

## ВІДГУК

офіційного опонента

доктора фіз.-мат. наук, професора Стояна Володимира Антоновича  
на дисертаційну роботу **Дияка Івана Івановича**

«Чисельне моделювання деформаційних процесів на основі поєднання методів скінчених і граничних елементів», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

### **Актуальність теми**

Сьогодення характеризується швидкою зміною технологічних пріоритетів, в яких традиційні конструкційні матеріали все частіше заміщають матеріалами з новими фізичними властивостями (полімерні композити, кераміка, напівпровідники, біоматеріали...). Дедалі більше спостерігається і відхід від традиційного макромасштабного синтезу нових матеріалів до масштабу нижчого рівня, а саме нано та молекулярного рівня, що також призводить до появи матеріалів з якісно новими фізичними властивостями. Крім того, поряд з традиційними методами виготовлення конструкцій, все більше набуває використання 3D-друк, який дозволяє багатоелементні конструкції замінити на складні моноелементні. А це означає, що актуальності набирає питання розвитку методів розв'язування задач математичної фізики, що стосуються моделювання різних фізичних полів в складних механічних конструкціях з врахуванням властивостей нових матеріалів. Зауважимо, що при цьому зростають вимоги і до точності інженерного проектування таких конструкцій. Актуальним при цьому є і розвиток нових числових методів математичної фізики – простих, надійних і високоточних.

Відомо, що більшість універсальних засобів автоматизованого проєктування базується на добре відомому методі скінчених елементів розв'язання крайових задач математичної фізики. Вимоги ж до збільшення точності та швидкості розрахунків є надзвичайно актуальними, що все частіше змушує дослідників звертати увагу на інші чисельні методи, які є менш універсальними, але дають можливість швидко і надійно збільшити точність розв'язання таких задач. Це стосується і класично відомого методу граничних елементів. Логічним постає питання про оптимальне поєднання методу граничних елементів та методу скінчених елементів так, щоб сповна використати їх індивідуальні переваги, уникаючи при цьому наявних в них недоліків. Практичну реалізацію цієї ідеї і виконав Дияк Іван Іванович в своїй дисертаційній роботі, запропонувавши та вміло реалізувавши метод декомпозиції області досліджуваного тіла, як основного інструмента для чисельного розв'язання складних задач термопружності та задач механіки

твердого пружнодеформованого тіла. Досліджуючи сформульовану проблему, автор дисертації ставить і вдало розв'язує задачу пошуку найбільш придатної моделі динаміки пружно неоднорідних середовищ для числових розрахунків. Зауважимо, що розв'язки розглянутих в роботі задач відповідають канонам, яких прийнято дотримуватися в теорії чисельного аналізу. Зокрема, однією з ключових задач є побудова виразів для оцінки похибки обчислень, а також доведення умов збіжності ітераційних процедур та надійності розроблених автором обчислювальних схем. Незаперечною є актуальність і запропонованого автором роботи методу декомпозиції досліджуваної області в час багатопроцесорних (багоядерних) систем та їх можливостей по виконанню паралельних обчислень.

Все це говорить про те, що розв'язана в дисертаційній роботі Дияка І.І. наукова проблема побудови та аналізу нових ефективних гетерогенних чисельних схем для розв'язання задач математичної фізики та механіки твердого деформованого тіла для просторово складних областей є надзвичайно **актуальною** і заслуговує на увагу.

Актуальність проблеми, важливість та перспективність отриманих автором наукових результатів підтверджується також тим, що робота виконувалася у рамках держбюджетних наукових тем кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України (з 1997 по 2015 роки). Про користь, актуальність та важливість даного дисертаційного дослідження говорить і те, що результати за тематикою дисертації автор успішно впровадив у навчально-наукових закладах Австрії, Польщі та США.

### **Наукова новизна дисертаційної роботи**

Результати дисертаційної роботи можна умовно розділити на такі, що стосуються розробки нових математичних моделей досліджуваних середовищ, та результати, які спрямовані на побудову гетерогенних числових методів розв'язання задач математичної фізики в просторово складних областях.

Найважливіші наукові результати щодо моделей досліджуваних в роботі пружних середовищ є такими:

- запропоновано нову математичну модель деформування в плоскошаруватих композитах, в якій опис деформаційних процесів здійснюється за рахунок гомогенізації параметрів матеріалу. Така модель дозволила спростити чисельні схеми МСЕ та МГЕ для визначення розподілу деформацій довкола локальних неоднорідностей в плоских структурах з анізотропним матеріалом шарів;
- розвинуто  $h$ -адаптивний алгоритм побудови моделі пружного середовища для розв'язання задач теорії пружності методом скінчених елементів, який дозволяє досягнути кращої загальної точності за рахунок

аналізу локальних похибок та корегування сітки розбиття областей дослідження;

- розроблено схему розв'язання задачі квазістатичної термопружності на основі використання методу Гальоркіна та прямого методу граничних елементів. Покращення ефективності методу досягнуто за рахунок спеціальної методики зведення інтегралів по області розв'язування задачі до поверхневих. Методом колокацій та прямим методом граничних елементів розв'язано задачу нестационарної теплопровідності, в якій використано фундаментальні розв'язки за просторовими та часовою координатами, що в свою чергу дало змогу врахувати ненульову початкову температуру для задачі термопружності;

- для розв'язання динамічної задачі теорії пружності для осесиметричних анізотропних об'єктів запропоновано моделі ізопараметричних апроксимацій різних порядків на сирендипових чотирикутниках меридіонального перетину та вперше розробленої гетерогенної чисельної схеми напіваналітичного МСЕ. Такий підхід дозволив ітераційно (метод ітерацій в підпросторі) визначити власні значення і власні вектори. В основу чисельної схеми розв'язання задачі Коші покладено розклад шуканої функції у базисі власних функцій.

Наукова новизна результатів щодо чисельних методів та схем полягає у наступному:

- вперше розроблено та обґрунтовано чисельну схему дослідження математичної моделі, що описує силову пружну взаємодію масивного тіла з пластиною типу Тимошенка. Така схема базується на суміщенні методу скінчених елементів та прямого методу граничних елементів;

- побудовано нову обчислювальну схему розв'язування задачі теорії малих пружнопластичних деформацій на основі методу змінних параметрів пружності та методу декомпозиції області. Для імплементації такої схеми розроблено лінійний ітераційний алгоритм декомпозиції області, в якому суміщено метод скінчених елементів та прямий метод граничних елементів;

- вперше запропоновано гетерогенну обчислювальну схему, в якій на основі альтеруючого методу Шварца суміщено непрямий метод граничних елементів та метод скінчених елементів для розв'язування задач теорії пружності;

- запропоновано паралельну схему Робіна щодо декомпозиції області, в якій для розв'язання задач одностороннього контакту для багатьох пружних тіл використано метод штрафної функції.

### **Повнота викладу основних положень в публікаціях і авторефераті та їх апробація**

Основні наукові результати дисертації відображені в 60 публікаціях, 25 з яких - статті у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України, 20 - статті у наукових журналах, що входять до

переліку провідних міжнародних наукометричних баз (Scopus, MathSciNet, ZnMATH та ін.), один навчальний посібник, а також статті в інших періодичних наукових виданнях і працях міжнародних конференцій за профілем дисертації.

В опублікованих працях автора у повному обсязі викладено основні результати дисертаційного дослідження. Підтвердженням є і особистий внесок здобувача в сумісних публікаціях. Сім наукових праць опубліковано автором одноосібно. Кількість публікацій, їх науковий рівень та рівень апробації результатів дисертації відповідають вимогам, що ставляться до докторських дисертацій в Україні. Основні наукові положення та висновки дисертаційної роботи повно відображені у авторефераті роботи.

### **Структура та зміст дисертації**

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел з 455 найменувань.

У вступі подано коротку характеристику роботи, в тому числі сформульовано основні наукові результати та наголошено на їх практичному значенні.

У першому розділі сформульовано та розв'язано складну задачу пружної взаємодії масивного тіла з тонкостінним елементом. В якості моделі останнього вибрано модель пластини Тимошенка. Для такої задачі рівняння теорії пружності та граничні умови приведено до вигляду, який дозволяє сконструювати гетерогенну схему чисельних обчислень, що включає метод граничних елементів для тонкостінної області досліджуваного об'єкту та метод скінчених елементів для масивної основи. Така реалізація принципу декомпозиції області показала свою ефективність, про що свідчать як теоретично отримані оцінки похибок для чисельних методів, так і результати чисельного експерименту.

Другий розділ присвячено розв'язанню квазістатичних задач термопружності, де детально проаналізовано прямий метод граничних елементів і визначено його основні позитиви. Для отримання чисельного розв'язку задачі термопружності застосовано метод Гальоркіна та метод колокації.

Третій розділ вирізняється серед інших, оскільки в ньому автор формулює та розв'язує пружно-динамічну задачу для тривимірного осесиметричного тіла. Розв'язок задачі при несиметричних пружно-динамічних навантаженнях знайдено шляхом розв'язання відповідної спектральної задачі, яка полягає у знаходженні власних значень та функцій. В роботі продемонстровано, що таку спектральну задачу можна ефективно розв'язати методом скінчених елементів, базовою моделлю для якого є сирендипові чотирикутники.

Виділивши переваги методу скінчених елементів та методу граничних елементів в четвертому розділі автор формулює та розв'язує нелінійну задачу про пружно-пластичні деформації об'єкту. Істотне спрощення чисельної схеми розв'язання такої задачі і тут досягається за рахунок методу декомпозиції області.

У п'ятому розділі розглянуто сукупність задач, які підтвержують достовірність розвинутої в дисертації ідеї про те, що метод декомпозиції області є ефективним інструментом для побудови чисельних схем аналізу пружних та пружно-пластичних деформацій, в тому числі й числових схем, які допускають паралелізацію обчислень. Зокрема, розв'язано задачу про контакт кількох пружних тіл та задачу про пружно-пластичні деформації в шаруватому (гомогенізованому) композиті з концентратором напружень. В обох випадках показано можливість суміщення методу граничних елементів та методу скінчених елементів. Гетерогенну схему обчислень реалізовано через альтеруючий метод Шварца.

У висновках викладено основні наукові результати роботи. Структура дисертації логічна, відповідає меті та поставленим у роботі завданням. Наукові терміни у роботі вжиті коректно. Пояснення у тексті супроводжуються необхідною кількістю рисунків, таблиць та математичними викладками. На всі рисунки, таблиці та літературні джерела є посилання у тексті. Робота виконана на високому теоретичному рівні, а її обсяг відповідає змістовному наповненню.

### **Обґрунтованість та достовірність наукових положень та отриманих в роботі результатів**

Основними інструментами обґрунтування наукових положень та висновків, викладених в дисертації, є методи функціонального аналізу та числа верифікація. Достовірність основних наукових положень і одержаних результатів забезпечується використанням фізично обґрунтованих математичних моделей процесів пружно-пластичної деформації та теплопереносу. Про достовірність наукових результатів можна також судити з того, наскільки системно та математично строго автор підходить до доведення теорем про існування та єдиність розв'язків розглядуваних задач, а також теорем про збіжність використовуваних при цьому ітераційних схем.

Зокрема у першому розділі доведено теорему про додатню визначеність оператора задачі теорії пружності для масивної опори з тонкостінним елементом. Доведено теорему про неперервність і еліптичність білінійної форми відповідної варіаційної задачі. Доведено леми та теорему, з яких отримано асимптотичні оцінки наближених розв'язків. У другому розділі доведено теорему про асимптотичну оцінку похибки для методу Гальоркіна, який застосовано до розв'язання задачі термопружності. Про збіжність та точність розв'язку задачі осесиметричної динаміки

тривимірного пружного тіла в третьому розділі роботи зроблено висновок на основі виконаних там чисельних результатів. При дослідженні пружно-пластичних деформацій в четвертому розділі доведено теорему про геометричну збіжність процесу послідовних наближень в методі змінних параметрів пружності. У п'ятому розділі у відповідності до сформульованих задач здійснено теоретичний аналіз, який дав можливість довести теорему про єдиність розв'язку задачі мінімізації та теорему про лінійну збіжність ітераційного процесу, який використано для розв'язання задачі пружного контакту кількох тіл. Достовірність моделі гомогенізації плоско шаруватої структури підтверджено для випадку граничного переходу. Спеціальну увагу приділено оцінці похибок та обґрунтуванню розвинутого в роботі методу  $h$ -адаптації. Теоретичного (у вигляді нерівностей) встановлено зв'язок між похибкою методу скінчених елементів та прямого методу граничних елементів, який має місце при розбитті області регулярною сіткою. Збіжність запропонованого автором методу  $h$ -адаптації підтверджено чисельними експериментами.

Загальним критерієм достовірності розв'язків задач термопружності є оцінка величини похибки. В дисертації така оцінка проведена для кожної із розроблених схем. Крім того отримані значення похибки порівняно з похибками відомих методів розв'язання розглядуваних задач. Достовірність отриманих в роботі наукових результатів також підтверджується шляхом порівняння їх з результатами інших авторів.

Автор дисертації бере до уваги те, що розробка методів розв'язання задач математичної фізики спрямована на практичне їх використання для проектування та ідентифікації механічних характеристик конструкцій. Саме тому, при обґрунтуванні основних тверджень, отриманих теоретично, автор дисертації враховує умови їх фізичної реалізації та практичного застосування.

Підсумовуючи сказане, можна засвідчити, що основні наукові результати в дисертації в цілому є теоретично добре обґрунтованими, а їх достовірність підтверджена широким обсягом числових результатів, які отримано для тестових задач.

### **Важливість отриманих результатів для науки і рекомендації щодо їх використання**

Будучи спрямованою на побудову і аналіз чисельних гетерогенних схем, дисертаційна робота містить також великий обсяг теоретичних досліджень, які істотно доповнюють теорію варіаційних методів математичної фізики та методів дослідження стану пружно деформованих тіл.

Важливість отриманих результатів підтверджується тим, що запропоновані чисельні схеми мають загальний характер і їх можна застосувати до аналізу різних фізичних явищ:

- явищ теплопередачі;
- явищ пружних деформацій;
- пружно-динамічних явищ;
- пружно-пластичних явищ;
- явищ пружного контакту.

Про загальний характер отриманих результатів свідчить те, що розроблені методи показали свою ефективність при розв'язанні пружно-деформаційних задач для тіл з різних матеріалів: від гомонізованих структур та матеріалів з анізотропією фізичних властивостей до матеріалів з нелінійними характеристиками.

Отримані результати також мають велике практичне значення, оскільки дозволяють досліджувати механічні властивості різних об'єктів: від великих конструкцій, що використовуються в будівництві та важкій промисловості, до елементів прецизійної механіки та МЕМС (мікроелектромеханічних систем).

Попри те, що робота спрямована на розв'язання прямих задач математичної фізики та дослідження стану пружно деформованих тіл, розвинуті методи можна застосувати і в схемах мінімізації нев'язки в задачах синтезу конструкцій, що мають задані характеристики. А відтак, сфера практичного застосування результатів дисертації охоплює і задачі діагностики з метою оцінки ресурсу пружнодинамічних елементів конструкцій.

Результати роботи можуть знайти практичне впровадження на підприємствах, які займаються проектуванням елементів механічних систем в різних галузях промисловості, а також в профільних науково-дослідних інститутах, зокрема в інститутах Відділення фізико-технічних проблем матеріалознавства Національної академії наук України.

Окремо варто вказати на доцільність впровадження результатів в навчальний процес на факультетах прикладної математики та інформатики на механіко-математичних факультетах вищих навчальних закладів в Україні та закордоном.

### **Зауваження**

Розглянута дисертація та автореферат не позбавлені певних недоліків і викликають деякі **зауваження**. Відзначу наступні:

- Обґрунтовуючи актуальність теми дослідження в авторефераті не наведено імен жодного з відомих вчених, на основоположних роботах яких базується доробок дисертанта. Може скластися хибне враження, що дисертація є початком нового наукового напрямку в науці, який до цього часу не розвивався, а автор – єдиний, хто такими проблемами займається. Хоча, насправді, це не так;

- В пункті «наукова новизна» задекларовано, що «вперше запропоновано та досліджено гетерогенну чисельну схему НМГЕ та МСЕ на основі

альтернуючого методу Шварца розв'язання задачі осесиметричної теорії пружності» слово «осесиметричної» вжито помилково. З дисертації можна зробити висновок, що отриманий результат є більш загальним і охоплює не лише вісесиметричні об'єкти дослідження;

- В дисертаційній роботі зроблено акцент на  $h$ -адаптації, як інструменті вибору оптимальної математичної моделі середовища для методу скінчених елементів. При цьому не вказано переваги та аргументи на користь такого підходу в порівнянні з іншими, зокрема  $p$ -адаптації та  $ph$ -адаптації;

- При побудові алгоритму непрямого методу граничних елементів для задач теорії пружності на основі методу Гальоркіна, як і при реалізації чисельної схеми розв'язання осесиметричної теорії пружності, що будується на гібридних апроксимаціях НГМЕ та методу скінчених елементів МСЕ автор приходять до СЛАР (2.93) та (4.72) відповідно, умови існування та однозначності розв'язку яких автор не досліджує. А якщо розв'язку СЛАР не існує? Якщо він не один? На ці питання відповіді у роботі нема.

- Дуже багато не реалізованих посилань на літературу – квадратні дужки є, а посилання нема (див. стор. 44, 56, 92...).

- По закінченню багатьох формул відсутні крапки та коми (43; 53, 218 і так далі).

- Є і описки у формулах (див. (2.40), (2.43), (3.4)).

Незважаючи на висловлені зауваження, в цілому дисертація справляє дуже позитивне враження завдяки новизні, ґрунтовності теоретичних досліджень та практичного значення використання її результатів.

### **Загальна оцінка роботи і висновок**

Оцінюючи роботу в цілому, вважаю, що дисертаційна робота Дияка Івана Івановича на тему «Чисельне моделювання деформаційних процесів на основі поєднання методів скінчених і граничних елементів» є завершеною науковою працею, в якій отримані нові, науково обґрунтовані та практично важливі результати, що у сукупності вирішують наукову проблему побудови та аналізу нових ефективних гетерогенних чисельних схем для розв'язання задач теорії пружності та математичної фізики. Отримані результати дають підстави стверджувати, що автором створений та апробований єдиний підхід до математичного моделювання теплових і силових полів в різних конструкційних матеріалах і неоднорідних середовищах на основі поєднання методів скінчених елементів та граничних елементів, що передбачає декомпозицію області досліджень та дає можливість розпаралелити процеси обчислень, і, як наслідок, дозволяє аналізувати термонапруженодеформований стан складних конструкцій, контролюючи похибку обчислень.



Основні результати дисертації відповідають вимогам паспорту наукової спеціальності 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи в галузі фізико-математичних наук, зокрема пунктів 1, 2, 4, 6 та 7 у розділі II.

Дисертаційна робота «Чисельне моделювання деформаційних процесів на основі поєднання методів скінченних і граничних елементів» за своїм змістом відповідає вимогам пунктів 9, 10, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника» щодо докторських дисертацій, а її автор – Дияк Іван Іванович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор  
професор кафедри моделювання складних систем  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

  
Стоян В.А.

Підпис проф. Стояна В.А. засвідчую

