

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача

На правах рукопису

ГОРУН Олег Павлович

УДК 539.3

**ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТРИСКЛАДОВИХ
ПЛОСКОШАРУВАТИХ ТІЛ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Процюк Борис Васильович

Львів – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	12
РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА КВАЗІСТАТИЧНИХ ЗАДАЧ	
ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИСКЛАДОВИХ ТІЛ ТА	
МЕТОДИКА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ	21
2.1. Основні співвідношення нестационарних задач теплопровідності та квазістатичних задач термопружності	22
2.2. Постановка одновимірних задач теплопровідності для трискладових тіл	26
2.3. Методика розв'язання задач теплопровідності для трискладових тіл за сталих коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей	28
2.4. Методика розв'язання задач теплопровідності для трискладових тіл за температурнозалежних коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей	32
2.5. Визначення термопружного стану	37
2.6. Апробація методики розв'язання лінійних задач теплопровідності та відповідних задач термопружності за сталих фізико-механічних характеристик	41
2.6.1. Безмежний трискладовий стержень під час остигання	42
2.6.2. Безмежний трискладовий стержень за дії поверхневого періодичного джерела тепла	60
2.7. Спосіб визначення невідомих у інтегральних поданнях нелінійних задач теплопровідності	68
2.7.1. Трискладовий шар за конвективно-променевого теплообміну	68
2.7.2. Порівняльний аналіз числових результатів	73
2.8. Висновки по розділу	75

РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ НА КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТРИСКЛАДОВИХ БЕЗМЕЖНИХ ТІЛ.....	79
3.1. Задачі термопружності для безмежного трискладового термочутливого стержня.....	79
3.1.1. Нерівномірний початковий нагрів складових	83
3.1.2. Нагрів поверхневими імпульсними джерелами тепла	88
3.1.3. Нагрів об'ємним імпульсним джерелом тепла	92
3.2. Висновки по розділу	95
РОЗДІЛ 4. КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИСКЛАДОВИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ	98
4.1. Термопружний стан півбезмежного трискладового стержня.....	98
4.2. Термопружний стан трискладового шару	109
4.3. Висновки по розділу	121
ВИСНОВКИ	125
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	127

ВСТУП

Актуальність теми. Розвиток приладо- та машинобудування, теплотехніки, ядерної енергетики, металургії, ракетної техніки зумовлює використання елементів конструкцій, які мають кусково-однорідну структуру. Серед них поширеними є трискладові, які отримують шляхом з'єднання двох матеріалів проміжковим шаром, нанесенням на основу багатофункціональних покриттів та ін. Під час виготовлення чи експлуатації, вони можуть зазнавати різних теплових, зокрема, високотемпературних навантажень, що спричинює, зокрема, виникнення напружень, які сприяють зменшенню зносостійкості, появі ефектів відшарування, розтріскування тощо. Широкий спектр теоретичних досліджень, необхідних для прогнозування міцнісних та деформаційних параметрів таких систем, можна виконати на основі розв'язків нестационарних одновимірних задач теплопровідності та відповідних незв'язаних квазістатичних задач термопружності. Зростання вимог до цих параметрів зумовлює проведення досліджень з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) складових від температури (термочутливості) та умов взаємодії із довкіллям, зокрема, теплового випромінювання.

Необхідним етапом при визначенні термопружного стану у таких елементах конструкцій є розв'язання відповідних задач теплопровідності, яке ускладнене передусім нелінійністю рівняння теплопровідності і умов теплообміну, що, зазвичай, унеможливорює застосування аналітичних методів. Тому для цього переважно використовують аналітично-числові та числові методи. У випадку тонких складових часто вдаються до певних спрощуючих припущень, як наприклад, щодо характеру розподілу температури за товщиною складових або застосування математичних моделей, де їх вплив враховують узагальненими умовами контакту чи граничними умовами. Чільне місце серед методів

розв'язання займає метод граничних елементів. Згідно з цим методом, в якому переважно використовується функція Гріна (фундаментальний розв'язок) для однорідного простору, необхідно визначати дві невідомі на поверхнях поділу. В окремих роботах використовують функцію Гріна для шаруватих областей у вигляді рядів за власними значеннями, які потрібно попередньо знайти з відповідних трансцендентних рівнянь. Для досягнення заданої точності у випадку малих часів, кількість цих значень може бути досить велика. Відсутні уніфіковані аналітично-числові методики, які б давали змогу досліджувати термомеханічну поведінку у таких тілах, як з тонкими, так і з товстими складовими за одночасного урахування різної теплової дії, зокрема, теплового випромінювання.

Тому, актуальним є подальший розвиток методики визначення квазістатичного термопружного стану у трискладових термочутливих тілах (з та без урахування конвективно-променевого теплообміну) з використанням таких функцій Гріна, які б дали змогу зменшити кількість невідомих на поверхнях поділу і спрощували побудову зручних для числової реалізації розв'язків відповідних задач, не накладаючи при цьому обмежень на товщини складових.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації виконано в межах держбюджетних наукових тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України: “Математичне моделювання та аналітично-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури” (№ держреєстрації 0110U004821, 2011–2015 рр.), “Аналітично-чисельні методи в математичних моделях механіки зв'язаних полів стосовно технічних і медичних проблем” (№ держреєстрації 0111U009687, 2012–2016 рр.), “Розробка програмного комплексу дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних і багат шарових тіл стосовно проектування мікроелектронних систем” (№ держреєстрації 0114U005082, 2014–2015 рр.), “Моделювання та

розроблення методів розрахунку напружено-деформованого стану структурно-неоднорідних тіл за дії теплових та силових чинників” (№ держреєстрації 0112U007254, 2016–2020 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка методики визначення та дослідження квазістатичного термопружного стану трискладових термочутливих плоскошаруватих тіл, зокрема з окремими тонкими шарами, без та з урахуванням теплового випромінювання з використанням функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- сформулювати постановки задач термопружності для трискладових нерівномірно нагрітих тіл за дії джерел тепла з урахуванням термочутливості та конвективно-променевого теплообміну з довкіллям;

- отримати інтегральні подання розв’язків відповідних нестационарних задач теплопровідності для трискладових тіл;

- на задачах термопружності для трискладових безмежних тіл зі сталими ФМХ апробувати методику за різної теплової дії, дослідити вплив теплофізичних характеристик, часу і товщини проміжкового шару на швидкість збіжності рядів та проілюструвати спосіб отримання інженерних формул для визначення термопружного стану;

- опрацювати спосіб знаходження невідомих величин на обмежуючих поверхнях та поверхнях поділу, який передбачає розв’язання системи двох, трьох або чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь рекурентного типу;

- отримати розв’язки задач термопружності для трискладових термочутливих безмежного, півбезмежного стержня та шару без та з урахуванням конвективно-променевого теплообміну, нерівномірного початкового нагріву складових та дії джерел тепла;

• на основі отриманих розв'язків дослідити вплив температурної залежності ФМХ, товщин складових та параметрів теплообміну на розподіли температури, напружень та переміщень.

Об'єктом досліджень є трискладові з плоско-паралельними поверхнями поділу термочутливі тіла, що зазнають різної теплової дії.

Предметом досліджень є нестационарні температурні поля, квазістатичні напруження та переміщення у трискладових термочутливих тілах, зумовлені джерелами тепла, нерівномірним початковим та (або) конвективно-променевим нагрівом.

Методи досліджень. У роботі використано перетворення Кірхгофа, метод узагальнених функцій, функцію Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів, лінійні сплайн-функції та методи розв'язання систем нелінійних алгебричних рівнянь.

Достовірність отриманих результатів забезпечується: строгістю математичних постановок крайових задач, чітким та послідовним застосуванням розвинутої методики їх розв'язання, контрольованою точністю обчислень, фізичною адекватністю отриманих числових результатів та узгодженням часткових результатів із відомими в літературі, отриманими іншими методами.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

- вперше до розв'язання квазістатичних задач термопружності для трискладових термочутливих тіл запропоновано методику, яка передбачає використання функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів;
- отримано нові інтегральні подання розв'язків відповідних задач;
- знайдено розв'язки квазістатичних задач термопружності для трискладових тіл з температурнозалежними та сталими ФМХ за різної теплової дії, зокрема, з урахуванням конвективно-променевого теплообміну;

- отримано інженерні формули для визначення температурного поля та зумовлених ним напружень і переміщень у трискладовому безмежному нерівномірно нагрітому тілі зі сталими ФМХ;

- досліджено вплив температурної залежності ФМХ складових, їх товщин, параметрів теплообміну на температурні поля, напруження та переміщення.

Практичне значення отриманих результатів. Розвинута в роботі методика дає змогу вивчити вплив фізико-механічних і геометричних характеристик на температурні поля, напруження та переміщення і прогнозувати термомеханічну поведінку елементів конструкцій, які моделюються трискладовими плоскошаруватими тілами і зазнають різних теплових, зокрема високотемпературних, навантажень за сталих і температурнозалежних ФМХ для широкого діапазону зміни товщин складових. Її можна застосовувати для вибору раціональних режимів одно- чи двостороннього нанесення багатофункціональних покриттів на основу. Отримані розв'язки задач дають змогу тестувати числові методи. Окремі результати роботи можуть бути покладені в основу методик розрахунку термомеханічної поведінки елементів конструкцій з функціонально-градієнтними покриттями та з'єднаннями.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, наведені у дисертації, отримано здобувачем самостійно. У працях [107, 108, 112, 113, 116, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130], які опубліковані у співавторстві, науковому керівнику належить постановка задач термопружності та ідея методики їх розв'язання. Дисертант приймав участь у розвитку цієї методики та побудові розв'язків поставлених задач, алгоритмів і програм для проведення числових досліджень, аналізі отриманих результатів, формулюванні та обговоренні висновків. Співавторові Можаровському В.В. у праці [121] належить участь в аналізі числових результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на

- IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. академіка НАН України Я.С. Підстригача (Львів, 2011 р.),
- Конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2012 р.),
- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2013 р.),
- VII Міжнародній науковій конференції “Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла” (Донецьк, 2013 р.),
- Конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2014 р.),
- I Міжнародній XX Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2014р.),
- IX Міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2014 р.),
- Конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2015 р.),
- III Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки” (Київ, 2015),
- Конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2016 р.).

Дисертація у повному обсязі доповідалась та обговорювалась на:

- семінарі відділу термомеханіки в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;
- об’єднаному науковому семінарі відділів термомеханіки та теорії фізико-механічних полів в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;
- семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 17 наукових праць [36, 37, 107, 108, 112, 113, 116, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130], серед

яких: 7 статей [107, 113, 123, 125, 126, 128, 129] у фахових виданнях з переліку ДАК МОН України, 10 матеріалів і тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях [36, 37, 108, 112, 116, 121, 122, 124, 127, 130].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, що містять 48 рисунків і 3 таблиці, висновків, списку літератури із 175 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 146 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 126 сторінок.

У **вступі** наведено загальну характеристику дисертаційної роботи, обґрунтовано актуальність теми, її мету та зв'язок із науково-дослідними темами; сформульовано завдання досліджень; відзначено новизну, достовірність, практичне значення отриманих результатів; наведено дані про апробацію роботи та відомості про публікації за темою дисертації і виділено особистий внесок у них здобувача, описано структуру, обсяг роботи та викладено її зміст.

У **першому розділі** наведено огляд наукових праць, близьких за напрямком до теми дисертації; висвітлено стан досліджень теплової та механічної поведінки однорідних та неоднорідних термочутливих тіл за різної теплової дії, зокрема, за урахування теплового випромінювання; окреслено місце роботи серед сучасних досліджень з цієї проблематики.

У **другому розділі** наведено основні співвідношення незв'язаних квазістатичних задач термопружності для неоднорідних термочутливих тіл. Сформульовано постановки нестационарних одновимірних задач теплопровідності та відповідних задач термопружності для трискладових шару, півбезмежного та безмежного тіл з та без урахування температурної залежності ФМХ. Викладено запропоновану методику їх розв'язання за сталих та температурнозалежних коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей. З використанням функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів

отримано інтегральні подання розв'язків відповідних задач теплопровідності відносно температури та введеної змінної Кірхгофа. Наведено вирази для визначення напружень та переміщень.

Апробацію методики проведено на задачах теплопровідності та термопружності для трискладових тіл зі сталими ФМХ за різної теплової дії. На цих задачах, зокрема, опрацьовано використовувану функцію Гріна. Проаналізовано вплив відношення різниці коренів квадратних від добутку коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності контактуючих складових до їх суми, товщини проміжкового шару і часу на швидкість збіжності рядів у відповідних співвідношеннях. Для тонких прошарків, проілюстровано можливість отримання інженерних формул для визначення термопружного стану.

Проведено дослідження впливу ФМХ, товщини проміжкового шару та часу на розподіли температури, напружень та переміщень.

На тестових задачах теплопровідності апробовано спосіб знаходження відповідних невідомих змінних Кірхгофа чи температур, які входять у підінтегральні функції отриманих інтегральних подань. Отримано низку часткових випадків, деякі з яких порівняно з відомими в літературі.

У *третьому розділі* розглянуто квазістатичні задачі термопружності для трискладового безмежного стержня за урахування температурної залежності ФМХ за різної теплової дії. Знаходження залежних від часу невідомих змінних Кірхгофа на поверхнях поділу за припущення, що коефіцієнти температуропровідності в межах кожної складової можна прийняти сталими, зведено до розв'язання рекурентної системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, після розв'язання якої за оберненим перетворенням Кірхгофа отримано співвідношення для визначення температури. Проведено порівняння часткових випадків з відомими в літературі. Зокрема, розв'язки збігались для випадку термочутливого двоскладового безмежного тіла, на поверхні поділу якого зосереджене імпульсне джерело тепла.

Дослідження впливу термочутливості на розподіли температури, напружень та переміщень проведено для випадків, коли термопружний стан зумовлений нерівномірним початковим нагрівом складових або дією зосередженого на одній з поверхонь поділу чи розподіленого по об'єму проміжкового шару джерела тепла імпульсного характеру зміни інтенсивності.

У *четвертому розділі* з метою апробації запропонованої методики розв'язано ряд квазістатичних задач термопружності для трискладових півбезмежного стержня та шару з урахуванням залежності ФМХ від температури та конвективно-променевого теплообміну. На відміну від розглянутих вище відповідних задач для безмежного термочутливого стержня, в отриманих інтегральних поданнях в підінтегральні функції, крім невідомих залежних від часу змінних Кірхгофа на поверхнях поділу, входять ще й її значення на обмежуючих поверхнях. Знаходження цих невідомих зведено до розв'язання рекурентної системи трьох або чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь.

Проведено порівняльний аналіз температур, підрахованих на основі знайденого та відомого розв'язків тестової задачі теплопровідності для трискладового термочутливого шару, який нагрівається тепловим потоком.

На основі числових досліджень виявлено та проілюстровано на рисунках ряд закономірностей впливу термочутливості, параметрів теплообміну та товщин складових на розподіли температури та напружень.

У *висновках* коротко сформульовано отримані результати та наведено основні підсумки дисертаційної роботи.

* * *

Автор висловлює глибоку і щирю подяку своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику Процюку Борису Васильовичу за постійну увагу, підтримку та цінні поради при виконанні роботи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Розвиток сучасної техніки зумовлює використання елементів конструкцій, які мають кусково-однорідну структуру. Під час виготовлення та експлуатації вони можуть перебувати під впливом різної теплової дії. Важливим етапом на шляху прогнозування теплових, міцнісних та деформаційних параметрів таких систем є дослідження температурних полів і зумовлених ними напружень.

Дослідження теплової та термопружної поведінки у однорідних та кусково-однорідних тілах відображено у роботах Б. Болі, Н.М. Беляєва, Я.Й. Бурака, В.М. Вігака, О.Р. Гачкевича, Е.І. Григолюка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, В.Т. Грінченка, Б.Д. Дробенка, Я.О. Жука, О.О. Євтушенка, О.А. Ільюшина, В.Г. Карнаухова, Г.С. Кіта, А.Д. Коваленко, Ю.М. Коляно, О.М. Кулика, Р.М. Кушніра, М.П. Ленюка, А.В. Ликова, В.А. Ломакіна, В.І. Лавренюка, Р.М. Мартиняка, І.М. Махоркіна, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, М.С. Можаровського, І.О. Мотовиловця, Р.С. Мусія, М.М. Николишина, В. Новацького, Я.С. Підстригача, Б.Ю. Победрі, Г.Я. Попова, В.С. Поповича, Ю.С. Постольника, Б.В. Процюка, Я.Г. Савули, І.К. Сенченкова, Г.Т. Сулима, Р.Ф. Терлецького, С.П. Тимошенка, Ю.В. Токового, І.М. Турчина, Дж. Уейнера, А.Ф. Улітка, Л.А. Фільштинського, В.Ф. Чекуріна, Р.М. Швеця, В.А. Шевчука, Ю.М. Шевченка, А.В. Ясінського, Y. Tanigawa, L.N. Tao, N. Noda та інших [1, 6, 11, 12, 17, 19, 23, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 48, 54, 56, 57, 58, 62, 65, 78, 79, 83, 84, 88, 91, 96, 98, 99, 104, 105, 109, 111, 113, 119, 131, 139, 141, 146, 150, 167 та ін.].

Застосування аналітичних і числових методів розв'язування задач теплопровідності та термопружності у кусково-однорідних тілах значно ускладнюється у випадку тонких прошарків. Тому досить часто при цьому

використовують математичні моделі, де вплив проміжкового шару враховано узагальненими умовами теплового та механічного контакту. У випадку задачі теплопровідності такі умови отримано у [96], виходячи із відповідної задачі для трискладових ідеально контактуючих тіл, в яких проміжковий шар замінюють деякою фізичною поверхнею, яка наділена певними властивостями. Досить часто використовують певні припущення щодо характеру розподілу температури у тонких шарах, зокрема, у [47] запропоновано математичну модель, в якій температурне поле в тонких шарах описується системою двох диференціальних рівнянь нижчої вимірності, ніж класичні рівняння теплопровідності за припущення, що температура по їх товщині у довільний момент часу змінюється лінійно. У [32, 33] запропоновано методикку визначення нестационарних полів у біметалевих двошарових пластинах за імпульсної електромагнітної дії, яка базується на апроксимації квадратичними многочленами ключових функцій. Для стаціонарного випадку у [117] за припущення малої товщини включення, його моделюють стрибком температури і теплового потоку. Для дослідження фізико-механічної взаємодії між тілом, покриттям та докільям, розвиваючи запропонований у [96] підхід, використовують математичні моделі, в яких вплив покриття враховують узагальненими граничним умовами. Виходячи з цих моделей, сформульовано та розв'язано відповідні задачі термопружності у [27, 28, 95, 153, 155 та ін].

При розв'язанні задач теплопровідності та термопружності часто застосовують апарат узагальнених функцій. За їх допомогою вихідні диференціальні рівняння відповідних крайових задач для кусково-однорідних тіл, за припущення виконання на поверхнях спряження їх однорідних елементів умов ідеального термомеханічного контакту, будують шляхом подання теплових і механічних характеристик кусково-однорідного тіла та товщини як єдиного цілого з використанням одиничних чи характеристичних функцій [98]. У результаті підстановки цих подань у диференціальні рівняння теплопровідності і термопружності для неоднорідного тіла, отримують

диференціальні рівняння, які містять коефіцієнти у вигляді ступеневих функцій, функції Дірака та її похідних – так звані частково вироджені диференціальні рівняння [78]. Цей підхід був запропонований Я.С. Підстригачем, Ю.М. Коляно. Ними та їхніми учнями і співробітниками О.М. Куликом, Р.М. Кушніром, І.М. Махоркіним, В.С. Поповичем, Б.В. Процюком, Є.Г. Грицьком, В.І. Громовиком, Є.Г. Іваником, Я.С. Пушаком та іншими цей підхід був розвинутий та апробований на багатьох класах задач термопружності неоднорідних тіл. Р.М. Кушніром за допомогою методу узагальнених задач спряження проведено математичне моделювання та вивчення фізико–механічних процесів в елементах конструкцій кусково–однорідної структури за неідеального термомеханічного контакту на поверхнях поділу [76, 80].

Багато підходів розв’язання відповідних задач передбачають застосування інтегральних перетворень [17, 45, 53, 55, 56, 57, 62, 84 та ін.]. У випадку перетворення Лапласа, коли знаходження оригіналів ускладнюється, використовують методи числового обернення. Цій проблемі присвячено роботи В.М. Амербаєва, Г. Деч, А.П. Пруднікова, Я.Д. П’янила, В.І. Крилова, В. Davies, R. Piessens, X. Zhao та ін. [7, 44, 73, 92, 159, 168, 174].

Вагоме місце серед підходів до розв’язання задач термопружності посідають методи, які базуються на використанні функцій Гріна (“впливу”, “джерел”) [10, 14, 20, 21, 26, 56, 68, 80, 91, 100, 111, 115, 163, 165 та ін.]. Для одновимірних задач теплопровідності для багатошарових тіл скінченної товщини, зокрема, у [26] приведені елементи матриці Гріна у вигляді рядів по власних значеннях. Для таких тіл функції Гріна у іншій формі наведені в [77, 115, 120]. У роботах [68, 69] для безмежних областей функції Гріна подаються у вигляді невластних інтегралів. У [165] з використанням функцій Гріна для шару та півпростору визначення нестационарного температурного поля у двоскладовому півбезмежному тілі за неідеального теплового контакту зведено до розв’язання відповідних інтегральних рівнянь, для чого використано ітераційний метод. У роботі [111] визначено одновимірне нестационарне

температурне поле в багатошаровій плиті, коли одна з поверхонь підтримується при заданій температурі, а інша нагрівається тепловим потоком. При цьому використано відповідну функцію Гріна.

Слід зазначити, що серед кусково-однорідних елементів конструкцій широко поширеними є трискладові з плоско-паралельними поверхнями поділу. Відповідні задачі теплопровідності та термопружності для таких тіл розглядалися, зокрема, в [4, 8, 14, 32, 49, 74, 97, 171 та ін.]. У [49] досліджено термомеханічну поведінку тришарової в'язкопластичної балки при гармонічному навантаженні. У [8] визначають температурне поле у системі плоска стінка–термоактивна прокладка–теплозахисне покриття з використанням розробленого авторами скінченного інтегрального перетворення для тришарової області з специфічними умовами контакту (рівність температур і стрибок теплових потоків). У [171] модель тришарового тіла використовують для визначення температурних напружень у плиті, яка складається з кераміки та металу, що з'єднані функціонально-градієнтним проміжковим шаром. У [97] розглядається задача теплопровідності для дослідження системи пресування матриця-екран-пуансон, що застосовується при виготовленні екранів кінескопів. Визначенню температурного поля в конструкції, яка складається з двох шарів бетону та проміжкового шару-утеплювача присвячена робота [4]. У [3] розглянуто нагрів симетричної тришарової стінки (зовнішні шари стінки мають однакові товщини і виготовлені з одного і того ж матеріалу), на зовнішніх поверхнях якої задана змінна в часі температура, а в середині шарів стінки діють джерела тепла імпульсного характеру зміни в часі інтенсивності. При цьому математична постановка задачі теплопровідності формулюється з врахуванням її симетрії. Наведено лише аналітичний розв'язок. Для визначення термічного опору тришарового колекторного пакету електрогенеруючого елемента термоємісійного перетворювача у [14] використовується стаціонарна постановка задачі теплопровідності.

Потреби інженерної практики зумовлюють інтерес до задач теплопровідності з урахуванням початкового нагріву. Відповідні задачі для нерівномірно нагрітих тіл розглядались у багатьох роботах. Зокрема, у [94] отримано співвідношення для визначення температурного поля у однорідному безмежному тілі за різних початкових температур його частин. У [56, 61, 84] наведено розв'язки задачі теплопровідності для ідеально контактуючих півпросторів, які відрізняються теплофізичними характеристиками і початковими значеннями температур. Нестационарне температурне поле нерівномірно нагрітого двоскладового півпростору досліджується у [165]. Задачі теплопровідності для багатошарових тіл з різними початковими температурами шарів розглядались у роботах [97, 110, 117, 160 та ін.]. У [97, 110, 160] отримано розв'язки, що містять ряди по коренях трансцендентних рівнянь.

Не менш важливим для інженерної практики є дослідження теплової і механічної поведінки за дії джерел тепла. Відповідні задачі для одно та багатошарових тіл розглядались у роботах [56, 66, 67, 84, 93, 110 та ін.]. Досить часто джерелами тепла моделюється періодична теплова дія, яка широко використовується в теплофізиці [71, 72, 145, 148, 172, 175 та ін.]. Зокрема, використання лазерних імпульсів чи імпульсів електронних пучків є ефективним методом обробки поверхонь конструкцій [63, 158, 169], основна ціль якого є створення в приповерхневій зоні матеріалу областей залишкових стискаючих напружень, що забезпечують підвищену стійкість. У [48] тепловий імпульс на торці циліндра моделюється тепловим потоком, який спочатку змінюється з часом як половина синусоїди, після чого рівний нулю. У задачах теплопровідності періодична теплова дія досить часто моделюється синусоїдальним (косинусоїдальним) або імпульсним законом зміни за часом інтенсивності поверхневих [111, 133, 169] чи об'ємних джерел тепла [3, 175].

За умов високотемпературної дії залежність теплових і механічних характеристик від температури є одним з факторів, який необхідно враховувати

при дослідженні термопружної поведінки. Складність таких задач передусім зумовлена нелінійністю задач теплопровідності, що, як правило, унеможлиблює застосування суто класичних методів.

Багато підходів [12] отримання розв'язків нелінійних нестационарних задач теплопровідності базуються на перетвореннях, які дозволяють частково лінеаризувати вихідні рівняння або змінити тип нелінійного рівняння. Найпоширенішими з них є методи підстановок Кірхгофа, Гудмена та ін. Для спрощення задачі розв'язання нелінійного диференціального рівняння теплопровідності використовують перетворення Больцмана, метод автомодалних розв'язків (метод подібності) та ін. Для пониження порядку нелінійності також використовують метод Бубнова-Гальоркіна, інтегральний метод теплового балансу та ін. Крім наведених класичних методів широкого використання набули також варіаційні [16] (Лейбензона, Канторовича, Гріна, Біо, Трефтца, Рітца), суть яких полягає у виборі наближених розв'язків, які задовольняють певним екстремальним властивостям відповідних функціоналів відносно крайових задач.

У [22] задача теплопровідності для багат шарового термочутливого тіла з паралельними плоскими шарами: з використанням методу послідовних інтервалів зведена до послідовності лінійних задач, де на кожному часовому інтервалі теплофізичні характеристики апроксимуються різними кусково-сталими функціями. Числові дослідження наведено для випадку двошарової системи зі сталими характеристиками, на поверхні контакту шарів якої виконується неідеальний тепловий контакт. Таку модель використовують для розрахунку температурних полів елементів конструкцій при високочастотному зварюванні.

Для отримання аналітично-числових розв'язків задач теплопровідності для термочутливих тіл часто використовують метод лінеаризуючих параметрів [78].

Поширеним методом отримання наближених аналітичних розв'язків задач термопружності є метод збурень. Різні його варіанти висвітлені у [78, 83, 90,

167]. Згідно з цим методом, їх розв'язання зводиться до послідовності відповідних крайових задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. При цьому, кожна наступна крайова задача послідовності використовує знайдений розв'язок попередньої.

У роботах Ю.С. Постольника та його учнів [104, 105] запропоновано визначати одновимірні температурні поля та напруження у тілах з залежними від температури властивостями, використовуючи метод еквівалентних джерел, в основі якого лежить метод термічного шару (Біо, Швейника, Гольдфарба).

Ще одним фактором, який необхідно враховувати за високотемпературної теплової дії при дослідженні термопружного стану є теплове випромінювання [15, 30, 75, 81, 87 та ін.]. При цьому відповідна задача теплопровідності ускладнюється ще й через нелінійність граничних умов. В односкладових тілах для їх розв'язання використовують різні варіанти методу послідовних наближень [64, 78, 101], методи збурень [78] і квазілінеаризації. У [151] з використанням методу квазілінеаризації та інтегрального перетворення Лапласа отримано розв'язок задачі теплопровідності для півпростору, де вплив багат шарового покриття і променево-конвективного теплообміну з довкіллям описується узагальненою нелінійною граничною умовою. У роботах [140, 143] побудовано розв'язок нелінійної контактної-крайової задачі нестационарної теплопровідності для опромінюваної двошарової (з частково прозорим та непрозорим шарами) пластини, з [143] та без [140] проміжкового шару з використанням узагальнених граничних умов. За допомогою методу функцій Гріна у [10] одновимірну нестационарну задачу теплопровідності для термочутливого півпростору, який взаємодіє з довкіллям шляхом конвективно-променевого теплообміну зведено до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, розв'язок якого знайдено наближено. Як приклад, в ізолюваному з бічних сторін стержні з кварцової склокераміки, легованої окисом хрому, яка використовується як теплозахисний матеріал космічних апаратів, досліджено температурне поле, яке зумовлене нагрівом

потокот повітря при температурі 6000 К. Статичну задачу термопружності для термочутливого порожнистого циліндра за конвектино-променевого теплообміну з використанням варіантів методу послідовних наближень розв'язано у [102]. Задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури з врахуванням випромінювання у статичній постановці розглядались у [132]. З використанням методу функцій Гріна у вигляді рядів за власними значеннями у [81] визначено нестационарне температурне поле і зумовлені ним температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині зі сталими ФМХ за нелінійних умов теплообміну.

Поряд з аналітичними чи числово-аналітичними методами розв'язання відповідних задач застосовують суто чисельні. Найпоширенішими чисельними методами розв'язання задач термопружності є метод скінченних різниць (МСР), скінченних (МСЕ) та граничних елементів (МГЕ). Розвитку цих методів присвячені роботи П. Бенерджі, Н.М. Беляєва, П. Вроубел, Я.Г. Савули, А.В. Рядно, А.А. Самарського, Е.С. Николаєва, О.М. Зенкевича, К. Моргана, Р. Галлагера, А.С. Сахарова, І. Альтенбаха, С.М. Шахна, Г.А. Шинкаренка, D. Lesnic, L. Elliot та ін. [9, 11, 12, 13, 18, 29, 46, 51, 70, 86, 135, 137, 138, 141, 142, 144, 149, 154, 156, 157, 161, 162, 166, 170, 173]. Варто зазначити, що у випадку задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл згідно МГЕ, який здебільшого передбачає використання функції Гріна (фундаментального розв'язку) для однорідного простору, необхідно визначати дві невідомі на поверхнях поділу. Рідше використовують функцію Гріна для шаруватих областей у вигляді рядів за власними значеннями, які потрібно попередньо знайти з відповідних трансцендентних рівнянь. Така форма розв'язку є незручною при малих часах, що зумовлено повільною збіжністю відповідних рядів (чим менший час, тим більше членів необхідно враховувати при підрахунку їх суми).

Таким чином, із проведеного огляду літератури випливає, що недостатньо уваги приділено задачам визначення та дослідження нестационарних одновимірних температурних полів та зумовлених ними квазістатичних напружень і переміщень у трискладових тілах, в т.ч. з тонкими складовими, за одночасного урахування температурної залежності фізико-механічних характеристик складових, нерівномірного початкового нагріву, дії поверхневих і об'ємних джерел тепла та теплового випромінювання. У зв'язку з цим, постає завдання розробки уніфікованої аналітично-числової методики розв'язання відповідних задач термопружності, яка давала б змогу отримати зручні для числової реалізації розв'язки для широкого діапазону зміни товщин складових. На вирішення цього завдання і спрямована дисертаційна робота.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА КВАЗІСТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИСКЛАДОВИХ ТІЛ ТА МЕТОДИКА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

В даному розділі наведено основні співвідношення незв'язаних квазістатичних задач термопружності для неоднорідних термочутливих тіл. Сформульовано постановки нестационарних задач теплопровідності та відповідних задач термопружності для трискладових безмежного, півбезмежного тіл і шару з та без урахування температурної залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ). Викладено запропоновану методику їх розв'язання. Наведено вирази для визначення напружень та переміщень.

З метою апробації запропонованої методики у цьому розділі розв'язано низку задач теплопровідності та термопружності для трискладових нетермочутливих тіл за різної теплової дії. На цих задачах, зокрема, опрацьовано використовувану функцію Гріна. Проаналізовано вплив теплофізичних характеристик, товщини проміжкового шару і часу на швидкість збіжності рядів у відповідних співвідношеннях. Досліджено характер зміни температури, напружень і переміщень по товщині проміжкового шару.

Для тонких прошарків, проілюстровано можливість отримання інженерних формул для визначення термопружного стану у безмежних трискладових стержнях та встановлено межі їх застосовності.

Проведено дослідження впливу ФМХ, товщини проміжкового шару та часу на розподіли температури, напружень та переміщень.

На тестових задачах теплопровідності апробовано спосіб знаходження відповідних невідомих змінних Кірхгофа чи температур, які входять у підінтегральні функції отриманих інтегральних подань.

Отримано низку часткових випадків, деякі з яких порівняно з відомими в літературі.

Основні результати, наведені в розділі, опубліковані у роботах [37, 124, 125, 126, 127].

2.1. Основні співвідношення нестационарних задач теплопровідності та квазістатичних задач термопружності

Розв'язання незв'язаних квазістатичних задач термопружності, як відомо, розділяють на два етапи: спочатку знаходять розв'язок відповідної задачі теплопровідності, а потім за знайденим температурним полем визначають термопружний стан.

Розподіл температури у твердому тілі, яке займає деяку область D і обмежене замкненою поверхнею S у декартовій системі координат описується рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t(\vec{x}, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_t(\vec{x}, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t(\vec{x}, t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = c_V(\vec{x}, t) \frac{\partial t}{\partial \tau} - w_t(\vec{x}, \tau), \quad (2.1)$$

де $t(\vec{x}, \tau)$ – функція, яка описує розподіл температури, $\vec{x} = (x, y, z)$, τ – часова координата, $\lambda_t(\vec{x}, t)$ і $c_V(\vec{x}, t)$ – залежні від координати і температури відповідно коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність $w_t(\vec{x}, \tau)$ – функція джерел тепла.

Для повного формулювання нестационарної задачі теплопровідності диференціальне рівняння теплопровідності необхідно доповнити відповідними крайовими умовами (початковими та граничними).

Початкові умови відповідають розподілу температури у початковий момент часу $\tau = 0$:

$$t|_{\tau=0} = t_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D \quad (2.2)$$

Взаємодію тіла із довкіллям через його поверхню S описують за допомогою граничних умов. Наведемо найпоширеніші з них:

- на поверхні тіла S заданий розподіл температури:

$$t|_S = f_1(\vec{x}, \tau) \quad \vec{x} \in S, \quad (2.3)$$

- на поверхні тіла S заданий розподіл густини теплового потоку:

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_S = f_2(\vec{x}, \tau) \quad \vec{x} \in S, \quad (2.4)$$

де n - зовнішня нормаль до поверхні S .

- через поверхню тіла S відбувається конвективний теплообмін із довкіллям змінної з часом температури t_c (теплообмін за законом Ньютона):

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_S + \alpha(t)(t - t_c(\tau)) \Big|_S = 0 \quad \vec{x} \in S, \quad (2.5)$$

де $\alpha(t)$ – залежний від температури коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі);

- через поверхню тіла S відбувається променевий теплообмін з довкіллям змінної з часом температури t_c :

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_S + \varepsilon(t) \sigma (T^4(\vec{x}, \tau) - T_c^4(\tau)) \Big|_S = 0 \quad \vec{x} \in S, \quad (2.6)$$

де $\varepsilon(t)$ – залежний від температури ступінь чорноти поверхні S ($0 < \varepsilon < 1$, для абсолютно чорного тіла $\varepsilon = 1$), σ – стала Стефана-Больцмана, $T(\vec{x}, \tau) = (t(\vec{x}, \tau) + 273) [^\circ C]$, $T_c(\tau) = (t_c(\tau) + 273) [^\circ C]$;

- крайова умова конвективно-променевого теплообміну:

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t)(t - t_c(\tau)) + \varepsilon(t) \sigma (T^4(\vec{x}, \tau) - T_c^4(\tau)) \right] \Big|_S = 0 \quad \vec{x} \in S. \quad (2.7)$$

Визначення термопружного стану у загальному випадку полягає у знаходженні компонент тензора напружень σ_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$), вектора переміщень u_i ($i = \overline{1,3}$) та тензора деформації e_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$).

Залежно від шуканих величин відповідну квазістатичну задачу термопружності формулюють в напруженнях чи переміщеннях. В постановці задачі термопружності у напруженнях розв'язок зводять до знаходження шести функцій σ_{ij} , які задовольняють:

- трьом рівнянням рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (i = \overline{1,3}) \quad (2.8)$$

де X_i - компоненти масових сил, які діють на об'єм тіла;

- співвідношенням між деформаціями і напруженнями

$$e_{ij} = \frac{(1 + \nu(\vec{x}, t))}{E(\vec{x}, t)} \sigma_{ij} - \nu(\vec{x}, t) \frac{\sigma_{kk}}{E(\vec{x}, t)} \delta_{ij} + \Phi(\vec{x}, t) \delta_{ij}, \quad (2.9)$$

де $E(\vec{x}, t)$ - модуль пружності, $\nu(\vec{x}, t)$ - коефіцієнт Пуассона,

$\Phi(\vec{x}, t) = \int_0^t \alpha_t(\vec{x}, t) dt$, $\alpha_t(\vec{x}, t)$ - температурний коефіцієнт лінійного теплового

розширення, σ_{kk} - сумарне напруження, δ_{ij} - символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

- рівнянням сумісності деформацій:

$$\varepsilon_{qni} \varepsilon_{pmj} e_{ij, mn} = 0, \quad (2.10)$$

де величина ε_{qni} дорівнює $+1(-1)$, якщо q, n, i утворюють парну (непарну) перестановку чисел 1, 2, 3;

- відповідним граничним умовам.

Підставивши (2.9) у (2.10), отримаємо рівняння сумісності деформацій, записані у напруженнях

$$\varepsilon_{qni} \varepsilon_{pmj} \left(\frac{(1 + \nu(\vec{x}, t))}{E(\vec{x}, t)} \sigma_{ij} - \nu(\vec{x}, t) \frac{\sigma_{kk}}{E(\vec{x}, t)} \delta_{ij} + \Phi(\vec{x}, t) \delta_{ij} \right)_{,mn} = 0. \quad (2.11)$$

При використанні постановки задачі термопружності у переміщеннях розв'язок шукають із системи рівнянь рівноваги у переміщеннях [78] та відповідних граничних умов.

За граничні умови приймають задані на обмежуючій тіло поверхні S навантаження

$$\sigma_{ij}n_j|_S = p_i(\bar{x}) \quad \bar{x} \in S \quad (i, j=1, 2, 3),$$

або переміщення

$$u_i|_S = \Psi_i(\bar{x}) \quad \bar{x} \in S \quad (i=1, 2, 3),$$

де $p_i(\bar{x})$ – компоненти густини заданих поверхневих сил, $\Psi_i(\bar{x})$ – задані функції, n_j – компоненти зовнішньої одиничної нормалі до поверхні S .

Якщо на частині поверхні S_1 задані навантаження, а на частині S_2 – переміщення, то граничні умови матимуть вигляд

$$\sigma_{ij}n_j|_{S_1} = p_i(\bar{x}) \quad \bar{x} \in S_1, \quad u_i|_{S_2} = \Psi_i(\bar{x}) \quad \bar{x} \in S_2.$$

У випадку кусково-однорідних тіл, зокрема шаруватих, класичний підхід розв'язання задач термопружності полягає у відшуканні для кожної складової розв'язку відповідних рівнянь теплопровідності та термопружності і задоволені умов контакту, початкових та граничних умов. Найпоширенішими умовами на поверхнях поділу є умови ідеального термомеханічного контакту, які включають:

- рівність температур і теплових потоків (умови ідеального теплового контакту):

$$t_i|_{S_{0j}} = t_{i+1}|_{S_{0j}}, \quad (2.12)$$

$$\left(\lambda_i^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial n} \right) \Big|_{S_{0j}} = \left(\lambda_i^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{\partial t_{i+1}}{\partial n} \right) \Big|_{S_{0j}}, \quad (2.13)$$

де t_i та $\lambda_i^{(i)}$ відповідно температура та коефіцієнт теплопровідності i -го тіла, S_{0j} – поверхня контакту i -го та $i+1$ -го тіла, n – нормаль до поверхні S_{0j} ;

- рівність відповідних складових вектора переміщень $U = (u_i, v_i, w_i)$ і відповідних компонент вектора напружень:

$$u_i = u_{i+1}, \quad v_i = v_{i+1}, \quad w_i = w_{i+1}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \sigma_{zz}^{(i+1)}, \quad \sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{xz}^{(i+1)}, \quad \sigma_{yz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i+1)}. \quad (2.15)$$

Якщо ФМХ не є функціями температури, то наведені співвідношення не змінюють свого вигляду, але при цьому $\Phi(\vec{x}, t) = \alpha_t(\vec{x})t$.

2.2. Постановка одновимірних задач теплопровідності для трискладових тіл

Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z трискладовий термочутливий (ФМХ залежать від температури) шар (рис.2.1), який перебуває під дією залежних від осьової координати z і часу джерел тепла та взаємодіє через обмежуючі поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ з довкіллям змінної за часом температури шляхом конвективно-променевого теплообміну. При цьому вважаємо, що циліндрична поверхня теплоізована, а на поверхнях поділу виконуються умови ідеального теплового контакту.

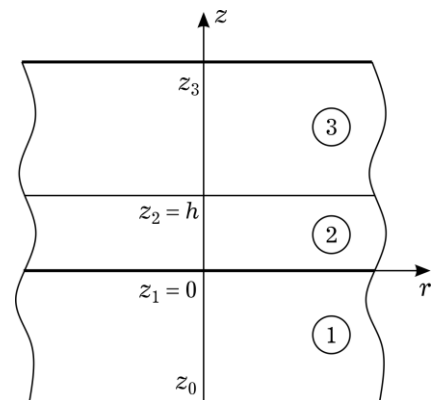


Рис. 2.1.

В початковий момент часу у кожній складовій задано нерівномірний розподіл температури.

Нестационарне температурне поле в такому тілі змінюватиметься лише по осі z . Для його визначення матимемо відповідні рівняння теплопровідності (2.1), умови контакту (2.12), (2.13), граничні (2.7) та початкові умови (2.2), які у нашому випадку набудуть вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad (i = \overline{1,3}) \quad (2.16)$$

$$t_i(z, \tau)|_{z=z_i} = t_{i+1}(z, \tau)|_{z=z_{i+1}},$$

$$\left(\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} = \left(\lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_{i+1}} \quad (i = 1, 2) \quad (2.17)$$

$$\left(\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} - \varepsilon_1(t_1) \sigma [R(t_1) - R(t_{c,1}(\tau))] - \alpha_1(t_1) [t_1 - t_{c,1}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (2.18)$$

$$\left(\lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{\partial t_3}{\partial z} + \varepsilon_3(t_3) \sigma [R(t_3) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t_3) [t_3 - t_{c,3}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_3} = 0, \quad (2.19)$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_{0,i}(z), \quad (2.20)$$

де $t_i(z, \tau)$, $t_{0,i}(z)$ і $w_{t,i}(z, \tau)$ функції, що описують відповідно розподіл температури, початкову температуру та дію джерела тепла в i -ій складовій, $R(\eta) = (\eta + 273)^4$, $t_{c,1}(\tau)$ та $t_{c,3}(\tau)$ – температури доквілля, з яким відбувається теплообмін через поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ відповідно, $\varepsilon_1(t_1)$, $\varepsilon_3(t_3)$ – ступені чорноти цих поверхонь, $\alpha_1(t_1)$, $\alpha_3(t_3)$ – коефіцієнти теплообміну через ці поверхні, σ – стала Стефана-Больцмана; індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $z_0 < z < z_1$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $z_1 < z < z_2$, $i = 3$ – третій $z_2 < z < z_3$.

Для півбезмежного трискладового тіла ($z_0 = -\infty$) відповідна задача теплопровідності складатиметься з рівняння теплопровідності (2.16), умов контакту (2.17), граничних умов (2.19) і

$$t_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad (2.21)$$

та початкових умов (2.20).

Для визначення відповідного температурного поля у безмежному трискладовому тілі ($z_0 = -\infty$ і $z_3 = \infty$) матимемо рівняння теплопровідності (2.16), умови контакту (2.17), граничні умови (2.21) і

$$t_3(z, \tau)|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.22)$$

та початкові умови (2.20).

Методику розв'язання сформульованих задач викладемо для випадків, коли коефіцієнти теплопровідності і об'ємних теплоємностей складових сталі та температурнозалежні.

2.3. Методика розв'язання задач теплопровідності для трискладових тіл за сталих коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей

Для визначення температурного поля за сталих в межах кожної складової коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей будемо виходити із рівняння теплопровідності з узагальненою за z похідною

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = c_V(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} - w_t(z, \tau) \quad (z_0 \leq z \leq z_3), \quad (2.23)$$

та граничних і початкових умов

$$\begin{aligned} \left(\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} - \varepsilon_1(t) \sigma [R(t) - R(t_{c,1}(\tau))] - \alpha_1(t) [t - t_{c,1}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ \left(\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} + \varepsilon_3(t) \sigma [R(t) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t) [t - t_{c,3}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$t(z, \tau)|_{\tau=0} = t_0(z), \quad (2.25)$$

де $t(z, \tau)$, $t_0(z)$, $w_t(z, \tau)$ та $\lambda_t(z)$, $c_V(z)$ відповідно кусково-неперервні та кусково-сталі по z функції, які мають вигляд

$$p(z) = p_1(z) + \sum_{k=1}^2 (p_{k+1}(z) - p_k(z)) S(z - z_k). \quad (2.26)$$

Зауважимо, що задача теплопровідності (2.23)-(2.25) еквівалентна задачі (2.16)-(2.19).

Для розв'язання задачі (2.23)-(2.25) використаємо метод функцій Гріна.

Метод функцій Гріна та інтегральне формулювання задачі теплопровідності. Для розв'язання відповідних задач будемо використовувати функцію Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ [117] лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} \right] = c_V(z) \frac{\partial G}{\partial \tau} - \delta(z - \zeta) \delta(\tau) \quad (-\infty \leq z \leq \infty) \quad (2.27)$$

та граничним і початковим умовам

$$G|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad G|_{\tau \leq 0} = 0. \quad (2.28)$$

де $\lambda_t(z)$ та $c_V(z)$ подаються у вигляді (2.26), $z = \zeta$ – поверхня, на якій зосереджене миттєве джерело тепла одиничної потужності.

Зауважимо, що рівняння (2.27) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{\partial^2 G_{i,j}}{\partial z^2} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial G_{i,j}}{\partial \tau} - \frac{\delta_{i,j}}{\lambda_t(z)} \delta(z - \zeta) \delta(\tau) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

і умовам ідеального теплового контакту

$$G_{i,j}|_{z=z_i} = G_{i+1,j}|_{z=z_i}, \quad \lambda_t^{(i)} \frac{\partial G_{i,j}}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial G_{i+1,j}}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \quad (i = 1, 2),$$

де a_i – коефіцієнт температуропровідності i -ої складової, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, а елементи матриці Гріна $G_{i,j}(z, \zeta, \tau)$ пов'язані з функцією $G(z, \zeta, \tau)$ такими співвідношеннями:

$$G(z, \zeta, \tau) = G_1(z, \zeta, \tau) + \sum_{k=1}^2 (G_{k+1}(z, \zeta, \tau) - G_k(z, \zeta, \tau)) S(z - z_k),$$

$$G_i(z, \zeta, \tau) = G_{i,1}(z, \zeta, \tau) + \sum_{k=1}^2 (G_{i,k+1}(z, \zeta, \tau) - G_{i,k}(z, \zeta, \tau)) S(\zeta - z_k), \quad (2.30)$$

де $G_{i,j}(z, \zeta, \tau)$ мають вигляд [117]:

$$G_{1,1}(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\delta_1 \sqrt{\pi\tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4a_1\tau} \right] + \nu_1 \exp \left[-\frac{(\zeta + z)^2}{4a_1\tau} \right] + \right.$$

$$+v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{11,1n}^2(z, \zeta)}{4a_1 \tau} \right] - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{11,2n}^2(z, \zeta)}{4a_1 \tau} \right] \Bigg\},$$

$$G_{1,2}(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\pi \tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(a_{12}^* \zeta - z)^2}{4a_1 \tau} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{f_{12,1n}^2(z, \zeta)}{4a_1 \tau} \right] - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{12,2n}^2(z, \zeta)}{4a_1 \tau} \right] \right\},$$

$$G_{1,3}(z, \zeta, \tau) = \frac{2\delta_2}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3) \sqrt{\pi \tau}} \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{13,1n}^2(z, \zeta)}{4a_1 \tau} \right],$$

$$G_{2,2}(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\delta_2 \sqrt{\pi \tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4a_2 \tau} \right] - v_1 \exp \left[-\frac{(\zeta + z)^2}{4a_2 \tau} \right] - \right. \\ \left. - v_2 \exp \left[-\frac{(\zeta + z)^2}{4a_2 \tau} \right] - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{22,1n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{f_{22,2n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \left(\exp \left[-\frac{f_{22,3n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \exp \left[-\frac{f_{22,4n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] \right) \right\},$$

$$G_{2,3}(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{(\delta_2 + \delta_3) \sqrt{\pi \tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(a_{23}^* (\zeta - h) + h - z)^2}{4a_2 \tau} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{23,1n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{23,2n}^2(z, \zeta)}{4a_2 \tau} \right] \right\},$$

$$G_{3,3}(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\delta_3 \sqrt{\pi \tau}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4a_3 \tau} \right] + v_2 \exp \left[-\frac{(2h - \zeta + z)^2}{4a_3 \tau} \right] + \right. \\ \left. + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{33,1n}^2(z, \zeta)}{4a_3 \tau} \right] - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp \left[-\frac{f_{33,2n}^2(z, \zeta)}{4a_3 \tau} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
G_{2,1}(z, \zeta, \tau) &= G_{1,2}(\zeta, z, \tau), \quad G_{3,1}(z, \zeta, \tau) = G_{1,3}(\zeta, z, \tau), \quad G_{3,2}(z, \zeta, \tau) = G_{2,3}(\zeta, z, \tau), \\
f_{11,1n}(z, \zeta) &= 2nha_{12}^* - \zeta - z, \quad f_{11,2n}(z, \zeta) = 2(1+n)ha_{12}^* - \zeta - z, \\
f_{12,1n}(z, \zeta) &= a_{12}^*(\zeta + 2nh) - z, \quad f_{12,2n}(z, \zeta) = a_{12}^*(2h - \zeta + 2nh) - z, \\
f_{13,1n}(z, \zeta) &= a_{12}^*(1+2n)h + a_{13}^*(\zeta - h) - z, \quad f_{22,1n}(z, \zeta) = \zeta + z + 2nh, \\
f_{22,2n}(z, \zeta) &= 2h - \zeta - z + 2nh, \quad f_{22,3n}(z, \zeta) = z - \zeta + 2(1+n)h, \\
f_{22,4n}(z, \zeta) &= \zeta - z + 2(1+n)h, \quad f_{23,1n}(z, \zeta) = a_{23}^*(\zeta - h) + 2nh - z + h, \\
f_{23,2n}(z, \zeta) &= (1+2n)h + a_{23}^*(\zeta - h) + z, \quad f_{33,1n}(z, \zeta) = 2nha_{32}^* + \zeta + z - 2h, \\
f_{33,2n}(z, \zeta) &= 2(1+n)ha_{32}^* + \zeta + z - 2h, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

де $a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$, $\delta_i = \sqrt{\lambda_t^{(i)} c_V^{(i)}}$, $\nu_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$, $\nu_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}$.

Аналіз формул (2.31) показав, що швидкість збіжності рядів суттєво залежить від товщини проміжкового шару h , часу τ та добутку $\nu_1 \nu_2$.

Інтегральне подання розв'язку. Застосувавши перетворення Лапласа [84, 44, 73] до співвідношень (2.23) та (2.27), домножимо їх відповідно на зображення функцій G та t , після чого віднімемо отримані рівняння. Перейшовши до оригіналів з використанням властивостей зображень, одержимо:

$$\begin{aligned}
t(z, \tau) &= \int_{z_0}^{z_3} \left[c_V(\zeta) G(z, \zeta, \tau) t_0(\zeta) + \int_0^\tau G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta - \\
&- \int_0^\tau \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') (\varepsilon_3(t_3)) \sigma[R(t) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t_3) [t - t_{c,3}(\tau)] \right\} + \\
&+ \lambda_t^{(3)} t(z_3, \tau') \left. \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Bigg|_{\zeta=z_3} d\tau' - \int_0^\tau \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') (\varepsilon_1(t_1)) \sigma[R(t) - R(t_{c,1}(\tau))] + \right. \\
&+ \alpha_1(t_1) [t - t_{c,1}(\tau)] - \lambda_t^{(1)} t(z_0, \tau') \left. \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Bigg|_{\zeta=z_0} d\tau', \tag{2.32}
\end{aligned}$$

а розв'язок відповідної задачі для трискладового півбезмежного та безмежного тіл подамо відповідно у вигляді:

$$\begin{aligned}
 t(z, \tau) = & \int_{-\infty}^{z_3} \left[c_V(\zeta) G(z, \zeta, \tau) t_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta - \\
 & - \int_0^{\tau} \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') (\varepsilon_3(t_3) \sigma [R(t) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t_3) [t - t_{c,3}(\tau)]) + \right. \\
 & \left. + \lambda_t^{(3)} t(z_3, \tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau', \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

$$t(z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_V(\zeta) G(z, \zeta, \tau) t_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta. \quad (2.34)$$

Зауважимо, для трискладового безмежного тіла визначення температурного поля зводиться до знаходження відповідних інтегралів від заданих функцій. Для трискладового півбезмежного тіла та шару, крім цього, необхідно ще знайти залежні від часу невідомі температури на обмежуючих поверхнях. Спосіб їх знаходження буде проілюстровано далі.

2.4. Методика розв'язання задач теплопровідності для трискладових тіл за температурнозалежних коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей

За урахування температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей складових необхідними етапами методики розв'язання нестационарних задач теплопровідності для трискладових тіл є:

1. часткова лінеаризація задачі з допомогою використання перетворення Кірхгофа [78];

2. зведення отриманої задачі для системи диференціальних рівнянь відносно змінних Кірхгофа до еквівалентної задачі для одного рівняння з узагальненими по z похідними;
3. інтегральне подання розв'язку отриманої задачі за допомогою функції Гріна (2.30);
4. знаходження змінних Кірхгофа та її похідних, які входять у інтегральні подання;
5. застосування оберненого перетворення Кірхгофа.

Диференціальне формулювання задачі на змінну Кірхгофа. Застосуємо до співвідношень (2.16)-(2.20) перетворення Кірхгофа:

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0,i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx, \quad (2.35)$$

за припущення, що коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i} \Lambda_i(t_i) = \lambda_{0,i} (1 + \beta_i t_i)$, а об'ємні теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$ ($i = 1, 2, 3$) ($\lambda_{0,i}$ і $c_{0,i}$ – константи, розмірності відповідно коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності). З урахуванням (2.35) задача (2.16)-(2.20) набуде вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right] = \frac{c_{0,i} c_i(t_i)}{1 + \beta_i t_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad (2.36)$$

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)|_{z=z_i} = F_{i+1}(\tau), \quad \lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \lambda_{0,i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad (2.37)$$

$$F_{i+1}(\tau) = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \right) \left[\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \beta_{i+1}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_{i+1} \theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1 \right) \right];$$

$$\lambda_{0,1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=z_0} - P_1(\tau) = 0, \quad \lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \Big|_{z=z_3} + P_3(\tau) = 0, \quad (2.38)$$

$$\theta_i|_{\tau=0} = \theta_{0,i}(z), \quad (2.39)$$

де

$$P_i(\tau) = \varepsilon_i(\theta_i^*(\tau))\sigma[R(\theta_i^*(\tau)) - R(t_{c,i}(\tau))] + \alpha_i(\theta_i^*(\tau))[\theta_i^*(\tau) - t_{c,i}(\tau)],$$

$$\theta_i^*(\tau) = \beta_i^{-1}(\sqrt{1 + 2\beta_i\bar{\theta}_i(\tau)} - 1), \quad (i = 1, 3) \quad (2.40)$$

$$\bar{\theta}_3(\tau) = \theta_3(z_3, \tau), \quad \bar{\theta}_1(\tau) = \theta_1(z_0, \tau), \quad \theta_{0,i}(z) = t_{0,i}(z) + \beta_i t_{0,i}^2(z)/2.$$

Задача на визначення змінної Кірхгофа для півбезмежного тіла складатиметься зі співвідношень (2.36), (2.37), (2.39), другого рівняння у (2.38) та

$$\theta_1|_{z \rightarrow -\infty} = 0. \quad (2.41)$$

Для безмежного трискладового тіла відповідна задача набуде вигляду (2.36), (2.37), (2.39), (2.41) та

$$\theta_3|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.42)$$

Систему рівнянь (2.36) із умовами контакту (2.37) замінимо еквівалентним рівнянням з узагальненими по z похідними [111]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + c_0(z) b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau), \quad (2.43)$$

де

$$\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] S(z - z_k), \quad (2.44)$$

$$b(\theta) = \frac{c_1(\theta_1)}{\Lambda_1(\theta_1)} + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{c_{j+1}(\theta_{j+1})}{\Lambda_{j+1}(\theta_{j+1})} - \frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} \right] S(z - z_j) - 1,$$

$S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака, $w_t(z, \tau)$, $\theta_0(z)$, $\lambda_0(z)$ та $c_0(z)$ мають вигляд (2.44).

Інтегральне формулювання задачі на змінну Кірхгофа. За допомогою функції Гріна (2.30) розв'язок задачі для шару (2.43), (2.38), (2.39) подамо так:

$$\begin{aligned}
\theta(z, \tau) = & - \int_{z_0}^{z_3} \int_0^\tau c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \\
& + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^\tau \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\
& - \int_0^\tau \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau' - \\
& - \int_0^\tau \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_1(\tau') - \lambda_{0,1} \bar{\theta}_1(\tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_0} d\tau' + \\
& + \int_{z_0}^{z_3} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^\tau G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta, \quad (2.45)
\end{aligned}$$

а розв'язок відповідної задачі для трискладового півбезмежного та безмежного тіла подамо відповідно у вигляді:

$$\begin{aligned}
\theta(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^{z_3} \int_0^\tau c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \\
& + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^\tau \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\
& - \int_0^\tau \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau' + \\
& + \int_{-\infty}^{z_3} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^\tau G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta, \quad (2.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\tau c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \\
& + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^\tau \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta, \quad (2.47)$$

У (2.45), (2.46) та (2.47) підінтегральні функції містять невідомі значення на поверхнях поділу та, для випадку півбезмежного тіла і шару, на обмежуючих поверхнях залежних від часу змінних Кірхгофа та їх похідних в кожній складовій. Знайшовши їх, отримаємо вирази для змінної Кірхгофа.

Знаходження температурного поля за відомими виразами для змінної Кірхгофа. Проінтегрувавши (2.35) з урахуванням зазначеної вище температурної залежності коефіцієнта теплопровідності, отримаємо квадратне рівняння відносно температури, корені якого матимуть вигляд:

$$t_i(\theta) = \pm \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(z, \tau)} - 1 \right). \quad (2.48)$$

Щоб вибрати один з коренів виразу (2.48) розглянемо випадок, коли коефіцієнти теплопровідності не залежать від температури. Для цього спрямуємо $\beta_i \rightarrow 0$ у (2.48)

$$t(\theta) = \lim_{\beta_i \rightarrow 0} \left(\frac{\pm \sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i} - 1}{\beta_i} \right) = \begin{cases} \lim_{\beta_i \rightarrow 0} \left(\frac{-\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i} - 1}{\beta_i} \right) = -\infty, \\ \lim_{\beta_i \rightarrow 0} \left(\frac{+\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i} - 1}{\beta_i} \right) = \lim_{\beta_i \rightarrow 0} \left(\frac{2\theta_i}{2\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i}} \right) = \theta. \end{cases}$$

Бачимо, що фізично коректному результату відповідає $t(\theta) = \theta$. Отже, за відомими виразами для змінної Кірхгофа температурне поле визначаємо з співвідношення

$$t_i(\theta) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(z, \tau)} - 1 \right). \quad (2.49)$$

Зауважимо, що запропонована вище методика розв'язання задач теплопровідності для шару та півбезмежного тіла за сталих і температурно-залежних коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей може бути застосована і при інших граничних умовах на обмежуючих поверхнях.

2.5. Визначення термопружного стану

Перейдемо до визначення напружень та переміщень у вільному від силових навантажень трискладовому шарі (рис.2.1), на поверхнях поділу якого виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. За температурного поля, яке визначається на основі (2.45) у такому тілі виникатимуть наступні напруження:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z, \tau), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (2.50)$$

При напруженнях (2.50) рівняння рівноваги задовольняються тотожно, а рівняння сумісності деформацій в напруженнях, які у розглядуваному випадку матимуть вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\kappa_1(z, t) \sigma_{\varphi\varphi} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial r} (\kappa_1(z, t) \sigma_{rr} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z)) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\kappa_1(z, t) \sigma_{rr} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z)) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\kappa_2(z, t) \sigma - \bar{\Phi}(t, z)) = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\kappa_1(z, t) \sigma_{\varphi\varphi} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z)) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\kappa_2(z, t) \sigma - \bar{\Phi}(t, z)) = 0, \\ & \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa_1(z, t) \sigma_{rr} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z) - \frac{\partial}{\partial r} r (\kappa_1(z, t) \sigma_{\varphi\varphi} - \kappa_2(z, t) \sigma + \bar{\Phi}(t, z)) \right] = 0, \\ & \kappa_1(z, t) = \frac{1 - \bar{v}(t, z)}{\bar{E}(t, z)}, \quad \kappa_2(z, t) = \frac{2\bar{v}(t, z)}{\bar{E}(t, z)}, \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \end{aligned}$$

задовольняються, якщо

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 - \bar{v}(t, z)}{\bar{E}(t, z)} \sigma_0(z, \tau) + \bar{\Phi}(t, z) \right] = 0. \quad (2.51)$$

Тут функції $\bar{E}(t, z)$, $\bar{v}(t, z)$, $\bar{\Phi}(t, z)$, які мають вигляд (2.44), в межах i -ої складової збігаються відповідно з модулями пружності $E_i(t_i)$, коефіцієнтами

Пуассона $\nu_i(t_i)$, тепловими деформаціями $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(z,\tau)} \alpha_{ii}(\eta) d\eta$, де $\alpha_{ii}(t_i)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення.

Проінтегрувавши (2.51), отримаємо

$$\sigma_0(z, \tau) = \frac{\bar{E}(t, z)}{1 - \bar{\nu}(t, z)} [C_1(\tau) + C_2(\tau)z - \bar{\Phi}(t, z)], \quad (2.52)$$

де функції $C_1(\tau)$ і $C_2(\tau)$, які визначені з умов рівності нулю головного вектора і головного моменту напружень σ_{rr} , тобто,

$$\int_{z_0}^{z_3} \sigma_{rr} dz = \int_{z_0}^{z_3} z \sigma_{rr} dz = 0,$$

мають вигляд [111]:

$$C_1(\tau) = \frac{d_1(\tau)b_{22}(\tau) - d_2(\tau)b_{12}(\tau)}{b_{11}(\tau)b_{22}(\tau) - b_{12}^2(\tau)}, \quad C_2(\tau) = \frac{d_2(\tau)b_{11}(\tau) - d_1(\tau)b_{12}(\tau)}{b_{11}(\tau)b_{22}(\tau) - b_{12}^2(\tau)}, \quad (2.53)$$

$$b_{11}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, \quad b_{12}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz,$$

$$b_{22}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z^2 E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz, \quad d_1(\tau) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t_i) \Phi_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz,$$

$$d_2(\tau) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z E_i(t_i) \Phi_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} dz.$$

Для визначення радіальних та осьових переміщень скористаємось залежностями:

$$u \bar{E}(t, z) = r [\sigma_{\varphi\varphi} - \bar{\nu}(t, z) \sigma_{rr}] + r \bar{E}(t, z) \bar{\Phi}(t, z),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-\bar{\nu}(t, z) (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})}{\bar{E}(t, z)} + \bar{\Phi}(t, z),$$

Враховуючи (2.52), знаходимо

$$u = r [C_1(\tau) + C_2(\tau)z],$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = Q_1^*(z, \tau) + Q_2^*(z, \tau), \quad (2.54)$$

де

$$Q_1^*(z, \tau) = -\frac{2\bar{v}(t, z)}{1 - \bar{v}(t, z)} [C_1(\tau) + C_2(\tau)z], \quad Q_2^*(z, \tau) = \frac{1 + \bar{v}(t, z)}{1 - \bar{v}(t, z)} \bar{\Phi}(t, z).$$

Проінтегрувавши друге співвідношення (2.54), отримаємо:

$$w = Q(z, \tau) + w_0(r, \tau), \quad (2.55)$$

де $Q(z, \tau)$ – первісна по змінній z від $Q^*(z, \tau) = Q_1^*(z, \tau) + Q_2^*(z, \tau)$.

Для визначення $w_0(r, \tau)$ підставимо співвідношення для осьових (2.54) та для радіальних (2.55) переміщень у формулу для тангенціальної деформації $\varepsilon_{rz} = \partial w / \partial r + \partial u / \partial z$ і прирівняємо отриманий вираз до нуля, оскільки $\sigma_{rz} = 0$. Інтегруючи отримане рівняння, матимемо:

$$w_0(r, \tau) = -C_2(\tau) r^2 / 2 + C.$$

Тут C характеризує переміщення трискладового шару як абсолютно твердого тіла.

Для півбезмежного трискладового тіла з обмежуючою поверхнею $z = z_3$, на якій відсутні нормальні і дотичні напруження та з гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження) циліндричною поверхнею $r = R$ співвідношення для визначення напружень (2.52) набудуть вигляду

$$\sigma_0(z, \tau) = -\frac{\bar{E}(t, z)}{1 - \bar{v}(t, z)} \bar{\Phi}(t, z). \quad (2.56)$$

При цьому радіальні переміщення будуть відсутні, а осьові визначатимуться із співвідношення

$$w(z, \tau) = \int_{z_3}^z \frac{1 + \bar{v}(t, \bar{z})}{1 - \bar{v}(t, \bar{z})} \bar{\Phi}(t, \bar{z}) d\bar{z}. \quad (2.57)$$

Для безмежного трискладового тіла з гладко закріпленою циліндричною поверхнею напруження обчислюються за співвідношеннями (2.56), а

переміщення за припущення, що на серединній поверхні проміжкового шару вони відсутні, визначаються як

$$w(z, \tau) = \int_{h/2}^z \frac{1 + \bar{v}(t, \bar{z})}{1 - \bar{v}(t, \bar{z})} \bar{\Phi}(t, \bar{z}) d\bar{z}. \quad (2.58)$$

Якщо ФМХ не є функціями температури, то співвідношення для визначення напружень (2.52) набудуть вигляду

$$\sigma_0(z, \tau) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} [C_1(\tau) + C_2(\tau)z - \alpha_t(z)t(z, \tau)], \quad (2.59)$$

де коефіцієнт Пуассона $\nu(z)$, модуль пружності $E(z)$ та коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_t(z)$ подаються як (2.26). Функції $C_1(\tau)$ і $C_2(\tau)$ у (2.54) та (2.59) матимуть вигляд:

$$C_1(\tau) = \alpha_t^{(1)} \frac{d_1(\tau)b_{22} - d_2(\tau)b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}, \quad C_2(\tau) = \alpha_t^{(1)} \frac{d_2(\tau)b_{11} - d_1(\tau)b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}, \quad (2.60)$$

$$b_{11} = \sum_{k=1}^3 B_k (z_k - z_{k-1}), \quad b_{12} = \sum_{k=1}^3 B_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad b_{22} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 B_k (z_k^3 - z_{k-1}^3),$$

$$d_1(\tau) = \sum_{k=1}^3 B_k \bar{\alpha}_t^{(k)} [T_k(z_k, \tau) - T_k(z_{k-1}, \tau)],$$

$$d_2(\tau) = \sum_{k=1}^3 Q_k \bar{\alpha}_t^{(k)} [T_k^*(z_k, \tau) - T_k^*(z_{k-1}, \tau)], \quad B_k = \frac{E_j(1 - \nu_1)}{E_1(1 - \nu_j)}, \quad \bar{\alpha}_t^{(k)} = \frac{\alpha_t^{(k)}}{\alpha_t^{(i)}},$$

а $Q(z, \tau)$ у (2.55) визначатиметься так:

$$\begin{aligned} Q(z, \tau) = & -2C_1(\tau) \left[\gamma_1 z + \sum_{k=1}^2 (\gamma_{k+1} - \gamma_k)(z - z_k) S(z - z_k) \right] - \\ & - C_2(\tau) \left[\gamma_1 z^2 + \sum_{k=1}^2 (\gamma_{k+1} - \gamma_k)(z^2 - z_k^2) S(z - z_k) \right] + \\ & + \alpha_t^{(1)} \left[\gamma_1^* T_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 \left\{ \gamma_{k+1}^* (T_{k+1}(z, \tau) - T_{k+1}(z_k, \tau)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_k^* (T_k(z, \tau) - T_k(z_k, \tau)) \right\} S(z - z_k) \right], \end{aligned}$$

$$\gamma_j = \nu_j / (1 - \nu_j), \quad \gamma_j^* = \alpha_t^{(j)} (1 + \nu_j) / (1 - \nu_j),$$

де $T_k(z, \tau)$ та $T_k^*(z, \tau)$ – первісні по змінній z відповідно для функцій $t_k(z, \tau)$ і $zt_k(z, \tau)$.

Для півбезмежного та безмежного трискладового тіла за сталих в межах кожної складової ФМХ співвідношення (2.56), (2.57), (2.58) набудуть вигляду відповідно

$$\sigma_0(z, \tau) = -\frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \alpha_t(z) t(z, \tau), \quad (2.61)$$

$$w(z, \tau) = \int_{z_3}^z \frac{1 + \nu(\bar{z})}{1 - \nu(\bar{z})} \alpha_t(\bar{z}) t(\bar{z}, \tau) d\bar{z}, \quad (2.62)$$

$$w(z, \tau) = \int_{h/2}^z \frac{1 + \nu(\bar{z})}{1 - \nu(\bar{z})} \alpha_t(\bar{z}) t(\bar{z}, \tau) d\bar{z}. \quad (2.63)$$

Зауважимо, що за таких граничних умов на циліндричній поверхні (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження) задача термопружності для безмежного та півбезмежного трискладового тіла еквівалентна задачі для трискладових безмежного та півбезмежного стержня.

2.6. Апробація методики розв'язання лінійних задач теплопровідності та відповідних задач термопружності за сталих фізико-механічних характеристик

З метою опрацювання використуваної функції Гріна, дослідження швидкості збіжності рядів у отриманих розв'язках та характеру зміни температури, напружень і переміщень по товщині проміжкового шару розглянемо задачі теплопровідності та термопружності для трискладових безмежних тіл зі сталими ФМХ за різної теплової дії.

2.6.1. Безмежний трискладовий стержень під час остигання

Нижче досліджено температурне поле та зумовлений ним термопружний стан в нерівномірно нагрітому безмежному трискладовому стержні з теплоізолюваною гладко закріпленою циліндричною поверхнею. При цьому не накладається обмеження на товщину проміжкового шару.

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z необмежений нерівномірно нагрітий трискладовий стержень (рис. 2.2). На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є теплоізолюваною та гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). Вважаємо, що ФМХ складових є сталими. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення.

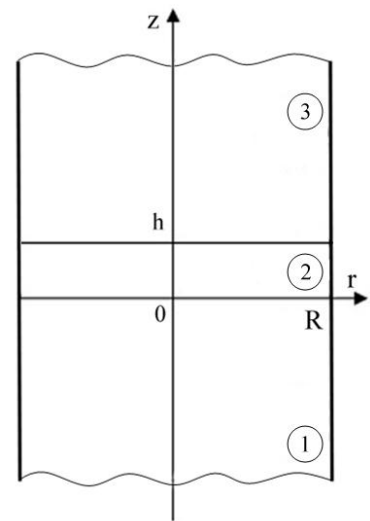


Рис. 2.2.

Нехай початкова температура першої та третьої складової змінюється експоненціально, а у проміжковому шарі – стала, тобто:

$$t_{01}(z) = T_{01}e^{k_1 z}, \quad t_{02}(z) = T_{02}, \quad t_{03}(z) = T_{03}e^{-k_3(z-h)}, \quad (2.64)$$

де T_{0i} , k_i – константи.

Враховуючи зв'язок між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} [117], інтегральне подання розв'язку (2.34) для кожної складової запишемо у вигляді:

$$t_i(z, \tau) = \int_{-\infty}^0 c_{V1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) T_{01} e^{k_1 \zeta} d\zeta + \int_0^h c_{V2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) T_{02} d\zeta +$$

$$+ \int_h^\infty c_{V3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) T_{03} e^{-k_3(\zeta-h)} d\zeta. \quad (2.65)$$

Підставивши вирази для елементів матриці Гріна (2.31) у (2.65) та знайшовши відповідні інтеграли у правих частинах, функції $t_i(z, \tau)$, записані у безрозмірних змінних, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} t_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} \left[\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right. \\ &\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] + \chi_2 T_{02} [\psi_1(\bar{z}, Fo) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \\ &\quad \times \psi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo)] + 2\chi_2 \chi_3 T_{03} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_3(-a_{31}^* \bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}, Fo), \\ t_2(\bar{z}, Fo) &= \chi_1 T_{01} \left[\varphi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, Fo) - \right. \\ &\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(2a_{12}^* \bar{h} - a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, Fo) \right] + \frac{T_{02}}{2} [\psi_2(\bar{z}, Fo) - \\ &\quad - \nu_1 \psi_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \nu_2 \psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_2(\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) - \\ &\quad - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_2(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n (\psi_2(2\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \\ &\quad + \psi_2(3\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo))] + \chi_3 T_{03} \left[\varphi_3(a_{32}^* \bar{h} - a_{32}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ &\quad \left. \times \varphi_3(a_{32}^* \bar{h} - a_{32}^* \bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_3(a_{32}^* \bar{h} + a_{32}^* \bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) \right], \\ t_3(\bar{z}, Fo) &= 2\chi_1 \chi_4 T_{01} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(a_{12}^* \bar{h} + a_{13}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h} - a_{13}^* \bar{h}, Fo) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\chi_4 T_{02} \left[\Psi_3(\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \Psi_3(\bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \right. \\
& - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \Psi_3(\bar{z} + a_{32}^* \bar{h} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) \left. \right] + \frac{T_{03}}{2} \left[\Phi_3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) + \right. \\
& + \nu_2 \Phi_3(\bar{z} - \bar{h}, Fo) + \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \Phi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \\
& \left. - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \Phi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) \right], \quad (2.66)
\end{aligned}$$

$$\varphi_i(x, Fo) = \exp[\bar{k}_i(x + a_{is} \bar{k}_i Fo)] \operatorname{erfc}\left(\frac{x + 2a_{is} \bar{k}_i Fo}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right), \quad (i=1,3),$$

$$\Psi_i^*(x, Fo) = \gamma_i \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x + \gamma_i a_{i2}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) \right],$$

$$\Psi_i(x, Fo) = \Psi_i^*(x, Fo), \quad \gamma_1 = \gamma_2 = -1;$$

$$\Psi_3(x, Fo) = \Psi_3^*(x - \bar{h}, Fo), \quad \gamma_3 = 1;$$

$$\text{де } a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}, \quad \delta_i = \sqrt{\lambda_t^{(i)} c_V^{(i)}}, \quad \nu_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad \nu_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l_0}, \quad Fo = \frac{a_s \tau}{l_0^2},$$

$$\bar{h} = \frac{h}{l_0}, \quad \bar{k}_i = k_i l_0, \quad a_{is} = \frac{a_i}{a_s}, \quad \chi_1 = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} a_{12}^*}, \quad \chi_2 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}}$$

$$\chi_3 = \frac{\lambda_t^{(3)}}{\lambda_t^{(2)} a_{32}^* + \lambda_t^{(3)}}, \quad \chi_4 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} a_{23}^*}.$$

У співвідношеннях (2.66) члени функціональних рядів задовольняють нерівностям

$$\left| (\nu_1 \nu_2)^n f_{i,n}(\bar{z}, Fo) \right| \leq C_n,$$

де $C_n = |v_1 v_2|^n$ члени числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$, сума якого дорівнює сумі геометричної прогресії $\frac{1}{1-v_1 v_2}$, $f_{i,n}(\bar{z}, Fo)$ одна з функцій $\varphi_i(\bar{z}, Fo)|_{\bar{z}=l_{ij}^{\Phi}(z)+2a_{i2}^* n \bar{h}}$ або $\psi_i(\bar{z}, Fo)|_{\bar{z}=l_{ij}^{\Psi}(z)+2a_{i2}^* n \bar{h}}$. Тому згідно з ознакою Вейерштрасса [147] ряди в (2.66) збігатимуться рівномірно. Для підрахунку їх суми можна обмежитись $n = N_0 \leq N$, де N вибирається з умови

$$\sum_{n=0}^N (v_1 v_2)^n \approx \frac{1}{1-v_1 v_2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N (v_1 v_2)^n \approx \frac{1}{1-v_1 v_2} - 1 \right) \quad (2.67)$$

Встановимо один з діапазонів зміни товщини проміжкового шару і часу, коли співвідношення (2.66) спрощуються і відповідно скорочується час обчислень.

Подамо ряди в (2.66) у вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} (v_1 v_2)^n f_{i,n}(\bar{z}, Fo) &= f_{i,n_0}(\bar{z}, Fo) \left[(v_1 v_2)^{n_0} + (v_1 v_2)^{n_0+1} \times \right. \\ &\times \left. \frac{f_{i,n_0+1}(\bar{z}, Fo)}{f_{i,n_0}(\bar{z}, Fo)} + \dots + (v_1 v_2)^{N_0} \frac{f_{i,N_0}(\bar{z}, Fo)}{f_{i,n_0}(\bar{z}, Fo)} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

де n_0 дорівнює 1 або 0. Для функцій $\varphi_i(\bar{z}, Fo)$ дроби у (2.68) при $n = N$ запишемо так

$$\frac{\varphi_i(l_{ij}^{\Phi}(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\varphi_i(l_{ij}^{\Phi}(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} = \frac{e^{2N \bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h}} \operatorname{erfc}\left(\frac{Na_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} + l_{ij}^{\Phi}(z) + \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo}\right)}{e^{2\bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h}} \operatorname{erfc}\left(\frac{n_0 a_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} + l_{ij}^{\Phi}(z) + \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo}\right)}. \quad (2.69)$$

Звідси, при одночасному виконанні нерівностей $2N \bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h} \leq \alpha$,

$$\frac{Na_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} \ll \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo} \text{ або рівнозначних їм}$$

$$\bar{h} \leq \frac{\alpha}{2Nk_i a_{i2}^*}, \quad \left(h \leq \frac{\alpha}{2Nk_i a_{i2}^*} \right) \quad (2.70)$$

$$Fo \gg \frac{\alpha}{2k_i^2 a_{is}}, \quad \left(\tau \gg \frac{\alpha}{2k_i^2 a_i} \right) \quad (2.71)$$

де α таке, що $e^\alpha \approx 1$, з (2.69) отримаємо $\frac{\varphi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\varphi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} \approx 1$. Замінивши

у (2.68) дробу при $f_i(\bar{z}, Fo) = \varphi_i(\bar{z}, Fo)$ одиницею та врахувавши (2.67), матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n \bar{h}, Fo, Fo) &\approx \varphi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo) \sum_{n=n_0}^N (\nu_1 \nu_2)^n \approx \\ &\approx \frac{\varphi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)}{1 - \nu_1 \nu_2} - n_0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Розглянемо ряди, що містять функції $\psi_i(\bar{z}, Fo)$ співвідношень (2.66).

Використавши формулу [2]

$$\operatorname{erf}(x_0 + pg) = \operatorname{erf}x_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} pg \left[1 - pgx_0 + \frac{1}{3} p^2 g^2 (2x_0^2 - 1) \right] + \varepsilon,$$

в якій, зокрема, при $g = 10^{-2}$ і $|p| \leq \frac{1}{2}$ значення $|\varepsilon| < 1.2 \cdot 10^{-10}$, для функцій

$\psi_i^*(\bar{z}, Fo)$ дістанемо

$$\psi_i^*(x, Fo) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_{is}Fo}} \frac{a_{i2}^* h}{4a_{is}Fo} \left[1 - \gamma_i \frac{a_{i2}^* h}{4a_{is}Fo} x + \frac{1}{3} \frac{(a_{i2}^* h)^2}{4a_{is}Fo} \left(\frac{2x^2}{4a_{is}Fo} - 1 \right) \right] \quad (2.73)$$

З урахуванням (2.73) легко переконатися, що при

$$\frac{a_{i2}^* N \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} \ll 1, \quad \left(h \ll \frac{\sqrt{a_2 \tau}}{N} \right) \quad (2.74)$$

для функцій $\psi_i(\bar{z}, Fo)$ дробу у (2.68) $\frac{\psi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\psi_i(l_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} \approx 1$. Тому ряди,

що містять функції ψ_i можна підсумувати аналогічно, як у (2.72).

З урахуванням цих підсумувань співвідношення (2.66) істотно спростяться (через відсутність рядів) і набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_1(\bar{z}, Fo) &\approx \frac{T_{01}}{2} \left[\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo) - \frac{\nu_2 - \nu_1^2 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \varphi_1(2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] + \\
&+ \chi_2 T_{02} \left[\psi_1(\bar{z}, Fo) + \frac{\nu_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \psi_1(3a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \frac{\nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \psi_1(2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] + \\
&\quad + \frac{2\chi_2 \chi_3 T_{03}}{1 - \nu_1 \nu_2} \varphi_3(-a_{31}^* \bar{z} + a_{32}^* \bar{h}, Fo), \\
\tilde{t}_2(\bar{z}, Fo) &\approx \chi_1 T_{01} \left[\varphi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \frac{\nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\nu_1 \varphi_1(a_{12}^* (\bar{z} + 2\bar{h}), Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \varphi_1(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z}), Fo)) \right] + \frac{T_{02}}{2} \left[\psi_2(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \psi_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \nu_2 \psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) + \frac{\nu_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (-\nu_1 \psi_2(3\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \nu_2 \psi_2(4\bar{h} - \bar{z}, Fo) + \psi_2(2\bar{h} + \bar{z}, Fo) + \psi_2(3\bar{h} - \bar{z}, Fo)) \right] + \chi_3 T_{03} \times \\
&\times \left[\varphi_3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\nu_2 \varphi_3(a_{32}^* (3\bar{h} - \bar{z}), Fo) - \varphi_3(a_{32}^* (\bar{h} + \bar{z}), Fo)) \right], \\
\tilde{t}_3(\bar{z}, Fo) &\approx \frac{2\chi_1 \chi_4 T_{01}}{1 - \nu_1 \nu_2} \varphi_1(a_{12}^* \bar{h} + a_{13}^* \bar{z} - a_{13}^* \bar{h}, Fo) + \chi_4 T_{02} \left[\psi_3(\bar{z}, Fo) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \psi_3(\bar{z} + 2a_{32}^* \bar{h}, Fo) - \frac{\nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \psi_3(\bar{z} + a_{32}^* \bar{h}, Fo) \right] + \\
&\quad + \frac{T_{03}}{2} \left[\varphi_3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) + \nu_2 \varphi_3(\bar{z} - \bar{h}, Fo) - \frac{\nu_1 - \nu_1 \nu_2^2}{1 - \nu_1 \nu_2} \varphi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h}, Fo) \right]. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Якщо $T_{01} = T_{03} = 0$, то для використання співвідношень (2.75) достатньо виконання умови (2.74).

Розглянемо деякі часткові випадки:

1. Поклавши у (2.66) $a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$, отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для двох півбезмежних тіл, в яких початкова температура першого тіла $T_{01}e^{k_1z}$, а другого $T_{03}e^{-k_3(z-h)}$, за винятком смуги, товщиною h , яка нагріта до температури T_{02} :

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} [\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo)] + \chi_2 T_{02} \psi_1(\bar{z}, Fo) + \\ &\quad + \chi_3 T_{03} \varphi_3(-a_{31}^* \bar{z} + \bar{h}, Fo), \\ \tilde{t}_2(\bar{z}, Fo) &= \chi_1 T_{01} \varphi_1(a_{13}^* \bar{z}, Fo) + \frac{T_{02}}{2} [\psi_2(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \psi_2(\bar{z} + \bar{h})] + \\ &\quad + \frac{T_{03}}{2} [\varphi_3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) - \nu_1 \varphi_3(\bar{z} + \bar{h}, Fo)].\end{aligned}\quad (2.76)$$

2. Приймаючи у (2.76) $h = 0$, $T_{02} = T_{03}$ і перепозначивши $k_2 = k_3$, отримаємо розв'язок задачі для двох півбезмежних тіл, початкові температури яких задаються відповідно $T_{01}e^{k_1z}$ та $T_{02}e^{-k_2z}$:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} [\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo)] + \chi_2 T_{02} \varphi_2(-a_{21}^* \bar{z}, Fo), \\ \tilde{t}_2(\bar{z}, Fo) &= \chi_1 T_{01} \varphi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \frac{T_{02}}{2} [\varphi_2(-\bar{z}, Fo) - \nu_1 \varphi_2(\bar{z}, Fo)].\end{aligned}$$

3. Спрямовуючи у (2.66) $\lambda_t^{(3)} \rightarrow \infty$ або $\lambda_t^{(3)} \rightarrow 0$ при $T_{03} = 0$, дістанемо вирази для визначення температурного поля у двоскладовому півпросторі:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} \left[\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right. \\ &\quad \left. - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] + \chi_2 T_{02} [\psi_1(\bar{z}, Fo) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_2(\bar{z}, Fo) = & \chi_1 T_{01} \left[\varphi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1(a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, Fo) - \right. \\
& \left. - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1(2a_{12}^* \bar{h} - a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, Fo) \right] + \frac{T_{02}}{2} [\psi_2(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \psi_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \\
& - \beta \psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_2(\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) - \\
& - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_2(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \nu_1 \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n (\psi_2(2\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \\
& + \psi_2(3\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo))] ,
\end{aligned}$$

де $\beta = 1$, якщо поверхня $z = h$ підтримується при нульовій температурі, а $\beta = -1$, якщо ця поверхня є теплоізолюваною.

4. Покладемо $h = 0$, а теплові характеристики складових – однаковими, тобто $a_1 = a_2 = a_3$, $c_{V1} = c_{V2} = c_{V3}$, $\lambda_t^{(1)} = \lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$. При $k_1 = k_3 = 0$ і $T_{02} = T_{03} = const$ з (2.64) отримаємо:

$$t_1|_{\tau=0} = T_{01}, \text{ при } -\infty < z < 0,$$

$$t_2|_{\tau=0} = T_{02}, \text{ при } 0 < z < \infty.$$

Тоді з (2.66) отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для однорідного простору:

$$\begin{aligned}
t_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{02} + T_{01}}{2} + \left(\frac{T_{01} - T_{02}}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{z}}{2\sqrt{a_{1s} Fo}} \right) \right), \\
t_2(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{02} + T_{01}}{2} + \left(\frac{T_{02} - T_{01}}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{z}}{2\sqrt{a_{1s} Fo}} \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.77}$$

який співпадає з розв'язком отриманим у [94].

5. Нехай $h = 0$, а теплові характеристики 2-ї та 3-ї складових приймемо однаковими, тобто, $a_2 = a_3$, $c_{V2} = c_{V3}$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$. При $k_3 = 0$, $T_{02} = T_{03} = const$, $T_{01} = 0$ отримаємо наступні початкові умови:

$$t_1|_{\tau=0} = 0, \text{ при } -\infty < z < 0,$$

$$t_2|_{\tau=0} = T_{02}, \text{ при } 0 < z < \infty.$$

Тоді з (2.66) отримаємо для двох різнорідних півбезмежних тіл розв'язок задачі теплопровідності

$$\begin{aligned} t_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{\lambda_t^{(2)} T_{02}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-\bar{z}}{2\sqrt{a_{1s} Fo}}\right), \\ t_2(\bar{z}, Fo) &= \frac{\lambda_t^{(2)} T_{02}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}} \left(1 + \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)} a_{12}^*} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}}{2\sqrt{a_{2s} Fo}}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.78)$$

який співпадає з розв'язком отриманим у [56, 84] іншим способом.

Якщо початкова умова має вигляд

$$t_1|_{\tau=0} = T_{01}, \text{ при } -\infty < z < 0,$$

$$t_2|_{\tau=0} = T_{02}, \text{ при } 0 < z < \infty,$$

то розв'язком даної задачі будуть наступні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{t_1(\bar{z}, Fo) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} &= \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-\bar{z}}{2\sqrt{a_{1s} Fo}}\right), \\ \frac{t_2(\bar{z}, Fo) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} &= \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}} \left(1 + \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)} a_{12}^*} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}}{2\sqrt{a_{2s} Fo}}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Перший вираз у (2.79) співпадає з результатом, отриманим у [84], а у другому виразі співпадає лише права частина. Якщо б у лівій частині другого співвідношення у (2.79) стояло $\frac{t_2(\bar{z}, Fo) - T_{02}}{T_{02} - T_{01}}$, тоді результат би співпадав.

Прирівнявши у (2.79) два вирази при $z = 0$, то отримаємо рівність температури на межі поділу, тобто умови ідеального теплового контакту виконуються, на відміну від [84].

За такого температурного поля у тілі виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження (2.61) і осьові переміщення (2.63), які у безрозмірних змінних матимуть відповідний вигляд:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_0(\bar{z}, Fo) = -\frac{E(\bar{z})}{1-\nu(\bar{z})} \alpha_t(\bar{z}) t(\bar{z}, Fo). \quad (2.80)$$

$$w(\bar{z}, Fo) = \int_{h/2}^{\bar{z}} \frac{1+\nu(\tilde{z})}{1-\nu(\tilde{z})} \alpha_t(\tilde{z}) t(\tilde{z}, Fo) d\tilde{z}. \quad (2.81)$$

Підставивши співвідношення (2.66) у (2.81) та знайшовши відповідні інтеграли, отримаємо наступні вирази для визначення переміщень:

$$\begin{aligned} w(\bar{z}, Fo) &= \tilde{w}_1\left(\bar{z}, \frac{\bar{h}}{2}, Fo\right) + \sum_{k=1}^2 [\tilde{w}_{k+1}(\bar{z}, z_k, Fo) - \tilde{w}_k(\bar{z}, z_k, Fo)] S(\bar{z} - z_k) - \\ &\quad - \left(\tilde{w}_2\left(\frac{\bar{h}}{2}, 0, Fo\right) - \tilde{w}_1\left(\frac{\bar{h}}{2}, 0, Fo\right) \right), \\ \frac{w_1(\bar{z}, Fo)}{\eta_1} &= \frac{T_{01}}{2\bar{k}_1} \left[\gamma_1^1(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \gamma_1^1(-\bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right. \\ &\quad - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \left. \right] + \chi_2 T_{02} \left[\gamma_2^1(\bar{z}, Fo) - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_2^1(2a_{12}^* n \bar{h} + a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_2^1(2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] - \\ &\quad - 2\chi_2 \chi_3 \frac{T_{03}}{\bar{k}_3 a_{31}^*} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^3(-a_{31}^* \bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}, Fo), \\ \frac{w_2(\bar{z}, Fo)}{\eta_2} &= \chi_1 \frac{T_{01}}{\bar{k}_1 a_{12}^*} \left[\tilde{\gamma}_1^1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^1(a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, Fo) + \right. \\ &\quad \left. + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^1(2a_{12}^* \bar{h} (n+1) - a_{12}^* \bar{z}, Fo) \right] + \frac{T_{02}}{2} \left[\tilde{\gamma}_2^1(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \tilde{\gamma}_2^1(\bar{h} + \bar{z}, Fo) + \right. \\ &\quad \left. + \nu_2 \tilde{\gamma}_2^1(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_2^1(\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\gamma}_2^1(2\bar{h} (n+1) - \bar{z}, Fo) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \left(\tilde{\gamma}_2^1(2\bar{h} (n+1) + \bar{z}, Fo) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{\gamma}_2^1(3\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) \right) \right] + \chi_3 \frac{T_{03}}{\bar{k}_3 a_{32}^*} \left[\tilde{\gamma}_1^3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{\gamma}_1^3 \left(a_{32}^* \bar{h} (2n+1) - a_{32}^* \bar{z}, Fo \right) - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^3 \left(a_{32}^* \bar{h} (2n+1) + a_{32}^* \bar{z}, a_{32}^* \bar{h} (2n+1), Fo \right) \Big], \\ & \frac{w_3(\bar{z}, Fo)}{\eta_3} = 2\chi_1 \chi_4 \frac{T_{01}}{\bar{k}_1 a_{13}^*} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^1 \left(a_{12}^* \bar{h} (1+2n) + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo \right) + \chi_4 T_{02} \times \\ & \quad \times \left[\tilde{\gamma}_3(\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_3(\bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{\gamma}_3(\bar{z} + a_{32}^* \bar{h} (1+2n), Fo) \right] + \frac{T_{03}}{2k_3} \left[-\tilde{\gamma}_1^3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) + \nu_2 \tilde{\gamma}_1^3(\bar{z} - \bar{h}, Fo) + \right. \\ & \quad \left. + \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \tilde{\gamma}_1^3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h} (1+n), Fo) \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_i(x, y, Fo) = w_i(x, Fo) - w_i(y, Fo),$$

$$\gamma_1^i(x, Fo) = \exp\left[\bar{k}_i(x + \bar{k}_i a_{is} Fo)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x + 2\bar{k}_i a_{is} Fo}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right),$$

$$\begin{aligned} \gamma_2^i(x, Fo) = & 2\sqrt{a_{is} Fo} \left(\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a_{is} Fo}\right] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{x - a_{i2}^*}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - a_{i2}^*}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - a_{i2}^*)^2}{4a_{is} Fo}\right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(x, Fo) = & 2\sqrt{a_{3s} Fo} \left(\left(\frac{x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h})^2}{4a_{3s} Fo}\right] - \left(\frac{x - \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{h})^2}{4a_{3s} Fo}\right] \right), \end{aligned}$$

$$\text{де } \eta_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_i^i.$$

Числові результати. Дослідимо поведінку полів температури (за точними та інженерними формулами), переміщень і напружень в трискладовому стержні

при $k_1 = k_3 = 1 \text{ м}^{-1}$, $T_{01} = 50^\circ \text{ C}$, $T_{02} = 200^\circ \text{ C}$, $T_{03} = 100^\circ \text{ C}$ для двох комбінацій матеріалів:

1. срібло – двоокис цирконію – срібло з відповідними ФМХ:

$$\lambda_t^{(i)} = 410 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ \text{ C}), a_i = 0.1685 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}, \nu_i = 0.37,$$

$$E_i = 82.7 \cdot 10^9 \text{ Н} / \text{м}^2, \alpha_{t,i} = 19.5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{ C}^{-1}, (i = 1, 3)$$

$$\lambda_t^{(2)} = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ \text{ C}), a_2 = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}, \nu_2 = 0.31, E_2 = 172 \cdot 10^9 \text{ Н} / \text{м}^2,$$

$$\alpha_{t,2} = 10.6 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{ C}^{-1}; \quad (2.82)$$

2. олово – мідь – олово з відповідними ФМХ:

$$\lambda_t^{(i)} = 66 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ \text{ C}), a_i = 0.411 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}, \nu_i = 0.34,$$

$$E_i = 54.3 \cdot 10^9 \text{ Н} / \text{м}^2, \alpha_{t,i} = 26.7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{ C}^{-1}, (i = 1, 3)$$

$$\lambda_t^{(2)} = 393 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ \text{ C}), a_2 = 0.113 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}, \nu_2 = 0.33,$$

$$E_2 = 120 \cdot 10^9 \text{ Н} / \text{м}^2, \alpha_{t,2} = 16.5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{ C}^{-1};$$

На рис.2.3 зображені залежності температури від координати в проміжковому шарі та в приповерхневих областях півбезмежних складових за фіксованих товщин та різних моментів часу для 1-ої комбінації матеріалів. Криві 1-9 на рис.2.3а відповідають $\tau = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1}, 1, 10^2, 10^3, 10^4 \text{ с}$; на рис.2.3б – $\tau = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}, 10, 10^2, 10^3 \text{ с}$; на рис.2.3в – $\tau = 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10 \text{ с}$.

З аналізу графіків випливає, що для кожного проміжкового шару існує характерний час τ^* , починаючи з якого температура має чітко виражений лінійний розподіл по товщині. Причому, чим більше h , тим більше τ^* . Розподіли температур для кожного h при різних часах τ з інтервалу $(0, \tau^*)$ по товщині проміжкового шару можуть істотно відрізнятись. При $h \geq 10^{-3} \text{ м}$ температури у півбезмежних складових не підвищуються, що спостерігалось і

для інших початкових температур у проміжковому шару. Для дуже малих часів температура, як і слід було очікувати, близька до початкової.

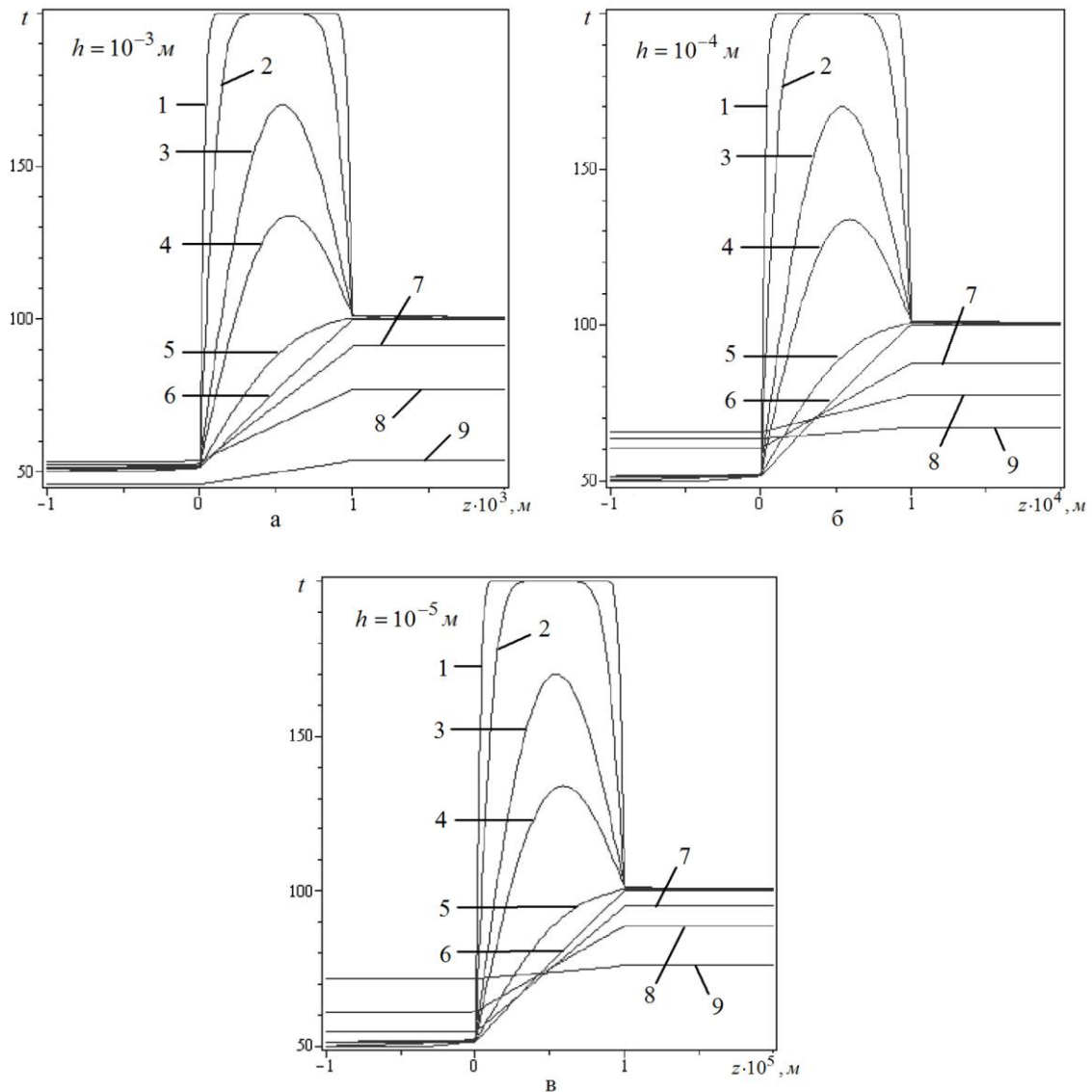


Рис.2.3

Для проведення порівняльного аналізу розподілів температури, підрахованих за точними і спрощеними співвідношеннями, встановимо межі застосовності останніх для обраних характеристик. Для першої комбінації матеріалів $\nu_1 \nu_2 \approx 0.95$ і з умови (2.67), обмежившись точністю до трьох знаків після коми, знаходимо $N = 180$. Приймавши $\alpha = 10^{-3}$, з нерівностей (2.70), (2.71) і (2.74) отримаємо, що співвідношення (2.75) можна використовувати при

$$\tau > 30c, \quad h \leq 10^{-6} \text{ м}. \quad (2.83)$$

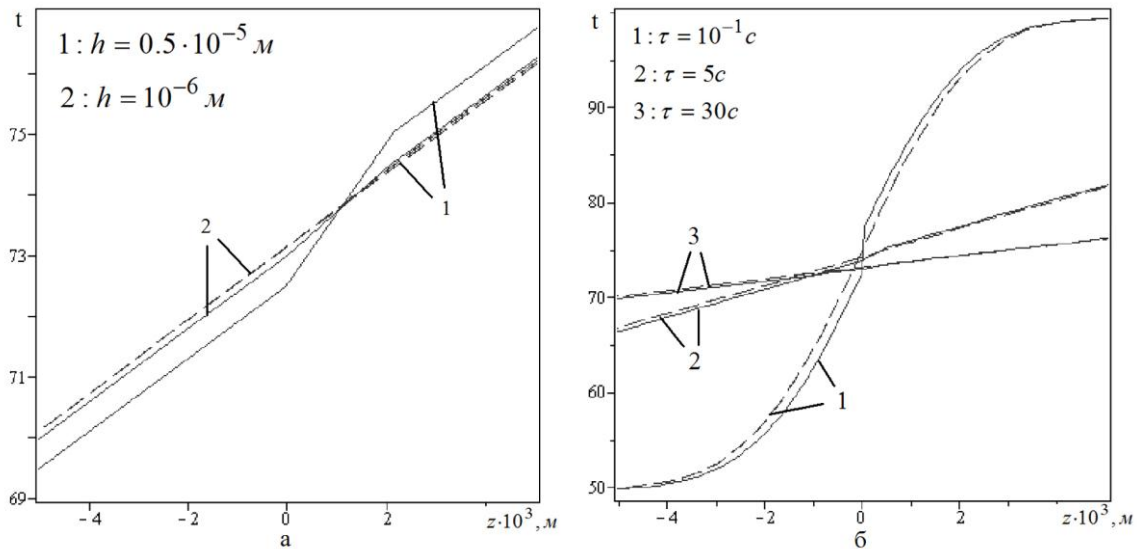


Рис.2.4

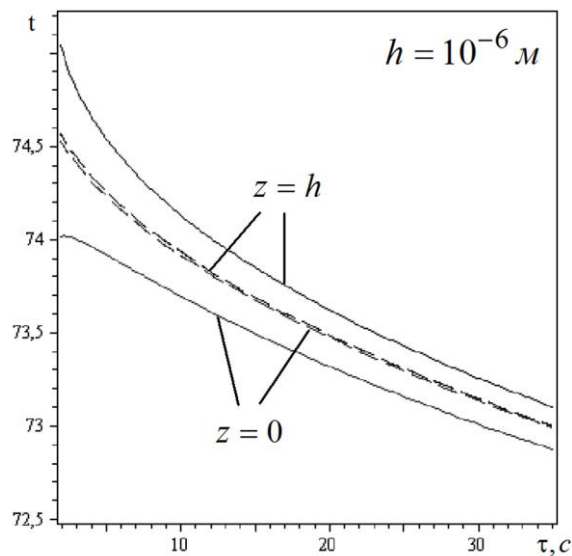


Рис.2.5

На рис.2.4,2.5 зображено розподіли температури, обчислені за формулами (2.66) (суцільна лінія) та (2.75) (штрихова лінія). На рис.2.4а криві відповідають $\tau = 30 \text{ c}$ та різним h . Для більш розширеної області на рис.2.4б проілюстровані розподіли температури при різних часах за фіксованого $h = 10^{-6} \text{ м}$. За цієї ж товщини проміжкового шару на рис.2.5 зображено залежності температури від часу на поверхнях поділу $z = 0$ і $z = h$. Бачимо, що чим ближчі значення часів і товщин проміжкового шару до правих частин відповідних умов (2.83), тим

менша похибка між температурами, обчисленими за (2.66) і за (2.75). При $\tau > 30c$ і $h = 10^{-6}m$ відносна похибка не перевищує 0.3%.

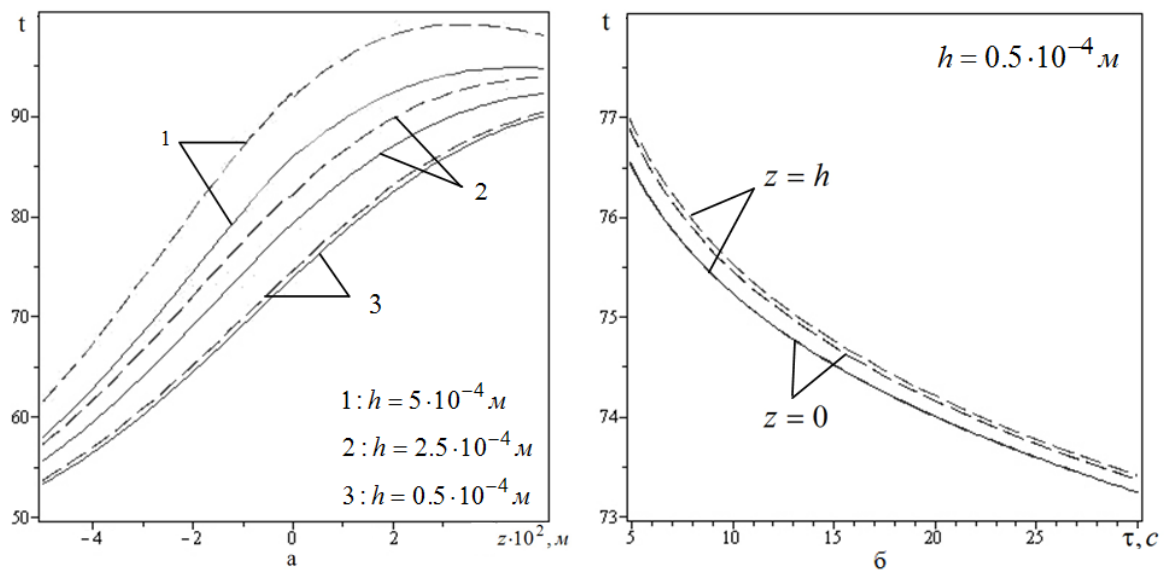


Рис.2.6

Для другої комбінації матеріалів $\nu_1 \nu_2 \approx 0.7$ і з умови (2.67), обмежившись точністю до трьох знаків після коми, отримуємо $N = 25$. При $\alpha = 10^{-3}$ згідно умов (2.70), (2.71) і (2.74) співвідношення (2.75) можна використовувати при $h \leq 0.5 \cdot 10^{-4} m$ і $\tau > 10c$.

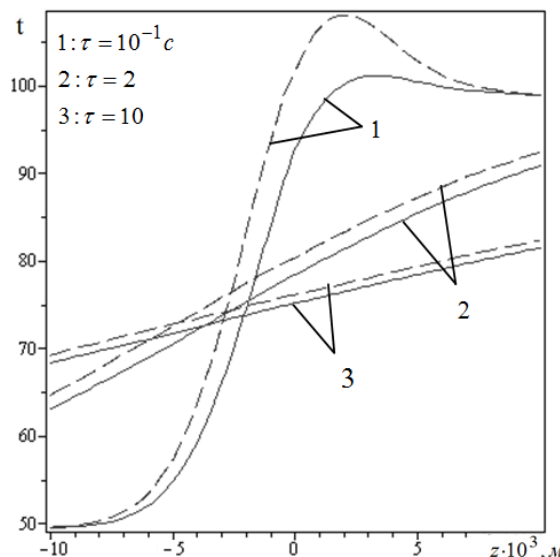


Рис.2.7

На рис.2.6а зображено залежності температури від координати при різних товщинах проміжкового шару за фіксованого $\tau = 20c$. Як видно, при

$h = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ абсолютна похибка обчислень не перевищує 0.5°C , а відносна похибка становить 0.6% . З рис.2.6б, де наведено залежності температури від часу на поверхнях поділу $z_1 = 0$ і $z_2 = h$ за фіксованого $h = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ видно, що при збільшенні τ різниця між обчисленнями за (2.66) і за (2.75) зменшується і при $\tau > 10 \text{ с}$ також не перевищує 0.5°C .

На рис.2.7 зображено залежності температури від координати за фіксованого $h = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ для різних часів. Малому τ відповідає розподіл температури наближений до початкового, але різниця між обчисленнями за (2.66) і за (2.75) є досить великою. При збільшенні τ , графіки починають накладатись, оскільки починають виконуватись умови (2.70), (2.71) і (2.74) і при $\tau = 10 \text{ с}$ абсолютна похибка обчислень є меншою за 0.5°C .

Зауважимо, що на основі проведених аналогічних досліджень і для інших матеріалів складових, встановлено, що чим менше $|v_1 v_2|$, тим більші товщини проміжкового шару h і менші часи τ , починаючи з яких можна використовувати співвідношення (2.75).

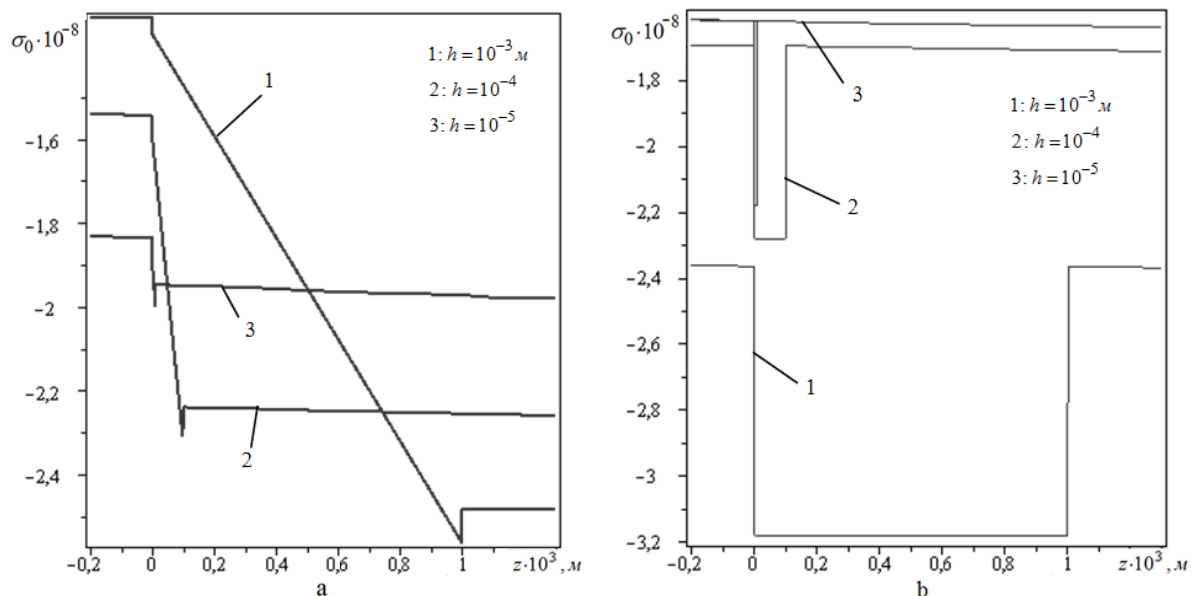


Рис.2.8

На рис.2.8-2.10 зображено залежності напружень від координати в області проміжкового шару та приповерхневих областях півбесмежних складових для

різних h при $\tau = 10c$ (рис.2.8), для різних τ при $h = 10^{-4} м$ (рис.2.9) і залежності стрибків напружень $\sigma_i(\tau) = |\sigma_i(z_i, \tau) - \sigma_{i+1}(z_i, \tau)|$ від часу для різних товщин h на поверхнях $z = 0$ (штрихова лінія) та $z = h$ (суцільна лінія) (рис.2.10) для 1-ої (а) та 2-ої (б) комбінації матеріалів. Кривим 1, 2, 3 на рис.2.10 відповідають різні товщини проміжкового шару $h = 10^{-3} м$, $h = 10^{-4} м$, $h = 10^{-5} м$. Бачимо, що у тілі виникають стискаючі стрибкоподібні напруження, а зростання (спадання) температури зумовлює зменшення (збільшення) абсолютних значень напружень. Як видно з рис.2.8, на відміну від 1-ої, напруження для 2-ої комбінації матеріалів по товщині проміжкового шару є сталими і зі зменшенням h зменшуються абсолютні значення напружень та їх стрибків. Для 1-ої комбінації матеріалів величина стрибка напружень є значно нижчою, ніж для 2-ої комбінації, що може досягати 10 разів.

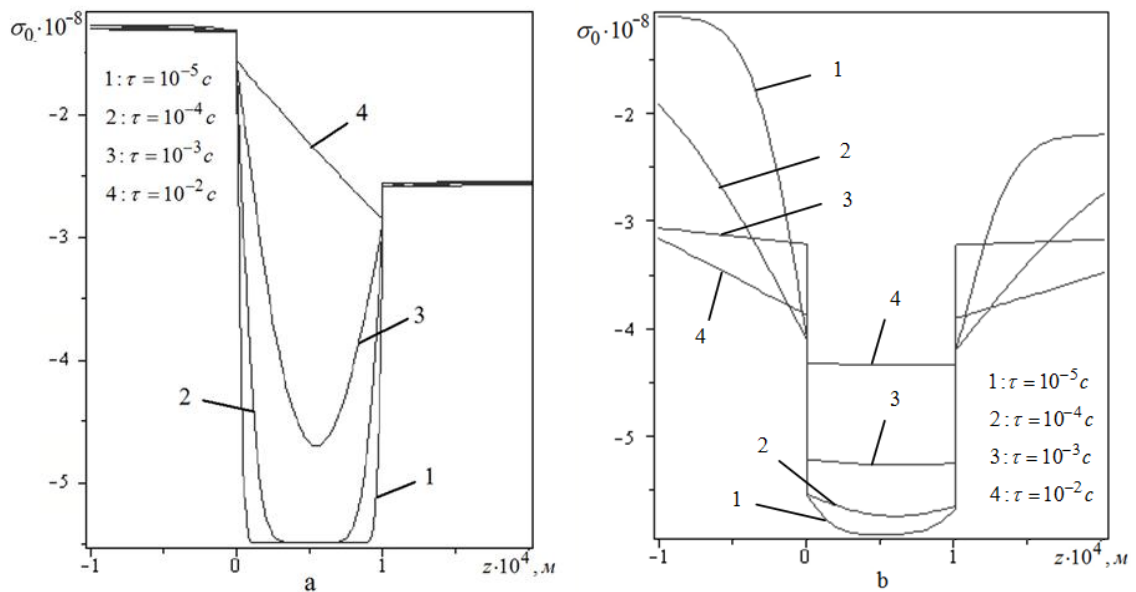


Рис.2.9

Як видно, з рис.2.9 при $\tau \geq 10^{-2} c$ розподіл напружень по товщині проміжкового шару в обидвох випадках практично лінійний. Як і слід було очікувати, при $z \rightarrow \pm\infty$ напруження прямують до нуля. В початковий момент часу стрибки напружень на поверхнях поділу відрізняються у два рази незалежно від товщини проміжкового шару. Для 1-ої комбінації матеріалів при

$h = 10^{-4} \text{ м}$, $h = 10^{-5} \text{ м}$ величина стрибка на поверхні $z = 0$ з часом збільшується, а на поверхні $z = h$ – зменшується. При $h = 10^{-3} \text{ м}$ поведінка стрибків напружень на поверхні $z = 0$ інша: спочатку вони незначно спадають, після чого збільшуються. З часом стрибки напружень на поверхнях поділу починають спадати. Зі збільшенням h величина стрибка на поверхні $z = 0$ зменшується, а на поверхні $z = h$ – збільшується. Для 2-ої комбінації матеріалів величина стрибка на поверхнях поділу є майже однаковою і з часом зменшується.

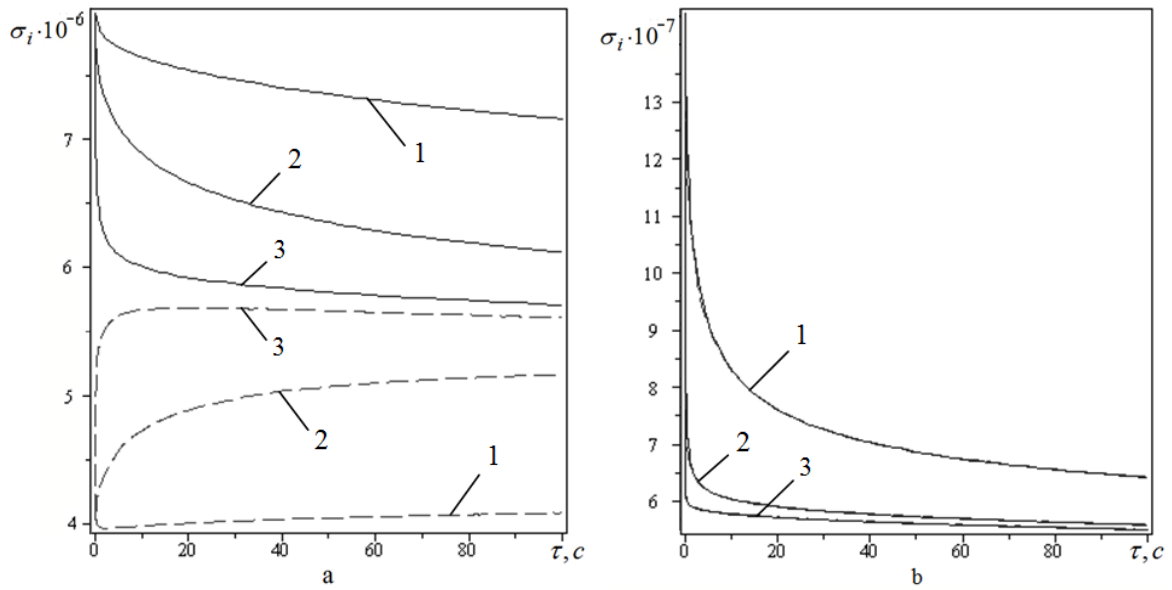


Рис.2.10

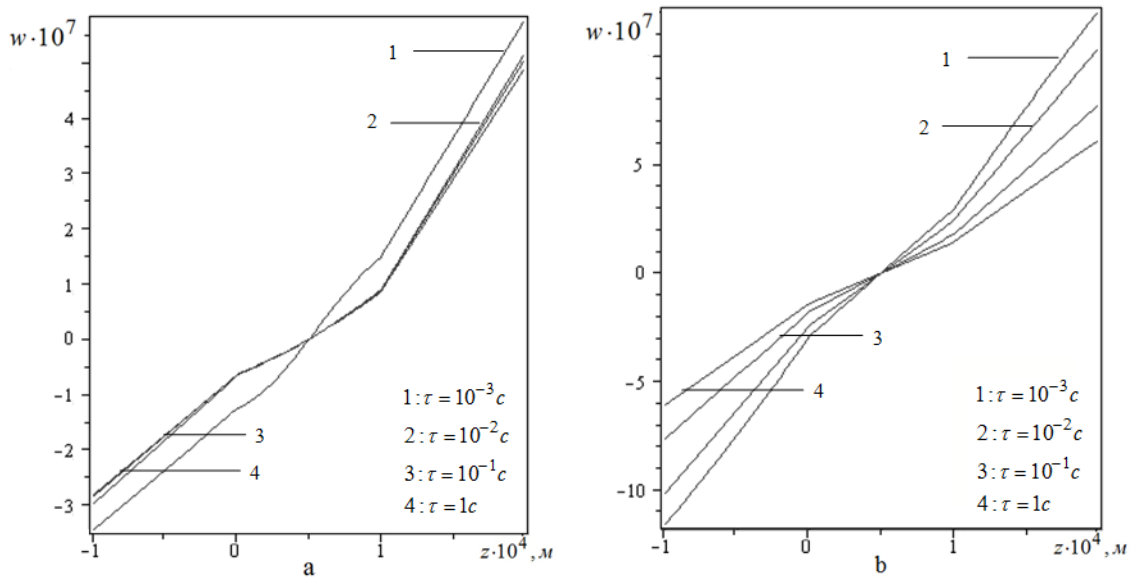


Рис.2.11

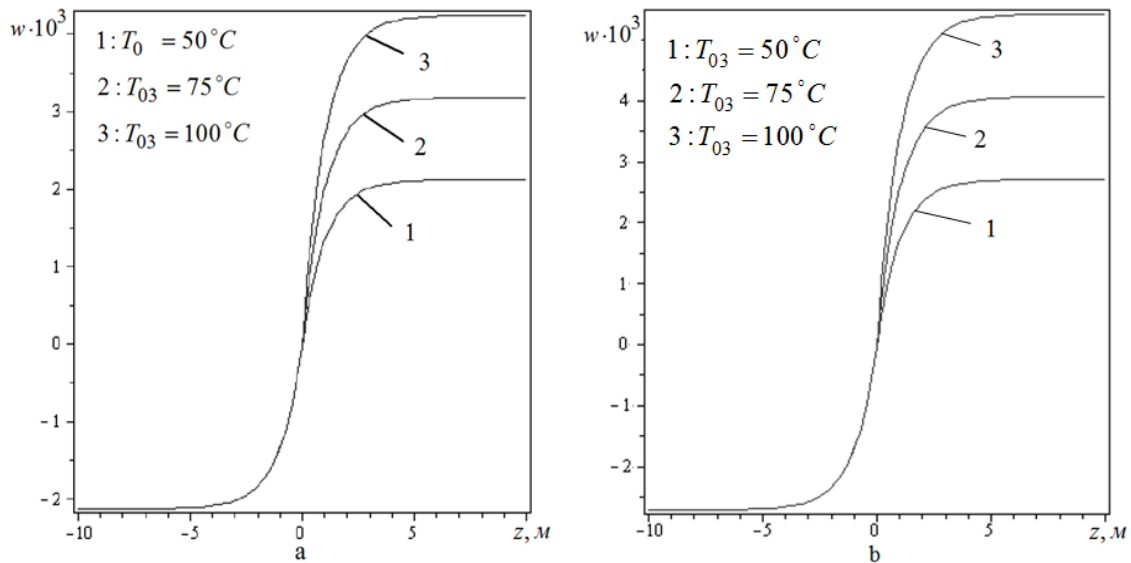


Рис.2.12

Залежності переміщень від координати при $h = 10^{-4}$ м для різних часів τ зображені на рис.2.11, а за фіксованого $\tau = 10^{-5}$ с при різних T_{03} – на рис.2.12 для 1-ої (а) та 2-ої (б) комбінації матеріалів. Переміщення мають лінійний розподіл по товщині проміжкового шару, що спостерігалось і для інших часів. При однакових початкових температурах півбезмежних складових розподіл переміщень, як і слід було очікувати, є асиметричним відносно середини проміжкового шару. Зі збільшенням значення T_{03} , переміщення у 1-ій складовій практично не змінюються, а у 3-ій зростають.

2.6.2. Безмежний трискладовий стержень за дії поверхневого періодичного джерела тепла

У цьому пункті досліджується термопружний стан для трискладового стержня (рис.2.2), коли початкові температури складових дорівнюють нулю, а на поверхні поділу $z = 0$ зосереджене періодичне джерело тепла $w_{t,1}(z, \tau) = \tilde{w}_t(\tau)\delta(z)$ синусоїдального $\tilde{w}_t(\tau) = q_0 \sin(\varpi\tau) + q_1$ або косинусоїдального $\tilde{w}_t(\tau) = q_0 \cos(\varpi\tau) + q_1$ характеру зміни інтенсивності (q_0 – потужність джерела тепла, ϖ – частота, q_1 – деяка стала).

У цьому випадку інтегральне подання розв'язку (2.34) з урахуванням зв'язку між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} [117], для кожної складової набуде вигляду:

$$t_i(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} q_0 G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') \tilde{w}_i(\tau') \delta(\zeta) d\zeta d\tau'. \quad (2.84)$$

Підставимо у (2.84) вирази для $G_{i1}(z, \zeta, \tau)$ [117] та $\tilde{w}_i(\tau)$ у вигляді $\tilde{w}_i(\tau) = q_0 \frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i} + q_1$ або $\tilde{w}_i(\tau) = q_0 \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} + q_1$. Після низки перетворень з урахуванням інтегралу

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} \exp\left[-\frac{f^2(z)}{4a(\tau - \tau')}\right] \frac{e^{i\omega\tau'} \pm e^{-i\omega\tau'}}{2i} d\tau' = \frac{1}{4\sqrt{\omega}} \left\{ \frac{\pm i}{\sqrt{i}} e^{i\omega\tau} \left[e^{f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \times \right. \right. \\ & \times \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) - e^{-f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \operatorname{erf}\left(-\sqrt{i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) \Big] - \\ & \left. - \frac{i}{\sqrt{-i}} e^{-i\omega\tau} \left[e^{f(z)\sqrt{\frac{-i\omega}{a}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{-i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) - e^{-f(z)\sqrt{\frac{-i\omega}{a}}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{erf}\left(-\sqrt{-i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) \right] \right\} \Bigg|_0^{\tau}, \end{aligned}$$

формули Ейлера $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ та формули нескінченного ряду для інтегралу ймовірностей комплексного аргументу [2]

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x + iy) = \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x} [1 - \cos(2xy) + i \sin(2xy)] + \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{n^2 + 4x^2} \times \\ \times [f_n(x, y) + i g_n(x, y)] + \varepsilon(x, y), \end{aligned}$$

де $f(z)$ – деяка функція, $a > 0$, $f_n(x, y) = 2x - 2x \operatorname{ch}(ny) \cos(2xy) + n \operatorname{sh}(ny) \sin(2xy)$, $g_n(x, y) = 2x \operatorname{ch}(ny) \sin(2xy) + n \operatorname{sh}(ny) \cos(2xy)$, $|\varepsilon(x, y)| \approx \approx 10^{-14} |\operatorname{erf}(x + iy)|$, отримаємо вирази для функцій t_i , які у безрозмірних змінних матимуть вигляд:

$$t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{4\delta_1} \left\{ s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) - \right. \\ \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) \right\} + \tilde{t}_1(\bar{z}, Fo), \quad (2.85)$$

$$t_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ s_1^+(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\ \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right\} + \tilde{t}_2(\bar{z}, Fo),$$

$$t_3(\bar{z}, Fo) = \frac{\delta_2 \gamma}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo) + \\ + \tilde{t}_3(\bar{z}, Fo),$$

$$\tilde{t}_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_1}{2\delta_1} \left\{ \phi^+(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \phi^+(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) - \right. \\ \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) \right\},$$

$$\tilde{t}_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_1}{(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ \phi^-(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\ \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right\},$$

$$\tilde{t}_3(\bar{z}, Fo) = \frac{2\delta_2 \bar{q}_1}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo),$$

де

$$s_1^{\pm}(x, Fo) = e^{x\eta} \left[(-1)^p \cos(x\eta + PdFo) \left(\pm 1 - \phi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} + \frac{x}{2\sqrt{a_{1s} Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) - \right. \\ \left. - \sin(x\eta + PdFo) \left(\pm 1 - \psi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} + \frac{x}{2\sqrt{a_{1s} Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-x\eta} \left[(-1)^p \cos(x\eta - PdFo) \left(\mp 1 - \phi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} - \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \sin(x\eta - PdFo) \left(\mp 1 - \psi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} - \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) \right], \quad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^\pm(\xi, y) = & \operatorname{erf}(\xi) + \frac{e^{-\xi^2}}{2\pi\xi} (1 - \cos(2\xi y) \pm \sin(2\xi y)) + \frac{2e^{-\xi^2}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m^2}{4}}}{m^2 + 4\xi^2} \times [2\xi - 2\xi \times \\
& \times \operatorname{ch}(my) \cos(2\xi y) + \operatorname{msh}(my) \sin(2\xi y) \pm 2\xi \operatorname{ch}(my) \sin(2\xi y) \pm \operatorname{msh}(my) \cos(2\xi y)],
\end{aligned}$$

$$\phi^\pm(\zeta, Fo) = \pm \zeta a_{01}^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a_{10}^* Fo}\right) + \zeta \sqrt{a_{s1}} \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo}}\right),$$

$$\gamma = \frac{\bar{q}_0}{2} \sqrt{\frac{2}{Pd}}, \quad Pd = \frac{\omega l_0^2}{a_s}, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i l_0}{\sqrt{a_s}} \quad (i=0,1), \quad \eta = \sqrt{\frac{Pd}{2a_{1s}}}; \quad p=0, \quad \varphi = \phi^-, \quad \psi = \phi^+ -$$

для синусоїдального джерела тепла, $p=1$, $\varphi = \phi^+$, $\psi = \phi^-$ – косинусоїдального.

Покладемо $q_1 = 0$ і розглянемо такі часткові випадки:

1. Переходячи у (2.85) до границі при $\lambda_t^{(3)} \rightarrow \infty$ або $\lambda_t^{(3)} \rightarrow 0$, дістанемо вирази для визначення температурного поля у двоскладовому півбезмежному тілі

$$\begin{aligned}
t_1(\bar{z}, Fo) = & \frac{\gamma}{4\delta_1} \left\{ s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) - \right. \\
& \left. - k \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) \right\}, \\
t_2(\bar{z}, Fo) = & \frac{\gamma}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ s_1^+(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\
& \left. - k \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right\}, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

поверхня $z = h$ якого підтримується при нульовій температурі ($k=1$) або є теплоізолюваною ($k=-1$).

2. Поклавши у (2.85) $a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$, отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для двоскладового безмежного тіла

$$t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\sqrt{2\bar{q}_0}(1+\nu_1)}{8\delta_1\sqrt{Pd}} s_1^-(\bar{z}, Fo),$$

$$t_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\sqrt{2\bar{q}_0}}{4(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{Pd}} s_1^+(a_{12}^*\bar{z}, Fo). \quad (2.88)$$

3. Для квазіусталеного теплового режиму ($Fo \rightarrow \infty$), функції $s_1^\pm(x, Fo)$ у співвідношеннях (2.85), (2.87), (2.88) матимуть вигляд

$$s_1^\pm(x, Fo) = e^{x\eta} \left[(\pm 1 - 1) \left((-1)^p \cos(x\eta + PdFo) - \sin(x\eta + PdFo) \right) \right] +$$

$$+ e^{-x\eta} \left[(\mp 1 - 1) \left((-1)^p \cos(x\eta - PdFo) + \sin(x\eta - PdFo) \right) \right]. \quad (2.89)$$

4. Для односкладового півбезмежного тіла, на поверхні якого діє тепловий потік $\sin(\varpi\tau)$, отримаємо розв'язок

$$t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{4\delta_1} s_1^-(\bar{z}, Fo),$$

який для квазіусталеного теплового режиму збігається з наведеним у [56]. Неусталений тепловий режим у [56] описується співвідношенням, яке містить невласний інтеграл.

За такого температурного поля у досліджуваному тілі виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження (2.80) та осьові переміщення (2.81).

Числові дослідження. Наведемо результати числових досліджень безрозмірних температури $\theta = tQ_0$, напружень $\sigma = \sigma_0Q_0 \frac{(1-\nu_2)}{E_2\alpha_t^{(2)}}$ та переміщень

$$\bar{w} = \frac{wQ_0(1-\nu_2)10^3}{\alpha_t^{(2)}(1+\nu_2)l_0} \left(Q_0 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{q_0l_0} 10^6 \right), \quad \text{у трискладовому стержні за}$$

синусоїдального ($\varpi = 1$) характеру зміни інтенсивності джерела тепла, коли

матеріалами півбезмежних складових є срібло, а проміжкового шару – двоокис цирконію (2.82) при $q_1 = 0$.

На рис.2.13 проілюстровано вплив товщини проміжкового шару на розподіл температури на поверхнях поділу $z = 0$ (суцільні лінії) і $z = h$ (штрихові лінії). Як видно, при зменшенні товщини температура на поверхні $z = 0$ знижується, а на поверхні $z = h$ підвищується. При $h = 10^{-2} \text{ м}$ (криві 1) та $h = 10^{-3} \text{ м}$ (криві 2) температура на поверхні $z = h$ близька до нуля, а при $z = 0$ практично однакова.

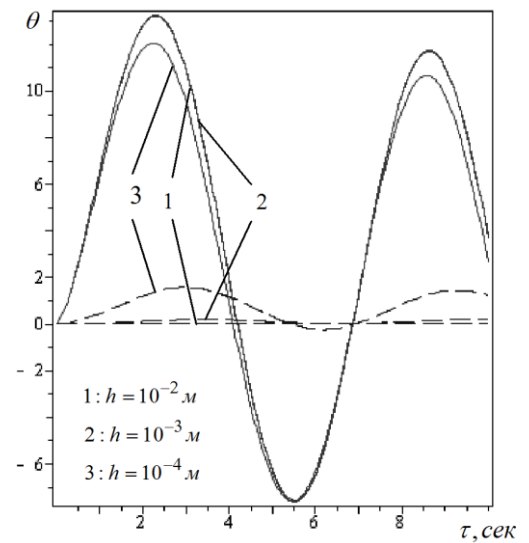


Рис.2.13

На рис.2.14 показано зміну температури на поверхнях поділу $z = 0$ (суцільна лінія) і $z = h$ (штрихова лінія) для малих і великих часів, обчислену за співвідношеннями (2.86) (крива 1) та (2.89) (крива 2) при $h = 10^{-2} \text{ м}$. Бачимо, що починаючи з $\tau = \tau^* \approx 700 \text{ сек}$ тепловий режим можна вважати квазіусталеним. Тому для часів $\tau > \tau^*$ дослідження температурних полів можна проводити за простішими формулами (2.89).

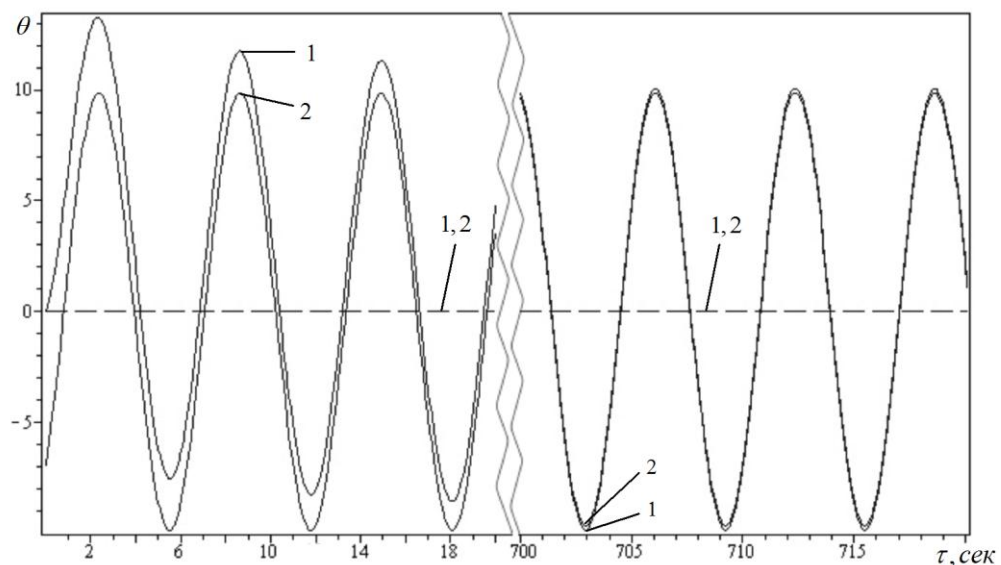


Рис.2.14

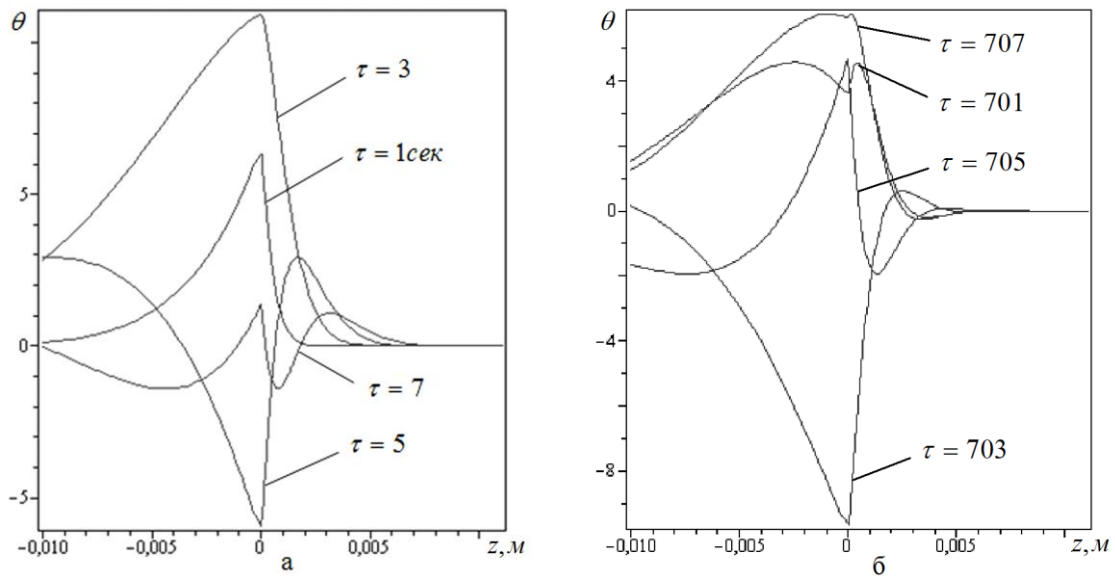


Рис.2.15

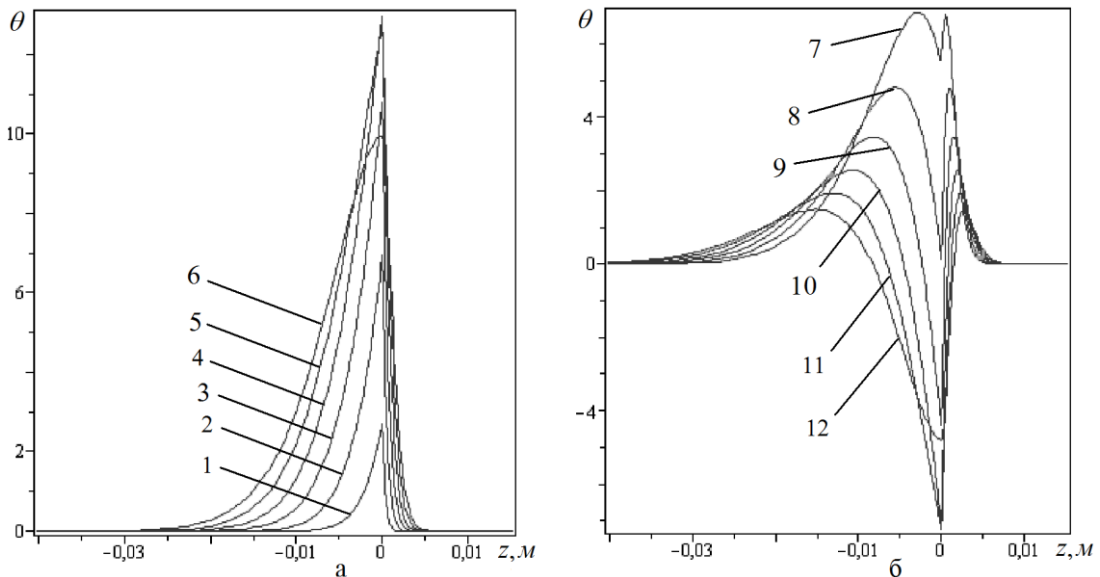


Рис.2.16

На рис.2.15 та рис.2.16 показано залежність температури від координати при $h = 10^{-2} \text{ м}$ для різних часів. Розподіл температури в проміжковому шарі та приповерхневих областях півбезмежних тіл на початковій стадії нагріву проілюстровано на рис.2.15а, а після переходу на квазіусталений тепловий режим на рис.2.15б. На рис.2.16 наведено температурний розподіл для більш розширеної області за повний період дії джерела тепла в моменти часу від $\tau = \frac{\pi}{6}$ до $\tau = 2\pi$ з інтервалом $\frac{\pi}{6}$ (i -ій криві відповідає час $\tau = i \frac{\pi}{6}$). Як видно, характер розподілу по товщині проміжкового шару для кожного моменту часу

різний. Температура третьої складової близька до нуля протягом дії джерела тепла. Залежно від часу максимум температури може перебувати або на поверхні поділу $z=0$, або в проміжковому шарі чи у першій складовій. Зокрема, при $\tau < 2.3$ сек він знаходиться на поверхні нагріву.

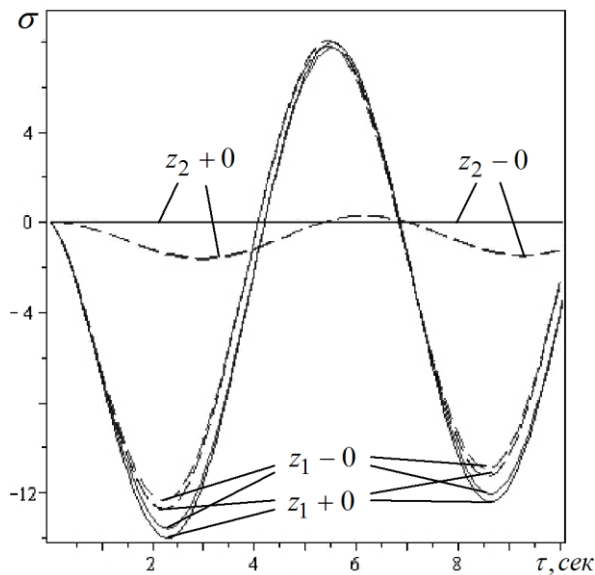


Рис.2.17

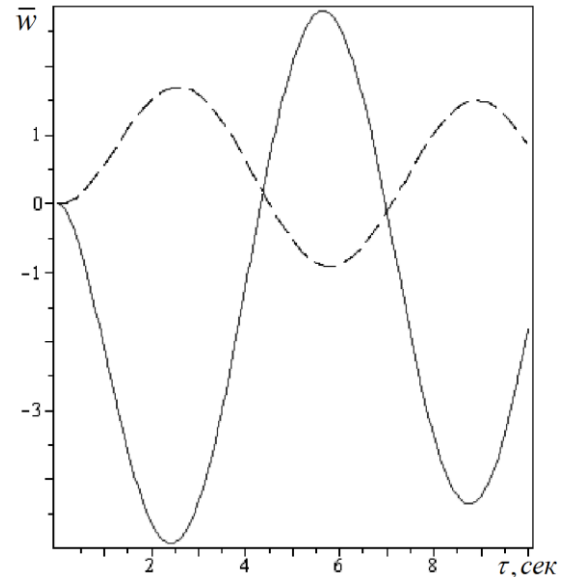


Рис.2.18

Величини розтягуючих та стискаючих напружень на поверхнях поділу $z=0$ і $z=h$ при товщині проміжкового шару $h=10^{-2}$ м (суцільна лінія) та $h=10^{-4}$ м (штрихова лінія) показано на рис.2.17. Зі зменшенням h максимальне значення напружень при $z=0$ також зменшується, а при $z=h$ збільшується. На поверхнях поділу бачимо стрибки напружень, величини яких зростають зі збільшенням абсолютного значення температури. Аналогічно, як і випадку температури, характер розподілу напружень по товщині проміжкового шару для кожного моменту часу різний та складніший за лінійний.

На рис.2.18 зображено залежності переміщень від часу на поверхнях поділу $z=0$ (суцільна лінія) і $z=h$ (штрихова лінія) при $h=10^{-3}$ м. Як видно, переміщення також мають періодичний характер. Вони співпадають, коли температури при $z=0$ і $z=h$ є однаковими. На поверхні $z=0$ переміщення набувають додатних (від'ємних) значень, коли температура від'ємна (додатна), а на поверхні $z=h$ – навпаки. Максимальні значення переміщень на поверхнях

поділу відрізняються у 2.5 рази, тоді як температур – у 10 разів. Для різних моментів часу розподіл переміщень по товщині проміжкового шару мав характер, відмінний від лінійного.

2.7. Спосіб визначення невідомих у інтегральних поданнях нелінійних задач теплопровідності

Як було зазначено вище, отримані інтегральні подання (2.33), (2.32), (2.45), (2.46), (2.47) містять залежні від часу невідомі температури (нетермочутливі тіла) чи змінні Кірхгофа (термочутливі тіла) на відповідних поверхнях. Спосіб знаходження невідомих температур на обмежуючих поверхнях проілюструємо на тестових задачах теплопровідності для трискладового шару, на поверхні $z = z_0$ якого діє імпульсний тепловий потік $q(\tau) = q_0 [S(\tau) - S(\tau - \tau_1^*)]$ (q_0 – стала, τ_1^* – тривалість імпульса), а поверхня $z = z_3$ підтримується при нульовій температурі та для півбезмежного однорідного стержня, який остигає шляхом променевого теплообміну з довкіллям. Розв'язки цих задач отримаємо як часткові випадки задачі теплопровідності для шару зі сталими ФМХ, який взаємодіє з довкіллям шляхом конвективно-променевого теплообміну. Розв'язок останньої, окрім того, буде використано при аналізі впливу термочутливості на розподіли температури у четвертому розділі.

2.7.1. Трискладовий шар за конвективно-променевого теплообміну

Розглянемо трискладовий шар (рис.2.1), який взаємодіє через обмежуючі поверхні $z = z_0$ та $z = z_3$ з довкіллям шляхом конвективно-променевого теплообміну. На поверхнях поділу виконуються умови ідеального теплового контакту. Вважаємо, що в початковий момент часу у кожній складовій задано

нерівномірний розподіл температури, а теплофізичні характеристики є сталими в межах кожної складової.

Для визначення нестационарного температурного поля в такому тілі маємо рівняння теплопровідності

$$\lambda_t^{(i)} \frac{\partial^2 t_i}{\partial z^2} = c_V^{(i)} \frac{\partial t_i}{\partial \tau} \quad (i = \overline{1,3}) \quad (2.90)$$

умови контакту типу (2.17), граничні та початкові умови

$$\lambda_i^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial z} - P_1(\tau) = 0, \text{ при } z = z_0 \quad (2.91)$$

$$\lambda_i^{(3)} \frac{\partial t_3}{\partial z} + P_3(\tau) = 0, \text{ при } z = z_3 \quad (2.92)$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_{0,i}(z), \quad (i = \overline{1,3}) \quad (2.93)$$

$$P_i(\tau) = \varepsilon_i \sigma [R(t_i) - R(t_{c,i})] - \alpha_i [t_i - t_{c,i}] \quad (i = 1,3),$$

де $R(\eta) = (\eta + 273)^4$, $t_{c,1}$ та $t_{c,3}$ – температури довкілля, з яким відбувається теплообмін через поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ відповідно, ε_1 , ε_3 – ступені чорноти цих поверхонь, α_1 , α_3 – коефіцієнти теплообміну через ці поверхні, σ – стала Стефана-Больцмана; індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $z_0 < z < z_1$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $z_1 < z < z_2$, $i = 3$ – третій $z_2 < z < z_3$.

Для розв'язання задачі (2.90), (2.17), (2.91)-(2.93) використаємо функцію Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору. Враховуючи зв'язок (2.30) між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} , розв'язок для кожної складової запишемо у вигляді:

$$t_i(z, \tau) = - \int_0^\tau \left\{ G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_i^{(3)} t_3(z_3, \tau') \frac{\partial G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau' - \\ - \int_0^\tau \left\{ G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') P_1(\tau') - \lambda_i^{(1)} t_1(z_0, \tau') \frac{\partial G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_0} d\tau' + f_i(z, \tau), \quad (2.94)$$

$$f_i(z, \tau) = \int_{z_0}^0 c_{V1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) t_{0,1}(\zeta) d\zeta + \int_0^h c_{V2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) t_{0,2}(\zeta) d\zeta + \\ + \int_h^{z_3} c_{V3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) t_{0,3}(\zeta) d\zeta,$$

У співвідношеннях (2.94) в підінтегральні функції входять невідомі значення температури на обмежуючих поверхнях $t_1(z_0, \tau)$ та $t_3(z_3, \tau)$. Для їх визначення апроксимуємо [5, 85, 111] кожен з невідомих функцій лінійним сплайном такого вигляду:

$$g(\tau) = s_1^{(1)}(g)\tau + s_1^{(0)}(g) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[s_{k+1}^{(1)}(g)\tau + s_{k+1}^{(0)}(g) - \right. \\ \left. - s_k^{(1)}(g)\tau - s_k^{(0)}(g) \right] S(\tau - \tau_k), \quad (2.95)$$

де $s_i^{(1)}(g) = [g(\tau_i) - g(\tau_{i-1})] / \Delta\tau_i$, $s_i^{(0)}(g) = [-g(\tau_i)\tau_{i-1} + g(\tau_{i-1})\tau_i] / \Delta\tau_i$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = \overline{1, K_\tau}$), $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{K_\tau}$, K_τ – кількість вузлів сплайна.

Підставивши у (2.94) вирази для елементів матриці Гріна G_{ij} та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (2.95), отримаємо співвідношення для температури, які у безрозмірних змінних запишуться так:

$$t_i(\bar{z}, \text{Fo}) = -\eta_{i,3} \left[\gamma_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}, \text{P}_3^*) - \frac{a_{i3}^*}{2a_{i0}} \gamma_{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}, t_3) \right] - \\ - \eta_{i,0} \left[\gamma_{i,5}(\bar{z}, \text{Fo}, \text{P}_1^*) - \frac{1}{2a_{i0}} \gamma_{i,6}(\bar{z}, \text{Fo}, t_1) \right] + f_i(z, \tau), \quad (2.96)$$

де

$$\gamma_{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}, \zeta) = s_1^{(0)}(\zeta) \psi_1^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_1^{(1)}(\zeta) \psi_2^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + \\ + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[(s_{k+1}^{(0)}(\zeta) - s_k^{(0)}(\zeta)) \psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) + (s_{k+1}^{(1)}(\zeta) - s_k^{(1)}(\zeta)) \psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \right],$$

$$P_i^*(\text{Fo}) = \sigma_i^* \left(R(t_i^*(\text{Fo})) - R(t_{c,i}) \right) + \text{Bi}_i \left(t_i^*(\text{Fo}) - t_{c,i} \right)$$

$$t_3^*(\tau) = t_3(z_3, \tau), \quad t_1^*(\tau) = t_1(z_0, \tau),$$

$$\eta_{1,3} = \frac{2\delta_2 \lambda_t^{(3)}}{\sqrt{a_0} (\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{2,3} = \frac{\lambda_t^{(3)}}{\sqrt{a_0} (\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{3,3} = \frac{a_{30}^*}{2},$$

$$\eta_{1,0} = \frac{a_{10}^*}{2}, \quad \eta_{2,0} = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\sqrt{a_0} (\delta_1 + \delta_2)}, \quad \eta_{3,0} = \frac{2\delta_2 \lambda_t^{(1)}}{\sqrt{a_0} (\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)},$$

$$\psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad \psi_\rho^{i,5}(\bar{z}, \text{Fo}) = \Psi_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}),$$

$$\psi_\rho^{i,6}(\bar{z}, \text{Fo}) = \Psi_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}) \text{ при } \rho = 1, 2;$$

$$\psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \quad \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k),$$

$$\psi_\rho^{i,5}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \Psi_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \quad \psi_\rho^{i,6}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \Psi_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \text{ при}$$

$$\rho = 3, 4;$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) - \bar{z}, \xi \right),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + \bar{h} - \bar{z}, \xi \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + 2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi \right) -$$

$$- \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h} + \bar{z}, \xi \right),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,3}^1 (\bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + (-1)^{\delta_{p2}} \nu_2 y_{\rho,3}^0 (2\bar{h} - \bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) +$$

$$+ \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,3}^1 \left(2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi \right) -$$

$$- \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,3}^1 \left(2(1+n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi \right),$$

$$\Psi_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = (-1)^{\delta_{p2}} \left[y_{\rho,1}^0 (\bar{z}_0 - \bar{z}, \xi) + \nu_1 y_{\rho,1}^0 (\bar{z} + \bar{z}_0, \xi) \right] + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times$$

$$\times y_{\rho,1}^1 \left(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi \right) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi \right),$$

$$\Psi_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* \bar{z} - \bar{z}_0, \xi \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi \right) - \\ - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi \right),$$

$$\Psi_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}) - \bar{z}_0, \xi \right),$$

$$\varphi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = 2(S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} a_{i0}^* \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right), \quad \text{при } \rho = 1, 3$$

$$\varphi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) = -2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo}} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} \text{Fo}} \right) + \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo}}} \right) \right) \times \\ \times (\zeta^2 a_{i0}^* + 2a_{i0}^* \text{Fo}),$$

$$\varphi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = S(\text{Fo} - \text{Fo}_k) \left(-2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} (\text{Fo} - \text{Fo}_k)} \right) + \right. \\ \left. + \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{(\text{Fo} - \text{Fo}_k)}} \right) \right) (\zeta^2 a_{i0}^* + 2a_{i0}^* \text{Fo}) \right),$$

$$\chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = (S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} \left(2 \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0} \xi} \right] - \frac{\zeta}{\sqrt{a_i}} \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right) \right)$$

при $\rho = 1, 3$

$$\chi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) = \frac{\sqrt{\text{Fo}}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0} \text{Fo}} \right] \left(\frac{4}{3} \text{Fo}^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} \right) - \\ - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo}}} \right) \right),$$

$$\chi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = S(\text{Fo} - \text{Fo}_k) \left(\frac{\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0} (\text{Fo} - \text{Fo}_k)} \right] \right) \times$$

$$\times \left(-\frac{2}{3}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) \left((-1)^{p'+1} - \right. \\ \left. - \text{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}} \right) \right),$$

де $\text{Fo}_k = \frac{a_0 \tau_k}{l_0^2}$ ($k = \overline{0, K_\tau}$), $\text{Bi}_i = \frac{\alpha_i l_0}{\lambda_t^{(i)}}$ ($i = 1, 3$), $\sigma_i^* = \frac{\varepsilon_i \sigma l_0}{\lambda_t^{(i)}}$ ($i = 1, 3$), δ_{ij} – символ

Кронекера; функціям $y_{\rho,i}^\mu(\zeta, \xi)$ відповідають функції $\chi_{\rho,i}^\mu(\zeta, \xi)$ або $\phi_{\rho,i}^\mu(\zeta, \xi)$, якщо індекс “у” в $\mathcal{Y}_{\rho,y}^{i,p}$ чи $\Psi_{\rho,y}^{i,p}$ приймає значення відповідно χ або ϕ .

Поклавши у співвідношеннях (2.96) в $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ відповідно $\bar{z} = \bar{z}_3$ і $\bar{z} = \bar{z}_0$, для кожного $\text{Fo} = \text{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$) отримаємо систему двох нелінійних алгебричних рівнянь відносно $t_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_k)$ та $t_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$, де у правих частинах входять відповідно $t_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_{k-1})$ та $t_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_{k-1})$. Розв'язавши цю систему, знайдемо шукані значення температури у вузлах сітки, а відтак і шукане температурне поле.

Для термочувливих тіл значення змінних Кірхгофа на обмежуючих поверхнях та поверхнях поділу знаходяться аналогічним способом, але при цьому кількість відповідних рівнянь збільшується до чотирьох.

2.7.2. Порівняльний аналіз числових результатів

1. Розв'язок першої тестової задачі отримаємо зі співвідношень (2.96), поклавши у них $P_1(\tau) = q(\tau)$, $f_i(z, \tau) = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ та $\alpha_3 \rightarrow \infty$. На його основі проведемо числові дослідження, коли теплофізичні характеристики першої та третьої складової відповідали ніобію, а проміжкового шару – платині:

$$\lambda_t^{(i)} = 49,89(1 + 0,226 \cdot 10^{-3} t_i) \text{ Вт / (м} \cdot \text{°C)}, a_i = 23,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек},$$

$$E_i(t_i) = (100 - 918 \cdot 10^{-5} t_i - 411 \cdot 10^{-8} t_i^2) 10^9 \text{ Н / м}^2,$$

$$\alpha_{ii}(t_i) = (5,541 + 0,00236 t_i) 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1},$$

$$v_i = 0.33, (i = 1, 3)$$

$$\lambda_t^{(2)} = 67,271(1 + 0,207 \cdot 10^{-3} t_2) \text{ Вт / (м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)},$$

$$a_2 = 24,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}, E_2(t_2) = (168 - 338 \cdot 10^{-4} t_2) 10^9 \text{ Н / м}^2,$$

$$\alpha_{t2}(t_2) = (7,916 + 0,00278 t_2) 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, v_2 = 0.35, \quad (2.97)$$

при $q_0 = 12 \cdot 10^6 \text{ Вт / м}^2$, $\tau_1^* = 2 \text{ сек}$ та $K_\tau = 10$.

В табл.2.1 наведено значення безрозмірної

Табл.2.1

температури $\bar{T} = \frac{t_1 \lambda_t^{(1)}}{q_0 (z_3 - z_0)}$ при різних часах τ

на поверхні z_0 . Температура у другому стовпці (\bar{T}_{H2}) обчислена за запропонованою методикою, а у першому (\bar{T}_{H1}) – за тих же параметрів на основі точного розв'язку [111]. Як видно, результати збігаються з точністю до трьох-чотирьох знаків.

2. Для проведення порівняльного аналізу результатів обчислень температури півбезмежного стержня за променевого охолодження в довкілля, отриманих на 5-ій ітерації у [152] за допомогою методів зведення до

τ , сек	\bar{T}_{H1}	\bar{T}_{H2}
0.125	0.32731	0.32719
0.5	0.64184	0.64166
1	0.83388	0.83371
1.5	0.91379	0.91372
2	0.94705	0.94704
2.5	0.31904	0.31922
3	0.13276	0.13302
3.5	0.05525	0.05553
4	0.02299	0.02291
4.5	0.00956	0.00971
5	0.00398	0.00390

інтегрального рівняння, простої ітерації, послідовних наближень і квазілінеаризації, з результатами розрахунків, отриманими на основі відповідного часткового випадку співвідношень (2.96) при $z_0 \rightarrow -\infty$,

$a_1 = a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(1)} = \lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$ та $K_\tau = 20$, у табл.2.2 наведені значення

Табл.2.2

\tilde{z}	Запропонована методика	Зведення до інтегрального рівняння	Проста ітерація	Послідовні наближення	Квазілінеаризація
0.00005	0.946903	0.9469	0.9475	0.9473	0.9469
0.0005	0.851587	0.8516	0.8551	0.8546	0.8517
0.001	0.803777	0.8039	0.8090	0.8087	0.8040
0.005	0.654695	0.6569	0.6577	0.6691	0.6556
0.01	0.577951	0.5857	0.5690	0.6009	0.5793
0.03	0.451954	0.4987	0.4016	0.5060	0.4542

температури на обмежуючій поверхні, де $\tilde{z} = \tau/\gamma^2$, $\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon_1 \sigma T_0^3}$. Бачимо, результати збігаються з точністю до двох-чотирьох знаків.

Зауважимо, що для $\tilde{z} = 0.03$ при $K_\tau = 100, 500, 1000$ температура дорівнювала відповідно 0.451975, 0.451983, 0.451986, тобто, збільшення K_τ не значно впливало на її значення.

2.8. Висновки по розділу

У цьому розділі наведено основні співвідношення теплопровідності та термопружності для термочутливих тіл. Сформульовано постановки одновимірних нестационарних задач теплопровідності та квазістатичних задач термопружності для трискладових тіл з та без урахування температурної залежності ФМХ за нерівномірного початкового нагріву складових, дії джерел тепла та конвективно-променевого теплообміну з довкіллям. Запропоновано методику розв'язання відповідних задач за сталих та температурнозалежних коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей. Вона передбачає отримання інтегральних подань відносно температури (для нетермочутливих

тіл) чи змінної Кірхгофа (для термочутливих тіл). При цьому використано апарат узагальнених функцій та функцію Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів.

За сталих коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей для безмежного трискладового стержня визначення температурного поля зведено до обчислення інтегралів, а для трискладових півбезмежного стержня чи шару ще до відшукування залежної від часу температури на обмежуючих поверхнях.

За температурнозалежних коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей для безмежного трискладового стержня визначення температурного поля зведено до знаходження залежної від часу змінної Кірхгофа на поверхнях поділу, а для випадку півбезмежного стержня і шару, ще на обмежуючих поверхнях. Окрім цього, необхідно знайти похідну за часом від змінної Кірхгофа.

Наведено вирази для визначення напружень та переміщень, зумовлених знайденими температурними полями.

Запропоновану методику апробовано на задачах термопружності для трискладового безмежного стержня зі сталими ФМХ в межах кожної складової під час остигання або дії джерел тепла синусоїдального або косинусоїдального характеру зміни інтенсивності.

На прикладі розв'язку задачі теплопровідності для безмежного трискладового стержня при остиганні проілюстровано можливість отримання інженерних формул, які не містять функціональних рядів, а, отже, є простішими для програмної реалізації і потребують значно менше часу для обчислень. Встановлено межі їх застосовності, які залежать від часу, товщини проміжкового шару та добутку двох множників, кожен з яких характеризує відношення різниці коренів квадратних від добутку коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності контактуючих складових до їх суми.

Показано, що чим менший модуль цього добутку, тим більші товщини проміжкового шару h і менші часи τ , при яких можна використовувати інженерні формули.

Отримано низку часткових випадків знайдених розв'язків, які збіглися з відомими в літературі.

За результатами числових досліджень встановлено:

- при остиганні розподіл температури по товщині проміжкового шару після певного моменту часу τ^* має лінійний характер. Причому, чим більша товщина проміжкового шару, тим більший час τ^* . За дії періодичного джерела тепла характер розподілів температури по товщині проміжкового шару складніший за лінійний;

- у стержні виникають стискаючі стрибкоподібні напруження. Для розглянутих способів теплової дії при зменшенні товщини проміжкового шару зменшуються максимальні значення напружень у ньому;

- за остигання для одних комбінацій матеріалів стрибки напружень на обидвох поверхнях поділу для розглянутих товщин проміжкового шару були однаковими, величина яких з часом зменшувалась. Для інших матеріалів, наприклад, срібло-двоокис цирконію-срібло, величина стрибка на поверхні $z=0$ при $h \leq 10^{-4}$ м збільшувалась, а при $h > 10^{-4}$ м спочатку незначно спадала, після чого також збільшувалась, на поверхні $z=h$ – незалежно від h з часом зменшувалась;

- аналогічно, як і для температури, лінійний розподіл напружень по товщині проміжкового шару при остиганні спостерігався після моменту часу τ^* . За дії періодичного джерела тепла характер розподілу в різні моменти часу складніший за лінійний;

- при остиганні розподіл переміщень по товщині проміжкового шару, на відміну від температури та напружень, мав лінійний характер для усіх розглянутих моментів часу. За дії періодичного джерела тепла в різні моменти

часу характер розподілу переміщень по товщині проміжкового шару відрізняється від лінійного. За дії періодичного джерела тепла у моменти часу, коли максимальні значення температур на поверхнях поділу відрізняються у 10 разів, максимальні значення переміщень відрізняються у 2.5 рази.

На задачі теплопровідності для трискладового нетермочутливого шару, який взаємодіє з довкіллям шляхом конвективно-променевого теплообміну проілюстровано спосіб знаходження залежних від часу невідомих на відповідних поверхнях температур чи змінних Кірхгофа. Проведено порівняльний аналіз обчислень на основі часткових випадків знайденого розв'язку та відомих в літературі результатів:

- у випадку задачі теплопровідності для трискладового шару, на одній з обмежуючих поверхонь якого діє тепловий потік, а інша підтримується при нульовій температурі порівняння проводилось з відомим точним розв'язком і результати збігались до 3-4 знаків після коми;

- у випадку задачі теплопровідності для півбезмежного нетермочутливого стержня при радіаційному охолодженні результати збігались з відомими обчисленнями, отриманими за допомогою методів зведення до інтегрального рівняння, простої ітерації, послідовних наближень і квазілінеаризації, до 2-4 знаків після коми.

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ НА КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТРИСКЛАДОВИХ БЕЗМЕЖНИХ ТІЛ

У цьому розділі запропоновану методику визначення квазістатичного термопружного стану з урахуванням температурної залежності ФМХ апробовано на задачах термопружності для трискладового безмежного стержня за довільних початкового розподілу температури та дії джерел тепла. Для знаходження невідомих змінних Кірхгофа за припущення, що коефіцієнти температуропровідності в межах кожної складової можна прийняти сталими, використано спосіб, запропонований у п.2.7.

Дослідження проведено для випадків, коли термопружний стан зумовлений нерівномірним початковим нагрівом складових або дією зосередженого на одній з поверхонь поділу чи розподіленого по об'єму проміжкового шару джерела тепла імпульсного характеру зміни інтенсивності. За знайденими співвідношеннями для визначення температурного поля отримано розв'язки задач теплопровідності для двоскладових безмежних тіл з джерелом тепла на поверхні поділу.

Основні результати розділу опубліковано у працях [107, 116, 121, 122, 123].

3.1. Задачі термопружності для безмежного трискладового термочутливого стержня

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z необмежений трискладовий стержень

(рис.2.2), який перебуває під дією джерел тепла. На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є теплоізолюваною та гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). В початковий момент часу у кожній складовій задано розподіл температури. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення з урахуванням залежності ФМХ від температури.

Розв'язання задачі теплопровідності та термопружності. Враховуючи зв'язок (2.30) між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} , інтегральне подання (2.47) для кожної складової набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \theta_i(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} K_{i1}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \int_0^h \int_0^{\tau} K_{i2}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \\ & - \int_h^{\infty} \int_0^{\tau} K_{i3}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \left. \frac{\partial G_{i,j+1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' + f_i(z, \tau), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де

$$\begin{aligned} K_{ij}(z, \zeta, \tau, \tau') = & c_{0,j} G_{ij}(z, \zeta, \tau - \tau') \left[\frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} - 1 \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau'}, \\ f_i(z, \tau) = & f_i^T(z, \tau) + f_i^W(z, \tau), \\ f_i^T = & \int_{-\infty}^0 c_{0,1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) \theta_{01}(\zeta) d\zeta + \int_0^h c_{0,2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) \theta_{02}(\zeta) d\zeta + \\ & + \int_h^{\infty} c_{0,3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) \theta_{03}(\zeta) d\zeta, \\ f_i^W(z, \tau) = & \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,1}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \int_0^h \int_0^{\tau} G_{i2}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,2}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \\ & + \int_h^{\infty} \int_0^{\tau} G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,3}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta. \end{aligned}$$

Надалі обмежимося випадком, коли коефіцієнти температуропровідності в межах кожної складової можна прийняти сталими (т.зв. «проста нелінійність»), що має місце для ряду матеріалів [52], тобто, $b(\theta) = 0$. З урахуванням цього обмеження, невідомими у співвідношеннях (3.1) є $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$ ($j=1,2$), які входять у відповідні підінтегральні функції. Згідно з викладеним у п.2.7 способом їх визначення, апроксимуємо кожен з функцій $F_{j+1}(\tau)$ лінійним сплайном вигляду (2.95).

Підставивши у (3.1) вирази для елементів матриці Гріна G_{ij} (2.31) та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (2.95), отримаємо співвідношення для змінних Кірхгофа, які у безрозмірних змінних запишуться так:

$$\theta_i(\bar{z}, Fo) = f_i(\bar{z}, Fo) + \eta_{i,1} \gamma_{i,1}(\bar{z}, Fo) + \eta_{i,2} \gamma_{i,2}(\bar{z}, Fo), \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}(\bar{z}, Fo) &= s_{11}^{(0)} \psi_1^{i,j}(\bar{z}, Fo) + s_{11}^{(1)} \psi_2^{i,j}(\bar{z}, Fo) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[\left(s_{1,k+1}^{(0)} - s_{1,k}^{(0)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \psi_3^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) + \left(s_{1,k+1}^{(1)} - s_{1,k}^{(1)} \right) \psi_4^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) \right], \\ \eta_{1,1} &= \frac{\lambda_{0,2} a_{02}^*}{2(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} a_{12}^*)}, \quad \eta_{1,2} = -\frac{\lambda_{0,2} \lambda_{0,3} a_{03}^*}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} a_{12}^*)(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*)}, \\ \eta_{2,1} &= \frac{a_{02}^*}{4}, \quad \eta_{2,2} = \frac{\lambda_{0,3} a_{03}^*}{\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*}, \quad \eta_{3,1} = \frac{\lambda_{0,2} a_{02}^*}{2(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*)}, \quad \eta_{3,2} = \frac{a_{03}^*}{4}, \\ \psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) &= l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) \text{ при } \rho = 1, 2; \\ \psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) &= l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) \text{ при } \rho = 3, 4; \\ l_\rho^{1,1}(\bar{z}, \xi) &= \varphi_{\rho,1}^0(\bar{z}, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^* 2n\bar{h} - \bar{z}, \xi) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \\ &\quad \times \varphi_{\rho,1}^1(2a_{12}^* (1+n)\bar{h} - \bar{z}, \xi), \end{aligned}$$

$$l_{\rho}^{1,2}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} - \bar{z}, \xi),$$

$$l_{\rho}^{2,1}(\bar{z}, \xi) = (\nu_1 + 1) \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z}, \xi) - \nu_2 \varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z}, \xi) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) - \\ - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \left(\varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2(1+n)\bar{h}, \xi) - \right. \\ \left. - \varphi_{\rho,2}^1(2(1+n)\bar{h} - \bar{z}, \xi) \right),$$

$$l_{\rho}^{2,2}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} - \bar{h}, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi) + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \\ \times \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h} + \bar{z} + \bar{h}, \xi),$$

$$l_{\rho}^{3,1}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + \bar{h}, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h} + \bar{h}, \xi) + \\ + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h}, \xi),$$

$$l_{\rho}^{3,2}(\bar{z}, \xi) = (1 - \nu_2) \varphi_{\rho,3}^1(\bar{z} - \bar{h}, \xi) - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z} - \bar{h}, \xi) + \\ + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2(1+n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z} - \bar{h}, \xi),$$

$$\varphi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = 2(S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} a_{i0}^* \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right), \quad \text{при } \rho = 1, 3$$

$$\varphi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) = -2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo}} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} \text{Fo}} \right) + \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo}}} \right) \right) \times \\ \times (\zeta^2 a_{0i}^* + 2a_{i0}^* \text{Fo}),$$

$$\varphi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k) = S(\text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k) \left(-2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} (\text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k)} \right) + \right.$$

$$+ \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{(\operatorname{Fo} - \operatorname{Fo}_k)}} \right) \right) (\zeta^2 a_{0i}^* + 2a_{i0}^* \operatorname{Fo}),$$

де $\operatorname{Fo}_k = \frac{a_0 \tau_k}{l_0^2}$, а решта позначень збігаються з наведеними вище. Функції $f_i(\bar{z}, \operatorname{Fo})$ визначаються залежно від способу теплової дії.

Поклавши у співвідношеннях (3.2) в $\theta_i(\bar{z}, \operatorname{Fo})$ відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$ ($j = 1, 2$), для кожного $\operatorname{Fo} = \operatorname{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$) отримаємо систему двох нелінійних алгебричних рівнянь відносно $\theta_2(\bar{z}_1, \operatorname{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_2, \operatorname{Fo}_k)$, де у правих частинах входять відповідно $\theta_2(\bar{z}_1, \operatorname{Fo}_{k-1})$ та $\theta_3(\bar{z}_2, \operatorname{Fo}_{k-1})$. Розв'язавши цю систему рекурентного типу, знайдемо шукані значення змінної Кірхгофа у вузлах сітки, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \operatorname{Fo})$ визначимо зі співвідношення (2.49).

За такого температурного поля у тілі виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження (2.56). При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як твердого цілого) визначають із співвідношення (2.58).

Розглянемо три способи теплової дії.

3.1.1. Нерівномірний початковий нагрів складових

Розглянемо випадок, коли термopужний стан розглянутого тіла зумовлений нерівномірним початковим нагрівом складових. Нехай початкова температура першої та третьої складової змінюється експоненціально, а у проміжковому шарі – стала, тобто:

$$t_{01}(z) = T_{01} e^{k_1 z}, \quad t_{02}(z) = T_{02}, \quad t_{03}(z) = T_{03} e^{-k_3(z-h)}, \quad (3.3)$$

де T_{0i} , k_i – константи.

У цьому випадку f_i^W у (3.1) дорівнюють нулю. Підставивши (3.3) у (3.1) та знайшовши відповідні інтеграли, функції $f_i^T(\bar{z}, Fo)$ подамо так:

$$\begin{aligned}
f_i^T(\bar{z}, Fo) &= f_{i,1}^T(\bar{z}, Fo) + \frac{\beta_2 T_{02}}{2} f_{i,2}^T(\bar{z}, Fo), \tag{3.4} \\
f_{1,1}^T(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} \left[\phi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \phi_1(-\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_1(2a_{12}^* \bar{h}(n+1) - \bar{z}, Fo) \right] + \chi_2 T_{02} [\eta_1(\bar{z}, Fo) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_1(a_{12}^* \bar{h}(2n+1) - \bar{z}, Fo) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_1(2a_{12}^* \bar{h}(1+n) - \bar{z}, Fo)] + \\
&\quad + 2\chi_2 \chi_3 T_{03} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_3(-a_{31}^* \bar{z} + a_{32}^* \bar{h}(2n+1), Fo), \\
f_{2,1}^T(\bar{z}, Fo) &= \chi_1 T_{01} \left[\phi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_1(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_1(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right] + \frac{T_{02}}{2} [\eta_2(\bar{z}, Fo) - \\
&\quad - \nu_1 \eta_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \nu_2 \eta_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_2(\bar{h}(1+2n) + \bar{z}, Fo) - \\
&\quad - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_2(2\bar{h}(1+n) - \bar{z}, Fo) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \\
&\quad \times (\eta_2(2\bar{h}(1+n) + \bar{z}, Fo) + \eta_2(\bar{h}(3+2n) - \bar{z}, Fo))] + \\
&\quad + \chi_3 T_{03} \left[\phi_3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\
&\quad \left. - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_3(a_{32}^* (\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right], \\
f_{3,1}^T(\bar{z}, Fo) &= 2\chi_1 \chi_4 T_{01} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_1(a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\chi_4 T_{02} \left[\eta_3(\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_3(\bar{z} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \right. \\
& - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \eta_3(\bar{z} + a_{32}^* (\bar{h} + 2n \bar{h}), Fo) \left. \right] + \frac{T_{03}}{2} [\phi_3(\bar{h} - \bar{z}, Fo) + \nu_2 \phi_3(\bar{z} - \bar{h}, Fo) + \\
& + \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* n \bar{h}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \\
& \times \phi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h} (1 + 2n), Fo) \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\phi_i(x, Fo) = \exp[\bar{k}_i(x + a_{i0} \bar{k}_i Fo)] \operatorname{erfc}\left(\frac{x + 2a_{i0} \bar{k}_i Fo}{2\sqrt{a_{i0} Fo}}\right) \quad (i = 1, 3),$$

$$\eta_i^*(x, Fo) = \gamma_i \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x + \gamma_i a_{i2}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{i0} Fo}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{i0} Fo}}\right) \right],$$

$$\eta_i(x, Fo) = \eta_i^*(x, Fo), \quad \gamma_1 = \gamma_2 = -1;$$

$$\phi_3(x, Fo) = \phi_3^*(x - \bar{h}, Fo), \quad \gamma_3 = 1;$$

де $f_{i,1}^T(\bar{z}, Fo) = f_{i,2}^T(\bar{z}, Fo)$ при $\phi_i(x, Fo) = \exp[2\bar{k}_i(x + 2a_{i0} \bar{k}_i Fo)] \times$
 $\times \operatorname{erfc}\left(\frac{x + 4a_{i0} \bar{k}_i Fo}{2\sqrt{a_{i0} Fo}}\right)$, $\bar{k}_i = k_i l_0$, $\chi_1 = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} a_{12}^*}$, $\chi_2 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}}$,
 $\chi_3 = \frac{\lambda_t^{(3)}}{\lambda_t^{(2)} a_{32}^* + \lambda_t^{(3)}}$, $\chi_4 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} a_{23}^*}$.

Числові дослідження. На основі отриманих співвідношень досліджували поведінку температурного поля, напружень та переміщень, коли ФМХ першої та третьої складової відповідали ніобію, а проміжкового шару – платині (2.97) при $K_\tau = 5$, $k_1 = k_3 = 1 \text{ м}^{-1}$, $T_{01} = 600 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{02} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{03} = 600 \text{ }^\circ\text{C}$, $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Результати досліджень у вигляді графіків представлені на рис.3.1-3.2: суцільні лінії відповідають залежним від температури, а пунктирні та штрих-пунктирні – сталим ФМХ, взятим при $500 \text{ }^\circ\text{C}$ та $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ відповідно.

На рис.3.1 зображено залежності температури від часу на поверхнях поділу, а на рис.3.2 – від координати за фіксованих часів. Бачимо, що за сталих характеристик температура є нижчою, ніж за температурнозалежних. Вплив термочутливості найбільш помітний для часів, близьких до початкових, в проміжковому шарі та приповерхневих областях півбезмежних складових, а з часом він стає неістотним. Різниця між температурами за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при 500°C є меншою, ніж при 1000°C і може досягати 25°C та 30°C відповідно.

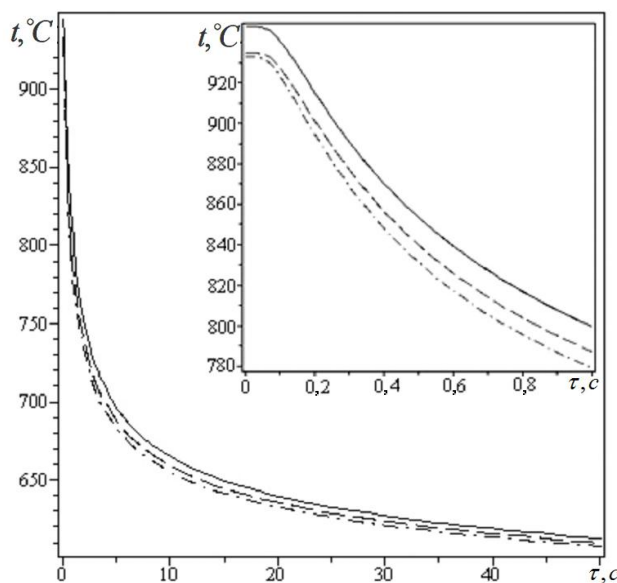


Рис.3.1

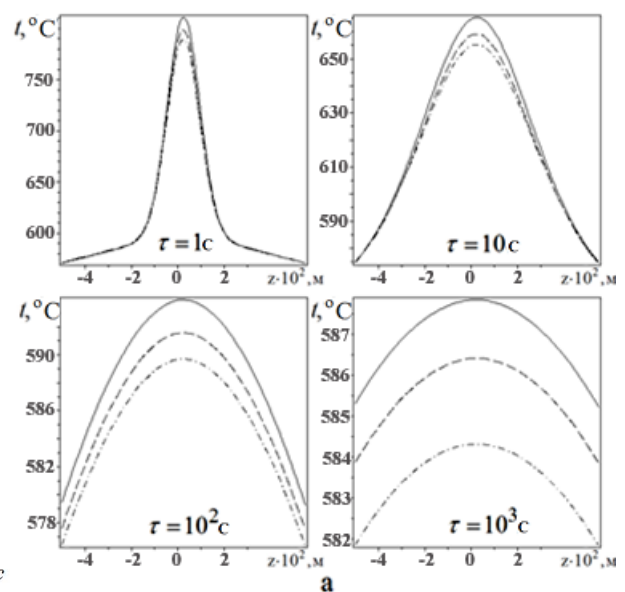


Рис.3.2

Залежності від часу напружень та їх стрибків $\sigma_i(\tau) = |\sigma_{0,i}(z_i, \tau) - \sigma_{0,i+1}(z_i, \tau)|$ на поверхнях поділу зображено відповідно на рис.3.3 та на рис.3.4. Як видно, абсолютні значення напружень у проміжковому шарі є значно більшими, ніж у контактуючих складових. Нехтування термочутливістю, на відміну від температури, призводить до завищення абсолютних значень напружень, що може становити 9%, а для стрибків – до 10%. Різниця між розподілами напружень з та без урахування термочутливості для сталих характеристик, взятих при 500°C в півбезмежних складових є меншою, ніж для взятих при 1000°C , але більшою в проміжковому шарі.

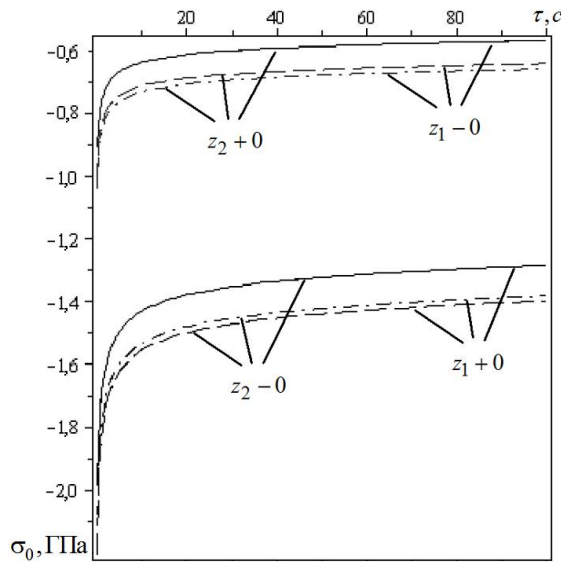


Рис.3.3

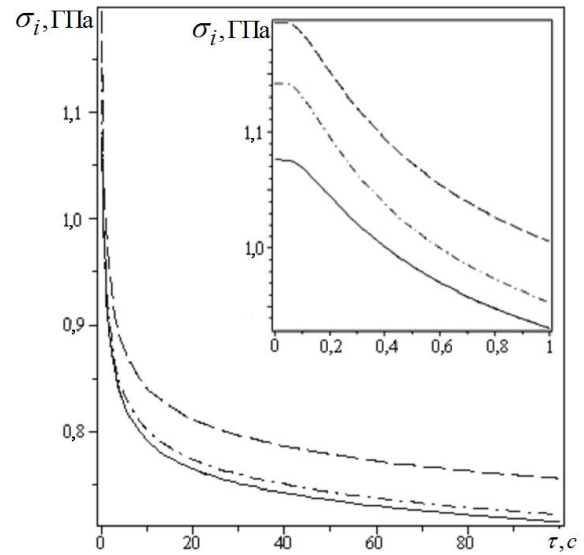


Рис.3.4

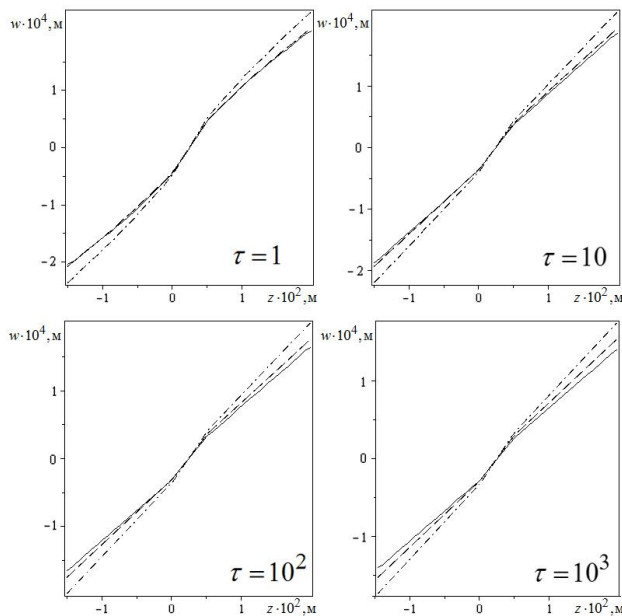


Рис.3.5

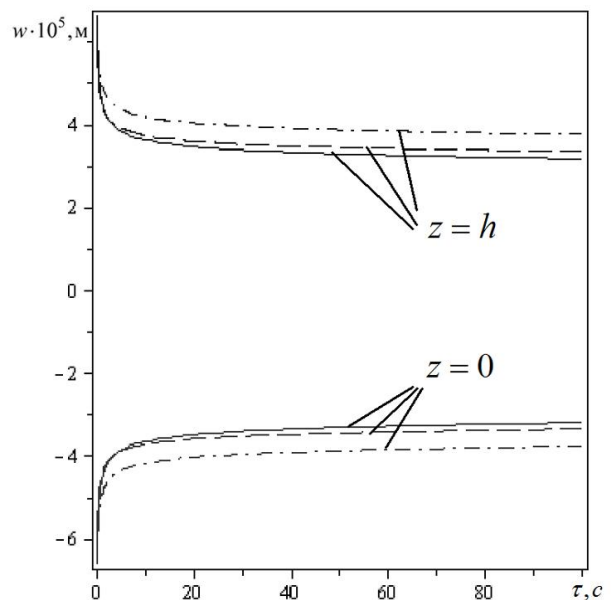


Рис.3.6

З аналізу рис.3.5 та рис.3.6, де наведено залежності переміщень від координати для різних моментів часу та від часу на поверхнях поділу відповідно, впливає, що нехтування термочутливістю призводить до завищення значень переміщень до 15%. Їхній розподіл, як і слід було очікувати, є асиметричним відносно середини проміжкового шару. Різниця між переміщеннями за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при 500°C є меншою, ніж при 1000°C .

3.1.2. Нагрів поверхневими імпульсними джерелами тепла

Припустимо, що початкові температури складових дорівнюють нулю, а на поверхні поділу $z=0$ зосереджене джерело тепла $w_{i,1}(z, \tau)$ імпульсного характеру зміни інтенсивності:

$$w_{i,1}(z, \tau) = q_0 \sum_{p=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_p) - S(\tau - b_p - \tau_1^*) \right] \delta(z), \quad (3.5)$$

де q_0 – потужність джерела тепла, $b_p = p(\tau_1^* + \tau_2^*)$, τ_1^* – тривалість імпульсу, τ_2^* – тривалість паузи, m – кількість імпульсів, $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака.

У цьому випадку $f_i^T(\bar{z}, Fo)$ у (3.1) дорівнюють нулю. Підставивши (3.5) у (3.1) та знайшовши відповідні інтеграли, запишемо функції $f_i^W(\bar{z}, Fo)$ у вигляді:

$$f_1^W(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_0}{2\delta_1} \left\{ \phi^+(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \phi^+(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo) \right\},$$

$$f_2^W(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ \phi^-(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right\},$$

$$f_3^W(\bar{z}, Fo) = \frac{2\delta_2 \bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi^-(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo),$$

$$\begin{aligned} \phi^\pm(\zeta, Fo) = & \sum_{p=0}^{m-1} \left\{ S(Fo - \bar{b}_i) \left[\pm \zeta a_{01}^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo - \bar{b}_i} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a_{10}^* (Fo - \bar{b}_i)}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \zeta \sqrt{a_{s1}} \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_i}}\right) \right] - S(Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*) \left[\pm \zeta a_{01}^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a_{10}^{*2}(\text{Fo} - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*)}\right) + \zeta a_{01}^* \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{10}^* \sqrt{\text{Fo} - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*}}\right)\}. \quad (3.6)$$

де $\bar{q}_0 = \frac{q_0 l_0}{a_0}$, $\bar{b}_i = \frac{b_i a_0}{l_0^2}$, $\bar{\tau}_i^* = \frac{\tau_i^* a_0}{l_0^2}$. Решта позначень збігаються з наведеними у (3.2).

Часткові випадки. Як частковий випадок, при $\bar{h} = 0$, $a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$ отримаємо співвідношення (3.2) і (3.6) для двоскладового простору ($i = 1, 2$), на поверхні поділу якого діє джерело тепла (3.5)

$$\begin{aligned} \theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) &= f_i(\bar{z}, \text{Fo}) + 2(\nu_1 + 1)^{i-1} \eta_{i,1} \left\{ s_{11}^{(0)} \varphi_{1,i}^{i-1}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_{11}^{(1)} \varphi_{2,i}^{i-1}(\bar{z}, \text{Fo}) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[(s_{1,k+1}^{(0)} - s_{1,k}^{(0)}) \varphi_{3,i}^{i-1}(\bar{z}, \text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k) + (s_{1,k+1}^{(1)} - s_{1,k}^{(1)}) \varphi_{4,i}^{i-1}(\bar{z}, \text{Fo} - \bar{\text{Fo}}_k) \right] \right\}, \\ f_1(\bar{z}, \text{Fo}) &= \frac{\bar{q}_0 (1 + \nu_1)}{2\delta_1} \phi^+(\bar{z}, \text{Fo}), \quad f_2(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{\bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \phi^-(a_{12}^* \bar{z}, \text{Fo}), \end{aligned}$$

які співпадають з [114] при $m = 1$.

Розглянемо задачу теплопровідності для двоскладового безмежного тіла, яке початково нагріте до температури T_0 , а на межі поділу діє джерело тепла $w_t(0, \tau) = q_0 = \text{const}$. Приймаючи характеристики в межах кожної складової сталими та $\bar{h} = 0$, $a_2 = a_3$, $c_{V2} = c_{V3}$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$ у (3.1), (3.4) та (3.6) при $m = 1$, $\tau_1 > \tau$, отримаємо розв'язок, який подамо так:

$$\begin{aligned} \frac{t_1(\bar{z}, \text{Fo}) - T_0}{T_0} &= \frac{2q_0 (1 + \nu_1)}{\delta_1} \operatorname{ierfc}\left(\frac{-\bar{z}}{2\sqrt{a_{1s} \text{Fo}}}\right), \\ \frac{t_2(\bar{z}, \text{Fo}) - T_0}{T_0} &= \frac{2q_0 (1 + \nu_1)}{\delta_1} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\bar{z}}{2\sqrt{a_{2s} \text{Fo}}}\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де $\operatorname{ierfc}(z) = -zi^0 \operatorname{erfc}(z) + \frac{1}{2} i^{-1} \operatorname{erfc}(z) = -z \operatorname{erfc}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$.

Розв'язок (3.7) співпадав би з результатом, отриманим у [84], якби у правій частині першого рівняння (3.7) замість δ_1 стояло $\frac{1}{\delta_1}$. Прирівнявши у (3.7) два вирази при $z=0$, то отримаємо рівність температури на межі поділу, тобто умови ідеального теплового контакту виконуються, на відміну від [84].

Числові дослідження. Результати числових досліджень для комбінації матеріалів (2.97) представлені у вигляді графіків на рис.3.7-3.10 при $q_0 = 12 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$, $m = 2$, $\tau_1^* = 2 \text{ сек}$, $\tau_2^* = 3 \text{ сек}$, $h = 10^{-3} \text{ м}$. Суцільні лінії відповідають залежним від температури, а пунктирні – сталим ФМХ, взятим при 0° С .

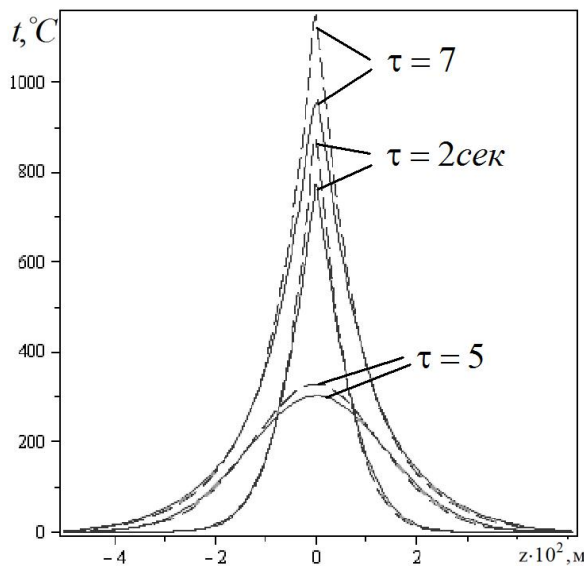


Рис.3.7.

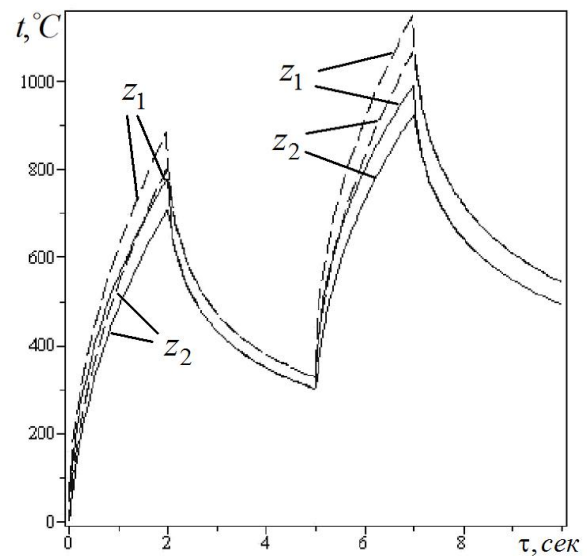


Рис.3.8.

На рис. 3.7,3.8 зображено залежності температури від часу на поверхнях поділу і залежності від координати в кінці дії імпульсів та в момент початку дії другого відповідно. Як видно, чим вища температура, тим більший вплив термочутливості. Якщо в кінці дії першого імпульсу температура за урахування температурної залежності характеристик приблизно на 100° С , то в кінці другого на 150° С нижча, ніж за сталих. При $|z| > 0.04 \text{ м}$ температура у півбезмежних складових близька до нуля.

На рис.3.9 зображено залежність напружень від часу на поверхнях поділу. Бачимо, що у тілі виникають стискаючі стрибкоподібні напруження. Вплив термочутливості для кожної складової проявляється по-різному. Він найбільш помітний в області, що прилягає до поверхні дії джерела тепла. Максимум абсолютних значень напружень, який досягається в кінці другого імпульсу, в проміжковому шарі за температурнозалежних характеристик на 20% менший, ніж за сталих, а у першій складовій – на 4%.

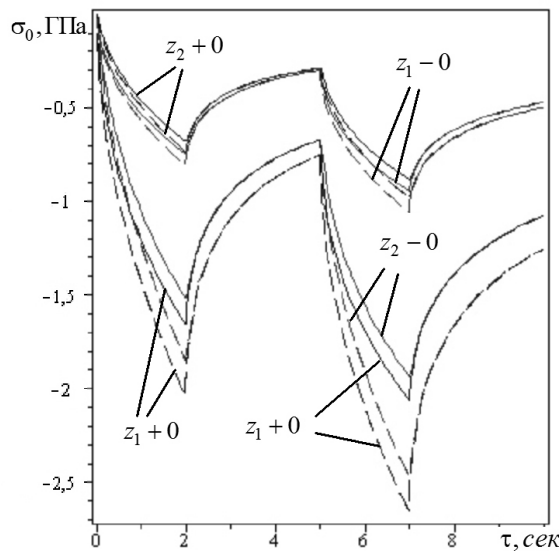


Рис.3.9.

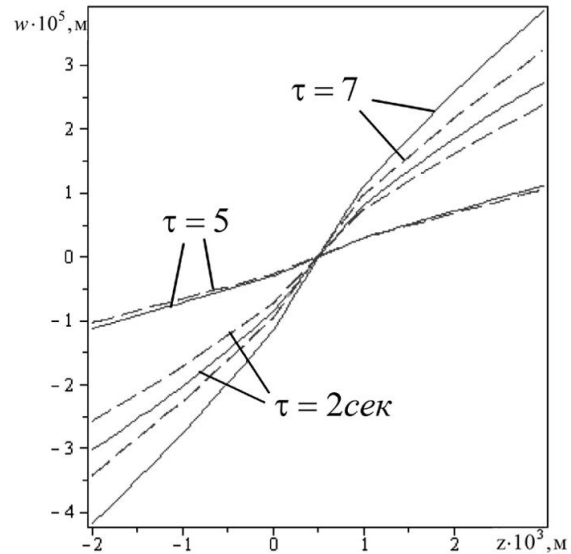


Рис.3.10.

Залежності переміщень від координати вкінці дії імпульсів та в момент початку другого зображено на рис.3.10. На відміну від температури та напружень абсолютні значення переміщень за температурнозалежних характеристик є більшими, ніж за сталих, а при $|z| > 0.04 \text{ м}$, як і слід було очікувати, співпадатимуть. Розподіл переміщень є асиметричним відносно середини проміжкового шару.

Слід зазначити, що характер розподілів температури та напружень по товщині проміжкового шару для кожного моменту часу може бути різний, а для переміщень спостерігався лише лінійний.

3.1.3. Нагрів об'ємним імпульсним джерелом тепла

Нехай початкові температури складових дорівнюють нулю, а джерело тепла $w_t(z, \tau)$ розподілене по об'ємі проміжкового шару і має імпульсний характер зміни інтенсивності:

$$w_{t,2}(z, \tau) = q_0 \sum_{p=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_p) - S(\tau - b_p - \tau_1^*) \right], \quad (3.8)$$

де q_0 – потужність джерела тепла, $b_p = p(\tau_1^* + \tau_2^*)$, τ_1^* – тривалість імпульсу, τ_2^* – тривалість паузи, m – кількість імпульсів.

У цьому випадку $f_i^T(\bar{z}, Fo)$ у (3.1) дорівнюють нулю. Підставивши (3.8) у (3.1) та знайшовши відповідні інтеграли, запишемо функції $f_i^W(\bar{z}, Fo)$ так:

$$\begin{aligned} f_1^W(\bar{z}, Fo) &= \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\phi_{1,p}^+ (a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, -\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\ &\quad \times \phi_{1,p}^+ (a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, 2n\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}, Fo) + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ &\quad \left. \times \phi_{1,p}^+ (a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, a_{12}^* (2\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, Fo) \right], \\ f_2^W(\bar{z}, Fo) &= \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{2\delta_2} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\bar{\phi}_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \bar{\phi}_{2,p}^- (-\bar{z}, Fo) - v_1 \phi_{2,p}^+ (\bar{h} + \bar{z}, \bar{z}, Fo) + \right. \\ &\quad + v_2 \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z}, 2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi_{2,p}^+ (\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \\ &\quad + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, 2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ &\quad \times \left(-\phi_{2,p}^+ (\bar{z} + (1+2n)\bar{h}, \bar{z} + 2(1+n)\bar{h}, Fo) + \right. \\ &\quad \left. + \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z} + (1+2n)\bar{h}, -\bar{z} + (1+2n)\bar{h}, Fo) \right), \end{aligned}$$

$$f_3^W(\bar{z}, Fo) = \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{2(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{p=0}^{m-1} \left[-\phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}), a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + \bar{h}, Fo \right) - \phi_{2,p}^- (-\bar{z}, Fo) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h}, a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h} + \bar{h}, Fo \right) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ \left. \times \phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + (2+2n)\bar{h}, a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h}, Fo \right) \right. \\ \left. \phi_{i,p}^{\pm}(x, y, Fo) = \bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(x, Fo) - \bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(y, Fo), \right.$$

$$\bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(x, Fo) = S(Fo - \bar{b}_p) \left(\pm \frac{x^2}{2a_{i0}} - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_p}} \right) \left(Fo - \bar{b}_p + \frac{x^2}{2a_{i0}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{x}{2a_{i0}} \sqrt{Fo - \bar{b}_p} \exp \left(-\frac{x^2}{4a_{i0}^{*2} (Fo - \bar{b}_i)} \right) \right) - S(Fo - \bar{b}_p - \bar{\tau}_1^*) \left(\pm \frac{x^2}{2a_{i0}} - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_p - \bar{\tau}_1^*}} \right) \left(Fo - \bar{b}_p - \bar{\tau}_1^* + \frac{x^2}{2a_{i0}} \right) - \frac{x}{2a_{i0}} \sqrt{Fo - \bar{b}_p - \bar{\tau}_1^*} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{x^2}{4a_{i0}^{*2} (Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*)} \right) \right).$$

Числові дослідження. Результати досліджень проведено для матеріалів, розглянутих у п.3.1.1 при $q_0 = 48 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$, $m = 2$, $\tau_1^* = 40 \text{ сек}$, $\tau_2^* = 10 \text{ сек}$ і представлено у вигляді графіків на рис.3.11 ($h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ та $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$) та рис.3.12-3.15 ($h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$): суцільні лінії відповідають залежним від температури, а пунктирні – сталим ФМХ, взятим при 0° С .

Залежність температури від часу на поверхнях поділу та від координати для різних моментів часу зображено відповідно на рис.3.11,3.12. Бачимо, що при більшому h нехтування температурною залежністю характеристик призводить до суттєвішого завищення температури. Найбільш помітний вплив термочутливості на серединній поверхні проміжкового шару, де в кінці дії першого імпульсу температура за урахування температурної залежності

характеристик приблизно на 6%, а в кінці другого на 12% нижча, ніж за сталих. Розподіл температури, як і слід було очікувати, є симетричним відносно серединної поверхні проміжкового шару.

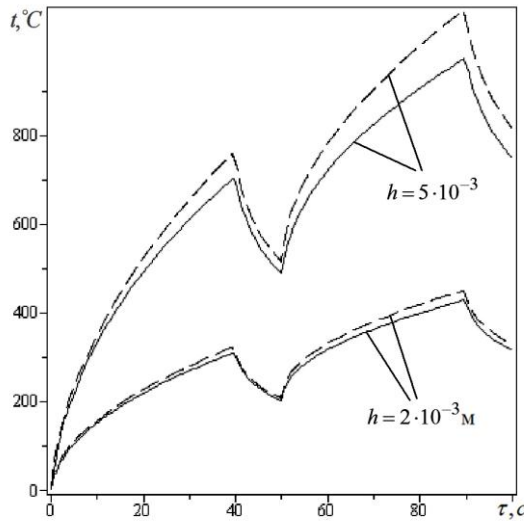


Рис.3.11.

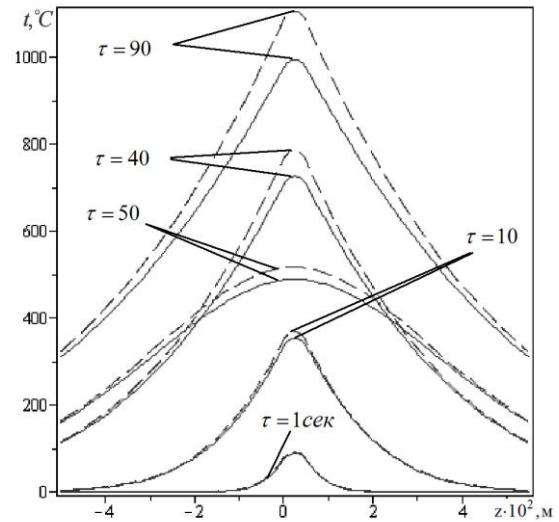


Рис.3.12.

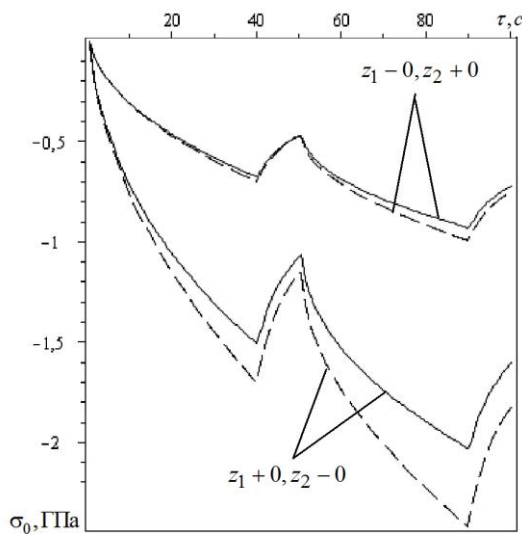


Рис.3.13.

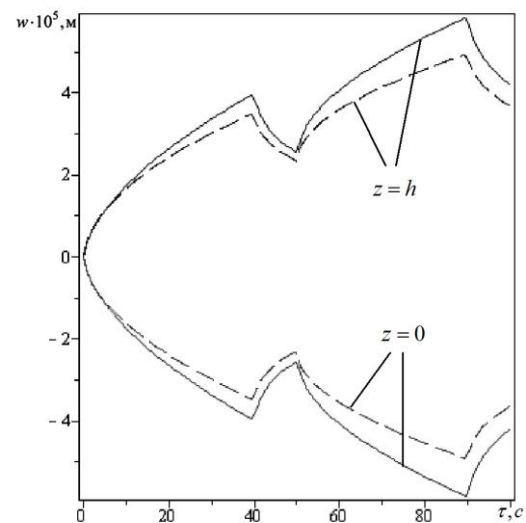


Рис.3.14.

На рис.3.13 зображено залежності напружень від часу на поверхнях поділу. Бачимо, що напруження у тілі мають стрибкоподібний характер. Нехтування термочутливістю, аналогічно як у випадку температури, призводить до завищення абсолютних значень напружень. Її вплив для кожної складової проявляється по-різному: якщо для першої та третьої складової різниця між відповідними значеннями напружень з та без урахуванням температурної

залежності характеристик не перевищує 5%, то для проміжкового шару близько 20%.

Залежності переміщень від часу на поверхнях поділу та від координати для різних часів зображені відповідно на рис.3.14, 3.15. На відміну від температури та напружень, абсолютні значення переміщень за температурнозалежних характеристик є більшими, ніж за сталих. Найбільш помітний вплив термочутливості в кінці першого та другого імпульсів у півбезмежних складових: різниця між абсолютними значеннями переміщень з та без урахування температурної залежності характеристик досягає 10% та 22% відповідно. Зазначимо, що зі збільшенням $|z|$ переміщення за сталих та залежних від температури характеристик співпадатимуть. Розподіл переміщень є асиметричним відносно серединної поверхні проміжкового шару.

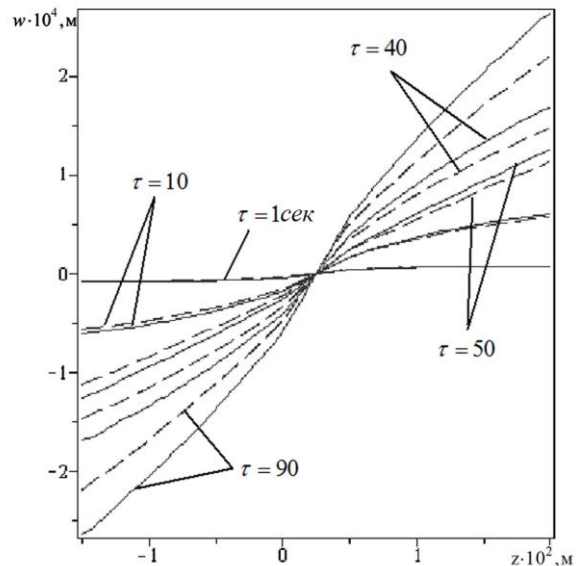


Рис. 3.15.

3.2. Висновки по розділу

У цьому розділі розглянуто задачі термопружності для трискладового безмежного термочутливого стержня за різної теплової дії. Знаходження залежних від часу невідомих змінних Кірхгофа на поверхнях поділу зведено до розв'язання рекурентної системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, після розв'язання якої за оберненим перетворенням Кірхгофа отримано співвідношення для визначення температури. Проведено порівняння часткових випадків з відомими в літературі. Зокрема, розв'язки збігались для випадку

термочутливого двоскладового безмежного тіла, на поверхні поділу якого зосереджене імпульсне джерело тепла.

На основі числових досліджень встановлено:

- за сталих характеристик температура може бути як нижчою, так і вищою, ніж за температурнозалежних. При остиганні вплив термочутливості найбільш помітний в проміжковому шарі та приповерхневих областях півбезмежних складових для часів, близьких до початкових. Різниця між температурами за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при 500°C є меншою, ніж для взятих при 1000°C і досягає 25 та 30°C відповідно. За дії імпульсного джерела тепла, зосередженого на поверхні поділу, найбільш помітний вплив термочутливості в області цієї поверхні, а за джерела тепла, розподіленого по об'єму проміжкового шару – на серединній поверхні проміжкового шару, де температура за урахування температурної залежності характеристик на 12% нижча, ніж за сталих, взятих при 0°C ;

- на відміну від температури, нехтування термочутливістю зумовлює завищення абсолютних значень напружень незалежно від температур, за яких взяті сталі ФМХ. При остиганні завищення досягало 9% , а за дії імпульсних джерел тепла – до 20% . Різниця між розподілами напружень з температурнозалежними та сталими характеристиками, взятими при 500°C в півбезмежних складових є меншою, ніж для взятих при 1000°C , а в проміжковому шарі – більшою;

- аналогічно, як і у випадку температури, нехтування термочутливістю може зумовлювати як завищення, так і зниження абсолютних значень переміщень. При остиганні за температурнозалежних ФМХ переміщення є нижчими, ніж за сталих ФМХ і різниця між відповідними значеннями за сталих характеристик, взятих при 500°C є меншою, ніж при 1000°C та досягає 15% .

За дії імпульсних джерел тепла абсолютні значення переміщень за температурнозалежних характеристик є більшими, ніж за сталих, взятих при 0°C , що може досягати 22%.

РОЗДІЛ 4

КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИСКЛАДОВИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ

У цьому розділі з використанням запропонованої методики розв'язано ряд квазістатичних задач термопружності для трискладових півбезмежного стержня та шару з урахуванням залежності ФМХ від температури та конвективно-променевого теплообміну. На відміну від розглянутих вище відповідних задач для безмежного термочутливого стержня, в отриманих інтегральних поданнях в підінтегральні функції, крім невідомих залежних від часу змінних Кірхгофа на поверхнях поділу, входять ще й її значення на обмежуючих поверхнях. Знаходження цих невідомих зведено до розв'язання рекурентної системи трьох або чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь.

Проведено ряд числових досліджень впливу термочутливості, параметрів теплообміну та товщин складових на відповідні розподіли. Порівняно часткові випадки знайдених розв'язків з відомими в літературі.

Основні результати розділу опубліковано у працях [36, 108, 112, 113, 128, 129, 130].

4.1. Термопружний стан півбезмежного трискладового стержня

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z півбезмежний трискладовий стержень (рис.4.1), який перебуває під дією джерел тепла. На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$

та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є теплоізолюваною та гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). Через обмежуючу поверхню $z = z_3$, на якій відсутні нормальні та дотичні напруження, відбувається конвективно-променевиий теплообмін з довкіллям температури $t_{c,3}$. В початковий момент часу у кожній складовій задано розподіл температури. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення з урахуванням залежності ФМХ від температури.

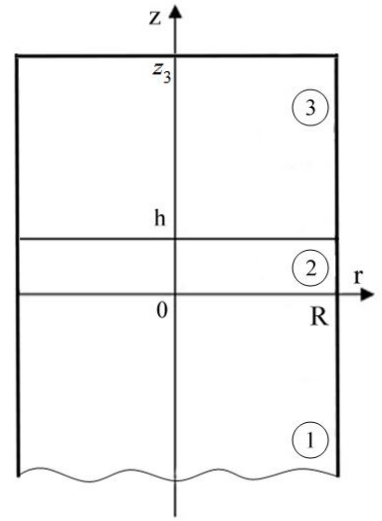


Рис. 4.1.

Розв'язання задачі теплопровідності та термопружності. Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності (2.16), умови контакту (2.17) граничні (2.18), (2.21) та початкові умови (2.20).

Враховуючи зв'язок (2.30) між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} , інтегральне подання (2.46) для кожної складової у цьому випадку набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \theta_i(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\tau} K_{i1}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \int_0^h \int_0^{\tau} K_{i2}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \\ & - \int_h^{z_3} \int_0^{\tau} K_{i3}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \left. \frac{\partial G_{i,j+1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ & - \int_0^{\tau} \left\{ G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau' + f_i(z, \tau), \quad (4.1) \end{aligned}$$

де

$$K_{ij}(z, \zeta, \tau, \tau') = c_{0,j} G_{ij}(z, \zeta, \tau - \tau') \left[\frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} - 1 \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau'},$$

$$\begin{aligned}
f_i(z, \tau) &= f_i^T(z, \tau) + f_i^W(z, \tau), \\
f_i^T &= \int_{-\infty}^0 c_{0,1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) \theta_{01}(\zeta) d\zeta + \int_0^h c_{0,2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) \theta_{02}(\zeta) d\zeta + \\
&\quad + \int_h^{z_3} c_{0,3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) \theta_{03}(\zeta) d\zeta, \\
f_i^W(z, \tau) &= \int_{-\infty}^0 \int_0^\tau G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{i,1}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \int_0^h \int_0^\tau G_{i2}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{i,2}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \\
&\quad + \int_h^{z_3} \int_0^\tau G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{i,3}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta.
\end{aligned}$$

Обмежимося випадком, коли коефіцієнти температуропровідності в межах кожної складової можна прийняти сталими (т.зв. «проста нелінійність»), що має місце для ряду матеріалів [52], тобто, $b(\theta) = 0$. З урахуванням цього обмеження, невідомими у співвідношеннях (4.1) є $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$ ($j=1,2$) та $\theta_3(z_3, \tau)$, які входять у відповідні підінтегральні функції. Згідно з викладеним у п.2.7 способом їх визначення, апроксимуємо кожну з функцій $F_{j+1}(\tau)$, $P_3(\tau)$ та $\bar{\theta}_3(\tau)$ лінійним сплайном вигляду (2.95).

Підставивши у (4.1) вирази для елементів матриці Гріна G_{ij} (2.31) та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (2.95), отримаємо співвідношення для змінних Кірхгофа, які у безрозмірних змінних запишуться так:

$$\begin{aligned}
\theta_i(\bar{z}, Fo) &= f_i(\bar{z}, Fo) + \eta_{i,1} \gamma_{i,1}(\bar{z}, Fo, F_2) + \eta_{i,2} \gamma_{i,2}(\bar{z}, Fo, F_3) - \\
&\quad - \eta_{i,3} \left[\gamma_{i,3}(\bar{z}, Fo, P_3) - \frac{a_{i3}^*}{2a_{i0}} \gamma_{i,4}(\bar{z}, Fo, \theta_3(\bar{z}_3, Fo)) \right], \quad (4.2)
\end{aligned}$$

де

$$\gamma_{i,j}(\bar{z}, Fo, \zeta) = s_1^{(0)}(\zeta) \psi_1^{i,j}(\bar{z}, Fo) + s_1^{(1)}(\zeta) \psi_2^{i,j}(\bar{z}, Fo) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[(s_{k+1}^{(0)}(\zeta) - s_k^{(0)}(\zeta)) \times \right.$$

$$\times \Psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) + \left(s_{k+1}^{(1)}(\zeta) - s_k^{(1)}(\zeta) \right) \Psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \Big]$$

$$P_3(\text{Fo}) = \sigma^* \left(R(\theta_3^*(\text{Fo})) - R(t_{c,3}) \right) + \text{Bi}(\theta_3^*(\text{Fo}) - t_{c,3}),$$

$$\eta_{1,3} = \frac{2\delta_2 \lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{2,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{3,3} = \frac{a_{30}^*}{2},$$

$$\Psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad (j=1,2), \quad \Psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}),$$

$$\Psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad \text{при } \rho=1,2;$$

$$\Psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad (j=1,2), \quad \Psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k),$$

$$\Psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad \text{при } \rho=3,4;$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 \left(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) - \bar{z}, \xi \right),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + \bar{h} - \bar{z}, \xi \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + 2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi \right) -$$

$$- v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 \left(a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h} + \bar{z}, \xi \right),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,3}^1 (\bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + (-1)^{\delta_{p2}} v_2 y_{\rho,3}^0 (2\bar{h} - \bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) +$$

$$+ v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 \left(2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi \right) -$$

$$- v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 \left(2(1+n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi \right),$$

$$\chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = (S(\xi))^{\delta_{p3}} \left(2 \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}\xi} \right] - \frac{\zeta}{\sqrt{a_i}} \left((-1)^{\rho'+1} - \text{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}\sqrt{\xi}} \right) \right) \right)$$

при $\rho=1,3$

$$\begin{aligned} \chi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) &= \frac{\sqrt{\text{Fo}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0} \text{Fo}}\right] \left(\frac{4}{3} \text{Fo}^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}}\right) - \\ &\frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}\right) \left((-1)^{\rho'+1} - \text{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo}}}\right)\right), \\ \chi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \text{Fo}_k) &= S(\text{Fo} - \text{Fo}_k) \left(\frac{\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)}\right] \times \right. \\ &\times \left(-\frac{2}{3}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}\right) - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}\right) \left((-1)^{\rho'+1} - \right. \\ &\left. \left. - \text{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

де $\text{Bi} = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{0,3}}$, $\sigma^* = \frac{\varepsilon \sigma l_0}{\lambda_{0,3}}$, $\bar{z}_i = \frac{z_i}{l_0}$; функціям $y_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi)$ відповідають функції $\chi(\zeta, \xi)$ або $\varphi(\zeta, \xi)$, якщо індекс “у” в $\mathfrak{Y}_{\rho,y}^{i,\rho}$ дорівнює відповідно φ або χ ; $\varphi(\zeta, \xi)$ і решта позначень збігаються з наведеними вище. Функції $f_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначаються залежно від способу теплової дії.

Поклавши у співвідношеннях (4.2) в $\theta_i(\bar{z}, \text{Fo})$ відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$ ($j = 1, 2$) та $\bar{z} = \bar{z}_3$, для кожного $\text{Fo} = \text{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$) отримаємо систему трьох нелінійних алгебричних рівнянь відносно $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_k)$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$, де у правих частинах входять відповідно $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_{k-1})$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_{k-1})$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_{k-1})$. Розв'язавши цю систему рекурентного типу, знайдемо шукані значення змінної Кірхгофа у вузлах сітки, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначимо зі співвідношення (2.49).

У тілі виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження (2.56). При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як абсолютно твердого цілого) визначаються із співвідношення

$$w(\bar{z}, Fo) = \int_{\bar{z}_3}^{\bar{z}} \frac{1 + \bar{v}(z, Fo)}{1 - \bar{v}(z, Fo)} \bar{\Phi}(\bar{z}, Fo) dz. \quad (4.3)$$

Числові дослідження. Числові дослідження проведено для випадку, коли ФМХ першої та третьої складової відповідали ніобію, а проміжкового шару – платині (2.97) при $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $z_3 = 10h$, $K_\tau = 10$. Розглянемо два варіанти теплової дії:

1. Початкові температури складових дорівнюють нулю, а джерела тепла відсутні.

З метою вибору кроку сітки сплайна було проведено порівняння розподілів температури у фіксованих точках для різних проміжків часу залежно від K_τ . Встановлено, що для часів $\tau \leq \tau^*$, де $\tau^* = 12 \cdot 10^3 \text{ сек}$ – час, близький до виходу на стаціонарний режим, достатньо обмежитись $K_\tau = 10$, оскільки збільшення K_τ (зменшення кроку сітки) практично не впливає на точність обчислень.

Результати досліджень у вигляді графіків представлені на рис.4.2-4.3 (суцільні лінії відповідають залежним від температури, пунктирні та штрих-пунктирні – сталим ФМХ, взятим при 700°C та 0°C відповідно). Кривим 1,2,3,4,5 відповідають різні параметри теплообміну: $1 - \alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ \text{C}}$, $\varepsilon = 0.3$; $2 - \alpha = 400$, $\varepsilon = 0$; $3 - \alpha = 200$, $\varepsilon = 0.3$; $4 - \alpha = 0$, $\varepsilon = 0.3$; $5 - \alpha = 200$, $\varepsilon = 0$.

На рис.4.2 зображено залежності температури від часу на обмежуючій поверхні $z = z_3$ (a) та координати при $\tau = 10^3 \text{ сек}$ (b) і $\tau = 10^4 \text{ сек}$ (c) при різних параметрах теплообміну та різних температурах довкілля: (a) – при $t_c = 1800^\circ \text{C}$ (I) та $t_c = 1100^\circ \text{C}$ (II); (b,c) – при $t_c = 1800^\circ \text{C}$. Бачимо, що за конвективно-променевого теплообміну вплив тепловіддачі є меншим, ніж лише за конвективного, що більш помітно при вищій температурі довкілля. Так, збільшення коефіцієнта тепловіддачі за конвективно-променевого теплообміну зумовлює підвищення температури при $t_c = 1100^\circ \text{C}$ і $t_c = 1800^\circ \text{C}$ відповідно до

12 і 8%, а за конвективного (відсутнє випромінювання) – до 17 і 20%. Неврахування променевого теплообміну призводить до зниження температури при $t_c = 1800^\circ\text{C}$ до 25, а при $t_c = 1100^\circ\text{C}$ – до 15%. Різниця між температурами, підрахованими з та без урахування конвективного теплообміну зменшується при збільшенні температури довкілля, зокрема, при $t_c = 1100^\circ\text{C}$ вона може досягати 55, а при $t_c = 1800^\circ\text{C}$ – 20%.

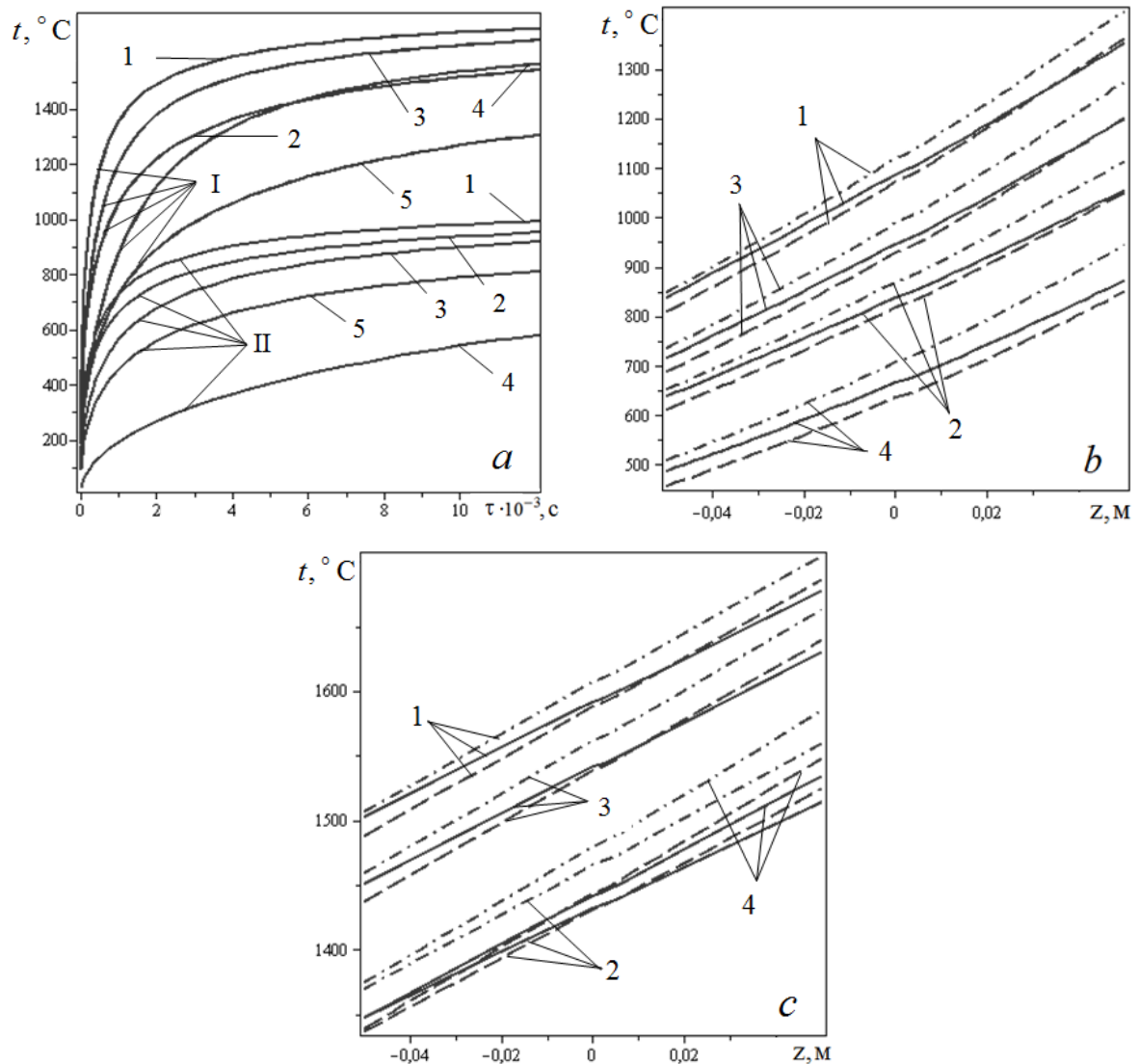


Рис.4.2.

В межах окремих областей різниця між температурами (рис.4.2б-4.2в), підрахованими за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при 0°C для одних часів є меншою, ніж за характеристик, взятих при 700°C , а для

інших – більшою. Температури, обчислені з та без урахування термочутливості можуть відрізнятись на 10%.

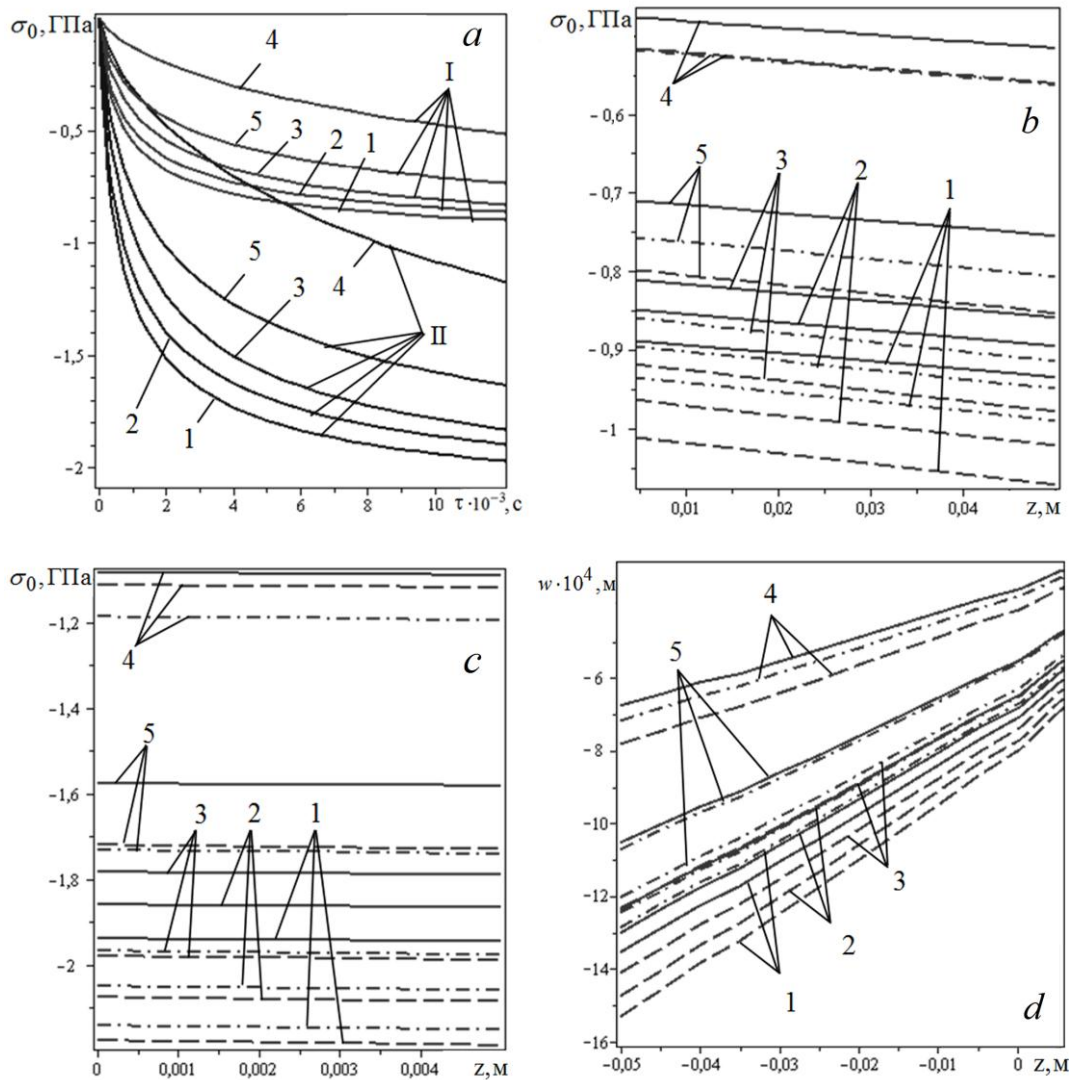


Рис.4.3

На рис.4.3 зображено залежності напружень від часу на поверхнях $z = z_1 - 0$ (I) і $z = z_1 + 0$ (II) (a), від координати в третій складовій (b) і проміжковому шарі (c) та залежності переміщень (d) від координати при $\tau = 10^4$ сек та $t_c = 1100^\circ \text{C}$ за різних параметрів теплообміну. Як видно, характер поведінки напружень на поверхнях $z = h$ та $z = z_3$ є таким, як і на поверхні $z = 0$ (рис.4.3a). Напруження на поверхнях поділу розривні, по товщині проміжкового шару майже не змінюються, а на контактуючих з ним поверхнях першого та третього шару є практично однакові. Неврахування

випромінювання чи тепловіддачі зумовлює заниження абсолютних значень напружень відповідно до 15 і 40%, їх стрибків на поверхнях поділу до 13 і 50% та переміщень до 11 і 38%.

Різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості (рис.4.3б-4.3в) може досягати 17%. У фіксовані моменти часу ця різниця для характеристик, взятих при 0°C , у першій та третій складовій може бути меншою, ніж для характеристик, взятих при 700°C , а у проміжковому шарі більшою. Окрім того, аналогічно як і у випадку температури, в межах окремих областей ця різниця в певні моменти часу для характеристик, взятих при 0°C може бути меншою, ніж для характеристик, взятих при 700°C , але більшою при інших часах. Різниця між переміщеннями з та без урахування термочутливості (рис.4.3г) для характеристик, взятих при 700°C є більшою, ніж для взятих при 0°C і може досягати 15%.

2. Нехай тіло перебуває під дією рівномірно розподіленого по об'єму проміжкового шару джерела тепла імпульсного характеру зміни інтенсивності (3.8) при $m = 5$, $q_0 = 24 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$, $\tau_1^* = 80 \text{ сек}$, $\tau_2^* = 20 \text{ сек}$ та $t_c = 1100^{\circ}\text{C}$.

Результати проведених досліджень представлені у вигляді графіків на рис.4.4–4.5. Суцільні лінії побудовані для залежних від температури, а пунктирні та штрих–пунктирні – для сталей ФМХ, які збігаються з температурнозалежними при 700°C та 0°C відповідно.

На рис.4.4 зображено розподіли температури: (а) – на обмежуючій поверхні $z = z_3$ при різних параметрах теплообміну ($1 - \alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$, $\varepsilon = 0.3$; $2 - \alpha = 400$, $\varepsilon = 0$; $3 - \alpha = 0$, $\varepsilon = 0.3$); (б,в) – при $\alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$, $\varepsilon = 0.3$ на поверхнях $z = 0$ (1) та $z = z_3$ (2); (г) – при $\alpha = 400$, $\varepsilon = 0.3$ для різних часів ($1 - \tau = 10^2 \text{ сек}$, $2 - \tau = 480$, $3 - \tau = 800$). Бачимо, що нехтування тепловіддачею зумовлює заниження температури, яке найбільш помітне на

початку дії другого імпульсу і може досягати 25%. За неврахування випромінювання зниження температури спостерігається до початку останнього імпульсу і не перевищує 5% , після чого помітне незначне її завищення. Як видно, найбільш помітний вплив термочутливості в проміжковому шарі та областях, що до нього прилягають. Різниця між температурами з та без урахування термочутливості спочатку є меншою для характеристик взятих при 0°C , а за подальшого нагріву – для характеристик взятих при 700°C . Максимальне її значення може досягати 150°C .

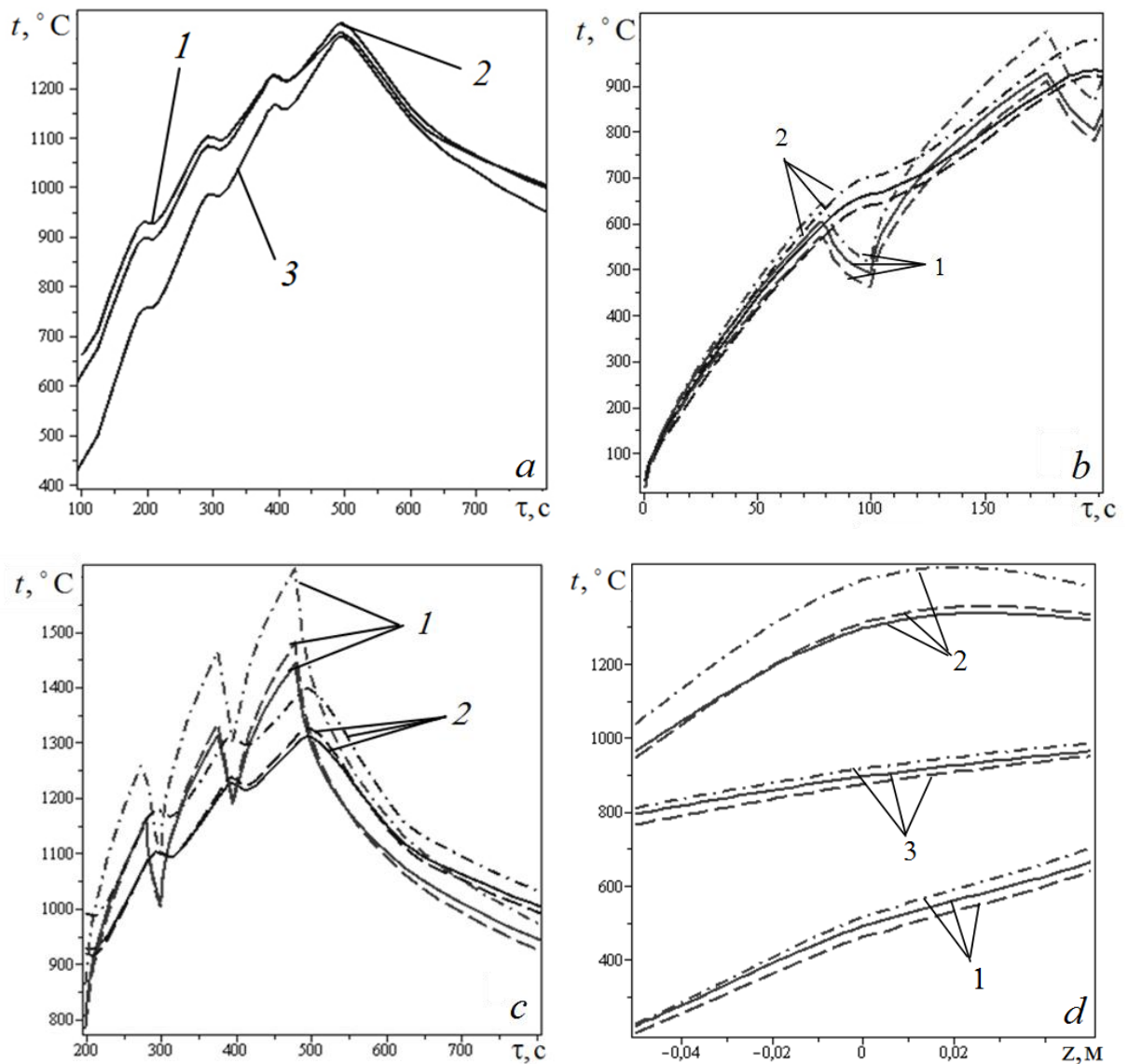


Рис.4.4

На рис.4.5 зображено залежності напружень (а) від часу на поверхнях $z = z_1 - 0$ (1) і $z = z_1 + 0$ при $\alpha = 400 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$, $\varepsilon = 0.3$ (2) та залежності переміщень (b) від координати за різних часів (1 – $\tau = 10^2$ сек, 2 – $\tau = 480$, 3 – $\tau = 10^3$). Бачимо, що на поверхнях поділу напруження є розривними. На відміну від температури, нехтування термочутливістю зумовлює завищення абсолютних значень напружень для характеристик взятих як при $700^\circ C$, так і при $0^\circ C$. Різниця між напруженнями з та без урахування температурної залежності характеристик є найбільшою на поверхнях проміжкового шару і може досягати 20%, а у 1-ій та 3-ій складовій не більше 15%.

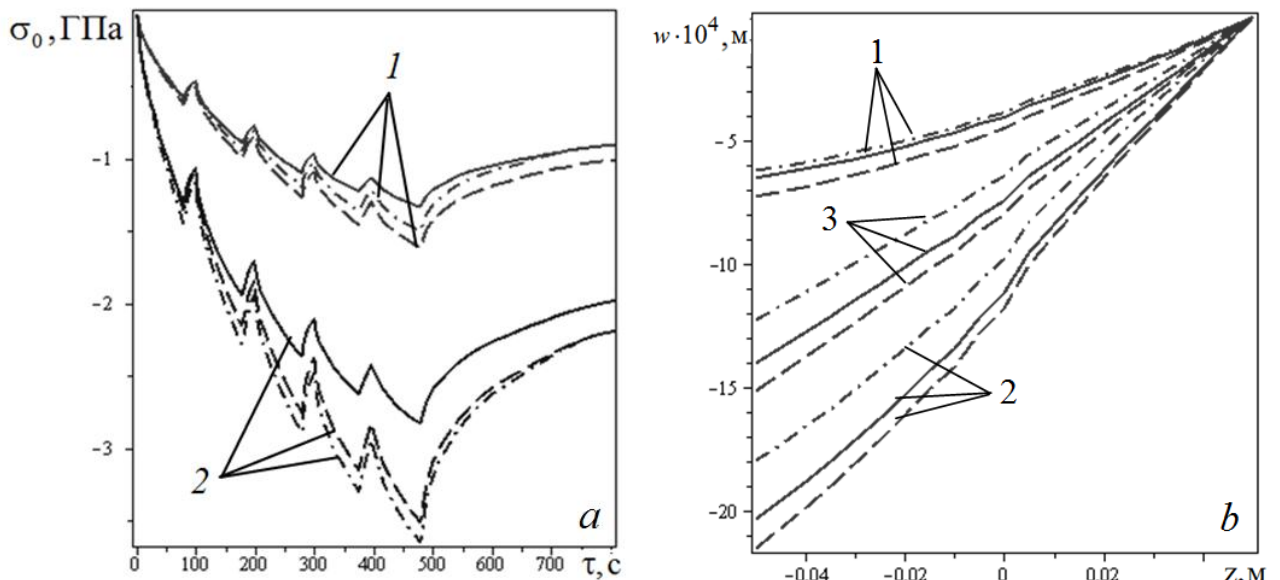


Рис.4.5.

Для переміщень (рис.4.5b) нехтування термочутливістю може зумовлювати, як завищення, так і зниження їхніх абсолютних значень відповідно для характеристик, взятих при $700^\circ C$ та $0^\circ C$: для перших різниця між переміщеннями з та без урахування термочутливості може досягати більше 10%, а для інших – не більше 5%.

4.2. Термопружний стан трискладового шару

Розглянемо сформульовану у другому розділі задачу термопружності для трискладового шару (рис. 2.1).

Для визначення температурного поля використаємо інтегральне подання (2.45), яке з урахуванням зв'язку між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} , для кожної складової набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \theta_i(z, \tau) = & - \int_{z_0}^0 \int_0^\tau K_{i1}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \int_0^h \int_0^\tau K_{i2}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta - \\ & - \int_h^{z_3} \int_0^\tau K_{i3}(z, \zeta, \tau, \tau') d\tau' d\zeta + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^\tau \left. \frac{\partial G_{i,j+1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ & - \int_0^\tau \left\{ G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_3} d\tau' - \\ & - \int_0^\tau \left\{ G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') P_1(\tau') - \lambda_{0,1} \bar{\theta}_1(\tau') \frac{\partial G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=z_0} d\tau' + f_i(z, \tau), \quad (4.4) \end{aligned}$$

де

$$K_{ij}(z, \zeta, \tau, \tau') = c_{0,j} G_{ij}(z, \zeta, \tau - \tau') \left[\frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} - 1 \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau'},$$

$$f_i(z, \tau) = f_i^T(z, \tau) + f_i^W(z, \tau),$$

$$\begin{aligned} f_i^T = & \int_{z_0}^0 c_{0,1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) \theta_{01}(\zeta) d\zeta + \int_0^h c_{0,2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) \theta_{02}(\zeta) d\zeta + \\ & + \int_h^{z_3} c_{0,3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) \theta_{03}(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

$$f_i^W(z, \tau) = \int_{z_0}^0 \int_0^\tau G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,1}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \int_0^h \int_0^\tau G_{i2}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,2}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta + \\ + \int_h^{z_3} \int_0^\tau G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,3}(\zeta, \tau') d\tau' d\zeta.$$

Обмежившись випадком «простої нелінійності», невідомими у співвідношеннях (4.4) будуть $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$ ($j=1,2$), $\theta_0(z_0, \tau)$ та $\theta_3(z_3, \tau)$, які входять у відповідні підінтегральні функції. Для їх визначення апроксимуємо кожен з функцій $F_i(\tau)$, $P_i(\tau)$ та $\bar{\theta}_i(\tau)$ лінійним сплайном (2.95).

Підставивши у (4.4) вирази для елементів матриці Гріна G_{ij} та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (2.95), отримаємо співвідношення для змінних Кірхгофа, які у безрозмірних змінних запишуться так:

$$\theta_i(\bar{z}, Fo) = \eta_{i,1} \gamma_{i,1}(\bar{z}, Fo, F_2(Fo)) + \eta_{i,2} \gamma_{i,2}(\bar{z}, Fo, F_3(Fo)) - \\ - \eta_{i,3} \left[\gamma_{i,3}(\bar{z}, Fo, P_3^*) - \frac{a_{i3}^*}{2a_{i0}} \gamma_{i,4}(\bar{z}, Fo, \bar{\theta}_3) \right] - \eta_{i,0} \left[\gamma_{i,5}(\bar{z}, Fo, P_1^*) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a_{i0}} \gamma_{i,6}(\bar{z}, Fo, \bar{\theta}_1) \right] + f_i(\bar{z}, Fo) \quad (4.5)$$

де

$$P_i^*(Fo) = \sigma_i^*(\theta_i^*(Fo)) (R(\theta_i^*(Fo)) - R(t_{c,i}(Fo))) + Bi_i(\theta_i^*(Fo)) (\theta_i^*(Fo) - t_{c,i}(Fo)),$$

$$\eta_{1,0} = a_{10}^*, \quad \eta_{2,0} = \frac{\lambda_{0,1}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)}, \quad \eta_{3,0} = \frac{2\delta_2 \lambda_{0,1}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)},$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) \quad (j=1,2), \quad \psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, Fo) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, Fo),$$

$$\psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, Fo) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, Fo), \quad \psi_\rho^{i,5}(\bar{z}, Fo) = \Psi_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, Fo), \quad \psi_\rho^{i,6}(\bar{z}, Fo) = \Psi_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, Fo)$$

при $\rho = 1, 2$;

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - Fo_k) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - Fo_k) \quad (j=1,2),$$

$$\psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, Fo - Fo_k) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, Fo - Fo_k), \quad \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, Fo - Fo_k) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, Fo - Fo_k),$$

$$\Psi_{\rho}^{i,5}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \Psi_{\rho, \chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \quad \Psi_{\rho}^{i,6}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = \Psi_{\rho, \varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad \text{при} \\ \rho = 3, 4;$$

$$\Psi_{\rho, y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = (-1)^{\delta_{p2}} \left[y_{\rho,1}^0(\bar{z}_0 - \bar{z}, \xi) + v_1 y_{\rho,1}^0(\bar{z} + \bar{z}_0, \xi) \right] + \\ + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi) - \\ - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi),$$

$$\Psi_{\rho, y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,1}^1(a_{12}^* \bar{z} - \bar{z}_0, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi) - \\ - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi),$$

$$\Psi_{\rho, y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1(a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}) - \bar{z}_0, \xi),$$

функціям $y_{\rho, i}^{\mu}(\zeta, \xi)$ відповідають функції $\chi_{\rho, i}^{\mu}(\zeta, \xi)$ або $\varphi_{\rho, i}^{\mu}(\zeta, \xi)$, якщо індекс “ y ” в $\mathfrak{G}_{\rho, y}^{i,p}$ чи $\Psi_{\rho, y}^{i,p}$ приймає значення відповідно χ або φ ; $\varphi(\zeta, \xi)$ і решта позначень збігаються з наведеними вище.

Поклавши у співвідношеннях (4.5) в $\theta_i(\bar{z}, \text{Fo})$ відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$ ($j = 1, 2$), $\bar{z} = \bar{z}_3$ і $\bar{z} = \bar{z}_0$, для кожного $\text{Fo} = \text{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_{\tau}}$) отримаємо систему чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь відносно $\theta_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_k)$, $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_k)$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$, де у правих частинах входять відповідно $\theta_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_{k-1})$, $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_{k-1})$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_{k-1})$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_{k-1})$. Розв’язавши цю систему рекурентного типу, знайдемо шукані значення змінної Кірхгофа у вузлах сітки, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначимо зі співвідношення (2.49).

У тілі виникатимуть лише радіальні і кільцеві напруження (2.52) та радіальні (2.54) і осьові (2.55) переміщення.

Числові дослідження.

Табл.4.1

1. 3 метою верифікації запропонованої методики визначення температурного поля за урахування температурної залежності ФМХ, розглянемо задачу теплопровідності, коли поверхня шару $z = z_0$ нагрівається зосередженим джерелом тепла, імпульсного характеру зміни інтенсивності

$$w_{t,1}(z, \tau) = q_0 [S(\tau) - S(\tau - \tau_1^*)] \delta(z - z_0),$$

де $q_0 = 12 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$, $\tau_1^* = 2 \text{ сек}$, а поверхня $z = z_3$ підтримується при нульовій температурі. Тут і далі ФМХ першої та третьої складової відповідали ніобію, а проміжкового шару – платині (2.97). В табл.4.1 наведено значення безрозмірної

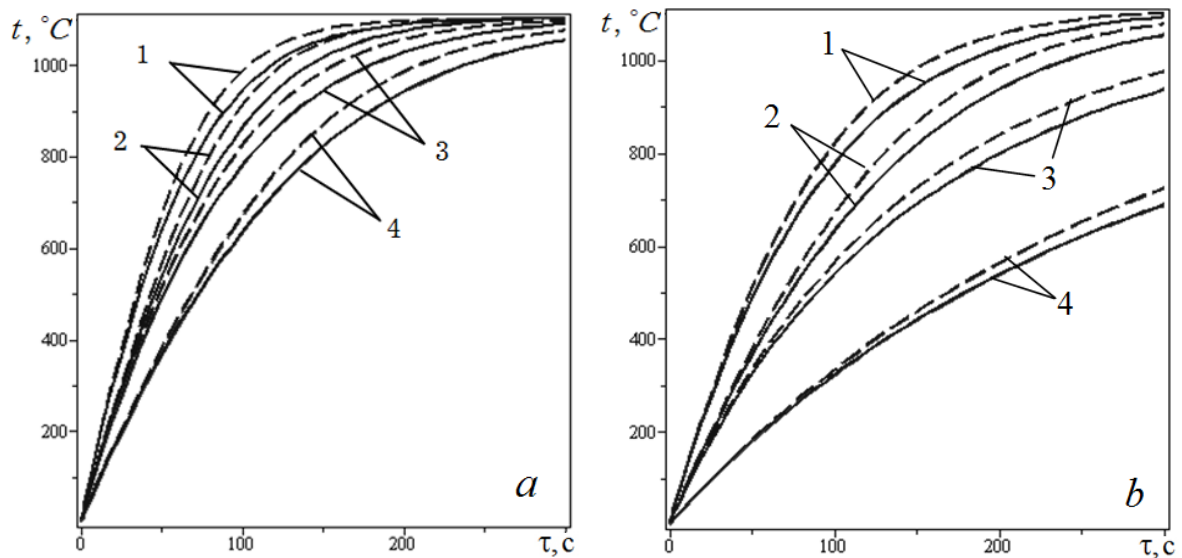
температури $\bar{T} = \frac{t_1 \lambda_{01}}{q_0 (z_3 - z_0)}$ при різних часах τ на поверхні z_0 . Температура у другому стовпці (\bar{T}_{T2}) обчислена за запропонованою методикою, а у першому (\bar{T}_{T1}) – за тих же параметрів на основі отриманих результатів у [111]. Як видно, результати збігаються з точністю до двох-трьох знаків після коми.

2. Дослідження впливу термочутливості та параметрів теплообміну на розподіли температури та напружень проведемо, коли шар з фіксованими товщинами складових $z_0 = -10^{-3} \text{ м}$, $h = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $z_3 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ перебуває в довкіллі, температура якого $t_{c,1} = t_{c,3} = 1100^\circ \text{C}$. На рис.4.6 зображено залежності температури від часу на поверхнях $z = z_0$ та $z = z_3$ при $\varepsilon_3 = 0.3$,

$\alpha_3 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ \text{C}}$ (a), $\varepsilon_3 = 0$, $\alpha_3 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ \text{C}}$ (b), $\varepsilon_3 = 0.3$, $\alpha_3 = 0$ (c). При

$\tau, \text{сек}$	\bar{T}_{T1}	\bar{T}_{T2}
0.125	0.31332	0.31340
0.5	0.59219	0.59268
1	0.75343	0.75411
1.5	0.81867	0.81746
2	0.84548	0.84590
2.5	0.30537	0.30595
3	0.13010	0.12921
3.5	0.05470	0.05510
4	0.02286	0.02355
4.5	0.00953	0.00897
5	0.00397	0.00342

$\varepsilon_3 = 0.3$, $\alpha_3 = 50 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$ на рис.4.7 зображено залежності температури від координати в моменти часу $\tau = 10 \text{ сек}$ (а) та $\tau = 10^2 \text{ сек}$ (b), а на рис.4.8-4.9 – залежності напружень від часу на поверхнях $z = z_0$ та $z = z_1 + 0$ і від координати в моменти часу $\tau = 10^{-1} \text{ сек}$ (а), $\tau = 10 \text{ сек}$ (b) та $\tau = 10^2 \text{ сек}$ (c). На рис.4.6-4.9 суцільні лінії побудовані за залежних від температури, а пунктирні – за сталих ФМХ; кривим 1, 2, 3, 4 відповідають різні параметри теплообміну через поверхню $z = z_0$: 1 – $\varepsilon_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 50 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$; 2 – $\varepsilon_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 0$; 3 – $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_1 = 50$; 4 – $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$. Зауважимо, що для цих випадків з метою вибору кроку сітки сплайна було проведено порівняння розподілів температури у фіксованих точках для різних проміжків часу. Встановлено, що для часів $\tau \leq 3 \cdot 10^2 \text{ сек}$ достатньо обмежитись $K_\tau = 20$, оскільки збільшення K_τ (зменшення кроку сітки) практично не впливає на точність обчислень.



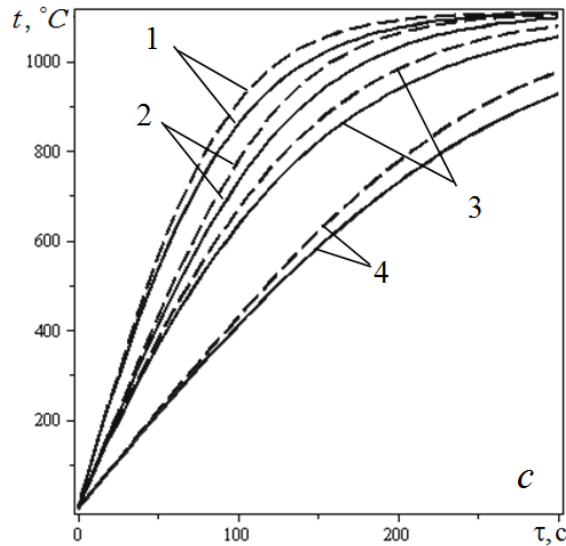


Рис.4.6

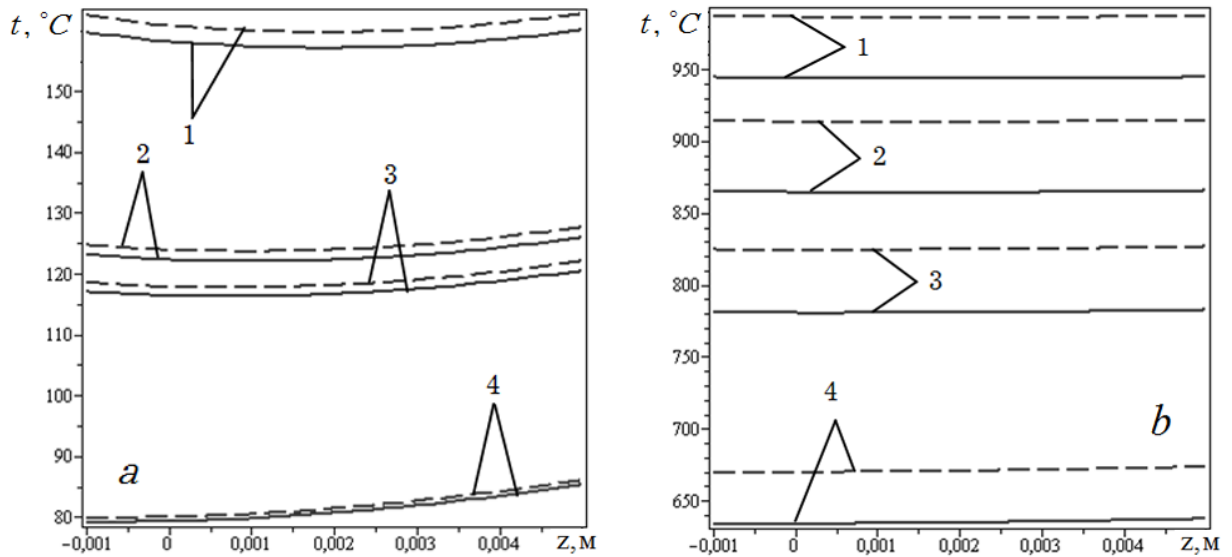


Рис.4.7

Як видно з рис.4.6, за одночасного урахування конвективного і променевого теплообміну на обидвох поверхнях, температура є вищою, ніж за урахування лише конвективного чи променевого. Максимальна різниця між відповідними температурами досягається при $\tau = 150 \text{сек}$ і становить 300°C та 150°C . За конвективно-променевого теплообміну на поверхні $z = z_3$ (рис.4.7), неврахування променевого чи конвективного теплообміну на поверхні $z = z_0$ зумовлює зниження температури до 15% і 10% відповідно. Неврахування температурної залежності ФМХ зумовлює завищення температури, яке досягає

10%. Неврахування випромінювання на обидвох обмежуючих поверхнях та температурної залежності ФМХ зумовлює зниження температури, яке при $\tau = 150 \text{сек}$ становить 270°C .

З рис.4.8,4.9 видно, що напруження у тілі мають стрибкоподібний характер, які залежно від області і часу можуть бути як стискаючими, так і розтягуючими. У проміжковому шарі для часів близьких до початкових ($\tau \leq 10^{-5} \text{сек}$) спостерігались розтягуючі напруження, які з часом переходять у стискаючі, після чого збільшуються, досягаючи свого максимуму в стаціонарному режимі. У 1-ій складовій стискаючі напруження лише в початкові моменти часу. З часом вони зменшуються і переходять у розтягуючі, після чого збільшуються, досягаючи свого максимуму в стаціонарному режимі. У 3-ій складовій для розглядуваних часів напруження в області біля поверхні $z = z_3$ стискаючі, а в області біля поверхні $z = h$ – розтягуючі.

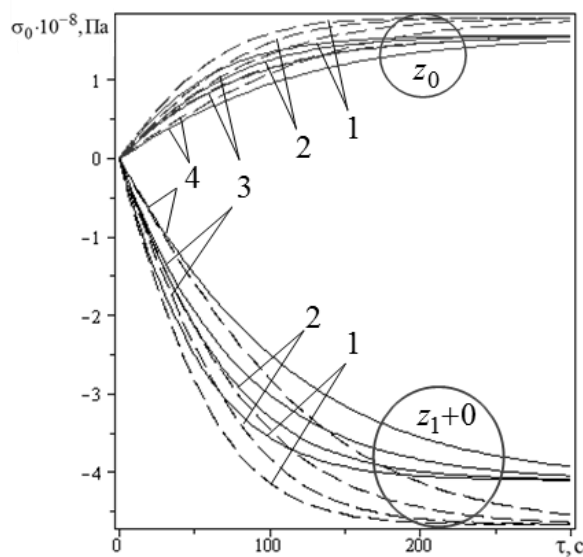


Рис.4.8

Для малих часів ($\tau \leq 10^{-1} \text{сек}$) максимальні значення розтягуючих напружень виникають у 3-ій складовій в області, яка прилягає до проміжкового шару, а стискаючих – на обмежуючій поверхні цієї складової. При більших часах максимальні розтягуючі напруження – на обмежуючій поверхні 1-ої складової, а стискаючі – в проміжковому шарі на поверхні поділу $z = h$.

Неврахування випромінювання чи конвективного теплообміну зумовлює зниження абсолютних значень напружень, що найбільш помітно у проміжковому шарі і при $\tau = 150 \text{сек}$ досягає відповідно 12% та 6%.

Неврахування температурної залежності ФМХ зумовлює завищення абсолютних значень напружень: найбільша різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості у проміжковому шарі і досягає 14%.

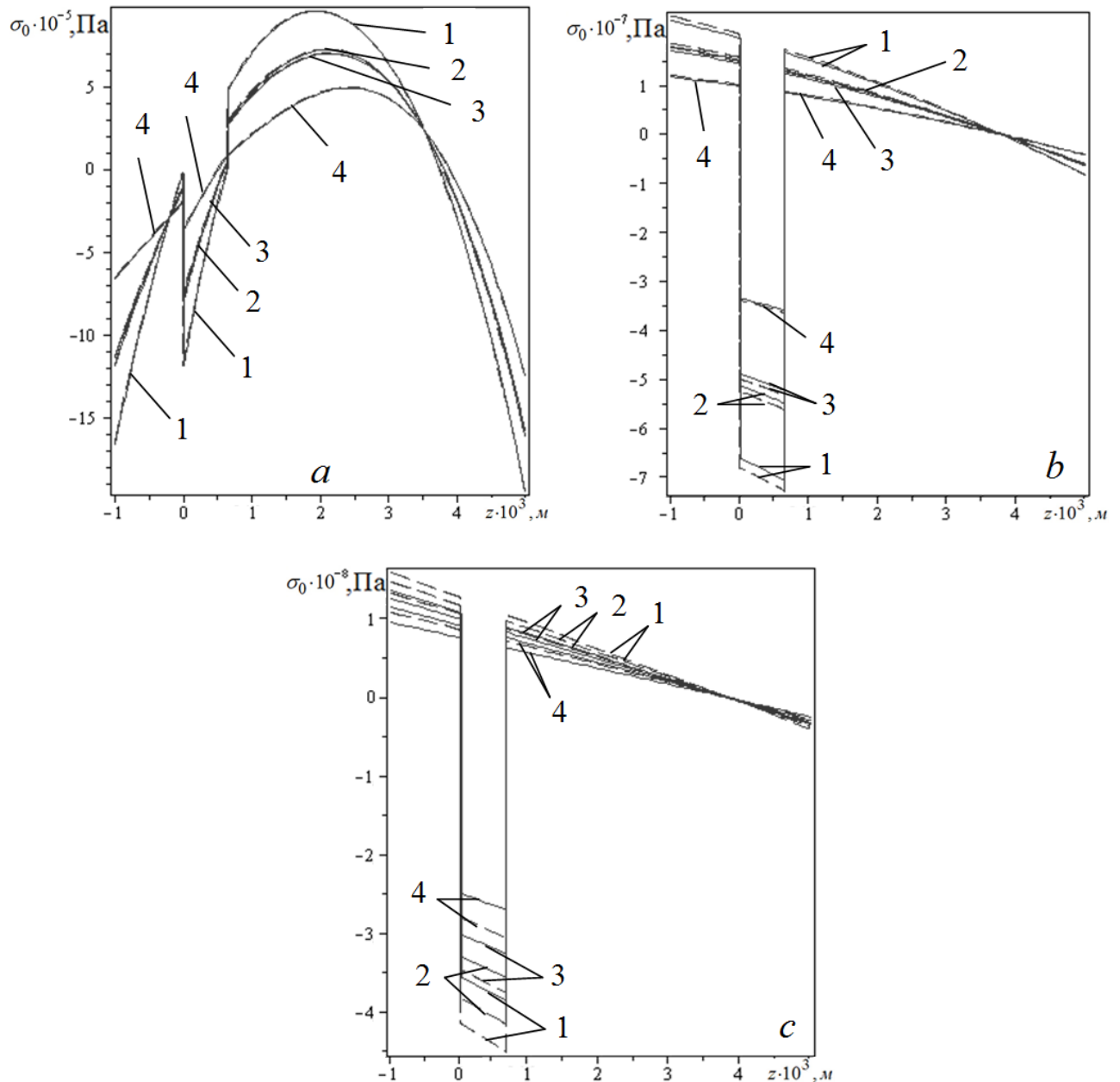


Рис.4.9

3. Для дослідження впливу різних товщин складових $h_i = z_i - z_{i-1}$ ($i = \overline{1,3}$) на розподіли температури та напружень, розглянемо випадок, коли шар перебуває в довкіллі, температура якого $t_{c,1} = t_{c,3} = 1100^\circ\text{C}$. Вважаємо, що через обмежуючі поверхні відбувається конвективно-променевий теплообмін при $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.3$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$.

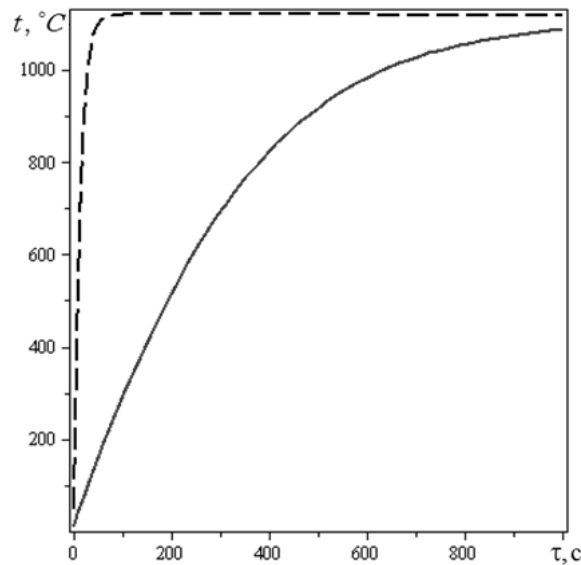


Рис.4.10

На рисунках 4.10-4.15 зображені залежності температури від часу на обмежуючій поверхні $z = z_3$ та від координати у фіксовані моменти часу і залежності напружень від часу на обмежуючій поверхні $z = z_0$ та поверхнях поділу і від координати у фіксовані моменти часу за різних товщин складових:

- на рис. 4.10-4.12 суцільній лінії відповідали $h_1 = h_3 = -10^{-2} \text{ м}$, $h_2 = 10^{-2} \text{ м}$, а пунктирній – $h_1 = h_3 = -10^{-4} \text{ м}$, $h_2 = 10^{-3} \text{ м}$;

- на рис. 4.13-4.15 суцільній лінії відповідали $h_1 = h_3 = -10^{-2} \text{ м}$, $h_2 = 10^{-3} \text{ м}$, а пунктирній – $h_1 = h_3 = -5.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h_2 = 10^{-2} \text{ м}$. У цьому випадку сумарна товщина шару незмінна і становить $h_1 + h_2 + h_3 = 0.021 \text{ м}$.

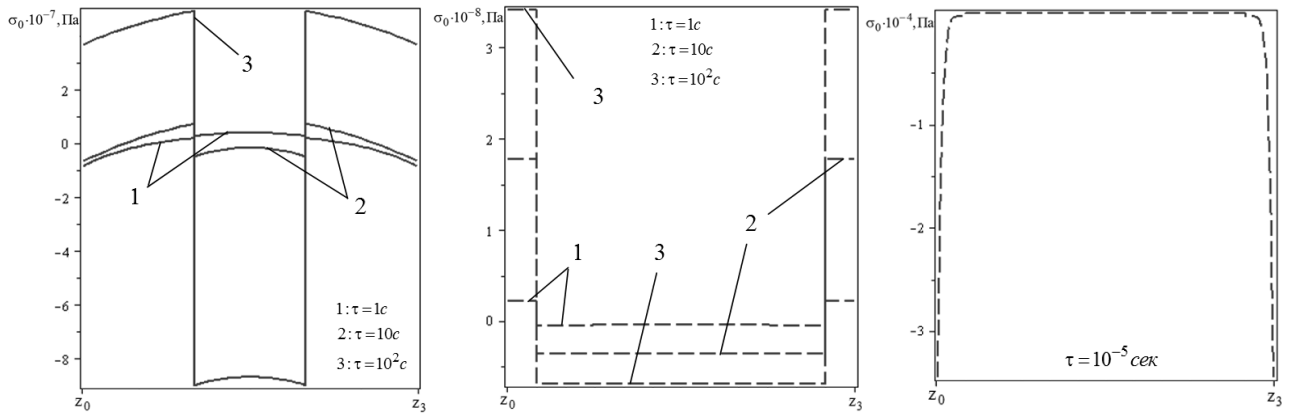


Рис.4.11

Бачимо (рис.4.13), що за однакової загальної товщини шару, температура в одні і ті ж моменти часу є вищою у випадку, коли проміжковий шар є тонший. Максимальна різниця між відповідними температурами досягається при $\tau \approx 400 \text{сек}$ і становить 50°C . Як і слід було очікувати, чим менша сумарна товщина шару, тим швидше температура у тілі зростає.

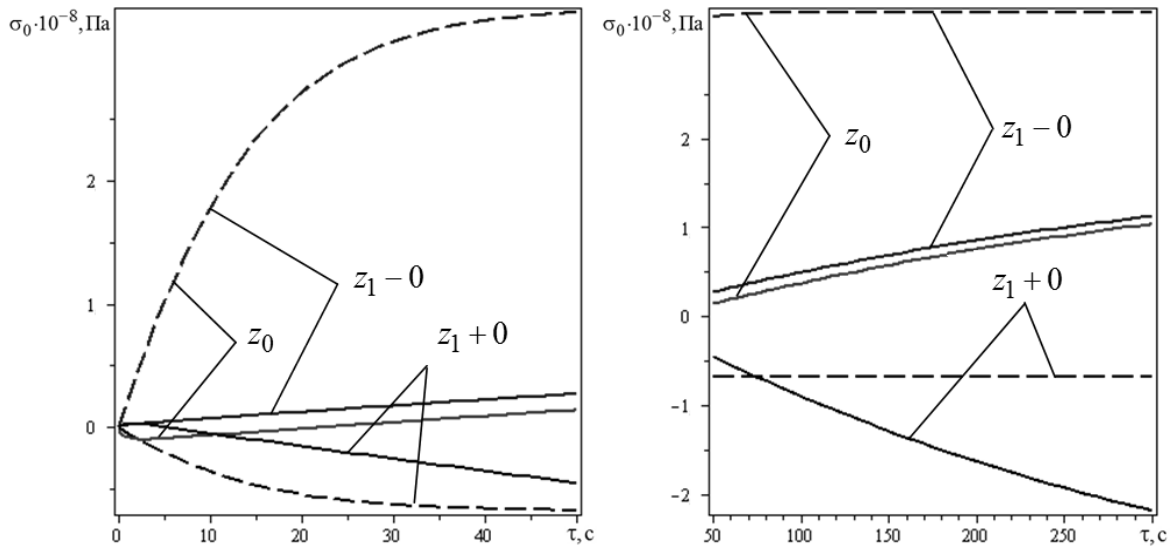


Рис.4.12

Напруження (рис.4.11, 4.12, 4.14, 4.15) мають стрибкоподібний характер. Вони можуть бути як стискаючими, так і розтягуючими. Розподіл напружень, як і температури, є симетричним відносно середини проміжкового шару.

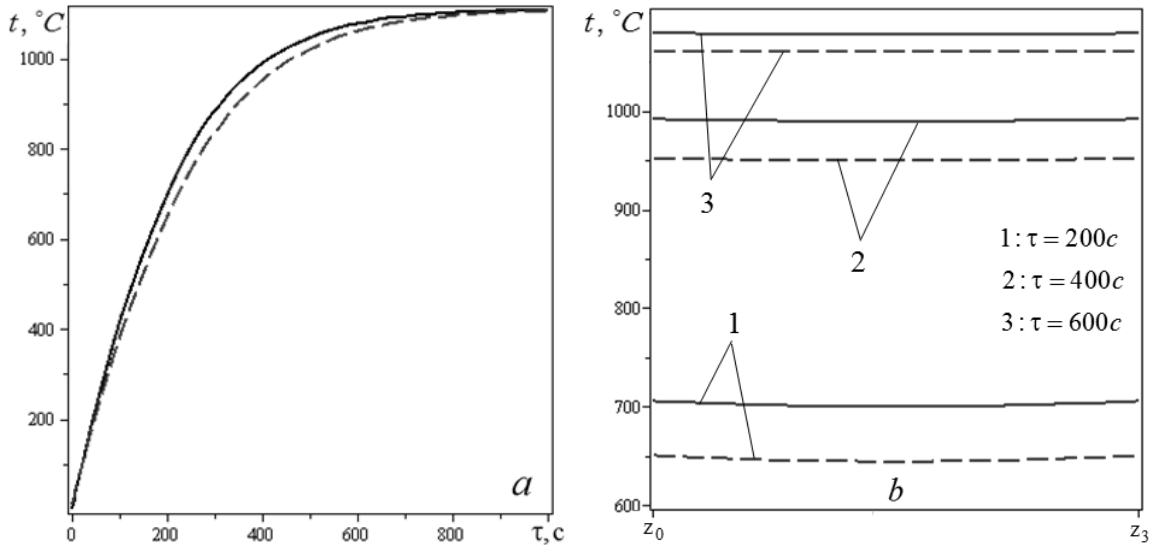


Рис.4.13

В проміжковому шарі на початковій стадії нагріву виникають розтягуючі напруження, які після досягнення максимуму з часом переходять у стискаючі. У 1-й та 3-ій складових на початковій стадії нагріву в областях, прилягаючих до обмежуючих поверхонь, напруження стискаючі, які з часом зменшуючись, переходять у розтягуючі, а в областях, які прилягають до поверхонь поділу – завжди розтягуючі.

У тілі на початковій стадії нагріву максимальні розтягуючі напруження виникають у проміжковому шарі, а стискаючі – у крайніх складових на обмежуючих поверхнях. З часом максимальні розтягуючі напруження виникають у крайніх складових, а стискаючі – в проміжковому шарі.

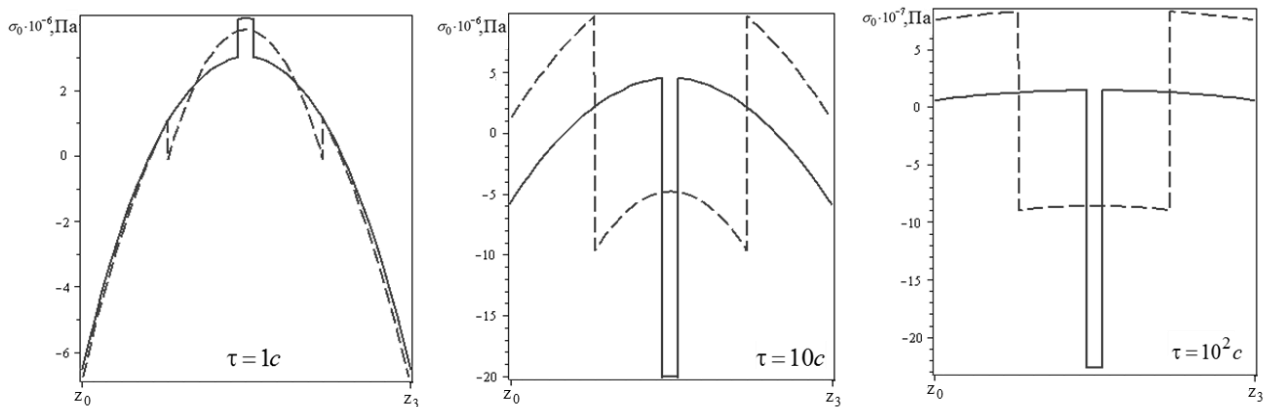


Рис.4.14

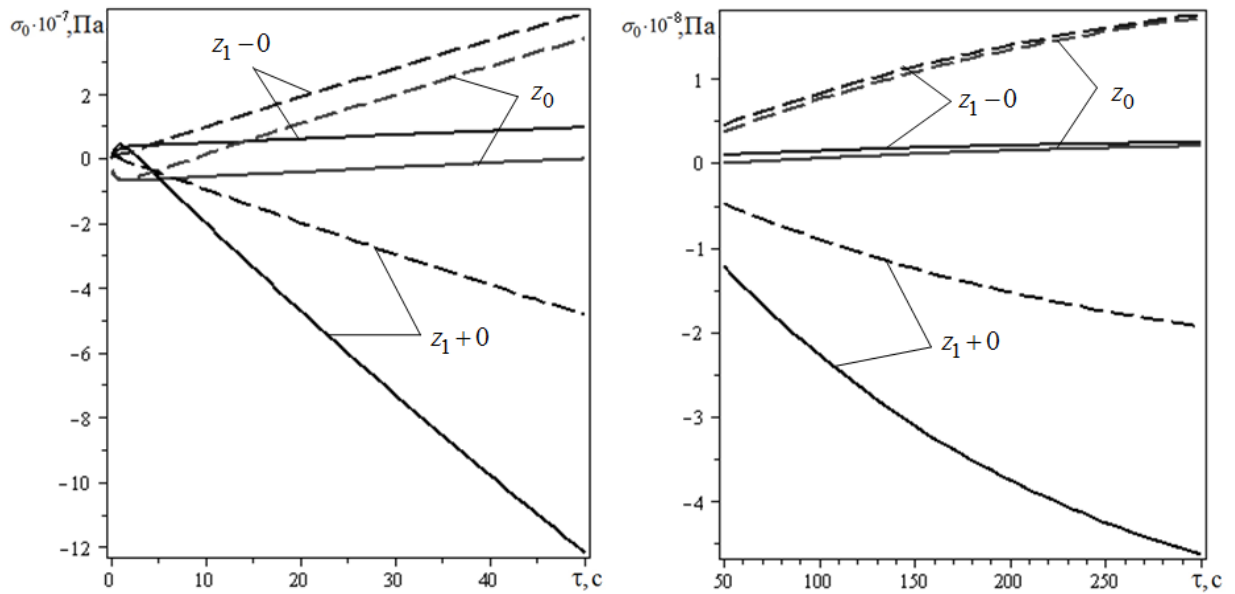


Рис.4.15

За фіксованих товщин першої та третьої складової, зі зменшенням h_2 максимальні значення розтягуючих напружень у тілі зменшуються. При цьому, максимальні стискаючі напруження у тілі збільшуються.

За фіксованої товщини проміжкового шару, зі зменшенням товщин першої та третьої складових збільшуються максимальні розтягуючі напруження у тілі, але зменшуються стискаючі.

За однакової загальної товщини тіла (рис.4.14, 4.15) при збільшенні товщини проміжкового шару, максимальні значення відповідних напружень у ньому зменшуються. При цьому, у крайніх складових для малих часів в областях, що прилягають до обмежуючих поверхонь, напруження практично не змінювались, а для інших часів розтягуючі напруження збільшуються, а стискаючі зменшуються, або переходять у розтягуючі.

4.3. Висновки по розділу

У цьому розділі з використанням запропонованої методики визначено та досліджено термопружний стан трискладового термочутливого півбезмежного стержня та шару за урахування конвективно-променевого теплообміну.

Проведено порівняльний аналіз температур, підрахованих на основі знайденого та відомого розв'язків тестової задачі теплопровідності для трискладового термочутливого шару, який нагрівається тепловим потоком. Відповідні значення збігалися до двох-трьох знаків після коми.

З числових досліджень для півбезмежного стержня випливає, що:

- за відсутності джерел тепла за конвективно-променевого теплообміну вплив тепловіддачі є меншим, ніж лише за конвективного, що більш помітно при вищій температурі довкілля. Неврахування теплового випромінювання призводить до заниження температури. Різниця між температурами, підрахованими з та без урахування конвективного теплообміну зменшується при збільшенні температури довкілля;
- за дії імпульсного джерела тепла нехтування тепловіддачею зумовлює заниження температури, яке може досягати 25%. За неврахування випромінювання заниження температури спостерігається до певного моменту часу (початку останнього імпульсу), після чого помітне незначне її завищення;
- для розглянутих способів теплової дії за сталих характеристик температура може бути як нижчою, так і вищою, ніж за температурнозалежних. Різниця між температурами, підрахованими за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при 0°C в межах окремих областей для одних часів є меншою, ніж за характеристик, взятих при 700°C , а для інших – більшою. Температури, обчислені з та без урахування термочутливості і без джерел тепла можуть відрізнитись на 10%, а за дії імпульсного джерела тепла ця різниця може досягати 12% (150°C);

- неврахування випромінювання чи тепловіддачі зумовлює заниження абсолютних значень напружень відповідно до 15 і 40%, їх стрибків на поверхнях поділу до 13 і 50% та переміщень до 11 і 38%;

- на відміну від температури, нехтування термочутливістю зумовлює завищення абсолютних значень напружень для характеристик взятих як при 700°C , так і при 0°C . За відсутності джерел тепла у фіксовані моменти часу різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості для характеристик, взятих при 0°C , у першій та третій складовій може бути меншою, ніж для характеристик, взятих при 700°C , а у проміжковому шарі більшою. Окрім того, аналогічно як і у випадку температури, в межах окремих областей ця різниця в певні моменти часу для характеристик, взятих при 0°C може бути меншою, ніж для характеристик, взятих при 700°C , але більшою при інших часах. Різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості може досягати 17%. За дії імпульсного джерела тепла різниця між напруженнями з та без урахування температурної залежності характеристик є найбільшою на поверхнях проміжкового шару і може досягати 20%, а у 1-ій та 3-ій складовій не більше 15%;

- різниця між переміщеннями з та без урахування термочутливості для характеристик, взятих при 700°C є більшою, ніж для взятих при 0°C і може досягати 15%.

З числових досліджень для шару впливає, що:

- за одночасного урахування конвективного і променевого теплообміну на обидвох поверхнях, температура є вищою, ніж за урахування лише конвективного чи променевого. Максимальна різниця між відповідними температурами становить 25% (300°C) та 12% (150°C). За конвективно-променевого теплообміну на одній з обмежуючих поверхонь, неврахування променевого чи конвективного теплообміну на іншій обмежуючій поверхні зумовлює заниження температури до 15% і 10% відповідно.

• неврахування температурної залежності ФМХ зумовлює завищення температури до 10%. Неврахування випромінювання на обидвох обмежуючих поверхнях та температурної залежності ФМХ зумовлює заниження температури до 25% (270°C);

• за незмінної сумарної товщини шару, температура в одні і ті ж моменти часу є вищою у випадку, коли проміжковий шар є тонший;

• за симетричного конвективно-променевого нагріву та однакових матеріалів і товщин крайніх складових:

- у початкові моменти часу у проміжковому шарі спостерігались лише розтягуючі напруження, які з часом переходили у стискаючі. У 1-ій та 3-ій складових в областях, прилягаючих до обмежуючих поверхонь, на початковій стадії нагріву напруження стискаючі, які з часом зменшуючись, переходять у розтягуючі, а в областях, які прилягають до поверхонь поділу – завжди розтягуючі;
- максимальні розтягуючі напруження у тілі на початковій стадії нагріву виникають у проміжковому шарі, а стискаючі – у крайніх складових на обмежуючих поверхнях. З часом максимальні розтягуючі напруження виникають у крайніх складових, а стискаючі – в проміжковому шарі;
- за фіксованих товщин першої та третьої складової, зі зменшенням товщини проміжкового шару максимальні значення розтягуючих напружень у тілі зменшуються. При цьому, максимальні стискаючі напруження у тілі збільшуються;
- за фіксованої товщини проміжкового шару, зі зменшенням товщин першої та третьої складових збільшуються максимальні розтягуючі напруження у тілі, але зменшуються стискаючі;
- за однакової загальної товщини тіла при збільшенні товщини проміжкового шару, максимальні значення відповідних напружень у ньому зменшуються. При цьому, у крайніх складових для малих часів в областях, що прилягають до обмежуючих поверхонь, напруження

практично не змінювались, а для інших часів розтягуючі напруження збільшуються, а стискаючі зменшуються, або переходять у розтягуючі

- неврахування випромінювання чи конвективного теплообміну зумовлює заниження абсолютних значень напружень відповідно до 12% та 6%;

- неврахування температурної залежності ФМХ призводить до завищення абсолютних значень напружень: найбільша різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості у проміжковому шарі і досягає 14%.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання механіки твердого деформівного тіла, яке полягає у розробці методики визначення та дослідження одновимірного нестационарного температурного поля та зумовлених ним напружень та переміщень у трискладових термочутливих тілах з плоско-паралельними поверхнями поділу для широкого діапазону зміни товщин складових за різної теплової дії, в т.ч. з урахуванням теплового випромінювання.

Отримано такі основні наукові результати:

1. З використанням функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів отримано для трискладових безмежного, півбезмежного стержня і шару нові інтегральні подання розв'язків відносно температури чи змінної Кірхгофа, які на поверхнях поділу містять щонайбільше одну невідому функцію від часу. Розроблено методику знаходження відповідних невідомих, які входять у ці подання.

2. Знайдено розв'язки відповідних квазістатичних задач термопружності за нерівномірного початкового нагріву складових, конвективно-променевого теплообміну та дії джерел тепла.

3. Отримано інженерні формули для визначення термопружного стану у трискладовому безмежному нерівномірно нагрітому нетермочутливому стержні у випадку малих товщин проміжкового шару.

4. Проведено аналіз числових досліджень впливу температурної залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) та товщин складових і параметрів теплообміну на розподіли нестационарних температурних полів, напружень та переміщень. Зокрема, для розглянутих комбінацій матеріалів встановлено:

- неврахування термочутливості залежно від вибраних значень сталих характеристик може зумовлювати, як завищення, так і зниження температури (до 12%) і переміщень (до 22%) та, незалежно від температур, за яких взяті сталі ФМХ, завищення абсолютних значень напружень (до 20%). Різниця між відповідними значеннями, підрахованими за температурнозалежних та сталих характеристик, взятих при одній температурі в межах окремих областей для одних часів може бути меншою, ніж за сталих характеристик, взятих при іншій температурі, а для інших часів – більшою. Крім того, в один і той же момент часу різниця між розподілами напружень з температурнозалежними та сталими характеристиками, взятими при одній температурі в окремих складових може бути меншою, ніж для взятих при іншій температурі, але більшою в інших складових;

- за конвективно-променевого теплообміну у фіксовані моменти часу температура, абсолютні значення напружень, їх стрибків та переміщень є вищими, ніж лише за конвективного (відповідно до 55%, 40%, 50% і 38%) чи променевого (відповідно до 25%, 15%, 13% і 11%) теплообміну;

- збільшення або зменшення товщини складових суттєво впливає на термомеханічну поведінку тіла. Зокрема, у трискладовому шарі зменшення товщини проміжкового шару у 10 разів може призвести до зменшення приблизно у 8 разів максимальних значень розтягуючих напружень (в крайніх складових) та збільшення приблизно у 2 рази максимальних стискаючих (в проміжковому шарі);

- у безмежному трискладовому стержні при остиганні розподіл температури та напружень по товщині проміжкового шару після певного моменту часу τ^* має лінійний характер. Причому, чим більша товщина проміжкового шару, тим більший час τ^* . За дії періодичного джерела тепла характер розподілів температури та напружень за товщиною проміжкового шару суттєво нелінійний.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов В.В. Напряжения и деформации при термической обработке стали / В.В. Абрамов. – Киев-Донецк: Вища шк., 1985. – 133 с.
2. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицам / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. Аверин Б.В. Расчет нестационарного температурного поля в трехслойной стенке с импульсными внутренними источниками теплоты / Б.В. Аверин // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2010. – № 2. – С. 171-178.
4. Али М. Моделирование теплопроводности трехслойной конструкции в системе конечно-элементного моделирования ANSYS / М. Али, Абед Аль-Зобайде, С.А. Пронкевич, И.М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 27: международный научно-технический сборник / под ред. А.В. Чigareва ; БНТУ. – Минск, 2012. – С. 234-239.
5. Альберг Д. Теория слайнов и её приложения: Пер. с англ. / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 318 с.
6. Аманзаде Ю.Ф. Теория упругости / Ю.Ф. Аманзаде. – М.: Высш. школа, 1976. – 272 с.
7. Амербаев В. М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра / В. М. Амербаев – Алма-Ата, 1974. – 182 с.
8. Аттетков А.В.. Температурное поле экранированной стенки с термоактивной прокладкой при осесимметричном тепловом воздействии / А.В. Аттетков, И.К. Волков, Е.С. Тверская // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82, №5. – С. 935-943.
9. Баженов В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении динамической теории упругости с

сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

10. Белик В.Д. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности / В.Д. Белик, Б.А. Урюков, Г.А. Фролов, Г.В. Ткаченко. //Инженерно-физический журнал. – 2008. – Т. 81, № 6. – С. 1058– 1062.

11. Беляев Н.М. Математические методы теплопроводности / Н.М. Беляев, А.В. Рядно. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.

12. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности: В 2-х частях / Н.М. Беляев, А.В. Рядно.. – М.:Высш. шк., 1982. – 630 с.

13. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд //Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 494 с.

14. Березовская Л.М. Математические модели тепловых процессов в многослойных цилиндрических стенках / Л.М. Березовская, О.И. Деуль, И.И. Юртин. - Киев: ИМ, 1989. – 29с.

15. Березовский А.А. Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием / А.А. Березовский // Задачи нестационарной теплопроводности. – Киев, 1983. – С.6–11.

16. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975. – 208 с.

17. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

18. Бреббия К. Методы граничных элементов в технике / К. Бреббия, Ж. Теллес, П. Вроубел. – М.: Мир, 1982. – 248 с.

19. Бурак Я.Й. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних тіл: в 5-ти т. Т.1: Термомеханіка багатоконпонентних тіл низької електропровідності/ Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 300 с.

20. Вайсфельд Н.Д. Нестационарные задачи пружности для тел с границами и дефектами в цилиндрической та сферической системах координат : Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук / Н.Д. Вайсфельд; НАН Украины. Ин-т приклад. пробл. механики и математики им. Я.С.Підстригача. – Л., 2005. – 32 с.

21. Вайсфельд Н.Д. Соударение конечного упругого цилиндра с жесткой преградой / Н.Д. Вайсфельд // Приклад. механика. – 2007. – 43, № 9. – С. 74–82.

22. Веселовский В.Б. Температурные поля многослойных элементов конструкций при воздействии полей различной физической природы / В.Б. Веселовский, А.В. Берлов // Metallurg. теплотехника. – 2009. – Вып. 1. – С. 21–33.

23. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В.М. Вигак. – К.: Наук. думка. – 1988. – 312 с.

24. Вігак В.М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду / В.М. Вігак, Б.М. Калиняк //Доповіді Національної академії наук України. – 1998, №11. – С. 60 – 67.

25. Вігак В.М. Термонапружений стан неоднорідного термочутливого циліндра у випадку одновимірного температурного поля / В.М. Вігак, Б.М. Калиняк //Нелинейные краевые задачи математической физики и их применения. – К.: Інститут Математики НАН України, – 1996. – С. 63 – 64.

26. Власов В.В. Применение функции Грина к решению инженерных задач теплофизики. Ч. 1 / В.В. Власов. – Московский институт химического машиностроения, 1972. – 441 с.

27. Гавриш А.П. Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий / А.П. Гавриш, П.Р. Шевчук // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 13-18.

28. Гавриш А.П. Определение остаточных напряжений в системе слой-покрытие при двустороннем высокотемпературном напылении / А.П. Гавриш,

Д.В. Ивашук, П.Р. Шевчук // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1989. – Вып. 29. – С.8-12.

29. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.

30. Гарматій Г. Конвективно-променевий нагрів термочутливого безмежного тіла з циліндричною порожниною / Г. Гарматій // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2010. – Вип. 11. – С. 66–72.

31. Гарматій Г.Ю. Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 192–200.

32. Гачкевич О.Р. Термонапружений стан біметалевої пластини за імпульсної електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульованим сигналом / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Н.Б. Мельник // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2008. – № 6. – С. 30–40.

33. Гачкевич А.Р. Методика прогнозирования напряженного состояния контактного соединения биметаллических пластин при импульсном электромагнитном воздействии / А.Р. Гачкевич, Р.С. Мусий, Н.Б. Мельник, И.И. Шимчак // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2008. – Вып. 44. – С. 3-15.

34. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей / А.Р. Гачкевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.

35. Гачкевич О.Р. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Д.В. Тарлаковський. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.

36. Горун О.П. Квазістатичний термопружний стан трискладового термочутливого шару за конвективно-променевого теплообміну / О.П. Горун // *Тези доп. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016:*

матеріали конфер: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Gorun.pdf>

37. Горун О.П. Одновимірне температурне поле двох півпросторів, з'єднаних проміжковим шаром за різних початкових температур / О.П. Горун // Тези доп. конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. – Львів: ІППММ. – 2011. – С. 65–66.

38. Григолюк Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с

39. Григоренко О.Я. Чисельне розв'язання задач про напружено-деформований стан сферичних оболонок змінної товщини в уточненій постановці [Електронний ресурс] / О.Я. Григоренко, О.В. Вовкодав, С.М. Яремченко // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – № 3. – С. 50-56.

40. Григоренко Я.М. Задача теории упругости неоднородных тел / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

41. Гринченко В.Т. Задача термоупругости для полуполосы / В.Т. Гринченко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1973. – Вып. 13. – С. 86-91.

42. Гринченко В.Т. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко// Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1969. – Вып. 8. – С. 110-125.

43. Гринченко В.Т. Об одном подходе к исследованию температурных напряжений в составном цилиндре / В.Т. Гринченко, А.Ю. Шевченко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 60-65.

44. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч – М.: Наука, 1965. – 208 с.

45. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М., 1974. – 542 с.
46. Дияк І.І. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів / І.І. Дияк, А.Ю. Чернуха // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 41-46.
47. Дяконюк Л. Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багатошарових конструкціях із урахуванням малих товщин окремих шарів /Л. Дяконюк, Я. Савула // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології: Наук. зб. – 2005. – Вип. 1. – С. 61-70.
48. Жук Я.А. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые термическим импульсом на торце / Я.А. Жук, И.К. Сенченков, Е.В. Бойчук// Акустичний вісник. – 2006. – Вып. 42. – С. 136-141.
49. Жук Я.А. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязкопластической балки при гармоническом нагружении / Я.А. Жук, И.К. Сенченков // Приклад. механика. – 2000. – 36, № 2. – С. 135–143.
50. Жук Я.О. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевого диска / Я.О. Жук, І.К. Сенченков, Л.Я. Васильєва // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 101-115.
51. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
52. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справочник / В.Е. Зиновьев. – Москва: Металлургия, 1989. – 384 с.
53. Канторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях: [учебное пособие для вузов] / М.И. Канторович. – М.: Советское радио, 1975. – 320 с.
54. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В.Г. Карнаухов. – К.: Наук. думка, 1982. – 258 с.

55. Карслоу Г. Операционные методы в прикладной математике / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: ИЛ, 1948. – 366 с.
56. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел. / Г. Карслоу, Д. Егер.- М.: Наука, 1964. – 488с.
57. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. школа, 1979. – 415с.
58. Кит Г.С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами / Г.С. Кит, М.В. Хай. – К.: Наук. думка, 1989. – 288 с.
59. Кит Г.С. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин / Г.С. Кит, О.В. Побережный. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с.
60. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 278 с.
61. Коваленко А.Д. Избранные труды / А.Д. Коваленко. – К.: Наук.думка, 1976. – 762 с.
62. Коваленко А.Д. Термоупругость / А.Д. Коваленко. – Киев: Вища школа, 1975. – 216с.
63. Коваленко В.С. Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами / В.С. Коваленко // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – №4. – С. 4-14.
64. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л.А. Коздоба. – Москва: Наука, 1975. – 228 с.
65. Коляно Ю.М. Статическая осесимметрическая задача термоупругости для многослойного цилиндра / Ю.М. Коляно, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Прикладная математика и механика. – 1991. – 55, вып. 6. – С. 1035-1040.
66. Коляно Ю.М. Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями / Ю.М. Коляно, Р.М. Кушнир // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 72–75.

67. Коляно Ю.М. Температурные напряжения от объёмных источников / Ю.М. Коляно, А.Н. Кулик. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
68. Конет І. М. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 118–134.
69. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут. – 2004. – 276 с.
70. Кочубей А.А. Метод конечных элементов в задачах теплопереноса / А.А. Кочубей, А.А. Рядно. – Днепропетровск: Изд. Днепропетр. ун-та, 1986. – 87 с.
71. Кравчун С.Н. Измерение тепловых свойств диэлектрических пленок зондовым методом периодического нагрева. I. Теория метода / С.Н. Кравчун, С.Т. Давитадзе, Н.С. Мизина, Б.А. Струков // Физика твердого тела. – 1997. – Т. 39, № 4. – С. 762–767.
72. Кравчун С.Н. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике / С.Н. Кравчун, А.А. Липаев. – Казань: Изд-во Казанск. Ун-та, 2006. – 208 с.
73. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лаплас / В.И. Крылов, Н.С. Скобля – М.:Наука, 1974. – 223 с.
74. Кузин А.Я. Теплоперенос в трехслойной конструкции с высокотеплопроводной вставкой при циклическом изменении температуры внешней среды / А.Я. Кузин, А.Н. Хуторной, Т.А. Мирошниченко, С.В. Хон// Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Т.12, № 1. – С.85–94.
75. Кушнір Р. Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності / Р. Кушнір, Ю. Процюк // Машинознавство. – 2009. – № 1 (139). – С. 13-18.

76. Кушнір Р.М. Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково–однорідних тіл при неідеальному контакті / Р.М. Кушнір // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 108–116.

77. Кушнір Р.М. Квazістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.–хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 4. – С. 7–16.

78. Кушнір Р.М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.

79. Кушнір Р.М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович, А.В. Ясінський. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с.

80. Кушнір Р.М. Пружний та пружно–пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: В–тво „СПОЛОМ”, 2003. – 320 с.

81. Кушнір Р.М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.–хім. механіка матеріалів. – 2002. – № 6. – С. 31–38.

82. Кушнір Р.М. Термопружність термочутливих тіл простої форми за складного теплообміну / Р.М. Кушнір, В.С. Попович // Актуальні аспекти фізико–механічних досліджень. Механіка. – К.: Наук. думка, 2007. – С. 153–164.

83. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. / В.А. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.

84. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков.-М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

85. Медведев Н.В. Применение сплайнов в теории приближений: учебное пособие / Н.В. Медведев. – Чебоксары: Чувашский государственный университет, 1977. – 68 с.
86. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
87. Михеев М.А. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия. – 1977. – 344 с.
88. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : моногр / Р.С. Мусій. – Львів : Растр-7, 2010. – 216 с.
89. Мусій Р.С. Рівняння в напруженнях три- дво- та одновимірних динамічних задач термопружності / Р.С. Мусій // Фіз-хім механіка матеріалів. – 2000. – Т 36, №2. – С. 20-26.
90. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
91. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872с.
92. П'янило Я.Д. Адаптивна схема обернення перетворення Лапласа за допомогою ортогональних рядів / Я.Д. П'янило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 45, № 1. – С. 33-38.
93. Панін С.В. Термонапружений стан циліндра зі змінними теплофізичними властивостями приповерхневого шару за нагріву об'ємними джерелами тепла / С.В. Панін, Р.М. Мартиняк, Р.М. Швець, О.І. Яцків, Б.Я. Бобик // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 3. – С. 139–152.
94. Пехович А.И. Расчеты теплового режима твердых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидких- Л.: Энергия, 1976. – 351с.
95. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. - Киев. - 1967. - Вып.7. - С.227-233.

96. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя / Я.С. Подстригач // Инж.-физ. журн. – 1963. – 6. № 10. – С.59-64.

97. Подстригач Я.С. Температурные поля и напряжения в элементах электро-вакуумных приборов / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, М.М. Семерак // - Київ: Наук. думка, 1981. – 342 с.

98. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368с.

99. Подстригач Я.С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – Киев: «Наукова думка», 1977. – 277 с.

100. Попов Г.Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С.А. Абдыманапов, В.В. Ефимов. – Алматы: Руан, 1999. – 113 с.

101. Попович В.С. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В.С. Попович, О.М. Вовк // Фіз.-мат. Моделювання та інформ.технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 146–155.

102. Попович В.С. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну / В.С. Попович, О.М. Вовк, Г.Ю. Гарматій // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, №4. – С. 151-158.

103. Попович В.С. Метод поетапної лінеаризації розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплопровідності термочутливих тіл / В.С. Попович // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 149–155.

104. Постольник Ю.С. Нелінійна прикладна термомеханіка / Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов – К.:НМЦ ВО МОНЦ, 2000. – 280 с.

105. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Ю.С. Постольник. – Донецьк: Вища школа, 1984. – 158 с.

106. Процюк Б.В. Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору / Б.В. Процюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С.146-153.

107. Процюк Б. Квазістатичний термопружний стан безмежного трискладового термочутливого тіла за дії джерела тепла / Б. Процюк, О. Горун // Наук. збірник “Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології”. – Львів, 2014. – Вип.19. – С.136-146.

108. Процюк Б.В. Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Збірник тез допов. ІХ МНК "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур". – Львів, 2014. – С.148-150.

109. Процюк Б.В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 95-109.

110. Процюк Б.В. Застосування функцій Гріна до визначення осесиметричного термопружного стану багатошарового циліндра / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 121-132.

111. Процюк Б.В. Квазістатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком / Б.В Процюк //Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38 – С. 63 – 69.

112. Процюк Б.В. Квазістатична задача термопружності для трискладового термочутливого стержня за конвективно-променевого теплообміну / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Матеріали конференції ІІІ МНК«Сучасні проблеми механіки - 2015». – Київ, 2015. – С.68.

113. Процюк Б.В. Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно–променевого теплообміну / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2. – С. 98-108.

114. Процюк Б.В. Квазістатичні температурні напруження в кусково-однорідному термочутливому просторі / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: Доп. VI Міжнар. наук. конф. (Львів, 26–29 травня 2003 р.). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України. – 2003. – С. 213–215.

115. Процюк Б.В. Метод функцій Гріна в одновимірних нестационарних задачах теплопровідності багат шарових пластин / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат. – 1998.– Вип. 51. – С. 76-84.

116. Процюк Б.В. Моделювання квазістатичного термопружного стану безмежного нерівномірно нагрітого трискладового термочутливого тіла / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Тези доп. I Міжнародної XX Всеукраїнська наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів, 2014. – С.129-130.

117. Процюк Б.В. Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу / Б.В. Процюк, І.І. Верба// Вісник Львів. ун.- ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200-205.

118. Процюк Б.В. Нестационарні неосесиметричні температурні поля багат шарових ортотропних циліндрів / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 221-228.

119. Процюк Б.В. Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 103-112.

120. Процюк Б.В. Температурне поле багат шарового циліндра при асимптотичному тепловому режимі / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 162-169.

121. Процюк Б.В. Температурне поле безмежного трискладового термочутливого тіла під дією імпульсного теплового потоку / Б.В. Процюк, О.П. Горун, В.В. Можаровський // Тези доп. МНК «Сучасні проблеми механіки та математики». – Львів: ІППММ. – 2013. – Т.1 – С. 164–166.

122. Процюк Б.В. Термопружна поведінка безмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»: матеріали конфер: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Gorun.pdf>

123. Процюк Б.В. Термопружна поведінка безмежного термочутливого трискладового тіла за дії об'ємного джерела тепла / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Вісник ТНТУ. – Тернопіль, 2014. – №4 (76). – С.53-63.

124. Процюк Б.В. Термопружний стан безмежного трискладового тіла за періодичної дії теплового потоку / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Тези доп. VII МНК «Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла». – Донецьк, 2013. – Т.2. – С.119–123.

125. Процюк Б.В. Термопружний стан безмежного трискладового тіла за періодичної дії теплового потоку / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Вісник Донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки. – 2013. – № 2. – С.64-70.

126. Процюк Б.В. Термопружний стан кусково-однорідного тіла під час остигання за різних початкових температур складових / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип.11. – С. 90–101.

127. Процюк Б.В. Термопружний стан нерівномірно нагрітого безмежного трьохскладового тіла за імпульсної дії теплового потоку / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2012» : матеріали конфер: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/35.pdf>

128. Процюк Б.В. Термопружний стан півбезмежного термочутливого Термопружний стан півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла та складного теплообміну / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2015. – Вип. 4. – С. 61-66

129. Процюк Б.В. Термопружний стан півбезмежного термочутливого трискладового стержня за конвективно–променевого теплообміну / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2016. – 52, № 3. – С. 15-23.

130. Процюк Б.В. Термопружний стан трискладового термочутливого стержня за врахування теплообміну та дії джерела тепла / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Тези доп. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015» : матеріали конфер: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://iarpmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Gorun.pdf>

131. Процюк Б.В. Тривимірна задача термопружності для рівномірно-нагрітого кусково-однорідного півпростору / Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 1. – С. 89-96.

132. Процюк Ю.Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури / Ю.Б. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. – 53, № 4. – С. 151-161.

133. Рыкалин Н.Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов. Справочник / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, И.В. Зуев, А.Н. Кокора. – Москва, "Машиностроение". – 1985. – 496 с.

134. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів / Я.Г. Савула. – Вид-во Львів. ун-ту. – К.:НМК ВО. – 1993. – 98 с.

135. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — Москва: Наука, 1978. — 592 с.

136. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656с.
137. Сахарова А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахарова, И. Альтенбаха – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
138. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с
139. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія / Г.Т. Сулим — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
140. Терлецький Р.Ф. Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання / Р.Ф. Терлецький, О.П. Турій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 186–201.
141. Трушевський В. Визначення нестационарного температурного поля в пластині за змішаних умов теплообміну на основі штучних нейронних мереж / В. Трушевський, Г. Шинкаренко, Н. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. Математики та інформатики. – 2008. – Вип. 14. – С.155–169.
142. Трушевський В. Застосування нейронних мереж до розв'язування задач теплопровідності / В. Трушевський, Г. Шинкаренко, Н. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Приклад. математика та інф-ка. – 2007. – Вип. 13. – С. 151-163.
143. Турій О. Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двошарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром /О. Турій // Фіз.-мат. моделювання та інформ.технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 118-132.
144. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.

145. Филиппов Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева/ Л.П. Филиппов. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 105 с.

146. Фильштинский Л.А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах: Учеб. пособие для студ. и асп. по спец. 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела и 08.02.02 - приклад. математика / Л.А. Фильштинский // Сум. гос. ун-т. – Сумы, 2001. – 450 с.

147. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

148. Христофоров А.В. Интерференция температурных волн: [учебно-методическое пособие] / А.В. Христофоров, И.С. Абросимова. – Казань: КФУ, 2012. – 18 с.

149. Шахно С.М. Ітераційно-різницеві методи у нестационарних задачах теплопровідності / С.М. Шахно, Г.П. Ярмола // Математичне і комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Випуск 3. – С.214–226.

150. Шевчук В. Визначення температурного поля півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання/ В. Шевчук, О. Гаврись, П. Шевчук // ІХ МНК «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». Під заг. редакцією І.О. Лудковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача – 2014. – С. 173– 175.

151. Шевчук В. Дослідження температурного поля півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну / В. Шевчук, О. Гаврись // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 229-240.

152. Шевчук В.А. Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні / В.А. Шевчук, О.П. Гаврись // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, № 4. – С. 179-185.

153. Шевчук В.А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багат шаровим покриттям / В.А. Шевчук // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54, № 2. – С. 179–185.

154. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г.А. Шинкаренко. – К.:НМКВО, 1991. – 88 с.

155. Яцків О.І. Термонапружений стан циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні параметри якого змінюються в часі / О.І. Яцків, Р.М. Швець, Б.Я. Бобик // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54, № 4. – С. 90–105.

156. Ang W.T. Nonlinear heat equation for nonhomogeneous anisotropic materials: a dual-reciprocity boundary element solution. / W.T. Ang, D.L. Clements // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* – 2010. – Vol. 26, № 4. – PP. 771-784.

157. Changyong Cao. A Novel Boundary-Integral Based Finite Element Method for 2D and 3D Thermo-Elasticity Problems / Changyong Cao, Qing-Hua Qin, Aibing Yu // *Journal of Thermal Stresses.* – 2012. – Vol. 35, Issue 10. – PP. 849-876.

158. Chen H. Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening / H. Chen, J. Kysar, Y.L. Yao // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2004. – P. 713–723.

159. Davies B. Integral transforms and their applications / B. Davies – Springer, 2002. – 367 pp.

160. F. de Monte. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach / F. de Monte // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 2000. – V.43. – P. 3607 – 3619.

161. Gaul L. Boundary element methods for engineers and scientists / L. Gaul, M. Kogl, M. Wagner. – Berlin: Springer, 2003. – 488 p.

162. Goto T. A boundary integral equation method for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties / T. Goto,

M. Suzuki // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1996. – 39, № 4. – P. 823–830.

163. Kim K.S. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material / K.S. Kim, N. Noda // *Acta Mechanica*. – 2002. – V. 156.– PP. 145-161.

164. Kushnir R. A Method of the Green's Functions for Quasistatic Thermoelasticity Problems in Layered Thermosensitive Bodies under Complex Heat Exchange / R. Kushnir, B. Protsiuk // *Operator Theory: Advances and Applications*. – 2009. – Vol. 191. – P. 143-154.

165. Leind M. Solution of a time-dependent heat conduction problem by an integral-equation approach /M. Leind, E. R. Oberaigner, T. Antretter // *Computational Materials Science*. – 2012. – 52(1). – P. 178–181.

166. Lesnic D. Identification of the thermal conductivity and heat capacity in unsteady nonlinear heat conduction problems using the boundary element method / D. Lesnic, L. Elliott, D.B. Ingham // *Journal of Computational Physics*. – 1996. – Vol. 126, № 2.– PP. 410–420.

167. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties / N. Noda // *Thermal Stresses I*. – North-Holland, Amsterdam, 1986. – P. 397-483.

168. Piessens R. Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev polynomial approximations / R. Piessens // *Jour. Of Computational and Appl. Math* (Publisher: Elsevier Science Publishers B.V.) – 2000. – Vol. 121, Issue 1-2.

169. Qin Y. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam / Y. Qin, J. Zou, C. Dong et al // *Nucl. Instrum.Meth. in Phys. Resch, Part B*.– 2004.– 225.– P. 544–554.

170. Wang H. Fundamental-Solution-Based Hybrid Element Model for Nonlinear Heat Conduction Problems with Temperature-Dependent Material

Properties / H. Wang, M. Han, F. Yuan, Z. Xiao./ Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013, Article ID 695457. – 8 pages.

171. Xu Yangjian. Convective Heat Transfer Steady Heat Conduction and Thermal Stress in a Ceramic/FGM/Metal Composite EFBF Plate / Xu Yangjian, Tu Daihui, Du Haiyang // Journal of Software. – 2011. – Vol.6, No 2. – P.201–208.

172. You J. Modeling the snow surface temperature in an energy balance snowmelt model. [electronic resource] /J. You, D.G Tarboton, C.H. Luce. // Lincoln, Nebraska. Hydrological Processes. – 2004. – Electronic regime of access: http://uwrl.usu.edu/www/programs/water/Publications/Modeling_Snow_Surface.pdf

173. Zamani A. Higher order tip enrichment of eXtended Finite Element Method in thermoelasticity / A. Zamani, R. Gracie, M.R. Eslami.//Computational Mechanics. – 2010. – Vol. 46, no. 6. – PP. 851-866.

174. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. / X. Zhao // Int.J. of Solids and Structures. – 2004. – V. 41. – P. 3653-3674.

175. Zhefu Wang. Applications of Thermal Wave Technique in Liquid Thermal Conductivity Measurements and Flow Field Diagnostics: an abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering / Zhefu Wang. – Ann Arbor. United States, 2008. – 148 p.