

УДК 519.63

А. П. ЯНКОВСКИЙ

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. I. ЯВНЫЕ МЕТОДЫ**

*Разработан обций алгоритм исследования спектральной устойчивости обобщенных многостадийных методов Рунге – Кутта (МРК) разных порядков точности применительно к численному интегрированию по времени начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Выражение для функции спектральной устойчивости получено в двух альтернативных формах: на основе матричных соотношений и в детерминантном виде. Исследована конкретная реализация разных явных обобщенных МРК и их спектральная устойчивость. Показано, что все явные обобщенные МРК обладают условной спектральной устойчивостью и свойством условной монотонности численного решения по времени, нарушение которого приводит к возникновению ложных осцилляций приближенного решения. Функция устойчивости для этих методов является полиномиальной. Продемонстрировано, что в случае использования двухстадийных явных обобщенных МРК получаются схемы типа предиктор-корректор, а в случае задачи нестационарной одномерной теплопроводности на базе одностадийного обобщенного МРК получается условно устойчивая классическая двухслойная явная конечно-разностная схема на четырехточечном шаблоне. Выявлено, что из всех исследованных явных обобщенных МРК наименее слабым условием спектральной устойчивости обладает пятистадийный обобщенный метод Рунге – Кутта – Мерсона.*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ МЕТОДІВ РУНГЕ – КУТТА СТОСОВНО ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ. I. ЯВНІ МЕТОДИ**

*Розроблено загальний алгоритм дослідження спектральної стійкості узагальнених багатостадійних методів Рунге – Кутта (МРК) різних порядків точності стосовно числового інтегрування за часом початково-крайової задачі для параболического рівняння другого порядку. Вираз для функції спектральної стійкості отримано в альтернативних формах: на основі матричних співвідношень або в детермінантному вигляді. Досліджено конкретну реалізацію різних явних узагальнених МРК і їх спектральну стійкість. Показано, що всі явні узагальнені МРК мають властивість умовної спектральної стійкості, а також умовної монотонності числового розв'язку за часом, порушення якої призводить до виникнення помилкових осциляцій наближеного розв'язку. Функція стійкості для цих методів є поліноміальною. Продемонстровано, що у випадку використання двохстадійних явних узагальнених МРК отримуються схеми типу предиктор-корректор, а у випадку задачі нестационарної одновимірної теплопровідності на основі одностадійного узагальненого МРК отримується умовно стійка класична двошарова явна скінченно-різницева схема на чотирьохточковому шаблоні. Виявлено, що серед усіх досліджених явних узагальнених МРК найслабшу умову спектральної стійкості має п'ятистадійний узагальнений метод Рунге – Кутта – Мерсона.*

## **STUDY OF THE SPECTRAL STABILITY OF GENERALIZED RUNGE – KUTTA METHODS APPLIED TO INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE. I. EXPLICIT METHODS**

*General algorithm to study the spectral stability of the generalized multi-stage Runge – Kutta methods (RK methods) of different orders of accuracy for numerical time integration of initial-boundary value problem for parabolic equation of second order is*

*developed. The expression for the function of the spectral stability is obtained in two alternative forms: on the basis of the matrix ratios and in determinant form. A specific implementation of the different generalized explicit RK methods and their spectral stability are investigated. It is shown that all the explicit generalized RK methods have property of conditional spectral stability as well as the property of conditional monotonicity of the numerical solution in time, the violation of which leads to the occurrence of false oscillations of the approximate solution. The stability function for these methods is polynomial. It is shown that in the case of two-stage generalized explicit RK methods the schemes of predictor-corrector type are obtained. The classical two-layer conditionally stable explicit finite-difference scheme on the four-point pattern is obtained in the case of the one-dimensional nonstationary heat conduction problem on the basis of one-stage generalized RK method. It is revealed that the five-stage generalized method Runge – Kutta – Merson has the least weak spectral stability condition in comparison with all investigated explicit generalized RK methods.*

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
29.01.16