

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ПОКРИТТЯМ ВІНКЛЕРА

Розв'язано задачу про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною, захищеною покриттям, із урахуванням зношування матеріалу. Запропоновано методику розв'язування інтегро-диференціального сингулярного рівняння задачі. Проведено числові розрахунки контактної тиску в різні моменти часу та виявлено особливості зношування матеріалу штампами різної форми. Встановлено моменти часу, коли покриття повністю зноситься в заданій точці області контакту.

У судноплавній, автомобільній і ракетобудівній галузях терміни експлуатації машин і механізмів обмежуються в основному недостатньою зносостійкістю їх складових вузлів і деталей. Серед існуючих конструкторських, технологічних та експлуатаційних методів забезпечення зносостійкості одним з найбільш ефективних є нанесення на робочі поверхні деталей захисного шару із заданими властивостями, які забезпечують максимальну міцність і довговічність [6, 7].

Важливим фактором при дослідженні композиційних покриттів є прогнозування часу роботи фрикційних пар, захищених тонкими покриттями [1]. Встановлення залежностей між зношуванням деталей та товщиною захисного шару і його фізико-механічними характеристиками на практиці є складною технічною задачею [2]. Форму деталей майже в усіх випадках можна описати за допомогою чотирьох канонічних форм (параболічної, циліндричної, еліптичної, гіперболічної). Для моделювання процесів зношування покриття при взаємодії різних за формою тіл використовують апарат механіки контактної взаємодії [8, 9]. У механіці для моделювання захисних шарів як теоретичне узагальнення часто використовують покриття Вінклера [9], які зводяться до інтегро-диференціальних рівнянь, є розв'язаними для штампа параболічної форми [3]. Однак на практиці актуальними є задачі для штампів всіх канонічних форм. Складність розв'язування таких задач полягає у відсутності аналітичних методів пошуку розв'язків рівнянь такого типу та забезпеченні достовірності отриманих числових результатів при застосуванні наближених алгоритмів.

1. Формулювання задачі. Розглядається контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною, яка захищена пружним тонким покриттям із урахуванням зношування матеріалу (див. рис. 1).

У пружну півплощину вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$. Крім того, штамп рухається зі швидкістю V у напрямку, перпендикулярному до площини рисунка. Основа штампа може бути циліндричної, параболічної, гіперболічної або еліптичної форми, аналогічно, як у роботі [5].

Інтегро-диференціальне рівняння відповідно до вибраної моделі покриття має вигляд [4]

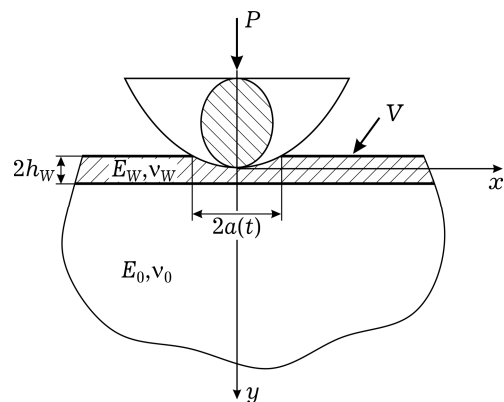


Рис. 1

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + K_W p'(x, t) + k_1 k_2 V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t), \quad (1)$$

де $p(x)$ – контактний тиск, $2a(t)$ – змінна область контакту, $\theta = G_0/(1 - \nu_0)$, $G_0 = E_0/(2(1 + \nu_0))$, $K_W = 2h_W(1 - 2\nu_W)(1 + \nu_W)/(E_W(1 - \nu_W))$ – коефіцієнт Вінклера, k_1 – коефіцієнт тертя, k_2 – коефіцієнт пропорційності між роботою сил тертя і швидкістю зношування.

2. Алгоритм розв'язування інтегро-диференціального рівняння. Інтегральне рівняння (1) залежить від двох змінних x та t . Для розв'язування рівняння застосуємо покроковий алгоритм за часом. За цим алгоритмом розіб'ємо час роботи фрикційної пари зі зношуванням на малі відрізки Δt . Припустимо, що на кожному з часових відрізків контактний тиск і область контакту є постійними. На початковому етапі розв'язування при $t = 0$ інтегральне рівняння буде мати вигляд

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi + K_W p'_0(x), \quad |x| \leq a_0. \quad (2)$$

Для зручності обчислень введемо безрозмірні величини $\bar{x} = x/a_0$, $\bar{p}_0 = p_0/\theta$, $\bar{h}_W = (h_W/R)/(a_0/R)$ (рисочки надалі опускаємо). Тоді рівняння (2) набуде форми

$$p'_0(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f'(x), \quad (3)$$

де $\lambda = a_0/(\pi\theta K_W)$, R – радіус кривини в точці $x = 0$ для всіх штампів.

Для знаходження функції контактного тиску використаємо метод ортогональних поліномів Чебишева першого $T_n(x)$ та другого $U_n(x)$ роду.

На покриття зі сталою силою P діє заокруглений штамп. Задача є симетричною, а система поліномів Чебишева другого роду є повною з вагою $\sqrt{1 - x^2}$ на проміжку $[-1, 1]$. Тому відповідно до вибраного математичного апарату розв'язок будемо шукати у вигляді

$$p_0(x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 U_{2m}(x). \quad (4)$$

Використовуючи властивості поліномів Чебишева, після підстановки (4) в (3) задача зводиться до розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку подамо у матричному вигляді:

$$AX = C, \quad (5)$$

де $X = X(b_{20}^0, b_{21}^0, b_{22}^0 \dots)$.

Матриці A та C мають вигляд

$$A = \begin{cases} a_{mm} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2m+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda}, \\ a_{mk} = \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx, \end{cases} \quad (6)$$

$$C = C(c_0, c_1, \dots), \quad c_k = -\frac{a}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Зв'язок між величинами P та a_0 будемо шукати із умови рівноваги штампів:

$$P = \int_{-a_0}^{a_0} p_0(x) dx. \quad (8)$$

Варто зауважити, що у рівності (8) притискаюча сила P є розмірною величиною, надалі для зручності аналізу числових результатів введемо безрозмірну величину $\bar{P}_0 = P/a_0\theta$.

Експериментально було досліджено, що для забезпечення результатів обчислень із похибкою 10^{-5} кількість невідомих в системі (5) має бути не менше 50, тобто $n \geq 50$.

Розв'язавши систему (5), отримаємо числові коефіцієнти для функції контактної тиску, записаного у вигляді (4).

На наступному кроці, при $t > 0$, тобто $t \in [0, t_1 = \Delta t]$, для знаходження контактної тиску $p_1(x)$ інтегральне рівняння (1) запишемо як

$$p_1'(x)(1 + \lambda\delta\Delta t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_1(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_1}{R} \lambda \pi f'(x). \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) знаходимо аналогічно, як при $t = 0$, при цьому невідомі коефіцієнти $b_{2m}^{(1)}$ визначаємо із системи (5), провівши заміну λ на $\lambda_* = \lambda/(1 + \lambda\delta\Delta t)$, де $\delta = \pi k_1 k_2 V \theta / a_1$.

На наступному кроці, при $t \in [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$, визначаємо $p_2(x)$. Коефіцієнти $b_{2m}^{(2)}$, які є основою ряду (4), знаходимо із системи (5), у якій $\lambda = \lambda_*$, а до правої частини потрібно додати доданок накопичення $\delta\Delta t b_{2m}^{(1)}(2k+1)/2$.

У загальному випадку при $i \geq 2$ для знаходження функції контактної тиску $p_{i+1}(x) = p(x, t_{i+1})$ на проміжку $t \in [t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ розв'язуємо систему алгебричних рівнянь, що співпадає із системою (5), у якій члени правої частини c_k (7) доповнені доданками, отриманими на попередньому кроці:

$$c_k = -\frac{a_i}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx + \frac{2k+1}{2} \delta\Delta t \sum_{n=1}^i b_{2k}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

3. Числові результати та особливості розподілу контактної тиску з урахуванням зношування. При побудові графіків контактної тиску враховано зміну ширини області контакту $a(t)$. Щоб відобразити на одному графіку контактний тиск у різні моменти часу, застосовано алгоритм зведення отриманих числових даних до однієї системи координат із урахуванням пропорційності відношення поточної величини області контакту a_i в момент часу t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, до початкового значення a_0 у момент часу $t_0 = 0$.

Забезпечення умови рівноваги здійснюємо таким чином: для $t_0 = 0$ задаємо значення a_0/R і знаходимо $p_0(x)$, що задовольняє умову рівноваги (8). На наступному кроці, при $t > 0$, $t \in [0, t_1 = \Delta t]$, задаємо значення $a_1/R > a_0/R$ і знаходимо розв'язок за описаною методикою, а за умовою рівноваги на цьому кроці $\bar{P}_1 = \bar{P}_0$, де $\bar{P}_1 = P/\theta a_1$, коригуємо значення a_1/R . Для наступного проміжку часу $t \in [t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ при $i \geq 2$ використовуємо аналогічну схему, описану вище, де $\bar{P}_i = \bar{P}_0$.

Зауважимо, що час t записано як розмірну величину. Надалі для зручності аналізу числових результатів введемо безрозмірну величину $\bar{t} = t\theta k_1 k_2 V/a$. Для подальших обчислень і відображення результатів кон-

тактного тиску було зафіксовано моменти часу $\bar{t}_0 = 0$, $\bar{t}_1 = 0.0082$, $\bar{t}_2 = 0.0174$. Для конкретної пари тертя легко знайти реальний час.

Варто зазначити, що при малих початкових областях контакту $a_0/R < 0.25$ (рис. 2) контактний тиск для всіх штампів практично співпадає з контактним тиском для штампа параболічної форми. Наприклад, для штампа циліндричної форми при заданій силі $\bar{P}_0 = 0.0191$, $E_W/E_0 = 0.9$, $h_W = 1$ у задані фіксовані моменти часу \bar{t}_0 , \bar{t}_1 , \bar{t}_2 було знайдено відповідні області контакту $a_0/R = 0.202$, $a_1/R = 0.2068$, $a_2/R = 0.218$. Криві 1–3 на рис. 2 відповідають заданим моментам часу \bar{t}_0 , \bar{t}_1 , \bar{t}_2 .

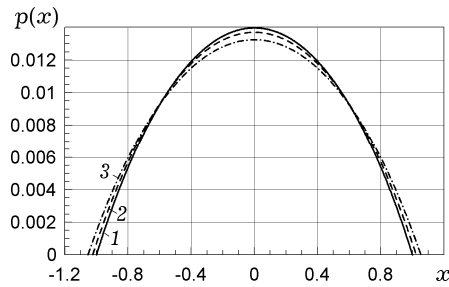


Рис. 2

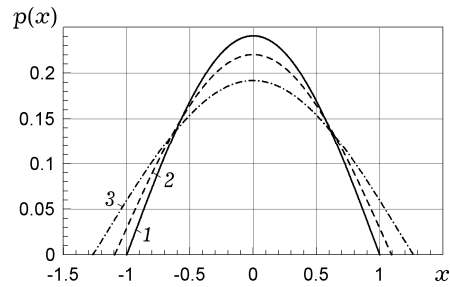


Рис. 3

Важливим фактором при дослідженні контактного тиску для штампів скінченної форми (циліндричної та еліптичної) є те, що для ширини області контакту $a_0/R > 0.5$ описаний метод є погано збіжним. Однак для штампів нескінченної форми (гіперболічної і параболічної) і при значеннях областей контакту $a_0/R > 0.5$ цей метод збігається добре.

Для штампа гіперболічної форми $f(x) = b_h - \frac{b_h}{a_h} \sqrt{a_h^2 + x^2}$, де a_h , b_h – величини дійсної і уявної півосей гіперболи, для розрахунків вибрали $a_h = R$, $b_h = R(1 \pm \varepsilon)$. На рис. 3 побудовано графіки контактного тиску при заданій силі $\bar{P}_0 = 0.3053$, $E_W/E_0 = 0.9$, $h_W = 1$, $\varepsilon = 0.1$ і знайдено відповідні області контакту $a_0/R = 0.49548$, $a_1/R = 0.5423$, $a_2/R = 0.6887$ у фіксовані моменти часу. Криві 1–3, як і на рис. 2, відповідають моментам часу \bar{t}_0 , \bar{t}_1 , \bar{t}_2 .

Ключовим параметром при дослідженні процесу зношування покриттів є час зношування, за який покриття повністю зноситься у процесі роботи контактної пари. Для визначення взаємозв'язку між часом та величиною зношування використаємо співвідношення [4]

$$w_*(x, t) = k_1 k_2 V \int_0^t p(x, t) dt, \quad (11)$$

де $w_*(x, t)$ – величина зношування. Для знаходження часу повного зношування покриття прирівняємо \bar{h}_W і $\bar{w}_*(\bar{x}, \bar{t})$, де $\bar{w}_* = w_*/R$. Час зношування покриття було знайдено для контактної пари тертя чавун – чавун при таких параметрах: $\theta k_2 = 4 \cdot 10^{-3}$, $k_1 = 0.1$, $V = 1$ м/с.

Для штампа гіперболічної форми при $\varepsilon = -0.1$, силі $\bar{P} = 0.3053$ початкова область контакту становить $a_0/R = 0.5213$, а час повного зношування покриття в точці $x = 0$ становить $t = 503$ с, величина області контакту за цей час збільшиться і становитиме $a_i/R = 1.0691$ ($i = 5$).

Висновки. Розв'язана задача дозволяє визначити контактний тиск між покриттям і півплощиною в будь-який момент часу і тим самим оцінити параметри зношування в кожній точці області контакту. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для різних за формою штампів. Отримані результати дають можливість прогнозування часу зношування покриттів при різних змінних параметрах і подальшому аналізі напружено-деформованого стану всередині півплощини.

1. Градиський Ю. О., Карпусенко О. В. Вплив методу зміцнення на процеси тертя і зношування // Вісн. Харків. нац. техн. ун-ту сільськ. госп-ва. – 2015. – Вип. 160. – С. 122–128.
2. Кузьменко А. Г. Надежность узлов трения по прочности и износу. – Хмельницький: Хмельн. нац. ун-т, 2011. – 391 с.
3. Максимук О. В. Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 88–92.
4. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
5. Сачук Ю. В., Максимук О. В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми // Вісн. Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 2(78). – С. 70–80.
6. Budinski K. G. Friction, wear, and erosion atlas. – Boca Raton: CRC Press, 2014. – 309 p.
7. Holmberg K., Ronkainen H., Laukkanen A., Wallin K. Friction and wear of coated surfaces – scales, modelling and simulation of tribomechanisms // Surf. Coat. Technol. – 2007. – **202**, No. 4-7. – P. 1034–1049.
8. Straffelini G. Friction and wear: Methodologies for design and control. – Springer, 2015. – Ser. Springer Tracts in Mech. Eng. – xiii + 283 p.
9. Whitehouse D. J. Handbook of surface and nanometrology. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – xxiii + 975 p.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗНОСЕ ШТАМПАМИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОКРЫТИЕМ ВИНКЛЕРА

Решена задача о контактном взаимодействии штампов канонической формы (цилиндрической, эллиптической, гиперболической) с упругой полуплоскостью, защищенной покрытием, с учетом износа материала. Предложена методика решения интегро-дифференциального сингулярного уравнения задачи. Проведены численные расчеты контактного давления в различные моменты времени и выявлены особенности износа материала штампами различной формы. Установлены моменты времени, когда покрытие полностью изнашивается в заданной точке области контакта.

CONTACT PROBLEM ON WEAR BY PUNCHES OF CANONICAL SHAPE OF ELASTIC HALF-PLANE WITH THE WINKLER'S COATING

The problem of contact interaction of punches of canonical shape (cylindrical, elliptical, and hyperbolic) and an elastic half-plane with a protective coating is solved with regard for material wear. The method for solving singular integral-differential equation of the problem is proposed. The numerical calculations of contact pressure at different instants of time and the peculiarities of the material wear by the punches of different shapes are carried out. The instants of time when the coating material is total worn at a given point of the contact region are established.

¹ Східноєвроп. нац. ун-т ім. Лесі Українки, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.02.15