$$x^{(0)} \supseteq x^{(1)} \ldots \supseteq x^{(k)} \supseteq x^{(k+1)} \ldots,$$

яка збігається до деякого інтервального вектора $\boldsymbol{X}$. Далі ми маємо

$$y_{\text{р}} \in x^{(k)}, k \geq 0 .. i .. y_{\text{р}} \in x \cdot$$

В загальному випадку ми маємо рівність $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = y_{\text{р}}$. Наступна теорема дає достатні умови рівності $d(x) = o_{\text{р}}$, з якої внаслідок $y_{\text{р}} \in x$ випливає : $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = y_{\text{р}}$.

Теорема 1

Нехай система нелінійних рівнянь $f_p(x_p) = 0_p$ *має розвязок* $y_{\text{р}}$ *, який належить інтервальному вектору* $x^{(0)}$.

Представимо інтервальну матрицю у вигляді

$$f'_{\text{р}}(x^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x^{(0)})$$

і припустимо , що

$$0 \notin \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x^{(0)}), \ldots 1 \le i \le n \cdot$$

Нехай $B_{\text{р}}(x^{(0)}) = A_{\text{р}}(x^{(0)}) + U_{\text{р}}(x^{(0)})$ *. Якщо виконується умова*

$$p(\left| D_{\text{р}}(x^{(0)})^{-1} \right\| B_{\text{р}}(x^{(0)}) \left| \right) < 1 \ ,$$

де p *позначає спектральний радіус , то послідовність* $\left\{ x^{(k)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ *для методів (4.3.2) і (4.3.3) збігається до розвязку* $y_{\text{р}}$.

Доведення теореми приведено в роботі [2].

В припущенні $f_u(s,t,u) \ge 0, (s,t) \in \Omega, u \in R$ неважко показати, що умови теореми виконуються незалежно від ширини $d(x^{(0)})$ даної локалізації $x^{(0)}$ єдиного рішення системи (0) .

Описані вище методи можна модифікувати різними способами. У випадку коли обчислення $f'_{\text{р}}(x^{(k)})$ займає багато часу , є сенс робити в методі (4.3.1) більше одного кроку обчислення локалізації для $y_{\text{р}}$ без зміни $f'_{\text{р}}(x^{(k)})$. Кількість r кроків, які виконуються після обчислення , $f'_{\text{р}}(x^{(k)})$ також може залежати від k : r= r(k). Це приводить до наступної ітерації :

$$\begin{cases} x^{(0,0)} = x^{(0)}, \\ u^{(k+1,i)} = \left\{ m(x^{(k)}) - D_{\text{р}}(x^{(k)})^{-1} \left\{ B_{\text{р}}(x^{(k)})(m(x^{(k)}) - x^{(k,i-1)}) + f_{\text{р}}(m(x^{(k)})) \right\} \right\} \\ x^{(k,i)} = x^{(k,i-1)} \cap u^{(k+1,i)}, \ 1 \le i \le r_k, \\ x^{(k+1)} = x^{(k,r_k)}, \\ x^{(k+1,0)} = x^{(k+1)}, \ \text{k} \ge 0. \end{cases}$$

(4.3.4)

Аналогічним чином можна модифікувати і короткокроковий метод нютонівського типу (4.3.3) з взяттям покомпонентних перетинів.

Отриманий метод иться до y_p в умовах теореми 1. Аналогічно поклавши замість f’(x) 1/4 f’(X) + 3/4 f’(X+ 2/3(x- X)) , де X=m(x), ми отримаємо метод, який назвемо модифікованим ітераційним інтервальним методом типу Рунге.

Модифіковані методи цікаві і тим, що вони сходяться суперлінійно при відповідних умовах на послідовність $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 2

Нехай виконуються умови теореми 1. Якщо модифікований повнокроковий метод (4) задовільняє умові $r_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *то*

$$\left\| d(x^{(k+1)}) \right\| \le c_k \left\| d(x^{(k)}) \right\|, \; k \ge 0 .$$

Доведення теореми приведено в роботі [2].

4.4 Висновки.

Розглянуто застосування інтервального методу типу Рунге для розв’язування проекційно\ системи нелінійних рівнянь. Досліджено властивості цього інтервального методу. Показано стійкість його при збуреннях оберненого оператора і вибору початкових наближень в його апроксимаціях.Побудовано рекурсивний аналог розглянутого двохстороннього методу. Показано, що при збільшенні доданків в наближенні оберненого оператора, отримаємо підвищенні порядку збіжності метода, але він не перевищує чотирьох. Досліджено вибір оптимальної глибини рекурсії побудованого двохстороннього методу.

Створено новий інтервальний ітераційниї метод, який не містить обертань інтервальних матриць. Наведено клас систем нелінійних рівнянь для його застосування. Показано, що такі системи часто отримуються при дискретизації крайових задач методом розділених різниць або скінченних елементів.

РОЗДІЛ V.ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКУРЕНТНИХ СХЕМ РОЗВ’ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

5.1 Дослідження рекурентних схем моделей поверхневих потоків

Однією з найважливіших проблем при побудові рекурентних схем інтегрування в часі є забезпечення обмеженості наближених розв’язків. Тоді рекурентна схема, яка допускає єдиний розв'язок, гарантує ще й коректність дискретизованої в часі задачі. Цю властивість схем називають їх стійкістю. Нестійкі схеми не гарантують збіжності їх розв’язків до точних.

У цьому розділі досліджується стійкість побудованих рекурентних схем інтегрування в часі задач стоку поверхневої води у гідродинамічному та кінематичному наближеннях.

5.1.1 Дослідження рекурентної схеми задачі поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні

Систему рівнянь поверхневої води (2.2.18) перепишемо в розмірних величинах у вигляді

$$
\begin{cases}
\rho\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}q_i+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(q_i\dfrac{q_j}{h}\right)\right\}-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left\{h\sigma_{ij}\left(\dfrac{q}{h}\right)\right\}-F_i(q,h)=0,\\
\dfrac{\partial h}{\partial t}+\nabla\cdot q=0 \quad в\ \Omega\times(0,T],\\
u=h^{-1}q, \quad h=\xi-\eta,\\
\sigma_{ij}\left(\dfrac{q}{h}\right)=2\mu e_{ij}\left(\dfrac{q}{h}\right),\\
e_{ij}\left(\dfrac{q}{h}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial(q_j/h)}{\partial x_i}+\dfrac{\partial(q_i/h)}{\partial x_j}\right),\\
F_i(q,h)=-gh\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\eta+h)+\left\{\sigma_{ij}\left(\dfrac{q}{h}\right)\eta_j\right\}\Big|_{\eta}^{\xi}, i,j=1,2.
\end{cases}
\tag{5.1.1}
$$

Тут $q=\{q_i(x,t)\}_{i=1}^2$, $x_3=\eta(x_1,x_2)$ і $h = h(x, t)$ – відповідно невідомі вектори розходів, положення вільної поверхні та глибини потоку води, ρ, μ - густина маси та коефіцієнт в'язкості рідини, вектор $F=\{F_i(q,h)\}$ описує зовнішні впливи дощового притоку, придонного тертя та вітрового навантаження.

Систему рівнянь поверхневої води доповнимо крайовими

$$
\begin{cases}
q_n=q\cdot n=0\\
\sigma_\tau\left(\dfrac{q}{h}\right)=\sigma_{ij}n_j-\sigma_n n=0 \quad на\ \Gamma_в\times[0,T],
\end{cases}
\tag{5.1.2}
$$

$$
\begin{cases}
q_\tau=q-q_n n=0\\
\sigma_n=\sigma_{ij}n_i n_j=0 \quad на\ \Gamma_p\times[0,T],\ i,j=1,2
\end{cases}
\tag{5.1.3}
$$

та початковими умовами

$$
q\big|_{t=0}=q^0,\ h\big|_{t=0}=h_0\ в \quad \Omega.
\tag{5.1.4}
$$

Сформулюємо для (5.1.1)-(5.1.4) варіаційну задачу про стік поверхневої води:

$$\begin{cases} \textit{задано } q^0 \in H = L^2(\Omega)^2, \quad h^0 \in \Phi = L^2(\Omega), \\ \textit{знайти } h = h(t) \in \Phi, \\ q(t) \in V = \left\{ p \in H^1(\Omega)^2 : p \cdot n = 0 \textit{ на } \Gamma_в,\ p \cdot \tau = 0 \textit{ на } \Gamma_p \right\} \textit{такі, що} \\ a\left(q'(t), p\right) + b(q(t), q(t)/h(t), p) + c(h(t), q(t)/h(t), p) + \\ + \pi(q(t), q(t)/h(t), p) = N(q(t), h(t), p), \\ a(h'(t), \theta) + m(q(t), \theta) = 0,\ q(t) = h(t)u(t), \quad \forall t \in (0, T], \\ a\left(q(0) - q^0, p\right) = 0,\ a(h(0) - h_0, \theta) = 0 \quad \forall \{p, \theta\} \in V \times \Phi. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Тут

$$\begin{cases} a(q, p) = \int\limits_\Omega q \cdot p dx, \quad c(h, p, w) = \int\limits_\Omega \dfrac{2\mu}{\rho} he(u) : e(p) dx, \\ b(q, w, p) = \dfrac{1}{2} \int\limits_\Omega \left[q \cdot (p_i \nabla w_i - w_i \nabla p_i) + (w \cdot p) \nabla \cdot q \right] dx, \\ \pi(q, w, p) = \dfrac{1}{2} \int\limits_\Gamma (w \cdot p)(q \cdot n) d\gamma, \\ N(q, h, p) = \int\limits_\Omega \dfrac{1}{\rho} F(q, h) p dx, \ \forall q, p, w \in V, \\ m(q, \theta) = \int\limits_\Omega (\nabla \cdot q)\theta \quad \forall \theta \in \Phi. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Проведемо дискретизацію варіаційної задачі (5.1.5) за просторовими змінними, враховуючи викладки у п. 3.1. Вважаємо, що $\Gamma = \Gamma_в$. Область Ω розіб'ємо на скінченні елементи трикутної форми $\Omega = \cup \Omega_e$. Для потоку q виберемо кусково-лінійні базисні функції. Глибину стоку будемо вважати сталою на одному скінченному елементі $h=h_e$. Враховуючи введені апроксимації за просторовими змінними для потоків та глибини, побудуємо енергетичні рівняння для рівнянь системи (5.1.5).

Розглянемо перше з рівнянь системи та виберемо $p=q$. Перепишемо всі форми першого рівняння на одному скінченному елементі врахувавши те, що глибина стала. Білінійну форму $a(q',q)$ можна зобразити у вигляді

$$a(q',q)=\int_{\Omega_e}\left(\frac{q}{h_e}h_e\right)'\cdot q\,dx=\int_{\Omega_e}\left[h_e'\frac{|q|^2}{h_e}+\left(\frac{q}{h_e}\right)'h_e\cdot q\right]dx. \qquad (5.1.7)$$

Форма b, враховуючи друге рівняння, запишеться у вигляді

$$b\left(q,\frac{q}{h_e},q\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q\cdot\left[q_i\nabla\frac{q_i}{h_e}-\frac{q_i}{h_e}\nabla q_i\right]+\left(q\cdot\frac{q}{h_e}\right)\nabla\cdot q\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\frac{|q|^2}{h_e}h_e'dx. \qquad (5.1.8)$$

Додавши (5.1.7) та (5.1.8), отримаємо

$$b\left(q,\frac{q}{h_e},q\right)+a(q',q)=\int_{\Omega_e}\left[\frac{1}{2}\frac{|q|^2}{h_e}h_e'+\left(\frac{q}{h_e}\right)'h_e\cdot q\right]dx=\int_{\Omega_e}\left[\frac{1}{2}\frac{|q|^2}{h_e}h_e'+\frac{q'h_e-h_e'q}{h_e}\cdot q\right]dx=$$

$$\int_{\Omega_e}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(|q|^2\right)'h_e}{h_e}-\frac{|q|^2h_e'}{h_e}+\frac{1}{2}\frac{|q|^2h_e'}{h_e}\right]dx=\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}\left(\frac{\left(|q|^2\right)'h_e-h_e'|q|^2}{h_e^2}\right)h_e\,dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(\frac{|q|^2}{h_e}\right)'h_e\,dx. \qquad (5.1.9)$$

Форма c набуде вигляду

$$c\left(h_e;\frac{q}{h_e},q\right)=\frac{2\mu}{\rho}\int_{\Omega_e}e(q):e(q)dx. \qquad (5.1.10)$$

Враховуючи (5.1.9) та (5.1.10), енергетичне рівняння можна представити наступним чином

$$\sum_e \left(\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} h_e \frac{d}{dt}\left(\frac{|q|^2}{h_e} \right) dx + \frac{2\mu}{\rho} \int_{\Omega_e} e(q) : e(q) dx \right) = \sum_e N(q, h_e, q). \qquad (5.1.11)$$

Проведемо дискретизацію варіаційної задачі (5.1.5) в часі. Використовуємо апроксимації для потоків та глибини описані в п. 3.1.1. Введемо наступні позначення:

$$q^{k+\lambda} = q^{k+\frac{1}{2}} + \Delta t\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) U^{k+\frac{1}{2}} \quad \forall \lambda \in [0,1], \text{ де } q^{k+\frac{1}{2}} = \frac{q^{k+1} + q^k}{2},$$

$$h^{k+\lambda} = h^{k+\frac{1}{2}} + \Delta t\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) H^{k+\frac{1}{2}} \quad \forall \lambda \in [0,1], \text{ де } h^{k+\frac{1}{2}} = \frac{h^{k+1} + h^k}{2}.$$

Глибину стоку в знаменнику всіх доданків будемо вважати відомою з попереднього кроку, тоді однокрокова рекурентна схема інтегрування задачі (5.1.5) в часі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad q^0 \in V, h^0 \in \Phi, \\ \textit{знайти} \quad U^{k+\frac{1}{2}} \in V, H^{k+\frac{1}{2}} \in \Phi, \\ a\left(U^{k+\frac{1}{2}}, p\right) + b\left(q^{k+\lambda}, \frac{q^{k+\lambda}}{h^k}, p\right) + c\left(h^{k+\lambda}, \frac{q^{k+\lambda}}{h^k}, p\right) = \left\langle F_{k+1/2}, p \right\rangle, \\ a\left(H^{k+\frac{1}{2}}, \theta\right) + m\left(q^{k+\lambda}, \theta\right) = 0, \quad \forall \{p, \theta\} \in V \times \Phi, \\ q^{k+1} = q^k + \lambda \Delta t \dot{q}^{k+\frac{1}{2}}, h^{k+1} = h^k + \lambda \Delta t \dot{h}^{k+\frac{1}{2}}, k = 0, \ldots, N_T. \end{cases} \qquad (5.1.12)$$

Розпишемо в (5.1.12) всі доданки першого рівняння, врахувавши друге, на одному скінченному елементі:

$$a(q', p) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} q' \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(\frac{q}{h_e}\right)h_e' \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(\frac{q}{h_e}\right)' h_e \cdot p dx,$$

$$b\left(q, \frac{q}{h_e}, p\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q \cdot \left[p_i \nabla\left(\frac{q_i}{h_e}\right) - \frac{q_i}{h_e}\nabla p_i\right] - \left(p \cdot \frac{q}{h_e}\right)h_e'\right)dx,$$

$$a(q', p) + b\left(q, \frac{q}{h_e}, p\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(\frac{q}{h_e}\right)' h_e \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} q' \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q \cdot \left[p_i \nabla\left(\frac{q_i}{h_e}\right) - \frac{q_i}{h_e}\nabla p_i\right]\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\frac{q'h_e - qh_e'}{h_e} \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} q' \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q \cdot \left[p_i \nabla\left(\frac{q_i}{h_e}\right) - \frac{q_i}{h_e}\nabla p_i\right]\right)dx. \quad (5.1.13)$$

Оцінивши доданок $\frac{q^2 h_e'}{h_e}$ характерними величинами отримаємо: $\frac{q^2 h_e'}{h_e} = gFr^2 u^2 h_e h_e'$, де g – сила земного тяжіння, Fr – число Фруда. Якщо врахувати умову, що число Фруда для кінематичних хвиль близьке до нуля, то вплив цього доданку є несуттєвим. Тоді (5.1.13) запишеться наступним чином

$$a(q', p) + b\left(q, \frac{q}{h_e}, p\right) = \int_{\Omega_e} q' \cdot p dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q \cdot \left[p_i \nabla\left(\frac{q_i}{h_e}\right) - \frac{q_i}{h_e}\nabla p_i\right]\right)dx. \quad (5.1.14)$$

Введемо позначення $b_1\left(q, \frac{q}{h_e}, p\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left(q \cdot \left[p_i \nabla\left(\frac{q_i}{h_e}\right) - \frac{q_i}{h_e}\nabla p_i\right]\right)dx.$

Враховуючи (5.1.14) та покладаючи $p = q^{k+\frac{1}{2}}$, побудуємо енергетичне рівняння для першого рівняння системи (5.1.12) з використанням енергетичних норм.

Перший доданок набуде вигляду

$$a\left(U^{k+1/2}, q^{k+1/2}\right) = \frac{1}{2}\Delta t^{-1} a\left(q^{k+1} - q^{k}, q^{k+1} + q^{k}\right) = \frac{1}{2}\Delta t^{-1}\left\{\left\|q^{k+1}\right\|_H^2 - \left\|q^{k}\right\|_H^2\right\}, \quad (5.1.15)$$

де H:=$L^2(\Omega)$.

Нехтуючи доданками порядку $O(\Delta t^2)$ для b_1 отримаємо

$$b_1\left(q^{k+\lambda}, \frac{q^{k+\lambda}}{h^{k+1/2}}, q^{k+1/2}\right) = \Delta t\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left[b_1\left(q^{k+1/2}, \frac{U^{k+1/2}}{h^{k+1/2}}, q^{k+1/2}\right) + b_1\left(U^{k+1/2}, \frac{q^{k+1/2}}{h^{k+1/2}}, q^{k+1/2}\right)\right]. \quad (5.1.16)$$

Третій доданок запишеться наступним чином

$$c\left(h^{k+\lambda}, \frac{q^{k+\lambda}}{h^{k+1/2}}, q^{k+1/2}\right) = \frac{2\mu}{\rho}\frac{h^{k+\lambda}}{h^{k+1/2}}\left\{\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e} + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left\{\left|q^{k+1}\right|_{1,\Omega_e}^2 - \left|q^{k}\right|_{1,\Omega_e}^2\right\}\right\}. \quad (5.1.17)$$

Розглянемо схему Кранка-Ніколсона при $\lambda = \frac{1}{2}$. Враховуючи (5.1.15) – (5.1.17), енергетичне рівняння набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\left\{\left\|q^{k+1}\right\|_H^2 - \left\|q^{k}\right\|_H^2\right\} + \frac{2\mu}{\rho}\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e}^2 = \left\langle F_{k+1/2}, q^{k+1/2}\right\rangle, \quad k = 0,..., N_T. \quad (5.1.18)$$

Просумуємо перші рівняння в (5.1.18) з індексами k від нуля до m та домножимо на Δt

$$\frac{1}{2}\left\|q^{m+1}\right\|_H^2+\Delta t\frac{2\mu}{\rho}\sum_{k=0}^{m}\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e}^2=\frac{1}{2}\left\|q^0\right\|_H^2+\Delta t\sum_{k=0}^{m}\left\langle F_{k+1/2},q^{k+1/2}\right\rangle. \qquad (5.1.19)$$

Зробимо апріорні оцінки. Враховуючи те, що напівнорма $|q|_{1,\Omega}$ є нормою в області Ω (це випливає з поставлених граничних умов (5.1.2)), нерівність Коші-Буняковського та лінійність функціоналу $F_{k+1/2}$, можна зробити наступну оцінку:

$$\left|\left\langle F_{k+1/2},q^{k+1/2}\right\rangle\right|\le\left\|F\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e}\le\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{2}\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e}^2+\frac{1}{2}C\left\|F\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H^2, \quad (5.1.20)$$

де $C=const>0$.

Врахувавши (5.1.20), енергетичне рівняння (5.1.19) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\left\|q^{m+1}\right\|_H^2+\frac{1}{2}\frac{2\mu}{\rho}\Delta t\sum_{k=0}^{m}\left|q^{k+1/2}\right|_{1,\Omega_e}^2\le\frac{1}{2}\left\|q^0\right\|_H^2+\frac{1}{2}\Delta tC\sum_{k=0}^{m}\left\|F\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H^2. \qquad (5.1.21)$$

Аналіз апріорної оцінки (5.1.21) свідчить про те, що однокрокова рекурентна схема (5.1.12) є безумовно стійка за нормою простору H відносно вибору значення кроку інтегрування Δt, якщо параметр $\lambda=1/2$ і дані задачі (5.1.5) характеризуються властивостями

$$\begin{cases}F\in L^{\infty}\left(0,T;H\right),0<T<\infty, \quad H=L^2\left(\Omega\right),\\ q_0\in H^1, \quad H^1=H^1\left(\Omega\right)^2.\end{cases} \qquad (5.1.22)$$

Як підсумок даного розділу сформулюємо достатній критерій стійкості рекурентної схеми (5.1.12)

Теорема 4.1.

Нехай дані варіаційної задачі (5.1.5) *задовольняють умовам* (5.1.22). *Тоді однокрокова рекурентна схема* (5.1.12) *з параметром* $\lambda=1/2$ *є безумовно стійкою відносно норми простору H.*

5.1.2 Оцінка множника стабілізаційної схеми варіаційної задачі загальних рівнянь Нав'є-Стокса

Проведемо оцінку стабілізаційного множника для рівнянь Нав'є-Стокса, які записуються у такому вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - k\Delta u = f \quad в \quad \Omega \times [0,T], \\ u = 0 \quad на \quad \Gamma \times [0,T], \\ u\big|_{t=0} = u_0 \quad в \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.1.23}$$

де u – невідома швидкість рідини, p – гідростатичний тиск (вважається відомим), ρ - густина рідини, k – коефіцієнт в'язкості, f – масові сили.

Побудуємо для задачі (5.1.23) варіаційну постановку

$$\begin{cases} знайти\, u \in V := H_0^1(\Omega)\, таку,\, що \\ a(u,\varphi) = (f,\varphi)\ \forall \varphi \in V, \\ (u(0) - u_0, \varphi) = 0, \end{cases} \tag{5.1.24}$$

де

$a(u,\varphi) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right) + (w \cdot \nabla u, \varphi) - k(\Delta u, \varphi)$, w – відома швидкість,

$(f,\varphi) = -\dfrac{1}{\rho}(\nabla p, \varphi) + (f,\varphi).$

Застосуємо методику пункту 3.1.3.1 для побудови стабілізаційної схеми задачі (5.1.24). Розглянемо цю варіаційну задачу в підпросторі $H \subset V$, який складається зі стандартного скінченно-елементного підпростору $W \subset V$ та скінченно-елементного простору B бульбашок такого, що $\forall \varphi \in H$ $\exists! \varphi_w \in W$, $\varphi_B \in B$ $\varphi = \varphi_B + \varphi_w$. Тоді варіаційна задача зведеться до відшукання $u = u_B + u_w \in H$ і набуде вигляду

$$a(u_H, \varphi) = (f, \varphi) \ \forall \varphi \in H. \tag{5.1.25}$$

Покладемо в (5.1.25) $\varphi = \varphi_B$ в результаті отримаємо

$$a(u_B, \varphi_B) = (f, \varphi_B) - a(u_w, \varphi_B) = (f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k \Delta u_w \right), \varphi_B). \tag{5.1.26}$$

Рівняння (5.1.26) є варіаційною задачею в просторі функцій бульбашок B, яка має єдиний розв'язок

$$u_B = S_B \left(P_B \left(f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k \Delta u_w \right) \right) \right), \tag{5.1.27}$$

де $P_B = L^2$ - проекція на простір B та S_B – оператор який "розв'язує" (5.1.26).

Покладемо в (5.1.25) $\varphi = \varphi_w$ та використаємо вираз (5.1.27)

$$\begin{aligned} a(u_w, \varphi_w) &= (f, \varphi_w) - a(u_B, \varphi_w) = (f, \varphi_w) - \left(u_B, -\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} - w \nabla \varphi_w + k \Delta \varphi_w \right) = \\ &= (f, \varphi_w) - \left(S_B P_B \left(f - \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k \Delta u_w \right) \right), -\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} - w \nabla \varphi_w + k \Delta \varphi_w \right). \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

Отже, (5.1.28) є варіаційною задачею в просторі W із збурюючим доданком. Цей доданок базується на залишку (нев'язці рівняння), тобто якщо точний розв'язок є достатньо гладкий, щоб задовольнити рівняння Нав'є-Стокса $\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u - k\Delta u = f$, то додатковий член не вносить похибки.

Якщо віртуальний простір функцій бульбашок такий, що $S_B P_B = \mu I$, то (5.1.28) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &a\left(u_w, \varphi_w\right) + \sum_T \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w, \mu\left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta \varphi_w \right)\right) = \\ &= \left(f, \varphi_w\right) + \sum_T \left(f, \mu\left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta \varphi_w \right)\right) \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

Для оцінки множника μ в (5.1.29) скористаємось наступною теоремою [127, с.123].

Теорема 3.1. *Нехай Z є скінченновимірним підпростором з $L^2(T)$; $a(u,v)$ є білінійною неперервною формою на $H_0^1(T)$ такою, що $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_1^2$, $\forall u \in H_0^1(T)$, $\alpha = const > 0$; для кожного $z \in Z$ визначимо $u = S_B P_B z$ як єдиний розв'язок рівняння $a(u,\varphi) = (z,\varphi)$ $\forall \varphi \in B$, $u \in B$, тоді $\exists \mu_0 = const > 0$ така, що $\forall \mu$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, існує простір функцій бульбашок B такий, що $S_B P_B = \mu I$.*

Нижня границя μ_0 може бути обчислена наступним способом:

1. *Візьмемо підпростір $B_0 \subset H_0^1(T)$ з двома наступними властивостями*: 1)$\forall z \in Z$ *з умови* $(u,z)=0$ $\forall u \in B_0$ *випливає, що* $z=0$; 2) $a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u,v \in B_0$;

2. *Введемо ортонормований базис* $\{z_i\}_{i=1}^N$ *в* Z *і обчислюємо* $\{s_i\}_{i=1}^N$ *в* B_0 *наступним чином* $a(s_i,\varphi)=(z_i,\varphi)\ \forall \varphi\in B_0\ i=1,\ldots,N$ (*це означає, що* $s_i=S_B P_B z_i$);
3. *Приймаємо* $S_{ij}=a(s_i,s_j)\ i,j=1,\ldots,N$ *і обчислюємо* μ_0 *як найменше власне значення* S.

Скористаємось наведеною процедурою для побудови оцінки параметра μ. Нехай простір W складається з кусковovизначених лінійних неперервних функцій, $Z\subset L^2(T)$- скінченновимірний підпростір, $dim\ Z=1$ і ортонормований базис задається наступним виразом $z_1=\frac{1}{\Delta^{1/2}}$, Δ - площа трикутника T. B_0 – це одновимірний простір породжений кубічним баблом $b_3^T(x)=L_1L_2L_3$, де L_i – кусково-лінійні функції на трикутнику T (i=1,2,3). Вважаємо, що залежності від часу немає, тоді згідно пункту 2 отримаємо

$$\int_T(\nabla s_1\cdot w)b_3dx+k\int_T\nabla s_1\cdot\nabla b_3dx=\int_T\frac{1}{\Delta^{1/2}}b_3dx. \qquad (5.1.30)$$

Покладемо в (5.1.30) $s_1=\hat{s}_1b_3$ ($\hat{s}_1$ - константа) та розпишемо кожен з інтегралів попереднього виразу.

Інтеграл з в’язкими доданками набуде вигляду

$$\int_T\nabla s_1\cdot\nabla b_3dx=\hat{s}_1\int_T\nabla b_3^2dx=\hat{s}_1\int_T(\nabla L_1L_2L_3)^2dx=\frac{d^2}{720\Delta}\hat{s}_1,d^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2, \qquad (5.1.31)$$

де l_i – довжина сторони трикутника T (i=1,2,3).

$$\int_T (\nabla s_1 \cdot w) b_3 dx = s_1 \int_T (\nabla b_3 \cdot w) b_3 dx = \frac{1}{2} \hat{s}_1 \int_T w \cdot \nabla b_3^2 dx = -\frac{1}{2} \hat{s}_1 div\, w \int_T b_3^2 dx = -\frac{\hat{s}_1 e\Delta}{7!}, \quad (5.1.32)$$

де $e = div\ w$.

Права частина рівняння (5.1.30) прийме вигляд

$$\int_T \frac{1}{\Delta^{1/2}} b_3 dx = \frac{1}{\Delta^{1/2}} \frac{\Delta}{60} = \frac{\Delta^{1/2}}{60}. \quad (5.1.33)$$

Використовуючи значення інтегралів (5.1.31)-(5.1.33), рівняння (5.1.30) запишеться наступним чином

$$\frac{\hat{s}_1}{720} \left(\frac{kd^2}{\Delta} - \frac{e\Delta}{7} \right) = \frac{\Delta^{1/2}}{60}. \quad (5.1.34)$$

З (5.1.34) отримаємо

$$\hat{s}_1 = \frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2 - \Delta^2 e}. \quad (5.1.35)$$

Скористаємось третім пунктом *Теореми 3.1* знаходження оцінки. Оскільки простір B_0 – одновимірний, то найменше власне значення матриці S буде елемент $S_{11}=a(s_1,s_1)$. Використовуючи (5.1.35) обчислимо це значення

$$S_{11}=\int_T (w\cdot\nabla s_1)s_1dx+k\int_T(\nabla s_1)^2dx=\hat{s}_1^2\int_T(w\cdot\nabla b_3)b_3dx+k\hat{s}_1^2\int_T(\nabla b_3)^2dx=$$

$$=\hat{s}_1^2\left(-\frac{1}{2}e\int_T b_3^2dx+k\int_T(\nabla b_3)^2dx\right)=\hat{s}_1^2\left(-\frac{\Delta e}{7!}+k\frac{d^2}{720\Delta}\right)=\left(\frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2-\Delta^2e}\right)^2\left(\frac{7kd^2-\Delta^2e}{7!\Delta}\right)=$$

$$=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2-e}\right).$$

Отже, отримаємо наступну верхню оцінку параметра μ

$$\mu_0=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2-e}\right). \qquad (5.1.36)$$

Наведена процедура знаходження оцінки не буде найкращим можливим вибором μ_0 (за виключенням дуже вдалого вибору B_0), однак дає оцінку, якої може бути достатньо для застосувань. Оцінку (5.1.36) будемо використовувати для стабілізаційного множника M_e з (5.1.22).

5.1.3 Дослідження стійкості та збіжності лінеаризованої рекурентної схеми розв'язку задачі поверхневого стоку води в кінематичному наближенні

Проведемо дослідження стійкості рекурентної схеми для задачі в кінематичному наближенні застосовуючи методику з [125]. Припускаємо, що межа області Ω складається лише з лінії водорозділу $\Gamma_в$. Побудуємо енергетичне рівняння для дискретизованої задачі в часі. Для рекурентної схеми (3.2.5) введемо наступні позначення:

$$h^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(h^{k+1}+h^k\right),\ h^{k+\lambda}=h^{k+\frac{1}{2}}+\Delta t\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)H^{k+\frac{1}{2}}\quad\forall\lambda\in[0,1]. \qquad (5.1.37)$$

В цих позначеннях рекурентне рівняння (3.2.5) можна записати у вигляді:

$$\left(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right)+b\left(h^{k+\lambda};h^{k+\lambda},\varphi\right)+c\left(h^{k+\lambda},\varphi\right)=\left\langle l_{k+1/2},\varphi\right\rangle,\ \forall\varphi\in V,k=0,...,N_T. \quad (5.1.38)$$

Покладемо в рівнянні (5.1.38) $\varphi=h^{k+\frac{1}{2}}$. Тоді отримаємо

$$\left(H^{k+\frac{1}{2}},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\left(h^{k+1}-h^{k},h^{k+1}+h^{k}\right)=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\left\{\left\|h^{k+1}\right\|_H^2-\left\|h^{k}\right\|_H^2\right\}. \quad (5.1.39)$$

Білінійну форму b відносно останніх двох компонент перетворимо наступним чином

$$b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k+\lambda},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k+\frac{1}{2}}+\Delta t\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)H^{k+\frac{1}{2}},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k+\frac{1}{2}},h^{k+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left\{b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k+1},h^{k+1}\right)-b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k},h^{k}\right)\right\}. \quad (5.1.40)$$

Форма b є кососиметрична відносно останніх двох змінних. Цей факт випливає з наступних міркувань

$$b(h;h,\varphi)=-\int_\Omega h^{m-1}h\,\alpha\cdot\nabla\varphi dx=\int_\Omega mh^{m-1}\varphi\,\alpha\cdot\nabla h dx=-mb\left(h;\varphi,h\right)\quad\forall h,\varphi\in V.$$

Отже, якщо $\varphi=h$, отримаємо $b\left(h;h,h\right)=-mb\left(h;h,h\right)\Rightarrow b\left(h;h,h\right)=0$.

З вище наведених міркувань випливає , що

$$b\left(\left(h^{k+\lambda}\right)^{m-1};h^{k+\lambda},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=0. \qquad (5.1.41)$$

Білінійну форму c запишемо у вигляді

$$c\left(h^{k+\lambda},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=c\left(h^{k+\frac{1}{2}}+\Delta t\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)H^{k+\frac{1}{2}},h^{k+\frac{1}{2}}\right)=\left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V^2+\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left\{\left|h^{k+1}\right|_V^2-\left|h^k\right|_V^2\right\}. \qquad (5.1.42)$$

Враховуючи (5.1.39)-(5.1.42), енергетичне рівняння набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\Delta t^{-1}\left\{\left\|h^{k+1}\right\|_H^2-\left\|h^k\right\|_H^2\right\}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V^2+$$

$$+\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left\{\left|h^{k+1}\right|_V^2-\left|h^k\right|_V^2\right\}=\left\langle l_{k+1/2},h^{k+\frac{1}{2}}\right\rangle,k=0,...,N_T. \qquad (5.1.43)$$

Після сумування перших рівнянь в (5.1.43) з індексами k від нуля до n, отримаємо

$$\frac{1}{2}\left\|h^{n+1}\right\|_H^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta t\sum_{k=0}^{n}\left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V^2+\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\Delta t\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left|h^{n+1}\right|_V^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|h^0\right\|_H^2+\Delta t\sum_{k=0}^{n}\left\langle l_{k+\frac{1}{2}},h^{k+\frac{1}{2}}\right\rangle+\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\Delta t\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left|h^0\right|_V^2,\quad n=0,...,N_T. \qquad (5.1.44)$$

Зробимо апріорні оцінки рівнянь (5.1.43), (5.1.44). Враховуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо наступну оцінку для правої частини

$$\left|\left\langle l_{k+1/2}, h^{k+\frac{1}{2}}\right\rangle\right| \le \left\|R\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H \left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V \le \frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V^2 + \frac{1}{2}C\left\|R\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H^2. \qquad (5.1.45)$$

Тоді енергетичні рівняння (5.1.43), (5.1.44) зводяться до нерівностей

$$\Delta t^{-1}\left\{\left\|h^{k+1}\right\|_H^2 - \left\|h^k\right\|_H^2\right\} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left|h^{k+1}\right|_V^2 +$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left\{\left|h^{k+1}\right|_V^2 - \left|h^{k+1}\right|_V^2\right\} \le C\left\|R\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H^2, k = 0,\ldots,N_T, \qquad (5.1.46)$$

$$\left\|h^{n+1}\right\|_H^2 + \Delta t\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_{k=0}^{n}\left|h^{k+\frac{1}{2}}\right|_V^2 + \Delta t\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left|h^{n+1}\right|_V^2 \le$$

$$\le \left\|h_0\right\|_H^2 + \Delta t C\sum_{k=0}^{n}\left\|f\left(t_{k+1/2}\right)\right\|_H^2 + \Delta t\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left|h_0\right|_V^2, n = 0,\ldots,N_T. \qquad (5.1.47)$$

Аналіз апріорних оцінок свідчить про те, що однокрокова рекурентна схема (3.2.5) безумовно стійка за нормами просторів H та V, якщо параметр схеми

$$\lambda \ge 1/2 \qquad (5.1.48)$$

і дані задачі характеризуються властивостями

$$\begin{cases} R \in L^{\infty}\left(0,T;H\right), 0 < T < \infty, \quad H := L^2\left(\Omega\right), \\ h_0 \in V. \end{cases} \qquad (5.1.49)$$

Причому при $\lambda=1/2$ достатньо вимагати, щоб $h_0 \in H$.

При $\lambda<1/2$ ліва частина (5.1.47) містить невід'ємні доданки при умові $1 + \alpha\Delta t\left(\lambda - 1/2\right) \ge 0, \alpha = const > 0.$ Остання нерівність буде виконана, якщо накласти наступне обмеження на довжину кроку інтегрування в часі:

$$\Delta t \le \frac{2}{\alpha(1-2\lambda)} \tag{5.1.50}$$

Як підсумок вище наведених міркувань можна сформулювати достатній критерій стійкості однокрокової рекурентної схеми (3.2.5).

Теорема 4.2. *Нехай дані варіаційної задачі* (2.2.38) *задовольняють умовам* (5.1.49)*. Тоді однокрокова рекурентна схема* (3.2.5) *з параметрами* Δt *та* λ:

- *безумовно стійка по відношенню до* Δt *в просторах H та V, якщо параметр* λ *задовольняє нерівності* (5.1.48).
- *стійка в просторах H та V, якщо* $0 \le \lambda < 1/2$ *і при цьому вибір* Δt *підпорядкований умові* (5.1.50).

Проведемо оцінку збіжності рекурентної схеми для лінеаризованої задачі. Рекурентне рівняння (5.1.38) можна записати:

$$\left(H^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right) + \Delta t\lambda mb\left(h^k; H^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}c\left(h^{k+\lambda},\varphi\right) =$$

$$= \left\langle l_{k+\frac{1}{2}},\varphi \right\rangle - b(h^k;h^k,\varphi),\ \forall\varphi\in V, k=0,\ldots,N_T, \tag{5.1.50}$$

де h^k – відома функція.

Оцінимо похибку $\varepsilon_{\Delta t}(t) = h_{\Delta t}(t) - h(t)$, де $h(t)$ –точний розв'язок наступного рівняння

$$\left(h'(t),\varphi\right) + \Delta t\lambda mb\left(h^k; h'(t),\varphi\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}c\left(h(t),\varphi\right) =$$

$$= \left\langle l,\varphi\right\rangle - b(h^k;h^k,\varphi),\ \forall\varphi\in V, k=0,\ldots,N_T. \tag{5.1.51}$$

Для оцінки значень похибки введемо позначення

$$\varepsilon^k = \varepsilon(t_k) = h^k - h(t_k),\ k = 0,\ldots,N_T, \qquad (5.1.52)$$

$$\dot{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k}{\Delta t}.$$

На основі рівняння задачі (5.1.50) дістанемо

$$\begin{cases} a\left(\dot{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + \Delta t \lambda m b\left(h^k; \dot{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} c\left(\varepsilon^{k+\lambda}, \varphi\right) = \langle r_k, \varphi \rangle - b(h^k; h^k, \varphi),\ \forall \varphi \in V, \\ a\left(\varepsilon^0, \varphi\right) = 0,\ k = 0,\ldots,N_T, \end{cases} \qquad (5.1.53)$$

де лінійні функціонали

$$\langle r_k, \varphi \rangle = \langle l_{k+1/2}, \varphi \rangle - \Delta t^{-1} a\left(h(t_{k+1}) - h(t_k), \varphi\right) - \lambda m b\left(h^k; h(t_{k+1}) - h(t_k), \varphi\right) -$$
$$- c\left(\lambda h(t_{k+1}) + (1-\lambda) h(t_k), \varphi\right) - b\left(h^k; h^k, \varphi\right) \forall \varphi \in V,\ k = 0,\ldots,N_T. \qquad (5.1.54)$$

Спростимо вирази для функціоналів (5.1.54). Для цього допустимо, що $h \in C^3(0,T;V)$, тоді, розкладаючи її в ряд Тейлора в околі точки $t = t_{k+1/2}$, обчислюємо:

$$\begin{cases} \Delta t^{-1}\left[h(t_{k+1}) - h(t_k)\right] = h'(t_{k+1/2}) + \dfrac{1}{24}\Delta t^2 h'''(\xi), \\ \dfrac{1}{2}\left[h(t_{k+1}) - h(t_k)\right] = h(t_{k+1/2}) + \dfrac{1}{8}\Delta t^2 h''(\eta), \\ \lambda h(t_{k+1}) + (1-\lambda) h(t_k) = h(t_{k+1/2}) + \Delta t\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right) h'(t_{k+1/2}) + \\ \qquad \dfrac{1}{8}\Delta t^2 \left\{ h''(\eta) + \dfrac{1}{3}\Delta t\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right) h'''(\xi) \right\} \quad \xi, \eta \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases} \qquad (5.1.55)$$

Підставимо (5.1.55) у праву частину (5.1.54):

$$\langle r_k,\varphi\rangle=\left\{\langle l,\varphi\rangle-a(h',\varphi)-\lambda m\Delta t b\left(h^k,h',\varphi\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}c(h,\varphi)-b\left(h^k;h^k,\varphi\right)\right\}_{t=t_{k+1/2}}-$$

$$-\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)c(h'(t_{k+1/2}),\varphi)-\Delta t^2\langle R_k,\varphi\rangle=-\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)c(h'(t_{k+1/2}),\varphi)-\Delta t^2\langle R_k,\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in V,$$

(5.1.56)

де функціонали $R_j\in V'$ визначаються виразами

$$\langle R_k,\varphi\rangle=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}}c(h''(\eta),\varphi)+\frac{1}{3}\left[a(h'''(\xi),\varphi)+m\Delta t\lambda b\left(h^k;h'''(\xi),\varphi\right)+\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)c(h'''(\xi),\varphi)\right]\right\}\forall\varphi\in V.$$

(5.1.57)

Враховуючи (5.1.53) та (5.1.57) рівняння для визначення похибок набудуть вигляду

$$\begin{cases}a\left(\dot{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right)+\Delta t\lambda mb\left(h^k;\dot{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}},\varphi\right)+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}c\left(\varepsilon^{k+\lambda},\varphi\right)=\\ =-\dfrac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)c\left(h'\left(t_{k+1/2}\right),\varphi\right)-\Delta t^2\langle R_k,\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in V,\\ a\left(\varepsilon^0,\varphi\right)=0,\ k=0,\ldots,N_T.\end{cases}\qquad(5.1.56)$$

З (5.1.56) випливає, що однокрокова рекурентна схема (3.2.5) має перший порядок апроксимації, якщо $\lambda\neq1/2$ та другий порядок апроксимації, якщо $\lambda=1/2$. Отже, ми довели наступне твердження:

Теорема 4.3. *Нехай розв'язок* $h(t)$ *задачі* (5.1.49) *такий, що* $h \in C^3(0,T;V)$, $h_{\Delta t}(t)$ *- його кусково-лінійна апроксимація, побудована за однокроковою рекурентною схемою* (3.2.5).

Тоді, при $\lambda=1/2$ *однокрокова рекурентна схема* (3.2.5) *має другий порядок апроксимації, при* $\lambda\neq1/2$ *- перший порядок апроксимації.*

Введемо наступні позначення: $h(t)$ – розв'язок варіаційної задачі (2.2.38), $h_{лін}(t)$ – розв'язок лінеаризованої задачі (5.1.49), $h_{\Delta t}(t)$ – наближений розв'язок лінеаризованої задачі (5.1.49) побудований за однокроковою рекурентною схемою (3.2.5).

Враховуючи (3.2.2), розв'язок лінеаризованої задачі в околі точки t_k можна представити у вигляді

$$h_{лін}(t) = h(t_k) + h'(\xi_1)(t - t_k) \quad t, \xi_1 \in [t_k, t_{k+1}], \; k = 0,...,N_T . \tag{5.1.57}$$

Розкладемо розв'язок задачі (2.2.38) в ряд Тейлора в околі точки t_k

$$h(t) = h(t_k) + h'(t_k)(t - t_k) + h''(\xi_2)(t - t_k)^2, \quad t, \xi_2 \in [t_k, t_{k+1}], \; k = 0,...,N_T , \tag{5.1.58}$$

де $h \in C^3(0,T;V)$.

Враховуючи (5.1.57), (5.1.58) та теорему про середнє, можна записати

$$|h_{лін}(t) - h(t)| = |(h'(\xi_1) - h'(t_k))(t - t_k) + |h''(\xi_2)(t - t_k)^2 \le |h''(\eta)|\Delta t^2 + |h''(\xi_2)|\Delta t^2 \le K_1 \Delta t^2, \tag{5.1.59}$$

де t, ξ_1, ξ_2, $\eta \in [t_k, t_{k+1}]$, $K_1 = \max\{|h''(\eta)|, |h''(\xi_2)|\}$, $k = 0,\ldots,N_T$.

Оскільки з *Теореми 4.3* випливає, що $|h_{лін}(t) - h_{\Delta t}(t)| \le K_2 \Delta t^2$ $(K_2 = const)$ при $\lambda=1/2$, тоді враховуючи (5.1.59), можна записати

$$\left|h(t)-h_{\Delta t}(t)\right| \le \left|h(t)-h_{лін}(t)\right| + \left|h_{лін}(t)-h_{\Delta t}(t)\right| \le K\Delta t^2,\ K=\max\{K_1,K_2\}. \quad (5.1.60)$$

Враховуючи (5.1.60) можна сформулювати наступне твердження:

Теорема 4.4. *Нехай розв'язок* $h(t)$ *задачі* (2.2.38) *такий, що* $h\in C^3(0,T;V)$, $h_{\Delta t}(t)$ *- його кусково-лінійна апроксимація, побудована за однокроковою рекурентною схемою* (3.2.5). *Тоді при* $\lambda=1/2$ *однокрокова рекурентна схема* (3.2.5) *має другий порядок апроксимації, при* $\lambda\neq 1/2$ *- перший порядок апроксимації.*

5.2 Дослідження існування та збіжності рекурентної схеми грунтового стоку води при плановій фільтрації

Варіаційні задачі виду 1 та 3 є варіаційними задачами побудованими для рівнянь параболічного типу, тому вони є коректно поставлені [10]. Варіаційна задача у виді 2 є побудована для нелінійного диференціального рівняння. Для цієї задачі виведена нерівність

$$\| H(t) \|_H \le \| H(0) \|_H + \int_0^t \left\{ \| E \|_H + \| q^* \|_{L^2(\Gamma)} \right\} dt$$

яка показує існування розв'язку та його залежність від початкових даних задачі.

Дослідимо властивості складників варіаційної задачі сумісного руху поверхневих і грунтових потоків. Побудуємо енергетичні рівняння для двох видів потоку. Проаналізуємо виконання балансу енергії сумісного потоку води.

5.3 Дослідження існування та збіжності рекурентної схеми сумісної моделі руху поверхневих і грунтових потоків

5.3.1 Властивості складників і норми варіаційної задачі взаємодії водних потоків.

Необхідно зауважити, що трилінійна форма

$$N_v(w;u,q) = \int_v \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \rho w_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_i ds, \qquad (5.3.1)$$

є неперервною,

а білінійна форма

$$C_v(w,q) = \int_v 2\ \mu\ e(w) : e(q)\, ds \tag{5.3.2}$$

неперервна і симетрична.

Вона є скалярним добутком в просторі H_F і утворює норму

$$\| w \ \|_{H_F} = \sqrt{C_v(w,w)}, \forall w \in H_F .$$

Далі запишемо для скалярної функції φ білінійну форму

$$D_v(\varphi,\psi) = \int_v k(x,t)\nabla\varphi \cdot \nabla\psi\ dp \tag{5.3.3}$$

яка є неперервна і невід'ємна на просторі допустимих фукцій H_P. Вона є також симетрична і утворює напівнорму

$$|\varphi|_{H_P} = \sqrt{D_v(\varphi,\varphi)}, \forall \varphi \in H^1(\Omega_P) . \tag{5.3.4}$$

5.3.2 Енергетичні рівняння сумісного стоку.

Покладемо в рівнянні (2.1) $\xi = u$ і запишемо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} &M_{\Omega_F}(\rho;u',u) + N_{\Omega_F}(u;u,u) + C_{\Omega_F}(u,u) \\ &\quad = \langle \Im_1, u \rangle - Y_\Gamma(u,u) - A_{\Omega_F}(p,u); \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Запишемо ліву частину

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i d\Omega + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i ds + \int_{\Omega_F} 2\mu\, e(u) : e(u) ds =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_F}\rho\frac{d}{dt}(u^2)\, ds + \int_{\Omega_F} 2\mu\, e(u) : e(u) ds \qquad (5.4.2)$$

З рівняння нерозривності будемо мати:

$$\int_{\Omega_F}\frac{\partial\rho}{\partial t}\theta\, ds + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}\theta\, ds = 0 \qquad (5.4.3)$$

Так як $\rho = const$, то (5.4.2) можна переписати

$$\int_{\Omega_F}\theta\, div\, u ds = 0 \qquad (5.4.4)$$

Враховуючи (5.4.4),тоді (5.4.2) прийме вигляд

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_F}\rho\frac{d}{dt}(u^2)\, ds + \int_{\Omega_F} 2\mu\, e(u) : e(u) ds =$$

$$\frac{1}{2}\rho\int_{\Omega_F}\frac{d}{dt}(u^2)\, ds + 2\mu\int_{\Omega_F} e(u) : e(u) ds \qquad (5.4.5)$$

Перший доданок в (5.4.5) вказує на кінетичну енергію, а другий відповідно на потенціальну.

Запишемо праву частину (5.2.1), тоді

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F}\rho f_i u_i ds + \int_{\partial\Lambda_F} u_i \sum_{k=1}^{3}\bar{\sigma}_{ik}(u, p_s)\bar{n}_k d\gamma = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F}\rho f_i u_i ds + \int_{\partial\Lambda_F} u_i \hat{\sigma}_i d\gamma = < l_1, u > \qquad (5.4.6)$$

Таким чином, з (5.4.5) та (5.4.6) отримаємо енергетичне рівняння для поверхневого потоку:

$$\frac{1}{2}\rho\int_{\Omega_F}\frac{d}{dt}(u^2)\, ds + 2\mu\int_{\Omega_F} e(u) : e(u) ds = < l_1, u > . \qquad (5.4.7)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_F}\rho(u^2)\,ds+\int_{\Omega_F}2\mu\,e(u):e(u)ds=<l_1,u>$$

Тоді з означення норм в попередньому розділі, будемо мати

$$\frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u(t)\right\|_W^2dt=\frac{1}{2}\left\|u(0)\right\|^2+\int_0^t<l_1,u>dt \qquad (5.4.8)$$

Запишемо співвідношення (5.4.8) у вигляді

$$K_{\Omega_F}\left[u(t)\right]+P_{\Omega_F}\left[u(t)\right]=K_{\Omega_F}\left[u(0)\right]+\int_0^t<l_1,u>dt$$

де

$K_{\Omega_F}\left[u(t)\right]=\frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|^2$ - кінетична енергія,

$P_{\Omega_F}\left[u(t)\right]=\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u(t)\right\|_W^2dt$ -потенціальна енергія поверхневого потоку.

Розглянемо рівняння для грунтового потоку (5.2.7), в якому покладемо $\theta=\varphi$

$$\int_{\Omega_P}m\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi dp=\int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(k\frac{\partial\varphi}{\partial x_j})\varphi dp+\int_{\Omega_P}\varepsilon\varphi dp \qquad (5.4.9)$$

Погрупуємо доданки біля u в (4.9), будемо мати

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_P}m\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dp=\int_{\partial\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}}\varphi d\gamma d\gamma-\int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dp+\int_{\Omega_P}\varepsilon\varphi dp \qquad (5.4.10)$$

Перенесемо в (5.4.10) інтеграли по області Ω_P в ліву частину

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_P}m\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dp+\int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2dp=\int_{\partial\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}}\varphi d\gamma+\int_{\Omega_P}\varepsilon\varphi dp \qquad (5.4.11)$$

Перепишемо (5.4.11) в більш загальному вигляді

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_p} m\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dp+\int_{\Omega_p} k(x,t)\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 dp=<l_2,\varphi>. \qquad (5.4.12)$$

Спростимо запис (5.4.12), будемо мати

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_p} m\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dp+\int_{\Omega_p} k(x,t)\ \left(\nabla\varphi\right)^2\ dp=<l_2,\varphi>. \qquad (5.4.13)$$

Тоді з означення норм в попередньому розділі, будемо мати

$$\frac{1}{2}\left\|\varphi(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\varphi(t)\right\|_W^2 dt=\frac{1}{2}\left\|\varphi'(0)\right\|^2+\int_0^t<l_2,\varphi>\,dt \qquad (5.4.14)$$

Запишемо співвідношення (5.4.13) у вигляді

$$K_{\Omega_p}\left[\varphi(t)\right]+P_{\Omega_p}\left[\varphi(t)\right]=K_{\Omega_p}\left[\varphi(0)\right]+\int_0^t<l_2,\varphi>\,dt$$

де

$K_{\Omega_p}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{2}\left\|\varphi(t)\right\|^2$ - кінетична енергія,

$P_{\Omega_p}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\varphi(t)\right\|_W^2 dt$ -потенціальна енергія грунтового потоку.

5.3.3 Рівняння балансу енергії сумісного поверхневого і грунтового водних потоків.

Запишемо варіаційне рівняння для кількості руху

$$M_{\Omega_F}(\rho;u',u)+N_{\Omega_F}(u;u,u)+C_{\Omega_F}(\mu;u,u)$$
$$=\left\langle\Im_1,u\right\rangle-Y_{\Omega_F}(p,u)-A_{\Omega_F}(p,u); \qquad (5.5.1)$$

Розпишемо ліву частину рівняння:

$$\int_{\Omega_F}\sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i ds + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i ds - \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} u_k ds = \int_{\Omega_F}\sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i ds +$$

$$\int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i ds + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} ds - \int_{\partial\Omega_F} u_i \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma \qquad (5.5.2)$$

Враховуючи те, що

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu e_{ik}$$

перепишемо (5.5.2) у наступному вигляді

$$\int_{\Omega_F}\sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i ds + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i ds - \int_{\partial\Omega_F} p\, u_n d\gamma +$$

$$\int_{\Omega_F} u\,\nabla p ds + \int_{\Omega_F} 2\mu\, e(u) : e(u)\, ds - \int_{\partial\Omega_F} u_i \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma \qquad (5.5.3)$$

Запишемо ліву частину варіаційного рівняння для закону збереження маси потоку

$$\int_{\Gamma} u.n_F\, p d\gamma - \int_{\Omega_F} u.\nabla p ds = 0 \qquad (5.5.4)$$

Підставивши в (2.15) замість ψ функцію φ, будемо мати

$$\int_{\Omega_P} m\frac{\partial \varphi}{\partial t}\varphi\frac{\rho g}{\omega} dp - \int_{\partial\Omega_P} k\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}\varphi d\gamma + \int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3} m\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dp - \int_{\Omega_P}\varepsilon\varphi dp = 0 \qquad (5.5.5)$$

Домножимо (5.5.5) на вираз $\frac{\rho g}{\omega}$, тоді

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_P} m\frac{\partial \varphi^2}{\partial t}\frac{\rho g}{\omega} dp - \int_{\partial\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}\varphi\ \rho g d\gamma +$$
$$+\int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\ \rho g\ dp - \int_{\Omega_P}\frac{\rho g}{\omega}\varepsilon\varphi dp = 0 \qquad (5.5.6)$$

Оцінимо доданок в (5.5.6) на границі області Ω_P

$$-\int_{\partial\Omega_P}\frac{k}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}\varphi\rho g d\gamma = -\int_{\Gamma_P}\frac{k}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}\varphi\rho g d\gamma - \int_{\Gamma}\frac{k}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}\varphi\rho g d\gamma - \int_{\Lambda_P}\frac{k}{\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}\varphi\rho g d\gamma =$$
$$-\int_{\Gamma} k\varphi\rho g\frac{\nabla\varphi n_p}{\omega} d\gamma - \int_{\Gamma_P} k\frac{\nabla\varphi n_p}{\omega}\varphi\rho g d\gamma = \int_{\Gamma} p_p \upsilon_{n_p} d\gamma - \int_{\Gamma_P}\tilde{\upsilon}\,\varphi\rho g d\gamma \qquad (5.5.7)$$

Спростимо доданок на границі Ω_F у вигляді (5.5.3), отримаємо

$$-\int\limits_{\partial\Omega_F} u_i \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik} n_{F_k} d\gamma = -\int\limits_{\Lambda_F} (u_n\sigma_{nn} + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma - \int\limits_{\Gamma_F} (u_n\sigma_{nn} + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma - \int\limits_{\Gamma} (u_n\sigma_{nn} + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma \tag{5.5.8}$$

Додамо вирази (5.5.3), (5.5.6),(5.5.7), після простих перетворень, будемо мати

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i dx + \int\limits_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i dx \\
&-\int\limits_{\Lambda_F} p\, u_n d\gamma - \int\limits_{\Gamma_F} p\, u_n d\gamma - \int\limits_{\Gamma} p\, u_n d\gamma + \int\limits_{\Omega_F} u\,\nabla p\, ds + \int\limits_{\Omega_F} 2\mu e(u) : e(u)\, dx - \\
&-\int\limits_{\Lambda_F} (u_n p_a + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma - \int\limits_{\Gamma} (u_n\sigma_{nn} + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma + \int\limits_{\Gamma} u.n_F\, p d\gamma - \int\limits_{\Omega_F} u.\nabla p ds + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_p} \frac{m\rho g}{\omega}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} dx + \int\limits_{\Omega_p}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 \rho g\ dp - \\
&-\int\limits_{\Omega_p} \frac{\rho g}{\omega}\varepsilon\varphi dx - \int\limits_{\Gamma} p_p \upsilon_{n_p} d\gamma + \int\limits_{\Gamma_p} \tilde{\upsilon}\,\varphi\rho g d\gamma = 0
\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Перепишемо попередній вираз (5.5.9) у більш зручній формі, враховуючи властивість нестисливості середовища і крайові умови (1.7)-(1.8), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_F} \sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i dx + \int\limits_{\Omega_F} \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i dx + \int\limits_{\Omega_F} 2\mu e(u) : e(u)\, dx - \\
&-\int\limits_{\Lambda_F} p\, u^0{}_n d\gamma - \int\limits_{\Lambda_F} (u_n p_a + u_\tau\hat{\sigma})d\gamma - \\
&\int\limits_{\Gamma} (u_n\sigma_{nn} + u_\tau\sigma_{n\tau})d\gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_p} \frac{m\rho g}{\omega}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} dx + \int\limits_{\Omega_p}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 \rho g\ dp - \\
&-\int\limits_{\Omega_p} \frac{\rho g}{\omega}\varepsilon\varphi dx - \int\limits_{\Gamma} p_p \upsilon_{n_p} d\gamma + \int\limits_{\Gamma_p} \tilde{\upsilon}\,\varphi\rho g d\gamma = 0
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

Проаналізуємо доданки на спільній границі Г

$$\int_{\Gamma}(u_n p_F + u_\tau \sigma_{n\tau}(u) - p_p \upsilon_{n_p})d\gamma$$

Враховуючи умови спряження (1.25), інтеграл по спільній границі Г дорівнює нулю.

З виразу(2.5), враховуючи кінематичну умову(1.8), для рівняння нерозривності будемо мати

$$\int_{\partial\Omega_F} u.n_F\, p d\gamma = \int_{\Lambda_F} u_n^0\ p d\gamma \tag{5.5.11}$$

Таким чином, рівняння балансу енергії сумісного руху поверхневих і грунтових потоків запишеться:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_F}\sum_{i=1}^{3}\rho_i u_i' u_i dx + \int_{\Omega_F}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_i dx + \int_{\Omega_F} 2\mu e(u):e(u)\,dx - \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_P}\frac{m\rho g}{\omega}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dx + \int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 \rho g\ dp = \\
&\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F}\rho f_i u_i ds + \int_{\Lambda_F} p\ u^0{}_n d\gamma - \\
&-\int_{\Gamma_p}\tilde{\upsilon}\ \varphi\rho g d\gamma + \int_{\Lambda_F}(u_n p_a + u_\tau\tilde{\sigma})d\gamma + \int_{\Omega_P}\frac{\rho g}{\omega}\varepsilon\varphi dx
\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Перепишемо (5.5.12) через повні похідні, будемо мати

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho\int_{\Omega_F}\frac{d}{dt}(u^2)\ ds + \int_{\Omega_F} 2\mu e(u):e(u)\,dx - \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_P}\frac{m\rho g}{\omega}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}dx + \int_{\Omega_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{k(x,t)}{\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 \rho g\ dp = \\
&\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_F}\rho f_i u_i ds + \int_{\Lambda_F} p\ u^0{}_n d\gamma - \\
&-\int_{\Gamma_p}\tilde{\upsilon}\ \varphi\rho g d\gamma + \int_{\Lambda_F}(u_n p_a + u_\tau\tilde{\sigma})d\gamma + \int_{\Omega_P}\frac{\rho g}{\omega}\varepsilon\varphi dx
\end{aligned}$$

5.3.4 Регулярність даних задачі про сумісний водний потік.

Перепишемо вираз (4.8) і (4.14) у вигляді

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t \|u(t)\|_W^2\,dt=\frac{1}{2}\|u(0)\|^2+\int_0^t <l_1,u>\,d\tau \tag{5.6.1}$$

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t \|\varphi(t)\|_W^2 dt=\frac{1}{2}\|\varphi(0)\|^2+\int_0^t <l_2,\varphi>\,d\,\tau \tag{5.6.2}$$

Повна енергія сумісного потоку

$$E(u(t),\varphi(t))=\frac{1}{2}\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t \|u(t)\|_W^2\,d\tau+\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t \|\varphi(t)\|_W^2 d\,t=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2+\|\varphi(t)\|^2+\int_0^t (\|u(t)\|_W^2+\|\varphi(t)\|_W^2)d\,\tau\right] \tag{5.6.3}$$

Проведемо оцінку

$$\left|\int_0^t \left[<l_1,u>+<l_2,\varphi>\right]d\,\tau\right|=\left|\int_0^t <l_1,u>d\,\tau+\int_0^t <l_2,u>d\,\tau\right|\le$$

$$\left|\int_0^t <l_1,u>d\,\tau\right|+\left|\int_0^t <l_2,u>d\,\tau\right| \tag{5.6.4}$$

Проведемо оцінку, використавши нерівність Буняковського-Шварца для першого доданку

$$\left|\int_0^t <l_1,u>d\,\tau\right|=\int_0^t |<l_1,u>|d\,\tau\le\int_0^t \|l_1(\tau)\|\,\|u(\tau)\|\,d\tau$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^t (\|l_1(\tau)\|^2+\|u(\tau)\|^2)d\tau \tag{5.6.5}$$

Аналогічно можна провести оцінку для другого лінійного функціоналу

$$\left|\int_0^t <l_2,u>d\,\tau\right|\le\frac{1}{2}\int_0^t (\|l_2(\tau)\|^2+\|u(\tau)\|^2)d\tau \tag{5.6.6}$$

Таким чином, з (5.6.4) слідує,що вираз

$$\left|\int_0^t \left[<l_1,u>+<l_2,\varphi>\right]d\,\tau\right|$$

обмежений.

Тоді , з (5.6.3) випливає

$$E(u(0),\varphi(0)) := \frac{1}{2}\left[\|u(0)\|^2 + \|\varphi(0)\|^2\right],$$

тобто повна енергія сумісного потоку в початковий момент часу має скінченні значення.

5.3.5 Єдиність та обмеженість розв'язку варіаційної задачі про сумісний рух поверхневого і грунтового потоків.

Сформулюємо наступну теорему.

Теорема 5.7.1 *(про єдиність і обмеженість розв'язку задачі про сумісний потік)*

Нехай варіаційна задача (2.20)-(2.22), дані якої задовольняють умови регулярності

$$u_0 \in H_F, \varphi_0 \in H_P, t_1, t_2 \in [0,T] \tag{5.7.1}$$

має розв'язок $(u(t),\varphi(\mathrm{t}))$.

Тоді розв'язок $(u(t),\varphi(\mathrm{t}))$ буде єдиним розв'язком задачі (1.1)-(1.12)

$$u \in L^2(0,T;H_F), \varphi \in L^2(0,T;H_P). \tag{5.7.2}$$

Більше того, розв'язок $(u(t),\varphi(\mathrm{t}))$ неперервно залежить від даних задачі (1.1)-(1.12) і за цих умов буде правильною апріорна оцінка

$$\frac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 + \int_0^t (\|u(t)\|_W^2 + \|\varphi(t)\|_W^2) d\,\tau\right] \le$$
$$C\left\{\frac{1}{2}\left[\|u(0)\|^2 + \|\varphi(0)\|^2\right] + \int_0^t (\|u(t)\|_W^2 + \|\varphi(t)\|_W^2) d\,\tau\right\} \tag{5.7.3}$$

зі сталою $C > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення. З огляду на умови теореми (5.7.2), маємо

$l_1 \in L^2(0,T;H_F), l_2 \in L^2(0,T;H_P)$,

внаслідок чого з (5.6.4),(5.6.5), будуть правильними оцінки

$$\left| \int_0^t < l_1, u > d\tau \right| \le \frac{1}{2} \int_0^t (\| l_1(\tau) \|^2 + \| u(\tau) \|^2) d\tau \tag{5.7.4}$$

$$\left| \int_0^t < l_2, u > d\tau \right| \le \frac{1}{2} \int_0^t (\| l_2(\tau) \|^2 + \| u(\tau) \|^2) d\tau \tag{5.7.5}$$

З початкової задачі (1.12) для функції u(t), маємо

$$.. \quad \| u'(0) \|^2 = \| u_0 \|_H^2 \tag{5.7.6}$$

Аналогічно, з (1.12) для функції $\varphi(t)$ запишемо

$$\| \varphi'(0) \|^2 = \| \varphi_0 \|_H^2 . \tag{5.7.7}$$

Далі, з огляду на введені норми в п.4, знайдеться $C = const > 0$ така, що

$$|\varphi|_{H_P} \le C \|\varphi\|_{H_P} , \forall \varphi \in H^1(\Omega_P), \tag{5.7.8}$$

тоді

$$|\varphi(0)|_{H_P} \le C \|\varphi(0)\|_{H_P} = C \|\varphi_0\|_{H_P} , \forall \varphi \in H^1(\Omega_P), \tag{5.7.9}$$

Виходячи з співвідношень (5.7.5)-(5.7.7) та (5.7.9), прийдемо до апріорної\ оцінки (5.7.3).

На підставі ж цієї оцінки міркуваннями від супротивного доводиться єдиність розв’язку задачі (2.20)-(2.22).

5.4 Висновки

У даному розділі були побудовані чисельні схеми варіаційних задач стоку поверхневої води у гідродинамічному та кінематичному наближеннях, застосовуючи проекційно-сіткову схему МСЕ. Для

дискретизації задач у часі була використана однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.

Дискретизація задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні за просторовими змінними проводилась, використовуючи кусково-лінійні апроксимації на трикутниках для потоків, глибина стоку вважалась сталою на кожному скінченному елементі. Для покращення розв'язку при великих значеннях чисел Рейнольдса (Re>100) запропоновано стабілізаційну схему МСЕ. Побудова стабілізаційної схеми базується на основі методу найменших квадратів та проводиться для дискретизованої варіаційної задачі в часі, яка підміняється збуреною задачею. Проведено оцінку стабілізаційного множника для рівнянь Нав'є-Стокса.

На підставі законів збереження виведено основні рівняння руху поверхневих і грунтових потоків, які доповнено крайовими і початковими умови, з невідомими величинами вектора швидкості, тиску та п'єзометричного напору. Сформульовано варіаційну задачу сумісного потоку та отримано умови контакту на спільній границі двох середовищ. Доведено існування, єдиність і обмеженість розв'язку варіаційної задачі сумісного стоку.

РОЗДІЛ VI. ТЕСТОВІ ПРИКЛАДИ ТА АНАЛІЗ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

6.1 Аналіз результатів поверхневого стоку води у гідродинамічному наближенні

Розглянемо задачу стоку рідини з поверхні деякого водозбору. Задачу будемо розв’язувати, використовуючи побудовану модель стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні (2.2.18)-(2.2.20). Всі параметри задачі задаються в безрозмірному вигляді. Виберемо тестову поверхню водозбору $\eta(x, y)$ у вигляді рис. 6.1, де x, y змінюються від 0 до 2. В початковий момент часу вважаємо, що h^0 =0.01, q_i=0 (i=1,2). Щодо граничних умов, припускаємо, що витоку немає, тобто нормальна складова швидкості потоку по межі області рівна нулю $q \cdot n = 0$. Припускаємо, що постійний дощовий притік R=1, інфільтрація рідини в грунт I=0, коефіцієнт Шезі C=60, число Рейнольдса Re=0.1. Кількість точок розбиття області 60×60.

Для розв'язування задачі застосуємо чисельну схему (3.1.16), в якій параметр λ=0.5, Δt=0.005. Розглянемо результати в момент часу t = 0.195 (кількість кроків по часу tt=40).

На рис. 6.2 зображена глибина стоку H (кількість води, яка накопичується на даній поверхні з постійним дощовим притоком).

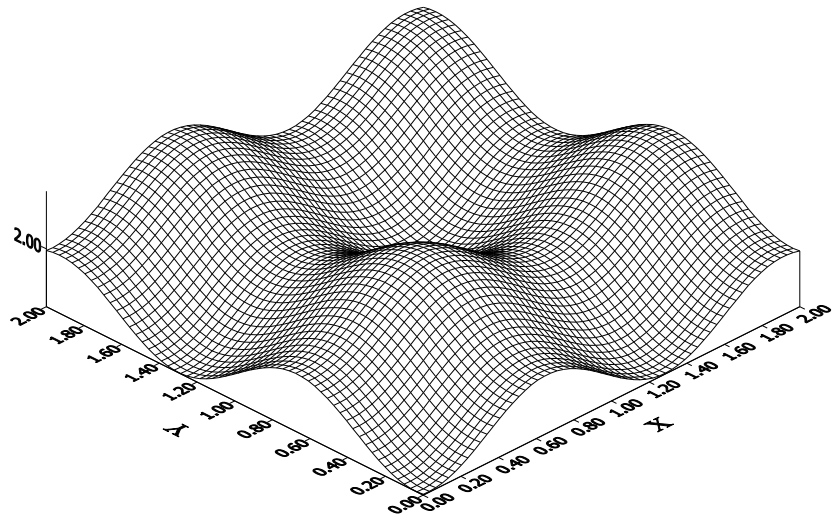


Рис. 6.1. Рельєф поверхні $\eta(x, y)$.

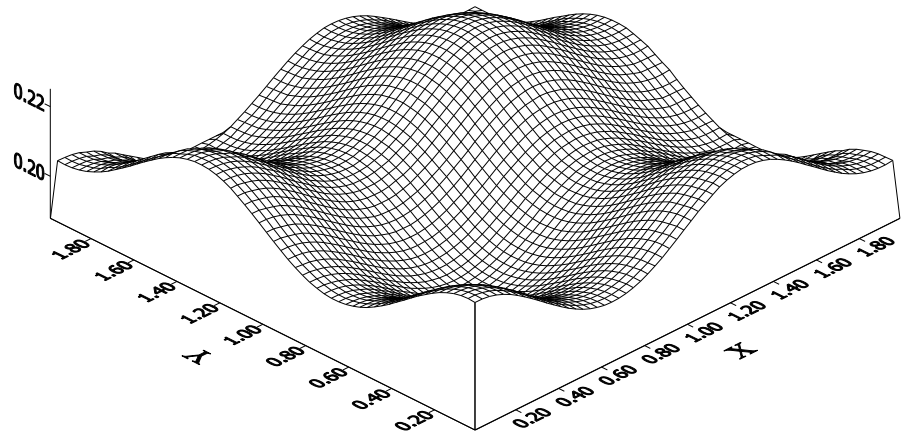


Рис. 6.2. Глибина стоку *H*.

Оскільки витоку води немає, то з часом відбувається заповнення заглиблень. З результатів видно, що максимальне значення глибини досягається в середині поверхні рельєфу, де є найбільша заглибина. У найвищих точках поверхні водозбору значення глибини близькі до нуля, оскільки відбувається стік рідини.

Перевіримо закон збереження маси для даного прикладу. Обчислимо, який об’єм рідини назбирується на поверхні водозбору за заданий проміжок часу, враховуючи постійний дощовий притік R=1 та враховуючи отримане значення глибини в останній момент часу. Проведені розрахунки показали, що об’єм випадаючих опадів приблизно співпадає з об’ємом рідини на заданій поверхні ≈ 0.78105. Отже, закон збереження маси виконується.

На рис. 6.3 та рис. 6.4 зображені отримані значення складових потоку рідини Q_x, Q_y відповідно по осі x та осі y. На рис. 6.5 зображений модуль потоку. З результатів можна побачити, що потік має нульові значення у тих точках рельєфу, де рідина назбирується та звідки стікає, тобто в цих екстремальних точках рух води відсутній. Максимальні значення потоку досягаються у точках, де є максимальний нахил донної поверхні до горизонту.

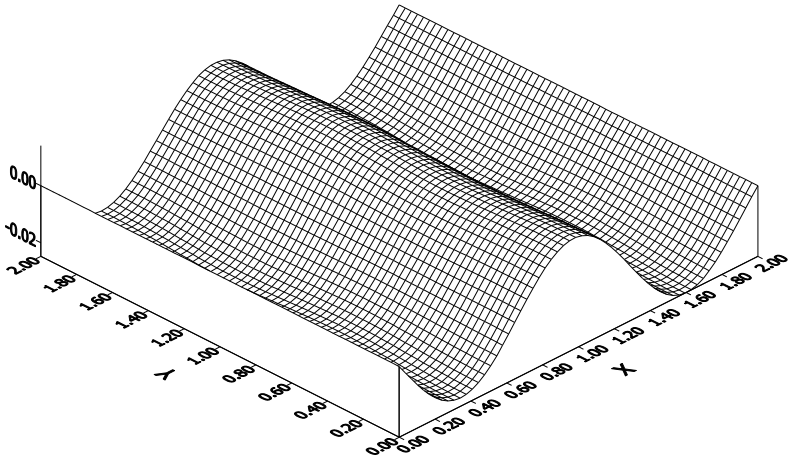


Рис. 6.3. Складова потоку Q_x.

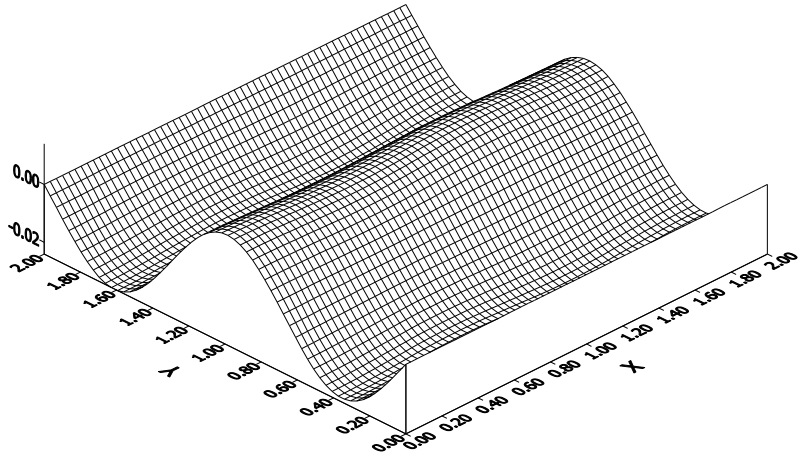


Рис. 6.4. Складова потоку Q_y.

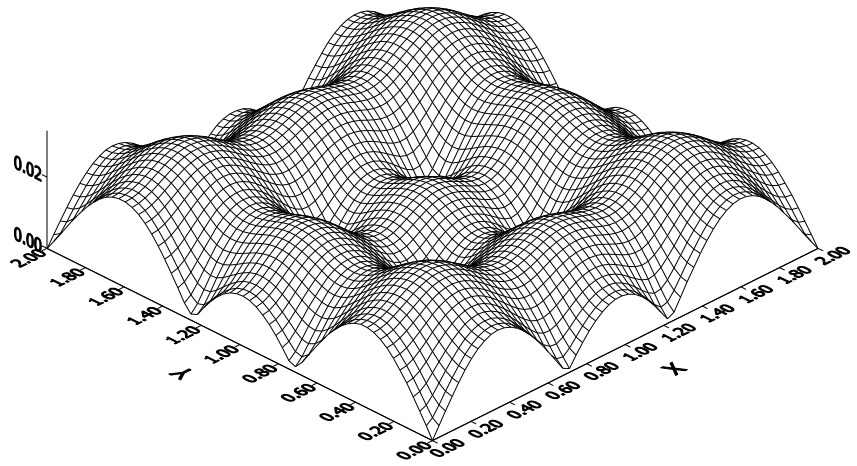


Рис. 6.5. Модуль потоку.

Проаналізуємо порядки збіжності розв’язків відносно чисельних результатів обчислених на різних сітках в енергетичних нормах просторів H^1 і L^2 за просторовими змінними та значення відносної похибки. Проведемо обчислення даного прикладу на сітках з розбиттям області 20×20, 40×40, 80×80 та виведемо результати в однаковий момент часу T=0.293. Для сіток з різним розбиттям будемо використовувати наступні позначення результатів глибини: $\boldsymbol{H_{20\times20}}$ (N_x=20, N_y=20, tt=20), $\boldsymbol{H_{40\times40}}$ (N_x=40, N_y=40, tt=40), $\boldsymbol{H_{80\times80}}$ (N_x=80, N_y=80, tt=80). Відповідно для потоків: $\boldsymbol{Q_{x20\times20}}$ (N_x=20, N_y=20, tt=20), $\boldsymbol{Q_{x40\times40}}$ (N_x=40, N_y=40, tt=40), $\boldsymbol{Q_{x80\times80}}$ (N_x=80,

N_y=80, tt=80), $\boldsymbol{Q_{y20\times20}}$ (N_x=20, N_y=20, tt=20), $\boldsymbol{Q_{y40\times40}}$ (N_x=40, N_y=40, tt=40), $\boldsymbol{Q_{y80\times80}}$ (N_x=80, N_y=80, tt=80).

У таблиці 4.4 представлені відповідні результати порядків збіжності та відносних похибок.

Таблиця 4.4

Порядки збіжності та відносні похибки

Розбиття	$\boldsymbol{k_{H^1}}$	$\boldsymbol{k_{L^2}}$	$\boldsymbol{\delta_{H^1}}$**(%)**	$\boldsymbol{\delta_{L^2}}$**(%)**
$\boldsymbol{H_{20\times20}, H_{40\times40}, H_{80\times80}}$	0,7430	0,7430	0,4012	0,4012
$\boldsymbol{Q_{x20\times20}, Q_{x40\times40}, Q_{x80\times80}}$	1,7348	2,1557	6,9026	6,6579
$\boldsymbol{Q_{y20\times20}, Q_{y40\times40}, Q_{y80\times80}}$	1,7226	2,1441	6,8740	6,6332

Отже, чисельні результати підтвердили порядки апроксимацій для глибини та потоків при побудові чисельних схем. Оскільки, глибина вважається сталою на одному скінченному елементі, то її апроксимація є першого порядку. Для потоків вибирались кусково-лінійні апроксимації другого порядку.

На межі поверхні водозбору можуть задаватись граничні умови зовнішнього притоку або витоку рідини. Розглянемо тестовий приклад з рельєфом поверхні зображеним на рис. 6.6 та продемонструємо застосування різних граничних умов. Обчислення будемо проводити з наступними заданими вхідними параметрами: h^0 =0.00001, q_i=0 (i=1,2), R=0.1, I=0, C=60, Re=0.1, кількість точок розбиття області 30×30.

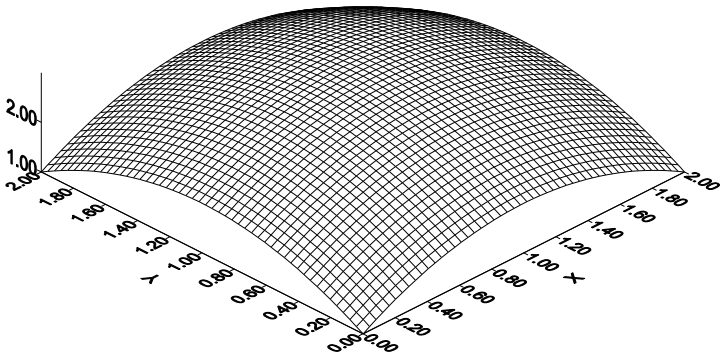


Рис. 6.6. Рельєф поверхні $\eta(x, y)$.

Припускаємо, що дощовий притік постійний в часі. Для розв'язування задачі застосуємо чисельну схему (3.1.16), де λ=0.5, Δt=0.01. Результати будемо розглядати в момент часу t = 0.391 (кількість кроків по часу tt=40). На межі області задамо граничні умови без витоку $q \cdot n = 0$. На рис. 6.6 та 6.8 зображені відповідні значення глибини та модуля потоку.

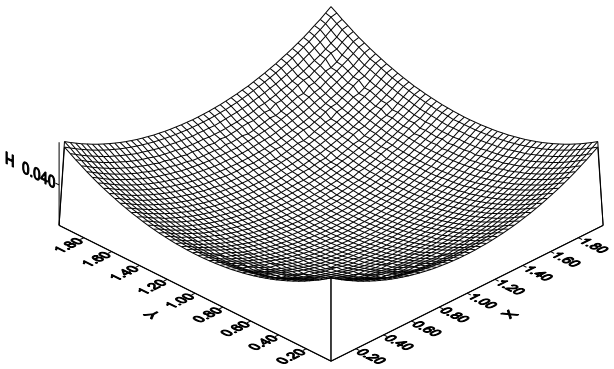


Рис. 6.7. Глибина стоку H.

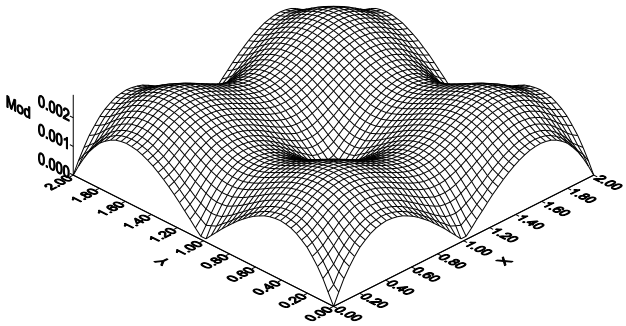


Рис.6.8. Модуль потоку.

Розв’яжемо цей самий приклад з іншими граничними умовами. На межі Γ_x ($0 \le x \le 2$, y=0) задамо витік Q_y=-0.1, на межі Γ_y ($0 \le y \le 2$, x=0) – Q_x=-0.1. На рис. 6.9 та 6.10 зображені відповідні значення глибини та модуля потоку.

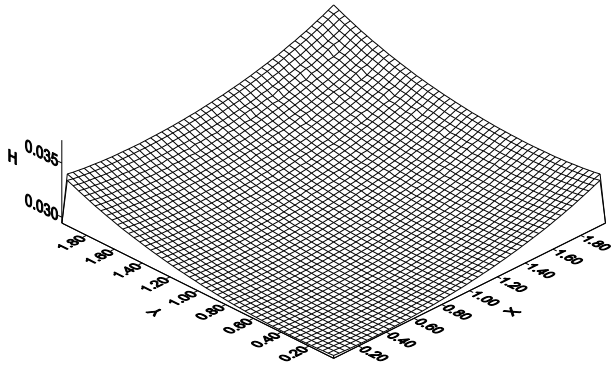


Рис. 6.9. Глибина стоку *H*.

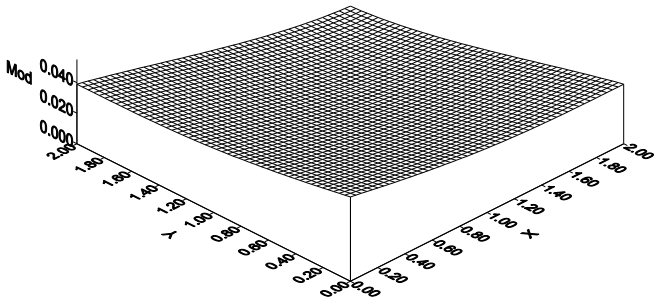


Рис.6.10. Модуль потоку.

З вище наведених результатів (рис. 6.7 - 6.10) легко бачити, що коли витоку немає і дощовий притік постійний, відбувається накопичення рідини на поверхні водозбору. З часом відбувається стік води з максимальних точок рельєфу у заглибини та її рівень зростає (рис. 6.7). Модуль потоку приймає нульові значення у точках рельєфу поверхні, з яких вода стікає та на дні заглибин (рис. 6.8). При заданні витоку на межах Γ_x та Γ_y значення глибини значно зменшується і у точці (0, 0) досягає мінімального значення (рис. 6.9). Відповідно модуль потоку зростає і у точці (0, 0) досягає максимального значення (рис. 6.10). Це пояснюється тим, що в цій точці є максимальний витік.

Якщо треба задати на межі бічний притік, то він задається з протилежним знаком до витоку. Отже побудована чисельна схема (3.1.16) дозволяє розв’язувати задачі стоку поверхневої води з граничними умовами, які можуть задавати як притік так і витік рідини.

Важливим моментом при розв’язанні задач поверхневої води виступає вибір значень числа Рейнольдса Re. При великих значеннях цього параметра (Re>100) розв'язок отриманий за чисельною схемою (3.1.16) втрачає свою стійкість, значення потоків та їх градієнти набувають дуже великих чисел, внаслідок чого з'являються паразитичні осциляції. Рис.6.11 відображає значення глибини задачі з параметрами заданими на початку розділу та числом Рейнольдса Re=150. На рис.6.12,

рис.6.13 відображені значення складових потоків відповідно по осях *x* та *y*, рис.6.14 відображає модуль потоку. Результати приведені в момент часу *t* = 0.073 (кількість кроків по часу *tt* = 15, Δ*t* = 0.005).

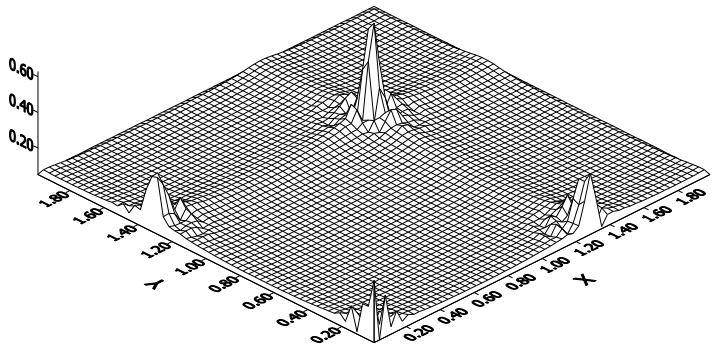


Рис.6.11. Глибина стоку *H*.

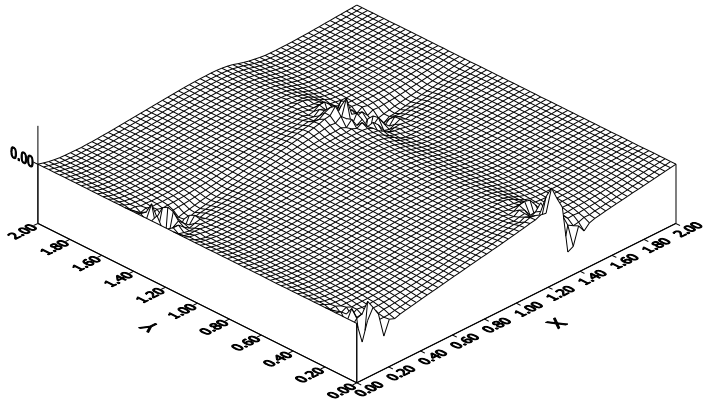


Рис.6.12. Складова потоку Q_x.

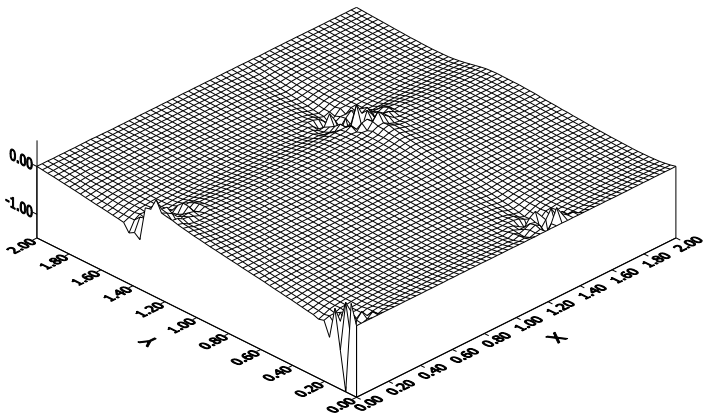


Рис.6.13. Складова потоку Q_y.

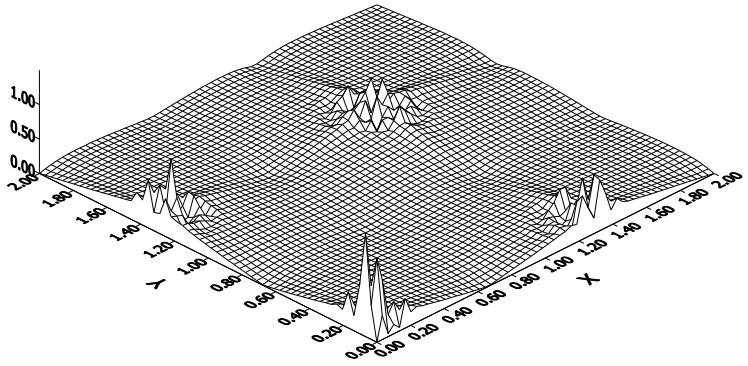


Рис.6.14. Модуль потоку.

Якщо продовжувати проводити обчислення далі по часу, то значення потоків різко зростають.

Для вирішення цієї проблеми була побудована стабілізаційна схема методу скінченних елементів (див. пункт 3.1.3). Застосуємо чисельну схему (3.1.27) до розв'язання нашої задачі з числом Рейнольдса Re=150 та стабілізаційним множником M_e=-0.5. Розглянемо результати обчислень в момент часу t = 0.586 (кількість кроків по часу tt=60), розбиття області 30×30. На рис.6.15 приведені значення глибини, рис.6.16, рис.6.17, рис.6.18 – відображають значення складових та модуль потоку відповідно.

З результатів видно, що проблема, яка виникала при застосуванні чисельної схеми (3.1.16) до розв'язання задачі вирішується позитивно.

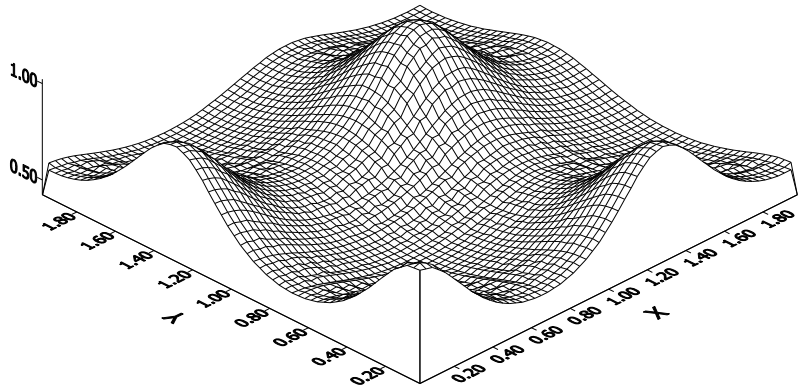


Рис.6.15. Глибина стоку H.

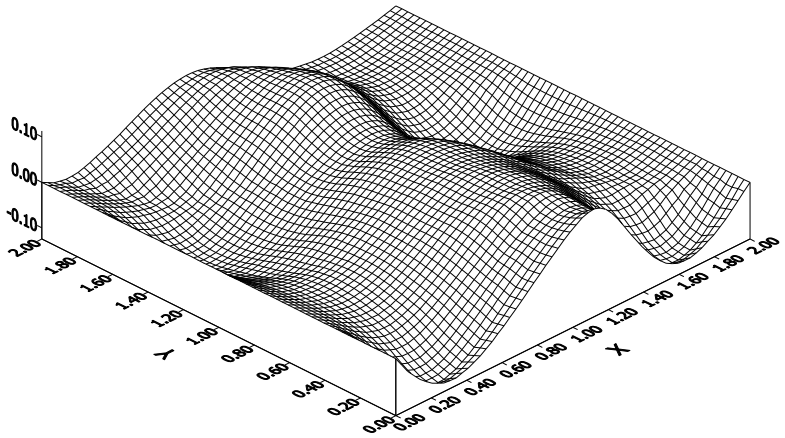


Рис.6.16. Складова потоку Q_x.

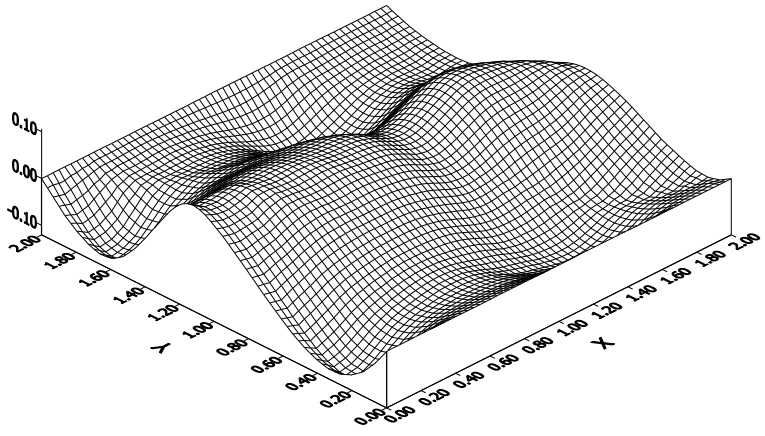


Рис.6.17. Складова потоку Q_y.

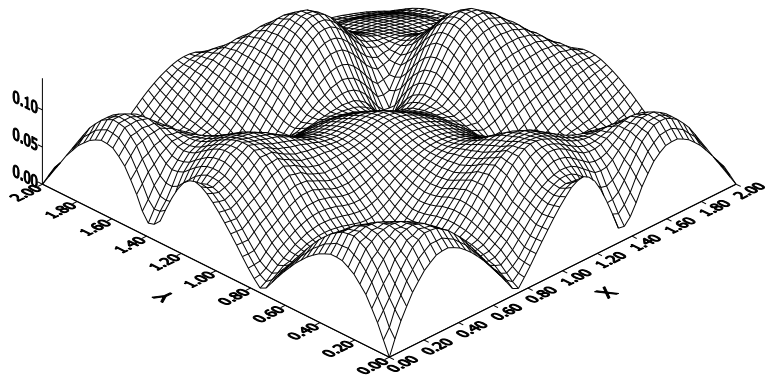


Рис. 6.18. Модуль потоку.

Отже, розв'язок згладжується за рахунок введеного стабілізаційного доданку. Результати обчислень показали, що задачі стоку поверхневої води можна розв’язувати з довільними значеннями числа Рейнольдса, застосовуючи стабілізаційну схему методу скінченних елементів (3.1.27).

Закон збереження маси для отриманих результатів виконується. Об’єм випадаючих опадів співпадає з об’ємом рідини накопиченій на поверхні водозбору ≈2.34314.

Розглянемо стік вологи з поверхні водозбору рис.6.19 (частина території Переспільської сільської ради у Львівській області). Граничні та початкові умови виберемо аналогічно до попереднього прикладу, кількість точок розбиття області 60×60, стабілізаційний множник M_e = -0.5. Розглянемо результати в момент часу t = 0.146 (кількість кроків по часу tt=30) з числом Рейнольдса Re=150.

На рис.6.20 зображена глибина стоку H (кількість води, яка накопичується на даній поверхні з постійним дощовим притоком). Для більшої наочності результатів порівняємо ізолінії рельєфу водозбору (Рис.6.21) та глибини (Рис.6.22). Оскільки витоку води немає, то з часом відбувається заповнення заглиблень. З результатів видно, що заповнення рельєфу водозбору відбувається згідно ізоліній.

Рис.6.23 та Рис.6.24 відображають значення складових компонент потоку. На Рис.6.25 зображений модуль потоку.

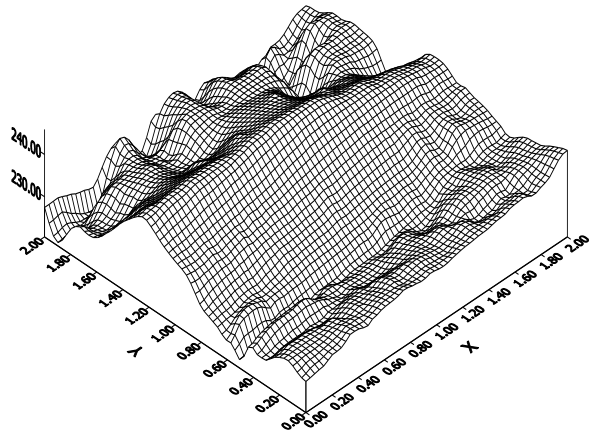


Рис.6.19. Рельєф поверхні η(*x*, *y*).

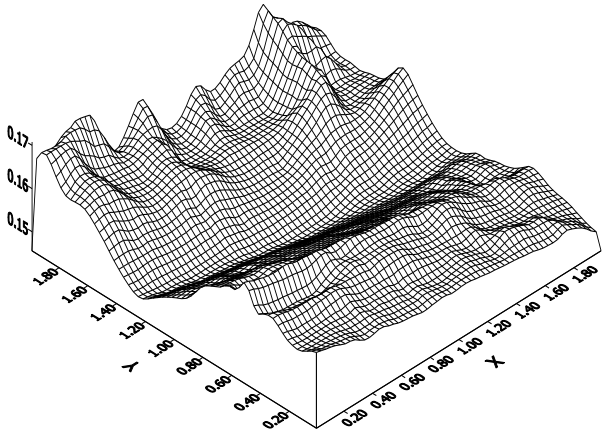


Рис.6.20. Глибина стоку *H*.

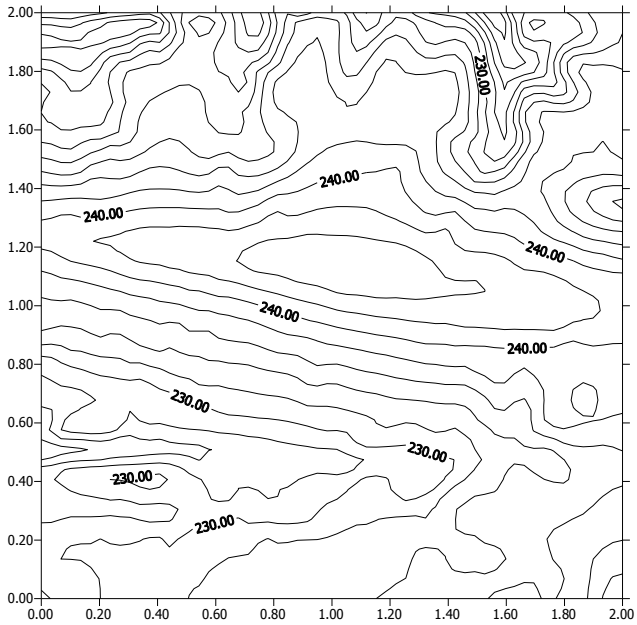


Рис.6.21. Ізолінії рельєфу поверхні η(*x*,*y*).

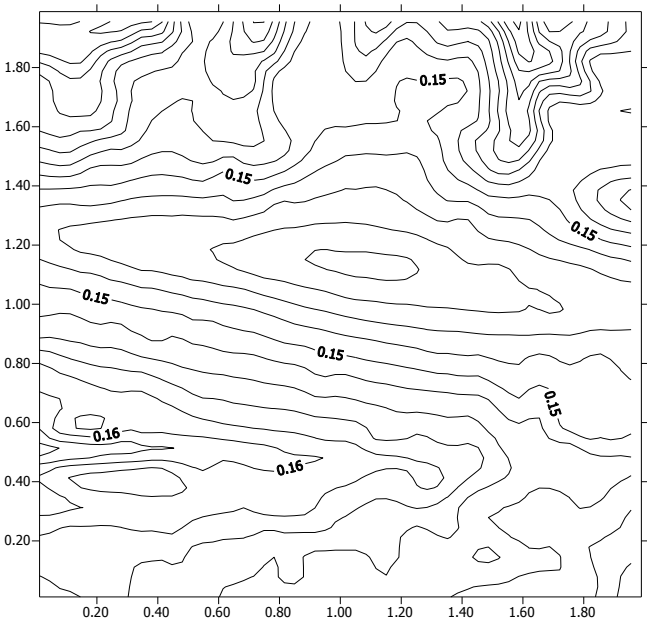


Рис.6.22. Ізолінії поверхні глибини стоку H(*x*,*y*).

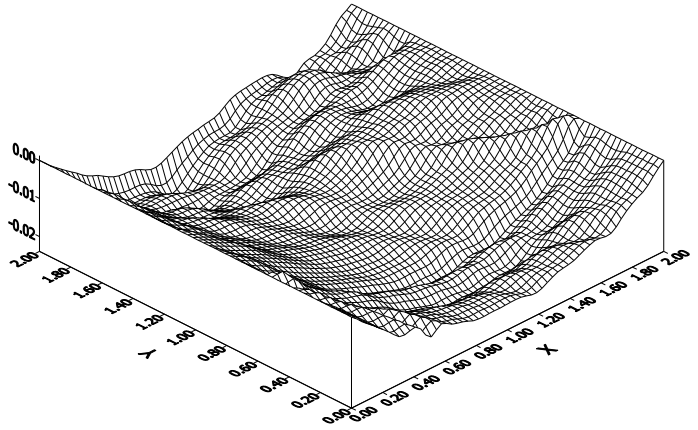


Рис.6.23. Складова потоку Q_x.

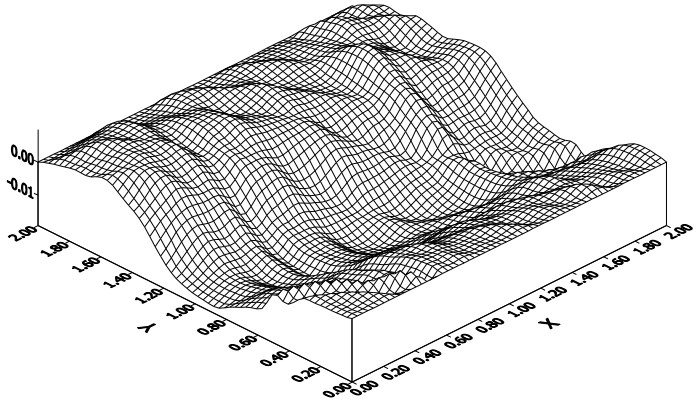


Рис.6.24. Складова потоку Q_y.

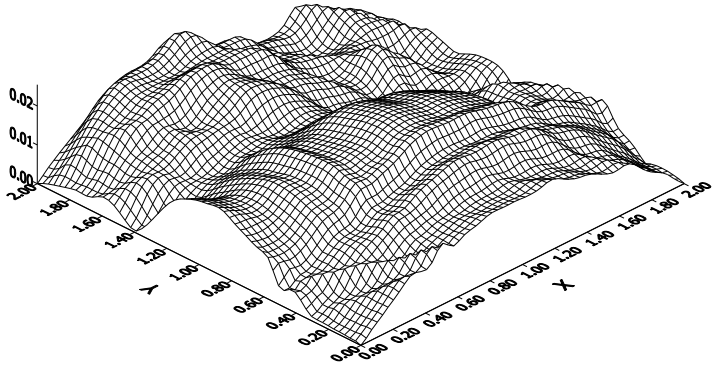


Рис.6.25. Модуль потоку.

Для вибраного прикладу зі стабілізаційним множником є справедливі закони збереження маси та руху рідини. Побудована модель дає можливість проводити розрахунки значень глибини та розходів потоку рідини на водозборах з дощовим та бічним притоками для різних початкових та крайових умов у різні моменти часу при великих значеннях числа Рейнольдса.

Вище наведені приклади свідчать про те, що суттєвий вплив на розв’язок задачі стоку поверхневої води з поверхні деякого водозбору має вибір числа Рейнольдса. При малих значеннях цього числа задачу можна розв’язувати використовуючи побудовану чисельну схему (3.1.16). Вибравши Re>100, розв’язок втрачає свою стійкість (Рис.6.11 – Рис.6.14) . Це пояснюється тим, що при великих значеннях числа Рейнольдса розв'язки задачі можуть мати внутрішні та примежові шари – дуже вузькі області, де самі розв'язки та їх градієнти різко змінюються. Внаслідок цього, чисельні розв'язки, побудовані за схемою Гальоркіна, де параметр дискретизації занадто великий, щоб врахувати всі ці шари, можуть сильно осцилювати у всій області визначення.

Враховуючи це, була побудована стабілізаційна схема МСЕ (3.1.27). Застосовуючи цю схему до розв'язування задач стоку поверхневої води з поверхні деякого водозбору, вище згадана проблема зникає (Рис.6.15 – Рис.6.18).

Отже, побудована стабілізаційна схема МСЕ може ефективно застосовуватись для розв'язування задач стоку поверхневої води з довільної поверхні водозбору при великих значеннях чисел Рейнольдса.

Покажемо, як врахування напружень у середині потоку впливає на стійкість розв’язку задачі стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні. Задачу будемо розглядати на поверхні водозбору зображеної на рис. 6.1. У початковий момент часу вважаємо, що h^0=0.00001 , дощовий

притік R=0.1, інфільтрація води в грунт I=0, коефіцієнт Шезі C=1, число Рейнольдса Re=0.1, параметр $\lambda = 0.5$, кількість точок розбиття області 30×30. На рис.6.26 – рис.6.29 відображені значення глибини у різні моменти часу з напруженнями та без них.

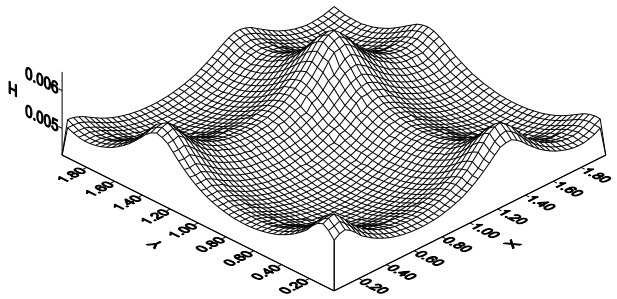


Рис.6.26. Значення глибини без напружень(T=0.49)

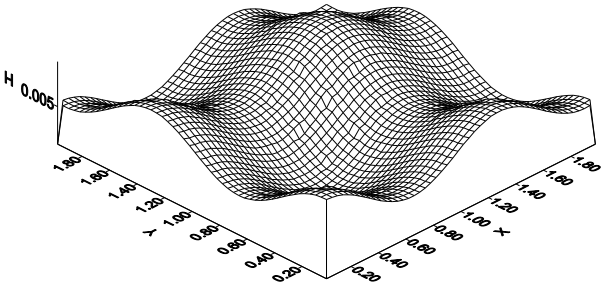


Рис.6.27. Значення глибини з напруженнями(T=0.49)

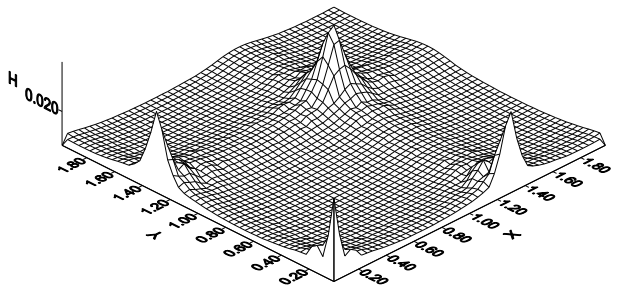


Рис.6.28. Значення глибини без напружень(T=0.98)

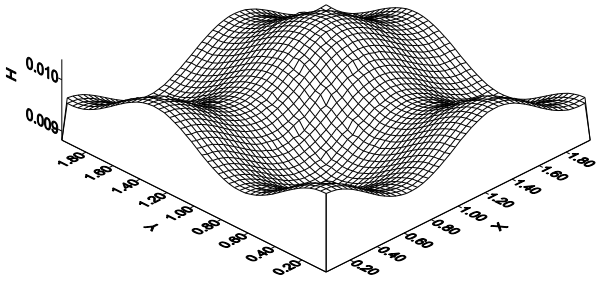


Рис.6.29. Значення глибини з напруженнями(T=0.98)

Таким чином, з вище наведених результатів видно, що зі збільшенням часу розв’язок задачі знаходження глибин без напружень втрачає свою стійкість і з’являються великі значення потоків. Отже, на поверхнях зі складним рельєфом, коли градієнти поверхні значно змінюються, необхідно враховувати в математичній моделі всі складові напружень у середині потоків.

6.2 Аналіз результатів лінеаризованої задачі поверхневого стоку води в наближенні кінематичної хвилі

У цьому розділі розглянемо спрощену модель стоку поверхневої води – стік рідини в кінематичному наближенні. Спочатку проаналізуємо результати одновимірної моделі кінематичної хвилі [67]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{\partial q}{\partial x}=R-I,\ q=\alpha h^{m}, \\ h\big|_{t=0}=h_0, h\big|_{x=0}=0, \end{cases} \text{ в області } (0,L)\times(0,T], \qquad (4.2.1)$$

де $\alpha = Ci_0^{1/2}$, $m=\dfrac{3}{2}$ – за формулою Шезі для турбулентного руху або $\alpha=\dfrac{gi_0}{2\nu}, m=3$ – для ламінарного руху, ν - кінематична в'язкість, i_0 – нахил поверхні до горизонту.

Розв'яжемо тестову задачу стоку рідини з поверхні зображеної на рис. 4.1. Початкові дані та дощовий притік підберемо так, щоб задача мала аналітичний розв'язок. Для розв'язування задачі будемо використовувати чисельну схему (3.2.5). Дискретизацію за просторовою змінною проводимо використовуючи кусково-лінійні апроксимації у вигляді функцій Куранта. В моделі (4.2.1) приймемо параметри α=0.5, m=2, $0 \le x \le 1$. Початкове значення для глибини задамо у вигляді $h^0 = x^2$ ($0\le x\le 1$), граничну умову – $h(0)=0$ $\forall t\in[0,\ T]$. Вважаємо, що дощовий притік змінюється за наступним законом $R=\dfrac{x^2(2x-1)}{(1+t)^2}$ ($0\le x\le 1,\ 0\le t\le T$). При таких вибраних параметрах задача має аналітичний розв'язок у вигляді $F=x^2/(1+t)$. В чисельній схемі (3.2.5) приймемо Δt = 0.008, λ=0.5, 1/Re=0.

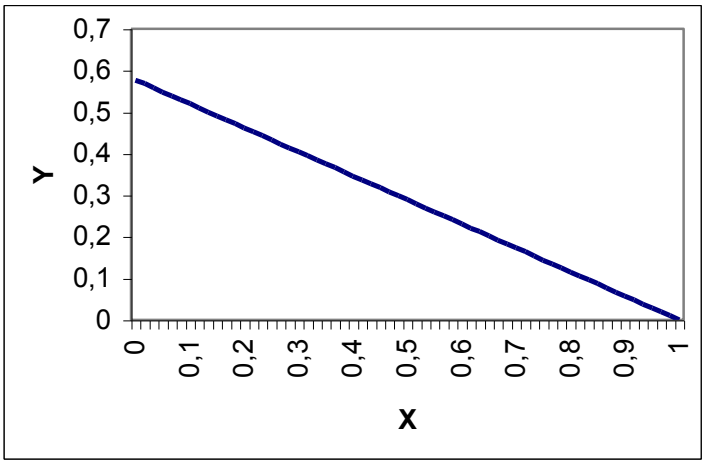


Рис. 5.1. Рельєф поверхні водозбору**.**

Обчислимо глибину у різні моменти часу T = 0.333(tt=40), T = 0.5(tt=60), T = 0.667(tt=80), tt – кількість кроків по часу. Кількість точок розбиття проміжку N=60. На рис. 4.2 зображені відповідні значення глибини. Оскільки дощовий притік з часом зменшується, отже і глибина зменшується. Це пояснюється тим, що на другий кінець проміжку x=1 гранична умова не накладається і рідина може витікати.

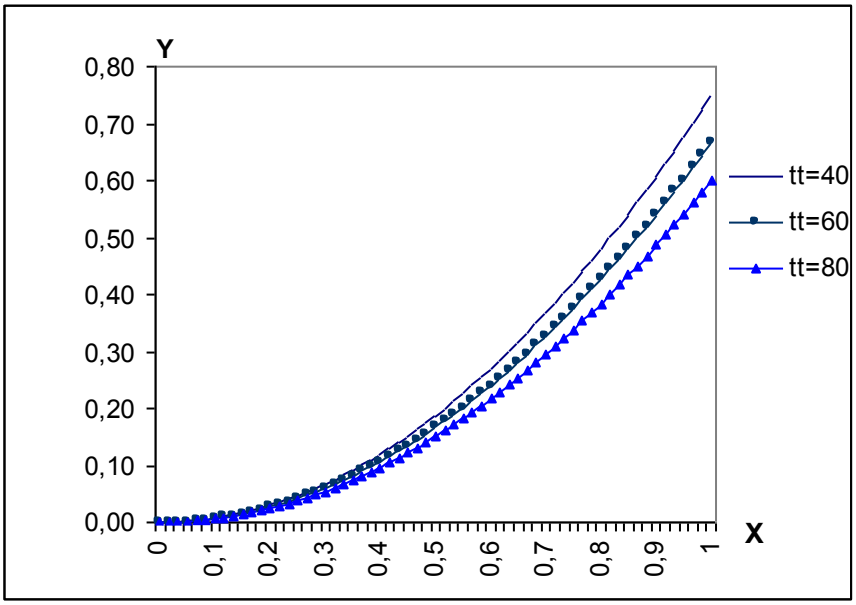


Рис. 5.2. Графіки глибини.

Проведемо дослідження порядку збіжності розв’язку в енергетичних нормах просторів H^1 і L^2 за просторовою змінною та значення відносної похибки зі згущенням сітки скінченних елементів. Обчислення будемо

проводити в момент часу T=0.5. Для сіток з різним розбиттям будемо використовувати наступні позначення: $\boldsymbol{H_{20}}$ (N=20, tt=10), $\boldsymbol{H_{40}}$ (N=40, tt=40), $\boldsymbol{H_{80}}$ (N=80, tt=80), $\boldsymbol{H_{160}}$ (N=160, tt=160), $\boldsymbol{H_{320}}$ (N=320, tt=320) – відповідні значення глибини; k_{H^1} – порядок збіжності в просторі H^1; k_{L^2} – порядок збіжності в просторі L^2, δ_{H^1} – відносна похибка в просторі H^1; δ_{L^2} – відносна похибка в просторі L^2. У таблиці 4.1 представлені відповідні результати.

Таблиця 4.1

Порядок збіжності та відносна похибка

Розбиття	$\boldsymbol{k_{H^1}}$	$\boldsymbol{k_{L^2}}$	$\boldsymbol{\delta_{H^1}}$**(%)**	$\boldsymbol{\delta_{L^2}}$**(%)**
$\boldsymbol{H_{20}, H_{40}, H_{80}}$	0,9905	1,9989	1,5224	0,0363
$\boldsymbol{H_{40}, H_{80}, H_{160}}$	0,9944	1,9989	0,7642	0,0091
$\boldsymbol{H_{80}, H_{160}, H_{320}}$	0,9975	1,9995	0,3828	0,0023

З результатів видно, що зі згущенням сітки порядок збіжності в просторі H^1 прямує до одиниці, а в просторі L^2 до двійки. Відносна похибка розв'язку в просторі H^1 зі згущенням у двічі сітки скінченних елементів зменшується в два рази, у просторі L^2 – в чотири рази.

Проведемо дослідження порядку збіжності за часовою змінною. Виберемо кількість точок розбиття за просторовою змінною 40. Результати будемо розглядати в момент часу T=0.5 на різних часових сітках з кроками Δt_1 =0.0124, Δt_2 =0.0062, Δt_3 = 0.0031. Порядок збіжності в енергетичній нормі простору $H^1 \approx 1{,}98$, в нормі простору $L^2 \approx 1{,}99$.

Порівняємо наближені результати для глибини з аналітичним розв'язком $F=x^2/(1+t)$. Обчислення будемо проводити на сітці з кількістю точок розбиття N=30. У таблиці 4.2 відображені результати глибини

наближеного та аналітичного розв'язку і модуля їх різниці в момент часу T=1 (tt = 60). З таблиці видно, що абсолютна похибка обчислень $\varepsilon \approx 10^{-4}$.

Таблиця 4.2

Точний і наближений розв'язки та абсолютна похибка

X	***H***	***F***	***|H - F|***
0,033	0,0005675074	0,0005555556	0,000012
0,067	0,0022452730	0,0022222222	0,000023
0,100	0,0050331417	0,0050000000	0,000033
0,133	0,0089323040	0,0088888889	0,000043
0,167	0,0139389967	0,0138888889	0,000050
0,200	0,0200651198	0,0200000000	0,000065
0,233	0,0272766506	0,0272222222	0,000054
0,267	0,0356634706	0,0355555556	0,000108
0,300	0,0450107372	0,0450000000	0,000011
0,333	0,0557791546	0,0555555556	0,000224
0,367	0,0670948546	0,0672222222	0,000127
0,400	0,0804033493	0,0800000000	0,000403
0,433	0,0936556258	0,0938888889	0,000233
0,467	0,1092921454	0,1088888889	0,000403
0,500	0,1249166494	0,1250000000	0,000083
0,533	0,1424726900	0,1422222222	0,000250
0,567	0,1605284667	0,1605555556	0,000027
0,600	0,1803221087	0,1800000000	0,000322
0,633	0,2005054399	0,2005555556	0,000050
0,667	0,2224743975	0,2222222222	0,000252
0,700	0,2450234155	0,2450000000	0,000023
0,733	0,2691781798	0,2688888889	0,000289
0,767	0,2938938120	0,2938888889	0,000005
0,800	0,3202396517	0,3200000000	0,000240
0,833	0,3472571911	0,3472222222	0,000035
0,867	0,3758301503	0,3755555556	0,000275
0,900	0,4050627867	0,4050000000	0,000063
0,933	0,4357936972	0,4355555556	0,000238
0,967	0,4672639492	0,4672222222	0,000042
1,000	0,5002451106	0,5000000000	0,000245

Розглянемо приклади з більш складним рельєфом рис. 4.3. Будемо розглядати стік рідини на заданій поверхні водозбору з постійним дощовим притоком R=0.3. Вважаємо, що глибина в початковий момент часу h^0 =0 ($0 \le x \le 1$). Задачу будемо розв'язувати користуючись моделлю

(4.2.1), тобто в чисельній схемі (3.2.5) приймаємо 1/Re=0. Виберемо параметри m=3/2, $0 \le x \le 1$, Δt = 0.008, λ=0.5, граничну умову – $h(0)=0$ $\forall t \in [0, T]$, N = 60 – кількість точок розбиття.

6.3 Порівняння результатів розв'язку лінеаризованої задачі про кінематичну хвилю і нелінійної задачі з інтервальним підходом

Покажемо ефективність використання інтервальних ітераційних методів на тестовому прикладі. Проведемо обчислення задачі, яка має аналітичний розв'язок за допомогою методу лінеаризації та інтервального підходу з наперед вибраною точністю.

Приклад 5.2.1.

Вхідні параметри: $h_0 = x^2 (x \in [0,1])$, $\alpha = 0.5$, $m = 2$, $h(0) = 0$.

Вважаємо що дощовий притік змінюється за наступним законом

$$R = \frac{x^2(2x - 1)}{(1 + t)^2}.$$

При таких вибраних параметрах задача аналітичний розв'язок у вигляді $F = x^2/(1 + t)$. В чисельній схемі (3.2.5) приймемо Δt = 0.008, λ=0.5, 1/Re=0. Вигляд поверхні дна потоку показано на рис. 5.1 і глубини потку на рис.5.2.

Далі наведено порівняння результатів обчислень за допомогою методу лінеаризації дискретизованої задачі та знаходження розв'язку системи нелінійних проекційних рівнянь за допомогою застосування інтервального ітераційного методу типу Рунге[20].

Таблиця 5.2.2 Точний і наближені розв’язки та їх абсолютна похибка

X	H_{num}	H_{int}	F	$H_{num}-F$	$H_{int}-F$
0,033	0,000567507	0,000557507	0,000555556	0,0000120	0,0000020
0,067	0,002245273	0,002225273	0,002222222	0,0000231	0,0000031
0,1	0,005033142	0,005000142	0,005	0,0000331	0,0000001
0,133	0,008932304	0,008882304	0,008888889	0,0000434	0,0000066
0,167	0,013938997	0,013888997	0,013888889	0,0000501	0,0000001
0,2	0,02006512	0,02000112	0,02	0,0000651	0,0000011
0,233	0,027276651	0,027222651	0,027222222	0,0000544	0,0000004
0,267	0,035663471	0,035553471	0,035555556	0,0001079	0,0000021
0,3	0,045010737	0,045000737	0,045	0,0000107	0,0000007
0,333	0,055779155	0,055551546	0,055555556	0,0002236	0,0000040
0,367	0,067094855	0,067220486	0,067222222	0,0001274	0,0000017
0,4	0,080403349	0,080003349	0,08	0,0004033	0,0000033
0,433	0,093655626	0,093885626	0,093888889	0,0002333	0,0000033
0,467	0,109292145	0,108892145	0,108888889	0,0004033	0,0000033
0,5	0,124916649	0,124999249	0,125	0,0000834	0,0000008
0,533	0,14247269	0,14227269	0,142222222	0,0002505	0,0000505
0,567	0,160528467	0,160555467	0,160555556	0,0000271	0,0000001
0,6	0,180322109	0,180022109	0,18	0,0003221	0,0000221
0,633	0,20050544	0,200555112	0,200555556	0,0000501	0,0000004
0,667	0,222474398	0,222224398	0,222222222	0,0002522	0,0000022
0,7	0,245023416	0,24500043	0,245	0,0000234	0,0000004
0,733	0,26917818	0,268882701	0,268888889	0,0002893	0,0000062
0,767	0,293893812	0,293888818	0,293888889	0,0000049	0,0000001
0,8	0,320239652	0,32000153	0,32	0,0002397	0,0000015
0,833	0,347257191	0,347231891	0,347222222	0,0000350	0,0000097
0,867	0,37583015	0,37555015	0,375555556	0,0002746	0,0000054
0,9	0,405062787	0,405004227	0,405	0,0000628	0,0000042
0,933	0,435793697	0,435556972	0,435555556	0,0002381	0,0000014
0,967	0,467263949	0,467222149	0,467222222	0,0000417	0,0000001
1	0,500245111	0,500015111	0,5	0,0002451	0,0000151

Як бачимо з Таблиці 5.2.2 при проведенні обчислень з однаковою точністю, інтервальний ітераційний метод типу Рунге[20] дає результати, які “ближче” наближують аналітичний розв’язок порівняно з методом лінеаризації (див. дві останні колонки в Таблиці 5.2.2).

6.4 Аналіз результатів сумісної моделі стоку поверхневої і ґрунтової води

Розглянемо сумісну модель поверхневого і підповерхневого стоків. В Ω_1 рух рідини над поверхнею Γ_u описується системою рівнянь:

$$\rho(u\cdot\nabla)u = -\nabla\cdot[-pI + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)]$$
$$\nabla\cdot u = 0$$

$\mu = 1e-1$ (pa*s); $\rho = 1000$ (kg/m*3)

Крайові умови $u = (u_0, v_0)$ на $\Gamma_{1\ нижнє}$;

$\rho = 0, \quad \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) = 0$ на $\Gamma_{1\ верхнє}$

В Ω_2 рух рідини в грунті описується рівнянням:

$$\frac{\mu}{k}u = \nabla\cdot[-pI + \frac{\mu}{\varepsilon_p}(\nabla u + (\nabla u)^T)] - \frac{\rho\varepsilon_p C_f}{\sqrt{k}}u|u|$$

C_f=0; k- коефіцієнт рівнепровідності пористого середовища;

ε_p - коефіцієнт пористості грунту.

На $\Gamma_{1\ нижнє}$ u =2; $\Gamma_{1\ верхнє} \cup \Gamma_{2\ верхнє}$ p=0, на решта границі u . n =0.

На Γ_u умови контакту (14).

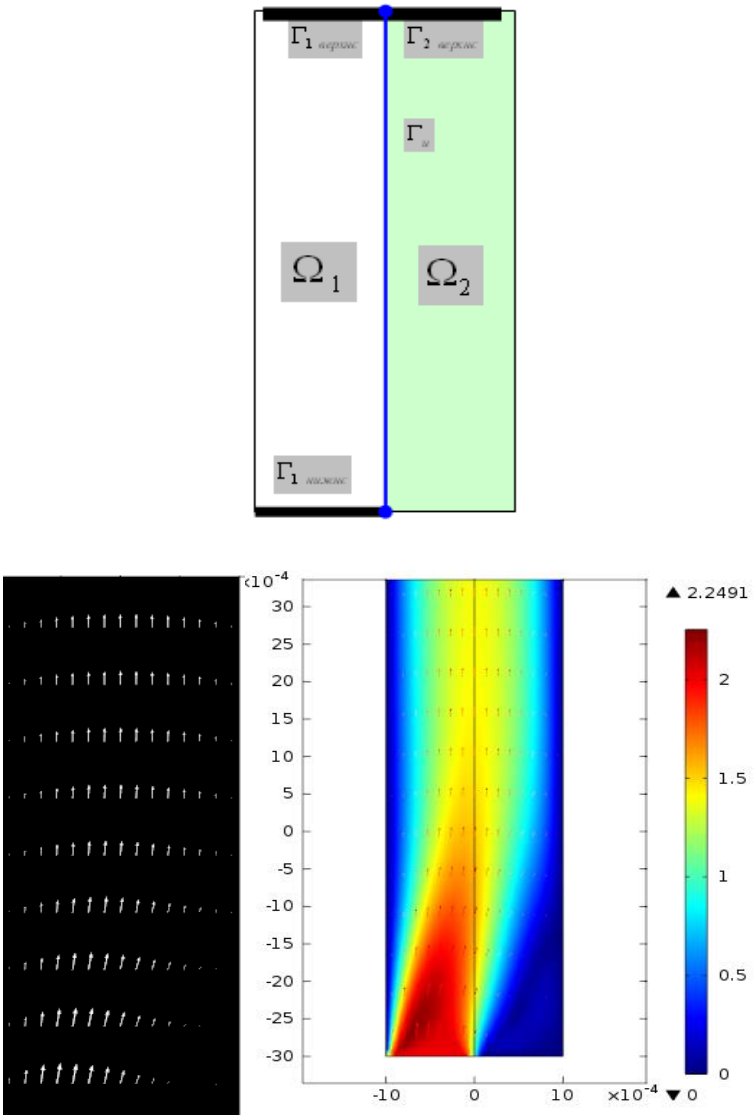


Рис.5.7.3 Поверхня значень та напрямів швидкостей в області Ω.

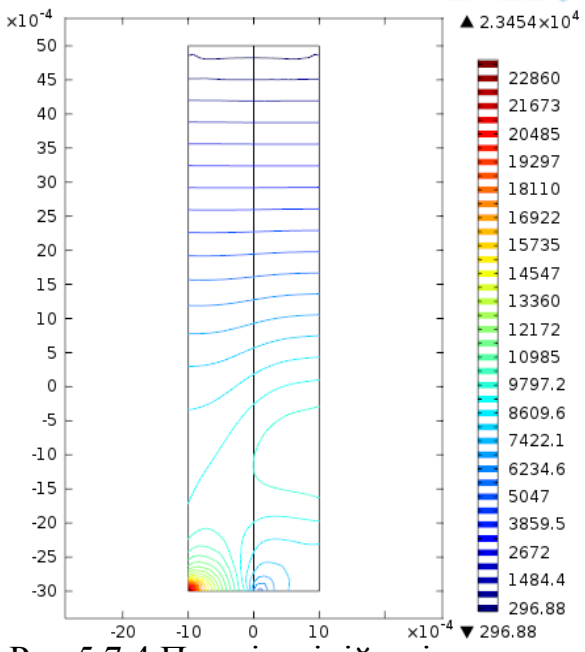


Рис.5.7.4 Поле ізоліній зміни тиску.

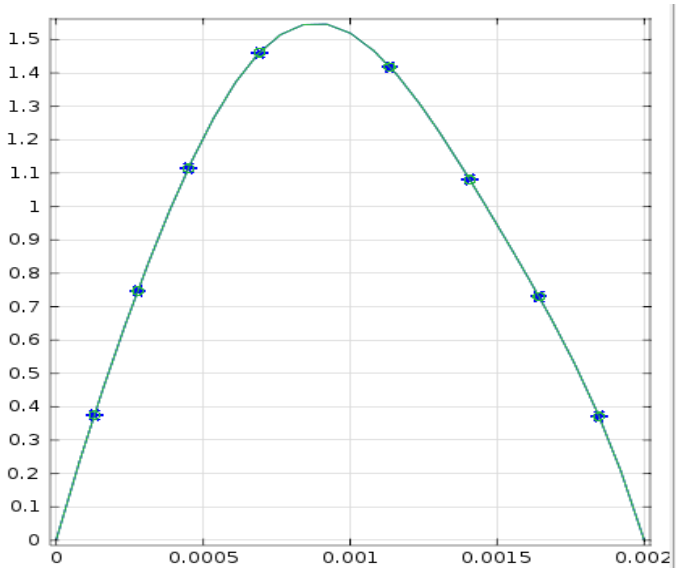


Рис.5.7.5 Графік зміни швидкості між областями для $x \in [-1,1], y = 0$.

Отримано поле швидкостей, зміни тиску рідини на вході поверхневої області і витоці по всій границі поверхневої і грунтової областей. Отримані результати підтвердили вирогідність реального процесу і підтвердили доцільність використання спільного підходу для опису водних потоків на території водозбору.

6.5 Висновки

Проведений аналіз розв'язків побудованих чисельних схем на поверхнях з різним рельєфом, притоком та витоком. Результати проаналізовані у різні моменти часу. Перевірено закон збереження маси рідини.

Обчислені порядки збіжності отриманих розв'язків за просторовими та часовою змінними підтвердили теоретичні твердження. Порядок збіжності розв'язку за просторовими змінними в енергетичній нормі простору H^1 зі згущенням сітки скінченних елементів прямує до двійки, у просторі L^2 до одиниці. Порядок збіжності розв'язку в часі приблизно дорівнює двійці. Для задачі стоку рідини у гідродинамічному наближенні

глибина вважалась сталою на одному скінченному елементі. Отже, порядок збіжності за просторовими змінними в енергетичних нормах просторів H^1 та L^2 приблизно рівний одиниці.

Обчислені відносні похибки розв'язків в енергетичних нормах просторів H^1 та L^2. Зі згущенням сітки вони прямують до нуля.

Для задачі стоку рідини в кінематичному наближенні наведений тестовий приклад з відомим аналітичним розв'язком. Обчислена абсолютна похибка розв'язку.

На реальному рельєфі протестовано стабілізаційна модель стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні. Проведено порівняння двох моделей стоку поверхневої води у гідродинамічному та кінематичному наближеннях. За рахунок вибору наближено рівних початкових та крайових умов, розв'язки моделей мають однакову поведінку.

РОЗДІЛ VII. ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ДАНИХ І РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ВОДИ НА ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

7.1. Опис розробленої технології.

Дана технологія розроблена таким чином, щоб GIS- компоненти, які використовують для ArcMap, можна було використовувати і для Веб-сайту створеного на основі ArcGIS сервера. Технологія складається з наступних трьох головних частин:

1. Core;
2. Implementation Framework для ArcMap;
3. Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF.

1. Частина Core – реалізовує функціональність яка використовується у ArcMap і у Web та містить:
    a. Abstract Framework – містить загальну функціональність для GIS- компонент;
    b. Persistence Layer Framework – для роботи з базою даних (використовує ArcObjects);
    c. WebRemoting – об’єктно-орієнтований розширений механізм для віддаленого зв’язку який не потребує дозволу повного доступу до даних на стороні клієнта;
    d. GIS UI Framework – windows forms компоненти для відображення та редагування даних отриманих через Persistence Layer Framework.

2. Implementation Framework для ArcMap – призначений для роботи компонент під ArcMap;
3. Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF – призначений для роботи компонент у Веб-сайті на основі ArcGIS Server та складається із:
    a. Browser Part – містить функціональність для ініціалізації GIS- компонент та компонент для роботи з ними а також функціональність для здійснення віддалених викликів на сервер;
    b. Web Server Part – містить функціональність для додавання GIS- компонент до сайту (компонента AdfWebPageExtension) а також функціональність для збереження даних для певного користувача у сесію та
    c. використання механізму WebRemoting за допомогою WebService;
    d. ArcGIS Server Part – містить функціональність для отримання ArcObject-ів із ArcGIS Server та роботи з ними.

На рис. 7.1 зображено графічне розташування частин та взаємозв’язки між ними даної технології.

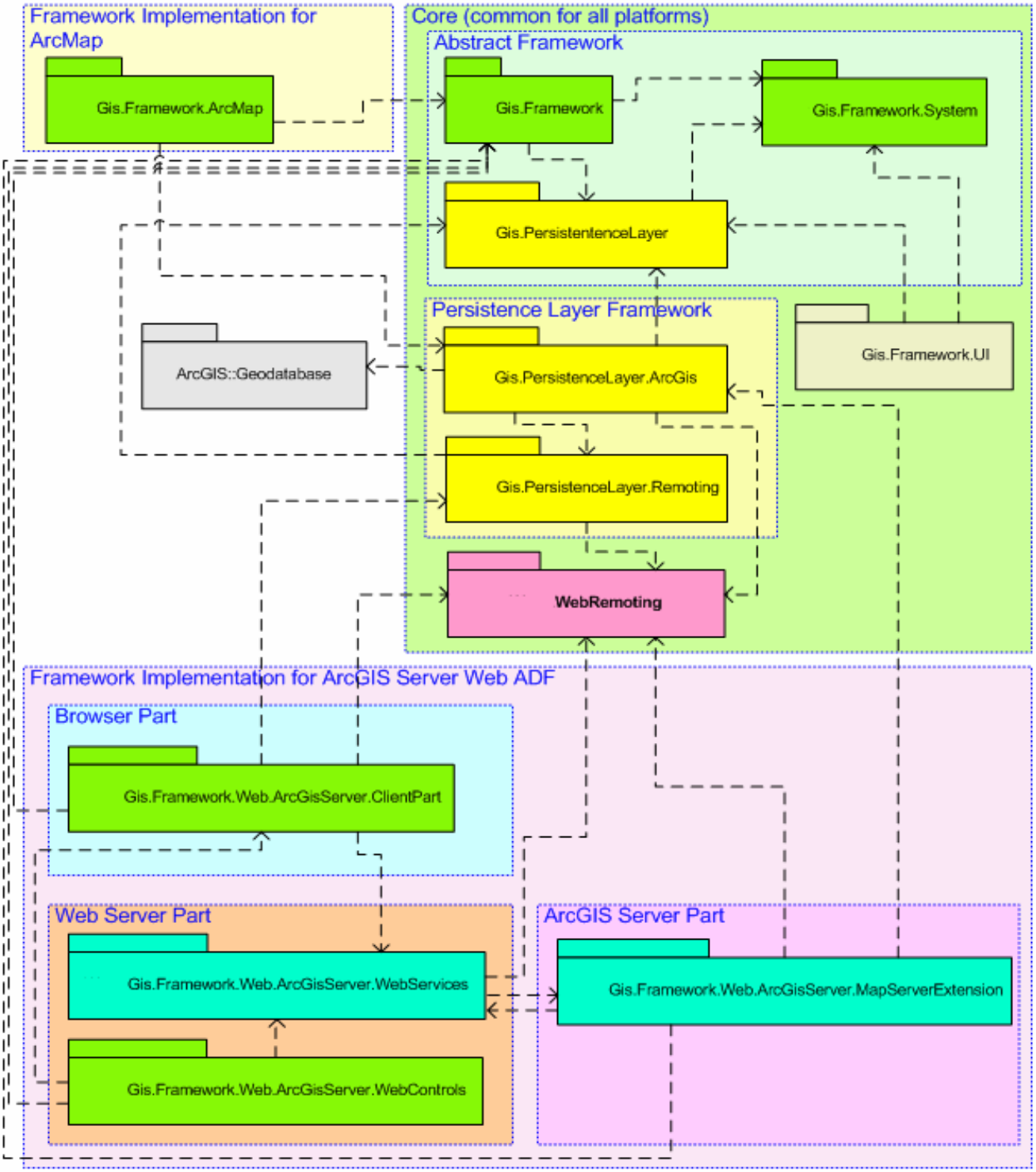


Рис 7.1. Розташування та взаємозв’язки частин системи.

7.2. Опис системи для ArcGIS Server

На рисунку 7.2 зображено розміщення та взаємозв'язки між об'єктами.

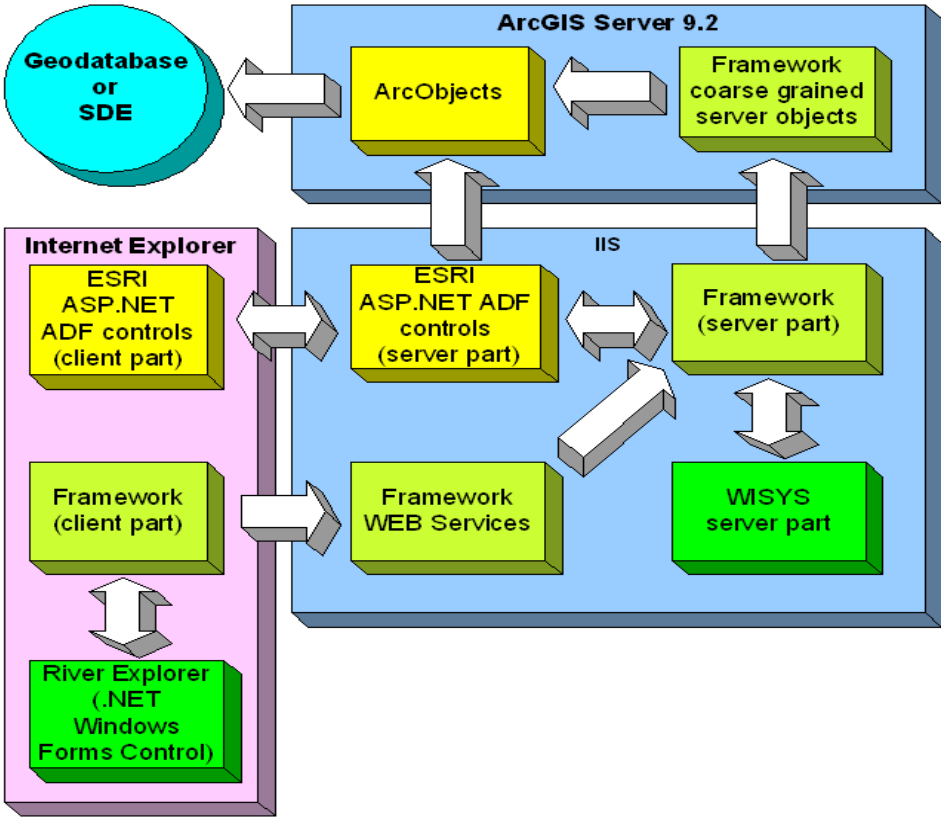


Рис 7.2. Архітектура розміщення об'єктів системи.

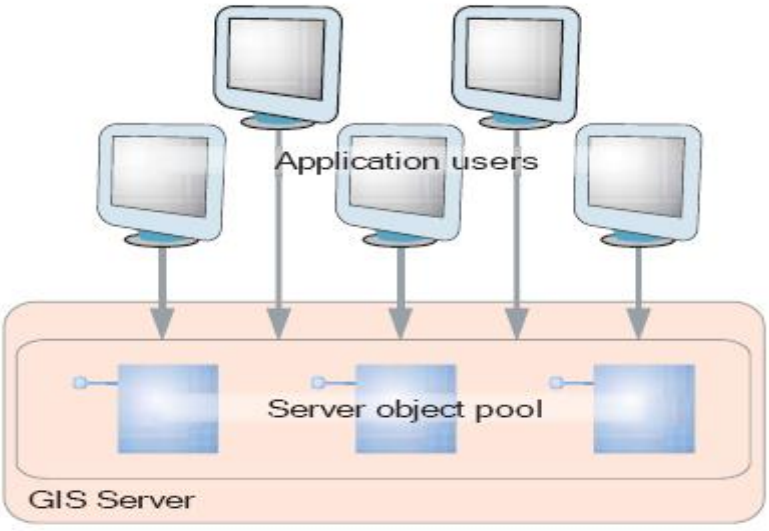


Рис 7.3. Контейнер ArcObjects на GIS Server

7.3 Використання GIS-компоненти для ArcGIS Server’а.

Створено Web-застосування інформаційної системи водних ресурсів України, яке використовує дану технологію універсального розширення. Створено та вбудовано GIS-компоненту, яка використовує наступні можливості розширення Веб-сайту:

1. виділення певної річки;
2. збільшення певної річки;
3. підсвічування певної річки;
4. інформація про певну річку;
5. розв’язування задачі на моделювання.потоку річки

Вигляд GIS-компоненти зображено на рис 7.4.

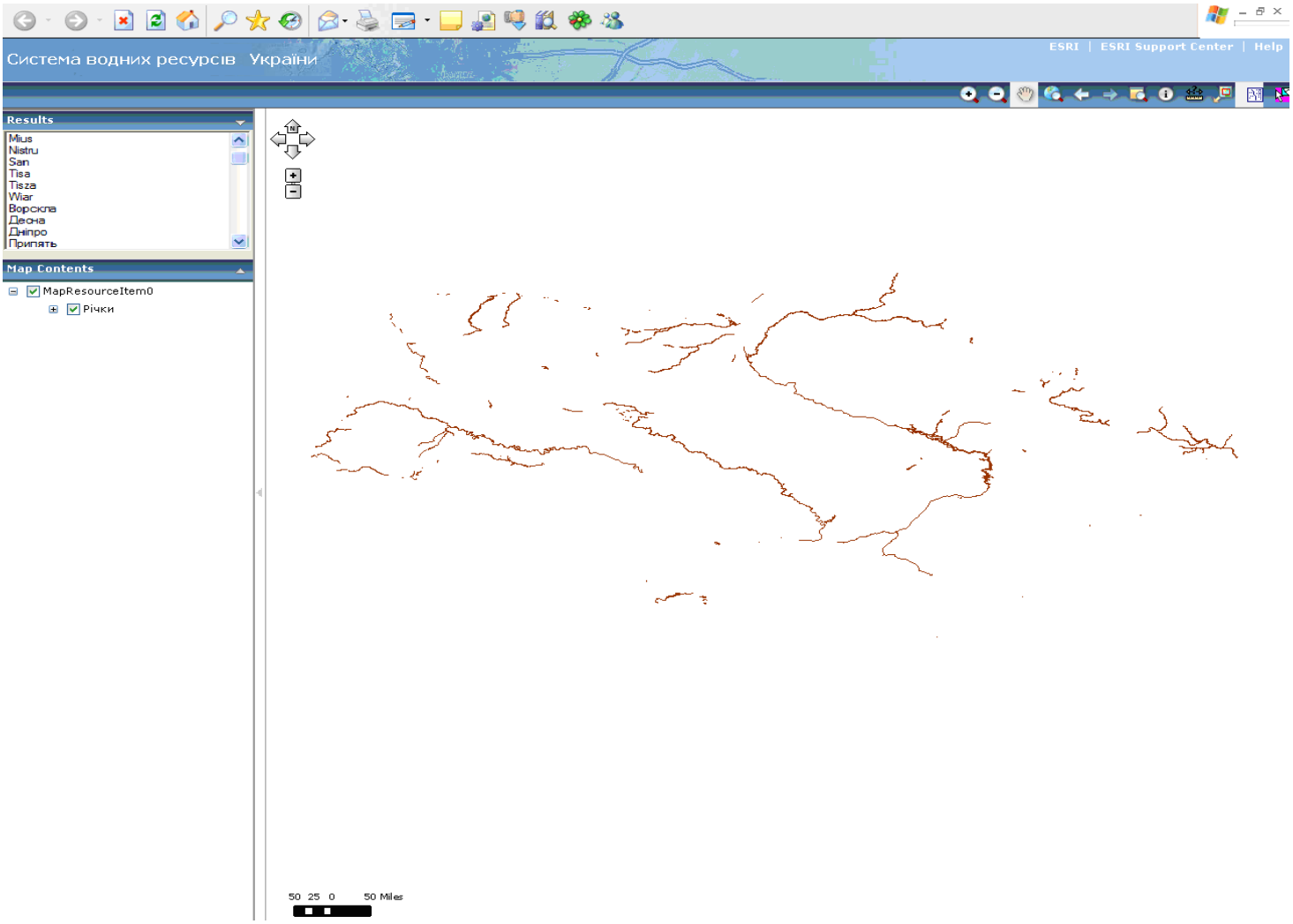


Рис 7.4. GIS-компонента із списком річок.

7.4 Використання GIS-компоненти для ArcMap

Компонента володіє всіма властивостями що і для Веб-сайту.

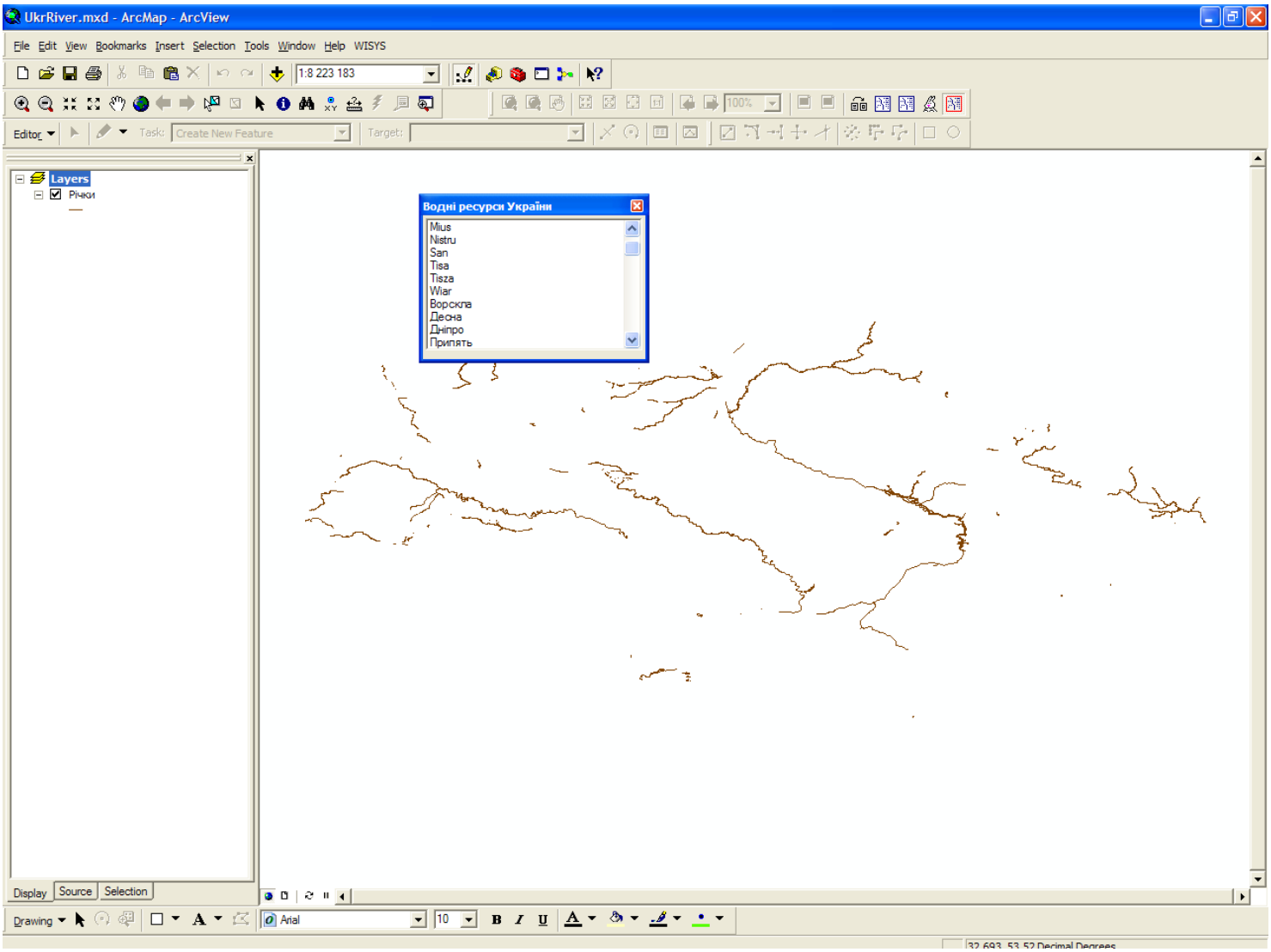


Рис 7.5. GIS-компонента у ArcMap.

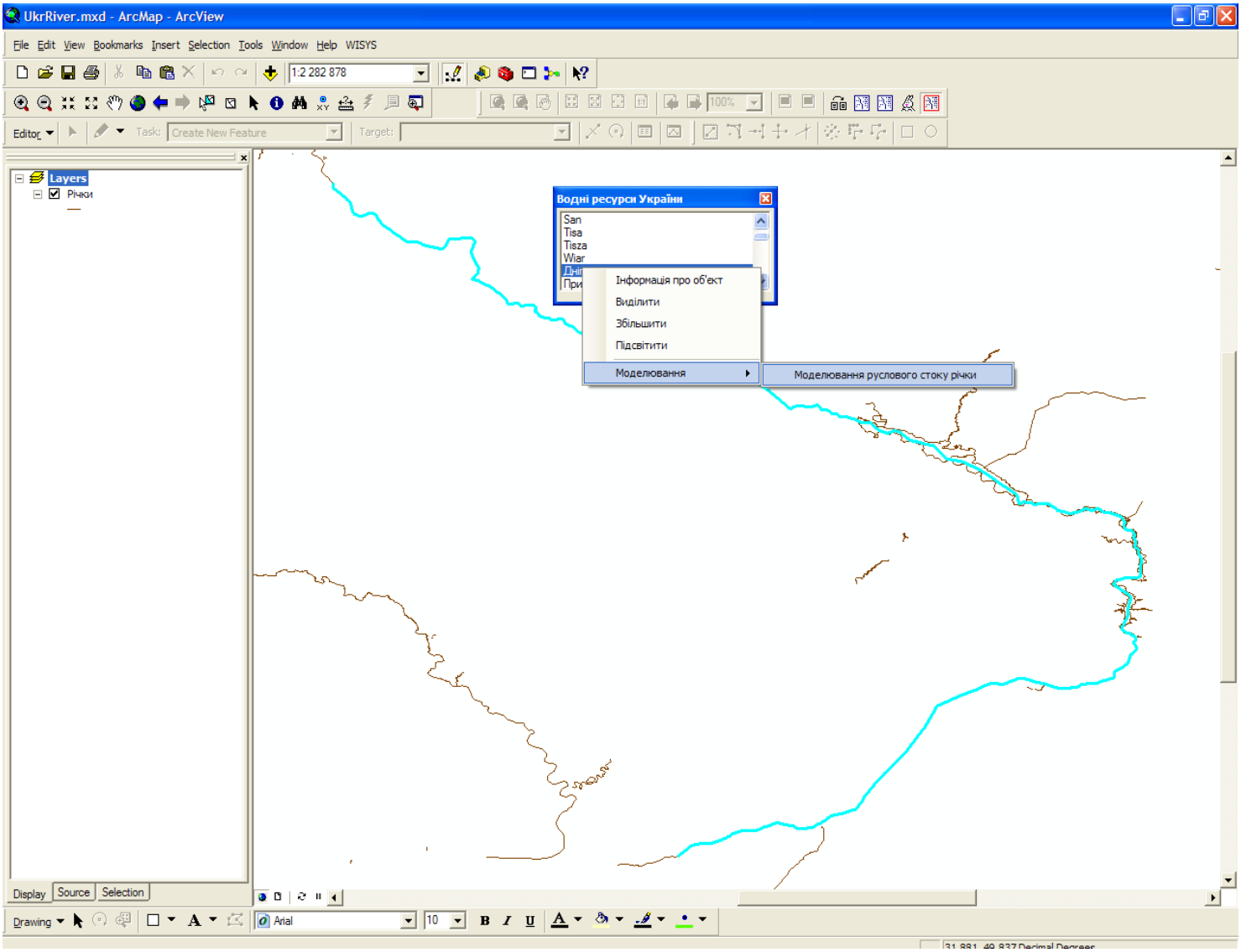


Рис 7.6. Вибір меню моделювання потоку річки.

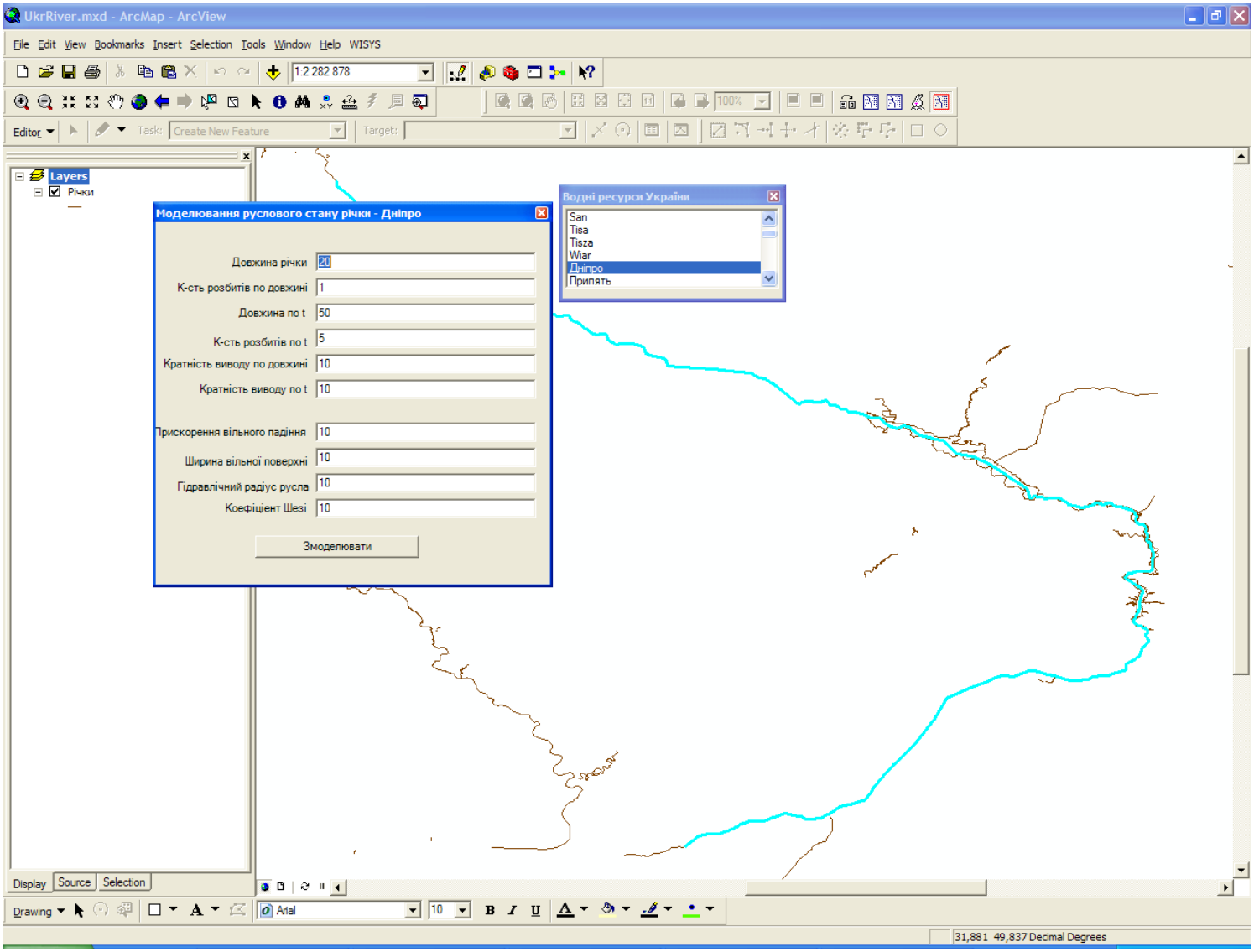


Рис 7.7. Форма для розвязування задачі моделювання русла річки.

7.5 Висновки

Для формування даних і візуалізації розв’язку задачі запропоновано технології, які б дали змогу використовувати Web-застосування на базі ArcGIS Server’а, де на окремому шарі надаються можливості моделювання та розв’язування прикладних задач, а саме моделювання потоків води у річках вибраної території.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є новим комплексним дослідженням, що розв'язує важливу наукову проблему побудови математичних моделей сумісного руху поверхневих і грунтових потоків з територіїї водозбору та обчислювальних методів чисельного розв’язування варіаційних задач цих моделей методом скінченних елементів.

Основні результати виконаної роботи.

1.Виходячи із загальних законів збереження кількості руху і маси шляхом їхнього усереднення за глибиною потоку та збереженням усіх складових тензора напружень в рівняннях руху, запроповано і обгрунтовано математичні моделі поверхневого стоку поверхневої води у гідродинамічному підході і в наближенні кінематичної хвилі. Узагальнені і уточнені постановки початково-крайових та варіаційних задач.

2. Розроблено стабілізаційну схему методу скінченних елементів для дискретизованої в часі задачі повехневого стоку у гідродинамічному наближенні при великих значеннях чисел Рейнольдса, яка базується на використанні функцій-бульбашок та методу найменших квадратів. Отримано верхню оцінку стабілізаційного множника цієї схеми для розв'язування загальних рівнянь Нав'є-Стокса.

3. Виведено систему основних рівнянь фільтрації грунтової води із загальних законів збереження енергії, маси і стану рідини відносно невідомого вектора швидкості і густини потоку. Сформульовано постановки початково-крайової та варіаційної задач.

4. Розроблено уточнені постановки початково-крайових та варіаційних задач фільтрації грунтової води, виходячи з рівняння Бусинеска. Показано і обгрунтовано постановку задачі у випадку залежності коефіцієнта фільтрації від невідомої величини п'єзометричного

тиску. Проведено лінеаризацію дискретизованої задачі в часі і використано ефективні методи для розв'язування системи лінійних рівнянь.

5. Побудовано математичну модель сумісного руху поверхневих і грунтових вод. Для опису руху поверхневих потоків використано узагальнені рівняння Нав'є-Стокса і для грунтових - рівняння, виведені з гідравлічного підходу. Такий підхід дає змогу прийняти однакові гіпотези для спільного потоку. Враховуючи закони механіки суцільного середовища, з варіаційної постановки задачі виведено умови взаємодії поверхневої і грунтової води через спільну границю областей.

6. Розроблені чисельні схеми з використанням трикутних скінченних елементів для дискретизації задачі поверхневого стоку поверхневої води у гідродинамічному наближенні за просторовими змінними з використанням кусково-лінійних апроксимацій для розходів потоків і кусково-постійних - для глибини та однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі.

7. Побудовано чисельну схему методу скінченних елементів для знаходження розв'язків задачі поверхневого стоку у наближенні кінематичної хвилі. Для цієї схеми вибирались кусково-лінійні апроксимації для невідомої величини глибини. Наведено застосування методу лінеаризації для зведення дискретизованої задачі за часом до системи лінійних рівнянь. Доведено коректність поставленої варіаційної задачі та збіжність чисельної схеми

Також для розв'язування проекційної системи нелінійних рівнянь показано використання інтервального ітераційного методу типу Рунге, який для початкового наближення використовує проміжки поділу за часом.

8. Досліджено стійкість інтервального ітераційного методу типу Рунге зумовлену збуреннями оберненого оператора і вибором початкових

операторів в його апроксимаціях. Побудовано і досліджено один клас двосторонніх рекурсивних ітераційних методів типу Рунге. Розроблено і досліджено клас інтервальних методів для розв'язування систем рівнянь з домінуючою діагоналлю.

9. Проведено аналіз результатів чисельного розв'язування побудованих математичних моделей. Проведено апробацію на тестових прикладах чисельної схеми розв'язування задачі сумісного руху поверхневих і грунтових потоків води. Показано порівняння результатів розв'язку лінеаризованої задачі про кінематичну хвилю і знаходження розв'язку системи нелінійних проекційних рівнянь інтервальними ітераційними методами.

10. Розроблено геоінформаційну систему для збору даних про характеристики водних потоків на вибраній території. Показано використання розроблених алгоритмів для обчислення швидкостей та глибини потоків. Проведено візуалізацію результатів роботи програм на реальних річкових системах деяких водозборів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Д. Таннехилл, Р. Плетчер. – Москва: Мир, 1990. – 384 с.
2. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В.Кажихов, В.Н.Монахов – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Антонцев С.Н. Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод/ С.Н. Антонцев, А.М. Мейрманов – Новосибирск: НГУ, 1979.– 78 с.
4. Анохин Ю.П. Атмосферный перенос загрязнений в региональном масштабе// Тр. ИПГ. – 1978. – С. 60– 75.
5. Антонова А. Б. Компьютерно- вычислительные модели загрязнения окружающей среды / А. Б. Антонова, Н. Н. Беляев, В. К. Хрущ // Тр. Первого Международного симпозиума “Аєрокосмическая индустрия і экология. Проблемы конверсии и безопасности” (21-25 мая 1995 г.) – Киев, 1995. – С. 4–5.
6. Балицкий О.Ф. Экономика чистого воздуха. – Киев: Наукова думка. – 1979. – 320 с.
7. Бартіш М.Я. Застосування інтервальних ітераційних методів для знаходження розв’язків систем нелінійних рівнянь задачі про кінематичну хвилю/М.Я. Бартіш, П.С. Венгерський, П.С. Сеньо // XXIV International Conference "Problems of decision making under uncertainties"(Cesky Rudolec, Czech Republic, September 1-5, 2014). – 2014. – P. 14.
8. Бартіш М.Я. Про методи типу Рунге розв’язування нелінійних операторних рівнянь/ М.Я. Бартіш, П.С.Сеньо //ДАН УРСР.– 1972. – Вип. А,№ 9. – С. 771-775.

9. Белолипецкий В.М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости/ В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк, Ю.И. Шокин. – Новосибирск. – 1979. – 120 с.
10. Богомолов А.И. Высокоскоростные потоки со свободной поверхностью. – М.: Стройиздат, 1979. – 344 с.
11. Бомба А.Я. Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентного забрудення / А.Я.Бомба, А.П. Сафоник // Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2012. – №1037, Вип. 20. – С. 18–27.
12. Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости/ К.Бреббиа, Дж. Коннор – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
13. Булеев Н.И. Исследование скорости сходимости схемы Ω, ψ при различной структуре условия для вихря у твердой стенки / Н.И. Булеев, Е.Л. Тарунин // Численные методы механики сплошной среды. – 1985. – Т.15, №6. – С.28-40.
14. Бруяцкий Е.В. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление/ Е.В. Бруяцкий, А.Г. Костин, Е.И. Никифорович, Н.В. Розумнюк //Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Том 10, № 2. – С. 13 – 23.
15. Булавацкий В.М. Приближенное решение одной динамической задачи геоинформатики/ В.М. Булавацкий, В.В. Скопецкий //Проблемы управления и информатики. – 2010. – №3. – С.68–77.
16. Васильченко Т.Н. Нестационарное течение в руслах рек слоистого геометрического очертания/ Т.Н. Васильченко // Метеорология и гидрология. – 1998. – №2. – С. 65–73.
17. Великанов М.А. Динамика русловых потоков/ М.А.Великанов – М.: Гостехиздат, 1955. – 323 с.

18. Венгерский П. С. Применение интервального анализа для построения і исследования ефективных иттерационных методов решения некоторых классов задач : дис. канд. фіз.-мат. наук : 05.13.16 / П. С. Венгерский – Львов, 1993. – 150 с.
19. Венгерський П.С. Один інтервальний алгоритм знаходження початкових наближень методу Ньютона / П.С. Венгерський, П.С. Сеньо // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. –1995. – С. 18–22.
20. Венгерський П.С.Ускорение сходимости одной модификации интервального метода типа Рунге при решении нелинейных краевых задач / П.С. Венгерский // Вычислительные технологии. – 1996. – № 2(5). – С. 17– 19.
21. Венгерський П.С.Інтервальний підхід для розв'язування деяких задач комп'ютерної графіки / П.С. Венгерський, Н.Я. Смушак // Деп. В ДНТБ України. – 1998. – № 352 Ук98. – 27 с.
22. Венгерський П.С. Система візуалізації та моделювання процесів на рельєфі поверхні / П.С. Венгерський, Д.В. Косарев, Г.А. Шинкаренко, Ю.О. Чоботок // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – №51. – С. 35–38.
23. Венгерський П.С. Прискорення збіжності інтервальних ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь з домінуючою діагоналлю / П.С.Венгерський, Ю.Я.П'єц // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – №52. – С. 40–45.
24. Венгерський П.С. Побудова математичної моделі стоку вологи на поверхні водозбору / П.С.Венгерський, Н.Я.Смушак, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – №53. – С. 41–45.
25. Венгерський П.С. Оцінка глибини рекурсії одного класу двосторонніх методів / П.С. Венгерський, В.М.Трушевський, П.С. Сеньо // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – №54. – С. 45–48.

26. Венгерський П.С.Використання інтервального аналізу для побудови одного типу двосторонніх методів розв'язування нелінійних задач / Венгерський П.С., Трушевський В.М., Сеньо П.С. // Деп. в ДНТБ України. - 1998. - № 349 Ук98. - 25 с.
27. Венгерський П.С.Система візуалізації та моделювання процесів на рельєфі поверхні / Венгерський П.С., Косарев Д.В.,Шинкаренко Г.А., Чоботок Ю.О. // Сучасні досягнення геодезії,геодинаміки та геодезичного виробництва: зб. наук. праць. -Львів, 1999. - С. 116-119.
28. Венгерський П.С.Побудова математичної моделі стоку вологи по поверхні / Венгерський П.С., Трушевський В.М. // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. - Львів, 2000. - С. 239-242.
29. Венгерський П.С.Чисельне моделювання мілкого схилового стоку в кінематичному наближенні / Венгерський П.С., Трушевський В.М. // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип. 1. - Львів, 2000. - С. 44-49.
30. Венгерський П.С.Застосування об'єктно-орієнтованого підходу для опису алгоритмів розв"язування крайових задач методом скінченних елементів / Венгерський П.С., Єфремов О.В., Стрихалюк Б.М. // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. "Радіоелектроніка та телекомунікації". - Львів, 2002. - N 443. - С. 190-192.
31. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування варіаційних задач поверхневого стоку / Венгерський П.С., Трушевський В.М.,Шинкаренко Г.А. // Вісн. Київськ. Нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка.Сер. кібернетика. Вип.3. - 2002. - С. 26-30.
32. Венгерський П.С. Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку поверхневої води / Венгерський П.С., Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А. // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип. 4. - Львів, 2002. - С. 102-109.

33. Венгерський П.С.Чисельне дослідження задач фільтрації грунтової води в насиченій зоні / Венгерський П.С., Демкович О.Р. //Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип. 6. - Львів, 2003. - С. 106 - 116.
34. Венгерський П.С.Числове дослідження регуляризованої задачі поверхневої води в кінематичному наближенні / Венгерський П.С., Трушевський В.М. //Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип. 6. - Львів, 2003. - С. 116-125.
35. Венгерський П.С.Про оцінку стабілізаційного множника варіаційних задач руху потоків поверхневої води / Венгерський П.С.,Трушевський В.М. //Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. Вип.10. - Львів, 2005. - С. 71-77.
36. Венгерський П.С.Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини/ Венгерський П.С., Коковська Я.В.// Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 15- 2009. - С.178-195.
37. Венгерський П.С.Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в грунті/ Венгерський П.С., Демкович О. // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 15- 2009. - С. 170-177.
38. Венгерський П.С.До моделювання сумісного руху поверхневих та грунтових вод / Венгерський П.С., Коковська Я.В.// "Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки" - Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2009. - С. 255-257.
39. Венгерський П.С.Моделювання потоків рідини на території водозбору з використанням WEB-аплікацій з GIS-компонентою на основі ArcGIS Server'a/ Венгерський П. С., Кіщак І., Коковська Я.В.//Ученые записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского. Том 23. - 2010 №1. С.36-48.
40. Венгерський П.С.Застосування кусково-квадратичних апроксимацій для розв'язування задач руслового стоку рідини/Венгерський П.С.,

Коковська Я.В.// "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур". - Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. - С.314-316.

41. Венгерський П.С.Про стійкість руслових потоків з вертикальною площиною симетрії/ Венгерський П.С. Коковська Я.В. //Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука. - Київ, 2010. - С. 76-77.
42. Венгерський П.С.Математичне моделювання потоків рідини у псевдопризматичних руслах./ Венгерський П.С., Коковська Я.В. //"Прикладні проблеми механіки і математики" - Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2011. - С. 189-190.
43. Венгерський П.С. Дослідження моделей та методів обчислення повного стоку води на території водозбору/ Венгерський П., Коковська Я.// Матеріали конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів". - Рівне, 2013. - С. 39-40.
44. Венгерський П.С. Дослідження граничних та контактних умов моделі сумісного стоку поверхневих і грунтових вод./Венгерський П.С. // Матеріали XIX Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", МОН України, Львівський національний університет імені Івана Франка (3-4 жовтня 2013, Львів) - С.33-35.
45. Венгерський П.С. Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і грунтових вод з території водозбору// Математичне та комп'ютерне моделювання. Камянець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І.Огієнка. Вип.10. - 2014. - С.33-42.

46. Венгерський П.С. Про задачу сумісного руху поверхневих і грунтових вод з території водозбору// Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 22- 2014. - С. 41-53.
47. Венгерський П.С. Застосування одного інтервального методу для знаходження початкових наближень методу Ньютона /Венгерський П.С. // Всеукраїнська наукова конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях". - Львів, 1994. - С. 17.
48. Венгерський П.С. Інтервальне розв'язування деяких оптимізаційних задач у комп'ютерній графіці / Венгерський П.С. //Всеукраїнська наукова конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях". - Львів, 1995. - С. 7-8.
49. Венгерський П.С. Застосування одного двохстороннього ітераційного методу для розв'язання нелінійної задачі оптимального управління на швидкодію /Венгерський П.С.// Автоматика 95. -Львів, 1995. - Книга 3. - С. 23-25.
50. Венгерський П.С. Один інтервальний підхід знаходження глобального мінімуму / Венгерський П.С., Сеньо П.С. // Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем". - Киев, 1995. - С. 26.
51. Венгерський П.С. Прискорення збіжності однієї модифікації інтервального методу Рунге при розв'язуванні нелінійних крайових задач / Венгерський П.С., Сеньо П.С. // Всеукр. Конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та мат. методів у наук. дослідженнях". - Львів, 1995. - С. 15.
52. Венгерський П.С. Застосування рекурсивних методів для розв'язування деяких типів крайових задач / Венгерський П.С., Сеньо

П.С. // Міжнародна конференція "Теорія апроксимацій та чисельні методи". - Рівне, 1996. - С. 105.

53. Венгерський П.С. Оцінка глибини рекурсії одного класу двосторонніх методів / Венгерський П.С., Трушевський В.М., Сеньо П.С. // Всеукраїнська наукова конференція "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях": тези доповідей. - Львів, 1998. - С. 38.
54. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування схилового стоку поверхневої води в наближенні кінематичної хвилі / Венгерський П.С., Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А. // Всеукраїнської наук. конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та обчислювальних методів в наукових дослідженнях": тези доп. - Львів, 1999. - С. 14.
55. Венгерський П.С. Імітаційне моделювання транспортного руху у місті: загальні концепції і реалізація / Венгерський П.С., Бабік М.І., Власенко В.М. // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". - Львів, 2000. - С. 5.
56. Венгерський П.С. Імітаційне моделювання транспортного руху у місті: динаміка і кінематика руху транспортних засобів / Венгерський П.С., Бабік М.І., Власенко В.М., Шраєр В.С. //Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". - Львів, 2000. - С. 6.
57. Венгерський П.С. Чисельне моделювання стоку вологи в призматичному руслі / Венгерський П.С., Федорович В.Я. //Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". - Львів, 2000. - С. 21-22.

58. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування задачі руху грунтової води в насиченій зоні / Венгерський П.С., Демкович О. Р.// Восьма всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". - Львів, 2001. - С. 19.
59. Венгерський П.С. Чисельне дослідження рівнянь стоку поверхневої води по поверхні водозбору / Венгерський П.С., Трушевський В.М. // Міжнародна конференція "Моделювання та оптимізація складних систем": тези доповідей. - Київ, 2001. - С. 16.
60. Венгерський П.С. Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку поверхневої води / Венгерський П.С., Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А. // Восьма Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": тези доповідей. - Львів, 2001. - С. 20.
61. Венгерський П.С. Дослідження стійкості рекурентної схеми розв'язування стоку поверхневої води в двовимірному наближенні кінематичної хвилі / Венгерський П.С., Трушевський В.М. //Всеукраїнська науково-практична конференція ІТОНТ-2002. - Черкаси,2002. - С. 2.
62. Венгерський П.С., Демкович О.,Трушевський В.М. Чисельне дослідження математичної моделі руху поверхневої і грунтової вологи//Міжнародна конференція”Обчислювальна та прикладна математика”, Київ, 2002.- с.25.
63. Венгерський П.С. Дослідження стійкості рекурентної схеми розв'язування задачі стоку поверхневої води/ Венгерський П.С., Трушевський В.М. //Десята всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". - Львів, 2003. - С. 33.
64. Венгерський П.С. Оцінка стабілізаційного множника чисельної схеми для задач стоку поверхневої води / Венгерський П.С., Трушевський В.М. // XI Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми

прикладної математики та інформатики": тези доп. - Львів, 2004. - С. 28.

65. Венгерський П.С. Один з підходів чисельного моделювання задач руху води в насиченій зоні грунту / Венгерський П.С., Демкович О.Р., Трушевський В.М. // Міжнародної наук. конф. "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем": тези доп. - Київ, 2005. - С. 177.
66. Венгерський П.С. Використання гідродинамічного підходу для моделювання задач руху рідини в грунті / Венгерський П.С., Демкович О.Р. //Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. - Львів, 2005. - С.125.
67. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування задачі руслового стоку вологи методом скінченних елементів / Венгерський П.С., Коковська Я.В. //International conference "Dynamical system modeling and stability investigation". - Kyiv, 2007. - P.174.
68. Венгерський П.С. Чисельне моделювання руслового стоку вологи / Венгерський П.С., Коковська Я.В. // XIV Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": тези доповідей. - Львів, 2007. - С. 54-55.
69. Венгерський П.С. Про математичні моделі руслового стоку рідини / Венгерський П.С., Коковська Я.В. // Intertational Conferece "Dynamical System Modeling and Stability Investigation: "DSMSI-2009": theses of conference reports. - Kyiv, 2009. - P. 119.
70. Венгерський П.С. До моделювання сумісного руху поверхневих та грунтових вод / Венгерський П.С., Коковська Я.В. //Міжнародна наукова конференція "Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки" в рамках Українського математичного конгресу

до 100-річчя від дня народження академіка М. Боголюбова: тези доп. - Львів, 2009. - С. 255-257.

71. Венгерський П.С. Дослідження стійкості встановленого руслового потоку / Венгерський П.С. Коковська Я.В. // XVI Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": тези доповідей. - Львів, 2009. - С. 107-108.
72. Венгерський П.С. Математичне моделювання руслового стоку рідини в наближенні кінематичної хвилі / Венгерський П.С., Коковська Я.В. // Intertational Conferece "Dynamical System Modeling and Stability Investigation. Abstracts of conference reports, Kiev,Ukraine,May 25-27, 2011. - P. 250.
73. Венгерський П.С. Чисельне дослідження моделі стоку води на водозборі. / Венгерський П.С.// Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики". - Львів, 2013. - С.25.
74. Венгерський П.С. Математичне моделювання руслового стоку рідини в наближенні кінематичної хвилі./ Венгерський П.С., Коковська Я.В.//Dynamical System Modeling and Stability Investigation: "DSMSI-2013": Intertational Conference: Theses of conference reports. May 29-31. - Kyiv, 2013. - P. 178.
75. Венгерський П.С. Застосування інтервальних ітераційних методів для знаходження розв'язків систем нелінійних рівнянь задачі про кінематичну хвилю./ Венгерський П.С.,Бартіш М.Я.,Сеньо П.С.// Abstracts XXIII International Conference "Problems of decision making under uncertainties" . - Mukachevo, Ukraine, June 27-28. 2014- P. 24-25.
76. Венгерський П.С. Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і грунтових вод з території водозбору./ Венгерський П.С.// Тези доп. VI Міжн. наук. конф. "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та

оптимізації". - Кам'янець-Подільський.: Кам.-Под. нац.ун-т ім.І.Огієнка. 2014 - С.26-29.

77. Венгерский П.С. Один из подходов численного моделирования стока влаги в открытых каналах: ("Современные проблемы прикладной математики: теория, эксперимент и практика" - 2011 (Новосибирск, 30 мая- 4 июня 2011 г.) [Електронний ресурс]/ П.С. Венгерский, Я.В.Коковская - 2011. - Режим доступу: http://conf.nsc.ru /files /conferences /niknik-90 /fulltext/ 40754/ 47047/ Vengersky_Kokovskai_ Chislenoe _Model_ all. pdf.
78. Венгерский П.С.Эффективные интервальные алгоритмы нахождения пересечений поверхностей в компьютерной графике: ("Современные проблемы прикладной математики: теория, эксперимент и практика" - 2011 (Новосибирск, 30 мая- 4 июня 2011г.)[Електронний ресурс] - 2011. - Режим доступу: http://conf.nsc.ru /files /conferences /niknik-90 /fulltext/ 40431 /48588/ Vengersky_intervalnie_metody_ peresechenia2 .pdf.
79. Венгерський П.С. Комбіновані моделі руху ґрунтових і поверхневих вод: (Український математичний конгрес - 2009 (Київ, 27-29 серпня 2009 р.))[Електронний ресурс]/ П.С. Венгерський - 2009. - Режим доступу:http://www.imath.kiev.ua-congress2009 /abstract/Vengersky. html.
80. Венгерський П.С. Чисельне дослідження математичних моделей поверхневого стоку в наближенні кінематичної хвилі./ Венгерський П.С.//Матеріали Міжнародної наукової конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне: РВВ РДГУ, 2015. – С.38-39.
81. Венгерський П.С. Інтервальні ітераційні методи для знаходження розв’язків систем нелінійних проекційних рівнянь з домінуючою діагоналлю./Венгерський П.С., Коковська Я.В.// XXVI International

Conference “Problems of decision making under uncertainties” . – Odessa, – 2015. – P. 59.

82. Венгерський П.С. Про математичні моделі стоку поверхневої води в наближенні кінематичної хвилі./ Венгерський П.С., Коковська Я.В.// Dynamical System Modeling and Stability Investigation: “DSMSI-2015”: Intertational Conferece: Abstracts of conference reports. May 27-29. – Kyiv, 2015. – P. 28.
83. Венгерський П.С. Про математичні моделі водних потоків на вибраній території/ Венгерський П.С.// XXV International Conference “Problems of decision making under uncertainties” . – Skhidnytsia, May 12-15, 2015. – P. 78-79.
84. Венгерський П.С. Аналіз різних підходів для опису математичних моделей фільтрації рідини в насиченій зоні грунту / П.С. Венгерський, О.М. Трофимчук // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – №2(6).– С. 36–52.
85. Венгерський П. С. Математичне моделювання руху поверхневих і грунтових потоків [Електронний ресурс] / П. С. Венгерський, О. М. Трофимчук, Г. А. Шинкаренко // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua / MPT2016.
86. Венгерський П.С. Розробка GIS-аплікацій на основі ArcGIS Server для моделювання потоків рідини на території водозбору / П.С. Венгерський, О.М. Трофимчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях(Київ, Пуща-Водиця, 29 вересня – 3 жовтня 2016 р.): матер. конф. –К.: ТОВ”В-цтво Юстон”, 2016. – С. 210–211.
87. Венгерський П.С. Чисельне дослідження енергетичних рівнянь варіаційної задачі сумісного руху поверхневих і підземних водних

потоків на водозборі / П.С. Венгерський, Г.А. Шинкаренко // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – № 3–4(7).– С. 132–145.

88. Венгерський П.С. Рівняння поверхневого потоку в наближенні кінематичної хвилі для русел з нерівномірним дном / П.С.Венгерський, В.М.Кирилич, Я.В.Коковська // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14 – С. 31–36.
89. Венгерський П. С. Математичне моделювання руху поверхневих і грунтових потоків [Електронний ресурс] / П. С. Венгерський, О. М. Трофимчук, Г. А. Шинкаренко // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua / MPT2016.
90. Венгерський П.С. Розробка GIS-аплікацій на основі ArcGIS Server для моделювання потоків рідини на території водозбору / П.С. Венгерський, О.М. Трофимчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях(Київ, Пуща-Водиця, 29 вересня – 3 жовтня 2016 р.): матер. конф. –К.: ТОВ"В-цтво Юстон", 2016. – С. 210–211.
91. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масо- переносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП. – 2010. -– 277 с.
92. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Основные океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометоиздат, 1968. – 204 с.
93. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. – Л.: Гидрометоиздат, 1977. – 207 с.

94. Гладкий А.В.,Сергиенко И.В.,Скопецький В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – К.: Наук. думка, 2001. – 452 с.
95. Глазунов Н.М. Методы компьютерной алгебры и интервального анализа в исследовании управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев: Наук. думка, 1993. – Вып. 97. – С. 6–11.
96. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 311 с.
97. Грищенко О.Ю. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки : Навч. посіб. / О. Ю. Грищенко, С. І. Ляшко, О. І. Молодцов; Київ. ун-т ім. Т.Шевченка. - К., 1997. - 222 с.
98. Гуревич М.И. Теория течений со свободными поверхностями // В. кн.: Итоги науки. Гидромеханика. – М.: ВИНИТИ, 1971. – Т. 5. – С.32-114.
99. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – Киев: Наук. Думка, 1995. – 262 с.
100. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. Думка, 1998. – 615 с.
101. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 96 с.
102. Добронец Б.С. Шайдуров В.В., Двусторонние численные методы, Наука. Сиб. отделение, 1990, ISBN: 5-02-029311-3
103. Добронравов О. О. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / О. О. Добронравов, В. С. Кремез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2006. – Вип. 7. -– С. 141-146.

104. Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К., Беляев Н.М. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде. – Киев: Наук. Думка, 1997. – 365 с.
105. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
106. Зенкевич О.К., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
107. Злотник В.А., Усенко В.С. Математические модели и численные методы взаимосвязи безнапорных и поверхностных вод // Резюме докл. Киев, ин-т математики АН СССР. – 1976. – С. 26.
108. Зубов В.Н. Решение задач термогидродинамики с наличием свободных поверхностей методом конечных элементов // Материалы 10-й конф. мол. ученых ИППМ АН УССР. – Львов, 1984. – Ч.1. – С.83-87. – Деп. в ВИНИТИ 10.11.84, № 7196.
109. Зубов В.Н. Численное исследование течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов: Дис. канд. фіз.-техн. наук: 01.01.07. – Львов, 1990. – 150 с.
110. Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. Сходимость метода регуляризации для краевой задачи с уравнениями Навье-Стокса // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1987. – № 27. – С.64-69.
111. Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. Применение метода штрафа для решения стационарных задач гидродинамики со смешенными краевыми условиями // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1989. – № 31. – С.81-84.
112. Калиткин Н.Н Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
113. Картвелишвили Н.А. Океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 259 с.

114. Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем с примерами из електроэнергетики.- М.:Наука, 1976.-272с.
115. Картвелишвили Н.А. Океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 259 с.
116. Картвелишвили Н.А. Потоки в недеформируемых руслах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973. – 279 с.
117. Картвелишвили Н.А. Регулирование речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1970. – 218 с.
118. Картвелишвили Н.А., Галантионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
119. Кобельков Г.М. О методах решения уравнений Навье-Стокса // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, №4. – С.843-846.
120. Кобельков Г.М., Об эквивалентных нормировках подпространства L_2 // Analysis Mathematica. – 1977. – № 3. – С.177-186.
121. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А., Шинкаренко О.Г. Регуляризація чисельних розв’язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати // Вісник. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – № 52. – С.59-71.
122. Коковська Я.В. Про порівняння двох підходів чисельного моделювання руслового стоку рідини./Коковська Я.В., Венгерський П.С.//XXI Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Збірник наукових праць. – Львів, 2015. – С. 183-184.
123. Кочубей А.А, Рядно А.А. Некоторые аспекты применения метода конечных элементов в задачах гидродинамики // Численное моделирование гидродинамических течений. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С.110-116.

124. Корявов П.П. Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна.//Вод.ресурсы,1981,№ 3 - С.54-64.
125. Кузнецов Б.Г., Сироченко В.П. Об одной разностной схеме для расчета плоских течений вязкой жидкости // Численные методы в механике жидкости и газа. – Новосибирск, 1980. – С.78-83.
126. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 142 с.
127. Кучмент Л.С. Математическое моделирование речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1972. – 191 с.
128. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 142 с.
129. Кучмент Л.С., Гельфан А.Н. Динамико-стохастически модели формирования речного стока // РАН, Ин-т водных проблем. – М.: Наука, 1993. – 112 с.
130. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока: Физ.-мат. модели. – М.: Наука, 1983. – 216 с.
131. Ладиков-Роев Ю.П., Панчук В.И., Чечко Г.А. Математическое моделирование процесса формирования ручейкового стока и ручейковой эрозии почв // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 3. – С.76-85.
132. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
133. Латышенков А.М. Основы гидравлики. – Л.:Гидрометеиздат. - 1971. – 247 с.
134. Леви И.И. Динамика русловых потоков. – Л.: Гос. энергоиздат, 1957. – 252с.
135. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 376 с.

136. Лобода Н.С., Гопченко Е.Д. Обоснование районирования статистических параметров стока, определяемых по наблюденным данным с малой степенью достоверности // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія: Науковий збірник. - т.5. – Київ: Ніка-Центр, 2003. - С. 35-41.
137. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
138. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для студентов вузов по специальности «Механика». – 6-е издание переработанное и дополненное. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
139. Лященко А.А., Демченко В.В. Трирівнева архітектура геоінформаційних систем. // Науково-практичні проблеми моделювання та прогнозування надзвичайних ситуацій. - К: КНУБА, 2000. - Вип. 3 – С. 46 - 49.
140. Лукнер Л. Совместное численное моделирование поверхностного и грунтового потока воды // Резюме докл. Киев, ин-т математики АН СССР. – 1976 – С.28.
141. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1981. – 535 с.
142. Маханов С.С, Семенов А.Ю. Новая методика расчета поверхностного стока // Метеорология и гидрология. – 1995. – №2. – С.72-82.
143. Маханов С.С, Семенов А.Ю. Устойчивый неотрицательный численный метод для расчетов течения жидкости в открытом русле // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1994. – Т.34, №1. – С.104-117.
144. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 420 с.

145. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
146. Овсянников Л.В. Плоская задача о неустановившимся движении жидкости со свободной границей // Динамика сплошной среды / Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск. – 1971. – № 8. – С.22-26.
147. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
148. Олейник А.Я., Кремез В.С., Добронравов А.А. Математическое моделирование экологических катастроф, связанных с изменением режима грунтовых вод // Сучасні проблеми теорії фільтрації. – Рівне: Вісник УДАВГ. -1998. - С. 113-118.
149. Пасконов В.М., Полежаева В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
150. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.:Наука.-1977. - 664 с.
151. Поляков В.Л. Фильтрационные деформации несвязных несуффозионных грунтов при установившейся одномерной безнапорной фильтрации//Доповіді НАН України. - 2009. - №4 - С.51-57.
152. Попов Е.Г. Вопросы теории и практики прогнозов речного стока. М.;Гидрометеоиздат, 1963. 395 с.
153. Руденко Л.Г. Чабанюк В.С. Концепция геоинформационной системы многоцелевого использования и ее поэтапная реализация на Украине // Геоинформационные и геоэкологические исследования в странах СНГ. М.: Геос, 1999. - С. 9 - 30.

154. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула . – Львів : Львівський нац. ун-т ім. І. Франка, 2004 . – 222 с.
155. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. – Київ: НМК ВО, 1993. – 96 с.
156. Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г. Стабілізація чисельних розв'зків варіаційних задач міграції домішок: проти потокова схема // Вісник. Львів. ун-ту, задачі та методи прикл. мат-ки. Серія мех.-мат. –1997. – № 46. – С.3-9.
157. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1982. – 38 с.
158. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979 – 392 с.
159. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. І. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
160. Семенов А.Ю., Маханов С.С. Неотрицательный численный метод для решения задачи движения жидкости со свободной поверхностью. – М.: ИОФ РАН. Препринт. – 1993. –№12. – 29 с.
161. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. Думка, 1991. – 432 с.
162. Скиба Ю.Н. Конечно-разностные схемы для уравнений мелкой воды, обеспечивающие сохранение массы и полной энергии // Метеорология и гидрология. – Днепропетровск, 1995. – №2. – С. 55-66.
163. Смагулов Ш.К теории аппроксимации уравнений гидродинамики // Численные методы в механики жидкости и газа. – Новосибирск, 1980. – С.116-121.

164. Смагулов Ш., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // ДАН СССР. – 1981. – Т.260, №5. – С.1078-1082.
165. Смушак Н.Я. Чисельне розв’язування задачі стоку вологи на поверхні водозбору // Міжнар. наук.-практ. конф. "Геоінформаційні технології сьогодні": Тези доп. – Львів. – 1999. – С. 31.
166. Селезов И.Т.,Кривонос Ю.Г. Волновие гиперболические модели распространения возмущений.- Киев.:Наукова думка, 2015.- 171 с.
167. Сеньо П.С. Інтервальні моделі в медико-екологічному прогнозуванні / М.П. Дивак , Г.М Гладій., П.С. Венгерський// Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 5 - 1995. - С. 106-108.
168. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. — К.:Наукова думка — 1990 – 222 с.
169. Сергиенко И.В., Молчанов И.Н., Химич А.Н., Интеллектуальные технологии высокопроизводительных вычислений. / Кибернетика и системный анализ, − 2010, № 5.
170. Соколов В.Г. Гидродинамические и гидравлические уравнения, описывающие склоновый дождевой сток с учетом инфильтрации // Водные ресурсы. – 1973. – № 2. – С.95-111.
171. Стокер Дж. Волны на воде. – М.: Иностранная литература, 1959. – 617 с.
172. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
173. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
174. Сусідко М.М. Математичне моделювання процесів формування стоку як основа прогностичних систем // Наук. збірник КНУ “Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія”. – Том 1. – 2000. – С.32-40.

175. Тарунин Е.Л. О выборе аппроксимационной формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости // Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т.9, №7. – С.97-111.
176. Тарунин Е.Л. Зависимость устойчивости неявных схем двухшагового метода от способа аппроксимации вихря скорости на твердой границе // Динамика вязкой жидкости. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.–С.80-85.
177. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
178. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К.:Наукова думка — 2003. – 232 с.
179. Трушевський В.М. Математичне моделювання стоку поверхневої води по поверхні водозбору: побудова моделі // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2000. –№3. – С. 139-145.
180. Трушевський В. М. Чисельне моделювання стоку мілкої води з поверхні водозбору : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Трушевський В. М. – ЛЬвів, 2004. – 64 с.
181. Флейшман Н.П., Зубов В.Н. Численное решение задач динамики вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами // Динамические задачи механики сплошной среды: Тез. докл. Региональной конф. Часть 2. – Краснодар, 1988. – С.269-270.
182. Флетчер К. Численные методы на основе метода Гальоркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
183. Химич А.Н., Герасимова Т.А., Нестеренко А.Н., Яковлев М.Ф. Исследование некоторых алгоритмов решения систем нелинейных уравнений и СОДУ на MIMD-компьютерах. / Искусственный интеллект, − 2006, № 4.

184. Химич А.Н., Яковлев М.Ф. О полной погрешности расчета линейных математических моделей итерационными методами. / Кибернетика и системный анализ, − 2002, № 5
185. Хиршель Э., Кордулла В. Сдвиговые течения сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987 – 248с.
186. Хрущ В.К. Попеременно-треугольная разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса // Математические методы механики жидкости и газа. Днепропетровск, 1983. – С.39-48.
187. Хрущ В.К., Беляев Н.Н. Попеременно-треугольная разностная схема решения уравнений Навье-Стокса // Гидромеханика. – 1983. – № 48. – С. 49-51.
188. Чапля Є., Чернуха О., Мороз Х. Дифузія домішки у смузі з випадково розташованим прошарком за неідеальних масових кмов контакту//Вісник Львів. Ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 9. – 2004. -С. 182-192.
189. Чарний И.А. Подземная гидрогазодинамика. Гос.изд-во нефт. И горно-топл.лит-ра, 1963.- 635 с.
190. Численные методы в механике жидкостей: Перевод с англ. П.П. Корявова, П.И. Чушкина под редакцией О.М. Белоцерковского. – М.: Мир, 1973 – 304 с.
191. Чувствительность гидрологических систем (Влияние антропогенных изменений речных бассейнов и климата на гидрологический цикл) /Л.С. Кучмент, Ю.Г. Мотовилов, НА. Назаров. М.: Наука, 1990. - 144 с.
192. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

193. Шарый С.П. Интервальные методи в доказательном решении уравнений// Труды Всеросс. конф. «Статистика. Моделирование. Оптимизация». – 2011. – С. 94-102.
194. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики свободных потоков. – М: Энергия, 1978 – 240 с.
195. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. - М.: Изд-во МГУ,1973, - 326 с.
196. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв’язування початково-крайових задач. – Київ: НМК ВО, 1991 – 87 с.
197. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
198. Agoshkov V. I., Ambrosi D., Pennati V., Quarteroni A., Saleri F. Mathematical and Numerical Modelling of Shallow Water Flow, Computational Mechanics, 11.-1993.- P. 280-299.
199. Alefeld G, Herzberber J.Introductions to interval computations. Academic, New York, 1983.
200. Apel T., Lube G. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods // Numer. Math. – 1996. – No. 74. – P.261-282.
201. ArcGIS® Server Administrator and Developer Guide PUBLISHED BY ESRI 380 New York Street Redlands, California 92373-8100.
202. Baiochi C., Brezzi F., Franca L.P. Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1993. – No.105.–P.125-141.
203. Barrenechea G. R., Valentin F. An unusual stabilized finite element method for a generalized Stokes problem // Numer. Math. – 2001. –P.1-25
204. Barros S.R.M., Cárdenas J.W. A Nonlinear Galerkin Method for the Shallow-Water Equations on Periodic Domains // J. Comput. Phys. – 2000. – No. 172. – P.592-608.

205. Bates P.D., Anderson M.G. A two-dimensional finite element model for river flow inundation // Proc. Roy. Soc., London. – 1993. – Vol. 400, No. 1909. – P.481-191.
206. Behr M.A., Franca L.P., Tezduyar T.E. Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-Stress Formulation of Incompressible Flows // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1993. – No. 104. – P.31-48.
207. Bernardi C., T. Chac_on Rebollo, M. G_omez M_armol, R. Lewandowski, and F. Murat. A model for two coupled turbulent fluids. III. Numerical approximation by finite elements. Numer. Math., 98(1):33-66, 2004.
208. Brebbia C.A., Partridge P.W. Finite element models for circulation studies. In Mathematical Models for Environmental Problems: Proceedings of the international conference held at the University of Southampton. – New York: Wiley, 1976. – 537p.
209. Brent Hall G., Michael G. Leahy (ред.). Open Source Approaches in Spatial Data Handling. - Springer -ISBN 978-3-540-74830-4, 2008.
210. Brezzi F., Marini D., Süli E. Residual-free bubbles for advection-diffusion problems: the general error analysis // Numer. Math. – 2000. – No. 85.–P.31-47.
211. Brezzi F., et. al. Pseudo Residual-Free Bubbles and Stabilized Methods // Comput. Meth. Appl. Sciences. – 1996. – P.3-8.
212. Brezzi F., Fortin M. A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods // Numer. Math. – 2001. – No. 89. – P.457-491.
213. Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. – 350p.
214. Brezzi F., Franca L.P., Hughes T.J.R., Russo A. b = ∫ g // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1997. – No. 145. – P.329-339.
215. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with a Particular emphasis

on the Incompressible Navie-Stokes Equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1982. – No. 32. – P.199-259.

216. Canuto C., Hussaini Y., Quarteroni A. and Zang T.A. Spectral methods. Scienti_c Computation. Springer, Berlin, 2007. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics.
217. Carrera Jesus, Usunoff Eduardo, Szidarovszky Ferenc. A metod for optimal observation network design. for groundwater management// J. Hydrol. – 1984. – Vol 73, N 1-2. P.147-163.
218. Chippada S., Dawson C.N., Martinez M.L., Wheeler M.F. A projection method for constructing a mass conservative velocity field // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1998. – No. 157 – P.1-10.
219. Chippada S., Dawson C.N., Martinez M.L., Wheeler M.F. Finite element approximations to the system of shallow water equations, Part I: Continuous time a priori error estimates // SIAM J. Numer. Anal. – 1998. – No. 35. – P.692-711.
220. Chippada S., Dawson C.N., Martinez M.L., Wheeler M.F. Finite element approximations to the system of shallow water equations, Part II: Discrete time a priori error estimates // SIAM J. Numer. Anal. – 1999. – No. 36. – P.226-250.
221. Chippada S., Dawson C.N., Martinez M.L., Wheeler M. F. Finite element approximations to the system of shallow water equations, Part III: On the treatment of boundary conditions. // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – No. 1. – P.149-159.
222. Chow V.T., Ben-Zwi A. Hydrodynamic modeling of two-dimensional watershed flow // J. Hydr Div. Proc. ASCE. – 1973. – Vol. 99, No. HY11. – P. 2020-2043.
223. Ciarkson P.A., Mansfield E.L. On shallow water wave equation // Nonlinearity. – 1994. – No. 7. – P.975-1000.

224. Codina R., Blasco J. Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations // Numer. Math. – 2000. – No. 87. – P.59-81.
225. Constantin A. On the Blow-Up of Solutions of a Periodic Shallow Water Equation // J. Nonlinear Sci. – 2000. – No. 10. – P.391-399.
226. Constantin A., Molinet L. Global Weak Solutions for a Shallow Water Equation // Commun. Math. Phys. – 2000. – No. 211. – P.45-61.
227. Dawson C.N., Martínez-Canales M.L. A characteristic-Galerkin approximation to a system of shallow water equations // Numer. Math. – 2000. – No. 86. – P.239-256.
228. Discacciati M., Miglio E., Quarteroni A. Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows// Applied Numerical Mathematics 43.- 2002.- P. 57- 74.
229. Discacciati M., Quarteroni A. Convergence analysis of a subdomain iterative method for the finite element approximation of the coupling of Stokes and Darcy equations// Computing and Visualization in Science.- Vol. 6, No. 23 –2004.- P. 93-104.
230. Discacciati M., Quarteroni A. NavierStokes/Darcy coupling: modeling, analysis and numerical approximation// Revista Matematica Complutense 22 –2009.- no.2.- P. 315-426.
231. Drolet J., Gray W.G. On the well-posed ness of some wave formulations of the shallow water equations // Advances in Water Resources. – 1988. – No. 11. – P.84-91.
232. Durran D.R. Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. – N.-Y.: Springer-Verlag, 1999. – 465 p.
233. Franca L.P., Farhat C., Lesoinne M., Russo A. Unusual stabilized Finite Element Methods and residual free bubbles. // Int. J. Num. Meth. Fluids. – 1998. – No. 27. – P.159-168.

234. Fursikov A.V. Stabilizability of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control // J. math. fluid mech. – 2001. – No.3. – P.259-301.
235. Gallagher R.H. Finite element analysis of geometrically nonlinear problems // In: Theory and practice in finite element structural analysis / Ed. By Y. Yamada, R. H. Gallagher. – Tokyo: Univ. Press, 1973. – P.109-123.
236. GaoW, Chen JJ, CuiMT, Cheng Y (2005) Dynamic response analysis of linear stochastic truss structures under stationary random excitation. J Sound Vib 281:311-321.
237. Gavrilyuk V.M. , Teshukov V.M. Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Continuum Mech. Thermodyn. – 2000 – No. 13. – P.365-382.
238. Gerbeau J.-F. A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations // Numer.Math. – 2000. – No. 87. – P.83-111.
239. Girault V., Raviart P.A. Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms. – Berlin, Heidelberg: Springer-Varlag, 1986. – 374p.
240. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation // Lect. Notes Math. – 1979. – P.149 – 200.
241. Gresho P.M., Lee R.L. Don't suppress the wiggles – they're telling you something // Computers and Fluids. – 1981. – No. 9. – P.223-253.
242. Goode Daniel, Konikov Leonard. Apparent dispersion in transient groundwater flow // Water Resource. Res. – 1990. – Vol. 26, N 10. – P. 2339 – 2351.
243. http://edndoc.esri.com/arcobjects/9.2/ NET_Server_Doc/ developer/ ADF/conversion.htm Веб-ресурс. Перетворення типів ГІС-геометрій.

244. Haitjema H.M. Development and applications of three-dimensional analytic element models transport modeling // Groundwater Contaminate.: Use Model Decision – Making: Proc. Int. Conf. Amsterdam, 26 – 29 Oct., 1987. – Dordrecht etc. – 1989. – P. 489 – 498.
245. Hamilton David A., Wiggert David C., Wright Steven J. Field comparison of three mass transport models // J. Hydraul. Eng. – 1985. – Vol. 111, N1. – P.1 – 11.
246. Harari I., Frey S., Franca L.P. A note on a recent study of stabilized finite element computations for heat conduction // Comput. Mech. – 2002. – No. 28. – P.63-65.
247. Heywood J.G., Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem Part IV: Error analysis for second-order time discretization // SIAM J. Numer. Anal. – 1990. – Vol. 27, No. 2. – P.353-384.
248. Hughes T.J.R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1995. – No. 127. – P.387-401.
249. Hughes T.J.R. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. – New Jersey: Prentice-Hall, 1987. – 803 p.
250. Hughes T.J.R., Feijóo G.R., Mazzei L., Quincy J.-B. The variational multiscale mathod – a paradigm for computational mechanics // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1998. – No. 166. – P.3-24.
251. Hughes T.J.R., Liu W.K., Brooks A. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation // J. Comput. Physics. – 1979. – No. 30. – P.1-60.
252. Hughes T.J.R., Stewart J.R.A space-time formulation for multiscale phenomena. J. Comput. Appl. Math. – 1996. – No. 74. – P.217-229.

253. Jawod Sadik B., Hussien Karam A. Groundwater monitoring network rationalization using statistical analyses of piezometric flctuatijn // Hydrol. Sci. J. – 1988. – Vol. 33, N2. – P. 181 – 191.
254. Jones D.A., Poje A.C., Margolin L.G. Resolution Effects and Enslaved Finite-Difference Schemes for a Double Gyre, Shallow-Water Model // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. – 1997. – No. 9. – P.269-280.
255. Kashiyama K., Ohba Y., Takagi T., Behr M., Tezduyar T. Parallel finite element method utilizing the mode splitting and sigma coordinate for shallow water flows // Comput. Mech. – 1999. – No. 23. – P.144-150.
256. Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M. , Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis// Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 1. – С. 7-13.
257. Keramsi M.A. Resolution par une methode d'elements finis d'equations de la mecanique des fluids: These presentee a l'universite de Paris – sud centre d'orsay, 1976. – P.26-28.
258. Khelifa A., Robert J.L., Ouellet Y.A Douglas-Wang finite element approach for transient advection-diffusion problems // Comput. Methods in Appl. Mech. Eng. – 1993. – No. 110. – P.113-129.
259. King I.P., Norton W.R. Recent applications of ram's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality // Finite Elements in Water Resources, Computational Methods in Water Resources XI. – London: Pentech Press. – 1978. – P.2.81-2.99.
260. King I.P., Norton W.R., Iceman W.R. A finite element solution for two-dimensional strained flow problems. // Finite elements in fluids, volume 1 of Viscousows and hydrodynamics. – London: Wiley. – 1975. – P.133-156.
261. Kinnmark I.P.E. The Shallow Water Wave Equations // Formulation, Analysis and Applications, volume 15 of Lecture Notes in Eng. – New York: Springer-Verlag. – 1985. – P.1-8.

262. Launverier H. The transport of heat in an oil layer caused bu the injection of the fluid. – Applied Sci. Res., Section A, 1995, vol.5, № 2 – 3, p. 145 – 150.
263. Layton A.T., Van de Panne M. A numerically efficient and stable algorithm for animating water waves // The Visual Computer. – 2002. – No. 18. – P.41-53.
264. Le Maitre O.P., Knio O.M., Najm H.N., Ghanem R.G. A Stochastic Projection Method for Fluid Flow // J. Comput. Physics. – 2001. – No. 173. – P.481-511.
265. Leray J. Etude de diverses equations, integrals non lineaire et de quelques problemes que posent l'Hydrodynamique // J. Math. pures et appl. – 1933. – Vol. 35, No. 12. – P.1-82.
266. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Math. – 1934. – No. 63. – P.193-248.
267. Lewandowski R. The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity. Nonlinear Anal., 28(2):393-417, 1997.
268. Levermore C. D., Sammartino M. A shallow water model with eddy viscosity for basins with varying bottom topography // Nonlinearity. – 2001. – No. 14. – P.1493-1515.
269. Lighthill M. J., Whitham C. M. On kinematic waves // Flood movement in long rivers. – 1955. – Ser. A, No. 229 – P.281-316.
270. Lions P.-L., Temam R., and Wang S.. Models for the coupled atmosphere and ocean. (CAO I,II). Comput. Mech. Adv., 1(1):120, 1993.
271. Lions P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics: in 2 vol. – Oxford: Clarendon pres, 1996. – Vol. 1: Incompressible models. – 237 p.
272. Lions P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. : in 2 vol. – Berlin, Heidelberg: Springer-Varlag, 1996. – Vol. 2: Compressible models. – 348 p.

273. Loaiciga H.A. Groundwater monitoring network design//comput. Meth. Water Resour: Proc. 7 Int. Conf., Cambridge, Vass., June, 1988. Vol.2.-Amsterdam.1988.-P. 371-376.
274. Lobo Ferreira J.P. A comparative analysis of mathematical mass transport codes for groundwater pollution studies // Groundwater Flow and Quality Model: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, June 2 – 6, 1987. – Dordrech etc. – 1988. – p. 699 – 716.
275. Lynch D.R., Gray W.G. A wave equation model for finite element tidal computations // Comput. Fluids. – 1979. – No. 7. – P.207-228.
276. Mayer Philip D., Brill E. Downey. A method for locating wells in a groundwater monitoring network under conditions of uncertainly/ Water Resour. Res.-1988.-24, N 1277-1282.
277. Martinez M.L. A Priori Error Estimation of Finite Element Models of Systems of Shallow Water Equations: Ph. D. Thesis. Rice University, Dep. Comp. Appl. Math. – Houston, TX 77005-1892, 1998 – 113 p.
278. Micheletti S. Stabilized finite elements for semiconductor device simulation. Comput Visual Sci. – 2001. – No. 3. – P.177-183.
279. Nadiga B.T., Hecht M.W., Margolin L.G., Smolarkiewicz P.K. On Simulating Flows with Multiple Time Scales Using a Method of Averages // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. – 1997. – No. 9. – P.281-292.
280. National groundwater monitoring Strategy update// Ground Water. Monit. and Rem. – 1994. – Vol. 14, N 2. – P. 98-99.
281. Navarro Alvargonzalez. miniprogramas. Variogramas y kpiging en hidrogeologia// Bol. geol. y minero. – 1993. – Vol. 104, N 3. P. 280-300.
282. Oden J.T., Reddy J.N. An introduction of the Mathematical Theory of Finite Elements. – N.-Y.: Willy, 1976. – 430 p.
283. Oden J.T., Reddy J.N. Variational Methods in Theoretical Mechanics. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1976. – 178 p.

284. Partridge P.W., Brebbia C.A. Quadratic finite elements in shallow water problems // ASCE J. Hydr. Eng. – 1976. – No. 102. – P.1299-1313.
285. Prudhomme S., Oden J.T. A posteriori error estimation and error control for finite element approximation of the time-dependent Navier-Stokes equations. Finite Elements in Analysis and Design. – 1999. – No. 33. – P.247-262.
286. Quarteroni A., Stolcis L. Homogeneous and Heterogeneous Domain Decomposition Methods for Compressible Fluid Flows at High Reynolds Numbers, CFD Review, II –1998. - P.1064- 1078.
287. Quarteroni A., Veneziani A.Analysis of a Geometrical Multiscale Model Based on the Coupling of ODE's and PDE's for Blood Flow Simulations, SIAM J. on MMS, Vol.1, No.2.-2003.- P. 173195.
288. Rebollo C.T. A term by term stabilization algorithm for finite element solution of incompressible flow problems // Numer. Math. – 1998. – No. 79. – P.283-319.
289. Singh R., Fransini I. Unsteady flow in unsaturated soils from a cylindrical sourse of finite radius // I. Geophys. Res. – 1967. – Vol. 72, N 4. P. 1207 – 1215.
290. Selezov I. T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – 33, N 1. – P. 44–54.
291. Selezov I. T., Kuznetsov V. V., Chernikov D. O. Generation of surface gravity waves by bottom timerepetitive pulses // J. Math. Sci. – 2010. – 171, N 5. – P. 596–602.
292. Senio P. Solving systems of special form nonlinear equations by means of some modifications of Runge type interval iterative method / P. Senio, P. Vengersky // Interval Computations. – 1992. - Vol. 4(6) – P. 59–65.
293. Suh Y.K. Analysis of Linear Viscous Flow with a Free Surface in a Circular Cylinder Subjected to Small-Amplitude Circular Oscillations Theoret // Comput. Fluid Dynamics. – 2000. – No. 14. – P.109-134.

294. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A practical Introduction. – Heidelberg : Springer-Verlag, 1999. – 624 p.
295. Vengerskii P. On the certain interval iteration methods to solving a system of nonlinear algebraic equations /Vengerskii P., Kardash A.I., Sen'o P.S. // Journal of Mathematical Sciences - 1994.-V.70(1) - P. 1492 - 1499.
296. Venherskyi P. One approach to numerical solution of the problem for coupling surface and groundwater flows./ Venherskyi P., Kokovska Y.//Матеріали VI міжнародної наукової конференції ім. І.І. Ляшко "Обчислювальна і прикладна математика". - Київ, 2013. - С.46-50.
297. Venherskyi P. Application of Gis- Technology for Modelling Motion Water in the Open Channels /Venherskyi P., Kokovska Y. // Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science. - Lviv-Slavske, 2012.- P. 393-394.
298. Venherskyi P. Numerical Modeling of Water Movement in the River Network in thr Selected Area / Venherskyi P., Kokovska Y. // Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science. - Lviv-Slavske, 2014.- P. 83-85.
299. Vengersky P.S. Application of interval analysis for nonlinear systems and some global optimization problems / Vengersky P.S., Senyo P.S. // Abstract. Inter. IMACS-GAMM-Symposium of numerical methods and error-bounds. - Oldenburg, 1996. - P. 66-68.
300. Venherskyi P. Mathematical modeling problem of full flow for surface and grounwater /P. Venherskyi //Матеріали І міжнародної ХХ Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львівський національний університет імені Івана Франка (7-9 квітня 2014, Львів) -С.35-36.
301. Vengersky P.S. Mathematical modeling of streams of fluid in the opened channels / P. Vengersky, Y. Kokovska // XV Всеукраїнська наукова

конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": тези доповідей. - Львів, 2008. - С. 72-73.

302. Venherskyi P. Numerical investigation problems of coupled movement of surface and underground flows/ Venherskyi P.//XXI International Conference "Problems of decision making under uncertainties" . - Skhidnytsia, May 13-17, 2013. - P. 64-66.
303. Venherskyi P. Application interval methods for solving equation of surface flow in kinematic wave approximation./Venherskyi P.S.// XXII International Conference "Problems of decision making under uncertainties" . - Foros-Yalta, Ukraine, September 23-27. 2013- P. 35-36.
304. Venherskyi P. Numerical modelling of shallow water flow in hydrodynamic approximations / Venherskyi P.,Trushevskyi V.//Journal of Computational and Applied Mathematics.№ 2(116). - 2014. - С.152-166.
305. Venherskyi P. Investigation stability and convergence interval iteration methods in kinematic wave problem./ Venherskyi P.S., Bartish M.// Abstracts XXIV International Conference "Problems of decision making under uncertainties" . - Cesky Rudolec, Czech Republic, September 1-5. 2014- P. 14.
306. Venherskyi P. Numerical modelling of shallow water flow in hydrodynamic approximations / P. Venherskyi, V. Trushevskyi // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – .№ 2(116). – P. 152–166.
307. Venherskyi P. Two approaches for description mathematical model of fluid filtration in the ground./ P.Venherskyi, O.Trofymchuk, Y.Kokovska // Abstr. XXVI Int. conf./ "Problems of decision making under uncertainties"(Czech Republic, Brno, August 25-30, 2016). – Brno, 2016. –P. 14.
308. Venherskyi P. Investigation of the Properties of Solution of Variational Problem Coupled Flow of Surface and Groundwaters / P.Venherskyi, H.

Shynkarenko // International Journal of Engineering Sciences & Research Technology. – 2016. – Vol.5, Issue 11. – P. 399–403.

309. Venherskyi P. Investigation of the stability for established flows in open pseudoprismatic channels / P. Venherskyi, Y. Kokovska // Eureka: physics and engineering. Computer sciences and mathematics. – 2016. – Vol. 5 – P. 9–15.
310. Walters R.A. A finite element model for tides and currents with field applications. Commun. Numer. Meth. Eng. – 1988. – No. 4. – P.401-441.
311. Walters R.A. A model for tides and currents in the English Channel and southern North Sea // Advances in Water Resources. – 1987. – No. 10. – P.138-148.
312. Walters R.A. Numerically induced oscillations in finite element approximations to the shallow water equations // Int. J. Num. Meth. in Fluids. – 1983. – No. 3. – P.591-604.
313. Walters R.A., Carey G.F. Analysis of spurious oscillation modes for the shallow water and Navier-Stokes equations // Comput. Fluids. – 1983. – No. 11(1). – P.51-68.
314. Walters R.A., Werner F.E. A comparison of two finite element models of tidal hydrodynamics using a North Sea data set // Advances in Water Resources. – 1989. – No. 12. – P.184-193.
315. Weiyan T. Shallow Water Hydrodynamics: Mathem. Theory Numer. Solution for a Two-dimens. System Shallow Water Equations. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – 434 p.
316. Westerink J. J., Luettich R. A., Baptista A. M., Schefiner N. W., Farrar P. Tide and Storm Surge Predictions Using a Finite Element Model // J. Hydraulic Eng. – 1992. – No. 118. – P.1373-1390.
317. Wünsch O., Böhme G. Numerical simulation of 3d viscous fluid flow and convective mixing in a static mixer // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – No. 70. – P.91-102.

318. Yang C.-T., Alturi S.N. An analysis of flow over a backward-facing step by an assumed stress mixed finite element method. // Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow Proc. 3 Int. Conf. Seattle. – Swansea. – 1983. – P.302-316.
319. Yang C.-T., Alturi S.N. An assumed deviatoric stress-pressure-velocity mixed finite element method for unsteady, convective, incompressible viscose flow: Part 2: Computational studies // Int. J. Num. Meth. Fluids. – 1984. – No. 4. – P.43-69.
320. Yang C.-T., Alturi S.N. An assumed deviatoric stress-pressure-velocity mixed finite element method for unsteady, convective, incompressible viscose flow: Part 2: Computational studies // Int. J. Num. Meth. Fluids. – 1984. – No. 4. – P.43-69.
321. Yao Y.F., Thomas T.G., Sandham N.D., Williams J.J.R. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Rectangular Trailing Edge // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. – 2001. – No. 14. – P.337-358.
322. Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L. The Finite Elements Method: 4th edn. – N.-Y.: McGrow-Hill, 1991. – Vol. 2. – 410 p.
323. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method: 5th edn. – Vol. 3: Fluid Dynamics, 2000. – 334 p.
324. Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L., Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1971. – Vol. 3. – P.275-290.