

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЮЗВ'ЯК МИКОЛА ЙОСИПОВИЧ

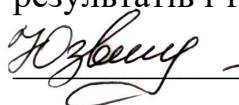
УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
РОЗВИТОК МЕТОДУ БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ
У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ
З ПЛОСКИМИ ТА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

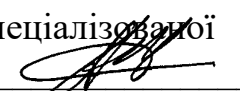
Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 Юзв'як М.Й.

Науковий керівник: Токовий Юрій Владиславович,
доктор фізико-математичних наук

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради  /Андрійчук М. І./

Львів – 2022

АНОТАЦІЯ

Юзв'як М.Й. Розвиток методу безпосереднього інтегрування у задачах теорії пружності та термопружності для тіл з плоскими та циліндричними поверхнями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2022.

У дисертаційній роботі узагальнено метод безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях стосовно тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями. Досліджено плоскі задачі для прямокутної області, осесиметричні задачі для суцільного та порожнистого циліндрів скінченної довжини, та просторові – для прямокутного паралелепіпеда. Розв'язування кожної задачі суттєво ґрунтується на інтегруванні диференціальних рівнянь рівноваги при заданих межових умовах в напруженнях. Отримано вирази компонент тензора напружень через спеціальним способом уведені визначальні функції. Для двовимірних задач (плоскої та осесиметричної) всі компоненти тензора напружень виражено через одну визначальну функцію, а для прямокутного паралелепіпеда уведено три визначальні функції, названі в функціями Вігака на честь засновника методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги. На основі цих виразів набори межових умов, заданих для різних компонент тензора напружень, зведено до відповідних інтегральних умов на уведені функції. Для задач теорії пружності додатково знайдено інтегральні умови рівноваги для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження в кутових точках чи на відповідних ребрах паралелепіпеда та циліндрів дотичних зусиль, які необхідні для виконання рівнянь рівноваги.

У такий спосіб сформульовані задачі зведено до допоміжних крайових задач для ключових інтегро-диференціальних рівнянь суцільності з відповідними інтегральними умовами для функцій Вігака. Для знаходження розв'язку отриманих задач запропоновано алгоритми відокремлення змінних з використанням повних

ортогональних систем, що складаються з власних і приєднаних функцій. У випадку просторових задач теорій пружності та термопружності для прямокутного паралелепіпеда запропоновано метод послідовних наближень для розв'язання зв'язаної системи ключових інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій Вігака. За допомогою цього методу розв'язання системи зведено до послідовності плоских задач у відповідних поперечних перетинах паралелепіпеда. Побудовано розв'язки розглянутих задач у вигляді функціональних залежностей від теплового та силового навантажень.

Проаналізовано напружено-деформовані стани досліджуваних тіл для різних способів теплового та силового навантажень та виявлено якісні та кількісні закономірності використання спрощених формул згідно з принципом Сен-Венана для розглянутих задач. Досліджено вплив коефіцієнта Пуассона на застосовність формул плоскої задачі при дослідженні просторових призматичних тіл.

Ключові слова: пружність, термопружність, прямокутна область, скінченний циліндр, паралелепіпед, інтегро-диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок, визначальні функції.

ABSTRACT

Yuzvyak M.Y. A development of the direct integration method with concern to the elasticity and thermoelasticity problems for solid bounded by plane and cylindrical surfaces. – Qualification scientific work as a manuscript.

The thesis for a candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.02.04 – mechanics of deformable solids. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, 2023.

This dissertation work generalizes the direct integration method with concern to the two- and three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for finite domains with corner points bounded with plane and cylindrical surfaces. Specifically, plane problems for a rectangular domain, axisymmetric problems for solid and hollow cylinders of finite length and spatial problems for a rectangular parallelepiped were studied. The solution of each problem rests upon the integration of the differential equations of equilibrium under given boundary conditions in terms of stresses. The expressions of the stress tensor components are obtained through the key functions introduced in a special way. For two-dimensional problems (plane and axisymmetric), all components of the stress tensor are expressed through one key function, and for a rectangular parallelepiped, three key functions are introduced, which are named to be the Vihak functions (after the inventor of the direct integration method Prof. Vasyl M. Vihak). On the basis of these expressions, the sets of boundary conditions given for various stress tensor components are reduced to the corresponding integral conditions for the introduced functions. For the problems of the elasticity theory, the integral equilibrium conditions for the given external loads and the conditions of agreement at the corner points or on the corresponding edges of the parallelepiped and cylinders of tangential forces, which are necessary for the fulfillment of the equilibrium equations, are additionally found.

In such manner, the formulated problems are reduced to the auxiliary boundary value problems for the key integro-differential equations of continuity with the corresponding integral conditions for the Vihak functions. Algorithms for the separation of variables using complete orthogonal systems consisting of the eigen- and associated

functions are proposed to find solutions of the obtained problems. In the case of spatial problems of the elasticity and thermoelasticity theories for a rectangular parallelepiped, a method of successive approximations is proposed for solving a coupled system of key integro-differential equations with respect to Vihak functions. Using this method, the solution of the system is reduced to a sequence of plane problems in the corresponding cross-sections of the rectangular parallelepiped. The solutions of the considered problems are constructed in the form of functional dependencies on the applied force and thermal loadings. The latter fact is quite beneficiary for both theoretical and practical implementation of the solutions constructed.

It was shown by the numerical implementation that the solutions are efficient for the analysis of stress fields in the entire considered domain including edges and corner points. Particularly, the presented solutions allow for the pre-conditional evaluation of the applicability for the simplified formulae implying the Saint-Venant principle. The effect of the Poisson ratio in the applicability of the formulae developed within the framework of the plane formulation to the analysis of long prismatic solids. The derived solution form is beneficial for solving the inverse and identification problems as well as the optimization ones for the further applications in both academia and industry.

Key words: elasticity, thermoelasticity, rectangular domain, finite cylinder, parallelepiped, integro-differential equation, analytical solution, key functions.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Вігак В.М., Ясінський А.В., Юзв'як М.Й. Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Інтегр. перетворення та їх застосування до крайових задач*. 1997. Вип. 15. С.11–27.
2. Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V. The solution of plane thermoelasticity problem for rectangular domain. *J. Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21, No. 5. P. 545–562.
3. Вігак В.М., Юзв'як М.Й. Ключові рівняння суцільності в напруженнях для осесиметричних задач пружності та термопружності. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. Том. 41. № 4. С. 123–129.
Te same: Vihak V.M. and Yuzvyak M.Yo. Key continuity equations in stresses for axisymmetric problems of elasticity and thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001, Vol. 107, No. 1, P.3659–3665.
4. Вігак В.М., Юзв'як М.Й. Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей. *Крайові задачі для диф. рівнянь*. 1999. Вип. 4. С. 9–33.
5. Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyu A. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *J. Thermal Stresses*. 2020. Vol. 44, No. 3. P. 359–376.
6. Кушнір Р.М., Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь. *Укр. мат. журн.* 2021. Том. 73. № 10. С. 1355–1367.
Te same: Kushnir R. M., Tokovyi Y. V., Yuzvyak M. Y., Yasinskyi A. V. Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integrodifferential equations. *Ukr. Math. Journal*. 2022. Vol. 73. No. 10. P. 1566–1569.
7. Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака. *Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка*, с. фіз.-мат. н. 2021. № 3. С. 123–126.
8. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Пружна рівновага порожнистого циліндра скінчен-

ної довжини за осесиметричного силового навантаження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2021. Том. 64, № 3. С. 65–89.

9. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора. *Прикл. пробл. мех. і мат.* 2021. Вип. 19. С. 1–6.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. Вігак В. М., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Метод відокремлення змінних в плоскій задачі термопружності для прямокутної області. В кн. Всеукр. наук. конф. «Розробка та застосування математ. методів в науково-техн. дослідженнях». Львів, 1995. Ч.2. С. 15.
11. Вігак В.М, Юзв'як М.Й., Калиняк Б.М. Розв'язування плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Тези допов. 2-го міжнар. симпозіуму інженерів-механіків у Львові*. Львів, 1995. С. 54.
12. Vihak V.M., Yuzvyak M. Y. Three integro-differential compatibility equations in terms of strains and a complete system of thermoelasticity equations in terms of stresses. *3rd Int. Congress on Thermal Stresses "Thermal Stresses-99"*. Cracow, Poland. 1999. P.143–146.
13. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Осесиметричний термонапружений стан скінченного порожнистого циліндра. Тези доповідей VI Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки». Київ. 2021. С. 64.
14. Юзв'як М.Й. Використання функцій Вігака для розв'язання задач теорії пружності та термопружності в напруженнях. Тези доповідей Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021». Львів. С. 183–186.
15. Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Функції Вігака у прямих задачах теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками. *Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 75-річчю кафедри диф. рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка, 28 – 30 жовтня 2021 р.* Чернівці: Черн. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. 2021. С. 155–156.

ЗМІСТ

ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1. АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	17
1.1. Актуальність розробки методів аналітичного визначення напруженого стану тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями	17
1.2. Основні підходи до розв’язування задач теорії пружності й термопружності для тіл з кутовими точками межі.....	18
1.3. Метод безпосереднього інтегрування.....	22
1.4. Актуалізація досліджень дисертаційної роботи	25
РОЗДІЛ 2. ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ	26
2.1. Функція Вігака для визначення температурних напружень в прямокутній області	26
2.2. Відокремлення змінних в інтегро-диференціальному рівнянні суцільності та числова верифікація алгоритму	29
2.3. Задача теорії пружності для прямокутної області	36
2.4. Елементарна та самозрівноважена складові функції Вігака.....	42
2.5. Побудова розв'язку інтегро-диференціального рівняння суцільності та його числова верифікація.....	48
2.6. Висновки до розділу	57
РОЗДІЛ 3. ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО ТА ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРІВ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ.....	58
3.1. Задача термопружності для циліндра скінченної довжини	58
3.2. Відокремлення змінних в інтегро-диференціальному рівнянні суцільності та числові результати	61

3.3. Функція Вігака в задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини	70
3.4. Аналіз елементарної та самозрівноваженої складових функції Вігака	78
3.5. Методика розв'язання інтегро-диференціального рівняння суцільності та числові результати	84
3.6. Висновки до розділу	94
РОЗДІЛ 4. ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЙ ВІГАКА В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА.....	96
4.1. Температурні напруження в паралелепіпеді	96
4.2. Методика відокремлення змінних в інтегро-диференціальних рівняннях суцільності та числові результати	99
4.3. Пружна рівновага паралелепіпеда.....	111
4.4. Розклад функцій Вігака на елементарні та самоврівноважені складові.....	121
4.5. Розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності та числові результати	129
4.6. Висновки до розділу.	138
ВИСНОВКИ	139
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	141
ДОДАТОК А.....	158
ДОДАТОК Б СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ	170

ВСТУП

Актуальність теми. Вплив тенденцій розвитку техніки та технологій, зокрема, щодо мініатюризації технічних та електронних пристроїв і потреб якісної оцінки їх міцнісних властивостей, сприяє відновленню інтересу до класичних задач механіки, постановка та методи розв'язування яких переосмислюються з урахуванням сучасних потреб. Особливу увагу привертають задачі для тіл з концентраторами напружень, наявність яких зумовлена дефектами структури матеріалу або ж особливостями геометрії досліджуваних тіл. До задач такого класу належать задачі теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками, найпростішими з яких є призматичні тіла, наприклад, прямокутного поперечного перерізу, конусо- та клиноподібні елементи тощо. Попри довготривалу історію розроблення методів аналізу таких задач багато з них залишаються нерозв'язаними, або ж побудовані розв'язки є недостатньо ефективними для сучасних теоретичних та прикладних застосувань. Основна складність при побудові точних аналітичних розв'язків таких задач полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях досліджуваного тіла. Остання обставина суттєво обмежує можливості побудови систем власних функцій для відокремлення змінних у ключових рівняннях, сформульованих для визначальних функцій (часто у цій якості використовують гармонічні чи бігармонічні потенціальні функції). Це обумовлює, зокрема, нестійкість побудованих розв'язків у кутових точках межі та інші ускладнення теоретичного та обчислювального характеру. Недарма сформульовану Г. Ляме задачу про пружну рівновагу куба при довільному нормальному силовому навантаженні граней (плоским аналогом якої є задача для прямокутної області у зрівноваженому полі сил) порівняно за складністю зі знаменитою задачею трьох тіл небесної механіки і досі не розв'язано в явному вигляді.

Для подолання таких ускладнень розроблено низку наближених аналітичних підходів, які у переважній більшості, ґрунтуються на реалізації таких основних стра-

тегій: точне задоволення ключових гармонічних або бігармонічних рівнянь шляхом використання загального подання відповідних потенціальних функцій при наближеному задоволенні межових умов (методи перехресної суперпозиції, однорідних розв'язків та ін.), забезпечення точного виконання умов на межі при наближеному задоволенні ключових рівнянь (методи безпосереднього інтегрування, поліномів Горві та ін.), або ж наближене задоволення межових умов та ключових рівнянь (низка варіаційних та числових підходів). Застосування кожної зі стратегій має певні переваги, зокрема, щодо форми подання розв'язку, що з огляду на поставлену загальну мету дослідження визначає вибір методу. Зокрема, якщо аналіз напруженого стану не є кінцевою метою досліджень, а розв'язання задач здійснюється задля отримання явних залежностей компонент тензора напружень чи вектора переміщень від силових чи теплових факторів навантаження межі тіла для подальшого використання, наприклад для відтворення певних чинників навантажень чи оптимального керування компонентами напруженого стану, використання методу безпосереднього інтегрування, запропонованого проф. В. М. Вігаком, забезпечує певні переваги. Застосування цього методу ґрунтується на використанні рівнянь рівноваги в напруженнях для подання всіх компонент тензора напружень через визначальні функції, за які вибрано певні напруження чи їх лінійні комбінації. У такий спосіб вдається уникнути фізично необґрунтованого підвищення порядку отриманих на основі рівнянь суцільності в напруженнях ключових рівнянь для визначальних функцій. Ефективність числової реалізації такого підходу залежить від вибору визначальних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації виконані в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України «Розробка методів і алгоритмів побудови розв'язків прямих і обернених задач термопружності та гідропружності стосовно до оптимізації та відтворення напруженого стану в неоднорідних тілах» (ІІІ кв. 1997 р.– ІІ кв. 2002 р., № д.р. 0197U017671), «Математичне моделювання, розвиток методів розрахунку та оптимізація фізико-механічних процесів у неоднорідних деформівних структурах та тілах з багат шаровими по-

криттями при комплексній зовнішній дії» (I кв. 2002 р.– IV кв. 2005 р., № д.р. 0102U000453), «Моделі і розвиток методів розрахунку та оптимізації напруженого стану і дослідження граничної рівноваги неоднорідних тіл з дефектами» (I кв. 2019 р.– III кв. 2022 р., № д.р. 0119U100672).

Метою дисертаційної роботи є розвиток методу безпосереднього інтегрування рівнянь дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками (прямокутної області, суцільного та порожнистого циліндрів скінченної довжини, прямокутного паралелепіпеда) шляхом зведення до крайових задач для визначальних функцій, названих у роботі функціями Вігака, для побудови ефективних аналітично-числових розв’язків поставлених задач, які точно задовольняють межові умови, задані на усій поверхні досліджуваних тіл.

Для досягнення поставленої мети вирішено такі завдання:

- сформульовано фізично обґрунтовані математичні постановки задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками (плоских задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для прямокутних областей, осесиметричних задач такого класу для суцільних та порожнистих циліндрів скінченної довжини, просторових задач для прямокутного паралелепіпеда);
- з використанням методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги компоненти тензора напружень виражено через визначальні функції;
- на основі отриманих співвідношень межові умови, задані для різних компонент тензора напружень, еквівалентно зведено до інтегральних умов для визначальних функцій, названих функціями Вігака на честь основоположника методу безпосереднього інтегрування, та встановлено інтегральні умови рівноваги та суцільності, яким повинні задовольняти задані зовнішні силові навантаження, і ключові інтегро-диференціальні рівняння для визначальних функцій на основі вихідних рівнянь суцільності в напруженнях;
- розроблено аналітично-числові методики розв’язування отриманих крайових задач для знаходження визначальних функцій на основі методу відокремлення

змінних з використанням розвинень заданих і шуканих функцій за повними системами ортогональних власних і приєднаних функцій;

- виконано числову апробацію ефективності побудованих розв’язків для різних способів теплового та силового навантаження тіл з кутовими точками.

Об’єктом досліджень дисертаційної роботи є обмежені тіла з кутовими точками: прямокутна область, суцільний та порожнистий циліндри скінченної довжини та прямокутний паралелепіпед. Фізико-механічні характеристики матеріалів взято незалежними від температури та просторових координат. Силкові та теплові навантаження розглянутих тіл є статичними та квазістатичними.

Предметом досліджень є напружений стан обмежених тіл з кутовими точками, зумовлений нерівномірним нагріванням та зовнішнім силовим навантаженням.

Методи досліджень. У роботі використано базові співвідношення лінійної теорії пружності та термопружності та засадничу концепцію методу безпосереднього інтегрування. Для побудови розв’язків отриманих ключових інтегро-диференціальних рівнянь застосовано аналітично-числовий підхід, основою якого є метод відокремлення змінних та розвинення заданих і шуканих функцій у відповідні ряди за спеціально побудованими повними ортогональними системами власних та приєднаних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів визначається наступним:

- для реалізації методу безпосереднього інтегрування запропоновано способи вираження шуканих компонент тензора напружень через визначальні функції Вігака (єдину у випадку двовимірних формулювань, або три – у просторовому випадку);
- вперше отримано інтегро-диференціальні рівняння суцільності для визначальних функцій Вігака та відповідні інтегральні умови, еквівалентні вихідним межовим умовам для різних компонент тензора напружень;
- отримано інтегральні умови рівноваги для силових навантажень та умови погодження межових умов у кутових точках і на гранях розглянутих тіл, необхідні для коректності розв’язків сформульованих задач у термінах напружень;

- запропоновано аналітично-числовий метод розв'язання ключових інтегро-диференціальних рівнянь для визначальних функцій;
- досліджено поля напружень у тілах з кутовими точками та виявлено певні закономірності їх розподілу в околі кутових точок, ефекти взаємного впливу навантажених сторін та граней та впливу окремих теплофізичних та механічних характеристик.

Достовірність одержаних результатів забезпечується коректним застосуванням апарату математичної фізики і апробованих методів розв'язання рівнянь теорії пружності та термопружності; зіставленням отриманих розв'язків у часткових випадках із відомими результатами, отриманими іншими верифікованими методами; аналітичною та чисельною перевіркою задоволення вихідних диференціальних рівнянь та локальних межових умов.

Практичне значення одержаних результатів. Запропоноване узагальнення методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги шляхом використання визначальних функцій Вігака дає змогу отримати ефективні аналітично-числові розв'язки задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками у дво- та тривимірному формулюванні, що забезпечує можливість якісного аналізу напруженого стану таких тіл, зокрема, в околах дво- та тригранних кутів. Перспективними з практичної точки зору є отримані результати для оцінки напруженого стану розглянутих тіл, оскільки як у дво-, так і тривимірному формулюванні розв'язок знайдено в аналітичному вигляді. Запропонований метод розв'язування задач теорії пружності та термопружності для тіл зі сталими фізико-механічними характеристиками є основою ефективного використання методу додаткових деформацій, що дає змогу побудови розв'язків задач такого класу у випадку залежних від температури чи просторових координат властивостей матеріалу. Отримана форма розв'язку у вигляді явної залежності від навантажень є зручною для використання при розв'язанні обернених задач, ідентифікації компонент термосилового навантаження та оптимального керування термонапруженим станом обмежених тіл з кутовими точками межі.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань досліджень здійснювали проф. В. М. Вігак та науковий керівник роботи Ю. В. Токовий. Основні наукові результати дисертації автором отримано самостійно. Робота [14] опублікована без співавторів. Автором побудовано розв'язки плоских задач термопружності для прямокутної області методом безпосереднього інтегрування та здійснено його числову реалізацію [1, 2, 11, 12]. В [3] ним запропоновано підхід до зведення осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для скінченних циліндрів до ключових інтегро-диференціальних рівнянь, а в [4] аналогічний підхід розроблено для необмежених та напівобмежених областей. У роботах [5–10, 13, 15] автором запропоновано підхід щодо подання компонент тензора напружень дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками через визначальні функції Вігака.

Апробація результатів дисертації. Окремі результати роботи доповідалися на Всеукраїнській науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях» (Львів, 1995), 2-му Міжнародному симпозіумі інженерів-механіків (Львів, 1995), 2-му, 3-му та 7-му Міжнародних конгресах «International Congress on Thermal Stresses» (Рочестер, США, 1997; Краків, Польща, 1999; Тайбей, Тайвань, 2007), 6-й Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2021), Міжнародній науковій конференції, присвяченій 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка (Чернівці, 2021) та Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2021).

У повному обсязі результати дисертації доповідалися на науковому семінарі відділу механіки деформівного твердого тіла під керівництвом д. ф.-м. н. В.А. Шевчука, спільному науковому семінарі відділу механіки деформівного твердого тіла та відділу термомеханіки ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ під керівництвом академіка НАН України Р.М. Кушніра, проблемному семінарі «Механіка взаємозв'язаних полів» ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д. ф.-м. н., проф. О.Р. Гачкевича, семінарі відділу теоретичних основ механіки руйнування ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України під керівництвом д. ф.-

м. н., проф. М.П. Саврука, семінарі факультету інформаційних технологій і математики Волинського нац. ун-ту ім. Л. Українки під керівництвом д. ф.-м. н., проф. Я.М. Пастернака, семінарі кафедри механіки Львівського нац. ун-ту ім. І. Франка під керівництвом члена-кореспондента НАН України О.Є. Андрейківа.

Публікації. За основними результатами дисертаційних досліджень автором опубліковано 15 друкованих праць [1–15], з них 9 статей [1–9] у фахових виданнях, 2 статті у міжнародних виданнях з першого та другого квартилів [2,5] та 6 [10–15] тез доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота загальним обсягом 171 сторінки складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 38 рисунків, висновків, двох додатків та переліку використаних джерел із 193 найменувань. Обсяг основного тексту становить 150 сторінок.

РОЗДІЛ 1

АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

У розділі наведено огляд наукових праць за темою дисертації, проаналізовано основні методи побудови розв'язків задач теорії пружності й термопружності для областей з кутовими точками, простежено проблемні та невирішені питання й окреслено підгрунття для досліджень, виконаних у дисертаційній роботі.

1.1. Актуальність розробки методів аналітичного визначення напруженого стану тіл, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями

Сучасні тренди розвитку науки і техніки значною мірою сприяють певному переосмисленню постановок та підходів до розв'язування задач, які звикли вважати класичними чи еталонними [181, 182]. У контексті теоретичної та прикладної механіки, особливу увагу привертають задачі для тіл з концентраторами напружень, наявність яких зумовлена дефектами структури матеріалу або ж особливостями геометрії досліджуваних тіл. До задач такого класу належать задачі теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками, найпростішими з яких є призматичні тіла, наприклад, прямокутного поперечного перерізу, конусо- та клино-подібні елементи тощо. Відтак є важливим дослідження впливу розмірних ефектів досліджуваних тіл, що дозволяє більш точно оцінити їх реологічну відповідь на прикладені комплексні навантаження і, як наслідок, прогнозувати міцнісні та несучі здатності механізмів та конструкцій [43, 72, 73].

Окрім розрахунків на міцність, потреба в ефективних розв'язках задач теорії пружності та термопружності для скінченних та напівнескінченних (у сенсі загальноприйнятих моделей [37, 64, 90]) тіл, зокрема, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями (прямокутна область, півсмуга, чверть площини, суцільні та порожнисті циліндри скінченної довжини та напівнескінченні циліндри,

паралелепіпед, квадрант тощо) спричинена їх використанням щодо розв'язування задач відтворення термосилового навантаження [50, 148], а також оптимального керування термонапруженим станом тіл відповідної геометрії [25, 26]. Слід відразу зауважити, що застосування побудованих розв'язків задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками саме в останніх зазначених напрямках загострює потребу точного задоволення заданих межових умов на усіх гранях досліджуваних тіл, а відтак, – побудови шуканих розв'язків у формі явних аналітичних виразів напружень та переміщень через задані фактори термосилових навантажень.

1.2. Основні підходи до розв'язування задач теорії пружності й термопружності для тіл з кутовими точками межі

Попри довготривалу історію розроблення методів аналізу задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками [37, 57, 156], багато з них залишаються нерозв'язаними, або ж побудовані розв'язки є недостатньо ефективними для сучасних теоретичних та прикладних застосувань [27]. Основною складністю при побудові точних аналітичних розв'язків таких задач полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях досліджуваного тіла. Остання обставина суттєво обмежує можливості побудови систем власних функцій для відокремлення змінних у ключових рівняннях, сформульованих для визначальних функцій (часто у цій якості використовують гармонічні чи бігармонічні потенціальні функції). Це обумовлює, зокрема, нестійкість побудованих розв'язків у кутових точках межі та інші ускладнення теоретичного та обчислювального характеру. Як наслідок, застосування відомих методів побудови аналітичних розв'язків крайових задач для обмежених тіл із кутовими точками у загальному випадку термосилових навантажень пов'язане [36, 39] зі зведенням до нескінченного обчислювального процесу (розв'язування безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь, побудова рекурентних та ітераційних ланцюжків тощо), який на практиці обривають з

досягненням потрібної точності у задоволенні крайових умов за точного задоволення вихідних рівнянь, або ж наближеного задоволення основних рівнянь за точного задоволення межових умов [53, 54, 153, 154].

При розв'язанні задач теорії пружності широко застосовують методи, пов'язані зі зведенням вихідної задачі до бігармонічних рівнянь на деякі допоміжні функції [4, 9, 54, 63, 68, 69, 90 та ін.]. Один з піонерських методів побудови розв'язку, наприклад, плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області, з використанням бігармонічної функції напружень запропонував А. Mesnager у 1901 р. [158]. Ідея цього методу полягала у побудові бігармонічної функції напружень у вигляді поліномів довільного натурального степеня. Для побудови розв'язків конкретних практично важливих задач цей метод використано, зокрема, в роботах С. П. Тимошенка та Дж. Гуд'єра [90], а також П. Ф. Папковича [68].

Інший підхід, який запропонували Ribière [165] та Filon [124], дає можливість застосувати для відшукування невідомих компонент тензора напружень уздовж довгих сторін прямокутника звичайні ряди Фур'є за класичною тригонометричною системою. Очевидно, що попри точне задоволення крайових умов на довгих сторонах прямокутної області за такого підходу межові умови на торцях прямокутника задовольняються у сенсі головних вектора та моменту напружень згідно з принципом Сен-Венана. Такий підхід використано для розв'язання задач теорії пружності для прямокутника у роботах [115, 159, 174]. Проте, попри легкість у використанні такого подання функції напружень, за допомогою цього методу вдається задовольнити крайові умови лише у випадку прямокутника із парою протилежних сторін набагато довших за дві інші за нехтування задоволенням крайових умов на коротших торцях, межові умови на яких, за такої конфігурації прямокутника, слабо впливають на напружений стан в області на достатній відстані від торців.

У першій половині минулого століття Dougall [119, 120], Filon [125], Папкович [66] і Fadle [123] запропонували та розвинули метод побудови аналітичних розв'язків задач теорії пружності для областей з кутовими точками, названий методом однорідних розв'язків [52]. Цей метод є розвиненням класичного

методу відокремлення змінних для задач з несамостряженим оператором. Він полягає у побудові таких розв'язків задачі, які, задовольняючи однорідні крайові умови на гранях тіла, паралельних до однієї з координатних поверхонь, дають змогу задовольнити крайові умови, задані на гранях, що є перпендикулярними у сенсі розглядуваної метрики до перших [52, 75, 78, 79, 85, 102, 130, 150, 167 та ін.]. Ретельні огляди досліджень, присвячених розвитку цього методу, зроблені, зокрема, у роботах [37, 39, 41, 53, 77, 76, 156]. Отримані однорідні функції є здебільшого комплексно-значними, що суттєво ускладнює процедуру знаходження їх власних значень [58] з відповідних трансцендентних характеристичних рівнянь. Практичне використання стандартного алгоритму методу однорідних розв'язків пов'язане з певними ускладненнями, оскільки побудовані власні функції виявляються не ортогональними [55]. Натомість використовують властивості так званої узагальненої ортогональності, збіжність рядів з використанням якої є не достатньо вивченою [65 – 67, 150], зокрема, для випадків розривних навантажень [129, 131]. Ці теоретичні питання розглянуті, зокрема, в роботах [10, 11, 32 – 35, 94, 135, 139, 145].

При розв'язуванні задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками ефективно використовують метод перехресної суперпозиції, засади якого формулював Lamé [149] при розв'язанні задачі про пружну рівновагу прямокутного паралелепіпеда, а для прямокутника одним з перших його розвинув Mathieu [152]. Для дослідження статичного та динамічного напруженого стану у прямокутній області цей метод використовувався і розвивався, зокрема, в роботах [1 – 3, 37 – 39, 46, 112, 136, 155, 189 – 192]. Основною ідеєю цього методу є використання задля розв'язку бігармонічної задачі у двовимірному формулюванні як суми двох розвинень у звичайні ряди Фур'є за повними тригонометричними системами функцій від планарних координат (у випадку прямокутного паралелепіпеда) чи сум рядів Фур'є за осьюовою та Бесселя–Діні за радіальною координатами для осесиметричної задачі у скінченному циліндрі. Ці розвинення, вочевидь, задовольняють бігармонічне рівняння в області і володіють необхідною функціональною свободою для задоволення крайових умов на усіх сторонах досліджуваного тіла. Задоволення побудованими у такий спосіб компонентами тензора напружень відповідних крайово-

вих умов призводить до необхідності розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яка виражає залежність між коефіцієнтами вказаних рядів та прикладеними до поверхні циліндра зовнішніми зусиллями. Ефективність аналізу такої системи залежить від якості асимптотичного згасання зі збільшенням номера коефіцієнтів розвинень зовнішніх зусиль у відповідні ряди. У випадку кусково-сталих навантажень, коефіцієнти таких розвинень згасають доволі повільно, що значно ускладнює розв'язування як вказаних нескінченних систем, так і задачі пружності загалом. Проте для багатьох випадків для вказаних безмежних систем доведена регулярність [46], тому можна обмежитись певною кількістю складових у цих системах, а вплив решти складових оцінити асимптотично [32, 37]. У працях Мелешка, Токового і Барбера [59, 91, 157] було розвинуто алгоритм удосконаленої редукції для розв'язування безмежних систем такого класу у випадку осесиметричної задачі теорії пружності та термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини.

В роботах [33, 34] було досліджено зв'язок між результатами застосування методу однорідних розв'язків та методу суперпозиції стосовно задач теорії пружності у прямокутній області.

Розвинуто також низку напіваналітичних та числових методів побудови розв'язків задач теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками межі. Зокрема використовують методи спеціальних поліномів (класичних, Якобі, Гегенбауера та ін.) у поєднанні з варіаційними принципами (наприклад, методом Гальоркіна). Спеціальні ортогональні поліноми, названі самозрівноваженими, при розв'язання задач термопружності для областей з кутовими точками були вперше застосовані Норвай [137, 138], а потім використані також у роботах [30, 31, 45, 80]. Застосування такого методу дає змогу точно задовольнити межові умови в рамках поставлених задач, у той час як вихідні рівняння задоволені наближено. Крім того, широко використовують числові методи із застосуванням апарату R-функцій [81 – 84], метод Рітца [51, 151, 166], принцип мінімальних робіт [90, 156], інші варіаційні методи [9, 61, 69], методи скінченних елементів та скінченних різниць [29, 74, 109, 156]. Для розв'язання плоских задач механіки у прямокутнику застосовуються

також методи комплексних потенціалів [7, 63] та інші методи [47, 48, 70, 71, 86, 126, 127, 132].

За допомогою цих та інших подібних методів було наближено або чисельно розв'язано низку основних плоских задач теорії пружності та термопружності для прямокутної області [114, 117, 128, 133, 164, 171, 172], осесиметричних задач суцільного та порожнистого циліндрів скінченої довжини [5, 6, 12 – 14, 44, 56, 59, 60, 87, 88, 95, 118, 121, 162, 163, 169, 173, 184, 188 та ін.], просторових задач для прямокутного паралелепіпеда [89, 96 – 99, 113, 116, 122, 134, 140 – 144, 146, 160, 161, 168, 170, 175, 183 та ін.].

Попри наявність великої кількості напрацьованих методів розв'язання задач теорії пружності й термопружності для обмежених тіл з кутовими точками, суттєво бракує аналітичних підходів, які забезпечували б розв'язки таких задач у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження, заданих на усіх гранях досліджуваних тіл, та були б ефективними у використанні для різних способів термосилових навантажень. Така необхідність обумовлена, зокрема, потребою розв'язання обернених задач термомеханіки або ж оптимального керування термонапруженим станом [24 – 26, 49, 102, 110, 111]. Це вимагає розробки принципово нового підходу, який забезпечить побудову аналітичної форми розв'язків такого класу задач за точного задоволення усіх межових умов.

1.3. Метод безпосереднього інтегрування

У 80-х роках минулого століття для розв'язування задач оптимізації та керування окремими компонентами напружень квазістатичного термонапруженого стану тіл, які зазнають термосилового впливу, професором В. М. Вігаком (ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів) було запропоновано запровадити визначальну компоненту тензора напружень, яку слід визначити простою операторною залежністю від навантажень. При цьому всі розрахункові формули при оптимізації слід спростити і вивести тільки для визначального напруження, а решту характеристик термонапруженого стану виразити через визначальні напруження за

допомогою простих інтегро-диференціальних співвідношень, які отримано на основі безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги з урахуванням геометрії області, метрики системи координат та заданих крайових умов. Тоді у разі потреби, керування будь-якою компонентою термонапруженого стану, достатньо мати залежність визначальних напружень від факторів впливу.

За такого підходу перевага надається формулюванню крайових задач теорії пружності та термопружності у термінах напружень. Загалом методи розв'язування статичних та квазістатичних задач механіки в напруженнях дають можливість оминати операції диференціювання, характерні при визначенні напружень через переміщення, коли останні не є метою дослідження або замінити операції диференціювання інтегруванням для визначення переміщень через деформації та напруження, що є принциповим для реалізації практичних обчислень. На користь розвитку методів інтегрування рівнянь термопружності в напруженнях вказує і те, що задачі нелінійного деформування, в першу чергу, – пластичності й повзучості, зводяться до базових задач термопружності [8, 15, 104], які вигідно розглядати в напруженнях, оминаючи кожного разу в процесі ітерацій розрахунки переміщень. Зокрема, у [28, 40, 62] розв'язки прямих статичних та динамічних задач теорії пружності й термопружності в напруженнях побудовані без застосування допоміжних потенціальних функцій. Крім того, при постановці квазістатичних задач теорії пружності в напруженнях, принцип Сен-Венана [90] скеровує на подання їх розв'язку у вигляді суперпозиції самозрівноваженої та несамозрівноваженої частин, що спонукає будувати відповідні системи власних функцій на основі ключових рівнянь суцільності. Проте, на заваді цього процесу у випадку обмежених областей з кутовими точками межі стоїть потреба задоволення шуканими напруженнями повного набору межових умов на усіх гранях (сторонах) досліджуваного тіла.

Для подолання цих ускладнень В. М. Вігаком була запропонована наступна схема реалізації методу, який було названо методом безпосереднього (у ранніх роботах – прямого [16, 17, 20]) інтегрування, названого так, оскільки визначення напружень здійснюється безпосередньо інтегруванням ключових рівнянь без застосування потенціальних функцій вищого диференціального порядку:

- з-поміж шуканих компонент тензора напружень деякі вибираються за визначальні, через які, завдяки інтегруванню рівнянь рівноваги, вдається виразити інтегро-диференціальними співвідношеннями решту компонент напружень;
- на основі вихідних рівнянь задач виводяться ключові рівняння для визначальних компонент, а крайові умови для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінюються локальними крайовими та інтегральними умовами для визначальних;
- з отриманої системи ключових рівнянь з відповідними умовами знаходяться визначальні компоненти тензора напружень і підставляються у вирази для решти компонент тензора напружень.

Використання такого підходу має наступні переваги:

- вдається уникнути застосування допоміжних гармонічних чи бігармонічних функцій;
- немає потреби підвищувати порядок диференціювання вихідних рівнянь задач, що є суттєвим полегшенням при чисельній реалізації підходу;
- встановлюються інтегральні умови рівноваги та суцільності для компонент тензора напружень в області їх визначення, які служать критерієм перевірки розрахунків напруженого стану у відповідних областях з використанням даного та інших методів;
- метод є фізично прозорим і дозволяє отримати розв'язки задач теорії пружності й термопружності у вигляді функціональних залежностей від факторів навантаження, які, зокрема, у випадку обмежених областей з кутовими точками точно задовольняють крайові умови на межі області. При цьому, фактично, за єдиною схемою можна будувати розв'язки широкого кола задач механіки.

Широкі можливості методу безпосереднього інтегрування вповні проявилися при побудові аналітичних та аналітично-числових розв'язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних та функційно-градієнтних тіл [42, 176, 178 – 180]. Метод знайшов своє застосування у роботах [19, 100, 101, 103, 177] задля розробки в рамках методу умовних пластичних деформацій ефективної методики

побудови розв'язків плоскої і осесиметричної задач визначення просторового напруженого стану в елементах конструкцій, що моделюються плоским шаром з локальними полями залишкових технологічних деформацій.

1.4. Актуалізація досліджень дисертаційної роботи

Не зважаючи на доволі чітку алгоритмічну схему реалізації методу безпосереднього інтегрування, найперший крок у реалізації цього алгоритму виявився «найтоншим» елементом методу, оскільки саме для вибору визначального напруження, від якого залежить ефективність реалізації усєї схеми розв'язування, не було сформульовано чіткого критерію чи підходу. У простих одно- та двовимірних задачах певною «підказкою» щодо вибору визначальних функцій були ключові рівняння суцільності в напруженнях: які функції входять у ці рівняння, ті і вибиралися за визначальні. Втім, для складніших задач такий підхід виявився не цілком ефективним, відтак напрацьовано низку різних варіантів вибору визначальних напружень у рамках однієї і тієї ж задачі [182].

Крім того, наприклад, для плоскої задачі теорії пружності та термопружності в напруженнях для прямокутної області [18], вибір одного з нормальних напружень, хоч і дозволив понизити порядок ключового диференціального рівняння у порівнянні з використовуваним у методі Менаже, за іншою координатою порядок залишився незмінним.

Відтак у рамках досліджень даної дисертаційної роботи було поставлено наукове завдання щодо розроблення уніфікованого підходу щодо вибору визначальних функцій. У результаті запропоновано автентичний підхід щодо уведення визначальних функцій, які у роботі названо функціями Вігака. У такий спосіб вдалося суттєво понизити порядок ключових рівнянь, скоротити кількість межових умов для визначальних функцій, уперше побудувати методом безпосереднього інтегрування розв'язки осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для суцільного та порожнистого циліндрів скінченної довжини, а також просторових задач такого класу для прямокутного паралелепіпеда.

РОЗДІЛ 2

ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У другому розділі описано методика використання функції Вігака для знаходження розв'язків плоских задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для прямокутної області. З використанням цієї методики вихідні задачі зведено до ключових інтегро-диференціальних рівнянь з відповідними інтегральними умовами для знаходження функції Вігака. Наведено аналітично-числовий алгоритм розв'язування отриманих ключових рівнянь та виконано числовий аналіз ефективності розв'язків для типових випадків теплового і силового навантаження прямокутника.

Основні результати розділу викладено у публікаціях [20 – 23, 92, 107, 147, 187].

2.1. Функція Вігака для визначення температурних напружень в прямокутній області

У випадку плоскої квазістатичної задачі термопружності для однорідної ізотропної прямокутної області $D_R = \{(x, y) \in [-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y]\}$ при відсутності масових сил для визначення компонент тензора напружень маємо [64, 90] два рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

однорідні крайові умови

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm a_x} = \sigma_{xy}|_{x=\pm a_x} = \sigma_{yy}|_{y=\pm a_y} = \sigma_{xy}|_{y=\pm a_y} = 0 \quad (2.2)$$

та рівняння суцільності в напруженнях

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\Delta T, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Тут σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – шукані напруження в розмірності температури, тобто напруження природної розмірності, віднесені до величини $E\alpha_T$ для випадку узагальненого плоского напруженого стану або $E\alpha_T/(1-\nu)$ – для плоскої деформації; $T = T(x, y)$ – квазістатичне температурне поле; E – модуль Юнга; α_T , ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона.

При виведенні рівняння суцільності (2.3) використано рівняння рівноваги (2.1) для вилучення дотичних напружень. Як показано в роботі [18], диференціювання рівнянь (2.1) є обґрунтованим лише для необмежених областей. Для обмежених областей коректне диференціювання рівнянь рівноваги вимагає накладання додаткових умов, а саме виконання рівнянь (2.1) на межі області. У випадку прямокутної області це приводить до умов

$$\left. \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right|_{x=\pm a_x} = \left. \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right|_{y=\pm a_y} = 0, \quad (2.4)$$

які еквівалентні умовам (2.2) для дотичних напружень.

Продиференціюємо перше рівняння рівноваги (2.1) по x , а друге – по y

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

і введемо нову функцію $\mathcal{V}_R = \mathcal{V}_R(x, y)$, наступним чином записавши отримані рівняння:

$$\mathcal{V}_R = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.5)$$

Інтегрування рівнянь (2.5) з межовими умовами (2.2), (2.4) дає змогу виразити компоненти тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} та σ_{xy} через єдину функцію \mathcal{V}_R за допомогою співвідношень

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R |x - \xi| d\xi,$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\eta d\xi, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R |y - \eta| d\eta.$$

Визначальну функцію \mathcal{V}_R назвемо функцією Вігака. Вона узагальнює подання для компонент тензора напружень, отриманих у результаті застосування методу безпосереднього інтегрування, запропонованого і розвинутого професором, доктором фізико-математичних наук В.М. Вігаком [16, 17, 20]. Рівняння рівноваги (2.1) при цьому задовольняються тотожно, а вісім межових умов (2.2) для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінюються чотирма інтегральними умовами для однієї функції \mathcal{V}_R :

$$\int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R dx = \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_R dx = \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R dy = \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R dy = 0. \quad (2.7)$$

З урахуванням (2.6) рівняння суцільності (2.3) набуває вигляду

$$2\mathcal{V}_R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R |y - \eta| d\eta = -\Delta T. \quad (2.8)$$

Отримане інтегро-диференціальне рівняння (2.8) є рівнянням другого порядку по обох координатах із відповідною кількістю інтегральних умов (2.7). Таким чином, у випадку плоскої задачі термопружності для прямокутної області подання компонент тензора напружень (2.6) через функцію Вігака \mathcal{V}_R дає змогу знизити порядок ключового рівняння суцільності та кількість межових умов удвічі, порівняно з класичним рівнянням для бігармонійної функції Airy [90].

2.2. Відокремлення змінних в інтегро-диференціальному рівнянні суцільності та числова верифікація алгоритму

Для побудови розв'язку інтегро-диференціального рівняння суцільності (2.8) із однорідними інтегральними умовами (2.7) зручно використати розвинення функції \mathcal{V}_R та температурного поля в ряди за повними ортогональними системами функцій $1, t, \cos \gamma_{t,n} t, \sin \lambda_{t,n} t, t = \{x, y\}$, де $\gamma_{t,n} = \pi n / a_t, \lambda_{t,n}$ – додатні корені трансцендентного рівняння $\operatorname{tg} \lambda_t a_t = \lambda_t a_t, t = x, y, (n = 1 \dots \infty)$. Ця система функцій була запропонована в роботах [18] і успішно застосована для побудови розв'язку плоских задач термопружності [187] та пружності [92, 182] для прямокутної області методом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги.

З використанням запропонованих систем функцій, розвинемо температурне поле в подвійний ряд

$$\begin{aligned}
 T(x, y) = & T^{00} + xT^{10} + yT^{01} + xyT^{11} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(T_n^{c0} + yT_n^{c1}) \cos \gamma_{x,n} x + (T_n^{s0} + yT_n^{s1}) \sin \lambda_{x,n} x \right] + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(T_m^{0c} + xT_m^{1c}) \cos \gamma_{y,m} y + (T_m^{0s} + xT_m^{1s}) \sin \lambda_{y,m} y \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[T_{nm}^{cc} \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + T_{nm}^{cs} \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y + \right. \\
 & \left. + T_{nm}^{sc} \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + T_{nm}^{ss} \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right],
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

коефіцієнти якого визначаємо з умов ортогональності функцій розвинення, а розв'язок рівняння (2.8) шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$\mathcal{V}_R = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}^{(i)}, \tag{2.10}$$

де складові

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) \cos \gamma_{x,n} x + Y_{s,n}^{(2i-1)}(y) \sin \lambda_{x,n} x \right), \\ \mathcal{V}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_{c,m}^{(2i)}(x) \cos \gamma_{y,m} y + X_{s,m}^{(2i)}(x) \sin \lambda_{y,m} y \right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

є розв'язками наступних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}2\mathcal{V}^{(2i-1)} + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(2i-1)}}{\partial y^2} |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(2i-1)}}{\partial x^2} |y - \eta| d\eta = \\ = \frac{\partial^2 g^{(2i-1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g^{(2i-2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \delta_{2i-1,1},\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}2\mathcal{V}^{(2i)} + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(2i)}}{\partial y^2} |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 \mathcal{V}^{(2i)}}{\partial x^2} |y - \eta| d\eta = \\ = \frac{\partial^2 g^{(2i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g^{(2i-1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \delta_{2i,2}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Тут уведено позначення

$$g^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) \frac{\cos \gamma_{x,n} a_x}{\gamma_{x,n}^2} + x Y_{s,n}^{(2i-1)}(y) \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x}{\lambda_{x,n}} \right), \quad (2.14)$$

$$g^{(2i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_{c,m}^{(2i)}(x) \frac{\cos \gamma_{y,m} a_y}{\gamma_{y,m}^2} + y X_{s,m}^{(2i)}(x) \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y}{\lambda_{y,m}} \right) \quad (2.15)$$

для лінійних по x та y складових, що з'являються після підстановки (2.9) – (2.11) в рівняння суцільності (2.8) за рахунок інтегральних операторів.

Зауважимо, що згідно з поданням (2.11) члени функціонального ряду $\mathcal{V}^{(2i-1)}$ тотожно задовольняють інтегральні умови (2.7) по координаті x , а $\mathcal{V}^{(2i)}$ – по координаті y . Невідомі коефіцієнти розвинення рядів (2.11) повинні задовольняти інтегральні умови

$$\int_{-a_x}^{a_x} X_j^{(2i)}(x) dx = \int_{-a_x}^{a_x} x X_j^{(2i)}(x) dx = \int_{-a_y}^{a_y} Y_j^{(2i-1)}(y) dy = \int_{-a_y}^{a_y} y Y_j^{(2i-1)}(y) dy = 0, \quad j = c, s. \quad (2.16)$$

Використовуюючи повноту відповідних функцій розвинення та інтегральні умови (2.16), формули (2.14), (2.15) подамо в еквівалентному вигляді

$$g^{(2i-1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\tilde{\alpha}_{cc,m}^{(2i-1)} + x \tilde{\alpha}_{sc,m}^{(2i-1)} \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(\tilde{\alpha}_{cs,m}^{(2i-1)} + x \tilde{\alpha}_{ss,m}^{(2i-1)} \right) \sin \lambda_{y,m} y \right],$$

$$g^{(2i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\alpha_{cc,n}^{(2i)} + y \alpha_{cs,n}^{(2i)} \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(\alpha_{sc,n}^{(2i)} + y \alpha_{ss,n}^{(2i)} \right) \sin \lambda_{x,n} x \right].$$
(2.17)

Тоді в рівняннях (2.12) та (2.13) стає можливим відокремлення змінних. Як наслідок, для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення отримаємо наступні інтегро-диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2 Y_{c,n}^{(2i-1)}(y)}{dy^2} - 2\gamma_{x,n}^2 Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) + \frac{\gamma_{x,n}^4}{2} \int_{-a_y}^{a_y} Y_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) |y - \eta| d\eta =$$

$$= -\gamma_{x,n}^4 \left\{ \alpha_{cc,n}^{(2i-2)} + y \alpha_{cs,n}^{(2i-2)} + \left[T_n^{c0} + y T_n^{c1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(T_{nm}^{cc} \cos \gamma_{y,m} y + T_{nm}^{cs} \sin \lambda_{y,m} y \right) \right] \delta_{2i-1,1} \right\}.$$
(2.18)

Для решти коефіцієнтів отримуємо аналогічні рівняння, які легко знайти з (2.18) циклічною заміною змінних та власних значень. Розв'язки цих рівнянь, що задовольняють інтегральні умови (2.16), знаходимо у вигляді:

$$Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) = A_{cc,n}^{(2i-1)} f_c(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{cs,n}^{(2i-1)} f_s(\gamma_{x,n}, a_y, y) +$$

$$+ \gamma_{x,n}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{y,m}^2 T_{nm}^{cc}}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \cos \gamma_{y,m} y + \frac{\lambda_{y,m}^2 T_{nm}^{cs}}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \sin \lambda_{y,m} y \right] \delta_{2i-1,1},$$
(2.19)

де

$$A_{cc,n}^{(2i-1)} = \alpha_{cc,n}^{(2i-2)} + \delta_{2i-1,1} \left(T_n^{c0} + \gamma_{x,n}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} T_{nm}^{cc} \right),$$

$$A_{cs,n}^{(2i-1)} = \alpha_{cs,n}^{(2i-2)} + \delta_{2i-1,1} \left(T_n^{c1} + \gamma_{x,n}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{y,m} \cos \lambda_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} T_{nm}^{cs} \right),$$
(2.20)

$$f_c(p, h, t) = p^2 \frac{(ph \operatorname{ch} ph - \operatorname{sh} ph) \operatorname{ch} pt - pt \operatorname{sh} ph \operatorname{sh} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph},$$

$$f_s(p, h, t) = \frac{\left((2 + p^2 h^2) p \operatorname{sh} ph - 2 p^2 h \operatorname{ch} ph \right) \operatorname{sh} pt + (\operatorname{sh} ph - p h \operatorname{ch} ph) p^2 t \operatorname{ch} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph - p h}.$$

Враховуючи, що функції $f_j(p, h, t)$ ($j = c, s$) задовольняють однорідні інтегральні умови (2.16), розвинемо їх у відповідні ряди

$$f_c(p, h, t) = - \sum_q \frac{q^2 p^2 \Delta_c(p, q, h)}{(p^2 + q^2)^2} \cos qt, \quad f_s(p, h, t) = - \sum_q \frac{q^2 p^2 \Delta_s(p, q, h)}{(q^2 + p^2)^2} \sin qt,$$

$$\text{де } \Delta_c(p, q, h) = \frac{4p}{h} \frac{\operatorname{sh}^2 ph \cos qh}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph}, \quad \Delta_s(p, q, h) = \frac{4q \cos qh (\operatorname{sh} ph - p h \operatorname{ch} ph)^2}{p h \sin^2 qh \operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph - p h}.$$

Тоді формули (2.19) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{cc,n}^{(2i-1)} \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 T_{nm}^{cc} \delta_{2i-1,1} \right) \cos \gamma_{y,m} y - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{cs,n}^{(2i-1)} \Delta_s(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 T_{nm}^{cs} \delta_{2i-1,1} \right) \sin \lambda_{y,m} y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тепер, використовуючи формули (2.14), (2.17), (2.20), (2.21), знайдемо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів $\tilde{\alpha}$ та α , наприклад:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{cc,m}^{(2i-1)} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \cos \gamma_{x,n} a_x}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{cc,n}^{(2i-1)} \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 T_{nm}^{cc} \delta_{2i-1,1} \right), \\ \tilde{\alpha}_{sc,m}^{(2i-1)} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n} \cos \lambda_{x,n} a_x}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{sc,n}^{(2i-1)} \Delta_c(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \lambda_{x,n}^2 T_{nm}^{cs} \delta_{2i-1,1} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Решта коефіцієнтів отримуються циклічною заміною власних значень і координат.

Таким чином, функція Вігака \mathcal{V}_R в декартовій системі координат остаточно визначається за формулою

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_R = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mathcal{V}_{nm}^{cc} \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{nm}^{cs} \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y + \right. \\ & \left. + \mathcal{V}_{nm}^{sc} \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{nm}^{ss} \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{nm}^{cc} &= \frac{-\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{cc,n} \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{cc,m} \Delta_c(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - (\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2) T_{nm}^{cc} \right), \\
\mathcal{V}_{nm}^{cs} &= \frac{-\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{cs,n} \Delta_c(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{cs,m} \Delta_s(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - (\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2) T_{nm}^{cs} \right), \\
\mathcal{V}_{nm}^{sc} &= \frac{-\lambda_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{sc,n} \Delta_s(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{sc,m} \Delta_c(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - (\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2) T_{nm}^{sc} \right), \\
\mathcal{V}_{nm}^{ss} &= \frac{-\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{ss,n} \Delta_s(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{ss,m} \Delta_s(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - (\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2) T_{nm}^{ss} \right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Тут $\{A_{jk,n}, \tilde{A}_{jk,m}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{A_{jk,n}^{(2i-1)}, \tilde{A}_{jk,m}^{(2i)}\}$, ($j, k = c, s$), а члени функціональних рядів визначаються за рекурентними формулами (2.20), (2.22).

Просумувавши (2.12) та (2.13), отримаємо рівняння (2.8), яке буде задовольнятися з точністю до другої похідної лінійного по координаті x або y доданка (2.14) або (2.15). В роботі [187] показано, що зі збільшенням кількості членів ряду (2.10) ці доданки прямують до нуля. Тому, якщо складові $\mathcal{V}^{(2i-1)}$ та $\mathcal{V}^{(2i)}$ є розв'язками рівнянь (2.12), (2.13), то інтегро-диференціальне рівняння (2.8) можна задовольнити з довільною, наперед заданою точністю.

Числова верифікація алгоритму. Для випадку, коли нестационарне температурне поле задається формулою

$$T(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2a_x} \cos \frac{\pi y}{2a_y},$$

в Таблиці 2.1 наведено результати розрахунку нормальних напружень σ_{xx} , отримані на основі методу Гальоркіна σ_{xx}^{Γ} , методу суперпозиції σ_{xx}^S [37] та описаного вище методу при $y = a_y$.

Таблиця 2.1

x/a_x	$a_x = a_y$			$a_x = 2a_y$		
	σ_{xx}^Γ	σ_{xx}^S	σ_{xx}^V	σ_{xx}^Γ	σ_{xx}^S	σ_{xx}^V
0.00	0.63	0.64	0.62990	0.71	0.72	0.71743
0.25	0.55	0.56	0.55245	0.65	0.65	0.65297
0.50	0.36	0.35	0.34399	0.46	0.46	0.46262
0.75	0.13	0.09	0.09243	0.18	0.17	0.17597
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

На рис. 2.1 наведено числові результати розрахунку тих же напружень у прямокутній пластині, зумовлених температурним полем

$$T(x, y) = T_0 F_1(y), \quad T_0 = \text{const}, \quad F_1(y) = (1 - y^2/a_y^2).$$

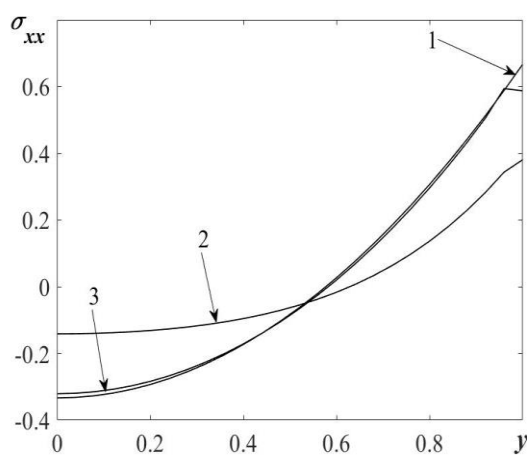


Рис. 2.1

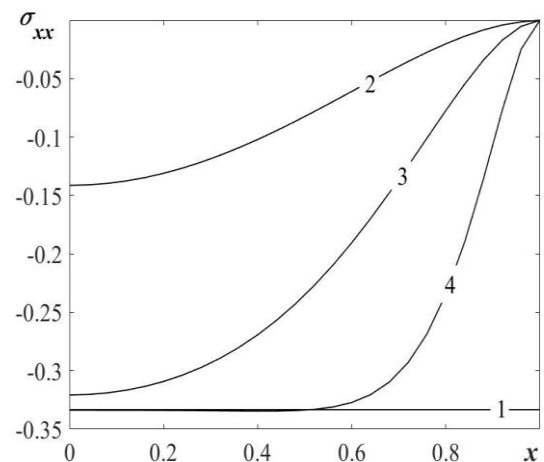


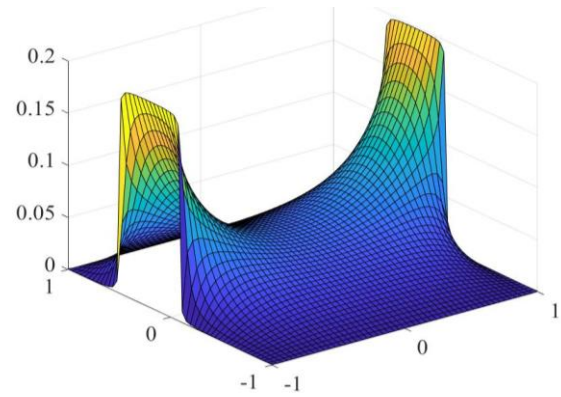
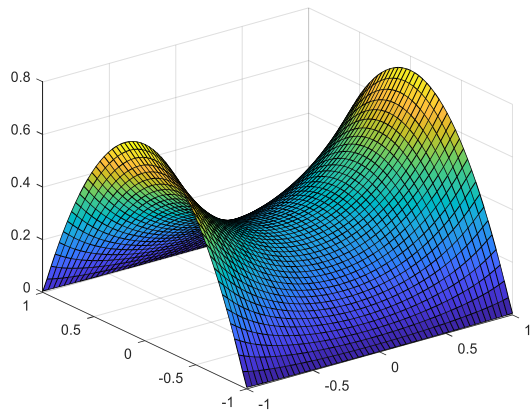
Рис. 2.2

Кривою 1 на цьому рисунку зображено напруження, розраховані за формулою

$$\sigma_{xx} = -T(y) + \frac{1}{2a_y} \int_{-a_y}^{a_y} T(y) dy + \frac{3y}{2a_y^3} \int_{-a_y}^{a_y} yT(y) dy$$

для необмеженого шару. Кривими 2 та 3 зображено нормальні напруження σ_{xx} в центральній перетині $x=0$ при $a_x = a_y$ та $a_x = 2a_y$, відповідно.

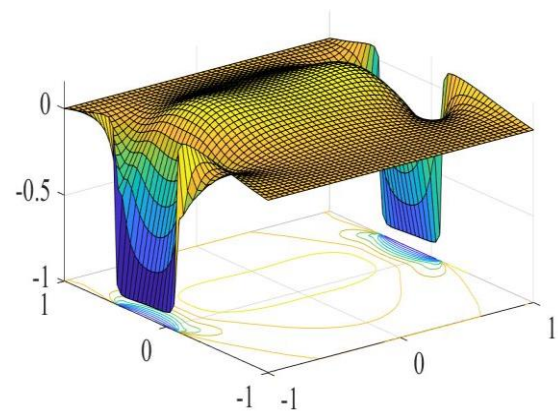
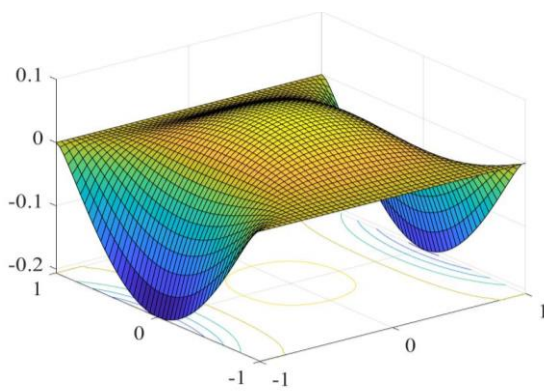
Розподіл нормальних напружень σ_{xx} в перетині $y=0$ зображено на рис. 2.2 кривими 2, 3, 4 відповідно для $a_x = a_y$, $a_x = 2a_y$ та $a_x = 5a_y$. Аналіз отриманих результатів ще раз підтверджує виконання принципу Сен-Венана.



а)

б)

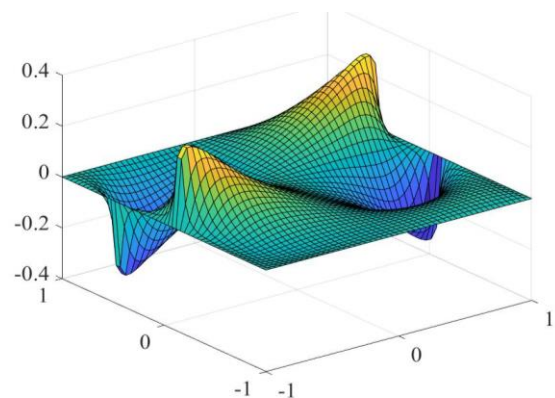
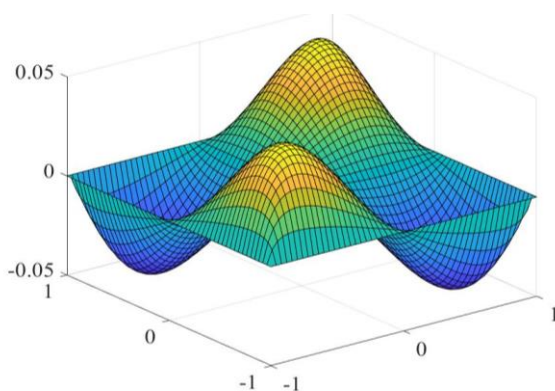
Рис. 2.3



а)

б)

Рис. 2.4



а)

б)

Рис. 2.5

Досліджено вплив профілів розподілу температурного поля на термо-напружений стан, зокрема, поведінку напружень у кутових точках, у квадраті за

теплового навантаження $T(\pm a_x, y) = T_0 F_1(y)$ (рис. 2.3а) і $T(\pm a_x, y) = T_0 F_2(y)$ (рис. 2.3б), де $F_2(y) = 2a_y(\text{H}(y - c_y) - \text{H}(y - d_y)) / (3c_y(d_y - c_y))$, $\text{H}(y)$ – функція Гевісайда, при $c_y = -0.5$, $d_y = 0.1$. На рис. 2.4 показано напруження σ_{yy} / T_0 , а на рис. 2.5 – розподіл напруження σ_{xy} / T_0 . Не зважаючи на те, що середньо-інтегральна температура на сторонах $x = \pm a_x$ є однаковою для обох випадків навантаження, спостерігаємо суттєву відмінність у локальному характері термонапружень.

2.3. Задача теорії пружності для прямокутної області

Розглянемо задачу теорії пружності в напруженнях для прямокутної області D_R , що полягає у відшуванні трьох компонент тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} та σ_{xy} , які задовольняють два рівняння рівноваги (2.1), однорідне рівняння суцільності

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

та вісім крайових умов:

$$\sigma_{xx} \Big|_{x=\pm a_x} = -p_x^\pm(y), \quad (2.26)$$

$$\sigma_{xy} \Big|_{x=\pm a_x} = \tau_{xy}^\pm(y), \quad (2.27)$$

$$\sigma_{yy} \Big|_{y=\pm a_y} = -p_y^\pm(x), \quad (2.28)$$

$$\sigma_{xy} \Big|_{y=\pm a_y} = \tau_{yx}^\pm(x). \quad (2.29)$$

Тут p_s^\pm , τ_{sp}^\pm , ($s, p = x, y$) – задані функції своїх аргументів.

Рівняння рівноваги (2.1) повинні виконуватися і на межі області, тому отримуємо ще чотири додаткові крайові умови для похідних від нормальних напружень

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_{x=\pm a_x} = -\frac{d\tau_{xy}^\pm(y)}{dy}, \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right|_{y=\pm a_y} = -\frac{d\tau_{yx}^{\pm}(x)}{dx}. \quad (2.31)$$

Введемо функцію Вігака за формулами (2.5), інтегрування яких розіб'ємо на три окремі крайові задачі.

Перша задача полягає в інтегруванні диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\mathcal{V}_R \quad (2.32)$$

з межовими умовами (2.27), (2.29).

Друга задача стосується інтегрування диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \mathcal{V}_R \quad (2.33)$$

з межовими умовами (2.26), (2.30).

Третя задача сформульована для диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \mathcal{V}_R \quad (2.34)$$

з межовими умовами (2.28), (2.31).

Розглянемо першу крайову задачу і проінтегруємо рівняння (2.32) з урахуванням (2.27) по x :

$$2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{d\tau_{xy}^+(y)}{dy} + \frac{d\tau_{xy}^-(y)}{dy} - \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi. \quad (2.35)$$

Тоді крайові умови (2.27) для дотичних напружень при $x = \pm a_x$ будуть виконуватися, якщо функція Вігака задовольняє інтегральну умову

$$\int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R dx = - \left(\frac{d\tau_{xy}^+(y)}{dy} - \frac{d\tau_{xy}^-(y)}{dy} \right). \quad (2.36)$$

Якщо проінтегрувати (2.32) по y , то з урахуванням (2.29) отримаємо рівність

$$2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \frac{d\tau_{yx}^+(x)}{dx} + \frac{d\tau_{xy}^-(x)}{dx} - \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta, \quad (2.37)$$

а виконання крайових умов (2.29) дає другу інтегральну умову на функцію Вігака

$$\int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R dy = - \left(\frac{d\tau_{yx}^+(x)}{dx} - \frac{d\tau_{yx}^-(x)}{dx} \right). \quad (2.38)$$

Шляхом інтегрування по x умови (2.38) та по y умови (2.36) отримуємо рівність

$$\begin{aligned} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R dx dy &= -\tau_{yx}^+(a_x) + \tau_{yx}^+(-a_x) + \tau_{yx}^-(a_x) - \tau_{yx}^-(-a_x) = \\ &= -\tau_{xy}^+(a_y) + \tau_{xy}^+(-a_y) + \tau_{xy}^-(a_y) - \tau_{xy}^-(-a_y), \end{aligned} \quad (2.39)$$

яка буде виконуватися, якщо задані дотичні зусилля задовольняють умови погодження (парності) дотичних напружень в кутових точках прямокутної області D_R , а саме

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^+(a_y) &= \tau_{yx}^+(a_x) = \tau_+, & \tau_{xy}^+(-a_y) &= \tau_{yx}^-(a_x) = \tau_-, \\ \tau_{xy}^-(a_y) &= \tau_{yx}^-(a_x) = \tau_-, & \tau_{xy}^-(-a_y) &= \tau_{yx}^+(-a_x) = \tau_+. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Тоді в результаті інтегрування по x виразу (2.37) або по y виразу (2.35) отримуємо формулу для визначення дотичних напружень через функцію Вігака \mathcal{V}_R :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y) + \tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x) \right) - \frac{1}{4} \left(\tau_+^+ + \tau_+^- + \tau_-^+ + \tau_-^- \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Всі межові умови для дотичних напружень будуть виконуватися при умові погодження заданих зовнішніх дотичних навантажень в кутових точках (2.40) та інтегральних умов (2.36) та (2.38) для функції \mathcal{V}_R .

Крім додаткової умови (2.39) на функцію Вігака, ще дві можемо отримати, домноживши (2.36) на y , а (2.38) – на x та проінтегрувавши отримані рівності у відповідних межах, а саме:

$$\begin{aligned} & \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \eta \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta = -2y \left(\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y) \right) + \\ & + \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(\eta) - \tau_{xy}^-(\eta) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta + a_y \left(\tau_+^+ - \tau_-^+ - \tau_+^- + \tau_-^- \right), \\ & \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \xi \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi dy = -2x \left(\tau_{yx}^+(x) - \tau_{yx}^-(x) \right) + \\ & + \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(\xi) - \tau_{yx}^-(\xi) \right) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi + a_x \left(\tau_+^+ - \tau_-^+ - \tau_+^- + \tau_-^- \right). \end{aligned}$$

При $x = \pm a_x$ та $y = \pm a_y$ звідси випливають дві додаткові інтегральні умови:

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R dx dy = \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y) \right) dy - a_y \left(\tau_+^+ + \tau_-^+ - \tau_+^- - \tau_-^- \right), \quad (2.42)$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} x \mathcal{V}_R dx dy = \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x) - \tau_{yx}^-(x) \right) dx - a_x \left(\tau_+^+ + \tau_+^- - \tau_-^+ - \tau_-^- \right). \quad (2.43)$$

Розв'язки сформульованих другої та третьої крайових задач знайдемо шляхом подвійного інтегрування по відповідним координатам відповідно рівнянь (2.33) та (2.34). В результаті отримаємо вирази для нормальних напружень через функцію Вігака \mathcal{V}_R :

$$2\sigma_{xx} = -p_x^+(y) - p_x^-(y) - (x - a_x) \frac{d\tau_{xy}^+(y)}{dy} - (x + a_x) \frac{d\tau_{xy}^-(y)}{dy} + \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_R |x - \xi| d\xi, \quad (2.44)$$

$$2\sigma_{yy} = -p_y^+(x) - p_y^-(x) - (y - a_y) \frac{d\tau_{yx}^+(x)}{dx} - (y + a_y) \frac{d\tau_{yx}^-(x)}{dx} + \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R |y - \eta| d\eta. \quad (2.45)$$

Тоді межові умови для нормальних напружень (2.26) та (2.28) будуть задовольнятися, якщо виконуються наступні інтегральні умови для функції \mathcal{V}_R :

$$\int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_R dx = p_x^+(y) - p_x^-(y) - a_x \left(\frac{d\tau_{xy}^+(y)}{dy} + \frac{d\tau_{xy}^-(y)}{dy} \right), \quad (2.46)$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R dy = p_y^+(x) - p_y^-(x) - a_y \left(\frac{d\tau_{yx}^+(x)}{dx} + \frac{d\tau_{yx}^-(x)}{dx} \right). \quad (2.47)$$

Шляхом інтегрування (2.46) по dy та по ydy у відповідних межах знайдемо наступні співвідношення та додаткові інтегральні умови, а саме:

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta = \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(\eta) - p_x^-(\eta)) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta -$$

$$-2a_x (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) + a_x (\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- + \tau_-^-),$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \eta \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta = \int_{-a_y}^{a_y} \eta (p_x^+(\eta) - p_x^-(\eta)) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta -$$

$$-2a_x y (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) + a_x a_y (\tau_+^+ - \tau_-^+ + \tau_+^- - \tau_-^-) + a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(\eta) + \tau_{xy}^-(\eta)) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta.$$

Звідси при $y = \pm a_y$ випливають умови

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_R dx dy = \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy - a_x (\tau_+^+ - \tau_-^+ + \tau_+^- - \tau_-^-), \quad (2.48)$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} xy \mathcal{V}_R dx dy = \int_{-a_y}^{a_y} y (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy + a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) dy -$$

$$-a_x a_y (\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- + \tau_-^-). \quad (2.49)$$

Шляхом інтегрування (2.47) по dx та по $x dx$ у відповідних межах знайдемо наступні співвідношення та додаткові інтегральні умови, а саме:

$$\begin{aligned}
\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(x - \xi) dy d\xi &= \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(\xi) - p_y^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi - \\
&\quad - 2a_y (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) + a_y (\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- + \tau_-^-), \\
\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \xi \mathcal{V}_R \operatorname{sgn}(x - \xi) dy d\xi &= \int_{-a_x}^{a_x} \xi (p_y^+(\xi) - p_y^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi - \\
-2a_y x (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(\xi) + \tau_{yx}^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi &+ a_y a_x (\tau_+^+ - \tau_+^- + \tau_-^+ - \tau_-^-),
\end{aligned}$$

звідки при $x = \pm a_x$ отримаємо

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R dy dx = \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx - a_y (\tau_+^+ - \tau_+^- + \tau_-^+ - \tau_-^-), \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y x \mathcal{V}_R dy dx &= \int_{-a_x}^{a_x} x (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) dx - \\
&\quad - a_y a_x (\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- + \tau_-^-). \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Порівнюючи (2.42) та (2.50) знаходимо першу інтегральну умову для зовнішніх навантажень:

$$\int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx = \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y)) dy. \quad (2.52)$$

Порівняння (2.43) та (2.48) дає другу інтегральну умову для зовнішніх навантажень:

$$\int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy = \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) - \tau_{yx}^-(x)) dx. \quad (2.53)$$

Нарешті, порівняння (2.49) та (2.51) приводить до третьої інтегральної умови:

$$\int_{-a_y}^{a_y} y (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy + a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) dy =$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} x(p_y^+(x) - p_y^-(x))dx + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x))dx. \quad (2.54)$$

Таким чином, у випадку неоднорідних межових умов (2.26) – (2.29) отримуємо подання (2.41), (2.44), (2.45) для компонент тензора напружень через одну функцію Вігака \mathcal{V}_R , а вісім умов (2.26) – (2.29) еквівалентно замінені на чотири інтегральні умови (2.36), (2.38), (2.46) та (2.47). Крім того, в процесі інтегрування лише рівнянь рівноваги знайдено інтегральні умови рівноваги (2.52) – (2.54), яким повинні задовольняти зовнішні навантаження, а також умови погодження (2.40) заданих дотичних зусиль в кутових точках прямокутної області D_R .

2.4. Елементарна та саморівноважена складові функції Вігака

Як і випадку температурної задачі для подальших досліджень буде використовуватися повна система функцій $1, t, \cos \gamma_{t,n}t, \sin \lambda_{t,n}t$, де $\gamma_{t,n} = \frac{\pi n}{a_t}$, $\lambda_{t,n}$ – додатні корені трансцендентних рівнянь $\operatorname{tg} \lambda_t a_t = \lambda_t a_t$, $(n = \overline{1, \infty})$, $t = x, y$. Розвинемо задані зовнішні навантаження у ряди по уведених системах функцій, виділяючи елементарну та саморівноважену частини

$$p_x^\pm(y) = p_x^{\pm 0}(y) + p_x^{\pm e}(y), \quad p_x^{\pm 0}(y) = \frac{1}{2a_y} \int_{-a_y}^{a_y} p_x^\pm(y)dy + \frac{3y}{2a_y^3} \int_{-a_y}^{a_y} yp_x^\pm(y)dy, \quad (2.55)$$

$$p_x^{\pm e}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (p_{xc,m}^\pm \cos \gamma_{y,m}y + p_{xs,m}^\pm \sin \lambda_{y,m}y),$$

$$p_y^\pm(x) = p_y^{\pm 0}(x) + p_y^{\pm e}(x), \quad p_y^{\pm 0}(x) = \frac{1}{2a_x} \int_{-a_x}^{a_x} p_y^\pm(x)dx + \frac{3x}{2a_x^3} \int_{-a_x}^{a_x} xp_y^\pm(x)dx, \quad (2.56)$$

$$p_y^{\pm e}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{yc,n}^\pm \cos \gamma_{x,n}x + p_{ys,n}^\pm \sin \lambda_{x,n}x),$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{\pm}(y) &= \frac{1}{2}(\tau_{xy}^{\pm}(a_y) + \tau_{xy}^{\pm}(-a_y)) + \frac{y}{2a_y}(\tau_{xy}^{\pm}(a_y) - \tau_{xy}^{\pm}(-a_y)) + \\ &+ \frac{3}{4a_y^2}(y^2 - a_y^2) \left(\tau_{xy}^{\pm}(a_y) + \tau_{xy}^{\pm}(-a_y) - \frac{1}{a_y} \int_{-a_y}^{a_y} \tau_{xy}^{\pm}(y) dy \right) + \tau_{xy}^{\pm e}(y), \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\tau_{xy}^{\pm e}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{xy c, m}^{\pm} \frac{\sin \gamma_{y, m} y}{\gamma_{y, m}} + \tau_{xy s, m}^{\pm} \frac{\cos \lambda_{y, m} a_y - \cos \lambda_{y, m} y}{\lambda_{y, m}} \right),$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^{\pm}(x) &= \frac{1}{2}(\tau_{yx}^{\pm}(a_x) + \tau_{yx}^{\pm}(-a_x)) + \frac{x}{2a_x}(\tau_{yx}^{\pm}(a_x) - \tau_{yx}^{\pm}(-a_x)) + \\ &+ \frac{3}{4a_x^2}(x^2 - a_x^2) \left(\tau_{yx}^{\pm}(a_x) + \tau_{yx}^{\pm}(-a_x) - \frac{1}{a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \tau_{yx}^{\pm}(x) dx \right) + \tau_{yx}^{\pm e}(x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\tau_{yx}^{\pm e}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{yx c, n}^{\pm} \frac{\sin \gamma_{x, n} x}{\gamma_{x, n}} + \tau_{yx s, n}^{\pm} \frac{\cos \lambda_{x, n} a_x - \cos \lambda_{x, n} x}{\lambda_{x, n}} \right).$$

Шукану функцію Вігака \mathcal{V}_R та відповідні їй напруження шукатимемо в такому ж вигляді, а саме

$$\mathcal{V}_R = \mathcal{V}^0 + \mathcal{V}^e + \tilde{\mathcal{V}}, \quad (2.59)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{\mathcal{V}}, \quad i, j = x, y. \quad (2.60)$$

Незважаючи на те, що функція \mathcal{V}_R є шуканою, проте її елементарна та самоврівноважена частини є відомими функціями в силу отриманих вище інтегральних умов, яким вона повинна задовольняти. Елементарна складова функції Вігака матиме наступний вигляд:

$$\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 x + \mathcal{V}_2 y + \mathcal{V}_3 xy. \quad (2.61)$$

Тут

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{4a_x a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_R dx dy \stackrel{(2.39)}{=} \frac{1}{4a_x a_y} [-\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- - \tau_-^-], \quad (2.62)$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{3}{4a_x^3 a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} x \mathcal{V}_R dx dy \stackrel{(2.43), (2.48)}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4a_x^3 a_y} \left[\int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy - a_x (\tau_+^+ - \tau_-^+ + \tau_+^- - \tau_-^-) \right] = \\
&= \frac{3}{4a_x^3 a_y} \left[-a_x (\tau_+^+ + \tau_+^- - \tau_-^+ - \tau_-^-) + \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) - \tau_{yx}^-(x)) dx \right], \tag{2.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_2 &= \frac{3}{4a_y^3 a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_R dx dy \stackrel{(2.42), (2.50)}{=} \\
&= \frac{3}{4a_y^3 a_x} \left[\int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx - a_y (\tau_+^+ - \tau_-^+ + \tau_+^- - \tau_-^-) \right] = \\
&= \frac{3}{4a_y^3 a_x} \left[-a_y (\tau_+^+ + \tau_-^+ - \tau_+^- - \tau_-^-) + \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y)) dy \right], \tag{2.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_3 &= \frac{9}{4a_x^3 a_y^3} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} xy \mathcal{V}_R dx dy \stackrel{(2.49), (2.51)}{=} \\
&= \frac{9}{4a_x^3 a_y^3} \left[\int_{-a_y}^{a_y} y (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy + a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) dy - \right. \\
&\quad \left. - a_x a_y (t_+^+ + t_-^+ + t_+^- + t_-^-) \right] = \frac{9}{4a_x^3 a_y^3} \left[-a_x a_y (t_+^+ + t_-^+ + t_+^- + t_-^-) + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-a_x}^{a_x} x (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) dx \right], \tag{2.65}
\end{aligned}$$

а номери формул у дужках над знаком рівності означають ті формули, які були використані при виведенні виразів, які йдуть після знаку рівності.

Після підстановки знайдених компонент тензора напружень за формулами (2.41), (2.44), (2.45), зумовлених лише елементарними складовими зовнішніх навантажень і функції Вігака, тобто складовими з верхнім індексом «0», в рівняння суцільності (2.25) отримаємо, що

$$\mathcal{V}_i = 0, \quad i = \overline{0,3} \tag{2.66}$$

або

$$\tau_+^+ - \tau_-^+ - \tau_+^- + \tau_-^- = 0,$$

$$a_x \tau_y = a_x (\tau_+^+ + \tau_+^- - \tau_-^+ - \tau_-^-) = \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) - \tau_{yx}^-(x)) dx = \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy, \quad (2.67)$$

$$a_y \tau_x = a_y (\tau_+^+ + \tau_-^+ - \tau_+^- - \tau_-^-) = \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y)) dy = \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx,$$

$$\begin{aligned} a_x a_y \tau &= a_x a_y (\tau_+^+ + \tau_-^+ + \tau_+^- + \tau_-^-) = \\ &= \int_{-a_y}^{a_y} y (p_x^+(y) - p_x^-(y)) dy + a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) dy = \\ &= \int_{-a_x}^{a_x} x (p_y^+(x) - p_y^-(x)) dx + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) dx. \end{aligned}$$

Таким чином, елементарна складова $\mathcal{V}^0 \equiv 0$, а компоненти тензора напружень з урахуванням отриманих інтегральних умов рівноваги (2.52) – (2.54) та умов суцільності (2.67) визначаються за формулами

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{a_x + x}{2a_x} p_x^{+0}(y) - \frac{a_x - x}{2a_x} p_x^{-0}(y), \quad (2.68)$$

$$\sigma_{yy}^0 = -\frac{a_y + y}{2a_y} p_y^{+0}(x) - \frac{a_y - y}{2a_y} p_y^{-0}(x), \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^0 &= \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{\tau_x x}{a_x} + \frac{\tau_y y}{a_y} \right) + \frac{3(x^2 - a_x^2)}{8a_x^3} \left[a_x \tau - \int_{a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x) + \tau_{yx}^-(x)) dx \right] + \\ &+ \frac{3(y^2 - a_y^2)}{8a_y^3} \left[a_y \tau - \int_{a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y) + \tau_{xy}^-(y)) dy \right]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Знайдений розв'язок (2.68) – (2.70), залежний лише від елементарних зусиль, співпадає із розв'язком побудованим в роботах [18, 27] з використанням методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги, але тут знайдений за допомогою

єдиного подання компонент тензора напружень (2.41), (2.44), (2.45) через функцію Вігака.

Для побудови розв'язку, залежного від самих лише самоврівноважених зусиль, насамперед зауважимо, що ці зусилля тотожно задовольняють інтегральні умови рівноваги (2.52) – (2.54) та умови суцільності (2.67), а саме

$$\int_{-a_i}^{a_i} p_j^{\pm e}(i) di = \int_{-a_i}^{a_i} p_j^{\pm e}(i) idi = \int_{-a_i}^{a_i} \tau_{ji}^{\pm e}(i) di = \tau_{ij}^{\pm e}(\pm a_j) = 0, \quad i, j = x, y, \quad i \neq j. \quad (2.71)$$

Розвинувши функцію \mathcal{V}_R в ряди по відповідних координатах, використовуючи отримані інтегральні умови (2.36), (2.38), (2.46), (2.47) і вирази (2.55) – (2.58), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^e = & -\frac{1}{2a_x} \left(\frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} - \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} \right) - \frac{1}{2a_y} \left(\frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} - \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} \right) + \\ & + \frac{3x}{2a_x^3} \left(p_x^{+e}(y) - p_x^{-e}(y) - a_x \left(\frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} \right) \right) + \\ & + \frac{3y}{2a_y^3} \left(p_y^{+e}(x) - p_y^{-e}(x) - a_y \left(\frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Компоненти тензора напружень, що відповідають зовнішнім зусиллям і складовій функції Вігака з верхнім індексом “e”, знаходимо за формулами (2.41), (2.44) та (2.45). Ці компоненти виражатимуться через самоврівноважені зовнішні навантаження наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^e = & \frac{3(x^2 - a_x^2)}{4a_x^3} \left[a_x (\tau_{xy}^{+e}(y) + \tau_{xy}^{-e}(y)) - \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^{+e}(\eta) - p_x^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta \right] + \\ & + \frac{(a_y + y)}{2a_y} \tau_{yx}^{+e}(x) + \frac{(a_y - y)}{2a_y} \tau_{yx}^{-e}(x) + \frac{(a_x + x)}{2a_x} \tau_{xy}^{+e}(y) + \frac{(a_x - x)}{2a_x} \tau_{xy}^{-e}(y) + \\ & + \frac{3(y^2 - a_y^2)}{4a_y^3} \left[a_y (\tau_{yx}^{+e}(x) + \tau_{yx}^{-e}(x)) - \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^{+e}(\xi) - p_y^{-e}(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^e = & -\frac{(x+a_x)^2(2a_x-x)}{4a_x^3} p_x^{+e}(y) - \frac{(x-a_x)^2(2a_x+x)}{4a_x^3} p_x^{-e}(y) - \\
& -\frac{(x-a_x)^2}{4a_x^2} \left((x+a_x) \frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + (x-a_x) \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} \right) - \\
& -\frac{1}{4a_y} \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^{+e}(\xi) - \tau_{yx}^{-e}(\xi)) \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi - \\
& -\frac{3y}{4a_y^3} \left[a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^{+e}(\xi) + \tau_{yx}^{-e}(\xi)) \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi + \right. \\
& \left. + \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^{+e}(\xi) - p_y^{-e}(\xi)) |x-\xi| d\xi \right], \tag{2.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^e = & -\frac{(y+a_y)^2(2a_y-y)}{4a_y^3} p_y^{+e}(x) - \frac{(y-a_y)^2(2a_y+y)}{4a_y^3} p_y^{-e}(x) - \\
& -\frac{(y-a_y)^2}{4a_y^2} \left((y+a_y) \frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + (y-a_y) \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} \right) - \\
& -\frac{1}{4a_x} \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^{+e}(\eta) - \tau_{xy}^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(y-\eta) d\eta - \\
& -\frac{3x}{4a_x^3} \left[a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^{+e}(\eta) + \tau_{xy}^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(y-\eta) d\eta - \right. \\
& \left. - \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^{+e}(\eta) - p_x^{-e}(\eta)) |y-\eta| d\eta \right]. \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Шукана складова $\tilde{\nu}$ функції Вігака, що задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\nu} dx = \int_{-a_x}^{a_x} x \tilde{\nu} dx = \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\nu} dy = \int_{-a_y}^{a_y} y \tilde{\nu} dy = 0, \tag{2.76}$$

породжує напруження, які визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\mathcal{V}} |x - \xi| d\xi, & \sigma_{yy}^{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\mathcal{V}} |y - \eta| d\eta, \\ \sigma_{xy}^{\mathcal{V}} &= -\frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\mathcal{V}} \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\eta d\xi.\end{aligned}\tag{2.77}$$

2.5. Побудова розв'язку інтегро-диференціального рівняння суцільності та його числова верифікація

Введення функції Вігака \mathcal{V}_R за формулами (2.41), (2.44) та (2.45) для плоскої задачі теорії пружності у прямокутній області D_R дозволяє точно задовольнити рівняння рівноваги (2.1), межові умови (2.26) – (2.29) та звести вихідну задачу до розв'язання інтегро-диференціального рівняння суцільності для функції $\tilde{\mathcal{V}}$

$$\begin{aligned}& 2\tilde{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial y^2} |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}}{\partial x^2} |y - \eta| d\eta = \\ &= -\frac{3x}{a_x^3} (p_x^{+e}(y) - p_x^{-e}(y)) + \frac{3x + a_x}{a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + \frac{3x - a_x}{a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} + \\ &+ \frac{d^2}{dy^2} \left\{ \frac{(2a_x - x)(x + a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{+e}(y) + \frac{(2a_x + x)(x - a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{-e}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + a_x)(x - a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + \frac{(x - a_x)(x + a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} \right\} - \\ &- \frac{3y}{a_y^3} (p_y^{+e}(x) - p_y^{-e}(x)) + \frac{3y + a_y}{a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + \frac{3y - a_y}{a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} + \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{(2a_y - y)(y + a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{+e}(x) + \frac{(2a_y + y)(y - a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{-e}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y + a_y)(y - a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + \frac{(y - a_y)(y + a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} \right\}.\end{aligned}\tag{2.78}$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді аналогічного до (2.10) функціонального ряду

$$\tilde{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{V}}^{(i)}, \quad (2.79)$$

де складові

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) \cos \gamma_{x,n} x + Y_{s,n}^{(2i-1)}(y) \sin \lambda_{x,n} x \right), \\ \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_{c,m}^{(2i)}(x) \cos \gamma_{y,m} y + X_{s,m}^{(2i)}(x) \sin \lambda_{y,m} y \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

є розв'язками наступних рівнянь

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)} + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}}{\partial y^2} |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}}{\partial x^2} |y - \eta| d\eta &= \frac{\partial^2 g^{(2i-1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g^{(2i-2)}}{\partial x^2} + \\ &+ \left[-\frac{3y}{a_y^3} (p_y^{+e}(x) - p_y^{-e}(x)) + \frac{3y + a_y}{a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + \frac{3y - a_y}{a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} + \right. \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{(2a_y - y)(y + a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{+e}(x) + \frac{(2a_y + y)(y - a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{-e}(x) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{(y + a_y)(y - a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{+e}(x)}{dx} + \frac{(y - a_y)(y + a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\tau_{yx}^{-e}(x)}{dx} \right\} \right] \delta_{2i-1,1}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathcal{V}}^{(2i)} + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}}{\partial y^2} |x - \xi| d\xi + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}}{\partial x^2} |y - \eta| d\eta &= \frac{\partial^2 g^{(2i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g^{(2i-1)}}{\partial y^2} + \\ &+ \left[-\frac{3x}{a_x^3} (p_x^{+e}(y) - p_x^{-e}(y)) + \frac{3x + a_x}{a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + \frac{3x - a_x}{a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} + \right. \\ &+ \frac{d^2}{dy^2} \left\{ \frac{(2a_x - x)(x + a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{+e}(y) + \frac{(2a_x + x)(x - a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{-e}(y) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{(x + a_x)(x - a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{+e}(y)}{dy} + \frac{(x - a_x)(x + a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tau_{xy}^{-e}(y)}{dy} \right\} \right] \delta_{2i,1}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 g^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) \frac{\cos \gamma_{x,n} a_x}{\gamma_{x,n}^2} + x Y_{s,n}^{(2i-1)}(y) \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x}{\lambda_{x,n}} \right) = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\tilde{\alpha}_{cc,m}^{(2i-1)} + x \tilde{\alpha}_{sc,m}^{(2i-1)} \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(\tilde{\alpha}_{cs,m}^{(2i-1)} + x \tilde{\alpha}_{ss,m}^{(2i-1)} \right) \sin \lambda_{y,m} y \right], \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_{c,m}^{(2i)}(x) \frac{\cos \gamma_{y,m} a_y}{\gamma_{y,m}^2} + y X_{s,m}^{(2i)}(x) \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y}{\lambda_{y,m}} \right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\alpha_{cc,n}^{(2i)} + y \alpha_{cs,n}^{(2i)} \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(\alpha_{sc,n}^{(2i)} + y \alpha_{ss,n}^{(2i)} \right) \sin \lambda_{x,n} x \right]. \quad (2.84)
 \end{aligned}$$

Подання (2.83), (2.84) та розвинення (2.55) – (2.58) зовнішніх навантажень у відповідні ряди дозволяють відокремити змінні у рівняннях (2.81), (2.82), в результаті якого для визначення невідомих коефіцієнтів у розвиненнях (2.80) отримаємо наступні системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^2 Y_{c,n}^{(2i-1)}(y)}{dy^2} - 2\gamma_{x,n}^2 Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) + \frac{\gamma_{x,n}^4}{2} \int_{-a_y}^{a_y} Y_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) |y - \eta| d\eta = \\
 &= -\gamma_{x,n}^4 \left(\alpha_{cc,n}^{(2i-2)} + y \alpha_{cs,n}^{(2i-2)} \right) + \left\{ \frac{\gamma_{x,n}^4 y^3}{4a_y^3} \left(a_y \left(\tau_{xyc,n}^+ + \tau_{xyc,n}^- \right) - p_{yc,n}^+ + p_{yc,n}^- \right) + \right. \\
 &+ \frac{\gamma_{x,n}^4 y^2}{4a_y} \left(\tau_{xyc,n}^+ - \tau_{xyc,n}^- \right) + \\
 &+ \frac{\gamma_{x,n}^2 y}{4a_y^3} \left(-a_y \left(\gamma_{x,n}^2 a_y^2 - 12 \right) \left(\tau_{xyc,n}^+ + \tau_{xyc,n}^- \right) + 3 \left(4 + \gamma_{x,n}^2 a_y^2 \right) \left(p_{yc,n}^+ - p_{yc,n}^- \right) \right) + \\
 &\left. + \frac{\gamma_{x,n}^2}{4a_y} \left(- \left(\gamma_{x,n}^2 a_y^2 + 4 \right) \left(\tau_{xyc,n}^+ - \tau_{xyc,n}^- \right) + 2\gamma_{x,n}^2 a_y \left(p_{yc,n}^+ + p_{yc,n}^- \right) \right) \right\} \delta_{2i-1,1}. \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

Для $Y_{s,n}^{(2i-1)}(y)$ отримуємо аналогічне рівняння заміною «с» на «s», та γ на λ . Для $X_{c,m}^{(2i)}(x)$, $X_{s,m}^{(2i)}(x)$ відповідні рівняння отримуємо із (2.85) циклічною заміною змінних. Тому надалі всі викладки наведемо лише для рівняння (2.85), розв'язок якого з однорідними інтегральними умовами запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) &= A_{0cc,n}^{(2i-1)} f_{c0}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{2cc,n}^{(2i-1)} f_{c2}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + \\
&+ A_{1cs,n}^{(2i-1)} f_{s1}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{3cs,n}^{(2i-1)} f_{s3}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + \\
&+ \frac{1}{2a_y} (\tau_{yx,c,n}^+ - \tau_{yx,c,n}^-) \delta_{2i-1,1} - \frac{3y}{2a_y^3} (p_{yc,n}^+ - p_{yc,n}^- - a_y (\tau_{yx,c,n}^+ + \tau_{yx,c,n}^-)) \delta_{2i-1,1}, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
A_{0cc,n}^{(2i-1)} &= \frac{1}{2} (p_{yc,n}^+ + p_{yc,n}^-) \delta_{2i-1,1} - \frac{1}{2a_y^3} \alpha_{cc,n}^{(2i-2)}, \quad A_{2cc,n}^{(2i-1)} = \frac{1}{2} (\tau_{yx,c,n}^+ - \tau_{yx,c,n}^-) \delta_{2i-1,1}, \\
A_{1cs,n}^{(2i-1)} &= -\frac{1}{2} (p_{yc,n}^+ - p_{yc,n}^-) \delta_{2i-1,1} - \frac{1}{2a_y^2} \alpha_{cs,n}^{(2i-2)}, \quad (2.87) \\
A_{3cs,n}^{(2i-1)} &= -\frac{1}{2} (\tau_{yx,c,n}^+ + \tau_{yx,c,n}^-) \delta_{2i-1,1} - \frac{1}{2a_y^3} \alpha_{cs,n}^{(2i-2)}, \\
f_{0c}(p, h, t) &= p^2 \frac{(\operatorname{sh} ph - ph \operatorname{ch} ph) \operatorname{ch} pt + pt \operatorname{sh} ph \operatorname{sh} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph}, \\
f_{2c}(p, h, t) &= p \frac{(ph \operatorname{sh} ph - 2 \operatorname{ch} ph) \operatorname{ch} pt - pt \operatorname{ch} ph \operatorname{sh} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph}, \\
f_{1s}(p, h, t) &= p^2 \frac{(ph \operatorname{sh} ph - \operatorname{ch} ph) \operatorname{sh} pt - pt \operatorname{ch} ph \operatorname{ch} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph - ph}, \\
f_{3s}(p, h, t) &= p \frac{(2 \operatorname{sh} ph - ph \operatorname{ch} ph) \operatorname{sh} pt + pt \operatorname{sh} ph \operatorname{ch} pt}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph - ph}.
\end{aligned}$$

Оскільки вираз (2.86) задовольняє однорідні інтегральні умови, то як і випадку температурної задачі, можемо записати цей вираз в еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned}
Y_{c,n}^{(2i-1)}(y) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{0cc,n}^{(2i-1)} \Delta_{c0}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + A_{2cc,n}^{(2i-1)} \Delta_{c2}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) \right) \cos(\gamma_{y,m} y) - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{1cs,n}^{(2i-1)} \Delta_{s1}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + A_{3cs,n}^{(2i-1)} \Delta_{s3}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) \right) \sin(\lambda_{y,m} y). \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Тоді на основі формул (2.83), (2.84) знайдемо рекурентні співвідношення для визначення невідомих функцій $\tilde{\alpha}$ та α :

$$\tilde{\alpha}_{cc,m}^{(2i-1)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \cos \gamma_{x,n} a_x}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{0cc,n}^{(2i-1)} \Delta_{c0}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + A_{2cc,n}^{(2i-1)} \Delta_{c2}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) \right),$$

$$\tilde{\alpha}_{sc,m}^{(2i-1)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n} \cos \lambda_{x,n} a_x}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{1cs,n}^{(2i-1)} \Delta_{s1}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + A_{3cs,n}^{(2i-1)} \Delta_{s3}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) \right).$$

Тут

$$\Delta_{c0}(p, q, h) = 4 \cos qh \frac{p}{h} \frac{\text{sh}^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph + ph},$$

$$\Delta_{c2}(p, q, h) = \frac{2 \cos qh}{h} \left(\frac{2ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph + ph} - 3 - \frac{p^2}{q^2} \right),$$

$$\Delta_{s1}(p, q, h) = \frac{2}{qh^3 \cos qh} \left(- \frac{2ph \sinh^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph - ph} + 1 - \frac{p^2}{q^2} \right),$$

$$\Delta_{s3}(p, q, h) = \frac{2}{qh^3 \cos qh} \left(2 \frac{p^2 h^2 - \sinh^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph - ph} - ph \left(3 + \frac{p^2}{q^2} \right) \right).$$

Після знаходження всіх коефіцієнтів шукану функцію Вігака $\tilde{\mathcal{V}}$ можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mathcal{V}_{nm}^{cc} \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{nm}^{cs} \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y + \right. \\ & \left. + \mathcal{V}_{nm}^{sc} \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{nm}^{ss} \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right), \end{aligned} \quad (2.89)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{nm}^{cc} = & - \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left[A_{0cc,n} \Delta_{c0}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{0cc,m} \Delta_{c0}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\ & \left. + A_{2cc,n} \Delta_{c2}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{2cc,m} \Delta_{c2}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{nm}^{cs} = & - \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{1cs,n} \Delta_{s1}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{0cs,m} \Delta_{c0}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\ & \left. + A_{3cs,n} \Delta_{s3}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{2cs,m} \Delta_{c2}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_{nm}^{sc} = -\frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left[A_{0sc,n} \Delta_{c0}(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{1sc,m} \Delta_{s1}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) + \right. \\ \left. + A_{2sc,n} \Delta_{c2}(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{3sc,m} \Delta_{s3}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) \right],$$

$$\mathcal{V}_{nm}^{ss} = -\frac{\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{1ss,n} \Delta_{s1}(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{1ss,m} \Delta_{s1}(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) + \right. \\ \left. + A_{3ss,n} \Delta_{s3}(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{3ss,m} \Delta_{s3}(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) \right].$$

Тут $\{A_{ijk,n}, \tilde{A}_{ijk,m}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{A_{tij,n}^{(2i-1)}, \tilde{A}_{tij,m}^{(2i)}\}$, $t = \overline{0,3}$, $(j,k = c,s)$. Знайдену таким чином функцію $\tilde{\mathcal{V}}$ підставимо в (2.77) і знайдемо відповідні напруження в прямокутній області.

Для верифікації розробленого алгоритму, дослідимо напружений стан у прямокутній області, коли задано лише нормальні навантаження на сторонах $x = \pm a_x$: $p_x^{\pm}(y) = p_0 F_1(y)$.

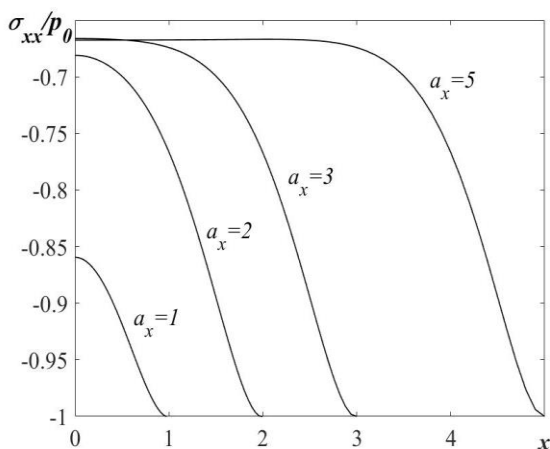


Рис. 2.6

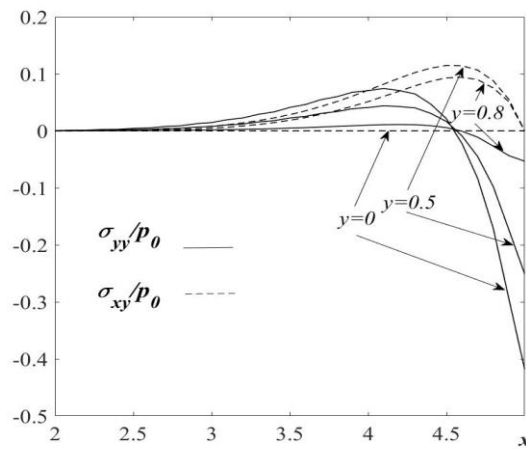
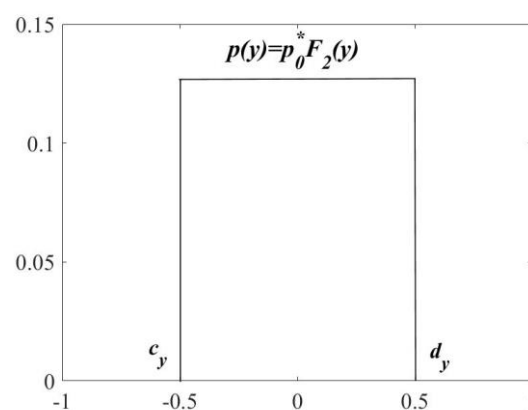
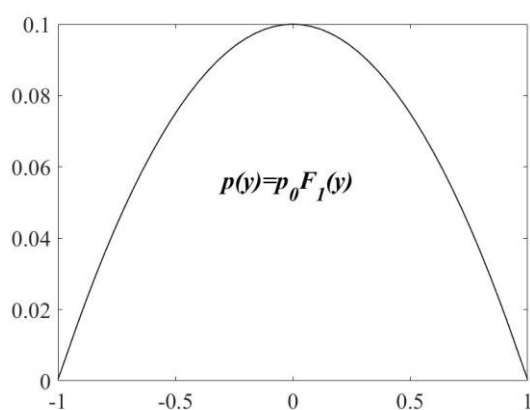


Рис. 2.7

На рис.2.6 показано розподіли нормальних напружень σ_{xx} в перетині $y = 0$ для значень $a_x = 1, 2, 3, 5$. Наведені результати підтверджують принцип Сен-Венана, а саме, що напружений стан в поперечних перерізах достатньо віддалених від межі, можна розраховувати за спрощеними формулами, а в областях, близьких до межі, відчутний її вплив. На цьому рисунку видно, що нормальне напруження σ_{xx} в центральній області прямує до сталого значення $-2/3$, що співпадає з елементарним

розв'язком. На рис. 2.7 показано поведінку напружень σ_{yy} та σ_{xy} для прямокутника зі сторонами $a_x = 5$, $a_y = 1$ в різних поперечних перетинах, а саме при $y = 0, 0.5$ та 0.8 . Дані результати є аналогічними до наведених в роботі [27], де вони отримані методом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги.

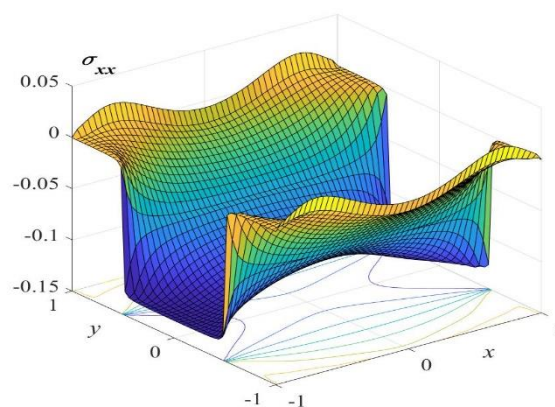
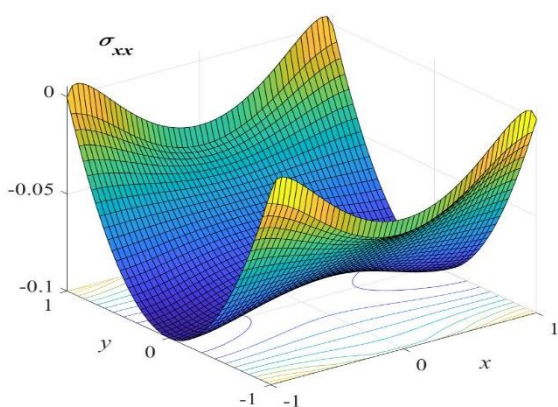
Досліджено також напружені стани квадратної області, зумовлені навантаженнями на сторонах $x = \pm a_x$: $p_x^\pm(y) = p_0 F_1(y)$ (рис. 2.8а) та $p_x^\pm(y) = p_0^* F_2(y)$, де $d_y = -c_y = 0.5$ (рис. 2.8б). Величини p_0 та p_0^* вибрані таким чином, щоб головний вектор заданих зовнішніх зусиль був однаковим в обох випадках.



а)

б)

Рис. 2.8



а)

б)

Рис. 2.9

На рис. 2.9 показано розподіл нормальних напружень σ_{xx} , що відповідає обом випадкам силового навантаження. Видно, що межові умови (2.26) виконуються

точно, а при наближенні до краю $y = \pm a_y$ спостерігається вплив профілю силового навантаження на розподіл σ_{xx} , а саме: у випадку б) вони стають розтягуючими по всій стороні, на відміну від а), коли є зони стиску.

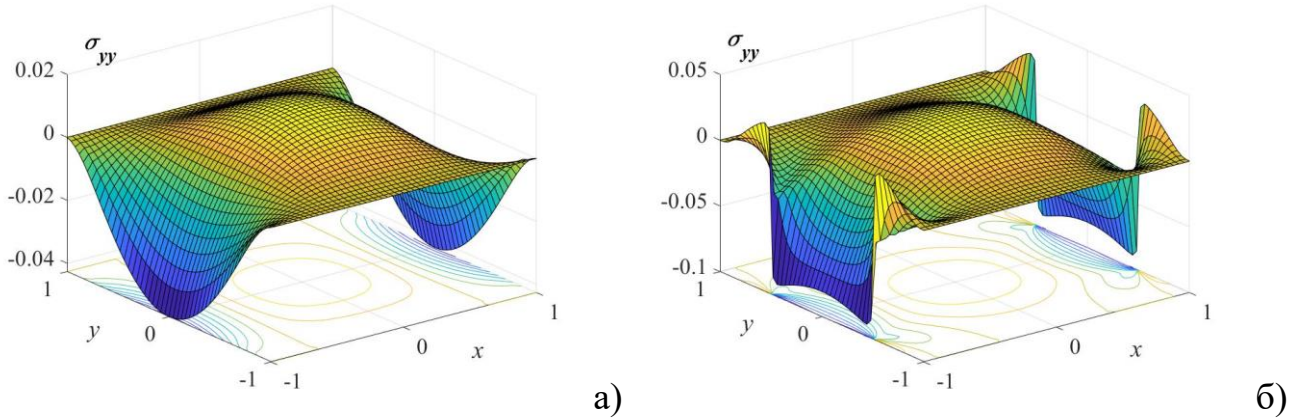


Рис. 2.10

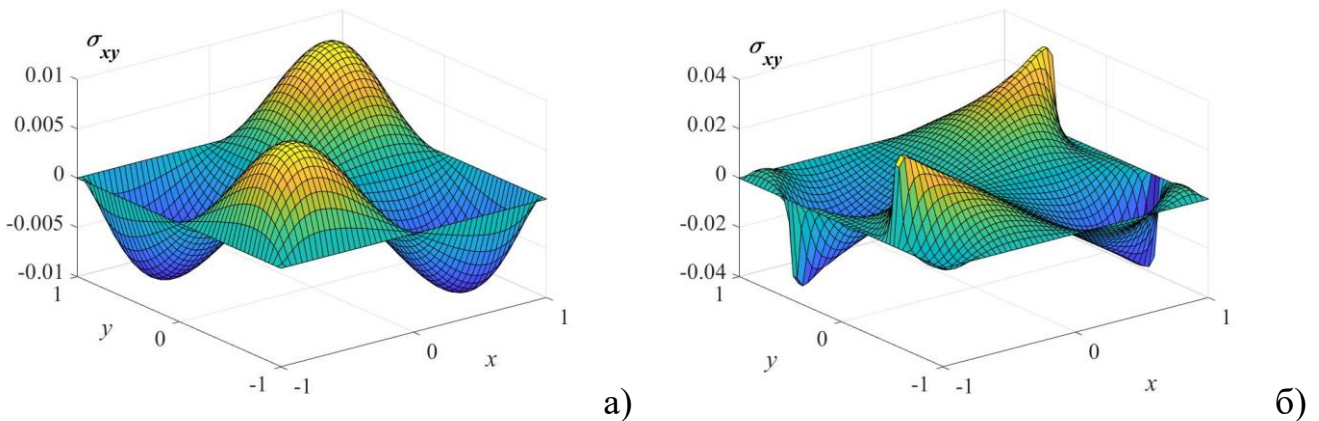


Рис. 2.11

На рис. 2.10 та 2.11 показано розподіли нормальних σ_{yy} та дотичних напружень σ_{xy} для обох випадків навантаження і видно виконання межових умов (2.27) – (2.29). Напруження σ_{yy} якісно має такий же вигляд всередині області, зате з наближенням до межі $x = \pm a_x$ вплив профілю навантаження спричиняє перехід від напружень стиску до розтягу, чого немає у випадку а).

На рис. 2.12 – 2.14 наведено розподіли нормальних напружень σ_{xx} / p_0 на стороні $y = a_y = 1$ відповідно при $a_x = 0.5, 1.0, 3.0$ для навантажень: $p_x^\pm(y) = p_0 F_1(y)$

(криві 1) та $p_x^\pm(y) = p_0^* F_2(y)$, де $d_y = -c_y = 0.5$ (криві 2), $d_y = -c_y = 0.05$ (криві 3), $d_y = 0.5$, $c_y = 0$ (криві 4), $c_y = -0.5$, $d_y = 0$ (криві 5).

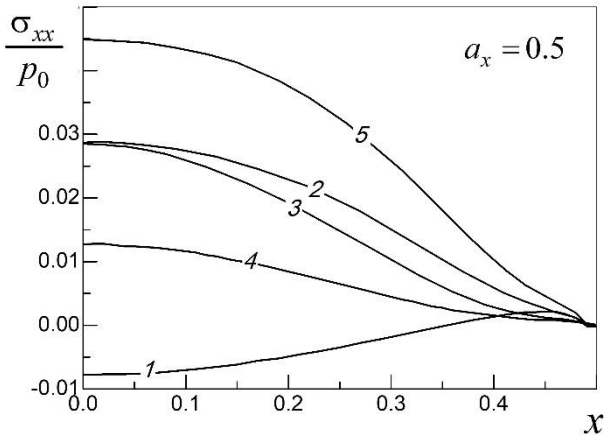


Рис. 2.12

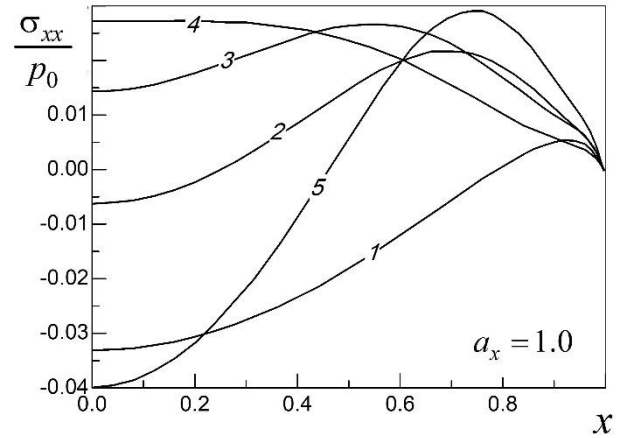


Рис. 2.13

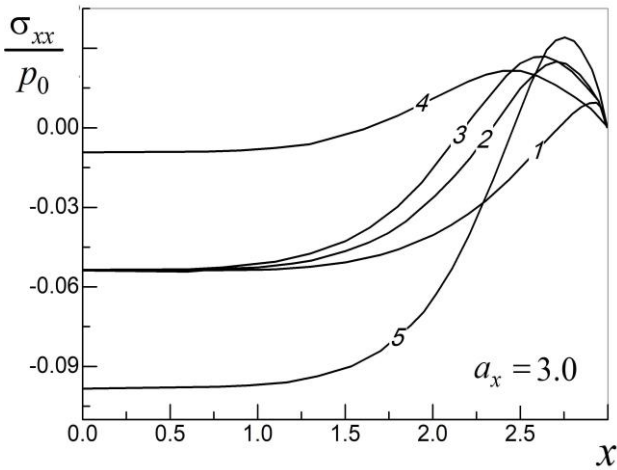


Рис. 2.14

Як і в попередньому прикладі, величина p_0^* вибирається таким чином, щоб незалежно від ширини і положення площадки навантаження, головний вектор заданих зусиль залишався постійною величиною. І якщо для $a_x = 0.5$ напруження є розтягуючими по всій товщині області, то при зростанні a_x і з наближенням до середини прямокутника, ці напруження

стають стискаючими. А вже при $a_x = 3$ вони виходять на постійне значення, таке ж, як і у випадку гладкого навантаження.

2.6. Висновки до розділу

У другому розділі у випадку плоских задач теорій пружності та термопружності в напруженнях для прямокутної області отримано такі основні результати:

- Виведено інтегральні залежності компонент тензора напружень від однієї функції Вігака.
- На їх основі вісім межових умов для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінено на чотири інтегральні умови на введену функцію.
- Отримано інтегральні умови рівноваги та суцільності для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження в кутових точках.
- Вихідну задачу зведено до розв'язання ключового інтегро-диференціального рівняння суцільності для однієї функції Вігака з чотирма інтегральними умовами.
- Запропоновано аналітично-числовий метод розв'язання отриманого інтегро-диференціального рівняння.
- Виконано числовий аналіз напруженого стану прямокутника при різних способах теплового та силового навантаження.

РОЗДІЛ 3

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО ТА ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРІВ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ

Розглянуто осесиметричні задачі теорії пружності та термопружності в напруженнях для циліндра скінченної довжини. Запропоновано метод використання функції Вігака в циліндричній системі координат на основі інтегрування рівнянь рівноваги і одного з рівнянь суцільності. Це дозволило звести вихідні задачі до ключових інтегро-диференціальних рівнянь для знаходження однієї визначальної функції з відповідними інтегральними умовами. Наведено аналітично-числовий алгоритм розв'язування отриманих ключових рівнянь та виконано числовий аналіз ефективності розв'язків для типових випадків теплового і силового навантаження циліндра.

Основні результати досліджень, викладені в третьому розділі, опубліковані в роботах [106, 108, 147, 185, 193].

3.1. Задача термопружності для циліндра скінченної довжини

Розглянемо осесиметричну квазістатичну задачу термопружності для однорідного порожнистого циліндра скінченної довжини, що займає область $D_C = \{(\rho, z) \in [k, 1] \times [-h, h], k \in [0, 1)\}$. У цьому випадку чотири компоненти тензора напружень за відсутності масових сил задовольняють два рівняння рівноваги

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_{rz}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_z) = 0, \quad (3.2)$$

два рівняння суцільності в напруженнях

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)) + (1 + \nu) (\sigma_\theta - \sigma_r) = -\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}, \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) - 2(1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_z - \nu\sigma) = -\rho \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial \rho} \quad (3.4)$$

та однорідні межові умови

$$\sigma_r|_{\rho=k,1} = 0, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{rz}|_{\rho=k,1} = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = 0, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{rz}|_{z=\pm h} = 0. \quad (3.8)$$

Тут σ_r , σ_θ , σ_z та σ_{rz} – напруження, віднесені до величини $\alpha_T E$; $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta$ – сумарні напруження; $T = T(\rho, z)$ – квазістатичне температурне поле; E , α_T та ν – відповідно модуль Юнга, коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона. Із рівнянь рівноваги (3.1), (3.2), які повинні виконуватися і на межі області D_C , отримуємо чотири додаткові умови

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma \right) \Big|_{\rho=k,1} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} = 0, \quad (3.10)$$

еквівалентні межовим умовам (3.6) та (3.8) для дотичних напружень.

Продиференціюємо рівняння рівноваги (3.1) по ρ , а рівняння (3.2) – по z . Порівнюючи отримані вирази для другої мішаної похідної від дотичних напружень, введемо функцію Вігака $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_C(\rho, z)$:

$$\rho \mathcal{V}_C = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\rho \sigma_z) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (\rho \sigma_{rz}). \quad (3.11)$$

Розглянемо (3.11) як три незалежні крайові задачі: з умовами (3.9) для першого рівняння, межовими умовами (3.7), (3.10) для осьових напружень та умовами (3.6), (3.8) для дотичних напружень. У такий спосіб знайдемо наступні вирази

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma = \frac{1}{2} \int_k^1 \rho \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta, \quad (3.12)$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{1}{4\rho} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h \rho \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z-\zeta) \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\zeta d\eta, \quad (3.13)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z-\zeta| d\zeta, \quad (3.14)$$

за допомогою яких компоненти тензора напружень визначено через уведену функцію \mathcal{V}_C , яку назвемо функцією Вігака в циліндричній системі координат. При цьому крайові умови (3.6) – (3.8) еквівалентно замінюються інтегральними умовами

$$\int_k^1 \rho \mathcal{V}_C d\rho = \int_{-h}^h \mathcal{V}_C dz = \int_{-h}^h z \mathcal{V}_C dz = 0. \quad (3.15)$$

Для знаходження співвідношень для радіальних і колових напружень через функцію Вігака, розглянемо перше рівняння суцільності (3.3), яке з урахуванням рівняння рівноваги (3.1) і формул (3.13), (3.14) запишеться у вигляді

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = -\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(T + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z-\zeta| d\zeta \right) + \frac{1+\nu}{2} \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta. \quad (3.16)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (3.12), (3.16) з межовими умовами (3.5) для радіальних напружень σ_r та з урахуванням першої інтегральної умови (3.15), знайдемо:

$$\begin{aligned} \sigma = & -T + \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \eta T d\eta + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z-\zeta| d\zeta + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)} \int_k^1 \eta^3 \mathcal{V}_C d\eta + \\ & + \frac{1+\nu}{2} \left(\int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta + \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta \mathcal{V}_C d\eta \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} 2\rho^2 \sigma_r = & -\int_k^1 \eta T \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta + \frac{2\rho^2-1-k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta T d\eta + \\ & + \frac{\nu}{2} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h \eta \mathcal{V}_C |z-\zeta| \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\zeta d\eta + \\ & + \frac{1-\nu}{4} \left[\int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta + \frac{2\rho^2-1-k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta^3 \mathcal{V}_C d\eta \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1+\nu}{2} \left[\rho^2 \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta \mathcal{V}_C d\eta \right]. \quad (3.18)$$

Таким чином, у випадку однорідного ізотропного циліндра скінченної довжини компоненти тензора напружень визначаються через одну скалярну функцію Вігака \mathcal{V}_C за допомогою виразів (3.13), (3.14), (3.17) та (3.18). Рівняння рівноваги (3.1), (3.2) та перше рівняння суцільності (3.3) при цьому задовольняються тожотою, а вісім межових умов (3.5) – (3.8), задані для різних компонент тензора напружень, еквівалентно замінено трьома інтегральними умовами (3.15).

Зауважимо, що як частковий випадок (при $\mathcal{V}_C \equiv 0$), із цих співвідношень отримується відомий розв'язок одновимірної задачі термопружності для довгого порожнистого циліндра [26]. Ці формули справедливі і для суцільного циліндра ($k=0$), при цьому невизначеності, що виникають при $\rho \rightarrow 0$, розкриваються за правилом Лопітала.

3.2. Відокремлення змінних в інтегро-диференціальному рівнянні суцільності та числові результати

Для визначення невідомої функції $\mathcal{V}_C(\rho, z)$, що задовольняє інтегральні умови (3.15), слід використати рівняння суцільності (3.4), яке з урахуванням формул (3.13), (3.14), (3.17) та (3.18) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{Comp}_2(\mathcal{V}_C, \rho, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{8} \int_k^1 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_C}{\partial z^2} \eta \left(2\rho^2 \ln \frac{\rho}{\eta} - \rho^2 + \eta^2 \right) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ &+ \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z - \zeta| d\zeta + \\ &+ \frac{1}{4(1-k^2)} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \eta^3 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_C}{\partial z^2} d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(1-k^2)} \left(\frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} k^2 \right) \int_k^1 \eta \ln \eta \frac{\partial^2 \mathcal{V}_C}{\partial z^2} d\eta = \\
& = - \frac{1}{2(1-\nu)} \int_k^1 \eta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{1}{1-\nu} \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} - \\
& - \frac{1}{2(1-k^2)} \left(\frac{2\rho^2}{1+\nu} + \frac{1+k^2}{1-\nu} \right) \int_k^1 \eta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d\eta. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Для відшукування розв'язку інтегро-диференціального рівняння суцільності (3.19) методом відокремлення змінних використаємо повні ортогональні системи функцій: за осовою координатою – 1, z , $\cos \gamma_n z$, $\sin \lambda_n z$ ($\gamma_n = \frac{\pi n}{h}$, $\lambda_n > 0$ – корені трансцендентного рівняння $\operatorname{tg} \lambda h = \lambda h$), а за радіальною координатою – 1, $U_0(s\rho) = Y_1(s)J_0(s\rho) - J_1(s)Y_0(s\rho)$ для порожнистого циліндра, де $s_m > 0$ – корені рівняння $Y_1(s)J_1(sk) - J_1(s)Y_1(sk) = 0$ або 1, $J_0(s_m\rho)$ для суцільного циліндра, де $s_m > 0$ – корені рівняння $J_1(s) = 0$, $J_j(s\rho)$, $Y_j(s\rho)$, ($j = 0, 1$) – функції Бесселя першого і другого роду нульового і першого порядку.

Температурне поле розвинемо в подвійний ряд

$$\begin{aligned}
T(\rho, z) = & T^{00} + T^{10}z + \sum_{n=1}^{\infty} (T_n^{c0} \cos \gamma_n z + T_n^{s0} \sin \lambda_n z) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (T_m^{0u} + zT_m^{1u}) U_0(s_m\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (T_{nm}^{cu} \cos \gamma_n z + T_{nm}^{su} \sin \lambda_n z) U_0(s_m\rho), \tag{3.20}
\end{aligned}$$

а невідому функцію \mathcal{V}_C шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$\mathcal{V}_C(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}^{(i)}(\rho, z), \tag{3.21}$$

де члени ряду, що задаються у вигляді

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(2i-1)}(\rho, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} (R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \cos \gamma_n z + R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) \sin \lambda_n z), \\
\mathcal{V}^{(2i)}(\rho, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u,m}^{(2i)}(z) U_0(s_m\rho), \tag{3.22}
\end{aligned}$$

є розв'язками наступних рівнянь:

$$\text{Comp}_2(\mathcal{V}^{(2i-1)}, \rho, z) = \rho \frac{\partial g^{(2i-1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 g^{(2i-2)}}{\partial z^2} - \frac{2\rho^2 \delta_{2i-1,1}}{(1-\nu^2)(1-k^2)} \int_k^1 \eta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d\eta, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Comp}_2(\mathcal{V}^{(2i)}, \rho, z) = & \frac{\partial^2 g^{(2i)}}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial g^{(2i-1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{1-\nu} \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \delta_{i,1} - \\ & - \frac{\delta_{i,1}}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\int_k^1 \eta T \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta T d\eta \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тут уведено наступні позначення для складових шуканих членів ряду, що виникають за рахунок дії інтегрального оператора та не дозволяють відокремити змінні у вихідному рівнянні:

$$g^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \frac{\cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + z R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) \frac{\cos \lambda_n h}{\lambda_n} \right), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} g^{(2i)} = & \frac{\rho^2}{(1+\nu)(1-k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u,m}^{(2i)}(z) \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{s_m^2} + \\ & + \frac{k^2}{(1-\nu)(1-k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u,m}^{(2i)}(z) \frac{U_0(s_m) - U_0(s_m k)}{s_m^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Зауважимо, що згідно з поданнями (3.22), члени функціонального ряду з верхнім індексом $(2i-1)$ тотожно задовольняють інтегральні умови (3.15) за координатою z , а члени ряду з індексом $(2i)$ – за радіальною координатою ρ . Тоді шукані коефіцієнти розвинення повинні задовольняти інтегральні умови

$$\begin{aligned} \int_k^1 R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \rho d\rho = \int_k^1 \rho R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) d\rho = 0, \\ \int_{-h}^h Z_{u,m}^{(2i)}(z) dz = \int_{-h}^h z Z_{u,m}^{(2i)}(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Використовуючи повноту відповідних функцій розвинення та інтегральні умови (3.27), формули (3.25), (3.26) можемо записати в еквівалентному вигляді

$$g^{(2i-1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_{u,m}^{(2i-1)} + z \beta_{u,m}^{(2i-1)} \right) U_0(s_m \rho), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
g^{(2i)} &= \frac{k^2}{(1-\nu)(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{c,n}^{(2i)} \cos \gamma_n z + \alpha_{s,n}^{(2i)} \sin \lambda_n z \right) + \\
&+ \frac{\rho^2}{(1+\nu)(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\beta_{c,n}^{(2i)} \cos \gamma_n z + \beta_{s,n}^{(2i)} \sin \lambda_n z \right). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Тоді в рівняннях (3.23), (3.24) стає можливим відокремлення змінних, а для визначення невідомих коефіцієнтів розвинень отримуємо наступні одновимірні інтегро-диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_n^4}{8} \int_k^1 \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \left(2\rho^2 \ln \frac{\rho}{\eta} - \rho^2 + \eta^2 \right) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\
&- \gamma_n^2 \int_k^1 \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \rho \frac{dR_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)}{d\rho} + \\
&+ \frac{\gamma_n^4}{4(1-k^2)} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \eta^3 R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) d\eta + \\
&+ \frac{\gamma_n^4}{2(1-k^2)} \left(\frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} k^2 \right) \int_k^1 \eta \ln \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) d\eta = \\
&= -\frac{\gamma_n^4}{1-k^2} \left(\frac{k^2}{1-\nu} \alpha_{c,n}^{(2i-2)} + \frac{\rho^2}{1+\nu} \beta_{c,n}^{(2i-2)} \right) - \frac{\gamma_n^4 \rho^2}{1-\nu^2} T_n^{c0} \delta_{2i-1,1}, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

(рівняння для $R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho)$ отримуємо із (3.30) заміною символів c на s та γ_n на λ_n)

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 Z_{u,m}^{(2i)}(z)}{dz^2} - 2s_m^2 Z_{u,m}^{(2i)}(z) + \frac{s_m^4}{2} \int_{-h}^h Z_{u,m}^{(2i)}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta = \\
&= -s_m^4 \left(\alpha_{u,m}^{(2i-1)} + z \beta_{u,m}^{(2i-1)} + \frac{\delta_{i,1}}{1-\nu} (T_m^{0u} + z T_m^{1u}) \right) - \\
&- \frac{s_m^2 \delta_{i,1}}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left((s_m^2 + \gamma_n^2) T_{nm}^{cu} \cos \gamma_n z + (s_m^2 + \lambda_n^2) T_{nm}^{su} \sin \lambda_n z \right). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Розв'язки рівнянь (3.30), (3.31) з інтегральними умовами (3.27):

$$Z_{u,m}^{(2i)}(z) = B_{c,m}^{(2i)} f_c(s_m, h, z) + B_{s,m}^{(2i)} f_s(s_m, h, z) +$$

$$+ \frac{\delta_{i,1}}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_m^2 \gamma_n^2}{s_m^2 + \gamma_n^2} T_{nm}^{cu} \cos \gamma_n z + \frac{s_m^2 \lambda_n^2}{s_m^2 + \lambda_n^2} T_{nm}^{su} \sin \lambda_n z \right], \quad (3.32)$$

де

$$B_{c,m}^{(2i)} = \alpha_{u,m}^{(2i-1)} + \frac{\delta_{i,1}}{1-\nu} \left(T_m^{0u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_m^2 \cos \gamma_n h}{s_m^2 + \gamma_n^2} T_{nm}^{cu} \right),$$

$$B_{s,m}^{(2i)} = \beta_{u,m}^{(2i-1)} + \frac{\delta_{i,1}}{1-\nu} \left(T_m^{1u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_m^2 \lambda_n \cos \lambda_n h}{s_m^2 + \lambda_n^2} T_{nm}^{su} \right),$$

$$f_c(s, h, z) = s^2 \frac{(sh \operatorname{ch} sh - sh sh) \operatorname{ch} sz - sz sh sh sh sz}{sh sh \operatorname{ch} sh + sh},$$

$$f_s(s, h, z) = \frac{\left((2 + s^2 h^2) s sh sh - 2s^2 h \operatorname{ch} sh \right) sh sz + (sh sh - sh \operatorname{ch} sh) s^2 z \operatorname{ch} sz}{sh sh \operatorname{ch} sh - sh},$$

$$R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) = A_{1c,n}^{(2i-1)} I_0(\gamma_n \rho) + A_{2c,n}^{(2i-1)} \rho I_1(\gamma_n \rho) + A_{3c,n}^{(2i-1)} K_0(\gamma_n \rho) + A_{4c,n}^{(2i-1)} \rho K_1(\gamma_n \rho). \quad (3.33)$$

Для визначення невідомих сталих $A_{l,c,n}^{(2i-1)}$ ($l = \overline{1,4}$) підставимо (3.33) в рівняння (3.30) та прирівняємо коефіцієнти при $\rho^2 \ln \rho$, ρ^2 та вільному члені. Ще одне рівняння отримаємо із інтегральної умови (3.27). У результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{l=1}^4 a_{t,n}^{kl} A_{l,c,n}^{(2i-1)} = f_{t,n}^k, \quad k = \overline{1,4}, \quad t = c, s,$$

розв'язок яких знаходимо в замкнутому вигляді за правилом Крамера:

$$a_{c,n}^{11} = -\frac{1}{4} \gamma_n^3 (k I_1(\gamma_n k) + I_1(\gamma_n)),$$

$$a_{c,n}^{12} = -\frac{1}{4} \gamma_n^2 (-2k I_1(\gamma_n k) + \gamma_n k^2 I_0(\gamma_n k) - 2I_1(\gamma_n) + \gamma_n I_0(\gamma_n)),$$

$$a_{c,n}^{13} = \frac{1}{4} \gamma_n^3 (K_1(\gamma_n) + k K_1(\gamma_n k)),$$

$$a_{c,n}^{14} = \frac{1}{4} \gamma_n^2 (2k K_1(\gamma_n k) + \gamma_n k^2 K_0(\gamma_n k) + 2K_1(\gamma_n) + \gamma_n K_0(\gamma_n)),$$

$$\begin{aligned}
a_{c,n}^{21} &= \left(8(1-\nu) + \gamma_n^2(3-\nu) - \gamma_n^2 k^2(1+\nu)\right) \gamma_n I_1(\gamma_n) - \\
&\quad - \left(4\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) + 8k(1-\nu) - \gamma_n^2 k(1+\nu) + \gamma_n^2 k^3(3-\nu)\right) \gamma_n I_1(\gamma_n k) - \\
&\quad - 8\gamma_n^2 \left(I_0(\gamma_n) - k^2 I_0(\gamma_n k)\right), \\
a_{c,n}^{22} &= \left(2\gamma_n^2 k^2(1+\nu) - 2\gamma_n^2(7-\nu) - 32(1-\nu)\right) I_1(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(8\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) - 2\gamma_n^2 k(1+\nu) + 32k(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^3(7-\nu)\right) I_1(\gamma_n k) + \\
&\quad + \left(8\gamma_n(3-\nu) - \gamma_n^3 k^2(1+\nu) + \gamma_n^3(3-\nu)\right) I_0(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(\gamma_n^3 k^2(1+\nu) - 8\gamma_n k^2(3-\nu) - \gamma_n^3 k^4(3-\nu) - 4\gamma_n^3 k^4 \ln k(1+\nu)\right) I_0(\gamma_n k), \\
a_{c,n}^{23} &= \left(\gamma_n^2 k^2(1+\nu) - \gamma_n^2(3-\nu) - 8(1-\nu)\right) \gamma_n K_1(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(4\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) + 8k(1+\nu) + \gamma_n^2 k^3(3-\nu) - \gamma_n^2 k(1+\nu)\right) \gamma_n K_1(\gamma_n k) - \\
&\quad - 8\gamma_n^2 \left(K_0(\gamma_n) - k^2 K_0(\gamma_n k)\right), \\
a_{c,n}^{24} &= \left(2\gamma_n^2 k^2(1+\nu) - 2\gamma_n^2(7-\nu) - 32(1-\nu)2\right) K_1(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(8\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) - 2\gamma_n^2 k(1+\nu) + 32k(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^3(7-\nu)\right) K_1(\gamma_n k) + \\
&\quad + \left(8\gamma_n k^2(3-\nu) + \gamma_n^3 k^2(1+\nu) - \gamma_n^3(3-\nu)\right) K_0(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(-\gamma_n^3 k^2(1+\nu) + 8\gamma_n k^2(3-\nu) + \gamma_n^3 k^4(3-\nu) + 4\gamma_n^3 k^4 \ln k(1+\nu)\right) K_0(\gamma_n k), \\
a_{c,n}^{31} &= \left(4 + \gamma_n^2 k^2\right) (1-\nu) \gamma_n I_1(\gamma_n) - \left(2\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) + k^3(\gamma_n^2 + 4)(1-\nu)\right) \gamma_n I_1(\gamma_n k) - \\
&\quad - 4\gamma_n^2 k^2 \left(I_0(\gamma_n) - I_0(\gamma_n k)\right), \\
a_{c,n}^{32} &= -\left(8(1+k^2)(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^2(3-\nu)\right) I_1(\gamma_n) + \\
&\quad + \left(4\gamma_n^2 k^2 \ln k(1+\nu) + 8k(1+k^2)(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^3(3-\nu)\right) I_1(\gamma_n k) + \\
&\quad + \left(\gamma_n(1-\nu)(4 + \gamma_n^2 k^2) + 8\gamma_n k^2\right) I_0(\gamma_n) - \\
&\quad - \left(2\gamma_n^3 k^4 \ln k(1+\nu) + \gamma_n k^4(\gamma_n^2 + 4)(1-\nu) + 8\gamma_n k^2\right) I_0(\gamma_n k), \\
a_{c,n}^{33} &= -\left(4 + \gamma_n^2 k^2\right) (1-\nu) \gamma_n K_1(\gamma_n) + \left(2\gamma_n^2 k^3 \ln k(1+\nu) + k^3(\gamma_n^2 + 4)(1-\nu)\right) \gamma_n K_1(\gamma_n k) - \\
&\quad - 4\gamma_n^2 k^2 \left(K_0(\gamma_n) - K_0(\gamma_n k)\right), \\
a_{c,n}^{34} &= -\left(8(1+k^2)(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^2(3-\nu)\right) K_1(\gamma_n) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4\gamma_n^2 k^2 \ln k (1 + \nu) + 8k(1 + k^2)(1 - \nu) + 2\gamma_n^2 k^3 (3 - \nu) \right) K_1(\gamma_n k) + \\
& - \left(\gamma_n (4 + \gamma_n^2 k^2)(1 - \nu) + 8\gamma_n k^2 \right) K_0(\gamma_n) + \\
& + \left(2\gamma_n^3 k^4 \ln k (1 + \nu) + \gamma_n k^4 (\gamma^2 + 4)(1 - \nu) + 8\gamma_n k^2 \right) K_0(\gamma_n k), \\
a_{c,n}^{41} &= \frac{1}{\gamma_n} (I_1(\gamma_n) - kI_1(\gamma_n k)), \quad a_{c,n}^{42} = \frac{1}{\gamma_n} (I_0(\gamma_n) - k^2 I_0(\gamma_n k) - 2a_{c,n}^{41}), \\
a_{c,n}^{43} &= -\frac{1}{\gamma_n} (K_1(\gamma_n) - kK_1(\gamma_n k)), \quad a_{c,n}^{44} = -\frac{1}{\gamma_n} (K_0(\gamma_n) - k^2 K_0(\gamma_n k) - 2a_{c,n}^{43}), \\
f_{c,n}^1 &= 0, \quad f_{c,n}^2 = -8\gamma_n^4 \left(\beta_{c,n}^{(2i-2)} + \frac{1-k^2}{1-\nu} T_n^{c0} \delta_{2i-1,1} \right), \quad f_{c,n}^3 = -4\gamma_n^4 \alpha_{c,n}^{(2i-2)}, \quad f_{c,n}^4 = 0.
\end{aligned}$$

Оскільки знайдені таким чином функції $R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)$ та $R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho)$ задовольняють інтегральній умові (3.27), то можемо записати їх в еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}
R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) &= \sum_{m=1}^{\infty} R_{cu,nm}^{(2i-1)} U_0(s_m \rho), \\
R_{cu,nm}^{(2i-1)} &= \frac{1}{(\gamma_n^2 + s_m^2)^2 \|U_0(s_m \rho)\|} \left[-2\gamma_n^2 \left(A_{c2,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{1I} + A_{c4,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{1K} \right) + \right. \\
& \left. + \gamma_n (\gamma_n^2 + s_m^2) \left(A_{c1,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{1I} + A_{c2,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{0I} - A_{c3,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{1K} - A_{c4,n}^{(2i-1)} G_{cu,nm}^{0K} \right) \right], \quad (3.34)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
G_{cu,nm}^{1I} &= I_1(\gamma_n) U_0(s_m) - kI_1(\gamma_n k) U_0(s_m k), \\
G_{cu,nm}^{0I} &= I_0(\gamma_n) U_0(s_m) - k^2 I_0(\gamma_n k) U_0(s_m k), \\
G_{cu,nm}^{1K} &= K_1(\gamma_n) U_0(s_m) - kK_1(\gamma_n k) U_0(s_m k), \\
G_{cu,nm}^{0K} &= K_0(\gamma_n) U_0(s_m) - k^2 K_0(\gamma_n k) U_0(s_m k), \\
\|U_0(s_m \rho)\| &= \frac{1}{2} (U_0^2(s_m) - k^2 U_0^2(s_m k)).
\end{aligned}$$

Порівнюючи формули (3.25), (3.28) з (3.34), знаходимо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів $\alpha_u^{(2i-1)}$ та $\beta_u^{(2i-1)}$:

$$\alpha_{u,m}^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} R_{cu, nm}^{(2i-1)}, \quad \beta_{u,m}^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n h}{\lambda_n} R_{cu, nm}^{(2i-1)}.$$

Оскільки функції $Z_{u,m}^{(2i)}(z)$ задовольняють інтегральні умови (3.27), то їх можемо розвинути у відповідні ряди за осьовою координатою i , як у випадку задачі термопружності для прямокутника, записати в еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned} Z_{u,m}^{(2i)}(z) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_m^2 \gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + s_m^2)^2} \left(B_{c,m}^{(2i)} \Delta_c(s_m, \gamma_n, h) - (s_m^2 + \gamma_n^2) T_{nm}^{cu} \delta_{i,1} \right) \cos \gamma_n z - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_m^2 \lambda_n^2}{(s_m^2 + \lambda_n^2)^2} \left(B_{s,m}^{(2i)} \Delta_s(s_m, \lambda_n, h) - (s_m^2 + \lambda_n^2) T_{nm}^{su} \delta_{i,1} \right) \sin \lambda_n z. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тоді, використовуючи формули (3.26), (3.29) та (3.35), знайдемо рекурентні співвідношення для визначення невідомих $\alpha_{c,n}^{(2i)}$, $\alpha_{s,n}^{(2i)}$ та $\beta_{c,n}^{(2i)}$, $\beta_{s,n}^{(2i)}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{c,n}^{(2i)} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + s_m^2)^2} \left(B_{c,m}^{(2i)} \Delta_c(s_m, \gamma_n, h) - (s_m^2 + \gamma_n^2) T_{nm}^{cu} \delta_{i,1} \right) (U_0(s_m) - U_0(s_m k)), \\ \beta_{c,n}^{(2i)} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + s_m^2)^2} \left(B_{c,m}^{(2i)} \Delta_c(s_m, \gamma_n, h) - (s_m^2 + \gamma_n^2) T_{nm}^{cu} \delta_{i,1} \right) (U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)), \\ \alpha_{s,n}^{(2i)} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(s_m^2 + \lambda_n^2)^2} \left(B_{s,m}^{(2i)} \Delta_s(s_m, \lambda_n, h) - (s_m^2 + \lambda_n^2) T_{nm}^{su} \delta_{i,1} \right) (U_0(s_m) - U_0(s_m k)), \\ \beta_{s,n}^{(2i)} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(s_m^2 + \lambda_n^2)^2} \left(B_{s,m}^{(2i)} \Delta_s(s_m, \lambda_n, h) - (s_m^2 + \lambda_n^2) T_{nm}^{su} \delta_{i,1} \right) (U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)). \end{aligned}$$

Після визначення всіх невідомих коефіцієнтів знаходимо функцію $\mathcal{V}_C(\rho, z)$ за формулою (3.21), а компоненти тензора напружень обчислюємо, користуючись виразами (3.13), (3.14), (3.17) та (3.18).

Для апробації запропонованого методу побудови розв'язку поставленої задачі розглянемо визначення напруженого стану у порожнистому циліндрі, зумовленого температурним полем

$$T(\rho, z) = T_0 \rho^2 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad T_0 = \text{const.}$$

при $k = 0.3$ та $h = 1$, графік якого показано на рис. 3.1.

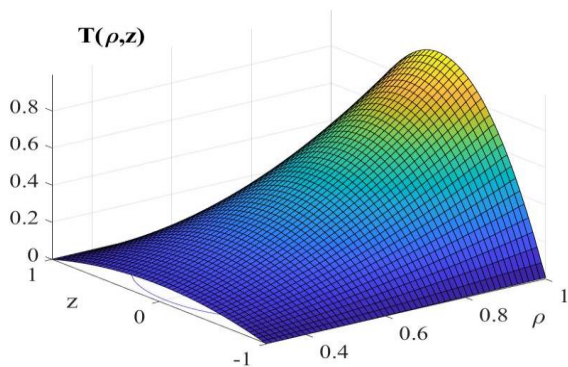


Рис. 3.1

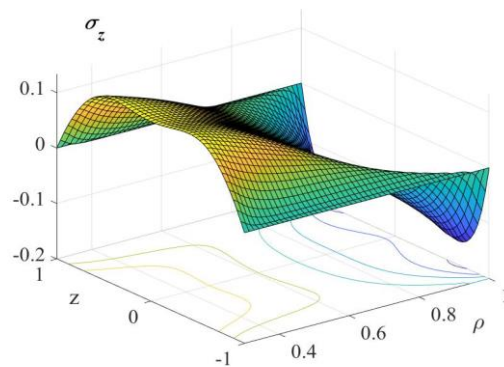


Рис. 3.2

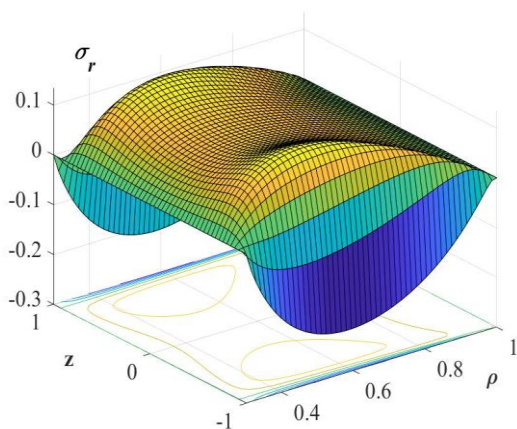


Рис. 3.3

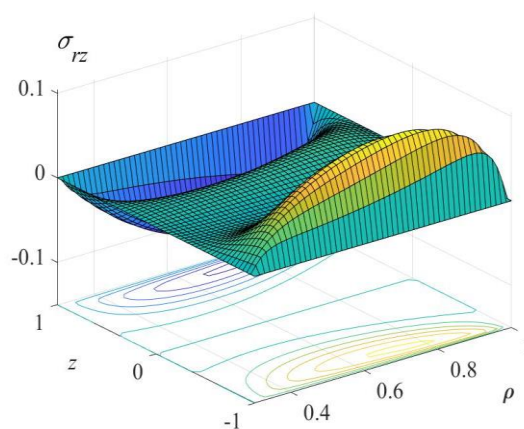


Рис. 3.4

На рис. 3.2, 3.3, 3.4 показано відповідно розподіли нормальних σ_z , радіальних σ_r та дотичних σ_{rz} напружень. Як бачимо з наведених рисунків крайові умови (3.5) – (3.8) виконуються точно, а рівняння суцільності (3.4) буде виконуватися з точністю до значення виразів (3.25), (3.26) або (3.28), (3.29). Як показують виконані обчислення, максимальне значення цих складових досягається при $\rho = 1$ та $z = \pm h$, а їх порядок стає 10^{-3} вже при $j = 6$.

У випадку одновимірного температурного поля $T = T_0 \rho^2$ виконано розрахунки при різних значеннях висоти h досліджуваного порожнистого циліндра та внутрішнього безрозмірного радіуса k . Для порівняння взято осеві напруження

$$\sigma_z^L = -T(\rho) + \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho T(\rho) d\rho$$

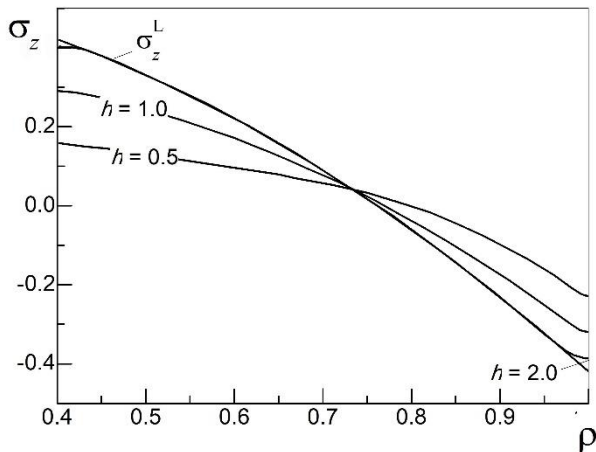


Рис. 3.5

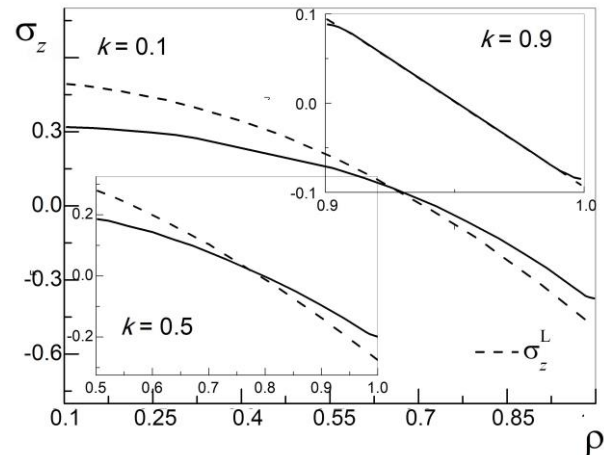


Рис. 3.6

для одновимірного випадку довгого порожнистого циліндра. На рис. 3.5 показано розподіли осьових напружень σ_z для циліндра з внутрішнім безрозмірним радіусом $k=0.4$ при різних значеннях висоти $h=0.5, 1, 2$. Поведінку тих же осьових напружень для «кубоподібного» циліндра $h=1$ видно на рис. 3.6 при різних значеннях k . Як показують результати обчислень для товстостінного циліндра $k < 0.6$, вже при $h=2$ напружений стан можна вважати близьким до одновимірного стану. Це ж стосується і випадку «тонкостінного» циліндра. Але все ж залишається область, де значний вплив на розподіл напружень мають крайові умови при $z = \pm h$.

3.3. Функція Вігака в задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини

Розглянемо задачу теорії пружності для порожнистого циліндра скінченної довжини, що займає область D_C . У цьому випадку компоненти тензора напружень задовольняють рівняння рівноваги (3.1), (3.2), два рівняння суцільності

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0, \quad (3.36)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) - 2(1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_z - \nu\sigma) = 0 \quad (3.37)$$

та вісім межових умов

$$\sigma_r|_{\rho=k,1} = -p^\pm(z), \quad (3.38)$$

$$\sigma_{rz}|_{\rho=k,1} = q_r^\pm(z), \quad (3.39)$$

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = -f^\pm(\rho), \quad (3.40)$$

$$\sigma_{rz}|_{z=\pm h} = q_z^\pm(\rho). \quad (3.41)$$

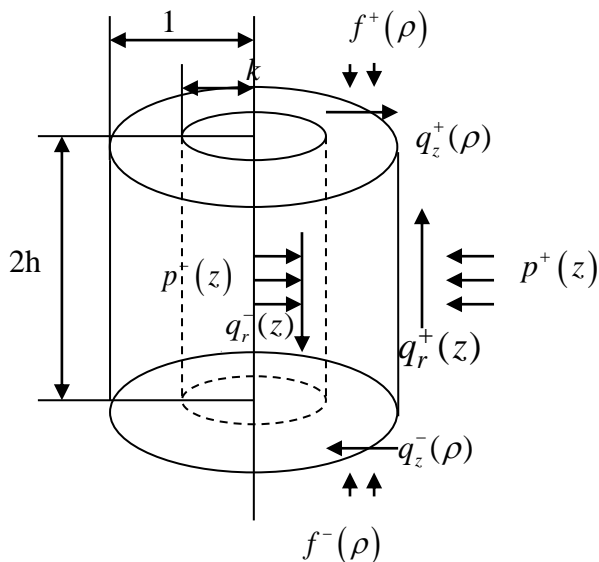


Рис. 3.7

Тут $p^\pm(z)$, $q_r^\pm(z)$, $f^\pm(\rho)$ та $q_z^\pm(\rho)$ – задані функції зовнішніх навантажень, які повинні задовольняти умови, що будуть з'ясовані в ході розв'язування поставленої задачі. Верхній індекс "+" у формулах (3.38) – (3.41) відповідає межам $\rho=1$ та $z=h$, а індекс "-" відповідно межам $\rho=k$ та $z=-h$, як показано на рис. 3.7.

Зауважимо, що з умови виконання рівнянь рівноваги на межі області D_C , отримаємо ще чотири додаткові умови на компоненти тензора напружень:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma \right) \Big|_{\rho=k,1} = -\rho \frac{dq_r^\pm}{dz}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^\pm(\rho)). \quad (3.43)$$

На основі формул введення функції Вігака (3.11) розглянемо наступні три крайові задачі.

Задача 1 полягає в інтегруванні рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \mathcal{V}_C \quad (3.44)$$

з межовими умовами (3.40) та (3.43).

У рамках **задачі 2** слід знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (\rho \sigma_{rz}) = -\rho \mathcal{V}_C \quad (3.45)$$

з межовими умовами (3.39) та (3.41).

При розв'язуванні **задачі 3** інтегруватимемо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma \right) = \rho \mathcal{V}_C \quad (3.46)$$

з межовими умовами (3.38) та (3.42).

Для розв'язання задачі 1 проінтегруємо рівняння (3.44) по z від $-h$ до h з урахуванням умов (3.43), звідки знаходимо вираз

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big|_{z=h} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big|_{z=-h} + \int_{-h}^h \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta \stackrel{(3.43)}{=} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho)) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^-(\rho)) + \int_{-h}^h \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Звідси при $z = \pm h$ отримуємо першу інтегральну умову для введеної функції, а саме

$$\int_{-h}^h \mathcal{V}_C dz = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho (q_z^+(\rho) - q_z^-(\rho))). \quad (3.48)$$

У результаті інтегрування по ρ умови (3.48) знаходимо вираз

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int_{k-h}^h \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) dz d\eta &= -2\rho q_z^+(\rho) + 2\rho q_z^-(\rho) + \\ &+ q_z^+(1) + k q_z^+(k) - q_z^-(1) - k q_z^-(k). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Покладаючи у виразі (3.49) $\rho = k, 1$, знаходимо першу додаткову інтегральну умову

$$\int_{k-h}^1 \int_{k-h}^h \rho \mathcal{V}_C dz d\rho = -q_z^+(1) + k q_z^+(k) + q_z^-(1) - k q_z^-(k). \quad (3.50)$$

Проінтегруємо тепер вираз (3.47) ще раз по z від $-h$ до h з урахуванням межових умов (3.40) та інтегральної умови (3.48):

$$2\sigma_z = -f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left((z-h)\rho q_z^+(\rho) + (z+h)\rho q_z^-(\rho) \right) + \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z-\zeta| d\zeta, \quad (3.51)$$

звідки при $z = \pm h$ знаходимо другу інтегральну умову на введену функцію

$$\int_{-h}^h z \mathcal{V}_C dz = f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho q_z^+(\rho) + \rho q_z^-(\rho) \right). \quad (3.52)$$

Домножимо тепер отриману рівність (3.52) на ρ та проінтегруємо від k до 1:

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h z \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) dz d\eta &= \int_k^1 \eta \left(f^+(\eta) - f^-(\eta) \right) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\ &- 2h\rho \left(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho) \right) + h \left(q_z^+(1) + kq_z^+(k) + q_z^-(1) + kq_z^-(k) \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Звідси при $\rho = k, 1$ знаходимо другу додаткову інтегральну умову

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h z \rho \mathcal{V}_C dz d\rho &= \int_k^1 \rho \left(f^+(\rho) - f^-(\rho) \right) d\rho - \\ &- h \left(q_z^+(1) - kq_z^+(k) + q_z^-(1) - kq_z^-(k) \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Для вирішення задачі 2 проінтегруємо рівняння (3.45) по ρ від k до 1 з урахуванням межових умов (3.39):

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_{rz}) &= \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_{rz}) \Big|_{\rho=1} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_{rz}) \Big|_{\rho=k} - \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta = \\ &= \frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{dq_r^-(z)}{dz} - \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Із цього виразу при $\rho = k, 1$ отримаємо третю інтегральну умову на введену функцію, а саме

$$\int_k^1 \rho \mathcal{V}_C d\rho = -\frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{dq_r^-(z)}{dz}. \quad (3.56)$$

Проінтегруємо цю умову по z :

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h \rho \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta d\rho &= \\ &= -2q_r^+(z) + q_r^+(h) + q_r^+(-h) + 2kq_r^-(z) - kq_r^-(h) - kq_r^-(-h), \end{aligned} \quad (3.57)$$

звідки при $z = \pm h$ знаходимо

$$\int_{k-h}^1 \int^h \rho \mathcal{V}_C dz d\rho = -q_r^+(h) + q_r^+(-h) + kq_r^-(h) - kq_r^-(-h). \quad (3.58)$$

Порівнюючи формули (3.50) та (3.58), знаходимо умову

$$-q_r^+(h) + q_r^+(-h) + kq_r^-(h) - kq_r^-(-h) = -q_z^+(1) + kq_z^+(k) + q_z^-(1) - kq_z^-(k). \quad (3.59)$$

Проінтегруємо тепер (3.55) по z і знайдемо формулу для вираження дотичних напружень через функцію Вігака $\mathcal{V}_C(\rho, z)$:

$$\begin{aligned} 4\rho\sigma_{rz} = & 2\rho q_z^+(\rho) + 2\rho q_z^-(\rho) + 2q_r^+(z) + 2kq_r^-(z) - \\ & -q_r^+(h) - q_r^+(-h) - kq_r^-(h) - kq_r^-(-h) - \\ & - \int_{k-h}^1 \int^h \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Із цієї формули при $z = \pm h$ знайдемо

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int^h \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) dz d\eta = & -2\rho q_z^+(\rho) + 2\rho q_z^-(\rho) + \\ & + q_r^+(h) + q_r^+(-h) - kq_r^-(h) - kq_r^-(-h). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Порівнюючи (3.61) із формулою (3.49), отримаємо умову

$$q_z^+(1) + kq_z^+(k) - q_z^-(1) - kq_z^-(k) = q_r^+(h) + q_r^+(-h) - kq_r^-(h) - kq_r^-(-h). \quad (3.62)$$

Тепер з (3.60) при $\rho = 1$ знайдемо вираз

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int^h \rho \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\rho d\eta = & 2q_z^+(1) + 2q_z^-(1) - 2q_r^+(z) + 2kq_r^-(z) - \\ & - q_r^+(h) - q_r^+(-h) - kq_r^-(h) - kq_r^-(-h), \end{aligned}$$

а при $\rho = k$

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int^h \rho \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta d\rho = & -2kq_z^+(k) - 2kq_z^-(k) - 2q_r^+(z) + 2kq_r^-(z) - \\ & + q_r^+(h) + q_r^+(-h) + kq_r^-(h) + kq_r^-(-h). \end{aligned}$$

Порівнюючи ці формули знаходимо ще одну умову, а саме

$$q_r^+(h) + q_r^+(-h) + kq_r^-(h) + kq_r^-(-h) = q_z^+(1) + q_z^-(1) + kq_z^+(k) + kq_z^-(k). \quad (3.63)$$

Формули (3.59), (3.62) та (3.63) будуть виконуватися, якщо задані дотичні зусилля задовольняють умови погодження в кутових точках:

$$\begin{aligned} q_z^+(1) = q_r^+(h) = \tau_{1,h}, \quad q_z^+(k) = q_r^-(h) = \tau_{k,h}, \\ q_z^-(k) = q_r^-(h) = \tau_{k,-h}, \quad q_z^-(1) = q_r^+(-h) = \tau_{1,-h}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Помножимо (3.56) на z та проінтегруємо отриманий вираз в межах від $-h$ до h . В результаті отримаємо формулу

$$\begin{aligned} \int_{k-h}^1 \int_{-h}^h \rho \zeta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta d\rho = \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta - \\ - 2z(q_r^+(z) - kq_r^-(z)) + h(q_r^+(h) - q_r^+(-h) - kq_r^-(h) + kq_r^-(-h)), \end{aligned}$$

звідки при $z = \pm h$ впливає наступна умова

$$\int_{k-h}^1 \int_{-h}^h \rho z \mathcal{V}_C dz d\rho = \int_{-h}^h (q_r^+(z) - kq_r^-(z)) dz + h(-q_r^+(h) - q_r^+(-h) + kq_r^-(h) + kq_r^-(-h)).$$

Порівнюючи отриманий вираз із (3.54), знайдемо інтегральну умову, якій повинні задовольняти задані зовнішні зусилля

$$\int_k^1 \rho (f^+(\rho) - f^-(\rho)) d\rho = \int_{-h}^h (q_r^+(z) - kq_r^-(z)) dz \quad (3.65)$$

та умови погодження дотичних зусиль в кутових точках (3.64).

Для розв'язання задачі 3 розглянемо рівняння (3.46) з умовами (3.42)

$$2\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) - \sigma\right) \stackrel{(3.42)}{=} -\frac{dq_r^+(z)}{dz} - k \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta, \quad (3.66)$$

звідки при $\rho = k, 1$ отримаємо інтегральну умову (3.56). Запишемо (3.66) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) = -\rho \sigma - \frac{\rho}{2} \left(\frac{dq_r^+(z)}{dz} - k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \right) + \frac{\rho}{2} \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta,$$

звідки, з урахуванням межових умов (3.38), отримаємо вираз для радіальних напружень через уведену функцію та сумарні напруження

$$2\rho^2 \sigma_r = -p^+(z) - k^2 p^-(z) + \frac{1-\rho^2}{2} \frac{dq_r^+(z)}{dz} - k \frac{\rho^2 - k^2}{2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} +$$

$$+\int_k^1 \eta \left(\sigma + \frac{\rho^2 - \eta^2}{2} \mathcal{V}_C \right) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta \quad (3.67)$$

та інтегральну умову для сумарних напружень

$$\int_k^1 \rho \sigma d\rho = -p^+(z) + k^2 p^-(z) + \frac{1}{2} \frac{dq_r^+(z)}{dz} - \frac{k^3}{2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \frac{1}{2} \int_k^1 \rho^3 \mathcal{V}_C d\rho. \quad (3.68)$$

Таким чином шляхом уведення функції Вігака на основі інтегрування лише рівнянь рівноваги (3.1), (3.2) отримано подання (3.56), (3.60) та (3.67) компонент тензора напружень, а вісім локальних межових умов (3.38) – (3.41) еквівалентно замінено на чотири інтегральні умови (3.48), (3.52), (3.56) та (3.68). Крім цього, отримано додаткові інтегральні умови на введеному функцію (3.50), (3.54), інтегральну умову рівноваги для заданих зовнішніх навантажень (3.65) та умови (3.64) погодження дотичних зусиль в кутових точках області D_C .

Розглянемо тепер перше рівняння суцільності (3.36), яке з врахуванням рівняння рівноваги (3.1), можемо записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma - \nu \sigma_z) + (1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0,$$

звідки шляхом інтегрування за радіальною координатою отримаємо вираз

$$\sigma = \nu \sigma_z - \frac{1 + \nu}{2} \int_k^1 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \varphi(z). \quad (3.69)$$

З врахуванням виразів для осьових та дотичних напружень (3.51), (3.60), формулу (3.69) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{\nu}{2} \left(-f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{z-h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho)) - \frac{z+h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^-(\rho)) \right) + \\ & - \frac{1 + \nu}{2} \ln \rho \frac{dq_r^+(z)}{dz} - \frac{1 + \nu}{2} k \ln \frac{\rho}{k} \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \\ & + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z - \zeta| d\zeta + \frac{1 + \nu}{2} \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \varphi(z). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Невідому функцію інтегрування $\varphi(z)$ знайдемо з інтегральної умови (3.68), що забезпечує виконання межових умов (3.38) для радіальних напружень

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = & -\frac{2}{1-k^2}(p^+(z)-k^2p^-(z)) + \frac{\nu}{1-k^2} \int_k^1 \eta(f^+(\eta)+f^-(\eta))d\eta + \\
& + \frac{\nu}{1-k^2} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta)-kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)} \frac{dq_r^+(z)}{dz} - \\
& - \frac{k}{1-k^2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} \left(\frac{1-\nu}{2} k^2 + \frac{1+\nu}{2} (1+k^2) \ln k \right) + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta \mathcal{V}_C d\eta + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)} \int_k^1 \eta^3 \mathcal{V}_C d\eta. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Тоді (3.70) остаточно запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma = & -\frac{2}{1-k^2}(p^+(z)-k^2p^-(z)) + \frac{\nu}{1-k^2} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta)-kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta - \\
& - \frac{\nu}{2} \left(f^+(\rho)+f^-(\rho) - \frac{\nu}{1-k^2} \int_k^1 \eta(f^+(\eta)+f^-(\eta))d\eta \right) - \\
& - \frac{\nu}{2} \frac{z-h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho)) - \frac{\nu}{2} \frac{z+h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^-(\rho)) + \\
& + \frac{dq_r^+(z)}{dz} \left(\frac{1-\nu}{2(1-k^2)} - \frac{1+\nu}{2} \ln \rho \right) - k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{k^2}{1-k^2} + \frac{1+\nu}{2} \left(\ln \rho + \frac{2k^2}{1-k^2} \ln k \right) \right) + \\
& + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C |z-\zeta| d\zeta + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)} \int_k^1 \eta^3 \mathcal{V}_C d\eta + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left(\int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta + \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta \mathcal{V}_C d\eta \right), \tag{3.72}
\end{aligned}$$

а радіальні напруження визначатимуться за формулою

$$\begin{aligned}
2\rho^2 \sigma_r = & -2 \frac{\rho^2 - k^2}{1-k^2} p^+(z) - 2k^2 \frac{1-\rho^2}{1-k^2} p^-(z) + \\
& + \frac{dq_r^+(z)}{dz} \left[\frac{1-\nu}{4} \frac{\rho^2(1+k^2)}{1-k^2} - \frac{1+\nu}{2} \rho^2 \ln \rho \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \left[\frac{1-v}{4} \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} + \frac{1+v}{2} \left(\rho^2 \ln \rho - \ln k \frac{2k^2(1-\rho^2)}{1-k^2} \right) \right] + \\
& + \frac{v}{2} \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta + \\
& - \frac{v}{2} \left(\int_k^1 \eta (f^+(\eta) + f^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta (f^+(\eta) + f^-(\eta)) d\eta \right) - \\
& - v(z-h)\rho q_z^+(\rho) - v(z+h)\rho q_z^-(\rho) + \frac{v}{2} \left((z-h)q_z^+(1) + (z+h)q_z^-(1) \right) + \\
& + \frac{v}{2} \left((z-h)kq_z^+(k) + (z+h)kq_z^-(k) \right) + \frac{v}{2} \int_{K-h}^1 \int^h \eta \mathcal{V}_C |z - \zeta| \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\zeta d\eta + \\
& + \frac{1+v}{2} \left(\rho^2 \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta \mathcal{V}_C d\eta \right) + \\
& + \frac{1-v}{4} \left(\int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) \mathcal{V}_C \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta^3 \mathcal{V}_C d\eta \right). \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Таким чином шляхом уведення функції Вігака $\mathcal{V}_C(\rho, z)$ отримані вирази для компонент тензора напружень (3.51), (3.60), (3.72), (3.73) та на їх основі вісім локальних межових умов (3.38) – (3.41) еквівалентно замінено трьома інтегральними умовами (3.48), (3.52), (3.56).

3.4. Аналіз елементарної та самозрівноваженої складових функції Вігака

Для визначення невідомої функції Вігака $\mathcal{V}_C(\rho, z)$ підставимо вирази (3.51), (3.60), (3.72), (3.73) в рівняння суцільності (3.37) і отримаємо ключове інтегро-диференціальне рівняння, а саме:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Comp}_2(\mathcal{V}_C, \rho, z) &= \frac{(1-v)\rho^2 + (1+v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^2 p^+(z)}{dz^2} - k^2 \frac{(1-v)\rho^2 + 1 + v^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^2 p^-(z)}{dz^2} + \\
& + \frac{d^3 q_r^+(z)}{dz^3} \left[\frac{\rho^2 \ln \rho}{4} - \frac{\rho^2 (3-v - (1+v)k^2 + 2(1+v)k^2)}{8(1+v)(1-k^2)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +k \frac{d^3 q_r^-(z)}{dz^3} \left[\frac{\rho^2 \ln \rho}{4} + \frac{(1-\nu)\rho^2 + 1 + \nu}{2(1-\nu^2)(1-k^2)} k^2 \ln k - \frac{\rho^2(1+\nu - (3-\nu)k^2) - 2(1+\nu)k^2}{8(1+\nu)(1-k^2)} \right] - \\
& - \frac{\nu(1-\nu)\rho^2 - 1 + \nu^2 + (1+\nu)k^2}{2(1-\nu^2)(1-k^2)} \frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{\nu(1-\nu)\rho^2 + 1 + \nu - (1-\nu^2)k^2}{2(1-\nu^2)(1-k^2)} \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \\
& + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (f^+(\rho) + f^-(\rho)) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{z-h}{2} \rho q_z^+(\rho) + \frac{z+h}{2} \rho q_z^-(\rho) \right) \right]. \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Для побудови розв'язку інтегро-диференціального рівняння суцільності (3.74) використаємо метод відокремлення змінних, описаний вище для побудови розв'язку відповідної задачі термопружності. Розвинемо функцію Вігака в ряди по відповідних повних ортогональних системах функцій:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_C(\rho, z) &= \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \mathcal{V}_C(\eta, z) d\eta + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_m^u(z) U_0(s_m \rho) \quad (3.56) \\
&= \frac{2}{1-k^2} \left(-\frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_m^u(z) U_0(s_m \rho), \quad (3.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_C(\rho, z) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \mathcal{V}_C d\zeta + \frac{3z}{2h^3} \int_{-h}^h \zeta \mathcal{V}_C d\zeta + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{V}_n^c(\rho) \cos(\gamma_n z) + \mathcal{V}_n^s(\rho) \sin(\lambda_n z) \right] \quad (3.48)(3.52) \\
&= -\frac{1}{2h\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho (q_z^+(\rho) - q_z^-(\rho)) \right] + \\
&+ \frac{3z}{2h^3} \left(f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho) + \rho q_z^-(\rho)) \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{V}_n^c(\rho) \cos(\gamma_n z) + \mathcal{V}_n^s(\rho) \sin(\lambda_n z) \right]. \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Задані зовнішні навантаження розвинемо у відповідні ряди:

$$\begin{aligned}
p^\pm(z) &= p_0^\pm(z) + p^{\pm e}(z), \quad p_0^\pm(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p^\pm(\zeta) d\zeta + \frac{3z}{2h^3} \int_{-h}^h p^\pm(\zeta) \zeta d\zeta, \\
p^{\pm e}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (p_{c,n}^\pm \cos \gamma_n z + p_{s,n}^\pm \sin \lambda_n z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{c,n}^{\pm} &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h p^{\pm}(z) \cos \gamma_n z dz, & p_{s,n}^{\pm} &= \frac{1}{h \sin^2 \lambda_n h} \int_{-h}^h p^{\pm}(z) \sin \gamma_n z dz, \\
q_r^{\pm}(z) &= q_{r0}^{\pm}(z) + q_r^{\pm e}(z), \\
q_{r0}^{\pm}(z) &= \frac{(z+h)(3z-h)}{4h^2} \tau_{\frac{1}{k},h} + \frac{(z-h)(3z+h)}{4h^2} \tau_{\frac{1}{k},-h} - \frac{3(z^2-h^2)}{4h^3} \int_{-h}^h q_r^{\pm}(\zeta) d\zeta, \\
q_r^{\pm e}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{rc,n}^{\pm}}{\gamma_n} \sin \gamma_n z + \frac{q_{rs,n}^{\pm}}{\lambda_n} (\cos \lambda_n h - \cos \lambda_n z) \right), \\
q_{rc,n}^{\pm} &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h \frac{dq_r^{\pm}(z)}{dz} \cos \gamma_n z dz, & q_{rs,n}^{\pm} &= \frac{1}{h \sin^2 \lambda_n h} \int_{-h}^h \frac{dq_r^{\pm}(z)}{dz} \sin \lambda_n z dz, \\
f^{\pm}(\rho) &= f_0^{\pm} + f^{\pm e}(\rho), & f_0^{\pm} &= \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \eta f^{\pm}(\eta) d\eta, & f^{\pm e}(\rho) &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{u,m}^{\pm} U_0(s_m \rho), \\
f_{u,m}^{\pm} &= \frac{1}{\|U_0(s_m \rho)\|_k} \int_k^1 \rho f^{\pm}(\rho) U_0(s_m \rho) d\rho, \\
q_z^{\pm}(\rho) &= q_{z0}^{\pm}(\rho) + q_z^{\pm e}(\rho), & q_{z0}^{\pm}(\rho) &= \frac{\rho^2 - k^2}{\rho(1-k^2)} \tau_{1,\pm a} + \frac{k(1-\rho^2)}{\rho(1-k^2)} \tau_{k,\pm a}, \\
q_z^{\pm e} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{zu,m}^{\pm}}{s_m} U_1(s_m \rho), & q_{zu,m}^{\pm} &= \frac{1}{\|U_0(s_m \rho)\|_k} \int_k^1 \frac{d(\rho q_z^{\pm}(\rho))}{d\rho} U_0(s_m \rho) d\rho.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

З урахуванням інтегральних умов на введеному функцію (3.48), (3.52) та (3.56), інтегральних умов рівноваги для заданих зовнішніх навантажень (3.64) та (3.65), подання (3.75) і (3.76) є еквівалентними. Тоді остаточно подамо введеному функцію у вигляді:

$$\mathcal{V}_C(\rho, z) = \mathcal{V}^0(\rho, z) + \mathcal{V}^e(\rho, z) + \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z). \tag{3.78}$$

Тут окремо виділено складові функції Вігака, які є відомими, і відповідають елементарним та самоврівноваженим частинам заданих зовнішніх навантажень. При цьому зауважимо що самоврівноважені зовнішні навантаження позначені тильдою задовольняють наступним умовам:

$$\int_{-h}^h p^{\pm e}(z) dz = \int_{-h}^h zp^{\pm e}(z) dz = \int_k^1 \rho f^{\pm e}(\rho) d\rho = 0,$$

$$q_r^{\pm e}(h) = q_r^{\pm e}(-h) = \int_{-h}^h q_r^{\pm e}(z) dz = q_z^{\pm e}(k) = q_z^{\pm e}(1) = 0.$$

Згідно з уведеними позначеннями та всіх отриманих інтегральних умов остаточно знаходимо:

$$\mathcal{V}^0(\rho, z) = -\frac{1}{h(1-k^2)} \left(\tau_{1,h} - \tau_{1,-h} + k\tau_{k,h} - k\tau_{k,-h} \right) -$$

$$-\frac{3z}{h^2(1-k^2)} \left(\tau_{1,h} + \tau_{1,-h} - k\tau_{k,h} - k\tau_{k,-h} - \frac{1}{h} \int_k^1 \eta (f^+(\eta) - f^-(\eta)) d\eta \right), \quad (3.79)$$

$$\mathcal{V}^e(\rho, z) = \frac{2}{1-k^2} \left(-\frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} + k \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} \right) - \frac{1}{2h\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho (q_z^{+e}(\rho) - q_z^{-e}(\rho)) \right] +$$

$$+ \frac{3z}{2h^3} \left(f^{+e}(\rho) - f^{-e}(\rho) - \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^{+e}(\rho) + \rho q_z^{-e}(\rho)) \right). \quad (3.80)$$

Невідома ж функція $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$ задовольняє нульові інтегральні умови

$$\int_{-h}^h \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) dz = \int_{-h}^h z \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) dz = \int_k^1 \rho \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) d\rho = 0. \quad (3.81)$$

Розглянемо **елементарні розв'язки** поставленої задачі, зумовлені тією частиною зовнішніх навантажень, що позначені у виразах (3.77) індексом "0". Після підстановки знайдених таким чином компонент тензора напружень у друге рівняння суцільності (3.37) отримаємо додаткові умови на зовнішні навантаження:

$$\tau_{k,h} - \tau_{k,-h} - k(\tau_{1,h} - \tau_{1,-h}) = 0,$$

$$\tau_{k,h} + \tau_{k,-h} - k(\tau_{1,h} + \tau_{1,-h}) = \frac{1}{h} \int_{-h}^h (q_r^-(\zeta) - kq_r^+(\zeta)) d\zeta,$$

$$\tau_{1,h} - \tau_{1,-h} - k(\tau_{k,h} - \tau_{k,-h}) = 0,$$

$$\tau_{1,h} + \tau_{1,-h} - k(\tau_{k,h} + \tau_{k,-h}) = \frac{1}{h} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - kq_r^-(\zeta)) d\zeta. \quad (3.82)$$

Ці умови будуть виконуватись, якщо дотичні навантаження задовольнятимуть умови

$$\tau_{k,h} = \tau_{k,-h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_r^-(\zeta) d\zeta = \tau_k, \quad \tau_{1,h} = \tau_{1,-h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_r^+(\zeta) d\zeta = \tau_1. \quad (3.83)$$

Тоді $\mathcal{V}^0(\rho, z) \equiv 0$, а елементарні складові напружень матимуть вигляд:

$$\sigma_{rz}^0 = \frac{k}{\rho} \frac{1-\rho^2}{1-k^2} \tau_k + \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2-k^2}{1-k^2} \tau_1, \quad (3.84)$$

$$\sigma_r^0 = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2-k^2}{1-k^2} p_0^+(z) - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1-\rho^2}{1-k^2} p_0^-(z), \quad (3.85)$$

$$\sigma_z^0(z) = -\frac{1}{2h} \left((h+z) f_0^+ + (h-z) f_0^- \right), \quad (3.86)$$

$$\sigma^0 = -\frac{2}{1-k^2} \left[p_0^+(z) - k^2 p_0^-(z) \right]. \quad (3.87)$$

Після підстановки (3.80) в формули (3.51), (3.60), (3.72) та (3.73) знайдемо вирази для компонент тензора напружень від **самоврівноважених навантажень**:

$$\begin{aligned} \sigma_z^e = & -\frac{1}{4h^3} \left[(2h-z)(z+h)^2 f^{+e}(\rho) + (2h+z)(z-h)^2 f^{-e}(\rho) \right] - \\ & -\frac{z^2-h^2}{4\rho h^2} \left[(z+h) \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^{+e}(\rho)) + (z-h) \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^{-e}(\rho)) \right] - \\ & -\frac{1}{1-k^2} \int_{-h}^h \left(q_r^{+e}(\xi) - k q_r^{-e}(\xi) \right) \operatorname{sgn}(z-\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^e = & \frac{\rho^2-k^2}{\rho(1-k^2)} q_r^{+e}(z) + \frac{k}{\rho} \frac{1-\rho^2}{1-k^2} q_r^{-e}(z) + \\ & + \frac{1}{4h^2} \left[(3z-h)(z+h) q_z^{+e}(\rho) + (3z+h)(z-h) q_z^{-e}(\rho) \right] - \\ & - \frac{3(z^2-h^2)}{8h^3} \int_k^1 \eta \left(f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta) \right) \operatorname{sgn}(\rho-\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}
2\rho^2\sigma_r^e &= -2\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} p^{+e}(z) - 2k^2 \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} p^{-e}(z) + \\
&+ \frac{(\nu + 3)(\rho^2 - k^2)(1 - \rho^2)}{4(1 - k^2)} \left(\frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} - k \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} \right) + \\
&+ k \frac{1 + \nu}{1 - k^2} \left(\rho^2 \ln \rho - \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} k^2 \ln k \right) \left(k \frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} - \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} \right) - \\
&- \nu \frac{z^2 - h^2}{2h^2} \left[(z + h)\rho q_z^{+e}(\rho) + (z - h)\rho q_z^{-e}(\rho) \right] + \\
&- \frac{\nu}{4h^3} (2h - z)(z + h)^2 \int_k^1 \eta f^{+e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\
&- \frac{\nu}{4h^3} (2h + z)(z - h)^2 \int_k^1 \eta f^{-e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\
&+ \frac{1 - \nu}{4} \frac{3z}{2h^3} \left[\int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \eta^3 (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) d\eta \right] + \\
&+ \frac{1 + \nu}{2} \frac{3z}{2h^3} \left[\rho^2 \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^2(1 + k^2) - 2k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) d\eta \right] - \\
&- \frac{1 - \nu}{4} \frac{3z + h}{h^2} \left[\int_k^1 \eta^2 q_z^{+e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \eta^2 q_z^{+e}(\eta) d\eta \right] - \\
&- \frac{1 - \nu}{4} \frac{3z - h}{h^2} \left[\int_k^1 \eta^2 q_z^{-e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \eta^2 q_z^{-e}(\eta) d\eta \right] - \\
&- \frac{1 + \nu}{2} \frac{3z + h}{2h^2} \left[\rho^2 \int_k^1 q_z^{+e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{\rho^2(1 + k^2) - 2k^2}{1 - k^2} \int_k^1 q_z^{+e}(\eta) d\eta \right] - \\
&- \frac{1 + \nu}{2} \frac{3z - h}{2h^2} \left[\rho^2 \int_k^1 q_z^{-e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{\rho^2(1 + k^2) - 2k^2}{1 - k^2} \int_k^1 q_z^{-e}(\eta) d\eta \right], \tag{3.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^e = & -\frac{2}{1-k^2} \left(p^{+e}(z) - k^2 p^{-e}(z) \right) + \\
& + k \frac{1+\nu}{1-k^2} \left(\ln \rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} \right) \left(k \frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} - \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} \right) + \\
& + \frac{(1+3\nu)k^2 + \nu + 3 - 2(1+\nu)\rho^2}{4(1-k^2)} \frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} - \\
& - k \frac{(\nu+3)k^2 + 1 + 3\nu - 2(1+\nu)\rho^2}{4(1-k^2)} \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} - \\
& - \frac{\nu}{4h^3} \left[(2h-z)(z+h)^2 f^{+e}(\rho) + (2h+z)(z-h)^2 f^{-e}(\rho) \right] - \\
& - \nu \frac{z^2 - h^2}{4\rho h^2} \left[(z+h) \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^{+e}(\rho)) + (z-h) \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^{-e}(\rho)) \right] - \\
& + \frac{1-\nu}{4(1-k^2)} \frac{3z}{h^3} \int_k^1 \eta^3 (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) d\eta + \\
& + 3z \frac{1+\nu}{4h^3} \left[\int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \left. + \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \eta \ln \eta (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) d\eta \right] + \\
& + \frac{1-\nu}{1-k^2} \frac{3z+h}{2h^2} \int_k^1 \eta^2 q_z^{+e}(\eta) d\eta + \frac{1-\nu}{1-k^2} \frac{3z-h}{2h^2} \int_k^1 \eta^2 q_z^{-e}(\eta) d\eta + \\
& - \frac{1+\nu}{2} \frac{3z+h}{2h^2} \left[\int_k^1 q_z^{+e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 q_z^{+e}(\eta) d\eta \right] - \\
& - \frac{1+\nu}{2} \frac{3z-h}{2h^2} \left[\int_k^1 q_z^{-e}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 q_z^{-e}(\eta) d\eta \right]. \tag{3.91}
\end{aligned}$$

3.5. Методика розв'язання інтегро-диференціального рівняння суцільності та числові результати

Після підстановки знайдених таким чином компонент тензора напружень (3.88) – (3.91) та введеної функції (3.78), (3.80) в рівняння суцільності (3.37)

отримаємо ключове інтегро-диференціальне рівняння на шукану складову $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$ що задовольняє однорідні умови (3.81):

$$\begin{aligned}
\text{Comp}_2(\tilde{\mathcal{V}}, \rho, z) &= \frac{d^3 q_r^{+e}(z) (1-v^2) \rho^4 - \rho^2 (1-v) (3+v - (1-v)k^2) - (v+3)(1+v)k^2}{dz^3} + \\
&+ k \frac{d^3 q_r^{-e}(z) (1-v^2) \rho^4 - \rho^2 (1-v) ((3+v)k^2 - 1+v) - (v+3)(1+v)k^2}{dz^3} + \\
&+ k \left(\frac{\rho^2 \ln \rho}{2(1-k^2)} + \frac{\rho^2 (1-v) + 1+v}{2(1-v)(1-k^2)^2} k^2 \ln k \right) \left(k \frac{d^3 q_r^{+e}(z)}{dz^3} - \frac{d^3 q_r^{-e}(z)}{dz^3} \right) - \\
&- \frac{(1-v)\rho^2 + (1+v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^2 p^{+e}(z)}{dz^2} + \frac{(1-v)\rho^2 + 1+v}{(1-v^2)(1-k^2)} k^2 \frac{d^2 p^{-e}(z)}{dz^2} - \\
&- \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} + \\
&+ \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)}{(1-v^2)(1-k^2)} k \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} + \\
&+ \frac{3z}{2h^3} \int_k^1 \eta (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) \text{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\
&- \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} (f^{+e}(\rho) + f^{-e}(\rho)) - \frac{3zh^2 - z^3}{4h^3} \rho \frac{d}{d\rho} (f^{+e}(\rho) - f^{-e}(\rho)) - \\
&- \frac{z^2 - h^2}{4h^2} \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left((z+h)\rho q_z^{+e}(\rho) + (z-h)\rho q_z^{-e}(\rho) \right) \right] - \\
&- \frac{h+3z}{h^2} \rho q_z^{+e}(\rho) + \frac{h-3z}{h^2} \rho q_z^{-e}(\rho) = 0. \tag{3.92}
\end{aligned}$$

Невідому функцію $\tilde{\mathcal{V}}$, як і випадку відповідної температурної задачі, шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$\tilde{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{V}}^{(i)}, \tag{3.93}$$

члени якого мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \cos \gamma_n z + R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) \sin \lambda_n z \right), \\ \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u,m}^{(2i)}(z) U_0(s_m \rho),\end{aligned}\tag{3.94}$$

та є розв'язками наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\text{Comp}_2 \left(\tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}, \rho, z \right) &= \rho \frac{\partial g^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 g^{(2i-2)}(\rho, z)}{\partial z^2} - \\ &\left\{ \frac{d^3 q_r^{+e}(z) (1-v^2) \rho^4 - \rho^2 (1-v) (3+v - (1-v)k^2) - (v+3)(1+v)k^2}{dz^3} \right. \\ &+ k \frac{d^3 q_r^{-e}(z) (1-v^2) \rho^4 - \rho^2 (1-v) ((3+v)k^2 - 1+v) - (v+3)(1+v)k^2}{dz^3} + \\ &+ k \left(\frac{\rho^2 \ln \rho}{2(1-k^2)} + \frac{\rho^2 (1-v) + 1+v}{2(1-v)(1-k^2)^2} k^2 \ln k \right) \left(k \frac{d^3 q_r^{+e}(z)}{dz^3} - \frac{d^3 q_r^{-e}(z)}{dz^3} \right) - \\ &- \frac{(1-v)\rho^2 + (1+v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^2 p^{+e}(z)}{dz^2} + \frac{(1-v)\rho^2 + 1+v}{(1-v^2)(1-k^2)} k^2 \frac{d^2 p^{-e}(z)}{dz^2} - \\ &- \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{dq_r^{+e}(z)}{dz} + \\ &\left. + \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)}{(1-v^2)(1-k^2)} k \frac{dq_r^{-e}(z)}{dz} \right\} \delta_{2i-1,1}\end{aligned}\tag{3.95}$$

та

$$\begin{aligned}\text{Comp}_2 \left(\tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}, \rho, z \right) &= -\rho \frac{\partial g^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 g^{(2i)}(\rho, z)}{\partial z^2} - \\ &- \left\{ \frac{3z}{2h^3} \int_k^1 \eta (f^{+e}(\eta) - f^{-e}(\eta)) \text{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \frac{h+3z}{h^2} \rho q_z^{+e}(\rho) + \frac{h-3z}{h^2} \rho q_z^{-e}(\rho) - \right. \\ &- \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} (f^{+e}(\rho) + f^{-e}(\rho)) - \frac{3zh^2 - z^3}{4h^3} \rho \frac{d}{d\rho} (f^{+e}(\rho) - f^{-e}(\rho)) - \\ &\left. - \frac{z^2 - h^2}{4h^2} \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left((z+h)\rho q_z^{+e}(\rho) + (z-h)\rho q_z^{-e}(\rho) \right) \right] \right\} \delta_{i,1}.\end{aligned}\tag{3.96}$$

Як і у випадку задачі термопружності, після відокремлення змінних в рівняннях (3.95) та (3.96) для невідомих коефіцієнтів розвинення рядів (3.94) отримаємо наступні одновимірні інтегро-диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Z_{u,m}^{(2i)}(z)}{dz^2} - 2s_m^2 Z_{u,m}^{(2i)}(z) + \frac{s_m^4}{2} \int_{-h}^h Z_{u,m}^{(2i)}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta = -s_m^4 \left(\alpha_{u,m}^{(2i-2)} + z \beta_{u,m}^{(2i-2)} \right) + \\ & + \left\{ -\frac{s_m^4 z^3}{4h^3} \left[f_{u,m}^+ - f_{u,m}^- - h \left(q_{zu,m}^+ + q_{zu,m}^- \right) \right] + \frac{s_m^4 z^2}{4h} \left(q_{zu,m}^+ - q_{zu,m}^- \right) + \right. \\ & + \frac{s_m^2 z}{4h^3} \left[3 \left(f_{u,m}^+ - f_{u,m}^- \right) \left(s_m^2 h^2 + 4 \right) - h \left(q_{zu,m}^+ + q_{zu,m}^- \right) \left(s_m^2 h^2 + 12 \right) \right] + \\ & \left. + \frac{s_m^2}{4h} \left[2hs_m^2 \left(f_{u,m}^+ + f_{u,m}^- \right) - \left(q_{zu,m}^+ - q_{zu,m}^- \right) \left(s_m^2 h^2 + 4 \right) \right] \right\} \delta_{2i-1,1}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_n^4 \rho^2}{4} \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sign}(\rho - \eta) d\eta - \\ & - \frac{\gamma_n^4}{8} \int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sign}(\rho - \eta) d\eta - \\ & - \gamma_n^2 \int_k^1 \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sign}(\rho - \eta) d\eta + \rho \frac{dR_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)}{d\rho} + \\ & + \frac{\gamma_n^4}{4(1-k^2)} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \eta^3 R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{\gamma_n^4}{2(1-k^2)} \left(\frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} k^2 \right) \int_k^1 \eta \ln \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) d\eta = \\ & = \left[-\frac{\gamma_n^2 k \rho^2 \ln \rho}{2(1-k^2)} \left(kq_{rc,n}^+ - q_{rc,n}^- \right) + \frac{\gamma_n^2 \rho^4}{8(1-k^2)} \left(q_{rc,n}^+ - kq_{rc,n}^- \right) + \right. \\ & + \rho^2 \left[\frac{\gamma_n^2}{(1+\nu)(1-k^2)} \left(p_{c,n}^+ - k^2 p_{c,n}^- \right) - \frac{\gamma_n^2 k^3 \ln k}{2(1-k^2)^2} \left(kq_{rc,n}^+ - q_{rc,n}^- \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma_n^2 k^2 (1-\nu) - 8(2+\nu) - \gamma_n^2 (\nu+3)}{8(1+\nu)(1-k^2)} q_{rc,n}^+ + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\gamma_n^2 k^2 (\nu + 3) + 8(2 + \nu) + \gamma_n^2 (1 - \nu)}{8(1 + \nu)(1 - k^2)} k q_{rc,n}^- \right] + \\
& - \frac{\gamma_n^2 (\nu + 3) - 8(2 - \nu)}{8(1 - \nu)(1 - k^2)} k^2 q_{rc,n}^+ + \frac{\gamma_n^2 k^2 (\nu + 3) - 8(2 - \nu)}{8(1 - \nu)(1 - k^2)} k q_{rc,n}^- + \\
& \left. + \frac{\gamma_n^2 k^2}{(1 - \nu)(1 - k^2)} (p_{c,n}^+ - p_{c,n}^-) \right] \delta_{2i,1} - \\
& - \frac{\gamma_n^2 \rho^2}{(1 + \nu)(1 - k^2)} \beta_{c,n}^{(2i-1)} - \frac{\gamma_n^2 k^2}{(1 - \nu)(1 - k^2)} \alpha_{c,n}^{(2i-1)}. \tag{3.98}
\end{aligned}$$

Для $R_{s,n}^{(2i)}(\rho)$ отримуємо аналогічне рівняння, де нижній індекс «с» слід замінити на «s» та γ_n на λ_n . Розв'язок рівняння (3.97) при виконанні однорідних інтегральних умов матиме вигляд

$$\begin{aligned}
Z_{u,m}^{(2i)}(z) = & \left(\alpha_{u,m}^{(2i-1)} - \frac{f_{u,m}^+ + f_{u,m}^-}{2} \delta_{i,1} \right) s_m^2 \frac{(s_m h \operatorname{ch} s_m h - \operatorname{sh} s_m h) \operatorname{ch} s_m z - s_m z \operatorname{sh} s_m h \operatorname{sh} s_m z}{\Delta_{1u,m}} + \\
& + \frac{q_{zu,m}^+ - q_{zu,m}^-}{2} \left(s \frac{(h s_m \operatorname{sh} s_m h - 2 \operatorname{ch} s_m h) \operatorname{ch} s_m z - s_m z \operatorname{ch} s_m h \operatorname{sh} s_m z}{\Delta_{1u,m}} + \frac{1}{h} \right) \delta_{i,1} + \\
& + \left(h \beta_{u,m}^{(2i-1)} - \frac{f_{u,m}^+ - f_{u,m}^-}{2} \delta_{i,1} \right) \left(s_m^2 \frac{(s_m h \operatorname{sh} s_m h - \operatorname{ch} s_m h) \operatorname{sh} s_m z - s_m z \operatorname{ch} s_m h \operatorname{ch} s_m z}{\Delta_{2u,m}} + \frac{3z}{h^3} \right) - \\
& - \left(\beta_{u,m}^{(2i-1)} - \frac{q_{zu,m}^+ + q_{zu,m}^-}{2} \delta_{i,1} \right) \left(s_m \frac{(h s_m \operatorname{ch} s_m h - 2 \operatorname{sh} s_m h) \operatorname{sh} s_m z - s_m z \operatorname{sh} s_m h \operatorname{ch} s_m z}{\Delta_{2u,m}} + \frac{3z}{h^2} \right). \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Цю формулу можемо записати в еквівалентному вигляді

$$Z_{u,m}^{(2i)}(z) = \sum_{n=1}^{u,m} \left(Z_{cu,nm}^{(2i)} \cos \gamma_n z + Z_{su,nm}^{(2i)} \sin \lambda_n z \right). \tag{3.100}$$

Тут

$$\begin{aligned}
Z_{cu,nm}^{(2i)} = & - \left[\left(2\alpha_{u,m}^{(2i-1)} - (f_{u,m}^+ + f_{u,m}^-) \delta_{i,1} \right) \frac{2s_m \gamma_n^2 \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{1u,m}} + \right. \\
& \left. + (q_{zu,m}^+ - q_{zu,m}^-) \delta_{i,1} \left(s_m^2 + 3\gamma_n^2 - \frac{2s_m \gamma_n^2 h}{\Delta_{1u,m}} \right) \right] \frac{s_m^2 \cos \gamma_n h}{h(\gamma_n^2 + s_m^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{su, nm}^{(2i)} = & - \left[\left(2h\beta_{u,m}^{(2i-1)} - (f_{u,m}^+ - f_{u,m}^-) \delta_{i,1} \right) \left(2\lambda_n^2 \frac{s_m h \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{2u,m}} + s_m^2 - \lambda_n^2 \right) s_m + \right. \\
& \left. + \left((q_{zu,m}^+ + q_{zu,m}^-) \delta_{i,1} - 2\beta_{u,m}^{(2i-1)} \right) \left(2\lambda_n^2 \frac{s_m^2 h^2 - \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{2u,m}} + (s_m^2 + 3\lambda_n^2) h s \right) \right] \times \\
& \times \frac{s}{h^2 (\lambda_n^2 + s_m^2)^2 \sin \lambda_m h}, \\
\Delta_{1u,m} = & \operatorname{ch} s_m h \operatorname{sh} s_m h + s_m h, \quad \Delta_{2u,m} = \operatorname{ch} s_m h \operatorname{sh} s_m h - s_m h.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (3.98) шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) = & A_{1c,n}^{(2i-1)} I_0(\gamma_n \rho) + A_{2c,n}^{(2i-1)} \rho I_1(\gamma_n \rho) + \\
& + A_{3c,n}^{(2i-1)} K_0(\gamma_n \rho) + A_{4c,n}^{(2i-1)} \rho K_1(\gamma_n \rho) + \frac{2}{1-k^2} (q_{rc,n}^+ - k q_{rc,n}^-) \delta_{2i-1,1}.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Для визначення сталих A_{jc} ($j = \overline{1,4}$) підставимо (3.102) в (3.98) та прирівняємо коефіцієнти при $\rho^2 \ln \rho$, ρ^2 та вільному члені. Ще одне рівняння отримаємо із однорідної інтегральної умови виду (3.27), в результаті чого прийдемо до системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{l=1}^4 a_{t,n}^{kl} A_{lt,n}^{(2i-1)} = f_{t,n}^k, \quad k = \overline{1,4}, \quad t = c, s. \tag{3.103}$$

Тут

$$\begin{aligned}
f_c^1 = & -\frac{\gamma_n^4}{4} (q_{rc,n}^+ + k q_{rc,n}^-) \delta_{2i-1,1}, \quad f_{c,n}^4 = -(q_{rc,n}^+ - k q_{rc,n}^-) \delta_{2i-1,1}, \\
f_{c,n}^2 = & -\gamma_n^2 \left[8\gamma_n^2 (\beta_{c,n}^{(2i-2)} + (p_{c,n}^+ - k^2 p_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1}) + \right. \\
& + k q_{rc,n}^- (8v + \gamma_n^2 (1+v) - \gamma_n^2 k^2 (3-v + 4(1+v) \ln(k))) \delta_{2i-1,1} - \\
& \left. - q_{rc,n}^+ (8v + \gamma_n^2 (v-3) + \gamma_n^2 k^2 (1+v)) \delta_{2i-1,1} \right], \\
f_{c,n}^3 = & -\gamma_n^2 \left[4\gamma_n^2 k^2 (\alpha_{c,n}^{(2i-2)} + (p_{c,n}^+ - p_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1}) + \right. \\
& + k q_{rc,n}^- (-4 + k^2 (1-v) (\gamma_n^2 + 4) + 2\gamma_n^2 k^2 (1+v) \ln(k)) \delta_{2i-1,1} + \\
& \left. + q_{rc,n}^+ (4k^2 - 4(1-v) - \gamma_n^2 k^2 (1-v)) \delta_{2i-1,1} \right],
\end{aligned}$$

а вирази для коефіцієнтів $a_{t,n}^{kl}$ такі ж як і в задачі термопружності.

Оскільки знайдені таким чином функції $R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)$ та $R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho)$ задовольняють однорідні інтегральні умови (3.27), то їх можемо подати в еквівалентному вигляді (3.34).

Після знаходження всіх невідомих коефіцієнтів остаточно знаходимо шукану складову введеної функції $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$ за формулою (3.93), а відповідно і компоненти тензора напружень, що відповідають цьому розв'язку:

$$\tilde{\mathcal{V}} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\mathcal{V}_{nm}^{\text{cu}} \cos \gamma_n z + \mathcal{V}_{nm}^{\text{su}} \sin \lambda_n z \right) U_0(s_m \rho), \quad (3.104)$$

$$\mathcal{V}_{nm}^{\text{cu}} = R_{nm}^{\text{cu}} + Z_{nm}^{\text{cu}}, \quad \mathcal{V}_{nm}^{\text{su}} = R_{nm}^{\text{su}} + Z_{nm}^{\text{su}},$$

$$\text{де } \left\{ R_{nm}^{\text{ju}}, Z_{nm}^{\text{ju}} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ R_{\text{ju},nm}^{(2i-1)}, Z_{\text{ju},nm}^{(2i)} \right\}, \quad (\text{j} = \text{c}, \text{s}).$$

Компоненти тензора напружень лише від самоврівноважених навантажень знаходимо за формулами (3.88) – (3.93), які з врахуванням розвинень (3.77) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_z^e &= -\frac{1}{4h^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(2h-z)(z+h)^2 f_{u,m}^+ + (2h+z)(z-h)^2 f_{u,m}^- \right] U_0(s_m \rho) - \\ &\quad - \frac{z^2 - h^2}{4h^2} \sum_s \left[(z+h) q_{zu,m}^+ + (z-h) q_{zu,m}^- \right] U_0(s_m \rho) - \\ &\quad - \frac{2}{1-k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(q_{rc,n}^+ - k q_{rc,n}^- \right) \frac{\cos \gamma_n h - \cos \gamma_n z}{\gamma_n^2} + \left(q_{rs,n}^+ - k q_{rs,n}^- \right) \frac{\lambda_n z \cos \lambda_n h - \sin \lambda_n z}{\lambda_n^2} \right], \\ \sigma_{rz}^e &= \frac{1}{\rho(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((\rho^2 - k^2) q_{rc,n}^+ + (1-\rho^2) k q_{rc,n}^- \right) \frac{\sin \gamma_n z}{\gamma_n} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((\rho^2 - k^2) q_{rs,n}^+ + (1-\rho^2) k q_{rs,n}^- \right) \frac{\cos \lambda_n h - \cos \lambda_n z}{\lambda_n} + \\ &\quad + \frac{1}{4h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(3z-h)(z+h) q_{zu,m}^+ + (3z+h)(z-h) q_{zu,m}^- \right] \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m} - \\ &\quad - \frac{3(z^2 - h^2)}{4h^3} \sum_{m=1}^{\infty} (f_{u,m}^+ - f_{u,m}^-) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^e = & -\frac{1}{\rho^2(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((\rho^2 - k^2) (p_{c,n}^+ \cos \gamma_n z + p_{s,n}^+ \sin \lambda_n z) + (1 - \rho^2) k^2 (p_{c,n}^- \cos \gamma_n z + p_{s,n}^- \sin \lambda_n z) \right) - \\
& -k \sum_{\gamma, \lambda} \frac{q_{rc,n}^- \cos \gamma_n z + q_{rs,n}^- \sin \lambda_n z}{2(1-k^2)} \left((1+\nu) \left[\ln \rho - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1-\rho^2}{1-k^2} \ln k \right] + (3+\nu) \frac{(1-\rho^2)(\rho^2 - k^2)}{4\rho^2} \right) + \\
& + \sum_{\gamma, \lambda} \frac{q_{rc,n}^+ \cos \gamma z + q_{rs,n}^+ \sin \lambda z}{2(1-k^2)} \left((1+\nu) k^2 \left[\ln \rho - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1-\rho^2}{1-k^2} \ln k \right] + (3+\nu) \frac{(1-\rho^2)(\rho^2 - k^2)}{4\rho^2} \right) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \left[\frac{\nu s_m^2 (2h-z)(z+h)^2 - 6z(1-\nu)}{4s_m^3 h^3 \rho} f_{u,m}^+ + \frac{\nu s_m^2 (z-h)(z+h)^2 + 2(3z+h)(1-\nu)}{4s_m^3 h^2 \rho} q_{zu,m}^+ + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\nu s_m^2 (2h+z)(z-h)^2 + 6z(1-\nu)}{4s_m^3 h^3 \rho} f_{u,m}^- + \frac{\nu s_m^2 (z+h)(z-h)^2 + 2(3z-h)(1-\nu)}{4s_m^3 h^2 \rho} q_{zu,m}^- \right] U_1(s_m \rho) - \\
& - \frac{3z}{2h^3} \frac{\rho^2(1-k^2)U_0(s_m \rho) - (\rho^2 - k^2)U_0(s_m) - k^2(1-\rho^2)U_0(s_m k)}{\rho^2 s_m^2 (1-k^2)} (f_{u,m}^+ - f_{u,m}^-) + \\
& + \left. \frac{\rho^2(1-k^2)U_0(s_m \rho) - (\rho^2 - k^2)U_0(s_m) - k^2(1-\rho^2)U_0(s_m k)}{2h^2 \rho^2 s_m^2 (1-k^2)} \left((3z+h)q_{zu,m}^+ + (3z-h)q_{zu,m}^- \right) \right\}, \\
\sigma^e = & -\frac{2}{1-k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(p_{c,n}^+ - k^2 p_{c,n}^-) \cos \gamma_n z + (p_{s,n}^+ - k^2 p_{s,n}^-) \sin \lambda_n z \right] + \\
& + k \frac{1+\nu}{1-k^2} \left(\ln \rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[(kq_{rc,n}^+ - q_{rc,n}^-) \cos \gamma_n z + (kq_{rs,n}^+ - q_{rs,n}^-) \sin \lambda_n z \right] + \\
& + \frac{(1+3\nu)k^2 + \nu + 3 - 2(1+\nu)\rho^2}{4(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (q_{rc,n}^+ \cos \gamma_n z + q_{rs,n}^+ \sin \lambda_n z) - \\
& - k \frac{(\nu+3)k^2 + 1 + 3\nu - 2(1+\nu)\rho^2}{4(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (q_{rc,n}^- \cos \gamma_n z + q_{rs,n}^- \sin \lambda_n z) - \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \left[\frac{\nu s_m^2 (2h-z)(z+h)^2 + 6z(1+\nu)}{4s_m^2 h^3} f_{u,m}^+ + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\nu s_m^2 (2h+z)(z-h)^2 - 6z(1+\nu)}{4s_m^2 h^3} \tilde{f}_{u,m}^- \right] U_0(s_m \rho) + \frac{3z}{h^3} \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{s_m^2 (1-k^2)} (f_{u,m}^+ - f_{u,m}^-) + \\
& - \left[\frac{\nu s_m^2 (z-h)(z+h)^2 - 2(3z+h)(1+\nu)}{4s_m^2 h^2} q_{zu,m}^+ + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu s_m^2 (z+h)(z-h)^2 - 2(3z-h)(1+\nu)}{4s_m^2 h^2} q_{z,u,m}^- \left. U_0(s_m \rho) + \right. \\
& \left. - \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{h^2 s_m^2 (1-k^2)} \left((3z+h) q_{z,u,m}^+ + (3z-h) q_{z,u,m}^- \right) \right\}, \quad (3.105)
\end{aligned}$$

а компоненти тензора напружень від складової $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz}^\nu &= - \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu_{nm}^{cu} \frac{\sin \gamma_n z}{\gamma_n} + \nu_{nm}^{su} \frac{\cos \lambda_n h - \cos \lambda_n z}{\lambda_n} \right) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m}, \\
\sigma_z^\nu &= - \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu_{nm}^{cu} \frac{\cos \gamma_n z - \cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + \nu_{nm}^{su} \frac{\sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n h}{\lambda_n^2} \right) U_0(s_m \rho), \\
\sigma^\nu &= \nu \sigma_z^\nu - \quad (3.106)
\end{aligned}$$

$$- \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu_{nm}^{cu} \cos \gamma_n z + \nu_{nm}^{su} \sin \lambda_n z \right) \frac{1}{s_m^2} \left((1+\nu) U_0(s_m \rho) - \frac{2}{1-k^2} (U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)) \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^\nu &= -\nu \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu_{nm}^{cu} \frac{\cos \gamma_n z - \cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + \nu_{nm}^{su} \frac{\sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n h}{\lambda_n^2} \right) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m \rho} + \\
& + \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\nu_{nm}^{cu} \cos \gamma_n z + \nu_{nm}^{su} \sin \lambda_n z \right) \frac{1}{s_m^2} \times \\
& \times \left((1-\nu) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m \rho} - U_0(s_m \rho) + U_0(s_m) \frac{\rho^2 - k^2}{\rho^2 (1-k^2)} + U_0(s_m k) \frac{k^2 (1-\rho^2)}{\rho^2 (1-k^2)} \right).
\end{aligned}$$

Для верифікації отриманих аналітичних результатів, виконано числові розрахунки напруженого стану при різних видах силових навантажень. Насамперед, проведено розрахунки, коли скінченний циліндр зазнає лише зовнішнього та внутрішнього тиску (задача Ляме в двовимірному випадку). На рис. 3.8 зображено розподіл безрозмірних радіальних напружень σ_r / p , зумовлених лише навантаженнями

$$\sigma_r|_{\rho=1} = p \left(1 - (z/h)^2 \right), \quad \sigma_r|_{\rho=k} = 0 \quad (3.107)$$

при $\nu = 1/3$, $h = 1$, $k = 0.5$. На рис.3.9 показано поведінку радіальних напружень в перетині $z = 0$. На цьому ж рисунку показано і розподіл напружень σ_r^t / p , що

виникають в довгому порожнистому циліндрі (задача Ляме) і розраховуються за формулою

$$\sigma_r^t = -\frac{(\rho^2 - k^2)p_e + k^2(1 - \rho^2)p_i}{\rho^2(1 - k^2)} \quad (3.108)$$

при $p_e = p$, $p_i = 0$. Ці результати є дуже близькими і, як показали подальші розрахунки, вже при $h = 3$ вони співпадають.

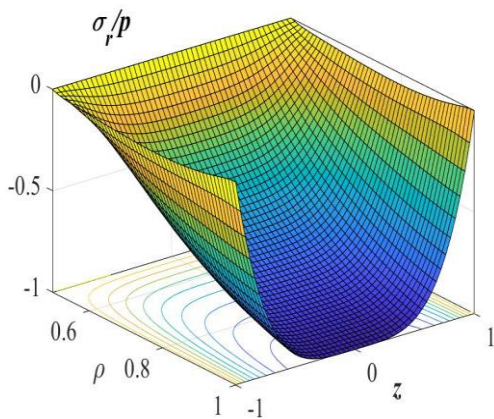


Рис. 3.8

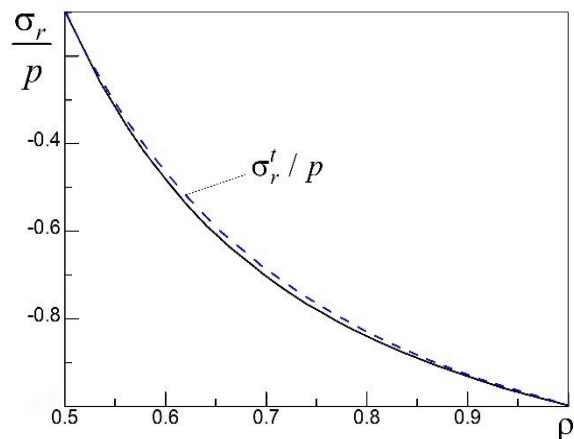


Рис. 3.9

Розглянемо навантаження скінченного циліндра на торцях

$$\sigma_z|_{z=h} = \int_k^1 \rho f(\rho) d\rho = \text{const}, \quad \sigma_z|_{z=-h} = f(\rho) = p(1 - \rho^2)(k^2 - \rho^2), \quad (3.109)$$

а решта умов (3.38), (3.39), (3.41) – однорідні. При заданому осьовому навантаженні при $z = -h$ відповідне зусилля на торці $z = h$ вибрано таким чином, щоб виконувалося інтегральна умова (3.65). В протилежному випадку не буде виконуватись друге рівняння рівноваги. Розподіл безрозмірних осьових напружень σ_z / p в цьому випадку показано на рис. 3.10.

Рисунок 3.11 показує розподіл безрозмірних дотичних напружень σ_{rz} / τ в скінченному циліндрі у випадку наступних крайових умов:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}|_{\rho=1} &= \tau(z/h)^3(1 - (z/h)^2), & \sigma_{rz}|_{\rho=k} &= \tau z(z^4 - h^2) / h^5, \\ \sigma_{rz}|_{z=h} &= \tau(1 - \rho)(\rho - k), & \sigma_{rz}|_{z=-h} &= \tau(1 - \rho^2)(\rho^2 - k^2), \end{aligned} \quad (3.110)$$

а нормальні зусилля приймаються рівні нулеві. Задані дотичні навантаження задовольняють інтегральні умови рівноваги (3.64) та (3.65) та умови суцільності (3.83).

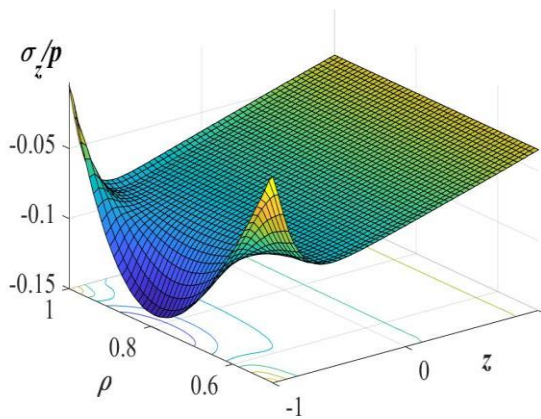


Рис. 3.10

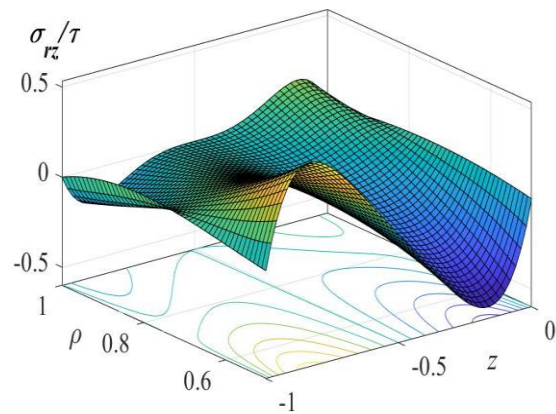


Рис. 3.11

Як показують наведені числові результати, напружений стан скінченного циліндра, розрахований за наведеними вище формулами (3.84) – (3.87), (3.105), (3.106), тотожно задовольняє рівняння рівноваги (3.1), (3.2), перше рівняння суцільності (3.36) та відповідні крайові умови (3.38) – (3.41). При цьому задані зовнішні навантаження повинні задовольняти умови (3.64), (3.65) та (3.83). Точність задоволення другого рівняння суцільності (3.37) залежить від кількості членів у функціональному ряді (3.93). Числові дослідження показують, що для досягнення точності порядку 10^{-3} достатньо 6-8 членів ряду. Таким чином і це рівняння можемо задовольнити з довільною наперед заданою точністю

3.6. Висновки до розділу

У випадку осесиметричної задачі теорій пружності та термопружності для циліндра скінченної довжини отримані такі основні результати.

- Виведено інтегральні залежності компонент тензора напружень від єдиної функції Вігака, які тотожно задовольняють рівняння рівноваги і перше рівняння суцільності.
- На їх основі вісім межових умов для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінено на три інтегральні умови на введену функцію.

- Отримано інтегральні умови рівноваги та суцільності для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження дотичних зусиль в кутових точках.
- Вихідну задачу зведено до розв'язання ключового інтегро-диференціального рівняння суцільності для однієї функції Вігака із трьома інтегральними умовами.
- Адаптовано аналітично-чисельний метод розв'язання отриманого інтегро-диференціального рівняння для випадку циліндричних координат.
- Виконано числовий аналіз напруженого стану циліндра при різних видах теплового та силового навантаження.

РОЗДІЛ 4

ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЙ ВІГАКА В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Розглянуто тривимірні задачі теорії термопружності та пружності в напруженнях для прямокутного паралелепіпеда. Запропоновано використання трьох скалярних функцій Вігака для вираження компонент тензора напружень, що дало можливість тотожно задовольнити рівняння рівноваги, а всі 18 межових умов на різних гранях паралелепіпеда еквівалентно замінити на 12 інтегральних умов для визначальних функцій. У результаті вихідні задачі зведено до системи інтегродиференціальних на введені функції. Для заданих зовнішніх навантажень знайдено інтегральні умови, яким вони повинні задовольняти, щоб забезпечити пружну рівновагу паралелепіпеда, а також підтверджено умови погодження заданих дотичних зусиль на його відповідних гранях і у кутових точках. Для розв'язання зв'язаної системи ключових рівнянь запропоновано чисельно-аналітичний алгоритм послідовних наближень та проведена його числова верифікація у випадку конкретних теплових чи силових навантажень.

Результати викладених в четвертому розділі досліджень частково опубліковані в роботах [93, 105, 186].

4.1. Температурні напруження в паралелепіпеді

Розглядається квазістатична просторова задача термопружності для однорідного ізотропного прямокутного паралелепіпеда, який в декартовій системі координат x, y, z займає область $D_P = \{(x, y, z) \in [-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y] \times [-a_z, a_z]\}$. Для визначення шести компонент тензора напружень σ_{ij} ($i, j = x, y, z$), що описують термопружний стан такого паралелепіпеда, зумовлений заданим температурним полем $T = T(x, y, z)$, маємо три рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (4.1)$$

однорідні межові умови

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=\pm a_x} &= \sigma_{xy}|_{x=\pm a_x} = \sigma_{xz}|_{x=\pm a_x} = 0, \\ \sigma_{yy}|_{y=\pm a_y} &= \sigma_{xy}|_{y=\pm a_y} = \sigma_{yz}|_{y=\pm a_y} = 0, \\ \sigma_{zz}|_{z=\pm a_z} &= \sigma_{xz}|_{z=\pm a_z} = \sigma_{yz}|_{z=\pm a_z} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

та три рівняння суцільності в напруженнях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \nu \Delta_{xy} \sigma_{zz} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\Delta_{xy} T, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \nu \Delta_{yz} \sigma_{xx} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} &= -\Delta_{yz} T, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \nu \Delta_{xz} \sigma_{yy} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} &= -\Delta_{xz} T, \\ \Delta_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тут σ_{ij} , ($i, j = x, y, z$) – напруження в розмірності температури, тобто напруження віднесені до величини Ea_T ; E , ν , α_T – модуль Юнга, коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення, відповідно.

Рівняння суцільності в напруженнях (4.3) відносяться до першої групи рівнянь Бельтрамі. Надалі розглядатимуться лише ці рівняння, оскільки в роботах [17, 186] показано, що саме вони є ключовими при розв'язуванні задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для паралелепіпеда. Рівняння рівноваги (4.1) задовольнятимуться тотожно, якщо компоненти тензора напружень подати у вигляді інтегральної залежності від трьох функцій $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$, наступним чином:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z)|_{x=\xi} d\xi, \quad \sigma_{yz} = -\frac{1}{4} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_x \operatorname{sgn}(y-\eta) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\eta d\zeta,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z) |y - \eta| d\eta, \quad \sigma_{xz} = -\frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_y \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\xi d\zeta, \quad (4.4)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y) |z - \zeta| d\zeta, \quad \sigma_{xy} = -\frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta.$$

Неважко зауважити, що однорідні межові умови (4.2) будуть виконуватися, якщо введені функції задовольнятимуть наступні інтегральні умови:

$$\begin{aligned} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z dx &= \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_z dx = \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z dy = \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_z dy = 0, \\ \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y dx &= \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_y dx = \int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_y dz = \int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_y dz = 0, \\ \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x dy &= \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_x dy = \int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_x dz = \int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_x dz = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Після підстановки виразів (4.4) у рівняння суцільності (4.3) отримуємо наступні інтегро-диференціальні рівняння суцільності для визначення невідомих функцій \mathcal{V}_i , $i = x, y, z$:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{V}_z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z |y - \eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z |x - \xi| d\xi = \\ = -\Delta_{xy} T + \nu (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x) + \frac{\nu}{2} \Delta_{xy} \int_{-a_z}^{a_z} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y) |z - \zeta| d\zeta - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x |y - \eta| d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y |x - \xi| d\xi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Два інших рівняння отримуються циклічною перестановкою змінних.

Функції $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$ назовемо функціями Вігака, оскільки їх уведено у результаті узагальнення методу безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги в просторовому випадку для подання компонент тензора напружень.

4.2. Методика відокремлення змінних в інтегро-диференціальних рівняннях суцільності та числові результати

Для відшукування розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності пропонується наступний метод послідовних наближень. В нульовому наближенні в рівнянні (4.6) покладаємо $[\mathcal{V}_x]^{(0)} = [\mathcal{V}_y]^{(0)} = 0$ і, розв'язуючи отримане рівняння знаходимо перше наближення $[\mathcal{V}_z]^{(1)}$ в залежності лише від температурного поля. Наступні наближення для $[\mathcal{V}_z]^{(k)}$ лише враховуватимуть вплив функцій $[\mathcal{V}_x]^{(k-1)}$ та $[\mathcal{V}_y]^{(k-1)}$. Неважко зауважити, що в кожному наближенні в рівнянні (4.6) координата z виступає як параметр, тобто, фактично, розв'язується плоска задача термопружності для прямокутника в довільному перетині $z = \text{const}$. Аналогічний спосіб буде використано і для двох інших рівнянь. Таким чином, розв'язування зв'язаної системи рівнянь типу (4.6) зводиться до послідовності розв'язування плоских задач термопружності у відповідних поперечних перетинах паралелепіпеда.

Розглянемо тепер інтегро-диференціальне рівняння суцільності (4.6) відносно функції \mathcal{V}_z , вважаючи \mathcal{V}_x та \mathcal{V}_y відомими функціями координат. Зауважимо, що інтегральні умови (4.5) на введені функції Вігака є не що інше, як умови на їх головний вектор та головний момент по «чужих» координатах. Для подальшої побудови розв'язку поставленої задачі з однорідними інтегральними умовами (4.5), як і в двовимірному випадку, зручно використати повні системи функцій $1, t, \cos \gamma_{t,n} t, \sin \lambda_{t,n} t$, де $\gamma_{t,n} = \pi n / a_t$, $\lambda_{t,n}$ додатні корені трансцендентного рівняння $\sin(\lambda_t a_t) = \lambda_t a_t \cos(\lambda_t a_t)$, $t = x, y, z$.

Для розв'язування рівняння (4.6) у кожному наближенні використаємо метод відокремлення змінних, як і випадку розв'язування плоскої задачі термопружності для прямокутної області, описаний в другому розділі. Згідно з цим методом, функцію \mathcal{V}_z шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$\mathcal{V}_z = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_z^{(i)}, \quad (4.7)$$

де члени ряду, що подаються у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_{n--}^{c--(2i-1)}(y, z) \cos \gamma_{x,n} x + Z_{n--}^{s--(2i-1)}(y, z) \sin \lambda_{x,n} x \right), \\ \mathcal{V}_z^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) \cos \gamma_{y,m} y + Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z) \sin \lambda_{y,m} y \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

знаходяться як розв'язки наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} 2\mathcal{V}_z^{(2i-1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z^{(2i-1)} |y - \eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z^{(2i-1)} |x - \xi| d\xi - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-1)}}{\partial y^2} = \\ = \left[v\mathcal{V}_y + \frac{v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_z}^{a_z} (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x) |z - \zeta| d\zeta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x |y - \eta| d\eta - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \delta_{i,1} - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-2)}}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{V}_z^{(2i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z^{(2i)} |y - \eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z^{(2i)} |x - \xi| d\xi - \frac{\partial^2 g_z^{(2i)}}{\partial x^2} = \\ = \left[v\mathcal{V}_x + \frac{v}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_z}^{a_z} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y) |z - \zeta| d\zeta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y |x - \xi| d\xi - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \delta_{i,1} - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-1)}}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тут уведено позначення

$$\begin{aligned} g_z^{(2i-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_{n--}^{c--(2i-1)}(y, z) \frac{\cos \gamma_{x,n} a_x}{\gamma_{x,n}^2} + x Z_{n--}^{s--(2i-1)}(y, z) \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x}{\lambda_{x,n}} \right), \\ g_z^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) \frac{\cos \gamma_{y,m} a_y}{\gamma_{y,m}^2} + y Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z) \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y}{\lambda_{y,m}} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Просумувавши рівняння (4.9) та (4.10), отримаємо рівняння (4.6), яке буде задовольнятися з точністю до лінійного по координаті x або y доданка (4.11). В роботі [187] показано, що зі збільшенням кількості членів ряду (4.7), цей доданок прямує до нуля як і у випадку плоскої задачі. Таким чином, якщо члени ряду (4.7) є

розв'язками рівнянь (4.9), (4.10), то інтегро-диференціальне рівняння (4.6) можна задовольнити з довільною, наперед заданою точністю.

Використовуючи повноту застосованих систем функцій, температурне поле розвинемо в подвійний ряд

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) = & T_{-}^{00-}(z) + xT_{-}^{10-}(z) + yT_{-}^{01-}(z) + xyT_{-}^{11-}(z) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(T_{n-}^{c0-}(z) + yT_{n-}^{c1-}(z) \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(T_{n-}^{s0-}(z) + yT_{n-}^{s1-}(z) \right) \sin \lambda_{x,n} x \right] + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(T_{m-}^{0c-}(z) + xT_{m-}^{1c-}(z) \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(T_{m-}^{0s-}(z) + xT_{m-}^{1s-}(z) \right) \sin \lambda_{y,m} y \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[T_{nm-}^{cc-}(z) \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + T_{nm-}^{cs-}(z) \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,y} y + \right. \\
 & \left. + T_{nm-}^{sc-}(z) \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + T_{nm-}^{ss-}(z) \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right], \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

коефіцієнти розвинень визначаються із умов ортогональності функцій розкладу, а знак «підкреслення» в індексах коефіцієнтів розвинення температурного поля та у формулах (4.8), (4.11) означає, що при циклічній заміні змінних на це місце буде поставлений відповідний символ, що відповідає розвиненню по координаті z , тобто

$$\begin{aligned}
 T^{jk-}(z) &= T^{jk0} + zT^{jk1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(T_k^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + T_k^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right) \right), \quad j, k = 0, 1, \\
 T_n^{jk-}(z) &= T_n^{jk0} + zT_n^{jk1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(T_{nk}^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + T_{nk}^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right) \right), \quad j = c, s, \quad k = 0, 1, \\
 T_m^{jk-}(z) &= T_m^{jk0} + zT_m^{jk1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(T_{mk}^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + T_{mk}^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right) \right), \quad k = c, s, \quad j = 0, 1, \\
 T_{nm}^{jk-}(z) &= T_{nm}^{jk0} + zT_{nm}^{jk1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(T_{nmk}^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + T_{nmk}^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right) \right), \quad j, k = c, s.
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Функції $g_z^{(2i-1)}$ та $g_z^{(2i)}$ подамо з урахуванням межових умов (4.5) в еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned}
g_z^{(2i-1)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\tilde{\alpha}_{m-}^{cc-(2i-1)}(z) + x\tilde{\alpha}_{m-}^{sc-(2i-1)}(z) \right) \cos \gamma_{y,m} y + \right. \\
&\quad \left. + \left(\tilde{\alpha}_{m-}^{cs-(2i-1)}(z) + x\tilde{\alpha}_{m-}^{ss-(2i-1)}(z) \right) \sin \lambda_{y,m} y \right], \\
g_z^{(2i)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\alpha_{n-}^{cc-(2i)}(z) + y\alpha_{n-}^{cs-(2i)}(z) \right) \cos \gamma_{x,n} x + \right. \\
&\quad \left. + \left(\alpha_{n-}^{sc-(2i)}(z) + y\alpha_{n-}^{ss-(2i)}(z) \right) \sin \lambda_{x,n} x \right].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Функції α та $\tilde{\alpha}$ встановимо в процесі розв'язування задачі.

Оскільки введені функції Вігака \mathcal{V}_x та \mathcal{V}_y повинні задовольняти нульові інтегральні умови (4.5) по “чужим” координатам, а по “своїй” ні, то і шукатимемо їх у вигляді наступних згорнутих рядів

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(X_{m-}^{0c-}(z) + xX_{m-}^{1c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) + X_{nm-}^{sc-}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \right) \right) \cos(\gamma_{y,m} y) + \right. \\
&\quad \left. + \left(X_{m-}^{0s-}(z) + xX_{m-}^{1s-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_{nm-}^{cs-}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) + X_{nm-}^{ss-}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \right) \right) \sin(\lambda_{y,m} y) \right\}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(Y_{n-}^{c0-}(z) + yY_{n-}^{c1-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + Y_{nm-}^{cs-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right) \right) \cos(\gamma_{x,n} x) + \right. \\
&\quad \left. + \left(Y_{n-}^{s0-}(z) + yY_{n-}^{s1-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_{nm-}^{sc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + Y_{nm-}^{ss-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right) \right) \sin(\lambda_{x,n} x) \right\}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$X_{nm-}^{jk-}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_{nmk}^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + X_{nmk}^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right), \quad j = 0, 1, c, s; \quad k = c, s, \tag{4.17}$$

$$Y_{nm-}^{jk-}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(Y_{nmk}^{jkc} \cos(\gamma_{z,k} z) + Y_{nmk}^{jks} \sin(\lambda_{z,k} z) \right), \quad j = c, s; \quad k = 0, 1, c, s.$$

Після підстановки виразів (4.8), (4.12), (4.15), (4.16) з урахуванням (4.11) в рівняннях (4.9) та (4.10) стає можливим відокремлення змінних i для визначення коефіцієнтів розвинення отримаємо наступні інтегро-диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 Z_{n-}^{c--(2i-1)}(y, z)}{\partial y^2} - 2\gamma_{x,n}^2 Z_{n-}^{c--(2i-1)}(y, z) + \frac{\gamma_{x,n}^4}{2} \int_{-a_y}^{a_y} Z_{n-}^{c--(2i-1)}(\eta, z) |y - \eta| d\eta = \\
& = -\gamma_{x,n}^4 \left\{ \alpha_{n-}^{cc--(2i-2)}(z) + y\alpha_{n-}^{cs--(2i-2)}(z) + [G_{n-}^{c0-}(z) + yG_{n-}^{c1-}(z) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(G_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + G_{nm-}^{cs-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right) \right] \delta_{2i-1,1} \left. \right\}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
G_{n-}^{c0-}(z) &= T_{n-}^{c0-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{x,n}^2} Y_{n-}^{c0-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} Y_{n-}^{c0-}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{y,m} a_y)}{\gamma_{y,m}^2} X_{nm-}^{cc-}(z), \\
G_{n-}^{c1-}(z) &= T_{n-}^{c1-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{x,n}^2} Y_{n-}^{c1-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} Y_{n-}^{c1-}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{y,m} a_y)}{\lambda_{y,m}^2} X_{nm-}^{cs-}(z), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{nm-}^{cc-}(z) &= T_{nm-}^{cc-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nm-}^{cc-}(z) - \frac{1}{\gamma_{y,m}^2} X_{nm-}^{cc-}(z) - \\
& \quad - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(Y_{nm-}^{cc-}(\zeta) + X_{nm-}^{cc-}(\zeta) \right) |z - \zeta| d\zeta, \\
G_{nm-}^{cs-}(z) &= T_{nm-}^{cs-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nm-}^{cs-}(z) - \frac{1}{\lambda_{y,m}^2} X_{nm-}^{cs-}(z) - \\
& \quad - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(Y_{nm-}^{cs-}(\zeta) + X_{nm-}^{cs-}(\zeta) \right) |z - \zeta| d\zeta.
\end{aligned}$$

Для $Z_{n-}^{s--(2i-1)}(y, z)$ аналогічне рівняння (4.18) та формули (4.19), легко отримати заміною першого символу «с» на «s» та $\gamma_{x,n}$ на $\lambda_{x,n}$. Тому наведемо формули лише для парної частини. Розв'язок таких рівнянь, що задовольняє однорідні інтегральні умови (4.5) запишемо у вигляді:

$$Z_{n-}^{c-(2i-1)}(y, z)(y, z) = A_{n-}^{cc-(2i-1)}(z) f_c(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{n-}^{cs-(2i-1)}(z) f_s(\gamma_{x,n}, a_y, y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{x,n}^4 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + \frac{\gamma_{x,n}^4 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cs-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right] \delta_{2i-1,1}, \quad (4.20)$$

$$Z_{n-}^{s-(2i-1)}(y, z) = A_{n-}^{sc-(2i-1)}(z) f_c(\lambda_{x,n}, a_y, y) + A_{n-}^{ss-(2i-1)}(z) f_s(\lambda_{x,n}, a_y, y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{x,n}^4 \gamma_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{sc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + \frac{\lambda_{x,n}^4 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{ss-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right] \delta_{2i-1,1}, \quad (4.21)$$

$$A_{n-}^{cc-(2i-1)}(z) = \alpha_{n-}^{cc-(2i-2)}(z) + \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{c0-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^4 \cos(\gamma_{y,m} a_y)}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cc-}(z) \right),$$

$$A_{n-}^{cs-(2i-1)}(z) = \alpha_{n-}^{cs-(2i-2)}(z) + \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{c1-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^4 \lambda_{y,m} \cos(\lambda_{y,m} a_y)}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cs-}(z) \right),$$

$$A_{n-}^{sc-(2i-1)}(z) = \alpha_{n-}^{sc-(2i-2)}(z) + \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{s0-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^4 \cos(\gamma_{y,m} a_y)}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{sc-}(z) \right),$$

$$A_{n-}^{ss-(2i-1)}(z) = \alpha_{n-}^{ss-(2i-2)}(z) + \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{s1-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^4 \lambda_{y,m} \cos(\lambda_{y,m} a_y)}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{ss-}(z) \right). \quad (4.22)$$

Такі ж вирази отримаємо і для шуканих коефіцієнтів другого функціонального ряду, а саме:

$$Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) = \tilde{A}_{m-}^{cc-(2i)}(z) f_c(\gamma_{y,m}, a_x, x) + \tilde{A}_{m-}^{sc-(2i)}(z) f_s(\gamma_{y,m}, a_x, x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^4}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) + \frac{\gamma_{y,m}^4 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \right] \delta_{2i,2}, \quad (4.23)$$

$$Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z) = \tilde{A}_{m-}^{cs-(2i)}(z) f_c(\lambda_{y,m}, a_x, x) + \tilde{A}_{m-}^{ss-(2i)}(z) f_m(\lambda_{y,m}, a_x, x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{y,m}^4 \gamma_{x,n}^2}{(\lambda_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{cs-}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) + \frac{\lambda_{y,m}^4 \lambda_{x,n}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{ss-}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \right] \delta_{2i,2}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{A}_{m-}^{cc-(2i)}(z) = \tilde{\alpha}_{m-}^{cc-(2i-1)}(z) + \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{m-}^{0c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^4 \cos(\gamma_{x,n} a_x)}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \right),$$

$$\tilde{A}_{m-}^{sc-(2i)}(z) = \tilde{\alpha}_{m-}^{sc-(2i-1)}(z) + \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{m-}^{1c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^4 \lambda_{x,n} \cos(\lambda_{x,n} a_x)}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \right), \quad (4.25)$$

$$\tilde{A}_{cs-}^{(2i)}(z) = \alpha_{cs-}^{(2i-1)}(z) + \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{0s-}(z) + \sum_{\gamma_x} \frac{\lambda_y^4 \cos(\gamma_x a_x)}{(\lambda_y^2 + \gamma_x^2)^2} \tilde{G}_{cs-}(z) \right),$$

$$\tilde{A}_{ss-}^{(2i)}(z) = \tilde{\alpha}_{ss-}^{(2i-1)}(z) + \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{1s-}(z) + \sum_{\lambda_x} \frac{\lambda_y^4 \lambda_x \cos(\lambda_x a_x)}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^2} \tilde{G}_{ss-}(z) \right),$$

$$\tilde{G}_{m-}^{0c-}(z) = T_{m-}^{0c-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{y,m}^2} X_{m-}^{0c-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} X_{m-}^{0c-}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{x,n} a_x)}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nm-}^{cc-}(z),$$

$$\tilde{G}_{m-}^{1c-}(z) = T_{m-}^{1c-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{y,m}^2} X_{m-}^{1c-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} X_{m-}^{1c-}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{x,n} a_x)}{\lambda_{x,n}^2} Y_{nm-}^{sc-}(z), \quad (4.26)$$

$$\tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) = T_{nm-}^{cc-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{y,m}^2} X_{nm-}^{cc-}(z) - \frac{1}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nm-}^{cc-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} (Y_{nm-}^{cc-}(\zeta) + X_{nm-}^{cc-}(\zeta)) |z - \zeta| d\zeta,$$

$$\tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) = T_{nm-}^{sc-}(z) + \frac{\nu}{\gamma_{y,m}^2} X_{nm-}^{sc-}(z) - \frac{1}{\lambda_{x,n}^2} Y_{nm-}^{sc-}(z) - \frac{\nu}{2} \int_{-a_z}^{a_z} (Y_{nm-}^{sc-}(\zeta) + X_{nm-}^{sc-}(\zeta)) |z - \zeta| d\zeta.$$

Оскільки функції $Z_{n--}^{c-(2i-1)}(y, z)$ та $Z_{n--}^{s-(2i-1)}(y, z)$ задовольняють однорідні інтегральні умови (4.5) по координаті y , а функції $Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z)$, $Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z)$ по координаті x , то використовуючи повноту відповідних систем функцій розвинення подамо їх в еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}
& Z_{n-}^{c-(2i-1)}(y, z) = \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{cc-(2i-1)}(z) \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cc}(z) \delta_{2i-1,1} \right) \cos(\gamma_{y,m} y) - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{cs-(2i-1)}(z) \Delta_s(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cs}(z) \delta_{2i-1,1} \right) \sin(\lambda_{y,m} y), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{n-}^{s-(2i-1)}(y, z) = \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{sc-(2i-1)}(z) \Delta_c(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{sc}(z) \delta_{2i-1,1} \right) \cos(\gamma_{y,m} y) - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{ss-(2i-1)}(z) \Delta_s(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{ss}(z) \delta_{2i-1,1} \right) \sin(\lambda_{y,m} y), \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) = \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_c(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cc}(z) \delta_{2i,2} \right) \cos(\gamma_{x,n} x) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{sc-(2i)}(z) \Delta_s(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{sc}(z) \delta_{2i,2} \right) \sin(\lambda_{x,n} x), \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z) = \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{cs-(2i)}(z) \Delta_c(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cs}(z) \delta_{2i,2} \right) \cos(\gamma_{x,n} x) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\lambda_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{ss-(2i)}(z) \Delta_s(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{ss}(z) \delta_{2i,2} \right) \sin(\lambda_{x,n} x). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Після підстановки (4.27) – (4.30) у формули (4.11) з наступним порівнянням відповідних доданків із формул (4.14) знайдемо рекурентні співвідношення:

$$\alpha_{n-}^{cc-(2i)}(z) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \cos \gamma_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_c(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cc}(z) \delta_{2i,2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-}^{\text{cs-}(2i)}(z) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m} \cos \lambda_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{\text{cs-}(2i)} \Delta_c(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{\text{cs-}}(z) \delta_{2i,2} \right), \\
\alpha_{n-}^{\text{sc-}(2i)}(z) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^2 \cos \gamma_{y,m} a_y}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{\text{sc-}(2i)}(z) \Delta_s(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{\text{sc-}}(z) \delta_{2i,2} \right), \\
\alpha_{n-}^{\text{ss-}(2i)}(z) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m} \cos \lambda_{y,m} a_y}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{m-}^{\text{ss-}(2i)}(z) \Delta_s(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{\text{ss-}}(z) \delta_{2i,2} \right), \\
\tilde{\alpha}_{m-}^{\text{cc-}(2i-1)}(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \cos \gamma_{x,n} a_x}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{\text{cc-}(2i-1)}(z) \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{\text{cc-}}(z) \delta_{2i-1,1} \right), \\
\tilde{\alpha}_{sc-}^{(2i-1)}(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n} \cos \lambda_{x,n} a_x}{(\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{sc-}^{(2i-1)}(z) \Delta_c(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \lambda_{x,n}^2 G_{sc-}(z) \delta_{2i-1,1} \right), \\
\tilde{\alpha}_{m-}^{\text{cs-}(2i-1)}(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{y,m}^2 \cos \gamma_{x,n} a_x}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{\text{cs-}(2i-1)}(z) \Delta_s(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{\text{cs-}}(z) \delta_{2i-1,1} \right), \\
\tilde{\alpha}_{m-}^{\text{ss-}(2i-1)}(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{y,m}^2 \lambda_{x,n} \cos \lambda_{x,n} a_x}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{n-}^{\text{ss-}(2i-1)}(z) \Delta_s(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{\text{ss-}}(z) \delta_{2i-1,1} \right).
\end{aligned}$$

Після знаходження всіх коефіцієнтів шукану функцію Вігака $\mathcal{V}_z(x, y, z)$ можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Z_{nm-}^{\text{cc-}}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) \cos(\gamma_{y,m} y) + Z_{nm-}^{\text{cs-}}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) \sin(\lambda_{y,m} y) + \right. \\
&\quad \left. + Z_{nm-}^{\text{sc-}}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \cos(\gamma_{y,m} y) + Z_{nm-}^{\text{ss-}}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \sin(\lambda_{y,m} y) \right\}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Z_{nm-}^{\text{cc-}}(z) &= -\frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left[A_{n-}^{\text{cc-}}(z) \Delta_c(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{m-}^{\text{cc-}}(z) \Delta_c(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{\text{cc-}}(z) + \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{\text{cc-}}(z)) \right], \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$Z_{nm-}^{cs}(z) = -\frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{n-}^{cs}(z) \Delta_s(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{m-}^{cs}(z) \Delta_c(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \right. \\ \left. - (\gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cs}(z) + \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cs}(z)) \right], \quad (4.33)$$

$$Z_{nm-}^{sc}(z) = -\frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left[A_{n-}^{sc}(z) \Delta_c(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{m-}^{sc}(z) \Delta_s(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \right. \\ \left. - (\lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{sc}(z) + \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{sc}(z)) \right], \quad (4.34)$$

$$Z_{nm-}^{ss}(z) = -\frac{\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{n-}^{ss}(z) \Delta_s(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{m-}^{ss}(z) \Delta_s(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \right. \\ \left. - (\lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{ss}(z) + \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{ss}(z)) \right]. \quad (4.35)$$

Тут $\{A_{n-}^{jk}, \tilde{A}_{m-}^{jk}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{A_{n-}^{jk-(2i-1)}, \tilde{A}_{m-}^{jk-(2i)}\}$ ($j, k = c, s$)

З урахуванням розвинення всіх знайдених коефіцієнтів в ряди по координаті z можемо записати остаточну формулу для знаходження введеної функції \mathcal{V}_z

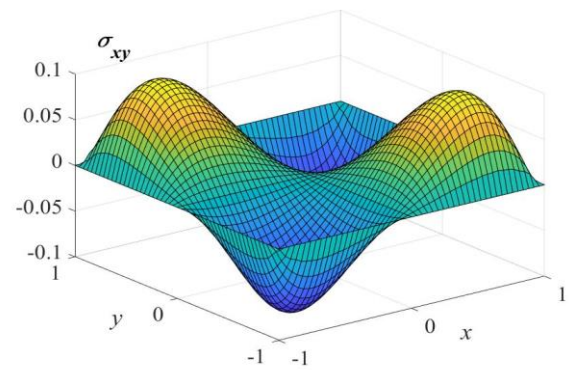
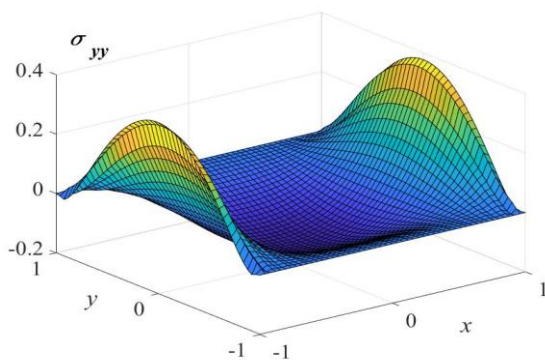
$$\mathcal{V}_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(Z_{nm}^{cc0} + z Z_{nm}^{cc1} + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_{nmk}^{ccc} \cos(\gamma_{z,k} z) + Z_{nmk}^{ccs} \sin(\lambda_{z,k} z)) \right) \cos(\gamma_{x,n} x) \cos(\gamma_{y,m} y) + \right. \\ + \left(Z_{nm}^{cs0} + z Z_{nm}^{cs1} + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_{nmk}^{csc} \cos(\gamma_{z,k} z) + Z_{nmk}^{css} \sin(\lambda_{z,k} z)) \right) \cos(\gamma_{x,n} x) \sin(\lambda_{y,m} y) + \\ + \left(Z_{nm}^{sc0} + z Z_{nm}^{sc1} + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_{nmk}^{scc} \cos(\gamma_{z,k} z) + Z_{nmk}^{scs} \sin(\lambda_{z,k} z)) \right) \sin(\lambda_{x,n} x) \cos(\gamma_{y,m} y) + \\ \left. + \left(Z_{nm}^{ss0} + z Z_{nm}^{ss1} + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_{nmk}^{ssc} \cos(\gamma_{z,k} z) + Z_{nmk}^{sss} \sin(\lambda_{z,k} z)) \right) \sin(\lambda_{x,n} x) \sin(\lambda_{y,m} y) \right\}. \quad (4.36)$$

Вирази для коефіцієнтів розвинення у формулі (4.36) знаходимо із (4.32) – (4.35) з урахуванням того, що всі знайдені коефіцієнти $A, \tilde{A}, \alpha, \tilde{\alpha}$ мають таке ж розвинення у ряд за координатою z , як і температурне поле та функції G та \tilde{G} , вирази яких наведені в Додатку А.

Таким чином, знайдено функцію Вігака $\mathcal{V}_z(x, y, z)$. Формули для визначення функцій $\mathcal{V}_x(x, y, z)$ та $\mathcal{V}_y(x, y, z)$ отримуємо із наведених вище циклічною заміною змінних (x, y, z) і відповідно власних значень і всіх інших величин.

Для **числової апробації** запропонованого методу розглянемо задачу про визначення напруженого стану прямокутного паралелепіпеда, зумовленого двовимірним температурним полем

$$T(x, y, z) = T_0 \left(1 - \frac{x^2 y^2}{a_x^2 a_y^2} \right), \quad T_0 = \text{const.} \quad (4.37)$$

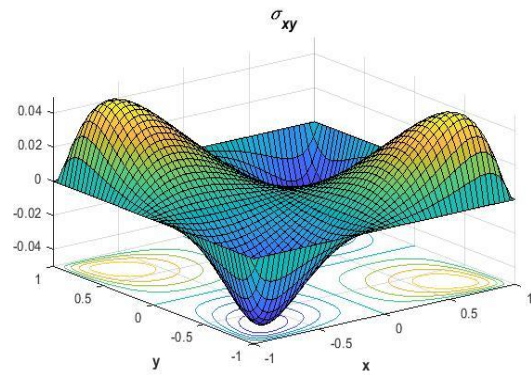
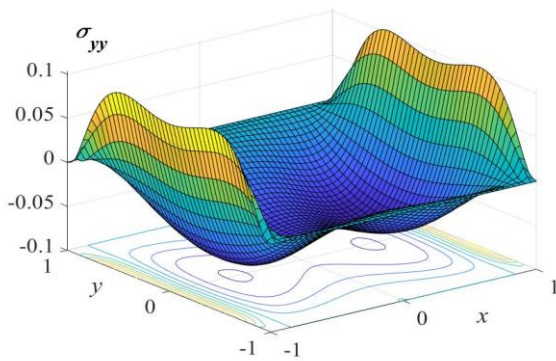


а)

б)

Рис. 4.1

На рис. 4.1а та 4.1б показано відповідно нормальні σ_{yy} та дотичні σ_{xy} напруження, розраховані за формулами для плоскої задачі термопружності при $a_x = a_y = 1$ [187]. Для куба $a_x = a_y = a_z = 1$ пораховані нормальні і дотичні напруження за формулами (4.4), де відповідні введені функції знаходилися запропонованим вище методом. Ці напруження зображено на рис. 4.2а та 4.2б відповідно.



а)

б)

Рис. 4.2

Як видно, напруження, розраховані за формулами для просторового випадку, в поперечному перерізі $z = 0$ є значно меншими за відповідні напруження, розраховані за формулами відповідної плоскої задачі, і суттєво відчутним є вплив межі області. Були порашовані ті ж напруження для випадку прямокутного паралелепіпеда $a_x = a_y = 1$ при $a_z = 3$ і відповідно зображені на рис. 4.3а та 4.3б. По числовій величині ці напруженні не дуже змінилися, зате піки максимальних та мінімальних значень значно змістилися із центру в сторону межі і кутових граней. Очікування того, що вони наблизяться до напружень, розрахованих для плоскої задачі не справдились і зумовлено це в значній мірі взаємному впливу введених функцій через коефіцієнт Пуассона.

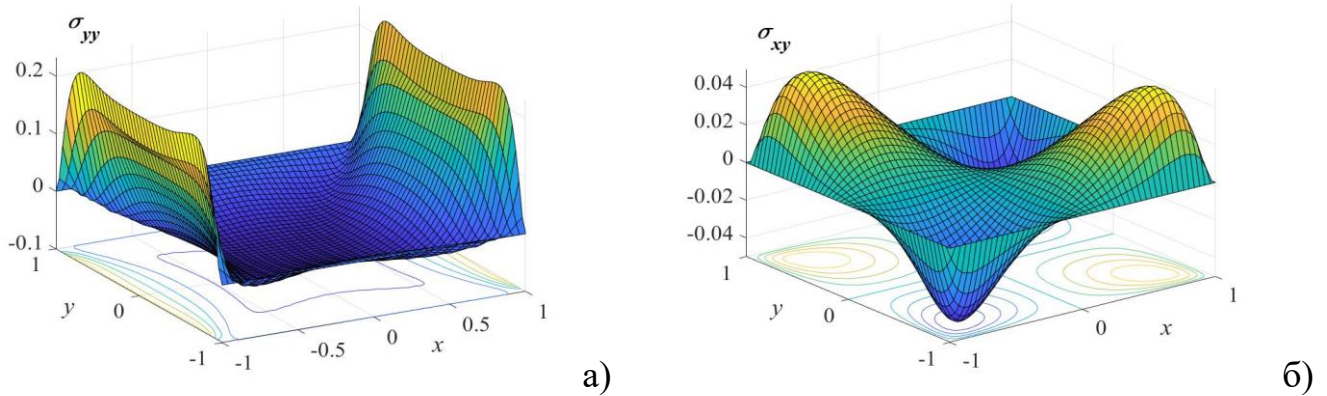


Рис. 4.3

Для перевірки цього факту було розв’язано поставлену задачу для випадку одновимірного температурного поля

$$T(x, y, z) = T_0 \left(1 - \frac{x^2}{a_x^2} \right), \quad T_0 = \text{const.} \tag{4.38}$$

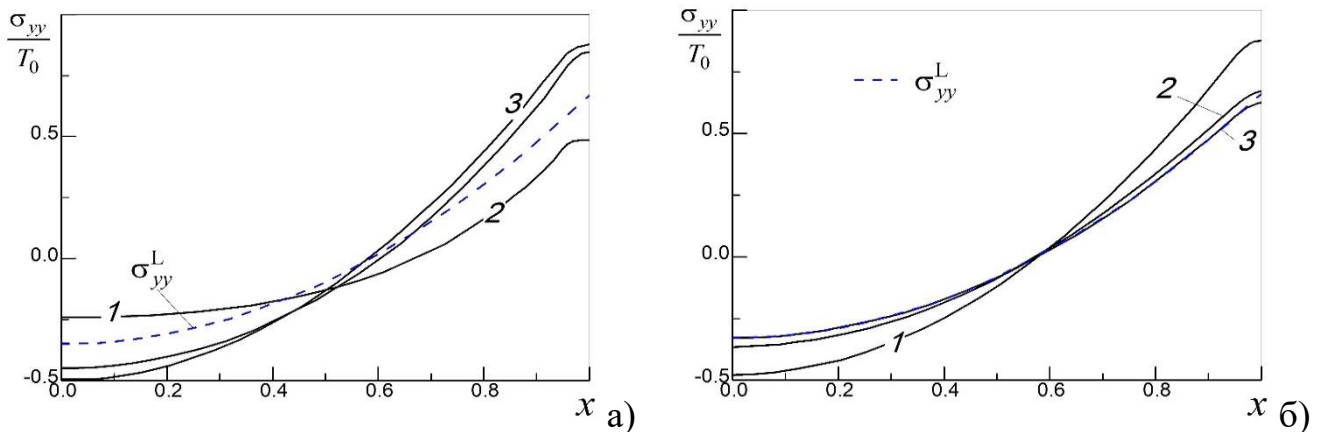


Рис. 4.4

На рис. 4.4а показано нормальні напруження σ_{yy} , розраховані для просторового випадку при $a_y = a_z = 1$ (лінія 1), $a_y = a_z = 1,5$ (лінія 2) та $a_y = a_z = 3$ (лінія 3). Як видно, при переході до "шару", тобто зі зростанням a_y та a_z , напруження зближаються в числовому значенні, зате не наближаються до напружень

$$\sigma_y^L = -T(x) + \frac{1}{2a_x} \int_{-a_x}^{a_x} T(x) dx, \quad (4.39)$$

що виникають в одновимірному випадку у необмеженому шарі товщиною $2a_x$. Це стається лише у випадку, якщо зменшувати коефіцієнт Пуассона. Цей факт проілюстровано на рис. 4.4б. Кривими 1, 2 та 3 показано відповідно нормальні напруження для прямокутного паралелепіпеда при $a_y = a_z = 3$ для значень коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3, 0.2, 0$, відповідно. При $\nu = 0$ напруження співпадають із розрахунковими (4.39) по всьому поперечному перетині з невеликим відхиленням при наближенні до межі області. Таким чином при розв'язуванні просторової задачі значний вплив на розподіл напружень має коефіцієнт Пуассона.

4.3. Пружна рівновага паралелепіпеда

Розглянемо тепер задачу про пружну рівновагу прямокутного паралелепіпеда, що займає область D_p . Шість компонент тензора напружень σ_{ij} , ($i, j = x, y, z$) задовольняють три рівняння рівноваги (4.1), три рівняння суцільності в напруженнях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \nu \Delta_{xy} \sigma_{zz} &= 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \nu \Delta_{yz} \sigma_{xx} &= 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \nu \Delta_{xz} \sigma_{yy} &= 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

та вісімнадцять межових умов

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}|_{x=\pm a_x} &= -p_x^\pm(y, z), & \sigma_{xy}|_{x=\pm a_x} &= \tau_{xy}^\pm(y, z), & \sigma_{xz}|_{x=\pm a_x} &= \tau_{xz}^\pm(y, z), \\
\sigma_{yy}|_{y=\pm a_y} &= -p_y^\pm(x, z), & \sigma_{xy}|_{y=\pm a_y} &= \tau_{yx}^\pm(x, z), & \sigma_{yz}|_{y=\pm a_y} &= \tau_{yz}^\pm(x, z), \\
\sigma_{zz}|_{z=\pm a_z} &= -p_z^\pm(x, y), & \sigma_{xz}|_{z=\pm a_z} &= \tau_{zx}^\pm(x, y), & \sigma_{yz}|_{z=\pm a_z} &= \tau_{zy}^\pm(x, y).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Із умови виконання рівнянь рівноваги (4.1) на межі області D_p отримуємо ще шість додаткових умов

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_{x=\pm a_x} &= - \left(\frac{\partial \tau_{xy}^\pm(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^\pm(y, z)}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \Big|_{y=\pm a_y} &= - \left(\frac{\partial \tau_{yx}^\pm(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^\pm(x, z)}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \Big|_{z=\pm a_z} &= - \left(\frac{\partial \tau_{zx}^\pm(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^\pm(x, y)}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Для побудови розв'язку поставленої задачі використаємо просторові функції Вігака \mathcal{V}_x , \mathcal{V}_y та \mathcal{V}_z , які як і випадку відповідної задачі термопружності, вводяться наступним чином:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} = -\mathcal{V}_y, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = -\mathcal{V}_x, \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x. \tag{4.44}$$

Розглянемо перше співвідношення із групи (4.43) та проінтегруємо його по x , враховуючи межові умови (4.41) для дотичних напружень. У результаті маємо

$$2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y} - \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi. \tag{4.45}$$

Звідси при $x = \pm a_x$ отримуємо першу інтегральну умову на функцію Вігака \mathcal{V}_z

$$\int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z dx = - \left(\frac{\partial \tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y} \right). \tag{4.46}$$

Інтегрування цього ж співвідношення по y дає

$$2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}^+(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^-(x, z)}{\partial x} - \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta, \quad (4.47)$$

звідки при $y = \pm a_y$ знаходимо другу інтегральну умову на функцію Вігака \mathcal{V}_z

$$\int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z dy = - \left(\frac{\partial \tau_{yx}^+(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}^-(x, z)}{\partial x} \right). \quad (4.48)$$

Інтегруванням (4.46) по y та (4.48) по x отримуємо два співвідношення

$$\begin{aligned} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta &= -2 \left(\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z) \right) + \\ &+ \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right), \\ \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi dy &= -2 \left(\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z) \right) + \\ &+ \left(\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) - \tau_{yx}^-(-a_x, z) \right), \end{aligned}$$

виконання яких при $x = \pm a_x$ та $y = \pm a_y$ дає першу додаткову інтегральну умову

$$\begin{aligned} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z dx dy &= - \left(\tau_{yx}^+(a_x, z) - \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z) \right) = \\ &= - \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) + \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ця рівність буде виконуватися, при умові погодження заданих дотичних навантажень на відповідних ребрах паралелепіпеда в довільному поперечному перерізі $z = \text{const}$

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^+(a_x, z) &= \tau_{xy}^+(a_y, z), & \tau_{yx}^+(-a_x, z) &= \tau_{xy}^-(a_y, z), \\ \tau_{yx}^-(a_x, z) &= \tau_{xy}^+(-a_y, z), & \tau_{yx}^-(-a_x, z) &= \tau_{xy}^-(-a_y, z). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Тоді із рівності (4.45) або (4.47) отримаємо остаточний вираз для дотичних напружень σ_{xy}

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) + \tau_{yx}^+(x, z) + \tau_{yx}^-(x, z) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\left(\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) + \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z)\right) - \\
& -\frac{1}{4} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Всі чотири межові умови будуть виконуватися при задоволенні інтегральних умов (4.46) і (4.48) на функцію \mathcal{V}_z та умов погодження (4.50). Крім додаткової умови (4.49) на функцію Вігака \mathcal{V}_z , ще дві можемо отримати, домноживши (4.46) на y , а (4.48) на x та проінтегрувавши отримані рівності у відповідних межах, а саме:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(y - \eta) \eta dx d\eta = -2y\left(\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z)\right) + \\
& + \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(\eta, z) - \tau_{xy}^-(\eta, z)\right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta + \\
& + a_y\left(\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) + \tau_{xy}^-(-a_y, z)\right), \\
& \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) \xi d\xi dy = -2x\left(\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z)\right) + \\
& + \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(\xi, z) - \tau_{yx}^-(\xi, z)\right) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi + \\
& + a_x\left(\tau_{yx}^+(a_x, z) - \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z)\right),
\end{aligned}$$

виконання яких при $x = \pm a_x$ та $y = \pm a_y$ дає ще дві додаткові інтегральні умови:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_z dx dy = \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z)\right) dy - \\
& - a_y\left(\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z)\right), \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} x \mathcal{V}_z dx dy = \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z)\right) dx - \\
& - a_x\left(\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) - \tau_{yx}^-(-a_x, z)\right), \tag{4.53}
\end{aligned}$$

які будуть необхідні в подальшому процесі розв'язування задачі.

Аналогічні вирази отримаємо і для решти дотичних компонент тензора напружень циклічною перестановкою x, y, z , а саме, для σ_{yz}

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = & \frac{1}{2} \left(\tau_{yz}^+(z, x) + \tau_{yz}^-(z, x) + \tau_{zy}^+(y, x) + \tau_{zy}^-(y, x) \right) - \\ & - \frac{1}{4} \left(\tau_{zy}^+(a_y, x) + \tau_{zy}^+(-a_y, x) + \tau_{zy}^-(a_y, x) + \tau_{zy}^-(-a_y, x) \right) - \\ & - \frac{1}{4} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x \operatorname{sgn}(z - \zeta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\zeta d\eta, \end{aligned} \quad (4.54)$$

основні інтегральні умови

$$\int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x dy = - \left(\frac{\partial \tau_{yz}^+(z, x)}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}^-(z, x)}{\partial z} \right), \quad (4.55)$$

$$\int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_x dz = - \left(\frac{\partial \tau_{zy}^+(y, x)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}^-(y, x)}{\partial y} \right), \quad (4.56)$$

додаткові умови

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_x dy dz = & \int_{-a_z}^{a_z} \left(\tau_{yz}^+(z, x) - \tau_{yz}^-(z, x) \right) dz - \\ & - a_z \left(\tau_{yz}^+(a_z, x) + \tau_{yz}^+(-a_z, x) - \tau_{yz}^-(a_z, x) - \tau_{yz}^-(-a_z, x) \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} y \mathcal{V}_x dy dz = & \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{zy}^+(y, x) - \tau_{zy}^-(y, x) \right) dy - \\ & - a_y \left(\tau_{zy}^+(a_y, x) + \tau_{zy}^+(-a_y, x) - \tau_{zy}^-(a_y, x) - \tau_{zy}^-(-a_y, x) \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_x dz dy = & - \left(\tau_{zy}^+(a_y, x) - \tau_{zy}^+(-a_y, x) - \tau_{zy}^-(a_y, x) + \tau_{zy}^-(-a_y, x) \right) = \\ = & - \left(\tau_{yz}^+(a_z, x) - \tau_{yz}^+(-a_z, x) - \tau_{yz}^-(a_z, x) + \tau_{yz}^-(-a_z, x) \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

та умови погодження заданих дотичних навантажень на відповідних ребрах прямокутного паралелепіпеда

$$\begin{aligned}\tau_{zy}^+(a_y, x) &= \tau_{yz}^+(a_z, x), & \tau_{zy}^+(-a_y, x) &= \tau_{yz}^-(a_z, x), \\ \tau_{zy}^-(a_y, x) &= \tau_{yz}^+(-a_z, x), & \tau_{zy}^-(-a_y, x) &= \tau_{yz}^-(-a_z, x).\end{aligned}\quad (4.60)$$

Аналогічно для σ_{xz} отримаємо вираз

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\tau_{zx}^+(x, y) + \tau_{zx}^-(x, y) + \tau_{xz}^+(z, y) + \tau_{xz}^-(z, y) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) + \tau_{xz}^+(-a_z, y) + \tau_{xz}^-(a_z, y) + \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y \operatorname{sgn}(z - \zeta) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\zeta d\xi,\end{aligned}\quad (4.61)$$

основні інтегральні умови

$$\int_{-a_z}^{a_z} \mathcal{V}_y dz = - \left(\frac{\partial \tau_{zx}^+(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}^-(x, y)}{\partial x} \right), \quad (4.62)$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y dx = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}^+(z, y)}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}^-(z, y)}{\partial z} \right), \quad (4.63)$$

додаткові умови

$$\begin{aligned}\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_y dz dx &= \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{zx}^+(x, y) - \tau_{zx}^-(x, y) \right) dx - \\ &\quad - a_x \left(\tau_{zx}^+(a_x, y) + \tau_{zx}^+(-a_x, y) - \tau_{zx}^-(a_x, y) - \tau_{zx}^-(-a_x, y) \right),\end{aligned}\quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} z \mathcal{V}_y dz dx &= \int_{-a_z}^{a_z} \left(\tau_{xz}^+(z, y) - \tau_{xz}^-(z, y) \right) dz - \\ &\quad - a_z \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) + \tau_{xz}^+(-a_z, y) - \tau_{xz}^-(a_z, y) - \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right),\end{aligned}\quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_y dx dz &= - \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) - \tau_{xz}^+(-a_z, y) - \tau_{xz}^-(a_z, y) + \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right) = \\ &= - \left(\tau_{zx}^+(a_x, y) - \tau_{zx}^+(-a_x, y) - \tau_{zx}^-(a_x, y) + \tau_{zx}^-(-a_x, y) \right)\end{aligned}\quad (4.66)$$

та умови погодження

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^+(a_z, y) &= \tau_{zx}^+(a_x, y), & \tau_{xz}^+(-a_z, y) &= \tau_{zx}^- (a_x, y), \\ \tau_{xz}^-(a_z, y) &= \tau_{zx}^+(-a_x, y), & \tau_{xz}^-(-a_z, y) &= \tau_{zx}^-(-a_x, y).\end{aligned}\quad (4.67)$$

Розглянемо тепер другу групу співвідношень (4.44). Проінтегруємо по x перше рівняння, використовуючи при цьому першу межу умову із (4.42)

$$\begin{aligned}2\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial\tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}^+(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}^-(y, z)}{\partial z}\right) + \\ &+ \int_{-a_x}^{a_x} (\mathcal{V}_z + \mathcal{V}_y) \operatorname{sgn}(x - \xi) dx.\end{aligned}\quad (4.68)$$

Тоді ця межа умова виконується при виконанні інтегральних умов (4.46) та (4.63). Повторна операція інтегрування при межових умовах для нормальних напружень σ_{xx} (4.41) дає вираз:

$$\begin{aligned}2\sigma_{xx} &= -p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) - \left(\frac{\partial\tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}^+(y, z)}{\partial z}\right)(x - a_x) - \\ &- \left(\frac{\partial\tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}^-(y, z)}{\partial z}\right)(x + a_x) + \int_{-a_x}^{a_x} (\mathcal{V}_z + \mathcal{V}_y) |x - \xi| d\xi.\end{aligned}\quad (4.69)$$

Межові умови (4.41) будуть виконуватися, якщо виконується інтегральна умова

$$\begin{aligned}\int_{-a_x}^{a_x} x(\mathcal{V}_z + \mathcal{V}_y) dx &= p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) - \\ &- a_x \left(\frac{\partial\tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}^+(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}^-(y, z)}{\partial z}\right),\end{aligned}\quad (4.70)$$

виконання якої забезпечується відповідно виконанням двох основних умов на введені функції:

$$\int_{-a_x}^{a_x} x\mathcal{V}_z dx = \frac{1}{2}(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z)) - a_x \left(\frac{\partial\tau_{xy}^+(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}^-(y, z)}{\partial y}\right),\quad (4.71)$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} x\mathcal{V}_y dx = \frac{1}{2}(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z)) - a_x \left(\frac{\partial\tau_{xz}^+(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}^-(y, z)}{\partial z}\right).\quad (4.72)$$

Шляхом інтегрування (4.71) по dy та по ydy у відповідних межах знайдемо наступні співвідношення та додаткові інтегральні умови, а саме:

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(\eta, z) - p_x^-(\eta, z) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta - \\ &- 2a_x \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) \right) + a_x \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) + \tau_{xy}^-(a_y, z) + \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right), \\ \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \eta \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(y - \eta) dx d\eta &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(\eta, z) - p_x^-(\eta, z) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) \eta d\eta - \\ &- 2a_x y \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) \right) + a_x a_y \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) + \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right) + \\ &+ a_x \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(\eta, z) + \tau_{xy}^-(\eta, z) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Звідси при $y = \pm a_y$ отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_z dx dy &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dy - \\ &- a_x \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) + \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} xy \mathcal{V}_z dx dy &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) y dy + a_x \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) \right) dy - \\ &- a_x a_y \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) + \tau_{xy}^-(a_y, z) + \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Інтегруючи (4.72) по dz та по zdz у відповідних межах знаходимо:

$$\begin{aligned} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_y \operatorname{sgn}(z - \zeta) dx d\zeta &= \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(p_x^+(\zeta, y) - p_x^-(\zeta, y) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta - \\ &- 2a_x \left(\tau_{xz}^+(z, y) + \tau_{xz}^-(z, y) \right) + a_x \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) + \tau_{xz}^+(-a_z, y) + \tau_{xz}^-(a_z, y) + \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right), \\ \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} x \zeta \mathcal{V}_y \operatorname{sgn}(z - \zeta) dx d\zeta &= \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(p_x^+(\zeta, y) - p_x^-(\zeta, y) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) \zeta d\zeta - \\ &- 2a_x z \left(\tau_{xz}^+(z, y) + \tau_{xz}^-(z, y) \right) + a_x a_z \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) - \tau_{xz}^+(-a_z, y) + \tau_{xz}^-(a_z, y) - \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right) + \end{aligned}$$

$$+a_x \int_{-a_z}^{a_z} \left(\tau_{xz}^+(\zeta, y) + \tau_{xz}^-(\zeta, y) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta.$$

Звідси при $z = \pm a_z$ отримуємо умови

$$\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} x \mathcal{V}_y dx dz = \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dz -$$

$$-a_x \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) - \tau_{xz}^+(-a_z, y) + \tau_{xz}^-(a_z, y) - \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right), \quad (4.75)$$

$$\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_x}^{a_x} xz \mathcal{V}_y dx dz = \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} \left(p_x^+(z, y) - p_x^-(z, y) \right) z dz + a_x \int_{-a_z}^{a_z} \left(\tau_{xz}^+(z, y) + \tau_{xz}^-(z, y) \right) dz -$$

$$-a_x a_z \left(\tau_{xz}^+(a_z, y) + \tau_{xz}^+(-a_z, y) + \tau_{xz}^-(a_z, y) + \tau_{xz}^-(-a_z, y) \right). \quad (4.76)$$

Порівнюючи формули (4.73) та (4.53), з врахуванням умов погодження (4.50), отримаємо першу інтегральну умову рівноваги для заданих зовнішніх навантажень, а саме:

$$\int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dy = 2 \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z) \right) dx. \quad (4.77)$$

Порівняння (4.75) з (4.65) і врахування умов погодження (4.67) дає

$$\int_{-a_z}^{a_z} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dz = 2 \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{zx}^+(x, y) - \tau_{zx}^-(x, y) \right) dx. \quad (4.78)$$

Порівняння (4.76) із (A.6) дає ще одну інтегральну умову на задані зовнішні навантаження:

$$\int_{-a_x}^{a_x} x \left(p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z) \right) dx + 2a_y \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x, z) + \tau_{yx}^-(x, z) \right) dx =$$

$$= \int_{-a_y}^{a_y} y \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dy + 2a_x \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) \right) dy. \quad (4.79)$$

Аналогічні формули отримаємо для решти нормальних напружень циклічною перестановкою змінних, а саме:

$$\begin{aligned}
2\sigma_{yy} = & -p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z) - \left(\frac{\partial \tau_{yz}^+(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^+(x, z)}{\partial x} \right) (y - a_y) - \\
& - \left(\frac{\partial \tau_{yz}^-(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^-(x, z)}{\partial x} \right) (y + a_y) + \int_{-a_y}^{a_y} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z) |y - \eta| d\eta,
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
2\sigma_{zz} = & -p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y) - \left(\frac{\partial \tau_{zx}^+(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^+(x, y)}{\partial y} \right) (z - a_z) - \\
& - \left(\frac{\partial \tau_{zx}^-(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^-(x, y)}{\partial y} \right) (z + a_z) + \int_{-a_z}^{a_z} (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x) |z - \zeta| d\zeta,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a_y}^{a_y} \eta (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z) d\eta = & p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z) - \\
& - a_y \left(\frac{\partial \tau_{yz}^+(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^+(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^-(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^-(x, z)}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a_z}^{a_z} \zeta (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x) d\zeta = & p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y) - \\
& - a_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}^+(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^+(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^-(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^-(x, y)}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Інтегральні умови, що забезпечують виконання (4.82), (4.83) мають вигляд

$$\int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_x dy = \frac{1}{2} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) - a_y \left(\frac{\partial \tau_{yz}^+(z, x)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}^-(z, x)}{\partial z} \right), \tag{4.84}$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_z dy = \frac{1}{2} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) - a_y \left(\frac{\partial \tau_{yx}^+(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^-(z, x)}{\partial x} \right), \tag{4.85}$$

$$\int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_y dz = \frac{1}{2} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) - a_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}^+(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^-(x, y)}{\partial x} \right), \tag{4.86}$$

$$\int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_x dz = \frac{1}{2} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) - a_z \left(\frac{\partial \tau_{zy}^+(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^-(x, y)}{\partial y} \right), \tag{4.87}$$

додаткові інтегральні співвідношення на введені функції, додаткові інтегральні умови на введені функції та інтегральні умови для зовнішніх навантажень, що приведені в Додатку А формули (A1) – (A14).

Таким чином подання (4.51), (4.54), (4.61), (4.69), (4.80) та (4.81) тотожно задовольняють рівняння рівноваги (4.1) та дають змогу 18 локальних межових умов (4.41), записаних для шести компонент тензора напружень, еквівалентно замінити на 9 інтегральних умов (4.46), (4.48), (4.55), (4.56), (4.62), (4.63), (4.70), (4.82), (4.83), записаних для трьох уведених функцій. Ці інтегральні умови на функції Вігака \mathcal{V}_x , \mathcal{V}_y , \mathcal{V}_z є не що інше, як умови на їх головний вектор та головний момент за «чужими» координатами. В результаті інтегрування лише рівнянь рівноваги отримано також додаткові інтегральні умови на задані зовнішні навантаження (4.77) – (4.79), (A.9) – (A.14), та умови погодження дотичних навантажень на відповідних бокових гранях прямокутного паралелепіпеда (4.50), (4.60) та (4.67).

4.4. Розклад функцій Вігака на елементарні та самоврівноважені складові

Для зведення поставленої задачі з неоднорідними межовими умовами, а відповідно з неоднорідними інтегральними умовами, до задачі з однорідними умовами, використаємо розвинення уведених функцій Вігака у відповідні ряди по повних системах функцій $1, t, \cos \gamma_{n,t} t, \sin \lambda_{n,t} t$, де $\gamma_{n,t} = \frac{\pi n}{a_t}$, $\lambda_{n,t}$ – додатні корені трансцендентного рівняння $\operatorname{tg} \lambda_t a_t = \lambda_t a_t$, ($t = x, y, z$), використовуючи при цьому відповідні інтегральні умови.

Насамперед розглянемо функцію \mathcal{V}_z і її розвинення в подвійний ряд по системах функцій, залежних від координат x та y

$$\mathcal{V}_z = \mathcal{V}_z^0 + \mathcal{V}_z^e + \tilde{\mathcal{V}}_z. \quad (4.88)$$

Тут

$$\mathcal{V}_z^0 = \mathcal{V}_z^{00}(z) + x\mathcal{V}_z^{10}(z) + y\mathcal{V}_z^{01}(z) + xy\mathcal{V}_z^{11}(z), \quad (4.89)$$

$$V_z^e = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\mathcal{V}_{zn}^{c0}(z) + y \mathcal{V}_{zn}^{c1}(z) \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(\mathcal{V}_{zn}^{s0}(z) + y \mathcal{V}_{zn}^{s1}(z) \right) \sin \lambda_{x,n} x \right] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\mathcal{V}_{zm}^{0c}(z) + x \mathcal{V}_{zm}^{1c}(z) \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(\mathcal{V}_{zm}^{0s}(z) + x \mathcal{V}_{zm}^{1s}(z) \right) \sin \lambda_{y,m} y \right], \quad (4.90)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_z = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\mathcal{V}_{znm}^{cc}(z) \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{znm}^{cs}(z) \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y + \right. \\ \left. + \mathcal{V}_{znm}^{sc}(z) \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \mathcal{V}_{znm}^{ss}(z) \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right]. \quad (4.91)$$

Незважаючи на те, що \mathcal{V}_z є шуканою функцією, її елементарна частина \mathcal{V}_z^0 (4.89) та врівноважена \mathcal{V}_z^e (4.90) є відомими функціями, вигляд яких зумовлюється отриманими вище інтегральними умовами в процесі інтегрування рівнянь рівноваги, а саме:

$$\mathcal{V}_z^{00}(z) = \frac{1}{4a_x a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z dx dy \stackrel{(4.57)}{=}$$

$$= \frac{1}{4a_x a_y} \left(\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) + \tau_{xy}^-(-a_y, z) \right) = \\ = -\frac{1}{4a_x a_y} \left(\tau_{yx}^+(a_x, z) - \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z) \right), \quad (4.92)$$

$$\mathcal{V}_z^{10}(z) = \frac{3}{4a_x^3 a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} x \mathcal{V}_z dx dy \stackrel{(4.61), (4.81)}{=}$$

$$= -\frac{3}{8a_x^2 a_y} \left[\tau_{xy}^+(a_y, z) - \tau_{xy}^+(-a_y, z) + \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z) - \frac{1}{2a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dy \right] = \\ = -\frac{3}{8a_x^2 a_y} \left[\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) - \tau_{yx}^-(a_x, z) - \tau_{yx}^-(-a_x, z) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z) \right) dx \right],$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_z^{01}(z) &= \frac{3}{4a_y^3 a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_z dx dy \stackrel{(4.60),(A.24)}{=} \\
&= -\frac{3}{8a_y^2 a_x} \left[\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z) - \frac{1}{a_y} \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z)) dy \right] = \\
&= -\frac{3}{8a_y^2 a_x} \left[\tau_{yx}^+(a_x, z) - \tau_{yx}^+(-a_x, z) + \tau_{yx}^-(a_x, z) - \tau_{yx}^-(-a_x, z) - \frac{1}{2a_y} \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z)) dx \right], \\
\mathcal{V}_z^{11}(z) &= \frac{9}{4a_y^3 a_x^3} \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} xy \mathcal{V}_z dx dy \stackrel{(4.61),(4.81)}{=} \\
&= -\frac{3}{16a_y^3 a_x^3} \left(a_x a_y (\tau_{xy}^+(a_y, z) + \tau_{xy}^+(-a_y, z) - \tau_{xy}^-(a_y, z) - \tau_{xy}^-(-a_y, z)) - \right. \\
&\quad \left. - a_x \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z)) dy - \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} y (p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z)) dy \right) = \\
&= -\frac{9}{16a_y^3 a_x^3} \left(a_x a_y (\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) + \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z)) - \right. \\
&\quad \left. - a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x, z) + \tau_{yx}^-(x, z)) dx - \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} x (p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z)) dx \right), \\
\mathcal{V}_z^e &\stackrel{(4.54),(4.56),(4.79),(4.93)}{=} -\frac{1}{2a_x} \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{+e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^{-e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \frac{3x}{2a_x^3} \left(\frac{1}{2} (p_x^{+e}(\tilde{y}, z) - p_x^{-e}(\tilde{y}, z)) - a_x \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{+e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^{-e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} \right) \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2a_y} \left(\frac{\partial \tau_{yx}^{+e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}^{-e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} \right) + \\
&\quad + \frac{3y}{2a_y^3} \left(\frac{1}{2} (p_y^{+e}(\tilde{x}, z) - p_y^{-e}(\tilde{x}, z)) - a_y \left(\frac{\partial \tau_{yx}^{+e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^{-e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} \right) \right). \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Тут уведені наступні позначення для розвинень заданих нормальних та дотичних зусиль:

$$\phi^e(t, z) = \sum_t (\phi_{ct}(z) \cos \gamma_t t + \phi_{st}(z) \sin \lambda_t t), \quad (4.94)$$

і відповідно $\phi = p_x^\pm, p_y^\pm, \frac{\partial \tau_{xy}^\pm}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{yx}^\pm}{\partial x}$ при $t = x, y$.

А шукана функція $\tilde{\mathcal{V}}_z$ у вигляді подвійного ряду (4.91) задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\mathcal{V}}_z dx = \int_{-a_x}^{a_x} x \tilde{\mathcal{V}}_z dx = \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\mathcal{V}}_z dy = \int_{-a_y}^{a_y} y \tilde{\mathcal{V}}_z dy = 0. \quad (4.95)$$

Для введених функцій $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y$ отримуємо аналогічні подання циклічною заміною змінних, а саме: $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x^0 + \mathcal{V}_x^e + \tilde{\mathcal{V}}_x$, $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_y^0 + \mathcal{V}_y^e + \tilde{\mathcal{V}}_y$. Вирази для \mathcal{V}_x^e та \mathcal{V}_y^e приведені в Додатку А формулами (A15), (A16).

Елементарні розв'язки та умови суцільності. Проведемо аналіз отриманих результатів для введених функцій Вігака і заданих зовнішніх зусиль, а саме тієї їх частини, що позначена верхнім індексом "0". Підставивши відповідні їм елементарні напруження у рівняння суцільності (4.40), встановимо, що вони будуть виконуватись при умові рівності нулю всіх складових елементарної частини введених функцій

$$\mathcal{V}_z^0 = \mathcal{V}_y^0 = \mathcal{V}_x^0 \equiv 0. \quad (4.96)$$

Це приводить до систем рівнянь, які з урахуванням умов погодження (4.50)

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^+(a_x, z) = \tau_{xy}^+(a_y, z) = \tau_{xy}^{++}(z), \quad \tau_{yx}^+(-a_x, z) = \tau_{xy}^-(a_y, z) = \tau_{xy}^{-+}(z), \\ \tau_{yx}^-(a_x, z) = \tau_{xy}^+(-a_y, z) = \tau_{xy}^{+-}(z), \quad \tau_{yx}^-(-a_x, z) = \tau_{xy}^-(-a_y, z) = \tau_{xy}^{--}(z) \end{aligned} \quad (4.97)$$

запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{++}(z) - \tau_{xy}^{+-}(z) - \tau_{xy}^{-+}(z) + \tau_{xy}^{--}(z) &= 0, \\ a_x \left(\tau_{xy}^{++}(z) - \tau_{xy}^{+-}(z) + \tau_{xy}^{-+}(z) - \tau_{xy}^{--}(z) \right) &= \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z)) dy = \\ &= \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x, z) - \tau_{yx}^-(x, z)) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_y \left(\tau_{xy}^{++}(z) + \tau_{xy}^{+-}(z) - \tau_{xy}^{-+}(z) - \tau_{xy}^{--}(z) \right) &= \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z) \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} \left(p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z) \right) dx,
\end{aligned} \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned}
&a_x a_y \left(\tau_{xy}^{++}(z) + \tau_{xy}^{+-}(z) + \tau_{xy}^{-+}(z) + \tau_{xy}^{--}(z) \right) = \\
&= a_x \int_{-a_y}^{a_y} \left(\tau_{xy}^+(y, z) + \tau_{xy}^-(y, z) \right) dy + \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} y \left(p_x^+(y, z) - p_x^-(y, z) \right) dy = \\
&= a_y \int_{-a_x}^{a_x} \left(\tau_{yx}^+(x, z) + \tau_{yx}^-(x, z) \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} x \left(p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z) \right) dx.
\end{aligned}$$

Аналогічні умови отримаємо і для поперечних перерізів $y = \text{const}$ та $x = \text{const}$ із (4.98) циклічною заміною змінних. Зауважимо, що нормальні зусилля $p_x^\pm(y, z)$ входять і у вираз для функції \mathcal{V}_y , тому слід окремо виділяти розвинення по обох координатах, а їх елементарна частина матиме вигляд (для решти – циклічна заміна змінних):

$$\begin{aligned}
p_x^{\pm 0}(y, z) &= \frac{1}{4a_z a_y} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} p_x^\pm(y, z) dz dy + \frac{3y}{4a_z a_y^3} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} y p_x^\pm(y, z) dx dy + \\
&+ \frac{3z}{4a_y a_z^3} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} z p_x^\pm(y, z) dx dy + \frac{9yz}{4a_y^3 a_z^3} \int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} xz p_x^\pm(y, z) dx dy.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Враховуючи, що задані дотичні навантаження $\tau_{xy}^\pm(y, z)$ та $\tau_{yx}^\pm(x, z)$ входять лише у вираз для \mathcal{V}_z то їх елементарні складові матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}^{\pm 0}(y, z) &= \frac{1}{2} \left(\tau_{xy}^\pm(a_y, z) + \tau_{xy}^\pm(-a_y, z) \right) + \frac{y}{2a_y} \left(\tau_{xy}^\pm(a_y, z) - \tau_{xy}^\pm(-a_y, z) \right) + \\
&+ \frac{3}{4a_y^2} \left(y^2 - a_y^2 \right) \left(\tau_{xy}^\pm(a_y, z) + \tau_{xy}^\pm(-a_y, z) - \frac{1}{a_y} \int_{-a_y}^{a_y} \tau_{xy}^\pm(y, z) dy \right),
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\tau_{yx}^{\pm 0}(x, z) = \frac{1}{2} \left(\tau_{yx}^\pm(a_x, z) + \tau_{yx}^\pm(-a_x, z) \right) + \frac{x}{2a_x} \left(\tau_{yx}^\pm(a_x, z) - \tau_{yx}^\pm(-a_x, z) \right) +$$

$$+\frac{3}{4a_x^2}(x^2 - a_x^2) \left(\tau_{yx}^{\pm}(a_x, z) + \tau_{yx}^{\pm}(-a_x, z) - \frac{1}{a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \tau_{yx}^{\pm}(x, z) dx \right). \quad (4.101)$$

Зауважимо, що по "чужій" координаті z дотичні напруження розкладаються як і нормальні з лінійною частиною 1 та z .

Виконання рівнянь суцільності з урахуванням елементарних напружень зумовлених ще і (4.99) – (4.101) та умов (4.98) приводить до розв'язку

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{\pm 0}(y, z) &= \tau_{yx}^{\pm 0}(x, z) = \tau_{xy}^{++}(z) = \tau_{xy}^{+-}(z) = \tau_{xy}^{-+}(z) = \tau_{xy}^{--}(z) = \\ &= \frac{1}{2a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \tau_{yx}^{+}(x, z) dx = \frac{1}{2a_x} \int_{-a_x}^{a_x} \tau_{yx}^{-}(x, z) dx = \\ &= \frac{1}{2a_y} \int_{-a_y}^{a_y} \tau_{xy}^{+}(y, z) dy = \frac{1}{2a_y} \int_{-a_y}^{a_y} \tau_{xy}^{-}(y, z) dy = \tau_{xy}^0(z) \end{aligned} \quad (4.102)$$

та умов рівності головних векторів та головних моментів нормальних зусиль, заданих на протилежних площадках, тобто

$$\begin{aligned} \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^{+}(y, z) - p_x^{-}(y, z)) dy = 0, \quad \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^{+}(x, z) - p_y^{-}(x, z)) dx = 0, \\ \int_{-a_y}^{a_y} y(p_x^{+}(y, z) - p_x^{-}(y, z)) dy = 0, \quad \int_{-a_x}^{a_x} x(p_y^{+}(x, z) - p_y^{-}(x, z)) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Таким чином, напруження, спричинені елементарними складовими заданих зовнішніх навантажень, матимуть вигляд:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{1}{2}(p_x^{+0}(y, z) + p_x^{-0}(y, z)), \quad \sigma_{xy}^0 = \tau_{xy}^0(z), \quad \overrightarrow{x, y, z}. \quad (4.104)$$

Самоврівноважені розв'язки. Розглянемо тепер напруження в прямокутному паралелепіпеді, зумовлені самоврівноваженими навантаженнями, тобто навантаженнями виду (4.94) та частиною введених функцій з верхнім індексом "e" (4.93). Виключивши елементарні розв'язки (4.104), компоненти тензора напружень можемо знайти за формулами (4.51), (4.54), (4.61), (4.69), (4.79) та (4.80), а саме:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^e = & -\frac{(2a_x - x)(x + a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{+e}(\tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{(2a_x + x)(x - a_x)^2}{4a_x^3} p_x^{-e}(\tilde{y}, \tilde{z}) + \\
& + \frac{3z}{8a_z^3} \int_{-a_x}^{a_x} (p_z^{+e}(\tilde{\xi}, y) - p_z^{-e}(\tilde{\xi}, y)) |x - \tilde{\xi}| d\xi + \frac{3y}{8a_y^3} \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^{+e}(\tilde{\xi}, z) - p_y^{-e}(\tilde{\xi}, z)) |x - \tilde{\xi}| d\xi - \\
& - \frac{x^2 - a_x^2}{4a_x^2} \left((x + a_x) \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{+e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{+e}(y, \tilde{z})}{\partial z} \right) + (x - a_x) \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{-e}(\tilde{y}, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{-e}(y, \tilde{z})}{\partial z} \right) \right) - \\
& - \frac{1}{4a_y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \left((a_y + 3y) \tau_{yx}^{+e}(\tilde{\xi}, z) - (a_y - 3y) \tau_{yx}^{-e}(\tilde{\xi}, z) \right) \operatorname{sgn}(x - \tilde{\xi}) d\xi - \\
& - \frac{1}{4a_z^2} \int_{-a_x}^{a_x} \left((a_z + 3z) \tau_{zx}^{+e}(\tilde{\xi}, y) - (a_z - 3z) \tau_{zx}^{-e}(\tilde{\xi}, y) \right) \operatorname{sgn}(x - \tilde{\xi}) d\xi, \quad (4.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^e = & -\frac{(2a_y - y)(y + a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{+e}(\tilde{x}, \tilde{z}) - \frac{(2a_y + y)(y - a_y)^2}{4a_y^3} p_y^{-e}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \\
& + \frac{3x}{8a_x^3} \int_{-a_y}^{a_y} (p_x^{+e}(\tilde{\eta}, z) - p_x^{-e}(\tilde{\eta}, z)) |y - \eta| d\eta + \frac{3z}{8a_z^3} \int_{-a_y}^{a_y} (p_z^{+e}(x, \tilde{\eta}) - p_z^{-e}(x, \tilde{\eta})) |y - \eta| d\eta - \\
& - \frac{y^2 - a_y^2}{4a_y^2} \left((y + a_y) \left(\frac{\partial \tau_{yz}^{+e}(x, \tilde{z})}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^{+e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} \right) + (y - a_y) \left(\frac{\partial \tau_{yz}^{-e}(x, \tilde{z})}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}^{-e}(\tilde{x}, z)}{\partial x} \right) \right) - \\
& - \frac{1}{4a_z^2} \int_{-a_y}^{a_y} \left((a_z + 3z) \tau_{zy}^{+e}(x, \tilde{\eta}) - (a_z - 3z) \tau_{zy}^{-e}(x, \tilde{\eta}) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta - \\
& - \frac{1}{4a_x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \left((a_x + 3x) \tau_{xy}^{+e}(\tilde{\eta}, z) - (a_x - 3x) \tau_{xy}^{-e}(\tilde{\eta}, z) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta, \quad (4.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^e = & -\frac{(2a_z - z)(z + a_z)^2}{4a_z^3} p_z^{+e}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \frac{(2a_z + z)(z - a_z)^2}{4a_z^3} p_z^{-e}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \\
& + \frac{3y}{8a_y^3} \int_{-a_z}^{a_z} (p_y^{+e}(x, \tilde{\zeta}) - p_y^{-e}(x, \tilde{\zeta})) |z - \zeta| d\zeta + \frac{3x}{8a_x^3} \int_{-a_z}^{a_z} (p_x^{+e}(y, \tilde{\zeta}) - p_x^{-e}(y, \tilde{\zeta})) |z - \zeta| d\zeta - \\
& - \frac{z^2 - a_z^2}{4a_z^2} \left((z + a_z) \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{+e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{+e}(x, \tilde{y})}{\partial y} \right) + (z - a_z) \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{-e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{-e}(x, \tilde{y})}{\partial y} \right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4a_x^2} \int_{-a_z}^{a_z} \left((a_x + 3x) \tau_{xz}^{+e}(y, \tilde{\zeta}) - (a_x - 3x) \tau_{xz}^{-e}(y, \tilde{\zeta}) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta - \\
& -\frac{1}{4a_y^2} \int_{-a_z}^{a_z} \left((a_y + 3y) \tau_{yz}^{+e}(x, \tilde{\zeta}) - (a_y - 3y) \tau_{yz}^{-e}(x, \tilde{\zeta}) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta. \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Тут, згідно з уведеними вище позначеннями $2p_x^{\pm e}(\tilde{y}, \tilde{z}) = p_x^{\pm e}(\tilde{y}, z) + p_x^{\pm e}(y, \tilde{z})$, $2p_y^{\pm e}(\tilde{x}, \tilde{z}) = p_y^{\pm e}(\tilde{x}, z) + p_y^{\pm e}(x, \tilde{z})$, $2p_z^{\pm e}(\tilde{x}, \tilde{y}) = p_z^{\pm e}(\tilde{x}, y) + p_z^{\pm e}(x, \tilde{y})$. Для дотичних напружень маємо аналогічні вирази:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^e &= \frac{(x + a_x)(3x - a_x)}{4a_x^2} \tau_{xy}^{+e}(\tilde{y}, z) + \frac{(x - a_x)(3x + a_x)}{4a_x^2} \tau_{xy}^{-e}(\tilde{y}, z) + \\
& + \frac{(y + a_y)(3y - a_y)}{4a_y^2} \tau_{yx}^{+e}(\tilde{x}, z) + \frac{(y - a_y)(3y + a_y)}{4a_y^2} \tau_{yx}^{-e}(\tilde{x}, z) - \\
& - \frac{3(y^2 - a_y^2)}{16a_y^3} \int_{-a_x}^{a_x} \left(p_y^{+e}(\tilde{\xi}, z) - p_y^{-e}(\tilde{\xi}, z) \right) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi - \\
& - \frac{3(x^2 - a_x^2)}{16a_x^3} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_x^{+e}(\tilde{\eta}, z) - p_x^{-e}(\tilde{\eta}, z) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta, \quad (4.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz}^e &= \frac{(y + a_y)(3y - a_y)}{4a_y^2} \tau_{yz}^{+e}(x, \tilde{z}) + \frac{(y - a_y)(3y + a_y)}{4a_y^2} \tau_{yz}^{-e}(x, \tilde{z}) + \\
& + \frac{(z + a_z)(3z - a_z)}{4a_z^2} \tau_{zy}^{+e}(x, \tilde{y}) + \frac{(z - a_z)(3z + a_z)}{4a_z^2} \tau_{zy}^{-e}(x, \tilde{y}) - \\
& - \frac{3(z^2 - a_z^2)}{16a_z^3} \int_{-a_y}^{a_y} \left(p_z^{+e}(x, \tilde{\eta}) - p_z^{-e}(x, \tilde{\eta}) \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta - \\
& - \frac{3(y^2 - a_y^2)}{16a_y^3} \int_{-a_z}^{a_z} \left(p_y^{+e}(x, \tilde{\zeta}) - p_y^{-e}(x, \tilde{\zeta}) \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta, \quad (4.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^e = & \frac{(z+a_z)(3z-a_z)}{4a_z^2} \tau_{zx}^{+e}(\tilde{x}, y) + \frac{(z-a_z)(3z+a_z)}{4a_z^2} \tau_{zx}^{-e}(\tilde{x}, y) + \\
& + \frac{(x+a_x)(3x-a_x)}{4a_x^2} \tau_{xz}^{+e}(y, \tilde{z}) + \frac{(x-a_x)(3x+a_x)}{4a_x^2} \tau_{xz}^{-e}(y, \tilde{z}) - \\
& - \frac{3(x^2-a_x^2)}{16a_x^3} \int_{-a_z}^{a_z} (p_x^{+e}(y, \tilde{\zeta}) - p_x^{-e}(y, \tilde{\zeta})) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta - \\
& - \frac{3(z^2-a_z^2)}{16a_z^3} \int_{-a_x}^{a_x} (p_z^{+e}(\tilde{\xi}, y) - p_z^{-e}(\tilde{\xi}, y)) \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi. \tag{4.110}
\end{aligned}$$

Згідно з уведеними позначеннями, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{\mathcal{V}}$, $i, j = x, y, z$. Компоненти тензора напружень з верхнім індексом \mathcal{V} визначаються за формулами (4.4), а шукані функції $\tilde{\mathcal{V}}_x$, $\tilde{\mathcal{V}}_y$, $\tilde{\mathcal{V}}_z$, які повинні задовольняти однорідні інтегральні умови (4.95) визначаються як розв'язки наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
2\tilde{\mathcal{V}}_z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\mathcal{V}}_z |y-\eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\mathcal{V}}_z |x-\xi| d\xi - \nu(\tilde{\mathcal{V}}_y + \tilde{\mathcal{V}}_x) - \\
- \frac{\nu}{2} \Delta_{xy} \int_{-a_z}^{a_z} (\tilde{\mathcal{V}}_x + \tilde{\mathcal{V}}_y) |z-\zeta| d\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \tilde{\mathcal{V}}_x |y-\eta| d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\mathcal{V}}_y |x-\xi| d\xi = \\
= 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^e}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x^e - \nu(\sigma_y^e + \sigma_z^e)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y^e - \nu(\sigma_x^e + \sigma_z^e)). \tag{4.111}
\end{aligned}$$

Два аналогічні рівняння отримуються циклічною заміною змінних $\overline{x, y, z}$.

4.5. Розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності та числові результати

Для побудови розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності (4.111) використаємо метод, описаний в розділі 4.2 для відповідної задачі термопружності. Всі викладки проведемо тут лише для відшукування функції $\tilde{\mathcal{V}}_z$, а для решти відповідні формули отримуються циклічною заміною змінних.

Невідому функцію $\tilde{\mathcal{V}}_z$ шукатимемо теж у вигляді функціонального ряду

$$\tilde{\mathcal{V}}_z = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_z^{(i)}, \quad (4.112)$$

де члени ряду, що подаються у вигляді (4.8) знаходяться як розв'язки наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$2\mathcal{V}_z^{(2i-1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_2}^{a_2} \mathcal{V}_z^{(2i-1)} |y - \eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_1}^{a_1} \mathcal{V}_z^{(2i-1)} |x - \xi| d\xi - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-1)}}{\partial y^2} =$$

$$= \left[v\tilde{\mathcal{V}}_y + \frac{v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_3}^{a_3} (\tilde{\mathcal{V}}_y + \tilde{\mathcal{V}}_x) |z - \zeta| d\zeta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_2}^{a_2} \tilde{\mathcal{V}}_x |y - \eta| d\eta - R_{zx}^e \right] \delta_{i,1} - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-2)}}{\partial x^2}, \quad (4.113)$$

$$2\mathcal{V}_z^{(2i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a_y}^{a_y} \mathcal{V}_z^{(2i)} |y - \eta| d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \mathcal{V}_z^{(2i)} |x - \xi| d\xi - \frac{\partial^2 g_z^{(2i)}}{\partial x^2} =$$

$$= \left[v\tilde{\mathcal{V}}_x + \frac{v}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_z}^{a_z} (\tilde{\mathcal{V}}_x + \tilde{\mathcal{V}}_y) |z - \zeta| d\zeta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a_x}^{a_x} \tilde{\mathcal{V}}_y |x - \xi| d\xi - R_{zy}^e \right] \delta_{i,1} - \frac{\partial^2 g_z^{(2i-1)}}{\partial y^2}. \quad (4.114)$$

Тут уведено позначення

$$R_{zx}^e + R_{zy}^e = 2(1+v) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^e}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x^e - v(\sigma_y^e + \sigma_z^e)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y^e - v(\sigma_x^e + \sigma_z^e)), \quad (4.115)$$

а розбиття на два доданки у формулі (4.115) проводиться таким чином, що R_{zx}^e містить доданки розвинень самоврівноважених зусиль за координатою x , а R_{zy}^e за координатою y . У цих формулах самоврівноважені зовнішні зусилля знаходяться за формулами (A.17) – (A.28).

У результаті відокремлення змінних в рівняннях (4.113), (4.114) для визначення коефіцієнтів розвинення в рядах (4.8) отримаємо наступні інтегро-диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 Z_{n-}^{c--(2i-1)}(y, z)}{\partial y^2} - 2\gamma_{x,n}^2 Z_{n-}^{c--(2i-1)}(y, z) + \frac{\gamma_{x,n}^4}{2} \int_{-a_y}^{a_y} Z_{n-}^{c--(2i-1)}(\eta, z) |y - \eta| d\eta = \\
& = -\gamma_{x,n}^4 \left\{ \alpha_{n-}^{cc--(2i-2)}(z) + y \alpha_{n-}^{cs--(2i-2)}(z) + [G_{n-}^{c0-}(z) + y G_{n-}^{c1-}(z) + y^2 G_{n-}^{c2-}(z) + y^3 G_{n-}^{c3-}(z) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(G_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + G_{nm-}^{cs-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right) \right] \delta_{2i-1,1} \right\}. \quad (4.116)
\end{aligned}$$

Для $Z_{n-}^{s--(2i-1)}(y, z)$ аналогічне до (4.116) рівняння отримується заміною першого символу «с» на «s» та $\gamma_{x,n}$ на $\lambda_{x,n}$. Тому в подальшому будемо приводити формули лише для парної частини. Розв'язок таких рівнянь, що задовольняє однорідні інтегральні умови (4.95), запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
& Z_{n-}^{c--(2i-1)}(y, z) = A_{0n-}^{cc--(2i-1)}(z) f_{0c}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{2n-}^{cc--(2i-1)}(z) f_{2c}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + \\
& \quad + A_{1n-}^{cs--(2i-1)}(z) f_{1s}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + A_{3n-}^{cs--(2i-1)}(z) f_{3s}(\gamma_{x,n}, a_y, y) + \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{x,n}^4 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{y,m} y) + \frac{\gamma_{x,n}^4 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cs-}(z) \sin(\lambda_{y,m} y) \right] \delta_{2i-1,1}. \quad (4.117)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
& A_{0n-}^{cc--(2i-1)}(z) = \alpha_{n-}^{cc--(2i-2)}(z) + \\
& \quad + \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{c0-}(z) + \frac{4 + a_y^2 \gamma_{x,n}^2}{\gamma_{x,n}^2} G_{n-}^{c2-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^4 \cos(\gamma_{y,m} a_y)}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cc-}(z) \right), \\
& A_{2n-}^{cc--(2i-1)}(z) = -2G_{n-}^{c2-}(z) \delta_{2i-1,1}, \\
& A_{1n-}^{cs--(2i-1)}(z) = a_y \alpha_{n-}^{cs--(2i-2)}(z) + \\
& \quad + a_y \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{c1-}(z) + \frac{12 + a_y^2 \gamma_{x,n}^2}{\gamma_{x,n}^2} G_{n-}^{c3-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^4 \lambda_{y,m} \cos(\lambda_{y,m} a_y)}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cs-}(z) \right), \\
& A_{3n-}^{cs--(2i-1)}(z) = -\alpha_{n-}^{cs--(2i-2)}(z) - \\
& \quad - \delta_{2i-1,1} \left(G_{n-}^{c1-}(z) + \frac{12 + 3a_y^2 \gamma_{x,n}^2}{\gamma_{x,n}^2} G_{n-}^{c3-}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^4 \lambda_{y,m} \cos(\lambda_{y,m} a_y)}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} G_{nm-}^{cs-}(z) \right).
\end{aligned}$$

Аналогічні формули отримаємо і для шуканих коефіцієнтів другого функціонального ряду, а саме

$$Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) = \tilde{A}_{0m-}^{cc-(2i)}(z) f_{0c}(\gamma_{y,m}, a_x, x) + \tilde{A}_{2m-}^{cc-(2i)}(z) f_{2c}(\gamma_{y,m}, a_x, x) + \\ + \tilde{A}_{1m-}^{sc-(2i)}(z) f_{1s}(\gamma_{y,m}, a_x, x) + \tilde{A}_{3m-}^{sc-(2i)}(z) f_{3s}(\gamma_{y,m}, a_x, x) + \\ + \sum_{\gamma_x, \lambda_x} \left[\frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^4}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \cos(\gamma_{x,n} x) + \frac{\gamma_{y,m}^4 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \sin(\lambda_{x,n} x) \right] \delta_{2i,2}, \quad (4.118)$$

$$\tilde{A}_{0m-}^{cc-(2i)}(z) = \tilde{\alpha}_{m-}^{cc-(2i-1)}(z) + \\ + \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{m-}^{0c-}(z) + \frac{4 + a_x^2 \gamma_{y,m}^2}{\gamma_{y,m}^2} \tilde{G}_{m-}^{2c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^4 \cos(\gamma_{x,n} a_x)}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \right), \\ \tilde{A}_{2m-}^{cc-(2i)}(z) = -2 \tilde{G}_{m-}^{2c-}(z) \delta_{2i,2}, \\ \tilde{A}_{1m-}^{sc-(2i)}(z) = a_x \tilde{\alpha}_{m-}^{sc-(2i-1)}(z) + \\ + a_x \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{m-}^{1c-}(z) + \frac{12 + a_x^2 \gamma_{y,m}^2}{\gamma_{y,m}^2} \tilde{G}_{m-}^{3c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^4 \lambda_{x,n} \cos(\lambda_{x,n} a_x)}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \right), \\ \tilde{A}_{3m-}^{sc-(2i)}(z) = -\tilde{\alpha}_{m-}^{sc-(2i-1)}(z) - \\ - \delta_{2i,2} \left(\tilde{G}_{m-}^{1c-}(z) + \frac{12 + 3a_x^2 \gamma_{y,m}^2}{\gamma_{y,m}^2} \tilde{G}_{m-}^{3c-}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^4 \lambda_{x,n} \cos(\lambda_{x,n} a_x)}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \right).$$

Тут

$$f_{0c}(p, h, t) = p^2 \frac{(ph \cosh ph - \sinh ph) \cosh pt - pt \sinh ph \sinh pt}{\cosh ph \sinh ph + ph}, \\ f_{2c}(p, h, t) = p \frac{(ph \sinh ph - 2 \cosh ph) \cosh pt - pt \cosh ph \sinh pt}{\cosh ph \sinh ph + ph} + \frac{1}{h}, \\ f_{1s}(p, h, t) = p^2 \frac{(ph \sinh ph - \cosh ph) \sinh pt - pt \cosh ph \cosh pt}{\cosh ph \sinh ph - ph} + \frac{3t}{h^3}, \\ f_{3s}(p, h, t) = p \frac{(ph \cosh ph - 2 \sinh ph) \sinh pt - pt \sinh ph \cosh pt}{\cosh ph \sinh ph - ph} + \frac{3t}{h^2}.$$

Оскільки функції $Z_{n-}^{c-(2i-1)}(y, z)$ та $Z_{n-}^{s-(2i-1)}(y, z)$ задовольняють однорідні інтегральні умови (4.95) за координатою y , а функції $Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z)$, $Z_{-m-}^{s-(2i)}(x, z)$ за координатою x , то використовуючи повноту систем функцій розвинення, подамо їх в еквівалентному вигляді:

$$\begin{aligned}
Z_{n-}^{c-(2i-1)}(y, z) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(A_{0n-}^{cc-(2i-1)}(z) \Delta_{0c}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \right. \\
& + A_{2n-}^{cc-(2i-1)}(z) \Delta_{2c}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cc-}(z) \delta_{2i-1,1} \left. \right) \cos(\gamma_{y,m} y) - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(A_{1n-}^{cs-(2i-1)}(z) \Delta_{1s}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + A_{3m-}^{cs-(2i-1)}(z) \Delta_{3s}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) - \right. \\
& \left. - \gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cs-}(z) \delta_{2i-1,1} \right) \sin(\lambda_{y,m} y), \tag{4.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{-m-}^{c-(2i)}(x, z) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{0m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_{0c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\
& + \tilde{A}_{2m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_{2c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \delta_{2i,2} \left. \right) \cos(\gamma_{x,n} x) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left(\tilde{A}_{1m-}^{sc-(2i-1)}(z) \Delta_{1s}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) + \tilde{A}_{3m-}^{sc-(2i-1)}(z) \Delta_{3s}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \right. \\
& \left. - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{sc-}(z) \delta_{2i,2} \right) \sin(\lambda_{x,n} x). \tag{4.120}
\end{aligned}$$

Рекурентні співвідношення для коефіцієнтів α матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-}^{cc-(2i)}(z) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \cos \gamma_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{0m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_{0c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\
& + \tilde{A}_{2m-}^{cc-(2i)}(z) \Delta_{2c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cc-}(z) \delta_{2i,2} \left. \right), \\
\alpha_{n-}^{cs-(2i)}(z) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m} \cos \lambda_{y,m} a_y}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left(\tilde{A}_{1m-}^{cs-(2i)} \Delta_{1s}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\
& + \tilde{A}_{3m-}^{cs-(2i)} \Delta_{3s}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cs-}(z) \delta_{2i,2} \left. \right).
\end{aligned}$$

Після знаходження всіх коефіцієнтів шукану функцію $\tilde{\mathcal{V}}_z(x, y, z)$ можемо записати у вигляді (4.31), де

$$\begin{aligned}
Z_{nm-}^{cc}(z) &= -\frac{\gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)^2} \left[A_{0n-}^{cc}(z) \Delta_{0c}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{0m-}^{cc}(z) \Delta_{0c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\
&+ A_{2n-}^{cc}(z) \Delta_{2c}(\gamma_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{2m-}^{cc}(z) \Delta_{2c}(\gamma_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \left. \left(\gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cc}(z) + \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cc}(z) \right) \right], \\
Z_{nm-}^{cs}(z) &= -\frac{\gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{1n-}^{cs}(z) \Delta_{s1}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{0m-}^{cs}(z) \Delta_{c0}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) + \right. \\
&+ A_{3n-}^{cs}(z) \Delta_{3s}(\gamma_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{2m-}^{cs}(z) \Delta_{2c}(\lambda_{y,m}, \gamma_{x,n}, a_x) - \left. \left(\gamma_{x,n}^2 G_{nm-}^{cs}(z) + \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{cs}(z) \right) \right], \\
Z_{nm-}^{sc}(z) &= -\frac{\gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2}{(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{x,n}^2)^2} \left[A_{0n-}^{sc}(z) \Delta_{c0}(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{1m-}^{sc}(z) \Delta_{s1}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) + \right. \\
&+ A_{2n-}^{sc}(z) \Delta_{c2}(\lambda_{x,n}, \gamma_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{3m-}^{sc}(z) \Delta_{s3}(\gamma_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \left. \left(\lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{sc}(z) + \gamma_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{sc}(z) \right) \right], \\
Z_{nm-}^{ss}(z) &= -\frac{\lambda_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2}{(\lambda_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2)^2} \left[A_{1n-}^{ss}(z) \Delta_{1s}(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{1m-}^{ss}(z) \Delta_{1s}(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) + \right. \\
&+ A_{3n-}^{ss}(z) \Delta_{3s}(\lambda_{x,n}, \lambda_{y,m}, a_y) + \tilde{A}_{3m-}^{ss}(z) \Delta_{3s}(\lambda_{y,m}, \lambda_{x,n}, a_x) - \left. \left(\lambda_{x,n}^2 G_{nm-}^{ss}(z) + \lambda_{y,m}^2 \tilde{G}_{nm-}^{ss}(z) \right) \right].
\end{aligned}$$

Тут $\{A_{pn-}^{jk}, \tilde{A}_{pm-}^{jk}\} = \sum_i \{A_{pm-}^{jk-(2i-1)}, \tilde{A}_{pm-}^{jk-(2i)}\}$, $p = \overline{0,3}$, $(j, k = c, s)$,

$$\Delta_{0c}(p, q, h) = 4 \cos qh \frac{p}{h} \frac{\text{sh}^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph + ph},$$

$$\Delta_{2c}(p, q, h) = \frac{2 \cos qh}{h} \left(\frac{2ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph + ph} - 3 - \frac{p^2}{q^2} \right),$$

$$\Delta_{1s}(p, q, h) = \frac{2}{qh^3 \cos qh} \left(-\frac{2ph \sinh^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph - ph} + 1 - \frac{p^2}{q^2} \right),$$

$$\Delta_{3s}(p, q, h) = \frac{2}{qh^3 \cos qh} \left(2 \frac{p^2 h^2 - \sinh^2 ph}{\text{sh} ph \text{ch} ph - ph} - ph \left(3 + \frac{p^2}{q^2} \right) \right).$$

З урахуванням розвинення всіх знайдених коефіцієнтів в ряди за координатою z можемо записати остаточну формулу для знаходження введеної функції $\tilde{\mathcal{V}}_z$ у

вигляді (4.36), а вирази для коефіцієнтів розвинення у цих формулах знаходимо з врахуванням, що всі знайдені коефіцієнти A , \tilde{A} , α , $\tilde{\alpha}$ мають такі ж розвинення за координатою z , як і самоврівноважені зусилля та функції G та \tilde{G} , конкретні вирази, яких приведені в Додатку А.

Таким чином знаходимо функцію Вігака $\tilde{\mathcal{V}}_z(x, y, z)$. Формули для визначення функцій $\tilde{\mathcal{V}}_x(x, y, z)$ та $\tilde{\mathcal{V}}_y(x, y, z)$ отримуємо із наведених вище циклічною заміною змінних (x, y, z) і відповідно власних значень і всіх інших величин. А відповідні їм напруження визначаємо за формулами (4.4).

Числові результати. Проведемо дослідження напруженого стану в прямокутному паралелепіпеді, зумовленого лише дією нормального навантаження $p_x^\pm(y, z) = p_0 F_1(y)$.

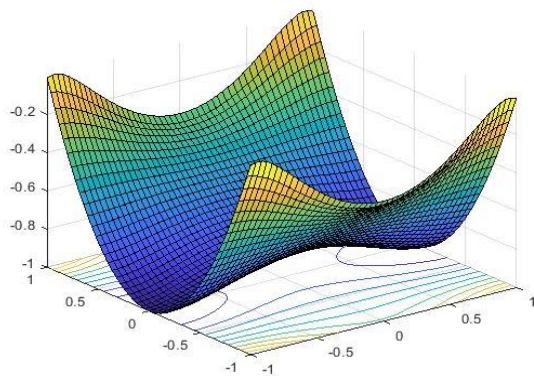


Рис. 4.5

Поведінку нормального напруження σ_{xx} віднесеного до величини p_0 , показано на рис. 4.5 для параметрів $a_x = a_y = a_z = 1$. Якісно розподіл напружень повторює розрахунок напруженого стану для прямокутної області, наведений на рис. 2.3. На рис. 4.6 показано розподіл цих напружень в перетині $z=0$, $y=0$ для значень

$a_z = 1,5$ відповідно. Крива з позначкою "R" відповідає напруженню, розрахованому за формулами для плоскої задачі [27]. На рис. 4.7 показано поведінку цих же напружень при $a_x = 5$. Наведені результати повністю підтверджують принцип Сен-Венана, що напружений стан в поперечних перерізах достатньо віддалених від границі можна розраховувати за спрощеними формулами, а в областях, близьких до межі, є відчутним її вплив. На рис. 4.7 видно, що нормальне напруження σ_{xx} в центральній області прямує до сталого значення $-2/3$, що співпадає з елементарним розв'язком.

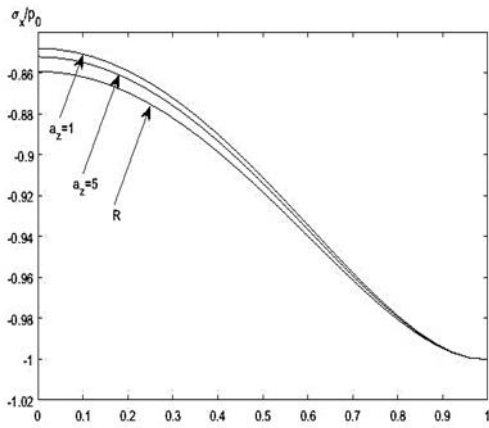


Рис. 4.6

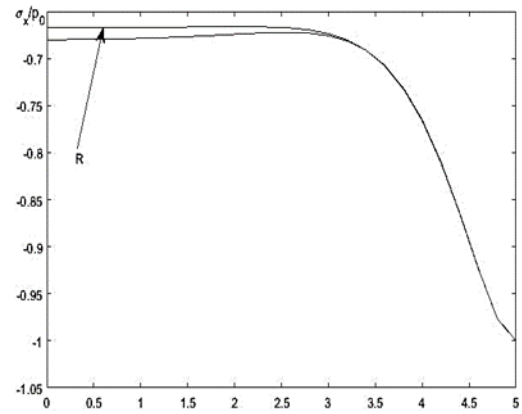
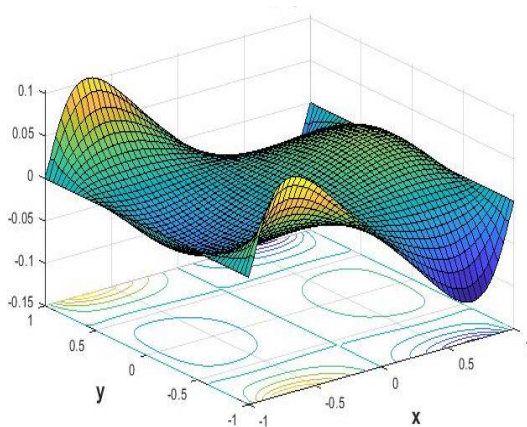
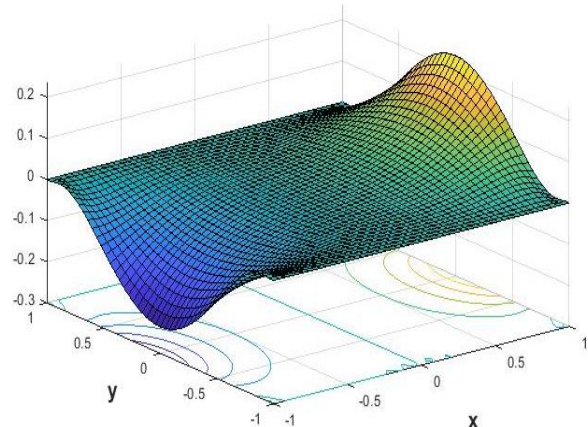


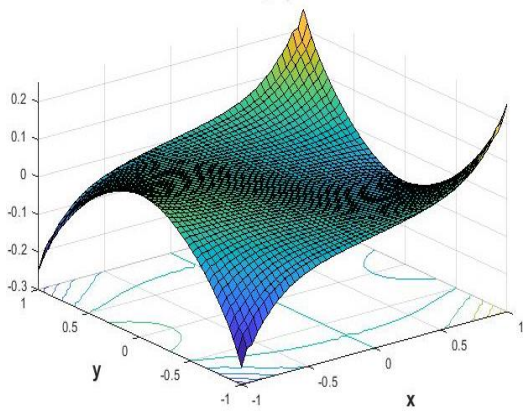
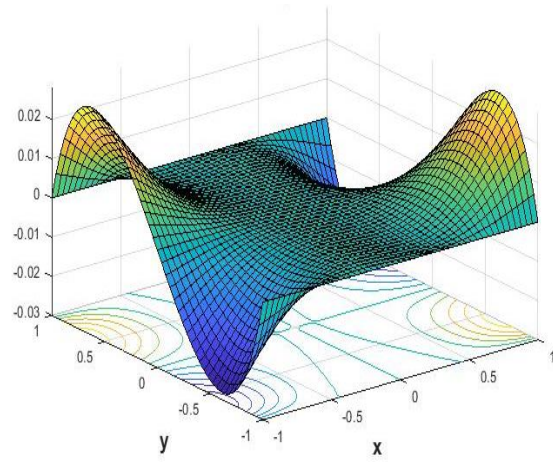
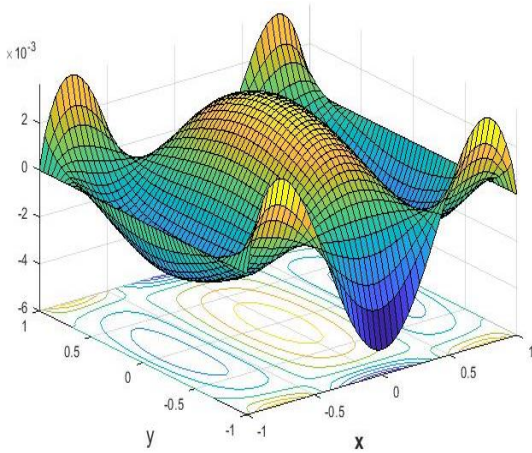
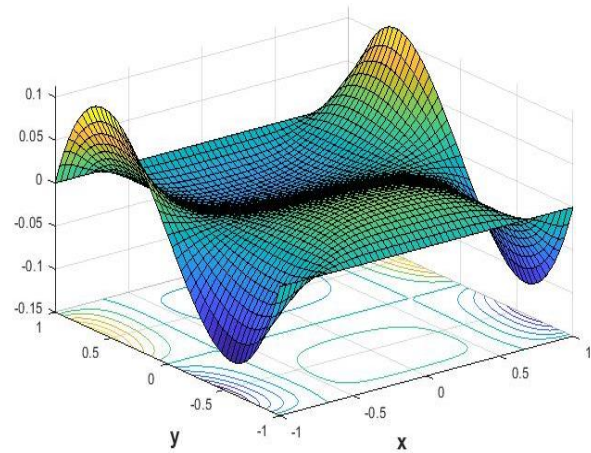
Рис. 4.7

На рис. 4.8 – 4.13 показано поведінку компонент тензора напружень зумовлених лише дотичними навантаженнями

$$\tau_{xy}^{\pm}(y, z) = \tau_0 \frac{y(a_y^2 - y^2)(a_z^2 - 3z^2)}{a_y^3 a_z^2}.$$

Ці навантаження є самоврівноваженими, оскільки задовольняють умови погодження (4.50) та інтегральні умови (4.102). Розрахунки проведено для $a_x = a_y = a_z = 1$ в поперечному перетині $z = 0.2$. Як видно із наведених графіків, всі напруження задовольняють свої межові умови, а точність задоволення відповідних інтегро-диференціальних рівнянь суцільності залежить від кількості членів функціональних рядів (4.112), як і у випадку плоскої задачі термопружності для прямокутної області [187].

Рис. 4.8. Напруження σ_{xx} / τ_0 Рис. 4.9. Напруження σ_{yy} / τ_0

Рис. 4.10. Напряжения σ_{zz} / τ_0 Рис. 4.11. Напряжения σ_{yz} / τ_0 Рис. 4.12. Напряжения σ_{xz} / τ_0 Рис. 4.13. Напряжения σ_{xy} / τ_0

4.6. Висновки до розділу

Таким чином, у четвертому розділі розглянуто просторові задачі теорій пружності та термопружності для прямокутного паралелепіпеда та отримано такі основні результати.

- Виведено інтегральні залежності шести компонент тензора напружень від трьох функцій Вігака.
- На їх основі вісімнадцять межових умов для різних компонент тензора напружень еквівалентно замінено на дванадцять інтегральних умови на введені функції.
- Отримані інтегральні умови рівноваги та суцільності для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження дотичних зусиль на бокових гранях паралелепіпеда і в кутових точках.
- Вихідна задача зведена до розв'язання системи ключових інтегро-диференціальних рівнянь суцільності для трьох функцій Вігака з відповідними інтегральними умовами.
- Побудова розв'язку зв'язаної системи інтегро-диференціальних рівнянь на основі запропонованого методу послідовних наближень зведена до послідовності розв'язування плоских задач пружності та термопружності у відповідних поперечних перетинах паралелепіпеда.
- Проведено числовий аналіз напруженого стану паралелепіпеда при різних видах теплового та силового навантаження та виявлено вплив властивостей матеріалу (коефіцієнт Пуассона) на застосовність формул плоскої задачі в просторовому випадку.

ВИСНОВКИ

У роботі вирішено актуальне наукове завдання – розвинуто ефективний метод безпосереднього інтегрування рівнянь дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності для тіл скінченних розмірів, обмежених плоскими та циліндричними поверхнями, шляхом зведення задач до ключових інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами для визначальних функцій.

Отримано наступні основні наукові результати.

1. Сформульовано фізично обумовлені математичні постановки задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для обмежених тіл з кутовими точками (прямокутної області, суцільного та порожнистого циліндрів скінченної довжини, прямокутного паралелепіпеда).
2. Запропоновано спосіб уведення визначальних функцій (названих у роботі функціями Вігака: однієї для двовимірного випадку і трьох – для просторового) і отримано вирази компонент тензора напружень через ці функції.
3. Еквівалентно замінено межові умови, задані для різних компонент тензора напружень, на інтегральні умови для функцій Вігака, встановлено інтегральні умови рівноваги та суцільності для заданих зовнішніх навантажень та виведено ключові інтегро-диференціальні рівняння для визначальних функцій на основі вихідних рівнянь суцільності в напруженнях.
4. Розроблено аналітично-числові методики розв’язування отриманих крайових задач для знаходження визначальних функцій на основі методу відокремлення змінних з використанням розвинень заданих і шуканих функцій за повними системами ортогональних власних і приєднаних функцій.
5. З використанням отриманих розв’язків проаналізовано напружені стани досліджуваних тіл при різних теплових і силових навантаженнях, у результаті чого виявлено:
 - якісні та кількісні закономірності використання спрощених формул згідно з принципом Сен-Венана для усіх досліджуваних задач;

- вплив коефіцієнта Пуассона на застосовність формул плоских задач теорії пружності та термопружності у випадку видовженого паралелепіпеда, зокрема вказано на кореляцію таких розв'язків тільки у випадку коефіцієнта Пуассона, близького до нуля, що є наслідком використання гіпотези плоских перерізів;
- застосовність уведених функцій Вігака не лише для обмежених областей, а й для напів- чи необмежених по певних координатах із можливістю побудови відповідних інтегро-диференціальних рівнянь суцільності;
- можливість використання отриманих у замкнутому вигляді розв'язків у рамках методу додаткових деформацій розвинути запропонований щодо термопружного аналізу неоднорідних та термочутливих тіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. *Прикл. матем. мех.* 1957. 21. вып. 1. С. 89–101.
2. Абрамян Б.Л. Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. *Докл. АН АрмССР.* 1955. Т. 21. № 5. С. 193–198.
3. Абрамян Б.Л., Манукян М. М. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. *Докл. АН АрмССР.* 1957. Т. 25. № 4. С. 177–184.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Москва: Высшая школа. 1976. 272 с.
5. Баблоян А.А., Мелконян А.П. Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. *Известия Академии наук Армянской ССР. Механика.* 1973. Т. 26. № 5. С. 3–19.
6. Баблоян А.А., Тоноян В.С. Об одной задаче для полого конечного цилиндра. *Известия Академии наук Армянской ССР. Механика.* 1970. Т. 23. № 6. С. 3–11.
7. Белоносов С.М. Математические проблемы теории упругости для областей с углами. *Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твёрдого тела.* 1966. С. 48–60.
8. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. и др. Термопрочность деталей машин. Москва: Машиностроение. 1975. 455 с.
9. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементи теорії пружності. Львів: Світ. 1994. 560 с.
10. Буланов Г.С., Шалдырван В. А. К улучшению сходимости метода однородных решений. *Прикл. мат. мех.* 1980. Т. 44. № 5. С. 957–980.
11. Буланов Г.С., Шалдырван В. А. О методе однородных решений в задачах со смешанными граничными условиями. *Прикл. механика.* 1989. Т. 25. № 9. С. 57–62.
12. Валов Г.М. Об осимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. *Прикладная математика и механика.* 1962. Т. 26. № 4. С. 650–667.

13. Валов Г.М. Решение контактной задачи для упругого бесконечного цилиндра с двумя участками контакта методом тройных интегральных уравнений. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1972. № 5. С. 57–63.
14. Валов Г.М. Решение смешанных задач о кручении бесконечного упругого цилиндра методом дуальных интегральных уравнений и дифференцированием граничных условий. *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29. № 3. С. 532–544.
15. Вігак В.М. Інтегро-диференціальні співвідношення між компонентами напружень для плоскої задачі термопружності. *Доп. АН УРСР. Сер. А*. 1986. № 7. С. 30–33.
16. Вігак В.М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності. *Доповіді НАН України*. 1998. № 12. С. 62–67.
17. Вігак В.М. Розв'язки задач пружності та термопружності в напруженнях. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*. 1995. Вип. 9. С. 34–122
18. Вігак В.М. Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Доповіді НАН України*. 1994. № 12. – С. 58–62.
19. Вігак В., Цимбалюк Л., Шаблій О. Розподіл залишкових напружень у шарі, зумовлених осесиметричними пластичними деформаціями. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2001. Т. 36. № 1. С. 22–26.
20. Вігак В.М., Юзв'як М.Й. Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей. *Крайові задачі для диф. рівнянь*. 1999. Вип. 4. С. 9–33.
21. Вігак В.М., Юзв'як М.Й., Калиняк Б.М. Розв'язування плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Тези допов. 2-го міжнар. симпозіуму інженерів-механіків у Львові*. Львів. 1995. С. 54.
22. Вігак В.М., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Метод відокремлення змінних в плоскій задачі термопружності для прямокутної області. В кн. Всеукр. наук. конф.: «Розробка та застосування математ. методів в науково-техн. дослідженнях». Львів, 1995. Ч.2. С. 15.

23. Вігак В.М., Ясінський А.В., Юзв'як М.Й. Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Інтегр. перетворення та їх застосування до крайових задач*. 1997. Вип. 15. С.11–27.
24. Вигак В.М. Новая форма уравнений термоупругости для одномерной задачи теплопроводности. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1984. № 10. С. 31–34.
25. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. Киев: Наукова думка. 1979. 360 с.
26. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наукова думка. 1988. 312 с.
27. Вигак В.М., Токовый Ю.В. Построение элементарных решений плоской задачи теории упругости для прямоугольной области. *Прикл. механика*. 2002. Т. 38. № 7. С. 79–87.
28. Гачкевич А.Р., Мусий Р.С. Температурные поля и напряженное состояние электропроводного слоя при магнитном ударе на поверхностях. *Физико-механические поля в деформируемых средах*. Киев: Наукова думка. 1978. С. 28–33.
29. Геворкян Г.С. Сравнительный анализ принципа Сен-Венана и методов конечных элементов и разностей применительно к свободно опертым прямоугольным тонким упругим плитам. *Изв. АН АрмССР. Механика*. 1990. Т. 43. № 5. С. 52–58.
30. Голоскоков Е.Г., Голоскоков П.Г. Об изгибе прямоугольной пластины, защемленной по двум противоположным кромкам, под действием произвольной нагрузки. *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*. 1962. № 5. С. 142–146.
31. Голоскоков П.Г. Применение ортогональных полиномов с квазиортогональными производными в задачах об изгибе прямоугольных и секториальных плит. *Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек*. 1962. С. 177–180.
32. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полуполосы. *Прикл. механика*. 1988. Т. 24. № 7. С. 77–83.

33. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О возможностях метода однородных решений в смешанных задачах теории упругости для полуполосы. *Теорет. прикл. механика*. 1987. Вып. 18. С. 3–8.
34. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О методах однородных решений и суперпозиции в статических граничных задачах для упругой полуполосы. *Прикл. механика*. 1986. Т. 22. № 8. С. 84–93.
35. Гомилко А.М., Гринченко В.Т. О сходимости разложений по однородным решениям в плоской задаче для полуполосы с негладкими нагрузками. *Прикл. механика*. 1989. Т. 25. № 4. С. 76–82.
36. Гринченко В.Т. Задача термоупругости для полуполосы. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1973. Вып. 13. С. 86–91.
37. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
38. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
39. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. Т. 3. 280 с.
40. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. *Прикл. мат. мех.* 1952. Т. 16. № 3. С. 341–344.
41. Джанелидзе Г.Ю., Прокопов В.К. Метод однородных решений в математической теории упругости. *Труды IV Всесоюзного математического съезда*. Ленинград: Наука, 1964. С. 551–557.
42. Калиняк Б., Попович В. Напружений стан багатопарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму. *Машинознавство*. 2005. № 2. С. 22–30.
43. Когаев В.П., Матухов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. Москва: Машиностроение, 1985. 224 с.
44. Коган Б.И., Хрусталева А.Ф. О температурном поле бесконечного полого цилиндра при смешанных граничных условиях. *Изв. вузов. Матем.* 1963. № 2. С. 60–62.

45. Колчин Г.Б., Плят Ш.Н., Шейнкер Н.Я. Некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей. Кишинев: Штиинца, 1980. 104 с.
46. Коялович Б.М. Об одном уравнении с частными производными четвёртого порядка. Санкт-Петербург: Изд-во Императорской Академии наук, 1902. 182 с.
47. Кравець В.С., Васюта Р.В. Кручення пружного простору з осесиметричною вузькою порожниною. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2012. Т. 48. № 6. С. 102–109.
48. Кравець В.С., Саврук М.П. Осесиметрична задача кручення пружного простору з гладкими та гострокутними вирізами. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. Т. 49. № 5. С. 21–30.
49. Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. Львів: Сполом, 2011. 256 с.
50. Кушнір Р.М., Ясінський А.В., Токовий Ю.В. Відтворення теплового навантаження функціонально-градієнтної порожнистої кулі за поверхневими переміщеннями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. Вип. 63. № 1. С. 149–160.
51. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1947. 464 с.
52. Лурье А.И. К теории толстых плит. *Прикл. математика и механика*. 1942. № 6. С.151–168.
53. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 491 с.
54. Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.
55. Лурье С.А. Модифицированный метод однородных решений в задачах теории упругости ортотропного тела. *Расчёты на прочность*.1989. Вып. 30. С. 201–208.
56. Любимова М.И. Задача о равновесии полого упругого цилиндра конечной длины со смешанными граничными условиями. *Вестник Московского университета*. 1976. № 1. С.119–124.
57. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2004. Вип. 47. № 3. С. 45–68

58. Мелешко В.В., Токовий Ю.В. Про алгоритм П. Ф. Папковича у методі однорідних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2006. Вип. 49. № 4. С. 69–83.
59. Мелешко В.В., Токовий Ю.В., Барбер Дж.Р. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2010. Вип. 53. № 1. С. 120–137.
60. Мелконян А.П. Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. *Известия Академии наук Армянской ССР. Механика.* 1971. Т. 24. № 2. С. 3-15.
61. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва: Наука, 1970. 512 с.
62. Мусій Р.С. Рівняння в напруженнях дво- і тривимірних динамічних задач термопружності у сферичних координатах. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2003. Т. 39. № 1. С. 46–50.
63. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
64. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 875 с.
65. Папкович П.Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. *Прикл. математика и механика.* 1941. № 5. С. 359–374.
66. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. *Докл. АН СССР.* 1940. № 27. С. 335–339.
67. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Ч. 2. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. Ленинград: Судпромгиз, 1941. 960 с.
68. Папкович П.Ф. Теория упругости. Ленинград–Москва: Оборонгиз, 1939. 640 с.
69. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 688 с.
70. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Дуальный метод граничных элементов для задач теории тонких включень. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2010. Т. 53. №2. С. 46–57.

71. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Ильчук Н.І. Взаємодії фізико-механічних полів у тілах із тонкими структурними неоднорідностями. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2018. Вип. 61. № 2. С. 57–79.
72. Писаренко Г.С. Некоторые актуальные нерешенные проблемы механики деформируемого твердого тела. *Проблемы прочности*. 1998. № 6. С. 5–8.
73. Писаренко Г.С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
74. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. Москва: МГУ, 1981. 344 с.
75. Прокопов В.К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. *Прикладная математика и механика*. 1950. № 13. С. 527–536.
76. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям. *Труды Ленинградского ордена Ленина политехнического института имени М. И. Калинина*. 1967. № 279. С. 31–46.
77. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. *Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твердого тела*. Москва: Наука, 1966. С. 253–259.
78. Прокопов В.К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Москва-Ленинград: Машгиз, 1950. С. 286–303.
79. Прокопов В.К. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра. *Прикл. мат. мех.* 1949. Т. 13. № 2. С. 135–144.
80. Радживин К.А. Приближенное решение задачи о деформации открытой цилиндрической оболочки. *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*. 1963. № 6. С. 163–166.
81. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев: Наукова думка, 1974. 259 с.
82. Рвачев В.Л., Синекон Н.С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наукова думка, 1990. 211 с.

83. Рвачев В.Л., Синекон Н.И. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для ортотропного тела методом R-функций. *Докл. АН УССР*. 1981. № 10. С. 61–64.
84. Рвачев В.Л., Синекон Н.С., Синекон Н.И. Плоская задача теории упругости для ортотропного тела конечных размеров. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20. № 4. С. 40–49.
85. Ревенко В.П. Аналітичний розв'язок задачі симетричного термонапруженого стану товстих пластин на основі тривимірної теорії пружності. *Проблеми машинобудування*. 2021. Т. 24. № 1. С. 25–31.
86. Саврук М.П., Казберук А. Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2011. № 4. С. 52–61.
87. Сумцов В.С. К вопросу о напряженном состоянии упругого цилиндра конечной длины. *Тр. Харьковского политехн. ин-та. с. инж.-физ.* 1959. Т. 25. № 3. С. 99–119.
88. Сумцов В.С. Про напружений стан циліндра конечної довжини. *Прикладна механіка*. 1958. Т. 4. № 4. С. 433–441.
89. Сулова Н.Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. *Итоги науки и техники. С. Механика деформируемого твердого тела*. 1980. № 13. С. 187–296.
90. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 576 с
91. Токовий Ю.В., Мелешко В.В. Функції напружень тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2012. № 27. С. 50–54.
92. Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака. *Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, с. фіз.-мат. н.* 2021, № 3. С. 123–126.
93. Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Функції Вігака у прямих задачах теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками. *Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 75-річчю кафедри диф. рівнянь та 85-річчю*

від дня народження М. П. Ленюка, 28 – 30 жовтня 2021 р. Чернівці: Черн. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. С. 155–156.

94. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. *Доклады АН СССР*. 1974. Т. 216. № 4. С. 755–758.
95. Фесенко А.А. Смешанные задачи стационарной теплопроводности и теории упругости для полубесконечного слоя. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Вип. 56. № 3. С. 182–191.
96. Филоненко-Бородич М.М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. *Прикладная математика и механика*. 1951. № 15. С. 563–574.
97. Филоненко-Бородич М.М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. *Прикладная математика и механика*. 1951. № 15. С. 137–148.
98. Филоненко-Бородич М.М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. *Прикладная математика и механика*. 1946. № 10. С. 193–208.
99. Филоненко-Бородич М.М. О задаче Ляме для параллелепипеда в общем случае поверхностных нагрузок. *Прикладная математика и механика*. 1957. № 21. С. 550–559.
100. Цимбалюк Л.І. Вплив нерівномірності пластичних деформацій по товщині на залишкові напруження у плиті з прямолінійним швом. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2000. Вип. 43. № 1. С. 157–160.
101. Цимбалюк Л.І. Тривимірний розподіл зварювальних залишкових напружень у пластині з круговим швом. *Машинознавство*. 2001. № 2. С. 18–21.
102. Чекурін В.Ф., Постолак Л.І. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним термопружним станом циліндра. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2017. Вип. 60. № 2. С. 105–116
103. Шаблій О.М., Цимбалюк Л.І. Розподіл залишкових напружень у пластині з прямолінійним швом. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2000. № 4. С. 91–94.
104. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Термовязкопластичность. Киев: Наукова думка, 1987. 264 с.

105. Юзв'як М.Й. Використання функцій Вігака для розв'язання задач теорії пружності та термопружності в напруженнях. Тези доповідей Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми термомеханіки – 2021". Львів. С. 183–186.
106. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Пружна рівновага порожнистого циліндра скінченної довжини за осесиметричного силового навантаження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2021. Том. 64, № 3. С. 65–89.
107. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора. *Прикл. пробл. мех. і мат.* 2021. Вип. 19. С. 1–6.
108. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Осесиметричний термонапружений стан скінченного порожнистого циліндра. Тези доповідей VI Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки" . Київ, 2021. С. 64.
109. Якушенюк Р.А. Численное решение задачи термоупругости в напряжениях в криволинейной области. *Науч. тр. Латв. ун-т*. 1990. № 554. С. 182–190.
110. Ясінський А.В, Токова Л.П., Токовий Ю.В. Оптимальне керування статичним термонапруженим станом плоскодеформованого півпростору. Тези доповідей Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми термомеханіки – 2021". Львів. С. 179.
111. Ясінський А.В., Токовий Ю.В. Керування двовимірними стаціонарними температурними напруженнями півпростору за допомогою зовнішнього теплового навантаження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2019. Вип. 62. № 2. С. 98–106.
112. Baker G., Pavlović M.N., Tahan N. An exact solution to the two-dimensional elasticity problem with rectangular boundaries under arbitrary edge forces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1993. № 343. P. 307–336.
113. Berdakchiev A.V. Problems of coupled thermoelasticity for a parallelepiped. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1981. Vol. 41. № 1. P. 794–800.
114. Bjorstad P. Fast numerical solution of the biharmonic Dirichlet problem on rectangles. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1983. Vol. 20. № 1. P. 59–71.
115. Dao-an H. A general solution of the orthotropic continuous rectangular plate. *Comput. and Struct.* 1990. Vol. 34. № 2. P. 273–279

116. Dargush G.F., Banerjee P.K. Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1990. Vol. 26. № 2. P. 199–216.
117. Davis A.M.J. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2003. № 459. P. 409–412.
118. Desai P., Kant T. Stress analysis of finite length cylinders of layered media. *Applied and Computational Mechanics*. 2011. № 5. P. 129–142.
119. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*. 1904. Vol. 41. № 8. P. 129–228.
120. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*. 1914. Vol. 49. № 17. P. 895–978.
121. Ebenezer D.D., Ravichandran K. Free and forced vibrations of hollow elastic cylinders of finite length. *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. Vol. 137. № 5. P. 2927–2938.
122. Etcheverry J.I., Sánchez G.A. Resonance frequencies of parallelepipeds for determination of elastic moduli: An accurate numerical treatment. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 321. № 3-5. P. 631–646.
123. Fadle J. Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. *Ing-Archiv*. 1940. № 11. P. 125–148.
124. Filon L.N.G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special references to points of concentrated or discontinuous loading. *Phil. Trans. R. Soc. London*. 1903. A 201. P. 63–155.
125. Filon L.N.G. On the expansion of polynomials in series of functions. *Proc. London Math. Soc. (ser II)*. 1907. № 4. P. 396–430.
126. Gaydon F.A. The rectangle in generalized plane stress, with numerically prescribed boundary stresses and applications to discontinuous loading. *Proc. Roy. Soc. London*. 1965. A 286. P. 251–269.
127. Gaydon F.A. The rectangle, under general equilibrium loading, in generalized plane stress. *Proc. Roy. Soc. London*. 1965. A 283. P. 356–378.

128. Golovchan V.T. On the solution of plane boundary-value problems of elasticity in a rectangle. *International Applied Mechanics*. 2006. Vol. 42. № 1. P. 84–89.
129. Gomilko A.M., Grinchenko V.T., Gurzhii A.A. The method of homogeneous solutions in the case of a discontinuous. *J. Math. Sci.* 1995. Vol 74. № 4. P. 1117–1119.
130. Gomilko A.M., Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Homogeneous solutions in the equilibrium problem of an elastic cylinder of finite. *J. Math. Sci.* 1992. Vol. 60. № 1. P. 1249–1253.
131. Gomilko A.M., Grinchenko V.T. Method of homogeneous solutions under non-smooth loads. *J. Math. Sci.* 1991. Vol. 57. № 1. P. 2914–2918.
132. Goodier J.N. Compression of rectangular block, and the bending of beams by non-linear distributions of bending forces. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1932. Vol. 54. P. 173–183.
133. Gopalacharyulu S.A. A variational method for the end problem of rectangular strip. *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6. № 6. P. 1157–1159.
134. Goto T., Ohno I., Sumino Y. The determination of the elastic constants of natural almandine-pyrope garnet by rectangular parallelepiped resonance method. *Journal of Physics of the Earth*. 2009. Vol. 24. № 2. P. 149–156.
135. Gregory R.D. The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip, existence of solution and completeness of the Papkovitch – Fadle eigenfunctions. *J. Elast.* 1980. № 10. P. 295–327.
136. Hencky H. *Der Spannungszustand in rechteckigen Platten*. Munchen-Oldenbourg, 1913. 96 p.
137. Horvay G. Orthogonal edge polynomials in the variational solution of some boundary layer problems in elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* 1960. № 11. P. 102–116.
138. Horvay G. The end problem of rectangular strips. *J. Appl. Mech.* 1953. № 20. P. 87–94.
139. Joseph D.D., Sturges L., Warner W.H. Convergence of biorthogonal series of biharmonic eigenfunctions by the method of Titchmarsh. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1982. № 78. P. 229–279.

140. Khomasuridze N., Janjgava R. Some non-classical boundary value problems of thermoelasticity and a three-dimensional analogue of Muskhelishvili's thermal effect. *Journal of Thermal Stresses*. 2013. Vol. 36. № 7. P. 699–713.
141. Khomasuridze N., Janjgava R. Solution of some boundary value thermoelasticity problems for a rectangular parallelepiped taking into account microthermal effects. *Meccanica*. 2016. Vol. 51. № 1. P. 211–221.
142. Khomasuridze N. Solution of boundary value contact problems of thermoelastic equilibrium of a multilayer piecewise non-homogeneous isotropic rectangular parallelepiped. *AMIM*. 2014. Vol. 19. № 2. P. 36–61.
143. Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of a parallelepiped with nongomogeneous symmetr and antisymmetry conditions on its faces. *Georgian Mathematical Journal*. 2000. Vol. 7. № 4. P. 701–722.
144. Khomasuridze N., Zirakashvili N., Janjgava R., Narmania M. Analytical solution of classical and non-classical boundary value contact problems of thermoelasticity for a rectangular parallelepiped consisting of compressible and incompressible elastic layers and numerical example of the solution of such problems. *Archives of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 84. № 12. P. 1701–1713.
145. Kim Yo.Yu., Steele Ch.R. Modifications of series expansions for general end conditions and corner singularities on the semi-infinite strip. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1990. Vol. 57. № 3. P. 581–588.
146. Kolchin G.B., Plachinta V.N. Elastic equilibrium of an inhomogeneous orthotropic parallelepiped. *Journal of Mathematical Sciences*. 1991. Vol. 56. № 6. P. 2725–2729.
147. Kushnir R.M., Tokovyi Y.V., Yuzvyak M.Y., Yasinskyi A.V. Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integro-differential equations. *Ukr. Math. Journal*. 2022. Vol. 73. No. 10. P. 1566–1569.
148. Kushnir R.M., Yasinskyi A.V., Tokovyy Y.V. Effect of Material Properties in the Direct and Inverse Thermomechanical Analyses of Multilayer Functionally Graded Solids. *Advanced Engineering Materials*. 2021. Vol. 24. No. 5.
149. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Imprimerie deBachelier, 1852. 335 p.

150. Lurie S.A., Vasiliev V.V. The biharmonic problem in the theory of elasticity. Luxembourg: Gordon and Breach, 1995. 265 p.
151. Martin A.F., Leissa A.W. Application of the Ritz method to plane elasticity problem for composite sheets with variable fibre spacing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1989. Vol.28. № 8. P. 1813–1825.
152. Mathieu E. Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris: Gaunthier -Villars, 1890. 403 p.
153. Meleshko V.V. Biharmonic problem in a rectangle. *Appl. Sci. Res.* 1998. № 58. P.217–249.
154. Meleshko V.V. Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited. *J. Elast.* 1995. № 40. P. 207–238.
155. Meleshko V.V., Gomilko A.M., Gourjii A.A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate. *J. Eng. Math.* 2001. № 40. P. 377–398.
156. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.* 2003. Vol. 56. № 1. P. 33–85.
157. Meleshko V.V., Tokovyy Yu.V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings. *Journal of Engineering Mathematics.* 2013. Vol. 78. № 1. P. 143–166.
158. Mesnager A. Sur a l'application de la théorie de l'élasticite en calcul des pieces rectangulaires flechies. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1901. № 132. P. 1475–1478.
159. Morley L.S.D. Simple series solution for the bending of a clamped rectangular plate under uniform normal load. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1963. Vol. 16. № 1. P. 109–114.
160. Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rajagopal A. Finite element simulation of thermoelastic effective properties of periodic masonry with porous bricks. In: Sumbatyan, M. (eds) Wave Dynamics and Composite Mechanics for Microstructured Materials and Metamaterials, *Advanced Structured Materials.* Springer, Singapore. 2017. Vol. 59.
161. Papkov S.O. Three-dimensional dynamic problem of the theory of elasticity for a parallelepiped. *Journal of Mathematical Sciences.* 2016. Vol. 215. P. 121–142.

162. Popov G.Y., Protserov Yu.S. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 212. № 1. P. 67–82.
163. Protsyuk B.V. Axisymmetric static thermoelastic state of a smoothly fixed finite cylinder layered along the axis. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 187. № 6. P. 737–757.
164. Przemieniecki J.S. Thermal stresses in rectangular plates. *The Aeronautical quarterly*. 1959. Vol. 10. No. 1. P. 65–78.
165. Ribière C.H. Sur la flexion des pièces épaisses. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1898. № 126. P. 402–404.
166. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *J. reine angew. Math.* 1908. № 135. P. 1–61.
167. Robert M. An elastic circular cylinder with displacement prescribed at the ends – axially symmetric case. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1987. Vol. 40. No. 3. P. 339–363.
168. Rubin M.B. Free vibration of a rectangular parallelepiped using the theory of a Cosserat point. *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*. 1986. Vol. 53. No. 1. P.45–50.
169. Safari A., Tahani M., Hosseini S.M. Two-dimensional dynamic analysis of thermal stresses in a finite-length FG thick hollow cylinder subjected to thermal shock loading using an analytical method. *Acta Mechanica*. 2011. No. 220. P. 299–314.
170. Şeremet V., Şeremet D. Solution in integrals of a 3D BVP of thermoelasticity: Green's functions and integration formula for thermal stresses within a semi-bounded parallelepiped. *Acta Mechanica*. 2017. Vol. 228. P. 4471–4490.
171. Sivakumaran K.S. Finite deflection of loosely clamped symmetrically laminated rectangular plates subjected to temperature field. *J. Thermal Stresses*. 1990. Vol. 13. № 3. P. 297–313.
172. Sundara Raja Iyengar K.T., Chandrashekhara K., Sebastian V.K. On the analysis of thick rectangular plates. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*. 1974. Vol.43. No. 5. P. 317–330.

173. Sundara Raja Iyengar K.T., and Chandrashekhara K. Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surfaces. *International Journal of Engineering Science*. 1967. Vol. 5. No. 4. P. 393–413.
174. Tahan N. Single Fourier series for two-dimensional analysis of plates and box girders. Ph. D. thesis. University of London. 1991.
175. Taits N.Y., Sabel'nikov A.G., Minaev A.N., Moshura V.V. Maximum temperature drops and thermoelastic stresses in the symmetric heating of prisms and parallelepipeds. *Strength of Materials*. 1971. Vol. 3. P. 1405–1406.
176. Tokovyy Yu.V., Kalynyak B.M., Ma C.-C. Nonhomogeneous solids: integral equations approach. In R. B. Hetnarski (ed.): *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Springer: Dordrecht, 2014. Vol. 7. P. 3350–3356.
177. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Analysis of residual stresses in a long hollow cylinder. *Int. J. Pressure Vessels Piping*. 2011. Vol. 88. No. 5-7. P. 248–255.
178. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Analytical solutions to the axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for an arbitrarily inhomogeneous layer. *Int. J. Engineering Science*. 2015. Vol. 92. P. 1–17.
179. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids. *Int. J. Solids Structures*. 2009. Vol. 46. No. 21. P. 3850–3859.
180. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings. *J. Appl. Mechanics*. 2016. Vol. 83. P. 111007-1-7.
181. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Elastic analysis of inhomogeneous solids: history and development in brief. *Journal of Mechanics*. 2019. Vol. 35. No. 5. P. 613–626.
182. Tokovyy Y.V., Ma, C.-C. The Direct Integration Method for Elastic Analysis of Nonhomogeneous Solids. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. 342 p.
183. Valov G.M. The first fundamental problem of the theory of elasticity for a rectangular parallelepiped. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1966. Vol. 30, No. 6. P. 1256–1271.

184. Vendhan C.P., Archer R.R. Axisymmetric stresses in transversely isotropic finite cylinders. *International Journal of Solids and Structures*. 1978. Vol. 14. No. 4. P. 305–318.
185. Vihak V.M. and Yuzvyak M.Yo. Key continuity equations in stresses for axisymmetric problems of elasticity and thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001. Vol. 107. No. 1. P.3659–3665.
186. Vihak V.M., Yuzvyak M.Y. Three integro-differential compatibility equations in terms of strains and a complete system of thermoelasticity equations in terms of stresses. *3rd Int. Congress on Thermal Stresses "Thermal Stresses-99"*. Cracow, Poland. 1999. P.143–146.
187. Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V. The solution of plane thermoelasticity problem for rectangular domain. *J. Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21. No. 5. P. 545–562.
188. Warren W.E., Roark A.L., Bickford W.B. (1967). "End effect in semi-infinite transversely isotropic cylinders. *AIAA Journal*. 1967. Vol. 5. No. 8. P. 1448–1455.
189. Wegner U. Berechnung von teilweise eigenspannten rechteckigen Platten bei Vorgabe von Randmomenten. *ZAMM*. 1956. Vol. 36. № 9–10. P. 340–355.
190. Xing Z.X., Jia J.L. Use of double trigonometric series in the solution of plane elasticity problems by calculus of variation, a comment on an error in Timoshenko and Goodier's book *Theory of Elasticity*, 2nd edition (1951). *Int. J. Solids and Struct.* 1991. Vol. 27. № 12. P. 1597–1599.
191. Yang X., Ning J., Cheng Ch. Bending of cantilever rectangular plates with the effect of transverse shear deformation. *Appl. Mech. and Math.* 1992. Vol. 13. № 1. P. 61–75.
192. Yuqiu Zhao. An exact solution to the plane orthotropic elasticity problem with rectangular boundaries under arbitrary edge forces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1996. A. 346. P. 2469–2511.
193. Yuzvyak M.Y, Tokovyy Y.V, Yasinsky A.V. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *J. Thermal Stresses*. 2020. Vol. 44, No. 3. P. 359–376.

Додаток А

Коефіцієнти розвинень функцій правих частин G для задачі термопружності:

$$\begin{aligned}
 G_n^{c00} &= T_n^{c00} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} Y_{nk}^{c0c}, & G_n^{c01} &= T_n^{c01} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} Y_{nk}^{c0s}, \\
 G_n^{c10} &= T_n^{c10} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} Y_{nk}^{c1c}, & G_n^{c11} &= T_n^{c11} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} Y_{nk}^{c1s}, \\
 G_{nk}^{c0s} &= T_{nk}^{c0s} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c0s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{y,m} a_y)}{\gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccs}, \\
 G_{nk}^{c0c} &= T_{nk}^{c0c} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c0c} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{y,m} a_y)}{\gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccc}, \\
 G_{nk}^{c1s} &= T_{nk}^{c1s} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c1s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{y,m} a_y)}{\lambda_{y,m}} X_{nmk}^{css}, \\
 G_{nk}^{c1c} &= T_{nk}^{c1c} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c1c} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{y,m} a_y)}{\lambda_{y,m}} X_{nmk}^{csc}, \\
 G_{nm}^{cs0} &= T_{nm}^{cs0} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{csc} + X_{nmk}^{csc}), & G_{nm}^{cs1} &= T_{nm}^{cs1} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{css} + X_{nmk}^{css}), \\
 G_{nm}^{cc0} &= T_{nm}^{cc0} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{ccc} + X_{nmk}^{ccc}), \\
 G_{nm}^{cc1} &= T_{nm}^{cc1} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{ccs} + X_{nmk}^{ccs}), \\
 G_{nmk}^{css} &= T_{nmk}^{css} + \nu \frac{\gamma_{x,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{css} + \frac{\nu \lambda_{y,m}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \lambda_{y,m}^2} X_{nmk}^{css}, \\
 G_{nmk}^{csc} &= T_{nmk}^{csc} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{csc} + \frac{\nu \lambda_{y,m}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \lambda_{y,m}^2} X_{nmk}^{csc}, \\
 G_{nmk}^{ccs} &= T_{nmk}^{ccs} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccs} + \frac{\nu \gamma_{y,m}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccs},
 \end{aligned}$$

$$G_{nmk}^{ccc} = T_{nmk}^{ccc} + v \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccc} + \frac{v \gamma_{y,m}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccc}.$$

Для коефіцієнтів з " хвилькою":

$$\tilde{G}_m^{0c0} = T_m^{0c0} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{zk} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} X_{mk}^{0cc}, \quad \tilde{G}_m^{0c1} = T_m^{0c1} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{zk} a_z)}{\lambda_{z,k}} X_{mk}^{0cs},$$

$$\tilde{G}_m^{1c0} = T_m^{1c0} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} X_{mk}^{1cc}, \quad \tilde{G}_m^{1c1} = T_m^{1c1} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} X_{mk}^{1cs},$$

$$\tilde{G}_{mk}^{0cs} = T_{mk}^{0cs} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{0cs} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{x,n} a_x)}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccs},$$

$$\tilde{G}_{mk}^{0cc} = T_{mk}^{0cc} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{0cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{x,n} a_x)}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccc},$$

$$\tilde{G}_{mk}^{1cs} = T_{mk}^{1cs} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{1cs} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{x,n} a_x)}{\lambda_{x,n}} Y_{nmk}^{scs},$$

$$\tilde{G}_{mk}^{1cc} = T_{mk}^{1cc} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{1cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{x,n} a_x)}{\lambda_{x,n}} Y_{nmk}^{scc},$$

$$\tilde{G}_{nm}^{sc0} = T_{nm}^{sc0} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{scc} + X_{nmk}^{scc}),$$

$$\tilde{G}_{nm}^{sc1} = T_{nm}^{sc1} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{scs} + X_{nmk}^{scs}),$$

$$\tilde{G}_{nm}^{cc0} = T_{nm}^{cc0} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{ccc} + X_{nmk}^{ccc}),$$

$$\tilde{G}_{nm}^{cc1} = T_{nm}^{cc1} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{ccs} + X_{nmk}^{ccs}),$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{scs} = T_{nmk}^{scs} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{scs} + \frac{v \lambda_{x,n}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \lambda_{x,n}^2} Y_{nmk}^{scs},$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{scc} = T_{nmk}^{scc} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{scc} + \frac{v \lambda_{x,n}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \lambda_{x,n}^2} X_{nmk}^{scc},$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{\text{ccs}} = T_{nmk}^{\text{ccs}} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{ccs}} + \frac{v \gamma_{x,n}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{ccs}},$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{\text{ccc}} = T_{nmk}^{\text{ccc}} + v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{ccc}} + \frac{v \gamma_{x,n}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{ccc}}.$$

Додаткові інтегральні умови на введені функції Вігака:

$$\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_x dy dz = \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dz -$$

$$-a_y (\tau_{yz}^+(a_z, x) - \tau_{yz}^+(-a_z, x) + \tau_{yz}^-(a_z, x) - \tau_{yz}^-(-a_z, x)), \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-a_z}^{a_z} \int_{-a_y}^{a_y} yz \mathcal{V}_x dy dz = \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} z (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dz + a_y \int_{-a_z}^{a_z} (\tau_{yz}^+(z, x) + \tau_{yz}^-(z, x)) dz -$$

$$-a_y a_z (\tau_{yz}^+(a_z, x) + \tau_{yz}^+(-a_z, x) + \tau_{yz}^-(a_z, x) + \tau_{yz}^-(-a_z, x)), \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} y \mathcal{V}_z dy dx = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dx -$$

$$-a_y (\tau_{yx}^+(a_x, z) - \tau_{yx}^+(-a_x, z) + \tau_{yx}^-(a_x, z) - \tau_{yx}^-(-a_x, z)), \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} xy \mathcal{V}_z dy dx = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} x (p_y^+(x, z) - p_y^-(x, z)) dx + a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{yx}^+(x, z) + \tau_{yx}^-(x, z)) dx -$$

$$-a_y a_x (\tau_{yx}^+(a_x, z) + \tau_{yx}^+(-a_x, z) + \tau_{yx}^-(a_x, z) + \tau_{yx}^-(-a_x, z)), \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_y dz dx = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dx -$$

$$-a_z (\tau_{zx}^+(a_x, y) - \tau_{zx}^+(-a_x, y) + \tau_{zx}^-(a_x, y) - \tau_{zx}^-(-a_x, y)), \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} xz \mathcal{V}_y dz dx = \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} x (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dx + a_z \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{zx}^+(x, y) + \tau_{zx}^-(x, y)) dx -$$

$$-a_z a_x (\tau_{zx}^+(a_x, y) + \tau_{zx}^+(-a_x, y) + \tau_{zx}^-(a_x, y) + \tau_{zx}^-(-a_x, y)), \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} z \mathcal{V}_x dz dy = \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dy -$$

$$-a_z (\tau_{zy}^+(a_y, x) - \tau_{zy}^+(-a_y, x) + \tau_{zy}^-(a_y, x) - \tau_{zy}^-(-a_y, x)), \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} zy \mathcal{V}_x dz dy = \frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} y (p_z^+(y, x) - p_z^-(y, x)) dy + a_z \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{zy}^+(y, x) + \tau_{zy}^-(y, x)) dy -$$

$$-a_z a_y (\tau_{zy}^+(a_y, x) + \tau_{zy}^+(-a_y, x) + \tau_{zy}^-(a_y, x) + \tau_{zy}^-(-a_y, x)). \quad (\text{A.8})$$

Інтегральні умови для зовнішніх навантажень:

$$\frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dz = \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{zy}^+(y, x) - \tau_{zy}^-(y, x)) dy, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dx = \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{xy}^+(y, z) - \tau_{xy}^-(y, z)) dy, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dx = \int_{-a_z}^{a_z} (\tau_{xz}^+(z, y) - \tau_{xz}^-(z, y)) dz, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dx = \int_{-a_z}^{a_z} (\tau_{yz}^+(z, x) - \tau_{yz}^-(z, x)) dz, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a_y}^{a_y} y (p_z^+(y, x) - p_z^-(y, x)) dy + a_z \int_{-a_y}^{a_y} (\tau_{zy}^+(y, x) + \tau_{zy}^-(y, x)) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} z (p_y^+(z, x) - p_y^-(z, x)) dz + a_y \int_{-a_z}^{a_z} (\tau_{yz}^+(z, x) + \tau_{yz}^-(z, x)) dz, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} x (p_z^+(x, y) - p_z^-(x, y)) dx + a_z \int_{-a_x}^{a_x} (\tau_{zx}^+(x, y) + \tau_{zx}^-(x, y)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a_z}^{a_z} z (p_x^+(z, y) - p_x^-(z, y)) dz + a_x \int_{-a_z}^{a_z} (\tau_{xz}^+(z, y) + \tau_{xz}^-(z, y)) dz, \quad (\text{A.14})$$

Самоврівноважені частини функцій Вігака \mathcal{V}_x^e та \mathcal{V}_y^e :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_x^e = & -\frac{1}{2a_y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}^{+e}(\tilde{z}, x)}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}^{-e}(\tilde{z}, x)}{\partial z} \right) - \frac{1}{2a_z} \left(\frac{\partial \tau_{zy}^{+e}(\tilde{y}, x)}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}^{-e}(\tilde{y}, x)}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{3y}{2a_y^3} \left(\frac{1}{2} (p_y^{+e}(\tilde{z}, x) - p_y^{-e}(\tilde{z}, x)) - a_y \left(\frac{\partial \tau_{yz}^{+e}(\tilde{z}, x)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}^{-e}(\tilde{z}, x)}{\partial z} \right) \right) + \\ & + \frac{3z}{2a_z^3} \left(\frac{1}{2} (p_z^{+e}(\tilde{y}, x) - p_z^{-e}(\tilde{y}, x)) - a_z \left(\frac{\partial \tau_{zy}^{+e}(\tilde{y}, x)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^{-e}(\tilde{y}, x)}{\partial y} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_y^e = & -\frac{1}{2a_z} \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{+e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}^{-e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2a_x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{+e}(\tilde{z}, y)}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}^{-e}(\tilde{z}, y)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{3z}{2a_z^3} \left(\frac{1}{2} (p_z^{+e}(\tilde{x}, y) - p_z^{-e}(\tilde{x}, y)) - a_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{+e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^{-e}(\tilde{x}, y)}{\partial x} \right) \right) + \\ & + \frac{3x}{2a_x^3} \left(\frac{1}{2} (p_x^{+e}(\tilde{z}, y) - p_x^{-e}(\tilde{z}, y)) - a_x \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{+e}(\tilde{z}, y)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^{-e}(\tilde{z}, y)}{\partial z} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Розвинення самоврівноважених зовнішніх навантажень:

$$p_x^{\pm e}(\tilde{y}, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(p_{x_{-m}}^{-c0} + p_{x_{-m}}^{-c1} z \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(p_{x_{-m}}^{-s0} + p_{x_{-m}}^{-s1} z \right) \sin \lambda_{y,m} y \right) + \tilde{p}_x^{\pm e}(y, z), \quad (\text{A.17})$$

$$p_x^{\pm e}(y, \tilde{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(p_{x_{-k}}^{-0c} + p_{x_{-k}}^{-1c} y \right) \cos \gamma_{z,k} z + \left(p_{x_{-k}}^{-0s} + p_{x_{-k}}^{-1s} y \right) \sin \lambda_{z,k} z \right) + \tilde{p}_x^{\pm e}(y, z),$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_x^{\pm e}(y, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{x_{-mk}}^{\pm cc} \cos \gamma_{y,m} y \cos \gamma_{z,k} z + p_{x_{-mk}}^{\pm sc} \sin \lambda_{y,m} y \cos \gamma_{z,k} z + \right. \\ & \left. + p_{x_{-mk}}^{\pm cs} \cos \gamma_{y,m} y \sin \lambda_{z,k} z + p_{x_{-mk}}^{\pm ss} \sin \lambda_{y,m} y \sin \lambda_{z,k} z \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$p_y^{\pm e}(\tilde{x}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(p_{y_{n-}}^{c-0} + p_{y_{n-}}^{c-1} z \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(p_{y_{n-}}^{s-0} + p_{y_{n-}}^{s-1} z \right) \sin \lambda_{x,n} x \right) + \tilde{p}_y^{\pm e}(x, z), \quad (\text{A.19})$$

$$p_y^{\pm e}(x, \tilde{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(p_{y_{-k}}^{0-c} + p_{y_{-k}}^{1-c} x \right) \cos \gamma_{z,k} z + \left(p_{y_{-k}}^{0-s} + p_{y_{-k}}^{1-s} x \right) \sin \lambda_{z,k} z \right) + \tilde{p}_y^{\pm e}(x, z),$$

$$\tilde{p}_y^{\pm e}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{y_{n-k}}^{\pm c-c} \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{z,k} z + p_{y_{n-k}}^{\pm s-c} \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{z,k} z + \right.$$

$$+ p_{y_{n-k}}^{\pm c-s} \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{z,k} z + p_{y_{n-k}}^{\pm s-s} \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{z,k} z \Big), \quad (\text{A.20})$$

$$p_z^{\pm e}(\tilde{x}, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(p_{z_{n-}}^{c-0} + p_{z_{n-}}^{c1-y} \right) \cos \gamma_{x,n} x + \left(p_{z_{n-}}^{s0-} + p_{z_{n-}}^{s1-y} \right) \sin \lambda_{x,n} x \right) + \tilde{p}_z^{\pm e}(x, y), \quad (\text{A.21})$$

$$p_z^{\pm e}(x, \tilde{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(p_{z_{m-}}^{0c-} + p_{z_{m-}}^{1c-x} \right) \cos \gamma_{y,m} y + \left(p_{z_{m-}}^{0s-} + p_{z_{m-}}^{1s-x} \right) \sin \lambda_{y,m} y \right) + \tilde{p}_z^{\pm e}(x, y),$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_z^{\pm e}(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(p_{z_{nm-}}^{\pm cc-} \cos \gamma_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + p_{z_{nm-}}^{\pm sc-} \sin \lambda_{x,n} x \cos \gamma_{y,m} y + \right. \\ & \left. + p_{z_{nm-}}^{\pm cs-} \cos \gamma_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y + p_{z_{nm-}}^{\pm ss-} \sin \lambda_{x,n} x \sin \lambda_{y,m} y \right), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{\pm e}(x, \tilde{z}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{yz_{n-}}^{\pm c-0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{\pm c-c} \frac{\sin \gamma_{z,k} z}{\gamma_{z,k}} + \tau_{yz_{n-k}}^{\pm c-s} \frac{\cos \lambda_{z,k} a_z - \cos \lambda_{z,k} z}{\lambda_{z,k}} \right) \right) \cos \gamma_{x,n} x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{yz_{n-}}^{\pm s-0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{\pm s-c} \frac{\sin \gamma_{z,k} z}{\gamma_{z,k}} + \tau_{yz_{n-k}}^{\pm s-s} \frac{\cos \lambda_{z,k} a_z - \cos \lambda_{z,k} z}{\lambda_{z,k}} \right) \right) \sin \lambda_{x,n} x, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \tau_{zy}^{\pm e}(x, \tilde{y}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{zy_{n-}}^{\pm c0-} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{zy_{nm-}}^{\pm cc-} \frac{\sin \gamma_{y,m} y}{\gamma_{y,m}} + \tau_{zy_{nm-}}^{\pm cs-} \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y - \cos \lambda_{y,m} y}{\lambda_{y,m}} \right) \right) \cos \gamma_{x,n} x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{zy_{n-}}^{\pm s0-} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{zy_{nm-}}^{\pm sc-} \frac{\sin \gamma_{y,m} y}{\gamma_{y,m}} + \tau_{zy_{nm-}}^{\pm ss-} \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y - \cos \lambda_{y,m} y}{\lambda_{y,m}} \right) \right) \sin \lambda_{x,n} x, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{\pm e}(y, \tilde{z}) = & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{xz_{m-}}^{\pm c0-} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{xz_{mk}}^{\pm cc-} \frac{\sin \gamma_{z,k} z}{\gamma_{z,k}} + \tau_{xz_{mk}}^{\pm cs-} \frac{\cos \lambda_{z,k} a_z - \cos \lambda_{z,k} z}{\lambda_{z,k}} \right) \right) \cos \gamma_{y,m} y + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{xz_{m-}}^{\pm s0-} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{xz_{mk}}^{\pm sc-} \frac{\sin \gamma_{z,k} z}{\gamma_{z,k}} + \tau_{xz_{mk}}^{\pm ss-} \frac{\cos \lambda_{z,k} a_z - \cos \lambda_{z,k} z}{\lambda_{z,k}} \right) \right) \sin \lambda_{y,m} y, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^{\pm e}(\tilde{x}, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{zx_{m-}}^{\pm 0c-} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{zx_{nm-}}^{\pm cc-} \frac{\sin \gamma_{x,n} x}{\gamma_{x,n}} + \tau_{zx_{nm-}}^{\pm sc-} \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x - \cos \lambda_{x,n} x}{\lambda_{x,n}} \right) \right) \cos \gamma_{y,m} y + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{zx_{m-}}^{\pm 0s-} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{zx_{nm-}}^{\pm cs-} \frac{\sin \gamma_{x,n} x}{\gamma_{x,n}} + \tau_{zx_{nm-}}^{\pm ss-} \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x - \cos \lambda_{x,n} x}{\lambda_{x,n}} \right) \right) \sin \lambda_{y,m} y, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\tau_{xy}^{\pm e}(\tilde{y}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{xy_{-k}}^{\pm 0c-} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{xy_{-mk}}^{\pm cc-} \frac{\sin \gamma_{y,m} y}{\gamma_{y,m}} + \tau_{xy_{-mk}}^{\pm sc-} \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y - \cos \lambda_{y,m} y}{\lambda_{y,m}} \right) \right) \cos \gamma_{z,k} z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{xy_{-k}}^{\pm 0s} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{xy_{-mk}}^{\pm sc} \frac{\sin \gamma_{y,m} y}{\gamma_{y,m}} + \tau_{xy_{-mk}}^{\pm ss} \frac{\cos \lambda_{y,m} a_y - \cos \lambda_{y,m} y}{\lambda_{y,m}} \right) \right) \sin \lambda_{z,k} z, \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^{\pm e}(\tilde{x}, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{yx_{-k}}^{\pm 0c} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{yx_{n-k}}^{\pm cc} \frac{\sin \gamma_{x,n} x}{\gamma_{x,n}} + \tau_{yx_{n-k}}^{\pm sc} \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x - \cos \lambda_{x,n} x}{\lambda_{x,n}} \right) \right) \cos \gamma_{z,k} z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_{yx_{-k}}^{\pm 0s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_{yx_{n-k}}^{\pm cs} \frac{\sin \gamma_{x,n} x}{\gamma_{x,n}} + \tau_{yx_{n-k}}^{\pm ss} \frac{\cos \lambda_{x,n} a_x - \cos \lambda_{x,n} x}{\lambda_{x,n}} \right) \right) \sin \lambda_{z,k} z. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Коефіцієнти розвинень функцій правих частин G для задачі пружності:

$$\begin{aligned} G_n^{c00} = & p_{y_{n-}}^{c_0} - \nu p_{z_{n-}}^{c0} + \frac{1}{2a_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{zy_{nm-}}^{+cc-} - \tau_{zy_{nm-}}^{-cc-}}{\gamma_{y,m}^2} \cos(\gamma_{y,m} a_y) - \\ & - \frac{\nu}{2a_y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c}}{\gamma_{z,k}^2} \cos(\gamma_{z,k} a_z) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} Y_{nk}^{c0c}, \\ G_n^{c01} = & p_{y_{n-}}^{c_1} + \frac{3}{4a_z^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2a_z (\tau_{zy_{nm-}}^{+cc-} + \tau_{zy_{nm-}}^{-cc-}) - p_{z_{nm-}}^{+cc-} + p_{z_{nm-}}^{-cc-}}{\gamma_{y,m}^2} \cos(\gamma_{y,m} a_y) - \\ & - \frac{\nu}{2a_y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s}}{\lambda_{z,k}} \cos(\lambda_{z,k} a_z) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} Y_{nk}^{c0s}, \\ G_n^{c10} = & -\nu p_{z_{n-}}^{c1} + \frac{3\nu}{4a_y^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_y (\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c}) - p_{y_{n-k}}^{+c_c} + p_{y_{n-k}}^{-c_c}}{\gamma_{z,k}^2} \cos(\gamma_{z,k} a_z) + \\ & + \frac{1}{2a_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{zy_{nm-}}^{+cs-} - \tau_{zy_{nm-}}^{-cs-}}{\lambda_{y,m}} \cos(\lambda_{y,m} a_y) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} Y_{nk}^{c1c}, \\ G_n^{c11} = & -\frac{3\nu}{4a_y^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_y (\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s}) - p_{y_{n-k}}^{+c_s} + p_{y_{n-k}}^{-c_s}}{\lambda_{z,k}} \cos(\lambda_{z,k} a_z) + \\ & + \frac{3}{4a_z^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2a_z (\tau_{zy_{nm-}}^{+cs-} + \tau_{zy_{nm-}}^{-cs-}) - p_{z_{nm-}}^{+cs-} + p_{z_{nm-}}^{-cs-}}{\lambda_{y,m}} \cos(\lambda_{y,m} a_y) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} Y_{nk}^{c1s}, \\ G_{nk}^{c0s} = & \frac{1}{2} (p_{y_{n-k}}^{+c_s} + p_{y_{n-k}}^{-c_s}) - \frac{a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{z,k}^2 - 2\nu (\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{4a_y \gamma_{x,n}^2 \lambda_{z,k}^2} (\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s}) - \\ & - \frac{4 + a_{y,m}^2 \gamma_{x,n}^2}{4a_y \gamma_{x,n}^2} (\tau_{yx_{n-k}}^{+c_s} - \tau_{yx_{n-k}}^{-c_s}) + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c0s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{y,m} a_y)}{\gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccs}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{nk}^{c0c} &= \frac{1}{2} \left(p_{y_{n-k}}^{+c_c} + p_{y_{n-k}}^{-c_c} \right) - \frac{a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{z,k}^2 - 2v(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{4a_y \gamma_{x,n}^2 \gamma_{z,k}^2} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c} \right) - \\
&\quad - \frac{4 + a_y^2 \gamma_{x,n}^2}{4a_y \gamma_{x,n}^2} \left(\tau_{yx_{n-k}}^{+c_c} - \tau_{yx_{n-k}}^{-c_c} \right) + v \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c0c} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{y,m} a_y)}{\gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccc}, \\
G_{nk}^{c1s} &= \frac{-a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{z,k}^2 + 6v(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{4a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{z,k}^2} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s} \right) - \frac{a_y^2 \gamma_{x,n}^2 + 12}{4a_y^2 \gamma_{x,n}^2} \left(\tau_{yx_{n-k}}^{+c_s} + \tau_{yx_{n-k}}^{-c_s} \right) + \\
&\quad + \frac{3}{4} \frac{(a_y^2 \gamma_{x,n}^2 + 2) \lambda_{z,k}^2 - v(\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{a_y^3 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{z,k}^2} \left(p_{y_{n-k}}^{+c_s} - p_{y_{n-k}}^{-c_s} \right) + \\
&\quad + v \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c1s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{y,m} a_y)}{\lambda_{y,m}} X_{nmk}^{css}, \\
G_{nk}^{c1c} &= \frac{-a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{z,k}^2 + 6v(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{4a_y^2 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{z,k}^2} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c} \right) - \frac{a_y^2 \gamma_{x,n}^2 + 12}{4a_y^2 \gamma_{x,n}^2} \left(\tau_{yx_{n-k}}^{+c_c} + \tau_{yx_{n-k}}^{-c_c} \right) + \\
&\quad + \frac{3}{4} \frac{(a_y^2 \gamma_{x,n}^2 + 2) \gamma_{z,k}^2 - v(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{a_y^3 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{z,k}^2} \left(p_{y_{n-k}}^{+c_c} - p_{y_{n-k}}^{-c_c} \right) + \\
&\quad + v \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nk}^{c1c} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{y,m} a_y)}{\lambda_{y,m}} X_{nmk}^{csc}, \\
G_n^{c20} &= 0, \quad G_n^{c21} = 0, \quad G_n^{c30} = 0, \quad G_n^{c31} = 0, \\
G_{nk}^{c2s} &= \frac{1}{4a_y} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s} + \tau_{yx_{n-k}}^{+c_s} - \tau_{yx_{n-k}}^{-c_s} \right), \\
G_{nk}^{c2c} &= \frac{1}{4a_y} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} - \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c} + \tau_{yx_{n-k}}^{+c_c} - \tau_{yx_{n-k}}^{-c_c} \right), \\
G_{nk}^{c3s} &= \frac{1}{4a_y^2} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_s} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_s} + \tau_{yx_{n-k}}^{+c_s} + \tau_{yx_{n-k}}^{-c_s} - \frac{1}{a_y} \left(p_{y_{n-k}}^{+c_s} - p_{y_{n-k}}^{-c_s} \right) \right), \\
G_{nk}^{c3c} &= \frac{1}{4a_y^2} \left(\tau_{yz_{n-k}}^{+c_c} + \tau_{yz_{n-k}}^{-c_c} + \tau_{yx_{n-k}}^{+c_c} + \tau_{yx_{n-k}}^{-c_c} - \frac{1}{a_y} \left(p_{y_{n-k}}^{+c_c} - p_{y_{n-k}}^{-c_c} \right) \right), \\
G_{nm}^{cs0} &= -\frac{v}{2} \left(p_{z_{nm-}}^{+cs} + p_{z_{nm-}}^{-cs} \right) + v \frac{3 + a_z^2 (\lambda_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{6a_z \gamma_{x,n}^2} \left(\tau_{zx_{nm-}}^{+cs} - \tau_{zx_{nm-}}^{-cs} \right) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\tau_{zy_{nm-}}^{+cs-} - \tau_{zy_{nm-}}^{-cs-}}{2a_z \lambda_{y,m}^2} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{csc} + X_{nmk}^{csc}),$$

$$G_{nm}^{cs1} = \nu \frac{15 + a_z^2 (\lambda_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{10a_z \gamma_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+cs-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-cs-}) - \frac{3}{2a_z^2 \lambda_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+cs-} + \tau_{zy_{nm-}}^{-cs-}) -$$

$$-\frac{3}{20} \frac{4\nu a_z^2 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2 + 5(\nu \lambda_{y,m}^2 - \gamma_{x,n}^2)}{a_z^3 \gamma_{x,n}^2 \lambda_{y,m}^2} (p_{z_{nm-}}^{+cs-} - p_{z_{nm-}}^{-cs-}) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{css} + X_{nmk}^{css}),$$

$$G_{nm}^{cc0} = -\frac{\nu}{2} (p_{z_{nm-}}^{+cc-} + p_{z_{nm-}}^{-cc-}) + \nu \frac{3 + a_z^2 (\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{6a_z \gamma_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} - \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}) -$$

$$-\frac{\tau_{zy_{nm-}}^{+cc-} - \tau_{zy_{nm-}}^{-cc-}}{2a_z \gamma_{y,m}^2} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{ccc} + X_{nmk}^{ccc}),$$

$$G_{nm}^{cc1} = \nu \frac{15 + a_z^2 (\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{10a_z \gamma_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}) + \frac{3}{2a_z^2 \gamma_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+cc-} + \tau_{zy_{nm-}}^{-cc-}) -$$

$$-\frac{3}{20} \frac{4\nu a_z^2 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2 + 5(\nu \gamma_{y,m}^2 - \gamma_{x,n}^2)}{a_z^3 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2} (p_{z_{nm-}}^{+cc-} - p_{z_{nm-}}^{-cc-}) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{ccs} + X_{nmk}^{ccs}),$$

$$G_{nmk}^{css} = -\nu \frac{a_z (\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2) (\tau_{zx_{nm-}}^{+cs-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-cs-}) - \gamma_{x,n}^2 (p_{z_{nm-}}^{+cs-} - p_{z_{nm-}}^{-cs-})}{a_z^3 \lambda_{z,k}^3 \gamma_{x,n}^2 \cos(\lambda_{z,k} a_z)} +$$

$$+\nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{css} + \frac{\nu \lambda_{y,m}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \lambda_{y,m}^2} X_{nmk}^{css},$$

$$G_{nmk}^{csc} = -\nu \frac{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2) (\tau_{zx_{nm-}}^{+cs-} - \tau_{zx_{nm-}}^{-cs-}) \cos(\gamma_z a_z)}{a_z \gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{csc} + \frac{\nu \lambda_{y,m}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \lambda_{y,m}^2} X_{nmk}^{csc},$$

$$G_{nmk}^{ccs} = -\nu \frac{a_z (\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{y,m}^2) (\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}) - \gamma_{x,n}^2 (p_{z_{nm-}}^{+cc-} - p_{z_{nm-}}^{-cc-})}{a_z^3 \lambda_{z,k}^3 \gamma_{x,n}^2 \cos(\lambda_{z,k} a_z)} +$$

$$+\nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccs} + \frac{\nu \gamma_{y,m}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccs},$$

$$G_{nmk}^{ccc} = -\nu \frac{(\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2) \cos(\gamma_{z,k} a_z)}{a_z \gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} - \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}) + \nu \frac{\gamma_{x,n}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccc} + \frac{\nu \gamma_{y,m}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{ccc}.$$

Для коефіцієнтів \tilde{G} :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_m^{0c0} &= p_{x_{-m}}^{-c0} - \nu p_{z_{m-}}^{0c-} + \frac{1}{2a_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} - \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}}{\gamma_{x,n}^2} \cos(\gamma_{x,n} a_x) - \\
&\quad - \frac{\nu}{2a_x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{xz_{-nm}}^{+cc} - \tau_{xz_{-nm}}^{-cc}}{\gamma_{z,k}^2} \cos(\gamma_{z,k} a_z) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} X_{mk}^{0cc}, \\
\tilde{G}_m^{0c1} &= p_{x_{-m}}^{-c1} + \frac{3}{4a_z^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_z (\tau_{zx_{nm-}}^{+cc-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-cc-}) - p_{z_{nm-}}^{+cc-} + p_{z_{nm-}}^{-cc-}}{\gamma_{x,n}^2} \cos(\gamma_{x,n} a_x) - \\
&\quad - \frac{\nu}{2a_x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{xz_{-nm}}^{+cs} - \tau_{xz_{-nm}}^{-cs}}{\lambda_{z,k}} \cos(\lambda_{z,k} a_z) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} X_{mk}^{0cs}, \\
\tilde{G}_m^{1c0} &= -\nu p_{z_{m-}}^{1c-} + \frac{3\nu}{4a_x^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_x (\tau_{xz_{-mk}}^{+cc} + \tau_{xz_{-mk}}^{-cc}) - p_{x_{-mk}}^{+cc} + p_{x_{-mk}}^{-cc}}{\gamma_{z,k}^2} \cos(\gamma_{z,k} a_z) + \\
&\quad + \frac{1}{2a_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{zx_{nm-}}^{+sc-} - \tau_{zx_{nm-}}^{-sc-}}{\lambda_{x,n}} \cos(\lambda_{x,n} a_x) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} X_{mk}^{1cc}, \\
\tilde{G}_m^{1c1} &= -\frac{3\nu}{4a_x^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_x (\tau_{xz_{-nm}}^{+cs} + \tau_{xz_{-nm}}^{-cs}) - p_{x_{-nm}}^{+cs} + p_{x_{-nm}}^{-cs}}{\lambda_{z,k}} \cos(\lambda_{z,k} a_z) + \\
&\quad + \frac{3}{4a_z^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_z (\tau_{zx_{nm-}}^{+sc-} + \tau_{zx_{nm-}}^{-sc-}) - p_{z_{nm-}}^{+sc-} + p_{z_{nm-}}^{-sc-}}{\lambda_{x,n}} \cos(\lambda_{x,n} a_x) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} X_{mk}^{1cs}, \\
\tilde{G}_{mk}^{0cs} &= \frac{1}{2} (p_{x_{-nm}}^{+cs} + p_{x_{-nm}}^{-cs}) - \frac{a_x^2 \gamma_{y,m}^2 \lambda_{z,k}^2 - 2\nu (\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{4a_x \gamma_{y,m}^2 \lambda_{z,k}^2} (\tau_{xz_{-nm}}^{+cs} - \tau_{xz_{-nm}}^{-cs}) - \\
&\quad - \frac{4 + a_x^2 \gamma_{y,m}^2}{4a_x \gamma_{y,m}^2} (\tau_{xy_{-nm}}^{+cs} - \tau_{xy_{-nm}}^{-cs}) + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{0cs} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{x,n} a_x)}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccs}, \\
\tilde{G}_{mk}^{0cc} &= \frac{1}{2} (p_{x_{-mk}}^{+cc} + p_{x_{-mk}}^{-cc}) - \frac{a_x^2 \gamma_{y,m}^2 \gamma_{z,k}^2 - 2\nu (\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{4a_x \gamma_{y,m}^2 \gamma_{z,k}^2} (\tau_{xz_{-mk}}^{+cc} - \tau_{xz_{-mk}}^{-cc}) - \\
&\quad - \frac{4 + a_x^2 \gamma_{y,m}^2}{4a_x \gamma_{y,m}^2} (\tau_{xy_{-mk}}^{+cc} - \tau_{xy_{-mk}}^{-cc}) + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{0cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{x,n} a_x)}{\gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{ccc},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{mk}^{1cs} &= \frac{-a_x^2 \gamma_y^2 \lambda_{z,k}^2 + 6v(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{4a_x^2 \gamma_{y,m}^2 \lambda_{z,k}^2} \left(\tau_{xz_mk}^{+cs} + \tau_{xz_mk}^{-cs} \right) - \frac{a_x^2 \gamma_{y,m}^2 + 12}{4a_x^2 \gamma_{y,m}^2} \left(\tau_{xy_mk}^{+cs} + \tau_{xy_mk}^{-cs} \right) + \\ &+ \frac{3(a_x^2 \gamma_{y,m}^2 + 2)\lambda_{z,k}^2 - v(\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2)}{4a_x^3 \gamma_{y,m}^2 \lambda_{z,k}^2} \left(p_{x_mk}^{+cs} - p_{x_mk}^{-cs} \right) + \\ &+ v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{1cs} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{x,n} a_x)}{\lambda_{x,n}} Y_{nmk}^{scs},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{mk}^{1cc} &= \frac{-a_x^2 \gamma_{y,m}^2 \gamma_{z,k}^2 + 6v(\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{4a_x^2 \gamma_{y,m}^2 \gamma_{z,k}^2} \left(\tau_{xz_mk}^{+cc} + \tau_{xz_mk}^{-cc} \right) - \frac{a_x^2 \gamma_{y,m}^2 + 12}{4a_x^2 \gamma_{y,m}^2} \left(\tau_{xy_mk}^{+cc} + \tau_{xy_mk}^{-cc} \right) + \\ &+ \frac{3(a_x^2 \gamma_{y,m}^2 + 2)\gamma_{z,k}^2 - v(\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2)}{4a_x^3 \gamma_{y,m}^2 \gamma_{z,k}^2} \left(p_{x_mk}^{+cc} - p_{x_mk}^{-cc} \right) + \\ &+ v \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{mk}^{1cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{x,n} a_x)}{\lambda_{x,n}} Y_{nmk}^{scc},\end{aligned}$$

$$\tilde{G}_m^{2c0} = 0, \quad \tilde{G}_m^{2c1} = 0, \quad \tilde{G}_m^{3c0} = 0, \quad \tilde{G}_m^{3c1} = 0,$$

$$\tilde{G}_{mk}^{2cs} = \frac{1}{4a_x} \left(\tau_{xz_mk}^{+cs} - \tau_{xz_mk}^{-2cs} + \tau_{xy_mk}^{+2cs} - \tau_{xy_mk}^{-2cs} \right),$$

$$\tilde{G}_{mk}^{2cc} = \frac{1}{4a_x} \left(\tau_{xz_mk}^{+cc} - \tau_{xz_mk}^{-cc} + \tau_{xy_mk}^{+cc} - \tau_{xy_mk}^{-cc} \right),$$

$$\tilde{G}_{mk}^{3cs} = \frac{1}{4a_x^2} \left(\tau_{xz_mk}^{+cs} + \tau_{xz_mk}^{-cs} + \tau_{xy_mk}^{+cs} + \tau_{xy_mk}^{-cs} - \frac{1}{a_x} \left(p_{x_mk}^{+cs} - p_{x_mk}^{-cs} \right) \right),$$

$$\tilde{G}_{mk}^{3cc} = \frac{1}{4a_x^2} \left(\tau_{xz_mk}^{+cc} + \tau_{xz_mk}^{-cc} + \tau_{xy_mk}^{+cc} + \tau_{xy_mk}^{-cc} - \frac{1}{a_x} \left(p_{x_mk}^{+cc} - p_{x_mk}^{-cc} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{nm}^{sc0} &= -\frac{v}{2} \left(p_{znm_}^{+sc} + p_{znm_}^{-sc} \right) + v \frac{3 + a_z^2 (\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)}{6a_z \gamma_{y,m}^2} \left(\tau_{zynm_}^{+sc} - \tau_{zynm_}^{-sc} \right) - \\ &- \frac{\tau_{zxnm_}^{+sc} - \tau_{zxnm_}^{-sc}}{2a_z \lambda_{x,n}^2} - v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} \left(X_{nmk}^{scc} + Y_{nmk}^{scc} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{\text{sc1}} = & \nu \frac{15 + a_z^2 (\lambda_{x,n}^2 + \gamma_{y,m}^2)}{10 a_z \gamma_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{sc-}} + \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{sc-}}) + \frac{3}{2 a_z^2 \lambda_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+\text{sc-}} + \tau_{zx_{nm-}}^{-\text{sc-}}) - \\ & - \frac{3}{20} \frac{4 \nu a_z^2 \gamma_{y,m}^2 \lambda_{x,n}^2 + 5 (\nu \lambda_{x,n}^2 - \gamma_{y,m}^2)}{a_z^3 \gamma_y^2 \lambda_{x,n}^2} (p_{z_{nm-}}^{+\text{sc-}} - p_{z_{nm-}}^{-\text{sc-}}) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (X_{nmk}^{\text{scs}} + Y_{nmk}^{\text{scs}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{\text{cc0}} = & -\frac{\nu}{2} (p_{z_{nm-}}^{+\text{cc-}} + p_{z_{nm-}}^{-\text{cc-}}) + \nu \frac{3 + a_z^2 (\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{6 a_z \gamma_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{cc-}} - \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{cc-}}) - \\ & - \frac{\tau_{zx_{nm-}}^{+\text{cc-}} - \tau_{zx_{nm-}}^{-\text{cc-}}}{2 a_z \gamma_{x,n}^2} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_{z,k} a_z)}{\gamma_{z,k}^2} (Y_{nmk}^{\text{ccc}} + X_{nmk}^{\text{ccc}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}^{\text{cc1}} = & \nu \frac{15 + a_z^2 (\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{x,n}^2)}{10 a_z \gamma_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{cc-}} + \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{cc-}}) + \frac{3}{2 a_z^2 \gamma_{x,n}^2} (\tau_{zx_{nm-}}^{+\text{cc-}} + \tau_{zx_{nm-}}^{-\text{cc-}}) - \\ & - \frac{3}{20} \frac{4 \nu a_z^2 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2 + 5 (\nu \gamma_{x,n}^2 - \gamma_{y,m}^2)}{a_z^3 \gamma_{x,n}^2 \gamma_{y,m}^2} (p_{z_{nm-}}^{+\text{cc-}} - p_{z_{nm-}}^{-\text{cc-}}) - \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{z,k} a_z)}{\lambda_{z,k}} (Y_{nmk}^{\text{ccs}} + X_{nmk}^{\text{ccs}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nmk}^{\text{scs}} = & -\nu \frac{a_z (\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2) (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{sc-}} + \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{sc-}}) - \gamma_{y,m}^2 (p_{z_{nm-}}^{+\text{sc-}} - p_{z_{nm-}}^{-\text{sc-}})}{a_z^3 \lambda_{z,k}^3 \gamma_{y,m}^2 \cos(\lambda_{z,k} a_z)} + \\ & + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{scs}} + \frac{\nu \lambda_{x,n}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \lambda_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{scs}}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{\text{scc}} = -\nu \frac{(\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2) (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{sc-}} - \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{sc-}}) \cos(\gamma_{z,k} a_z)}{a_z \gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{scc}} + \frac{\nu \lambda_{x,n}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \lambda_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{scc}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nmk}^{\text{ccs}} = & -\nu \frac{a_z (\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2) (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{cc-}} + \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{cc-}}) - \gamma_{y,m}^2 (p_{z_{nm-}}^{+\text{cc-}} - p_{z_{nm-}}^{-\text{cc-}})}{a_z^3 \lambda_{z,k}^3 \gamma_{y,m}^2 \cos(\lambda_{z,k} a_z)} + \\ & + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{ccs}} + \frac{\nu \gamma_{x,n}^2 - \lambda_{z,k}^2}{\lambda_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{ccs}}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{nmk}^{\text{ccc}} = -\nu \frac{(\gamma_{z,k}^2 + \gamma_{y,m}^2) \cos(\gamma_z a_z)}{a_z \gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} (\tau_{zy_{nm-}}^{+\text{cc-}} - \tau_{zy_{nm-}}^{-\text{cc-}}) + \nu \frac{\gamma_{y,m}^2 + \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{y,m}^2} X_{nmk}^{\text{ccc}} + \frac{\nu \gamma_{x,n}^2 - \gamma_{z,k}^2}{\gamma_{z,k}^2 \gamma_{x,n}^2} Y_{nmk}^{\text{ccc}}.$$

ДОДАТОК Б

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Вігак В.М., Ясінський А.В., Юзв'як М.Й. Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Інтегр. перетворення та їх застосування до крайових задач*. 1997. Вип. 15. С.11–27.
2. Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V. The solution of plane thermoelasticity problem for rectangular domain. *J. Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21, No. 5. P. 545–562.
3. Вігак В.М., Юзв'як М.Й. Ключові рівняння суцільності в напруженнях для осесиметричних задач пружності та термопружності. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. Том. 41. № 4. С. 123–129.
Te same: Vihak V.M. and Yuzvyak M.Yo. Key continuity equations in stresses for axisymmetric problems of elasticity and thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001, Vol. 107, No. 1, P.3659–3665.
4. Вігак В.М., Юзв'як М.Й. Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей. *Крайові задачі для диф. рівнянь*. 1999. Вип. 4. С. 9–33.
5. Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyu A. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *J. Thermal Stresses*. 2020. Vol. 44, No. 3. P. 359–376.
6. Кушнір Р.М., Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегродиференціальних рівнянь. *Укр. мат. журн.* 2021. Том. 73. № 10. С. 1355–1367.
Te same: Kushnir R. M., Tokovyi Y. V., Yuzvyak M. Y., Yasinskyi A. V. Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integrodifferential equations. *Ukr. Math. Journal*. 2022. Vol. 73. No. 10. P. 1566–1569.
7. Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака. *Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка*, с. фіз.-мат. н. 2021. № 3. С. 123–126.

8. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Пружна рівновага порожнистого циліндра скінченної довжини за осесиметричного силового навантаження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2021. Том. 64, № 3. С. 65–89.
9. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора. *Прикл. пробл. мех. і мат.* 2021. Вип. 19. С. 1–6.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. Вігак В. М., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Метод відокремлення змінних в плоскій задачі термопружності для прямокутної області. В кн. Всеукр. наук. конф. «Розробка та застосування математ. методів в науково-техн. дослідженнях». Львів, 1995. Ч.2. С. 15.
11. Вігак В.М, Юзв'як М.Й., Калиняк Б.М. Розв'язування плоскої задачі термопружності для прямокутної області. *Тези допов. 2-го міжнар. симпозіуму інженерів-механіків у Львові*. Львів, 1995. С. 54.
12. Vihak V.M., Yuzvyak M. Y. Three integro-differential compatibility equations in terms of strains and a complete system of thermoelasticity equations in terms of stresses. *3rd Int. Congress on Thermal Stresses "Thermal Stresses-99"*. Cracow, Poland. 1999. P.143–146.
13. Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Осесиметричний термонапружений стан скінченного порожнистого циліндра. Тези доповідей VI Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки». Київ. 2021. С. 64.
14. Юзв'як М.Й. Використання функцій Вігака для розв'язання задач теорії пружності та термопружності в напруженнях. Тези доповідей Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021». Львів. С. 183–186.
15. Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Функції Вігака у прямих задачах теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками. *Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 75-річчю кафедри диф. рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка, 28 – 30 жовтня 2021 р.* Чернівці: Черн. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. 2021. С. 155–156.