

В. Л. Карлаш

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ

Стаття присвячена аналізу відомих і нових методів експериментального визначення в'язкопружних коефіцієнтів п'єзокерамічних резонаторів, включаючи коефіцієнти зв'язку і тангенс механічних і п'єзоелектричних втрат. Викладено також основи опрацьованої автором нової розрахунково-експериментальної методики і наведено приклади її застосування. Обґрунтування методики проведено за допомогою відомої задачі про радіальні коливання тонкого диска із суцільними електродами. Подальший розвиток дістала ідея почергового вимірювання спадів напруг у модернізованій схемі Мезона, на основі чого опрацьовано нову методичку визначення фазових зсувів між компонентами повної провідності за теоремою косинусів. Наведено елементи цієї методики. Експериментальні дані добре узгоджуються з розрахованими величинами.

Вступ. П'єзокерамічні матеріали належать до числа речовин із трансверсально-ізотропними властивостями. Їхні параметри в напрямку поля поляризації і в перпендикулярному напрямку значно відрізняються [3, 6, 8, 20, 22, 24]. Ще одна важлива особливість керамічних п'єзорезонаторів полягає в тому, що створити ефективно електричне поле для збудження інтенсивних електропружних коливань можливо лише тоді, коли електродне покриття нерозривно зв'язане з поверхнею, тобто є невід'ємною частиною самого резонатора. Маса електродного покриття незначна й до уваги не береться, проте міжелектродна ємність сягає часом кільканадцяти нанофарадів і впливає на електричний струм і провідність [3, 14, 20, 32]. При коливаннях п'єзоелектричних тіл відбувається перетворення енергії із механічної форми в електричну (прямий п'єзоэффект) або із електричної форми в механічну (зворотний п'єзоэффект). Вони характеризуються високими коефіцієнтами електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) [3, 8, 22, 24] і значними амплітудами механічних напружень та зміщень [1, 3, 20, 27, 37].

Сама природа внутрішніх фізичних процесів у таких тілах призводить до того, що і зміщення, і напруження, і провідність, і імпеданс мають біля резонансних частот як активні, так і реактивні компоненти. Розрахувати будь-яку амплітуду можливо лише тоді, коли беруться до уваги втрати енергії [14, 21–25, 32]. Донині аналітичні розв'язки задач про електромеханічні коливання цих тіл побудовані лише для простих геометричних форм, таких як стержні, пластини, диски, циліндричні й сферичні оболонки тощо [1, 3, 8, 14–17, 20–25]. Такі розв'язки застосовують у різних стандартах для експериментального визначення коефіцієнтів зв'язку та компонент тензорів пружних, діелектричних і п'єзоелектричних сталей [6, 7, 33]. Огляд сучасних методів визначення повного набору матеріальних констант п'єзокераміки наведено в монографії [1]. У ній опрацьована методика, яка дає змогу визначати повний набір сумісних електропружних сталей на єдиних зразках у вигляді прямокутної призми. На жаль, автори [1] не взяли до уваги втрати енергії, тому розв'язок відомої задачі про поздовжні коливання тонкої прямокутної пластинки з поляризацією по товщині прямує до нескінченності при підході до першого резонансу. У роботах [4, 22] досліджувалися залежності комплексних модулів п'єзокераміки ЦТСтБВ-2 від температури. Пошуки нових експериментальних методів тривають [1, 2]. У роботі [2], зокрема, запропоновано цікаву експериментально-розрахункову методичку, яка дає можливість визначати модуль Юнга і модуль зсуву на основі дослідів із квадратними пластинами, вирізаними із круглих дисків. Отримані величини практично збігаються із визначеними за стандартною методикою [6, 22] на радіальних коливаннях первісного диска.

Радіальні резонансні коливання тонких п'єзокерамічних круглих дисків характеризуються своєю моночастотністю – обертони віддалені за частотою від основного резонансу у декілька разів [8, 14, 20, 22, 24, 40]. Ця обставина, а також висока інтенсивність електромеханічних коливань на основному резонансі, спричинили використання резонансних частот радіальних коливань і їхніх відношень для експериментального визначення декількох важливих параметрів п'єзокераміки, таких як планарний КЕМЗ k_p , поперечний КЕМЗ k_{31} , п'єзомодуль d_{31} , коефіцієнт Пуассона ν , компоненти пружної податливості s_{11} , s_{12} [3, 20, 22, 24]. Ефективність електромеханічного перетворення енергії в п'єзоелектричних тілах можна оцінювати різними способами: за коефіцієнтом електромеханічного зв'язку, за величиною повної провідності та її активної і реактивної компонент, за коефіцієнтом передачі п'єзотрансформаторного датчика тощо [14, 20–25].

Для вимірювання характеристичних частот і відповідних їм повних провідностей найчастіше на практиці застосовують схему так званого чотириполюсника Мезона (W. P. Mason), запропоновану в 30-х роках минулого століття. У роботах [15, 21] проаналізовано її переваги й недоліки і запропоновано удосконалені варіанти, які забезпечують по чергове вимірювання спадів напруг на резисторі навантаження і дослідному п'єзоелементі на будь-якій частоті.

Ця стаття присвячена аналізу відомих і нових методів експериментального визначення в'язкопружних коефіцієнтів п'єзокерамічних резонаторів, включаючи коефіцієнти зв'язку і тангенси механічних та п'єзоелектричних втрат [11–16, 21–23]. Викладаються основи опрацьованої автором нової розрахунково-експериментальної методики і наводяться приклади її застосування. Обґрунтування методики проведено на відомій задачі про радіальні коливання тонкого диска із суцільними електродами.

Дістала подальший розвиток ідея по чергового вимірювання спадів напруг у модернізованій схемі Мезона, на основі чого опрацьовано нову методику визначення фазових зсувів між компонентами повної провідності за теоремою косинусів. Експериментальні дані порівнюються й узгоджуються з розрахованими величинами.

1. Експериментальні методи вимірювання частот і повних провідностей. Огляд відомих експериментальних методів проведених в роботах [14, 22], де сказано, що при використанні статичних методів дослідження вимірюються електричні заряди, які утворюються під дією механічного навантаження (прямий п'єзо ефект), або механічні деформації, які виникають під впливом прикладеного електричного поля (зворотний п'єзо ефект). У методі «кляцання» кварцовий п'єзоелемент приєднувався до коливального контуру лампового автогенератора, частота якого плавно змінювалася аж до досягнення механічних резонансів, коли в телефоні чулося характерне кляцання.

У методі «провалу» досліджуваний п'єзоелемент вмикався режектором (поглиначем) між входом і виходом лінії передачі. На резонансній частоті опір п'єзоелемента низький, тому на характеристиці передачі з'являвся гострий провал. За спадом напруги на п'єзоелементі можна визначати величину резонансної провідності.

У методі фігур Chladni дослідний зразок приєднується до генератора ультразвукових коливань і його поверхня притрушується тоненьким шаром сухого дрібнозернистого піску або алюмінієвих ошурок. Коли частота генератора наближається до одного з резонансів, ошурки починають рухатися по поверхні зразка й утворюють на резонансних частотах точки, лінії, кільця тощо. На жаль, зразок нагрівається й може зруйнуватися.

Відома схема чотириполюсника Мезона (рис. 1а) складається з двох частин – генераторної і вимірювальної [6, 7, 14, 20–24]. Вхідний подільник напруги генераторної частини $R1R2$ узгоджує вихідний опір генератора сигналів із вхідним опором вимірювальної частини, яка складається з послі-

довно з'єднаних досліджуваного п'єзоелемента $Pe1$ і навантажувального резистора, величина якого $R3$ або $R4$ може змінюватися перемикачем $S1$. Вольтметр $V1$ вимірює спад напруги U_{pe} на п'єзоелементі, а вольтметр $V2$ – на навантажувальному резисторі U_R .

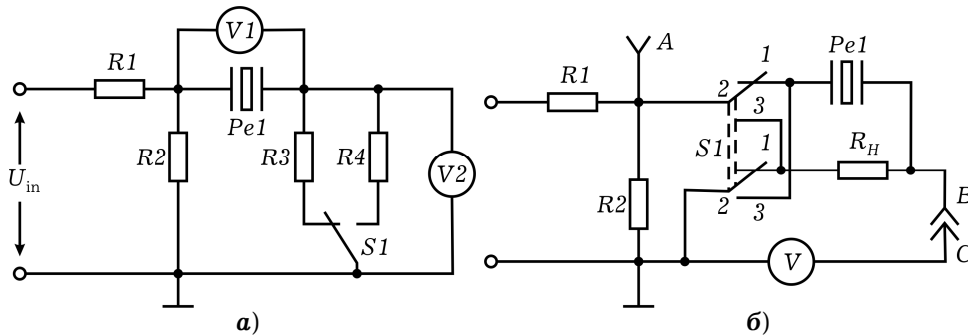


Рис. 1. Схеми вимірювання характеристичних частот і компонент повної провідності

Відношення струму I_{pe} через п'єзоелемент до спаду потенціалу U_{pe} на ньому ϵ (за означенням) повною електричною провідністю (адмітансом) п'єзоелемента Y_{pe} :

$$Y_{pe} = \frac{I_{pe}}{U_{pe}} = \frac{U_R}{RU_{pe}}. \quad (1)$$

Скористатися цією формулою для визначення величини повної провідності п'єзоелемента в стандартній схемі Мезона практично неможливо, оскільки немає таких вольтметрів, котрі можна було б приєднати паралельно до п'єзоелемента без істотних порушень електричного режиму схеми вимірювання. Всі сучасні електронні вольтметри змінного струму мають несиметричні входи і приєднувати їх можна лише до тих ділянок схеми, в яких один із електродів є заземленим. Через це спад потенціалу U_{pe} на п'єзоелементі доводиться визначати не прямим шляхом, а як різницю між падіннями потенціалу на навантажувальному резисторі $R3$ ($R4$) і на резисторі $R2$, так що точна формула (1) замінюється наближеним співвідношенням

$$Y_{pe} = \frac{U_R}{R(U_1 - U_{pe})}. \quad (2)$$

Неможливість вимірювати повну провідність п'єзоелемента з високою точністю в усьому частотному діапазоні є основним недоліком класичної схеми чотириполюсника Мезона. Удосконалення схеми в її вимірювальній частині (рис. 1б) [14, 24] позбавляє цього недоліку й дає можливість не лише успішно користуватися формулою (1) на будь-якій частоті, а й визначати ще декілька важливих показників. Додатковий комутатор $S1$, дозволяє перемикати точку заземлення схеми з лівого краю п'єзоелемента $Pe1$ на лівий край навантажувального резистора R_{10} і навпаки. Резистори $R1$ та $R2$ є елементами узгоджувального подільника електричної напруги $U1$, як і в стандартній схемі Мезона. Щуп «С» вольтметра V може почергово приєднуватися або до точки «В», або до точки «А». У першому випадку вимірюється спад потенціалу на елементах вимірювальної ланки. У другому випадку вольтметр вимірює спад потенціалу U_{R2} на резисторі $R2$. Коли комутатор $S1$ перебуває у верхньому положенні (як показано на рис. 1б), лівий (на схемі) кінець резистора R_{10} заземлений, а лівий (на схемі) кінець п'єзоелемента $Pe1$ приєднаний до джерела сигналу (ним є

спад напруги на резисторі R_2). Вольтметр вимірює спад потенціалу на резисторі R_{10} , який прямо пропорційний до електричного струму, що проходить через п'єзоелемент $Pe1$ і всю вимірювальну частину схеми. При переводі комутатора $S1$ в нижнє положення заземляється лівий (по схемі) кінець п'єзоелемента $Pe1$, а лівий кінець резистора R_{10} приєднується до джерела сигналу (резистора R_2). Тепер вимірюється спад потенціалу безпосередньо на дослідному п'єзоелементі $Pe1$.

Величину опору навантажувального резистора в удосконаленій схемі добирають окремо для резонансу й антирезонансу. Як показали досліди, при виборі опору резистора R_3 в межах $3 \div 5$ Омів величина максимальної провідності визначається з похибкою $1 - 3\%$. При визначенні мінімальної провідності похибка зростає до $4 \div 10\%$ і опір R_4 треба збільшувати до $20 \div 50$ кОм.

Про вплив опору навантажувального резистора на визначену за формулою (1) величину повної провідності свідчить табл. 1, у якій наведено експериментальні дані на першому радіальному резонансі диска із кераміки ЦТБС-3 діаметром 66.4 мм при товщині 3.1 мм, який мав статичну ємність $C_0 = 18.49$ нФ і тангенс діелектричних втрат $\epsilon_{33m} = 0.0066$. Згідно з таблицею величина опору навантаження майже не впливає на частоту f_r максимальної провідності Y_m , проте з ростом R_{10} величина Y_m різко зменшується.

У випадку заміни навантажувального резистора конденсатором з ємністю C_{10} повна провідність Y_{pe} п'єзоелемента на частоті f обчислюється як відношення спадів потенціалу на ємності U_c та п'єзоелементі U_{pe} за формулою

$$Y_{pe} = \frac{2\pi f C_{10} U_c}{U_{pe}}. \quad (3)$$

Таблиця 1. Вплив опору навантажувального резистора на виміряні величини резонансної частоти й максимуму повної провідності

R_{10} , Ом	1.6	5.3	11.2	230	993
f_r , кГц	31.572	31.560	31.562	31.563	31.576
Y_m , мСм	131.4	124	119.6	101.4	26.36

Якщо поміняти місцями навантажувальний резистор і п'єзоелемент, так що один із електродів дослідного зразка стане заземленим, то спад напруги U_{pe} вимірюється безпосередньо на п'єзоелементі, а спад напруги на резисторі навантаження U_R береться як різниця U_{in} і U_{pe} і адмітанс визначається за іншою наближеною формулою:

$$Y_{pe} = \frac{U_{in} - U_{pe}}{R U_{pe}}. \quad (4)$$

Виміряні в модернізованій схемі спади напруг U_R , U_{in} і U_{pe} вводяться до комп'ютера разом із відповідними частотами й будуються амплітудно-частотні і фазово-частотні залежності як самих спадів напруг, так і провідностей, кутів, миттєвих потужностей тощо.

Схеми на рис. 1 дають змогу реалізувати метод «провалу», про який згадувалося вище. П'єзоелемент слід приєднати паралельно до вихідного резистора R_2 подільника напруги R_1 , R_2 . Вимірюються частоти f і спади напруг на вході U_1 і виході U_2 подільника в околі резонансу. Повна про-

відність визначається за формулою

$$Y = \frac{\left(R_2 - \frac{U_2 R_1}{U_1 - U_2} \right)}{\left(R_2 \cdot \frac{U_2 R_1}{U_1 - U_2} \right)} = \frac{1}{R_1} \frac{U_1}{U_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}. \quad (5)$$

Ця формула є дуже зручною у поєднанні з методом п'єзотрансформаторного датчика, коли п'єзоелемент вмикається паралельно до вихідного резистора подільника і вимірюється потенціал відокремленого електрода [14, 22, 34–36]. У цьому дослідженні використовуємо вирази (1)–(5).

Спади напруг U_R , U_{in} і U_{pe} утворюють своєрідний характеристичний трикутник (рис. 2). Кути між сторонами трикутника характеризують фазові зсуви між відповідними спадами напруг і можуть бути визначені за теоремою косинусів

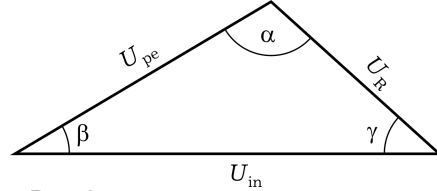


Рис. 2. Характеристичний трикутник.

$$\cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe}U_R}, \quad \cos \beta = \frac{U_{in}^2 + U_R^2 - U_{pe}^2}{2U_{in}U_R}, \quad \cos \gamma = \frac{U_{in}^2 + U_{pe}^2 - U_R^2}{2U_{in}U_{pe}}. \quad (6)$$

Кут α , утворений сторонами U_R і U_{pe} , характеризує зсув фаз між струмом і спадом напруги в п'єзоелементі. Кут β , утворений сторонами U_{in} і U_R , відповідає фазовому зсуву між вихідною напругою генератора і споживаним струмом. Кут γ , утворений сторонами U_{in} і U_{pe} , характеризує різницю фаз між вихідною напругою генератора і спадом напруги на п'єзоелементі. Знаючи величину повної провідності Y і фазові зсуви, можна визначити активну G і реактивну B компоненти повної провідності п'єзоелемента [9, 10], користуючись формулами, які обидві дають однакові результати

$$G_1 = Y_{pe} \cos \beta, \quad B_1 = Y_{pe} \sin \beta \quad (7)$$

або

$$G_2 = \frac{Y_{pe}}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad B_2 = G_2 k, \quad k = \tan \beta. \quad (8)$$

Схема чотириполюсника Мезона є єдиною експериментальною системою, яка дає можливість вимірювати резонансну та антирезонансну частоти, а потім визначати важливі параметри п'єзоелектриків. Ні ця схема, ані її варіанти, на жаль, практично не реагують на слабкі резонанси, які можуть існувати поряд із сильними. Заважає виявленню слабких резонансів статична електрична ємність зразків C_0 .

Були запропоновані різні мостові схеми досліджень, у яких власна статична ємність п'єзоелемента компенсувалася і появлялася можливість реєструвати слабкі резонанси і визначати їхні резонансні частоти. Однією з таких є схема Опое (розроблена в 50-х роках минулого століття), яка детально проаналізована в роботі [22]. Завдяки компенсації статичної ємності в схемі Опое вдається зареєструвати дуже слабкі резонанси, які відрізняються за амплітудою від сильних у тисячі разів!

Треба сказати, що модернізована схема Мезона у випадку ємнісного навантаження також може фіксувати слабкі резонанси, якщо взяти ємність навантажувального конденсатора близькою до статичної ємності п'єзоеле-

мента. Ця схема дає можливість реалізувати декілька режимів електричного навантаження: **1)** стала напруга на п'єзоелементі $U_{pe} = \text{const}$; **2)** сталий струм через п'єзоелемент $U_{pe} = U_R/R = \text{const}$ або $U_R = \text{const}$; **3)** стала вхідна напруга $U_{in} = \text{const}$; **4)** стала миттєва потужність в п'єзоелементі $P_{pe} = I_{pe} \cdot U_{pe} = \text{const}$.

3. Зв'язок повної провідності із компонентами втрат енергії. У праці [39] запропоновано експериментально визначати компоненти втрат енергії на зразках у вигляді стрижнів із поперечною та (або) поздовжньою поляризацією у такій послідовності. Спершу мостом змінного струму на частоті 1000 Гц вимірюються статична ємність C_0 і тангенс діелектричних втрат ϵ_{33m} . Потім визначаються частоти максимальної та мінімальної провідностей і самі ці провідності. Розв'язки відповідних задач про поздовжні коливання стрижнів показали, що максимальна провідність залежить тільки від тангенса пружних втрат s_{11m} або оберненої до нього механічної добротності Q_m . За величиною максимальної провідності пропонувалося визначати параметри пружних втрат. У формули для мінімальної провідності, крім механічних втрат, входять також діелектричні ϵ_{33m} і п'єзоелектричні d_{31m} . Саме за величиною мінімальної провідності й визначалися п'єзоелектричні втрати в [39]. У монографії [24] зв'язок між компонентами провідності та параметрами втрат поширено на товщинні й зсувні коливання і проведено експериментальні дослідження в діапазоні температур. У працях [11–16, 21–23] концепцію зв'язку максимальної та мінімальної провідностей поширено на радіальні коливання тонких кругових дисків із суцільними електродами. Шляхом розвинення функцій Бесселя у ряд за малим параметром отримано вирази для максимальної і мінімальної провідностей, а також для параметрів втрат.

Як показує аналіз публікацій, де наведено розв'язки електропружних задач про вільні або вимушені коливання п'єзоелектричних елементів (див., наприклад, [1–5, 20–25 та ін.], усі відомі вирази для повної провідності Y в діапазоні частот можна звести до єдиної формули

$$Y = j\omega C_0 \frac{\Delta_a}{\Delta_r}. \quad (9)$$

Тут j – уявна одиниця, ω – кругова частота, C_0 – статична ємність, Δ_a , Δ_r – антирезонансний і резонансний визначники.

Повна провідність п'єзоелектричного зразка на будь-якій частоті ϵ , таким чином, добутком реактивної провідності його міжелектродної ємності на цій частоті на відношення двох визначників – антирезонансного і резонансного – на тій же частоті. Щоб розрахувати повну провідність конкретного п'єзоелемента, можна провести відповідні перетворення у виразах для визначників, вважаючи електропружні модулі комплексними [11–16, 21–25, 31, 32, 34–36, 41]:

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= s_{110}(1 - js_{11m}), & \epsilon_{33}^T &= \epsilon_{330}(1 - j\epsilon_{33m}), \\ d_{31} &= d_{310}(1 - jd_{31m}), \end{aligned} \quad (10)$$

як, наприклад, у тонкому диску [11–16, 22]:

$$\begin{aligned} C &= C_0(1 - j\epsilon_{33m}), & \alpha &= \alpha_0(1 - 0.5js_{11m}), & C_0 &= \frac{\epsilon_{330}\pi R^2}{h}, \\ d_{31}^2 &= d_{310}^2(1 - 2jd_{31m}), & k_p^2 &= k_{p0}^2[1 + j(s_{11m} + \epsilon_{33m} - 2d_{31m})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Процес розрахунку повної провідності та її компонент значно спрощується і стає точнішим, якщо до формули (9) додати комплексні вирази (10) і (11), а також замінити у виразах для Δ_a , Δ_r дійсну частоту x_0 на комплексну x , а все інше доручити комп'ютерові. У випадку тонкого диска, наприклад, маємо [14, 22, 42, 45]

$$\Delta(x_0) = x_0 J_0(x_0) - (1 - \nu) J_1(x_0) = 0,$$

$$\Delta_a(x_0) = (1 - k_{p0}^2) \Delta(x_0) + k_{p0}^2 (1 + \nu) J_1(x_0) = 0. \quad (12)$$

Були проведені порівняння розрахунків повної провідності за формулами (9)–(12) за двома програмами. У першій програмі комплексні коефіцієнти підставляли в формули й проводили перетворення з розвиненням функцій Бесселя у ряд. У другій програмі все робив комп'ютер. В околі першого резонансу обидві адмітансограми практично збігаються, близькими є також максимуми активної компоненти на першому і другому обертонах. Найбільш помітним є розходження кривих реактивної компоненти на вищих обертонах, а також біля першого антирезонансу. Окремо за обома програмами були побудовані АЧХ поблизу від мінімуму повної провідності на першому радіальному резонансі за тими ж даними. Мінімум за першою програмою становить $Y_{n1} = 0.1687$ мСм, за другою – $Y_{n2} = 0.0922$ мСм або майже удвічі менше. Причиною розходження є недостатня кількість членів ряду при розвиненні функцій Бесселя.

4. Розрахунково-експериментальна методика визначення КЕМЗ і компонент втрат. Запропоновані далі підходи ілюструються задачею про радіальні коливання тонкого диска із суцільними електродами, проте їх можна з тим же результатом застосувати до зразка будь-якої геометричної форми, для якого відомі вирази резонансного та антирезонансного визначників. Суть методики зводиться до наступного. Вимірюють частоти резонансів (максимумів провідності) і антирезонансів (мінімумів провідності) двох перших радіальних мод і якомога точніше визначають самі ці провідності. Вимірюють також статичну ємність C_0 і діелектричні втрати ϵ_{33m} . За відношенням резонансних частот першої і другої радіальних мод визначають коефіцієнт Пуассона ν , а за відношенням резонансної та антирезонансної частот першої радіальної моди визначають квадрат планарного КЕМЗ k_p^2 [3, 6, 22–24]. За методикою [14] або в інший спосіб визначають тангенс пружних втрат s_{11m} . Отримані в такий спосіб дані, а також будь-яку близьку до діелектричних або механічних втрат величину тангенса п'єзоелектричних втрат d_{31m} заносять у комп'ютер і будують АЧХ повної провідності поблизу від частоти першого резонансу. Порівнюють відношення частот мінімальної провідності до максимальної з реально вимірним і в разі потреби вносять корекцію у величину k_p^2 . Знову будують АЧХ і порівнюють максимум повної провідності з вимірним. У разі потреби вносять корекцію у величину механічних втрат s_{11m} . Після того, як максимум повної провідності і відношення частот наблизяться до вимірних експериментально величин, можна переходити до побудови АЧХ біля мінімальної провідності у збільшеному масштабі і до добору величини п'єзоелектричних втрат. Досвід автора показує, що для одержання несуперечливого результату часто буває достатньо трьох-чотирьох кроків. Зрозуміло, що для першого кроку можна взагалі взяти будь-які типові гіпотетичні величини. Для зручності розрахунку в діапазоні частот ємнісну провідність запишемо через множник a і безрозмірну частоту x :

$$\omega C_0 = \frac{2\pi x f_0 C_0}{x_0} = ax, \quad a = \frac{2\pi f_0 C_0}{x_0}. \quad (13)$$

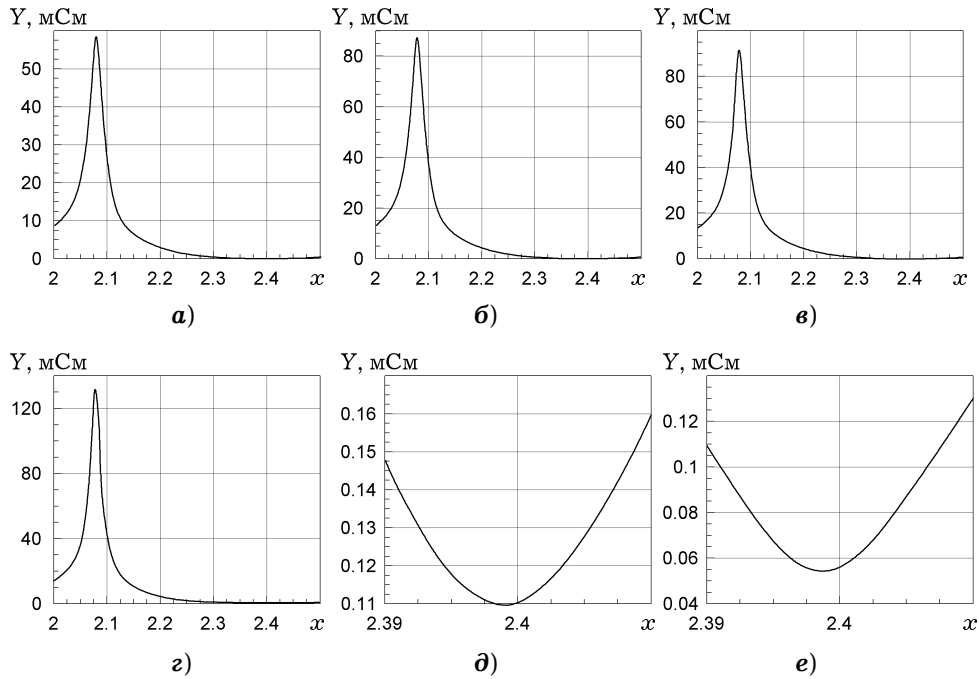


Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики повної провідності в різних інтервалах частот, розраховані з різними наборами параметрів k_p^2 , s_{11m} , d_{31m} .

Наведемо приклад. Виберемо з даних диска ЦТБС-3: $a = 1.77$, $\nu = 0.35$, $\epsilon_{33m} = 0.0085$, решту величин покладемо такими: $k_p^2 = 0.2$, $s_{11m} = 0.01$, $d_{31m} = 0.01$ (рис. 3а). Відношення частот в експерименті було $36\,502/31\,560 = 1.156$, тоді як на графіку $2.27/2.08 = 1.091$. Треба збільшувати k_p^2 . У випадку $k_p^2 = 0.3$ маємо графік на рис. 3б і відношення частот становить $2.38/2.08 = 1.144$, а у випадку $k_p^2 = 0.32$ відношення частот уже становить $2.4/2.08 = 1.154$ (рис. 3в) практично збігається з вимірним.

Максимум повної провідності становить тепер 92 мСм , що менше від вимірної величини 131 мСм у 1.42 рази. Саме у стільки разів треба зменшити величину пружних втрат і взяти $s_{11m} = 0.007$ (рис. 3г). Тепер розраховані дані за максимумом повної провідності, так само, як і за частотою мінімуму, добре узгоджуються з експериментальними і можна братися за амплітуду мінімуму. Розглянемо частотну ділянку $2.3 \div 2.5$ (рис. 3д). Мінімум повної провідності на цьому графіку дорівнює 0.11 мСм . Виміряна величина при навантаженні 20 кОм була 0.0587 мСм . Зменшення тангенса п'єзоелектричних втрат до 0.0035 знижує цей мінімум до 0.056 мСм , а це вже добре узгоджується з експериментом.

В результаті проведених із застосуванням запропонованої методики досліджень для конкретного тонкого диска $66.4 \times 3.1\text{ мм}$ із п'єзокераміки ЦТБС-3 отримано уточнені величини: $k_p^2 = 0.32$, $s_{11m} = 0.007$, $d_{31m} = 0.0035$, які можуть бути використані при розрахунках коливань дискових резонаторів і п'єзотрансформаторів із розділеними електродами, а також перетворювачів кільцевої форми. Треба також зауважити, що параметри $s_{11m} = 0.007$, $d_{31m} = 0.0035$ і $\epsilon_{33m} = 0.0085$ повністю відповідають обмежувачим нерівностям [21–25, 31, 32] (всі позначення взято із вказаних праць):

$$\begin{aligned}
s''_{11}, s''_{33}, s''_{44}, s''_{66}, \varepsilon''_{11}, \varepsilon''_{33} &\geq 0, & s''_{11} &\geq |s''_{12}|, \\
s''_{11}s''_{33} &\geq (s''_{13})^2, & s''_{11}\varepsilon''_{33} &\geq (d''_{31})^2, \\
s''_{33}\varepsilon''_{33} &\geq (d''_{33})^2, & s''_{33}(s''_{11} + s''_{12}) &\geq 2(s''_{13})^2, & \varepsilon''_{33}(s''_{11} + s''_{12}) &\geq 2(d''_{31})^2.
\end{aligned} \quad (14)$$

Тут символами з двома штрихами (як у названих працях) позначено уявні складові відповідних комплексних чисел (дійсні компоненти позначаються символами з одним штрихом). У нашому диску добуток $s''_{11m} \cdot \varepsilon''_{33m} = 0.007 \cdot 0.0085 = 59.5 \cdot 10^{-6}$, а $(d''_{31m})^2 = 12.25 \cdot 10^{-6}$, що набагато менше. На жаль, у згаданій вище праці [5] ці співвідношення виконуються не завжди. Причиною помилок є, скоріш за все, неточності, допущені авторами при визначенні мінімумів повної провідності адмітансометром, в якому опір резистора навантаження був усього 1 Ом [18].

Знаючи f_m , C_0 , k_p^2 , діелектричну сталу ε_{33} і густину ρ , можна визначити декілька важливих електропружних параметрів, таких як поперечний КЕМЗ k_{31} , п'єзомодуль d_{31} , пружна податливість s_{11} і п'єзоконстанта q_{31} , за відомими формулами [3, 20, 22]

$$\begin{aligned}
k_{31}^2 &= \frac{1 - \nu}{2} k_p^2, & \frac{1}{s_{11}} &= \frac{\pi^2 d^2 f_m^2 (1 - \nu^2) \rho}{\alpha_1^2}, \\
d_{31} &= k_{31} \sqrt{\varepsilon_{33} s_{11}}, & q_{31} &= \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Тут d – діаметр пластини, α_1 – найменший додатний корінь першого з рівнянь (12). Діелектричну сталу визначаємо з формули плоского конденсатора [3, 17, 20]: $\varepsilon_{33} = 4hC_0/\pi d^2$, згідно з якою для диска із ЦТС-19 з діаметром 100 мм одержуємо $\varepsilon_{33} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 51.1 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \text{ Ф/м} = 130.2 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м} = 1471\varepsilon_0$.

5. Аналіз результатів. При резонансних коливаннях п'єзокерамічних елементів конструкцій від генератора відбирається деяка потужність і певний струм, який досягає на резонансах максимальних величин і спадає до мінімуму на антирезонансах. У цих крайніх точках між прикладеною до зразка електричною напругою і споживаним від генератора струмом зсуву фаз немає. В міру збільшення різниці частот від резонансу або антирезонансу зсув по фазі між напругою генератора і споживаним п'єзоелементом струмом зростає і може досягати значних величин. Нагадаємо, що схема рис. 1б дає можливість визначити зсув фаз експериментально, а розв'язки задач електропружності у комплексній формі роблять те саме аналітично. Розглянемо фазові зсуви, які існують в п'єзoeлектричному диску із суцільними електродами, коли він коливається в широкому частотному діапазоні.

Порівняємо розраховані та виміряні дані для фазових зсувів між компонентами повної провідності. Частота генератора ГЗ-56/1 змінювалася від 20 до 200 кГц і вольтметром ВЗ-38 вимірювали спади напруг U_{in} , U_{pe} та U_R . Одержані в такий спосіб дані заносили в комп'ютер і будували частотні залежності кутів α , β і γ як відповідних арккосинусів. Одночасно за формулою (1) обчислювали повну провідність пластини. За графіками АЧХ біля резонансних і антирезонансних частот на рівні 3дБ визначали компоненти добротності Q_m [1, 27, 31], які бралися до уваги при розрахунках.

На рис. 4 подано амплітудно-фазові характеристики повної провідності на перших двох радіальних резонансах, розраховані за формулою (1) і визначені експериментально із застосуванням теореми косинусів (6). На рис. 4а, б до залежностей типу $v = a \tan(w)$ (суцільні лінії, $w = \text{imag}(Y)/\text{real}(Y)$) додано криві $\text{abs}(v)$ (штрихові лінії). Так зроблено тому, що в експерименті вольтметр не реагує на полярність вимірюваних напруг, а тільки на їх ефективні значення. Модуль фазового зсуву між реактивною і активною складовими повної провідності на частотах резонансів і антирезонансів знижується до нуля, а потім зростає в обидва боки на першому резонансі до $\pi/2$. На другому резонансі зростання фазового зсуву до $\pi/2$ має місце лише раніше від резонансу і пізніше за антирезонанс. У проміжку резонанс – антирезонанс фазовий зсув не перевищує 0.9 рад.

На рис. 4в, г подано фазово-частотні залежності кутів α , β , γ характеристичного трикутника. Кут α (суцільні криві) утворений сторонами U_R та U_{pe} , кут β (штрихпунктирні криві) утворений сторонами U_{in} та U_R , кут γ (штрихові криві) утворений сторонами U_{in} та U_{pe} . Хід кривих кута β на першому резонансі та антирезонансі, а також на другому резонансі є ідентичний до розрахованих фазових зсувів між компонентами повної провідності. На другому антирезонансі мінімум не досягає нуля, що пояснюється неточностями вимірювань при малих струмах.

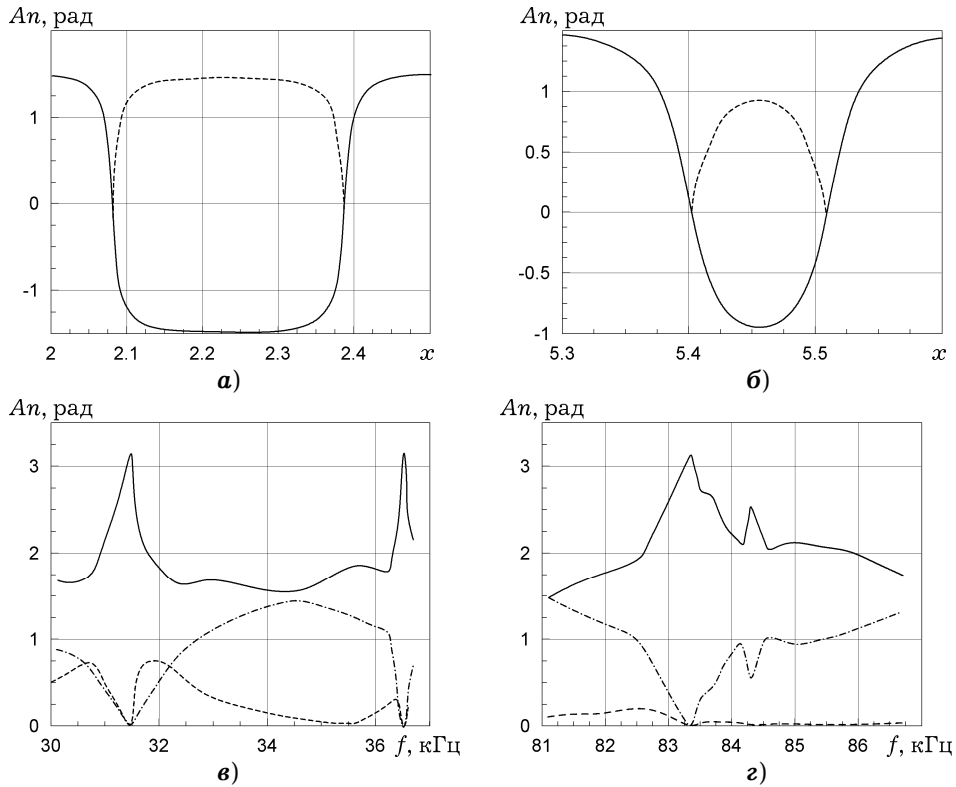


Рис. 4. Фазові зсуви між компонентами повної провідності диска.

Рис. 5 ілюструє АЧХ вимірюваних у схемі рис. 1б спадів напруг U_{pe} , U_R та U_{in} (у мВ) і визначених на їх базі провідностей (у мСм) і кутів (у рад) характеристичного трикутника в околі першого радіального резонансу згаданого вище диска із п'єзокераміки ЦТБС-3 розміром 66.4×3.1 мм. Графіки отримано за умов сталого струму $U_{pe} = U_R/R = 1.89$ мА (рис. 5а-а'''), сталої

напруги $U_{pe} = 90$ мВ (рис. 5б-б''') і сталої вхідної напруги $U_{in} = 100$ мВ (рис. 5в-в''') при навантаженні $R_H = 5.3$ Ом.

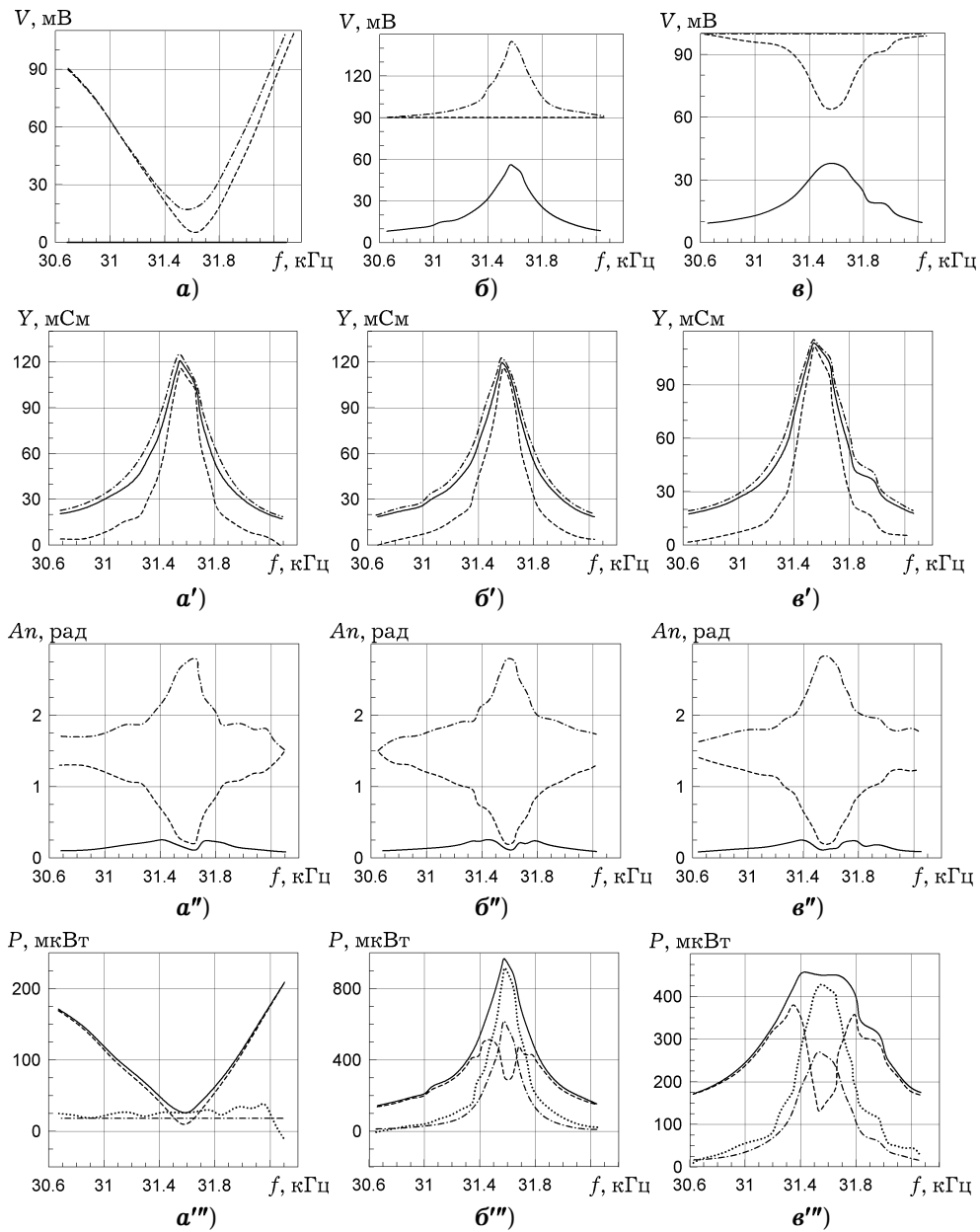


Рис. 5. Амплітудно-частотні і фазово-частотні характеристики першого радіального резонансу диска із п'єзокераміки ЦТБС-3 при навантаженні 5.3 Ом.

На рис. 5а, б, в напругу U_{pe} показано штриховими лініями, U_{in} – штрихпунктирними, а U_R – суцільними. Повний адмітанс (рис. 5а', б', в') обчислено за формулою (1) – суцільні лінії, за формулою (2) – пунктирні лінії, за формулою (4) – штрихові криві. На резонансах точний (1) і наближений (2), (4) вирази дають ті самі результати. Кут α , β , γ трикутника зображено на рис. 5а'', б'', в''. Кут α (пунктирні криві) утворений сторонами U_R і U_{pe} . Кут β (штрихові криві) утворений сторонами U_{in} і U_R . Нарешті, кут γ (суцільні лінії) утворений сторонами U_{in} і U_{pe} .

Рис. 5а''', б''', в''' презентує миттєву потужність і її компоненти. У колі змінного струму розрізняють декілька типів потужностей [19]. Миттєва потужність P у вольт-амперах ($V \cdot A$) є добутком спаду напруги на певній ділянці кола U у даний момент часу на струм I у колі в той же момент. У випадку п'єзорезонатора миттєву потужність можна записати через U_{pe} , U_R та $I_{pe} = U_R/R$ у такому вигляді:

$$p_1 = U_{pe} U_R/R, \quad p_2 = 0.001 U_{pe}^2 Y_1, \quad Y_1 = I_{pe}/U_{pe}. \quad (16)$$

Активна потужність P_a (у Вт) виділяється на активному опорі й іде на його нагрівання. У випадку п'єзорезонатора активну потужність можна записати через p_1 або p_2 (ці величини тотожні):

$$p_{20} = p_2 \cos \alpha, \quad p_{21} = p_2 (-\cos \alpha). \quad (17)$$

Реактивна потужність P_{pe} у вольт-амперах реактивних (вар) виділяється на реактивних елементах кола і йде на створення електричних або магнітних полів. У випадку п'єзорезонатора реактивну потужність можна також записати через p_1 або p_2 . Оскільки послідовно із п'єзоелементом увімкнутий резистор навантаження, то на ньому виділяється деяка активна потужність

$$p_3 = p_2 \sin \alpha, \quad p_r = U_R I_{pe} = U_R^3/R. \quad (18)$$

На рис. 5а''', б''', в''' графіки p_1 показано суцільними лініями, p_{21} – пунктирними, $p_3 = P_{pe}$ – штриховими, а p_r – штрихпунктирними.

Порівняння графіків показує істотну різницю в поведінці компонент повної провідності і потужностей при зміні умов електричного навантаження. У режимі слабкого сигналу ні компоненти провідності, ні фазові кути не змінювалися при переході від сталого струму до сталої напруги. Щодо миттєвої і активної складових потужності, то в режимі сталого струму при наближенні до резонансу вони знижуються, а в режимі сталої напруги зростають. Це може бути причиною різної поведінки адмітансних кривих при значних вхідних потужностях [43, 44]. Рівень реактивної потужності поза резонансом збігається за абсолютною величиною з рівнем миттєвої потужності, а на резонансі реактивна потужність знижується до нуля.

Були проведені експериментальні дослідження спадів напруг в режимах сталого струму і сталих напруг на елементах електричної еквівалентної схеми типу Ван-Дейка [29, 30, 40], складеної із пасивних L , C , R елементів 0.4 мГ, 1.814 нФ і 9.579 нФ при навантаженні 11.2 Ом, які показали аналогічні з реальним диском результати. Брак місця не дає можливості зупинитися на них детальніше. Причину значної нелінійності кривих в режимі сталих напруг, як і її відсутності при сталому струмі [43], слід шукати в зниженні потужності на резонансі при сталому струмі та в її зростанні при сталій нарузі.

Розроблені недавно вискоєфективні кераміки [26, 28, 38] демонструють зростання добротності з одночасним підвищенням нелінійності й вимагають подальших аналітичних і експериментальних досліджень.

Висновки. Запропоновано, обґрунтовано і реалізовано нову розрахунково-експериментальну методику уточненого визначення планарного КЕМЗ, а також тангенсів кутів пружних і п'єзоелектричних втрат енергії в п'єзокерамічних резонаторах.

Проведено численні розрахунки та експериментальні дослідження коливань дисків із п'єзокерамік ТБК-3, ЦТС-19 і ЦТБС-3, які відрізняються за величиною КЕМЗ і механічною добротністю у декілька разів. Обчислення виконано при сталих, незалежних від частоти, заданих або визначених експериментально величинах КЕМЗ, і компонент втрат.

За графіками АЧХ повної провідності в околі резонансних частот і повного імпедансу біля антирезонансів на рівні -3 дБ визначено відповідні добротності. Встановлено, що добротність в околі резонансів на кількадесят відсотків нижча, ніж біля резонансів як у розрахунках, так і в дослідях. Цей результат показує, що визначена за смугою пропускання добротність характеризує не п'єзоелектричний матеріал, а коливальну систему резонатора.

Розрахунок фазово-частотних і амплітудно-частотних характеристик коливань у комплексній формі забезпечує результати, які добре узгоджуються з експериментами.

Автор з глибокою вдячністю згадує добрим словом М. О. Шульгу, який завжди підтримував його роботи в галузі електропружності та прикладної акустики.

1. Акоюян В. А., Соловьев А. Н., Шевцов С. Н. Методы и алгоритм определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. – 144 с.
2. Андрущенко В. А., Бондаренко А. А., Мелешко В. В., Никитенко В. Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом // Акуст. вісн. – 2006. – 9, № 4. – С. 3–11.
3. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 1, ч. А. – Москва: Мир, 1966. – С. 204–326.
4. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 70–74.
5. Бондаренко А. А., Карась Н. И., Улитко А. Ф. Методы определения характеристик диссипации при колебаниях пьезокерамических элементов конструкций // Прикл. механика. – 1982. – 18, № 2. – С. 104–108.
6. Глозман И. А. Пьезокерамика. – Москва: Энергия, 1972. – 288 с.
7. ГОСТ 12370-72. Материалы пьезокерамические, методы испытаний. – Москва: Изд-во станд., 1973. – 28 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 5.
9. Жеребцов И. П. Радиотехника. – Москва: Связь, 1965. – 656 с.
10. Калашиников А. М., Степук Я. В. Основы радиотехники и радиолокации: Электровакуумные приборы и импульсная техника. – Москва: Воениздат, 1962. – 386 с.
11. Карлаш В. Л. Влияние диссипации энергии на амплитудно-частотную характеристику полной проводимости тонкого пьезокерамического диска // Электричество. – 1984. – № 4. – С. 59–61.
12. Карлаш В. Л. Диссипация энергии при колебаниях тонких пьезокерамических круглых пластин // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 5. – С. 77–82.
13. Карлаш В. Л. К вопросу об электромеханических потерях в пьезокерамических телах // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 3. – С. 58–63.
14. Карлаш В. Л. Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических пластин // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 7. – С. 3–46.
15. Карлаш В. Л. Особенности амплитудно-частотных характеристик полной проводимости тонкого пьезокерамического полудиска // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 10. – С. 106–114.
16. Карлаш В. Л. Электромеханические колебания пьезокерамического полого сфероида с полярным вырезом // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 5. – С. 58–65.
17. Магнитные и диэлектрические приборы. Ч. I. / Под ред. Г. В. Катца. – Москва–Ленинград: Энергия, 1964. – 416 с.
Те same: Katz H. W. (Ed.) Solid state magnetic and dielectric devices. – New York: Wiley, 1959. – 542 p.
18. Петин О. П., Крамаров Ю. А., Петин Г. П. Установка для измерения адмиттансно-частотных характеристик пьезопреобразователей // Пьезоэлектрические материалы и преобразователи. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1977. – С. 22–25.
19. Терещук Р. М., Домбругов Р. М., Босый Н. Д., Ногин С. И., Боровский В. П., Чаплинский А. Б. Справочник радиолюбителя. – Київ: Техніка, 1965. – 1160 с.
20. Шарапов В. М., Минаев И. Г., Бондаренко Ю. Ю., Кисиль Т. Ю., Мусиенко М. П., Роттэ С. В., Чудаева И. Б. Пьезоэлектрические преобразователи: Справочник / Под ред. В. М. Шарапова. – Черкассы: Черкас. гос. техн. ун-т, 2004. – 435 с.

21. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Вимірювання повної провідності п'єзокерамічних елементів у схемі чотириполюсника Мезона та її варіантах // Тези ІУ Міжнар. наук.-техн. конф. «Датчики, прилади та системи-2008». – Черкаси – Гурзуф, 2008. – С. 54–56.
22. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 272 с.
23. Шульга М., Карлаш В. Ефективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 225–237.
24. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
25. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. – Москва: Мир, 1974. – 288 с.
26. Garcia J. E. Guerra J. D. S., Araújo E. B., Pérez R. Domain wall contribution to dielectric and piezoelectric responses in 0.65Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})-0.35PbTiO₃ ferroelectric ceramics // J. Phys. **D: Appl. Phys.** – 2009. – **42**, No. 11. – P. 115421–115425.
27. Grigor'eva L. O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of piezoceramic layer // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 2. – P. 159–164.
28. Guerra J. D. S., Araújo E. B., Guarany C. A., Reis R. N., Lima E. C. Features of dielectric response in PMN–PT ferroelectric ceramics // J. Phys. **D: Appl. Phys.** – 2008. – **41**, No. 22. – P. 225504–225508.
29. Dye D. W. The piezo-electric quartz resonator and its equivalent circuit // Proc. Phys. Soc. London. – 1925. – **38**. – P. 399–458.
30. Van Dyke K. S. The electric network equivalent of piezoelectric resonator // Phys. Rev. – 1925. – **25**. – P. 895(A).
31. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. Sonics Ultrason., SU-14. – 1967. – No. 1. – P. 18–20.
32. Holland R., EerNisse E. P. Design of resonant piezoelectric devices. – Cambridge: M.I.T. Press, 1969. – 256 p.
33. IRE standards on piezoelectric crystals: measurements of piezoelectric ceramics. 1961 // Proc. IRE. – 1961. – **49**, No. 7. – P. 1161–1169.
34. Karlash V. L. Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer // J. Sound Vib. – 2004. – **277**, No. 1–2. – P. 353–367.
35. Karlash V. Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer // Jpn. J. Appl. Phys. – 2005. – **44**, Part 1, No. 4A. – P. 1852–1856.
36. Karlash V. L. Planar electroelastic vibrations of piezoceramic rectangular plate and half-disk // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 5. – P. 547–553.
37. Kirichok I. F., Karnaukhova T. V. Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, No. 10. – P. 1132–1139.
38. Kobor D., Hajjaji A., Garcia. J. et al. Dielectric and mechanical nonlinear behavior of Mn doped PMN-35PT ceramics // J. Mod. Phys. – 2010. – **1**, No. 4. – P. 211–216.
39. Martin G. E. Dielectric, elastic and piezoelectric losses in piezoelectric materials // Proc.-1974 Ultrasonic Symp., Nov. 11–14, 1974, Milwaukee. – P. 613–617.
40. Mason W. P. The location of hysteresis phenomena in Rochelle salt // Phys. Rev. – 1940. – **58**, No. 8. – P. 744–756.
41. Mezheritsky A. V. Elastic, dielectric and piezoelectric losses in piezoceramics: how it works all together // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. – 2004. – **51**, No. 6. – P. 695–707.
42. Munk E. C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // Phillips Res. Rep. – 1965. – **20**, No. 2. – P. 170–189.
43. Uchino K., Zheng J. H., Chen Y. H., Du X. H., Ryu J., Gao Y., Ural S., Priya S., Hirose S. Loss mechanisms and high power piezoelectrics // J. Mater. Sci. – 2006. – **41**, No. 1. – P. 217–228.
44. Ural S. O., Tuncdemir S., Zhuang Y., Uchino K. Development of a high power piezoelectric characterization system and its application for resonance/antiresonance mode characterization // Jpn. J. Appl. Phys. – 2009. – **48**, No. 5R. – 056509 (5 pages.)
45. Shul'ga N. A., Bezverkhii A. I., Mekievskii O. I. Resonant frequencies of electroelastic vibrations of piezoceramic plates // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 9. – P. 1031–1038.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Статья посвящена анализу известных и новых методов экспериментального определения вязкоупругих коэффициентов пьезокерамических резонаторов, включая коэффициенты связи и тангенсы механических и пьезоэлектрических потерь. Изложена разработанная автором новая расчетно-экспериментальная методика и приведены примеры ее применения. Обоснование методики проведено с помощью известной задачи о радиальных колебаниях тонкого диска со сплошными электродами. Получила дальнейшее развитие идея поочередного измерения падений напряжения в модернизированной схеме Мэсона, на основе чего разработана новая методика определения фазовых сдвигов между компонентами полной проводимости по теореме косинусов. Представлены элементы этой методики. Экспериментальные данные хорошо согласуются с рассчитанными величинами.

ANALYSIS OF THE METHODS FOR DETERMINING THE VISCOELASTIC COEFFICIENTS OF PIEZOCERAMIC RESONATORS

The paper is devoted to analysis of the known and new methods of the experimental determination of the viscoelastic coefficients of piezoceramic resonators, including coupling coefficients and mechanical and piezoelectric loss tangents. The fundamentals of a new calculation and experimental technique developed by author are presented as well as the examples of its application. The method is justified by known problem of radial vibrations of a thin disk with unbroken electrodes. An idea of alternating voltage measurement in modernized Mason schema is developed and a new method for determination of the phase shifts between the admittance components by the cosine rule is elaborated on its basis. The elements of this technique are presented too. Experimental data are in good agreement with calculated values.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

Одержано
08.10.13