

КВАЗИСТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТРИСКЛАДОВОГО ШАРУ ЗА КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ

Запропоновано аналітично-числовий підхід до визначення термопружного стану термочутливого трискладового шару, який взаємодіє з середовищем шляхом конвективно-променевого теплообміну та перебуває під дією джерел тепла. Підхід передбачає використання перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору та лінійних сплайнів. Досліджено вплив термочутливості і параметрів теплообміну на розподіли температури та напружень.

Вступ. Актуальним питанням для багатьох сучасних галузей промисловості є прогнозування міцнісних, деформаційних, теплових чи експлуатаційних характеристик (параметрів) різноманітних елементів конструкцій, серед яких досить поширені шаруваті. Очевидно, що за високотемпературної теплової дії дослідження їх термопружного стану необхідно проводити на основі моделей, які враховують залежність фізико-механічних характеристик (ФМХ) від температури та теплове випромінювання. Складність відповідних задач термопружності зумовлена, зокрема, нелінійністю як рівняння теплопровідності, так і умов теплообміну. Для їх розв'язання поряд з числовими методами [10–18] використовують аналітично-числові [1, 4–6, 8, 9, 19].

У цій роботі запропоновано підхід до розв'язування квазістатичних задач термопружності для трискладового термочутливого початково нерівномірно нагрітого шару, який перебуває під дією джерел тепла та взаємодіє з середовищем шляхом конвективно-променевого теплообміну. Для визначення температурного поля використано перетворення Кірхгофа, апарат узагальнених функцій, функцію Гріна нестационарної лінійної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів і лінійні сплайни. Зауважимо, що за такого підходу розв'язок відповідної задачі теплопровідності записується у вигляді одного інтегрального подання, у якому на кожній з поверхонь поділу є лише одна невідома. Традиційні підходи, зокрема метод граничних елементів [2], передбачають побудову розв'язку відповідної задачі для кожної області з подальшим відшукуванням двох невідомих (температури та теплового потоку на поверхнях поділу). Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою запропонованого підходу, з відомими в літературі.

Постановка задачі. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r , φ , z вільний від силових навантажень трискладовий шар (рис. 1), у якому наявні джерела тепла та відбувається конвективно-променевий теплообмін через обмежуючі поверхні з середовищем змінної в часі температури. На поверхнях поділу виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. У початковий момент часу у кожній складовій задано нерівномірний розподіл температури. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення з урахуванням залежності ФМХ від температури.

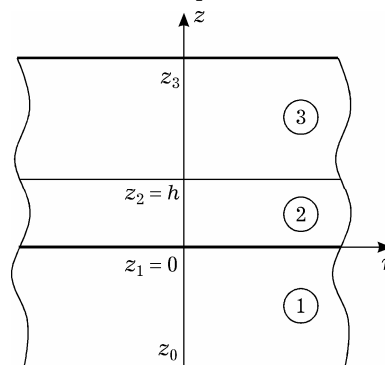


Рис. 1

Розв'язання задачі теплопровідності. Для визначення температурного поля маємо:

– *рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

– *умови контакту*

$$t_i(z, \tau)|_{z=z_i} = t_{i+1}(z, \tau)|_{z=z_i},$$

$$\left(\lambda_t^{(i)} \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} = \left(\lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i}, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

– *граничні та початкові умови*

$$\left(\lambda_t^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial z} - \varepsilon_1(t_1) \sigma [R(t_1) - R(t_{c,1}(\tau))] - \alpha_1(t_1) [t_1 - t_{c,1}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_0} = 0,$$

$$\left(\lambda_t^{(3)} \frac{\partial t_3}{\partial z} + \varepsilon_3(t_3) \sigma [R(t_3) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t_3) [t_3 - t_{c,3}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_3} = 0,$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_{0,i}(z), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Тут $t_i(z, \tau)$, $t_{0,i}(z)$ і $w_{t,i}(z, \tau)$ – функції, що описують відповідно розподіл температури, початкову температуру та дію джерела тепла в i -й складовій $i = 1, 2, 3$; $R(\eta) = (\eta + 273)^4$; $t_{c,1}(\tau)$ та $t_{c,3}(\tau)$ – температури середовищ, з якими відбувається теплообмін через поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ відповідно, $\varepsilon_1(t_1)$, $\varepsilon_3(t_3)$ – ступені чорноти цих поверхонь, $\alpha_1(t_1)$, $\alpha_3(t_3)$ – коефіцієнти теплообміну через ці поверхні, σ – стала Стефана – Больцмана; індекси $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $z_0 < z < z_1$, $i = 2$ – другій складовій (проміжному шару) $z_1 < z < z_2$, а $i = 3$ – третій складовій $z_2 < z < z_3$.

З використанням перетворення Кірхгофа

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0,i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx \quad (4)$$

у припущенні, що коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури: $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i} \Lambda_i(t_i) = \lambda_{0,i} (1 + \beta_i t_i)$, а об'ємні теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$, $i = 1, 2, 3$ (тут $\lambda_{0,i}$ і $c_{0,i}$ – константи розмірностей відповідно коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей), з (1)–(3) отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right] = \frac{c_{0,i} c_i(t_i)}{1 + \beta_i t_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)|_{z=z_i} = F_{i+1}(\tau),$$

$$\left(\lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} = \left(\lambda_{0,i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\left(\lambda_{0,1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - P_1(\tau) \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \left(\lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + P_3(\tau) \right) \Big|_{z=z_3} = 0, \quad (7)$$

$$\theta_i|_{\tau=0} = \theta_{0,i}(z), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned}
F_{i+1}(\tau) &= \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}\right) \left[\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \frac{1}{\beta_{i+1}} (\sqrt{1 + 2\beta_{i+1}\theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1) \right], \quad i = 1, 2, \\
\theta_{0,i}(z) &= t_{0,i}(z) + \frac{\beta_i t_{0,i}^2(z)}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
P_i(\tau) &= \varepsilon_i(\theta_i^*(\tau)) \sigma[R(\theta_i^*(\tau)) - R(t_{c,i}(\tau))] + \alpha_i(\theta_i^*(\tau)) [\theta_i^*(\tau) - t_{c,i}(\tau)], \\
\theta_i^*(\tau) &= \beta_i^{-1} (\sqrt{1 + 2\beta_i \bar{\theta}_i(\tau)} - 1), \quad i = 1, 3, \\
\bar{\theta}_1(\tau) &= \theta_1(z_0, \tau), \quad \bar{\theta}_3(\tau) = \theta_3(z_3, \tau).
\end{aligned} \tag{9}$$

Систему рівнянь (5) із умовами контакту (6) замінимо еквівалентним рівнянням з узагальненими за z похідними [6]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + c_0(z) b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau). \tag{10}$$

Тут функції $\theta(z, \tau)$, $w_t(z, \tau)$, $\theta_0(z)$, $\lambda_0(z)$ і $c_0(z)$ як кусково-однорідні за z мають вигляд

$$p(z) = p_1(z) + \sum_{k=1}^2 [p_{k+1}(z) - p_k(z)] S(z - z_k), \tag{11}$$

$S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака, а

$$b(\theta) = \frac{c_1(\theta_1)}{\Lambda_1(\theta_1)} + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{c_{j+1}(\theta_{j+1})}{\Lambda_{j+1}(\theta_{j+1})} - \frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} \right] S(z - z_j) - 1.$$

Для розв'язання задачі (10), (7), (8) використаємо функцію Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору. Враховуючи зв'язок між функцією Гріна та елементами матриці Гріна G_{ij} [7], розв'язок $\theta_i(z, \tau)$, $i = 1, 2, 3$, для кожної складової запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\theta_i(z, \tau) &= - \sum_{j=1}^3 \int_{z_{j-1}}^{z_j} \int_0^\tau c_{0,j}(z) G_{ij}(z, \zeta, \tau - \tau') \left[\frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} - 1 \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^\tau \frac{\partial G_{i,j+1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\
&- \int_0^\tau G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G_{i3}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial z} \Big|_{z=z_3} d\tau' + \\
&+ \int_0^\tau \left\{ G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') P_1(\tau') - \right. \\
&\left. - \lambda_{0,1} \bar{\theta}_1(\tau') \frac{\partial G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} d\tau' + f_i(z, \tau), \tag{12}
\end{aligned}$$

де

$$f_i(z, \tau) = \sum_{j=1}^3 \int_{z_{j-1}}^{z_j} \left[c_{0,j}(\zeta) G_{ij}(z, \zeta, \tau) \theta_{0j}(\zeta) + \int_0^\tau G_{ij}(z, \zeta, \tau - \tau') w_{t,j}(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta.$$

Надалі обмежимося випадком, коли коефіцієнти температуропровідності в межах кожної складової можна прийняти сталими, що справджується для ряду матеріалів [3], тобто маємо $b(\theta) = 0$. З урахуванням цього обме-

ження невідомими у співвідношеннях (12) є $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$, $j = 1, 2$, $\theta_1(z_0, \tau)$ і $\theta_3(z_3, \tau)$, які входять у відповідні підінтегральні функції. Для їх визначення апроксимуємо [6] кожен з функцій $F_i(\tau)$, $P_i(\tau)$ та $\bar{\theta}_i(\tau)$ лінійним сплайном такого вигляду:

$$g(\tau) = s_1^{(1)}(g)\tau + s_1^{(0)}(g) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} [s_{k+1}^{(1)}(g)\tau + s_{k+1}^{(0)}(g) - s_k^{(1)}(g)\tau - s_k^{(0)}(g)]S(\tau - \tau_k),$$

$$g = \{F_i, P_i, \bar{\theta}_i\}, \quad (13)$$

де $s_i^{(1)}(g) = [g(\tau_i) - g(\tau_{i-1})]/\Delta\tau_i$, $s_i^{(0)}(g) = [-g(\tau_i)\tau_{i-1} + g(\tau_{i-1})\tau_i]/\Delta\tau_i$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, \dots, K_\tau$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{K_\tau}$, K_τ – кількість вузлів сплайна.

Підставивши у (12) вирази для елементів матриці Гріна G_{ij} [7] та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (13), отримуємо співвідношення для змінних Кірхгофа, які у безрозмірних змінних запишемо так:

$$\begin{aligned} \theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = & \eta_{i,1}\gamma_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}, F_2(\text{Fo})) + \eta_{i,2}\gamma_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}, F_3(\text{Fo})) - \\ & - \eta_{i,3} \left[\gamma_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}, P_3^*) - \frac{a_{i,3}^*}{2a_{i,0}} \gamma_{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}, \bar{\theta}_3) \right] - \\ & - \eta_{i,0} \left[\gamma_{i,5}(\bar{z}, \text{Fo}, P_1^*) - \frac{1}{2a_1} \gamma_{i,6}(\bar{z}, \text{Fo}, \bar{\theta}_1) \right] + f_i(\bar{z}, \text{Fo}), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}, \zeta) = & s_1^{(0)}(\zeta)\psi_1^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_1^{(1)}(\zeta)\psi_2^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + \\ & + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} [(s_{k+1}^{(0)}(\zeta) - s_k^{(0)}(\zeta))\psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) + \\ & + (s_{k+1}^{(1)}(\zeta) - s_k^{(1)}(\zeta))\psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k)], \\ P_i^*(\text{Fo}) = & \sigma_i^*(\theta_i^*(\text{Fo}))(R(\theta_i^*(\text{Fo})) - R(t_{c,i}(\text{Fo}))) + \\ & + \text{Bi}_i(\theta_i^*(\text{Fo}))(\theta_i^*(\text{Fo}) - t_{c,i}(\text{Fo})), \\ \eta_{1,3} = & \frac{2\delta_2\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{2,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{3,3} = \frac{a_{3,0}^*}{2}, \\ \eta_{1,0} = & a_{1,0}^*, \quad \eta_{2,0} = \frac{\lambda_{0,1}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)}, \quad \eta_{3,0} = \frac{2\delta_2\lambda_{0,1}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \\ \psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = & \ell_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad j = 1, 2, \quad \psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}), \\ \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = & \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad \psi_\rho^{i,5}(\bar{z}, \text{Fo}) = \Psi_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}), \\ \psi_\rho^{i,6}(\bar{z}, \text{Fo}) = & \Psi_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad \rho = 1, 2, \\ \psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = & \ell_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \quad j = 1, 2, \\ \psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = & \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \\ \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = & \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \\ \psi_\rho^{i,5}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = & \Psi_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \\ \psi_\rho^{i,6}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = & \Psi_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k), \quad \rho = 3, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) - \bar{z}, \xi), \\
\mathfrak{G}_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) &= y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + \bar{h} - \bar{z}, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\
&\quad \times y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + 2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi) - \\
&\quad - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h} + \bar{z}, \xi), \\
\mathfrak{G}_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) &= y_{\rho,3}^1 (\bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + (-1)^{\delta_{p2}} v_2 y_{\rho,3}^0 (2\bar{h} - \bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + \\
&\quad + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 (2n\bar{h} a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi) - \\
&\quad - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 (2(1+n)\bar{h} a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi), \\
\Psi_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) &= (-1)^{\delta_{p2}} [y_{\rho,1}^0 (\bar{z}_0 - \bar{z}, \xi) + v_1 y_{\rho,1}^0 (\bar{z} + \bar{z}_0, \xi)] + \\
&\quad + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (2n\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi) - \\
&\quad - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (2(1+n)\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}_0 - \bar{z}, \xi), \\
\Psi_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) &= y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* \bar{z} - \bar{z}_0, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi) - \\
&\quad - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}) - \bar{z}_0, \xi), \\
\Psi_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}) - \bar{z}_0, \xi), \\
\chi_{\rho,i}^{\mu}(\zeta, \xi) &= (S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} \left(2 \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}^* \xi} \right] - \frac{\zeta}{\sqrt{a_i}} \left((-1)^{\mu+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right) \right), \\
&\quad \rho = 1, 3, \\
\chi_{2,i}^{\mu}(\zeta, \mathbf{Fo}) &= \frac{\sqrt{\mathbf{Fo}}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}^* \mathbf{Fo}} \right] \left(\frac{4}{3} \mathbf{Fo} + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}^*} \right) - \frac{\zeta}{2a_{i0}^*} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}^*} + 2\mathbf{Fo} \right) \times \\
&\quad \times \left((-1)^{\mu+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\mathbf{Fo}}} \right) \right), \\
\chi_{4,i}^{\mu}(\zeta, \mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k) &= S(\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k) \left(\frac{\sqrt{\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}^* (\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k)} \right] \times \right. \\
&\quad \times \left(-\frac{2}{3} (\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k)^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}^*} + 2\mathbf{Fo} \right) - \frac{\zeta}{2a_{i0}^*} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}^*} + 2\mathbf{Fo} \right) \times \\
&\quad \left. \times \left((-1)^{\mu+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_k}} \right) \right) \right), \\
\text{де } \mathbf{Fo} &= \frac{a_0 \tau}{\ell_0^2}, \quad \mathbf{Fo}_k = \frac{a_0 \tau_k}{\ell_0^2}, \quad k = 1, \dots, K_{\tau} - 1, \quad \mathbf{Bi}_i = \frac{\alpha_i \ell_0}{\lambda_{0,i}}, \quad i = 1, 3, \quad \sigma_i^* = \frac{\varepsilon_i \sigma \ell_0}{\lambda_{0,i}},
\end{aligned}$$

$i = 1, 3$, δ_{ij} – символ Кронекера, ℓ_0 – деякий лінійний розмір, a_0 – величина, яка має розмірність коефіцієнта теплопровідності, $a_{ij} = \frac{a_i}{a_j}$; $a_{ij}^* = \sqrt{a_{ij}}$, $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}$, $v_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$, $v_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}$, $\bar{z} = \frac{z}{\ell_0}$, $\bar{z}_i = \frac{z_i}{\ell_0}$, $\bar{h} = \frac{h}{\ell_0}$; через громіздкість вирази для $f_i(\bar{z}, \text{Fo})$ тут не наводимо; функціям $y_{\rho,i}^{\mu}(\zeta, \xi)$ відповідають функції $\chi_{\rho,i}^{\mu}(\zeta, \xi)$ або $\varphi_{\rho,i}^{\mu}(\zeta, \xi)$, якщо індекс « y » в $\mathfrak{G}_{\rho,y}^{i,p}$ чи в $\Psi_{\rho,y}^{i,p}$ набуває значення відповідно χ або φ ; $\varphi(\zeta, \xi)$ і решта позначень збігаються з наведеними у [8].

Поклавши у співвідношеннях (14) в $\theta_i(\bar{z}, \text{Fo})$ відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$, $j = 1, 2$, $\bar{z} = \bar{z}_3$ і $\bar{z} = \bar{z}_0$, для кожного $\text{Fo} = \text{Fo}_k$, $k = 1, \dots, K_{\tau}$, отримаємо систему чотирьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_k)$, $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_k)$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$, де у праві частини входять відповідно $\theta_1(\bar{z}_0, \text{Fo}_{k-1})$, $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_{k-1})$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_{k-1})$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_{k-1})$. Розв'язавши цю систему рекурентного типу, знайдемо шукані значення змінної Кірхгофа у вузлах сітки, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначимо зі співвідношення

$$t_i(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{1}{\beta_i} (\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(\bar{z}, \text{Fo})} - 1).$$

Розв'язок задачі термопружності. Оскільки температура змінюється лише по товщині тіла, то ненульовими у ньому будуть тільки радіальні та кільцеві напруження [6]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{\bar{E}(\bar{z}, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}(\bar{z}, \text{Fo})} [C_1(\text{Fo}) + \bar{z} C_2(\text{Fo}) - \bar{\Phi}(\bar{z}, \text{Fo})]. \quad (15)$$

Тут функції $\bar{E}(\bar{z}, \text{Fo})$, $\bar{\nu}(\bar{z}, \text{Fo})$, $\bar{\Phi}(\bar{z}, \text{Fo})$, які мають вигляд (11), у межах i -ї складової збігаються відповідно з модулями пружності $E_i(t_i)$, коефіцієнтами Пуассона $\nu_i(t_i)$, тепловими деформаціями $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(\bar{z}, \text{Fo})} \alpha_{t,i}(\eta) d\eta$, де $\alpha_{t,i}(t_i)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення. Функції $C_1(\text{Fo})$ і $C_2(\text{Fo})$, визначені з умов рівності нулеві головного вектора і головного моменту напружень σ_{rr} , мають вигляд

$$C_1(\text{Fo}) = \frac{d_1(\text{Fo})b_{22}(\text{Fo}) - d_2(\text{Fo})b_{12}(\text{Fo})}{b_{11}(\text{Fo})b_{22}(\text{Fo}) - b_{12}^2(\text{Fo})},$$

$$C_2(\text{Fo}) = \frac{d_2(\text{Fo})b_{11}(\text{Fo}) - d_1(\text{Fo})b_{12}(\text{Fo})}{b_{11}(\text{Fo})b_{22}(\text{Fo}) - b_{12}^2(\text{Fo})},$$

$$b_{11}(\text{Fo}) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\bar{E}_i(z, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}_i(z, \text{Fo})} dz, \quad b_{12}(\text{Fo}) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z \bar{E}_i(z, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}_i(z, \text{Fo})} dz,$$

$$b_{22}(\text{Fo}) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z^2 \bar{E}_i(z, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}_i(z, \text{Fo})} dz, \quad d_1(\text{Fo}) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\bar{E}_i(z, \text{Fo}) \Phi_i(t_i)}{1 - \bar{\nu}_i(z, \text{Fo})} dz,$$

$$d_2(\mathbf{Fo}) = \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z \bar{E}_i(z, \mathbf{Fo}) \Phi_i(t_i)}{1 - \bar{v}_i(z, \mathbf{Fo})} dz.$$

Для визначення радіальних та осьових переміщень скористаємось залежностями

$$u = \frac{\bar{r}}{\bar{E}(\bar{z}, \mathbf{Fo})} \left([\sigma_{\varphi\varphi} - \bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo}) \sigma_{rr}] + \bar{\Phi}(\bar{z}, \mathbf{Fo}) \right), \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell_0},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo})}{\bar{E}(\bar{z}, \mathbf{Fo})} (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}) + \bar{\Phi}(\bar{z}, \mathbf{Fo}).$$

Враховуючи (15), знаходимо

$$u = \bar{r} [C_1(\mathbf{Fo}) + C_2(\mathbf{Fo}) \bar{z}],$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Q^*(\bar{z}, \mathbf{Fo}) + \frac{1 + \bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo})}{1 - \bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo})} \bar{\Phi}(\bar{z}, \mathbf{Fo}), \quad (16)$$

де

$$Q^*(\bar{z}, \mathbf{Fo}) = - \frac{2\bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo})}{1 - \bar{v}(\bar{z}, \mathbf{Fo})} [C_1(\mathbf{Fo}) + C_2(\mathbf{Fo}) \bar{z}].$$

Проінтегрувавши друге зі співвідношень (16), отримаємо

$$w = Q(\bar{z}, \mathbf{Fo}) + w_0(\bar{r}, \mathbf{Fo}), \quad (17)$$

де $Q(\bar{z}, \mathbf{Fo})$ – первісна за змінною \bar{z} від $Q^*(\bar{z}, \mathbf{Fo})$.

Для визначення $w_0(\bar{r}, \mathbf{Fo})$ підставимо співвідношення для осьових (17) та для радіальних (16) переміщень у формулу для тангенціальної деформації $\varepsilon_{rz} = \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ і прирівняємо отриманий вираз до нуля, оскільки $\sigma_{rz} = 0$. Проінтегрувавши отримане рівняння, матимемо

$$w_0(\bar{r}, \mathbf{Fo}) = -C_2(\mathbf{Fo}) \frac{\bar{r}^2}{2} + C.$$

Тут C характеризує переміщення трискладового шару як абсолютно твердого тіла.

Числові дослідження. Апробацію методики проведено для випадку, коли ФМХ першої і третьої складових шару при $t_{0,i}(z) = 0$ відповідали ніобію:

$$E_i(t_i) = ((100 - 918 \cdot 10^{-5} t_i - 411 \cdot 10^{-8} t_i^2) 10^9) [\text{H}/\text{M}^2],$$

$$\alpha_{ti}(t_i) = ((6.186 + 0.00236 t_i) 10^{-6}) [^\circ\text{C}^{-1}],$$

$$\lambda_t^{(i)} = 53.17(1 + 0.226 \cdot 10^{-3} t_i) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})],$$

$$a_i = 23.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \nu_i = 0.33,$$

а проміжного шару – платині:

$$E_2(t_2) = ((168 - 338 \cdot 10^{-4} t_2) 10^9) [\text{H}/\text{M}^2],$$

$$\alpha_{t2}(t_2) = ((8.865 + 0.00278 t_2) 10^{-6}) [^\circ\text{C}^{-1}],$$

$$\lambda_t^{(2)} = (71.301(1 + 0.207 \cdot 10^{-3} t_2)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})],$$

$$a_2 = 24.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \nu_2 = 0.35.$$

Дослідження виконано для двох варіантів теплової дії.

1°. Поверхня $z = z_0$ трискладового шару нагрівається зосередженим на ній джерелом тепла імпульсного характеру зміни інтенсивності:

$$w_{t,1}(z, \tau) = q_0[S(\tau) - S(\tau - \tau_1^*)]\delta(z - z_0),$$

де $q_0 = 12 \cdot 10^6$ Вт/м², $\tau_1^* = 2$ сек, а поверхня $z = z_3$ підтримується при нульовій температурі. З метою верифікації запропонованої методики проведено дослідження розподілу безрозмірної температури

$$\bar{T} = \frac{t_1 \lambda_{0,1}}{q_0(z_3 - z_0)}.$$

У табл. 1 наведено значення температури на поверхні z_0 за сталих, \bar{T}_N , і температурнозалежних, \bar{T}_D , характеристик при різних часах τ . Температуру під штриховою рисою обчислено за запропонованою методикою, а над нею – за тих же параметрів на основі отриманих результатів у [6], де за сталих теплофізичних характеристик наведено точний розв'язок. Як бачимо, порівнювані результати з урахуванням термочутливості для кожного моменту часу збігаються з точністю до двох-трьох знаків після коми, а за її нехтування – до трьох-чотирьох знаків.

2°. Трискладовий шар з геометричними параметрами $z_0 = -10^{-3}$ м, $h = 0.65 \cdot 10^{-3}$ м, $z_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м перебуває у середовищі, температура якого $t_{c,1} = t_{c,3} = 1100$ °С. Вважаємо, що через поверхню $z = z_3$ відбувається конвективно-променевий теплообмін при значенні ступеня чорноти $\varepsilon_3 = 0.3$ і коефіцієнта теплообміну $\alpha_3 = 50$ Вт/(м² · °С), а через поверхню $z = z_0$ – конвективно-променевий, лише променевий чи конвективний теплообмін або на цій поверхні відсутній тепловий потік. На рис. 2 і рис. 3 зображено залежності температури t від координати z при $\tau = 10$ сек та $\tau = 10^2$ сек, а на рис. 4 – від часу τ на поверхнях $z = z_0$ та $z = z_3$. На рис. 5 наведено залежності напружень σ_0 від часу τ на поверхнях $z = z_1 - 0$ та $z = z_1 + 0$. Суцільні лінії обчислено при залежних від температури ФМХ, а штрихові – при сталих. Криві 1–4 на усіх рисунках відповідають таким значенням параметрів теплообміну через поверхню $z = z_0$: 1 – $\varepsilon_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 50$ Вт/(м² · °С); 2 – $\varepsilon_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 0$; 3 – $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_1 = 50$ Вт/(м² · °С); 4 – $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$. Зауважимо, що для цих випадків з метою вибору кроку сітки сплайн було проведено порівняння розподілів температури у фіксованих точках для різних проміжків часу. Встановлено, що для значень часу $\tau \leq 3 \cdot 10^2$ сек достатньо обмежитись $K_\tau = 20$, оскільки збільшення K_τ (зменшення кроку сітки) практично не впливає на точність обчислень.

На рис. 2 бачимо, що при врахуванні на поверхні $z = z_0$ лише променевого теплообміну температура (крива 2) у тілі стає вищою швидше, ніж за врахування лише конвективного теплообміну (крива 3). Неврахування променевого чи конвективного теплообміну на поверхні $z = z_0$ зумовлює зани-

Таблиця 1

τ , сек	\bar{T}_N	\bar{T}_D
0.125	0.32731	0.31332
	0.32719	0.31340
0.5	0.64184	0.59219
	0.64166	0.59268
1	0.83388	0.75343
	0.83371	0.75411
1.5	0.91379	0.81867
	0.91372	0.81746
2	0.94705	0.84548
	0.94704	0.84590
2.5	0.31904	0.30537
	0.31922	0.30595
3	0.13276	0.13010
	0.13302	0.12921
3.5	0.05525	0.05470
	0.05553	0.05510
4	0.02299	0.02286
	0.02291	0.02355
4.5	0.00956	0.00953
	0.00971	0.00897
5	0.00398	0.00397
	0.00390	0.00342

ження температури до 15% і 10% відповідно. Найшвидше вона зростає і досягає максимального значення при врахуванні і конвективного, і променевого теплообміну (крива 1). Як і слід було очікувати, вплив термочутливості стає помітнішим при збільшенні температури: різниця між температурами, обчисленими з урахуванням і без урахування термочутливості, досягає 10%.

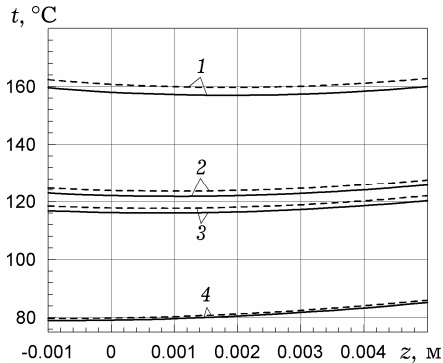


Рис. 2

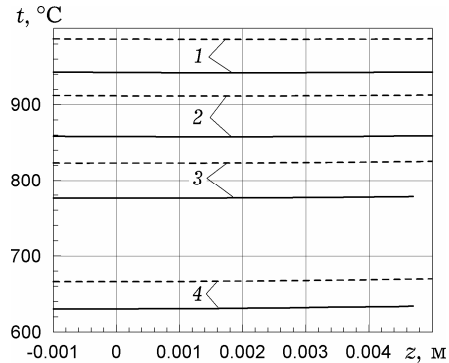


Рис. 3

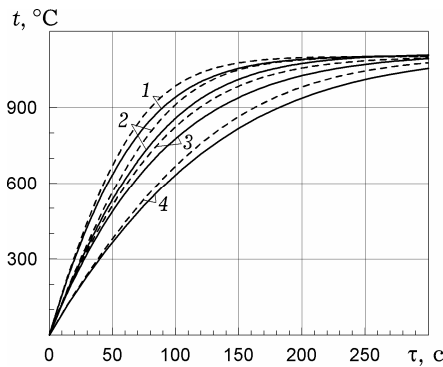


Рис. 4

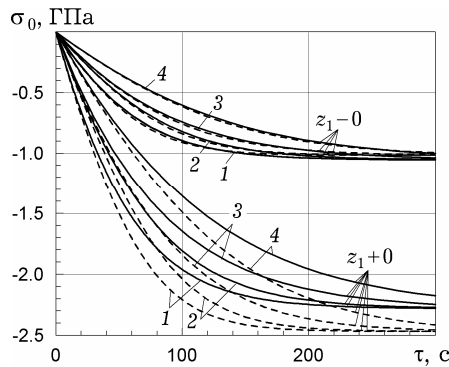


Рис. 5

Як бачимо на рис. 5, у тілі виникають стискуючі стрибкоподібні напруження. Вплив параметрів теплообміну на характер поведінки напружень є подібним, як і для температури: неврахування випромінювання чи тепловіддачі зумовлює зниження абсолютних напружень відповідно до 15% і 10%. Вплив термочутливості найбільш помітний у проміжному шарі: різниця між напруженнями з та без урахування температурної залежності фізико-механічних характеристик може досягати 12%.

Висновки. Запропоновано та апробовано аналітично-числовий підхід до розв'язання квазістатичних задач термопружності для трискладового нерівномірно нагрітого термочутливого шару з урахуванням конвективно-променевого теплообміну та дії джерел тепла. Відповідну задачу теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функції Гріна у вигляді функціональних рядів і лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентної системи чотирьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа на поверхнях поділу та обмежуючих поверхнях у вузлах сітки сплайна. Отримано вирази для радіальних та кільцевих напружень і радіальних та осьових переміщень. Проведено порівняння числових результатів, отриманих на основі часткових випадків знайденого розв'язку відповідної задачі теплопровідності та на основі розв'язків, отриманих іншими методами. Для випадку відсутності джерел тепла та нульових початкових температур складових проаналізовано вплив термочутливості і параметрів променевого та конвективного теплообміну на розподіли температури та напружень.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і Російського фонду фундаментальних досліджень (№ держреєстрації 0115U002938).

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
Те саме: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
3. *Зиновьев В. Е.* Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справочник. – Москва: Металлургия, 1989. – 384 с.
4. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполум, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
5. *Попович В., Янішевський В.* Термопружний стан термочутливого шару за конвективного теплообміну з середовищем змінної з часом температури // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 105–114.
6. *Процюк Б. В.* Квазістатическі температурні напруження в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63–69.
7. *Процюк Б. В., Вербя І. І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 200–205.
8. *Процюк Б., Горун О.* Квазістатичний термопружний стан безмежного трискладового термочутливого тіла за дії джерела тепла // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 136–146.
9. *Шевчук В., Гавриць О., Шевчук П.* Визначення температурного поля півпростору з багатшаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковсько-го, Г. С. Кита, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстиригача НАН України, 2014. – С. 173–175.
10. *Azadi Mohammad, Azadi Mahboobeh.* Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element // J. Mech. Sci. Technol. – 2009. – **23**, No. 10. – P. 2635–2644.
11. *Azis M. I., Clements D. L.* Nonlinear transient heat conduction problems for a class of inhomogeneous anisotropic materials by BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2008. – **32**, No. 12. – P. 1054–1060.
12. *Goto T., Suzuki M.* A boundary integral equation method for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties // Int. J. Heat Mass Transf. – 1996. – **39**, No. 4. – P. 823–830.
13. *Hui Wang, Ming-Yue Han, Fang Yuan, Zhao-Ran Xiao.* Fundamental-solution-based hybrid element model for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties // Math. Problems Eng. – **2013**. – Article ID 695457. – 8 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/695457>.
14. *Karageorghis A., Lesnic D.* Steady-state nonlinear heat conduction in composite materials using the method of fundamental solutions // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2008. – **197**, No. 33–40. – P. 3122–3137.
15. *Křížek M., Liu L.* Finite element approximation of a nonlinear heat conduction problem in anisotropic media // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1998. – **157**, No. 3–4. – P. 387–397.
16. *Lesnic D., Elliott L., Ingham D. B.* Identification of the thermal conductivity and heat capacity in unsteady nonlinear heat conduction problems using the boundary element method // J. Comput. Phys. – 1996. – **126**, No. 2. – P. 410–420.
17. *Marin L., Lesnic D.* The method of fundamental solutions for nonlinear functionally graded materials // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, No. 21. – P. 6878–6890.
18. *Rong G. M., Kisu H.* Heat transfer analysis for FGMs using SPH-CSPM // Key Eng. Mater. – Nov. 2010. – **452–453**. – P. 685–688.
19. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.

**КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ
ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ТРЕХСОСТАВНОГО СЛОЯ ПРИ
КОНВЕКТИВНО-ЛУЧЕВОМ ТЕПЛООБМЕНЕ**

Предложен численно-аналитический подход к определению термоупругого состояния термочувствительного трехсоставного слоя, который взаимодействует со средой путем конвективно-лучевого теплообмена и находится под действием источников тепла. Подход предполагает использование преобразования Кирхгофа, обобщенных функций, функции Грина линейной нестационарной задачи теплопроводности для трехсоставного пространства и линейных сплайнов. Исследовано влияние термочувствительности и параметров теплообмена на распределения температуры и напряжений.

**THE QUASISTATIC THERMOELASTIC STATE OF
THREE-FOLD THERMOSENSITIVE LAYER UNDER CONVECTION
AND RADIATION HEAT TRANSFER**

The numerical-analytical approach to determine the thermoelastic state of a three-fold thermosensitive layer which interacts with medium by the way of convection and radiation heat transfer and is subjected to the action of heat sources is presented. The approach provides for the use of Kirchhoff transformation, generalized functions, Green function of linear non-stationary heat conduction problem for a three-layered space and linear splines. The influence of thermal sensitivity and parameters of heat exchange on distribution of temperature and stresses is studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
30.02.15