

ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ МАТЕРИАЛА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ОРТОТРОПНЫМИ ВОЛОКНАМИ, ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛИТЕЛЬНОЙ МИКРОПРОЧНОСТИ

Теория длительной повреждаемости однородного материала обобщена на случай ортотропного волокнистого композитного материала стохастической структуры. В основу теории положены уравнения механики микрогетерогенных сред такой структуры. Процесс повреждаемости компонентов композита моделируется образованием стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса, которое принимается случайной функцией координат. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние ортотропного волокнистого композита с микроповреждениями в компонентах определяются на основе стохастических уравнений упругости ортотропных сред. Для заданных макронапряжений или макродеформаций и произвольного момента времени сформулированы уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости компонентов ортотропного волокнистого материала от времени, макронапряжений или макродеформаций от времени, а также получены соответствующие кривые в случае ограниченной функции длительной микропрочности, аппроксимированной экспоненциальным законом.

1. Введение. Один из возможных механизмов разрушения материалов и элементов конструкций связан с появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих, как правило, к образованию магистральных трещин. Согласно физическим представлениям поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микропустот или разрушенных микрообъемов, которые можно моделировать квазисферическими микропорами, пустыми или заполненными частицами разрушенного материала [4, 6, 8]. Математические модели, описывающие кратковременную микроповреждаемость, предложены для однородных материалов [2, 8] и композитных материалов с изотропными [6, 11, 12] и анизотропными компонентами [3, 10, 13, 14]. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки, где время разрушения зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности. Модель, описывающая длительную повреждаемость однородного материала, предложена в работе [9]. В настоящей статье теория длительной повреждаемости применяется для исследования композитного материала, армированного однонаправленными волокнами. Предполагается, что матрица является изотропной, в то время как волокна обладают ортотропной симметрией упругих свойств. Рассматривается случай, когда процесс повреждаемости происходит в матрице композита.

Построен алгоритм вычисления зависимостей микроповреждаемости матрицы ортотропного волокнистого композита от времени, макронапряжений или макродеформаций от времени, а также приведены соответствующие кривые в случае экспоненциальной функции долговечности.

2. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными эллипсоидальными (в поперечном сечении) волокнами. Предполагается, что матрица изотропная, а волокна ортотропные, причем в процессе нагружения в мат-

рице возникают микроразрушения, которые моделируются случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijk\ell}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_{ijk\ell}^*$ – тензор эффективных упругих модулей, который определяется [5] как функция тензора упругих модулей поврежденных компонентов $\lambda_{ijk\ell}^{[1]}$, $\lambda_{ijk\ell}^{[2]}$, объемного содержания волокон c_1 и параметра \bar{s}_2 , характеризующего эллипсоидальное волокно:

$$\lambda_{ijk\ell}^* = \lambda_{ijk\ell}^* (\lambda_{mnp\ell}^{[1]}, \lambda_{mnp\ell}^{[2]}, c_1, \bar{s}_2), \quad \bar{s}_2 = \frac{s_2}{s_1}, \quad m, n, p, r = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где s_1 , s_2 – размеры полуосей эллипсоида в направлении осей симметрии, индексами «1» и «2» сверху обозначены величины, относящиеся соответственно к включению и матрице.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ijk\ell}^{[1]}$, $\lambda_{ijk\ell}^{[2]}$ определяются [15] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов $\lambda_{ijk\ell}^1$, $\lambda_{ijk\ell}^2$ и их пористости p_1 , p_2 , характеризующие поврежденность:

$$\lambda_{ijk\ell}^{[1]} = \lambda_{ijk\ell}^1 (\lambda_{mnp\ell}^1, p_1), \quad \lambda_{ijk\ell}^{[2]} = \lambda_{ijk\ell}^2 (\lambda_{mnp\ell}^2, p_2). \quad (3)$$

Если задан тензор макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ или макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$, то на основе зависимостей (1) и соотношений

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijk\ell}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle, \quad r = 1, 2, \quad (4)$$

можно определить средние напряжения $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ и средние деформации $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$ поврежденного r -компонента как функции макродеформаций или макронапряжений [6]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^r \rangle &= f_{ij}^1(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), & \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle &= f_{ij}^2(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), \\ \langle \sigma_{ij}^r \rangle &= f_{ij}^3(\langle \sigma_{kl} \rangle), & \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle &= f_{ij}^4(\langle \sigma_{kl} \rangle). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом средние по скелету r -компоненты напряжений $\bar{\sigma}_{ij}^r$ связаны со средними напряжениями $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ поврежденного r -компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \langle \sigma_{ij}^r \rangle. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда процесс накопления повреждений происходит в матрице, и примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера – Мизеса [1]:

$$I_{\bar{\sigma}}^2 = k_2, \quad I_{\bar{\sigma}}^2 = (\bar{\sigma}_{ij}^{2'}, \bar{\sigma}_{ij}^{2'})^{1/2}, \quad (7)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^{2'}$ – девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений, k_2 – предельное значение инварианта $I_{\bar{\sigma}}^2$, являющееся случайной функцией координат.

Если инвариант $I_{\bar{\sigma}}^2$ для некоторого микрообъема материала матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некото-

рого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{\bar{\sigma}}^2$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2), \quad (8)$$

причем согласно (7) $\varphi(k_2, k_2) = 0$ и $\varphi(0, k_2) = \infty$.

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описать на полубесконечном интервале распределением Вейбулла:

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}, \\ 1 - \exp(-m_2(k_2 - k_{02})^{\alpha_2}), & k_2 \geq k_{02}, \end{cases} \quad (9)$$

где k_{02} – минимальная величина предельного значения k_2 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала матрицы; m_2 , α_2 – постоянные, характеризующие разброс микропрочности материала.

Примем, что случайное поле предела микропрочности k_2 является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами рассматриваемого макрообъема материала. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F(k_2)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\bar{\sigma}_{ij}^2$ функция $F(k_2)$ согласно (7), (9) определяет относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость матрицы равной p_{02} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при кратковременной повреждаемости [8]:

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F(I_{\bar{\sigma}}^2). \quad (10)$$

Если напряжения в матрице $\bar{\sigma}_{jk}^2$ действуют в течение некоторого времени t , то согласно критерию длительной прочности за это время разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство, следующее из (8):

$$t \geq \tau_k^2 = \varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2), \quad (11)$$

где инвариант $I_{\bar{\sigma}}^2$ определяется выражениями (7).

Время τ_k^2 хрупкого разрушения для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{\bar{\sigma}}^2 > 0$. В этом случае функцию долговечности $\varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2)$ можно представить экспоненциальной зависимостью [9]:

$$\varphi(I_{\bar{\sigma}_2}, k_2) = \tau_{02} \left\{ \exp \ell_2 \left[\left(\frac{k_2}{I_{\bar{\sigma}_2}} \right)^{n_1} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_2}, \quad (12)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{02} , ℓ_2 , n_1 , n_2 для аппроксимации экспериментальных кривых.

Подставляя (12) в (11), приходим к неравенству

$$k_2 \leq I_{\bar{\sigma}_2} \left[1 + \frac{1}{\ell_2} \ln(1 + \bar{t}_2^{1/n_2}) \right]^{1/n_1}, \quad \bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}}. \quad (13)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F[I_{\sigma}^2 \psi(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi(\bar{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{\ell_2} \ln(1 + \bar{t}_2^{1/n_2}) \right]^{1/n_1}, \quad (14)$$

определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов в неразрушенной до нагружения части материала матрицы в момент времени \bar{t}_2 . Тогда уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02}) F \left[\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^2}{1 - p_2} \psi(\bar{t}_2) \right], \quad (15)$$

где пористость p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^2$ определяется выражениями (6), (7) и является функцией макродеформаций или макронапряжений согласно (5).

Уравнение баланса пористости (15) с учетом (6), (7), (14) определяет в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени эти уравнения определяют его длительную поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной, развивающейся во времени.

3. Исходя из изложенной выше модели, очевидно, что для определения деформативных свойств и повреждаемости композита на основе изотропной матрицы с ортотропными волокнами, имеющими форму эллипсоида в поперечном сечении, при условии, что микроповреждения происходят в матрице, т.е. $p_2 \neq 0$, необходимо решить задачу об определении эффективных упругих модулей данного композитного материала и получить соотношения (2), (3) в явном виде. Переходя к матричным обозначениям, можем записать [5] решение задачи для девяти составляющих матрицы эффективных модулей упругости рассматриваемого композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{22}^* , λ_{23}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* , λ_{55}^* , λ_{66}^* :

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^* &= \langle \lambda_{ij} \rangle + c_1 c_2 L_{ij}, & i, j &= 1, 2, 3, \\ \lambda_{pp}^* &= \langle \lambda_{pp} \rangle + c_1 c_2 \frac{4M_{pp}(\lambda_{pp}^{[3]})^2}{1 - 4M_{pp}\lambda_{pp}'}, & p &= 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (16)$$

где суммирование по индексу p не производится. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= P_{1i} R_{1j} + P_{2i} R_{2j}, \\ \lambda_{ij}' &= c_1 \lambda_{ij}^{[2]} + c_2 \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^c, & \lambda_{ij}^{[3]} &= \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^{[2]}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$R_{nj} = M_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + M_{2n} \lambda_{2j}^{[3]}, \quad P_{nj} = N_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + N_{2n} \lambda_{2j}^{[3]}, \quad n = 1, 2. \quad (18)$$

Параметры M_{nm} , N_{nm} , $n, m = 1, 2$, и M_{pp} имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{2}{\pi} \left(\lambda_{66}^c A_3 + \frac{\lambda_{22}^c}{s_2^2} A_3 \right), & M_{12} &= -\frac{2}{\pi s_2^2} (\lambda_{12}^c + \lambda_{66}^c) A_2, \\ M_{22} &= -\frac{2}{\pi s_2^2} \left(\lambda_{11}^c A_2 + \frac{\lambda_{66}^c}{s_2^2} A_1 \right), & M_{44} &= -\frac{1}{2\pi s_2^2} B_1, \\ M_{55} &= -\frac{1}{2\pi} B_2, & M_{66} &= -\frac{1}{2\pi} \left(\lambda_{11}^c A_3 - \frac{2\lambda_{12}^c}{s_2^2} A_2 + \frac{\lambda_{22}^c}{s_2^4} A_1 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Постоянные λ_{ij}^c принимаем в виде [5]

$$\lambda_{ij}^c = \begin{cases} \langle \lambda_{ij} \rangle, & \lambda_{ij}^{[1]} \leq \lambda_{ij}^{[2]}, \\ \langle \lambda_{ij}^{-1} \rangle^{-1}, & \lambda_{ij}^{[1]} \geq \lambda_{ij}^{[2]}, \end{cases} \quad (20)$$

\bar{s}_2 – параметр эллипсоидального волокна, определяемый в (2), а величины A_j , $j = 1, 2, 3$, имеют различный вид в зависимости от знака параметра Q :

$$Q = f^2 - q, \quad (21)$$

где

$$f = \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c - \lambda_{12}^c (\lambda_{12}^c + 2\lambda_{66}^c)}{\bar{s}_2^2}, \quad q = \frac{4\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}{\bar{s}_2^4}. \quad (22)$$

Если $Q > 0$, то

1) при $f > 0$ имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi \bar{s}_2^{-4}}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \times \\ &\quad \times \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} (-\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c}) + \bar{s}_2^2 f}{\sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}) \right], \\ A_2 &= -\frac{\pi \bar{s}_2^{-4}}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c (\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c})}{\bar{s}_2^2 \sqrt{Q}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}) \right], \\ A_3 &= \frac{\pi \bar{s}_2^{-4}}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \times \\ &\quad \times \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} (\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c}) + \bar{s}_2^4 f}{\bar{s}_2^4 \sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(q + \sqrt{Q}), \quad z_2 = \frac{1}{2}(q - \sqrt{Q});$$

2) при $f < 0$ имеем

$$A_1 = -A_2 = A_3 = -\frac{\pi \bar{s}_2^{-4}}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f}. \quad (24)$$

Если $Q = 0$, то

1) при $f > 0$ имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi \bar{s}_2^{-4} \left(\sqrt[4]{\lambda_{22}^c} - 4\bar{s}_2^2 \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} \right)}{2\lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \left(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)}, \\ A_2 &= -\frac{\pi \bar{s}_2^{-2}}{4\lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \left(\bar{s}_2^2 \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} + \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \right)^2}, \\ A_3 &= \frac{\pi \bar{s}_2^{-4} \left(\bar{s}_2^2 \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} - 4\sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \right)}{2\lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} \left(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)}; \end{aligned} \quad (25)$$

2) при $f < 0$ имеем

$$A_1 = -A_2 = A_3 = \frac{\pi \bar{s}_2^{-4}}{2\lambda_{66}^c \left(\bar{s}_2^4 \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}. \quad (26)$$

Если $Q < 0$, то

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\pi \bar{s}_2^4}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} \left(\sqrt{\lambda_{22}^c} - \bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} \right) + \bar{s}_2^2 f}{\sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} \right], \\
A_2 &= -\frac{\pi \bar{s}_2^4}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \left(\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{\bar{s}_2^2 \sqrt{f + \sqrt{q}}} \right], \\
A_3 &= \frac{\pi \bar{s}_2^4}{2(\bar{s}_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c) \lambda_{66}^c - \bar{s}_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} \left(\bar{s}_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + \bar{s}_2^4 f}{\bar{s}_2^4 \sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} \right]. \quad (27)
\end{aligned}$$

Определив тензор M_{ij} , можем согласно (16)–(18) вычислить эффективные модули композита, армированного бесконечными ортотропными волокнами.

4. На основе соотношений (2)–(27) можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и напряженно-деформированного состояния композита. С этой целью воспользуемся методом секущих.

Пористость матрицы в m -м приближении $p_2^{(m)}$ связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала в m -м приближении $k_2^{(m)}$, т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в m -м приближении $I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)}$. А интенсивность средних касательных напряжений скелета матрицы связана с ее текущей пористостью в $(m-1)$ -м приближении $p_2^{(m-1)}$, эффективными упругими модулями всего композита в $(m-1)$ -м приближении $\lambda_{ij}^{*(m-1)}$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ или макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ согласно соотношениям (2)–(5). Эффективные упругие модули, в свою очередь, также связаны с текущей пористостью матрицы в $(m-1)$ -м приближении $p_2^{(m-1)}$.

Таким образом, на основании выражения (15) запишем

$$p_2^{(m)} = p_{02} + (1 - p_{02}) F(k_2^{(m)}), \quad (28)$$

где $k_2^{(m)}$ определяется соотношениями

$$k_2^{(m)} = \frac{I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)}}{1 - p_2} \psi(\bar{t}_2), \quad \psi(\bar{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{\ell_2} \ln(1 + \bar{t}_2^{1/n_2}) \right]^{1/n_1}. \quad (29)$$

Здесь принимаем распределение Вейбулла

$$F(k_2^{(m)}) = \begin{cases} 0, & k_2^{(m)} < k_{02}, \\ 1 - \exp(-m_2 (k_2^{(m)} - k_{02})^{a_2}), & k_2^{(m)} \geq k_{02}. \end{cases} \quad (30)$$

Согласно соотношениям (2)–(7) имеем

$$I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)} = I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)}(\lambda_{ij}^{*(m-1)}, p_2^{(m-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle)$$

или

$$I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)} = I_{\langle \sigma_2 \rangle}^{(m)}(\lambda_{ij}^{*(m-1)}, p_2^{(m-1)}, \langle \sigma_{ij} \rangle), \quad (31)$$

причем из соотношений (2), (3), (16)–(27) следует

$$\lambda_{ij}^{*(m-1)} = \lambda_{ij}^*(\lambda_{kl}^1, \lambda_{kl}^2, c_1, p_2^{(m-1)}, \bar{s}_2). \quad (32)$$

Таким образом, уравнения (28)–(32) позволяют определить эффективные упругие характеристики и повреждаемость матрицы ортотропного волокнистого композита в зависимости от макродеформаций или макронапряжений:

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad \lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}(\langle \sigma_{kl} \rangle).$$

5. Используя изложенную методику и полученные соотношения баланса пористости, в качестве примера построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита на основе изотропной матрицы с ортотропными эллипсоидальными волокнами. На основе соотношений (2), (3), (7)–(26) можно определить объемное содержание микроповреждений в матрице рассматриваемого композита для функции $\psi(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (12), как при заданных макронапряжениях $\langle \sigma_{ij} \rangle$, так и при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$. В качестве включений и матрицы взяты соответственно топаз и эпоксидная смола с такими характеристиками неповрежденной части:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 &= 287 \text{ ГПа}, & \lambda_{22}^1 &= 365 \text{ ГПа}, & \lambda_{33}^1 &= 300 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{23}^1 &= 90 \text{ ГПа}, & \lambda_{13}^1 &= 85 \text{ ГПа}, & \lambda_{12}^1 &= 128 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{44}^1 &= 110 \text{ ГПа}, & \lambda_{55}^1 &= 135 \text{ ГПа}, & \lambda_{66}^1 &= 133 \text{ ГПа}, \\ E_2 &= 3 \text{ ГПа}, & \nu_2 &= 0,35, \end{aligned}$$

при объёмной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и форме включений соответственно

$$c_1 = 0.25, 0.5, 0.75, \quad p_{02} = 0, \quad \bar{s}_2 = 2,$$

а также при

$$k_{02} = 0.011 \text{ ГПа}, \quad m_2 = 1000, \quad \alpha_2 = 2, \quad \ell_2 = 1, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 1.$$

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости (повреждаемости) матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для объемного содержания включений $c_1 = 0.25$ при значениях макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle = 0.006, 0.0065, 0.007, 0.0075, 0.008, 0.0085, 0.009, 0.010$ ГПа.

На рис. 2 показаны кривые зависимостей макродеформаций $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 для объемного содержания включений $c_1 = 0.25$ при тех же значениях макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$. Как видим, для всех значений макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$ при определенных значениях времени \bar{t}_2 макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

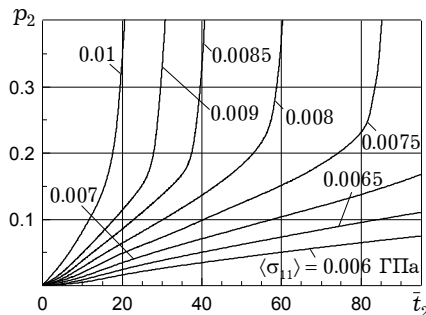


Рис. 1

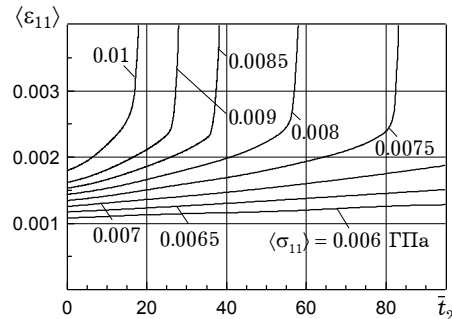


Рис. 2

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции микропрочности (12), с результатами для дробно-степенной функции длительной микропрочности [9] показывает, что при заданных макропараметрах характер зависимостей макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 и зависимостей пористости (повреждаемости) матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 различен. В случае дробно-степенной функции длительной микропрочности для макронапряжений, меньших определенных значений, кривые этих зависимостей имеют горизонтальную асимптоту, тогда как в случае экспоненциальной функции длительной микропрочности для всех значений макронапряжений макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения.

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформаций $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0.002, 0.004, 0.06$ для значений объемного содержания включений $c_1 = 0.25, 0.5, 0.75$. Графики показывают, что с увеличением макродеформаций $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для всех значений объемных содержаний включений c_1 и произвольного значения времени \bar{t}_2 микроповрежденность p_2 увеличивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [4] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечно-временной форме.

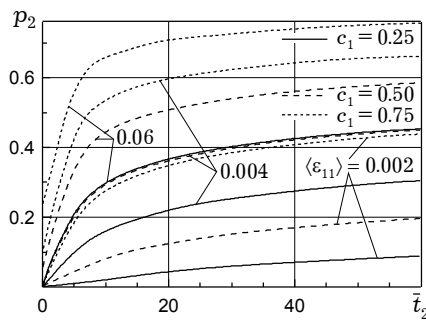


Рис. 3

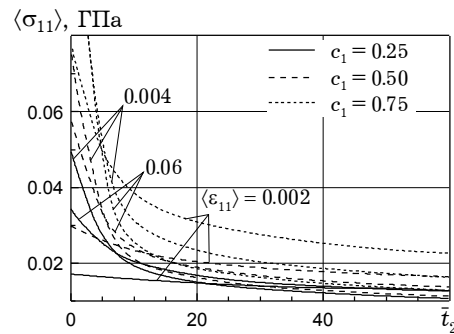


Рис. 4

На рис. 4 показаны кривые зависимостей макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформаций $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0.002, 0.004, 0.06$ и значениях объемного содержания включений $c_1 = 0.25, 0.5, 0.75$. Как видим, при всех значениях объемного содержания включений кривые являются нисходящими.

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенный подход, базирующийся на методе условных моментных функций и методе секущих, позволяет исследовать нелинейные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние однонаправленного волокнистого композита стохастической структуры, компоненты которого обладают ортотропной симметрией упругих свойств. В данном случае нелинейность деформативных свойств обусловлена накоплением повреждений с течением времени в матрице композита, находящегося под воздействием приложенных макродеформаций или макронапряжений. Эффективные упругие модули зависят от упругих свойств компонентов их объемных концентраций, формы включений, начальной пористости матрицы и величины приложенной макродеформации или макронапряжения.

1. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 311 с.
2. *Назаренко Л. В.* Влияние микроразрушений на деформативные свойства анизотропных материалов // Доп. НАН України. – 1999. – № 10. – С. 63–67.
3. *Назаренко Л. В.* Деформативные свойства зернисто-волоконистых композитов при микроповреждаемости матрицы // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 146–153.
4. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
5. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 3.)
6. *Desruaux F., Meraghni F., Benzeggagh L.* Generalised Mori–Tanaka scheme to model anisotropic damage using numerical Eshelby tensor // J. Composite Material. – 2001. – **35**, No. 7. – P. 603–623.
7. *Khoroshun L. P.* Methods of the theory of random functions in determining the macroscopic properties of microheterogeneous media // Int. Appl. Mech. – 1978. – **14**, No. 2. – P. 3–17.
То же: *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3–17.
8. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 10. – P. 120–127.
То же: *Хорошун Л. П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 10. – С. 120–127.
9. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 108–121.
То же: *Хорошун Л. П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 2. Длительная повреждаемость // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 108–121.
10. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Deformation and microdamaging of discretely-fibrous composites with transversally-isotropic components // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 696–703.
То же: *Хорошун Л. П., Назаренко Л. В.* Деформирование и микроповреждаемость дискретно-волоконистого композита с трансверсально-изотропными компонентами // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 6. – С. 82–90.
11. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Short-term microdamageability of laminated materials under thermal actions // Int. Appl. Mech. – 2008. – **38**, No. 4. – P. 432–439.
То же: *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Кратковременная микроповреждаемость слоистых материалов при температурных воздействиях // Прикл. механика. – 2008. – **38**, № 4. – С. 60–68.
12. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Short-term microdestructions of fibrous materials with transversally isotropic fibers under temperature influences // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 74–83.
То же: *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Кратковременная микроповреждаемость волоконистых материалов с трансверсально-изотропными волокнами при температурных воздействиях // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 6. – С. 74–83.
13. *Nazarenko L. V.* Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages // Mat. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 181–192.
14. *Nazarenko L. V.* Deformation of orthotropic composites with unidirectional ellipsoidal inclusions under matrix microdamages // Mat. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 121–130.
15. *Nazarenko L. V.* Elastic properties of materials with ellipsoidal pores // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No. 1. – P. 46–53.
То же: *Назаренко Л. В.* Упругие свойства материалов с эллипсоидальными порами // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 1. – С. 53–60.

ПОШКОДЖУВАНІСТЬ МАТЕРІАЛУ, АРМОВАНОГО ОДНОСПРЯМОВАНИМИ ОРТОТРОПНИМИ ВОЛОКНАМИ, ПРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІЙ ФУНКЦІЇ ДОВГОТРИВАЛОЇ МІКРОМІЦНОСТІ

Теорію довготривалої мікропошкоджуваності для однорідних матеріалів, в основу якої покладено рівняння механіки стохастично неоднорідних середовищ, узагальнено на випадок композита з ортотропними волокнами. Процес пошкоджуваності компонентів композита моделюється утворенням у них стохастично розміщених мікропор. Критерій руйнування одного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Губера – Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. Ефективні деформативні властивості та напружено-деформований стан ортотропного композита з мікропошкодженнями в компонентах визначаються на основі стохастичних рівнянь пружності ортотропних середовищ. Для заданих макронапружень або макродеформацій і довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоджуваності (пористості) компонентів. Залежності макронапруження – макродеформації матеріалу з ортотропними волокнами і рівняння балансу пористості компонентів описують зв'язані процеси деформування і тривалої пошкоджуваності композита, що відбуваються у часі. На основі ітераційного методу побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності компонентів волокнистого матеріалу від часу, макронапружень або макродеформацій від часу, а також отримано відповідні криві для випадку необмеженої функції тривалої мікроміцності, яка апроксимується експоненціальним законом.

DAMAGEABILITY OF MATERIAL STRENGTHENED BY UNIDIRECTIONAL ORTHOTROPIC FIBRES FOR EXPONENTIAL FUNCTION OF MICRODURABILITY

The theory of long-term damageability for homogeneous materials is generalized on a case of orthotropic fibres composite material of stochastic structure. The equations of mechanics of micro non-uniform media of stochastic structure are taken as basic. The process of damageability of components of a composite is modeled by appearance of stochastically located micropores. The criterion of destruction of individual microvolume is characterized by its long-term durability determined by time dependence of fragile destruction on the degree of closeness of equivalent stress to its limiting value, describing the short-term durability by the Huber – Mises criterion which is accepted as a stochastic function of coordinates. Effective deformative properties and stress-strain state of an orthotropic composite with microdamages in components are determined on the basis of stochastic equations of elasticity of orthotropic fibres media. For the given macrostresses or macrodeformations and for any moment of time the equations of balance of damageability (porosity) of components are formulated. Dependences of macrodeformations for orthotropic fibres composite and the equations of balance of porosity of components describe the joint processes of deformation and long-term damageability of the composite, occurring in time. On the basis of iteration method an algorithm of calculation of dependences of microdamageability of components of orthotropic fibres material on time, macrostresses or macrodeformations on time are constructed, and also corresponding curves are obtained for the case of exponential function of microdurability.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
28.02.08