ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. – 59, № 3. – С. 102–119. – Бібліогр.: 13 назв. – Рос.

УДК 519.63

А. П. Янковский

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. II. НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрены конкретные реализации разных неявных обобщенных методов Рунге – Кутта (МРК) применительно к численному интегрированию по времени начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка и исследована их спектральная устойчивость. Показано, что все неявные обобщенные МРК безусловно спектрально устойчивы, но некоторые из них обладают свойством условной монотонности численного решения по времени. Функции спектральной устойчивости неявных обобщенных МРК являются рациональными. Проведено сравнение аналитического решения задачи нестационарной одномерной теплопроводности с ее численными решениями, полученными разными неявными обобщенными МРК. Продемонстрировано, что в этом случае применение одностадийных методов Радо с последующей дискретизацией задачи по пространственной переменной приводит к классической конечноразностной схеме с опережением (схеме Лаасонена), а использование одностадийного метода Гаусса – Лежандра – к шеститочечной симметричной схеме (схеме Кранка – Николсона). Показано, что диагонально неявные обобщенные методы Нёрсетта и Барриджа реализуются примерно так же, как и одностадийные методы Радо и Гаусса – Лежандра, но имеют точность по временному шагу на один – три порядка большую. На основе сопоставления численных и аналитических решений установлено, что для получения практически пригодных численных решений без каких-либо ограничений на шаг по времени целесообразно использовать одно- и трехстадийные обобщенные методы Радо или двух- и четырехстадийные методы Лобатто IIIC. Все остальные явные и неявные обобщенные МРК требуют введения ограничений на шаг по времени.

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ МЕТОДІВ РУНГЕ – КУТТА СТОСОВНО ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ. І. НЕЯВНІ МЕТОДИ

Розглянуто конкретні реалізації різних неявних узагальнених методів Рунге – Кутта (МРК) стосовно числового інтегрування за часом початково-крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку і досліджено їх спектральну стійкість. Показано, що всі неявні узагальнені МРК є безумовно спектрально стійкими, але деякі з них мають властивість умовної монотонності числового розв'язку за часом. Функції спектральної стійкості неявних узагальнених МРК є раціональними. Проведено порівняння аналітичного розв'язку нестаціонарної одновимірної задачі теплопровідності з її числовими розв'язками, отриманими різними неявними узагальненими МРК. Продемонстровано, що в цьому випадку застосування одностадійних методів Радо з наступною дискретизацією задачі за просторовою змінною приводить до класичної скінченнорізницевої схеми з випередженням (схеми Лаасонена), а використання одностадійного методу Ґаусса – Лежандра – до шеститочкової симетричної схеми (схеми Кранка – Ніколсона). Показано, що діагонально неявні узагальнені методи Нерсетта і Барріджа реалізуються приблизно так само, як і одностадійні методи Радо і Ґаусса – Лежандра, але мають точність за часовим кроком на один–три порядки більшу. На основі співставлення числових і аналітичних розв'язків встановлено, що для отримання практично придатних числових розв'язків без будь-яких обмежень на крок за часом доцільно використати одно- і тристадійні узагальнені методи Радо або дво- і чотиристадійні методи Лобатто IIIC. Усі інші явні та неявні узагальнені МРК потребують введення обмежень на крок за часом.

STUDY OF THE SPECTRAL STABILITY OF GENERALIZED RUNGE – KUTTA METHODS APPLIED TO INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE. II. IMPLICIT METHODS

Specific implementations of the different implicit generalized Runge – Kutta methods (RK methods) are considered for the numerical time integration of initial-boundary value problem for second order parabolic equation and their spectral stability is investigated. It is shown that all implicit generalized RK methods are unconditionally spectrally stable, but some of them have the property of conditional monotonicity of the numerical solution in time. The spectral stability functions of the generalized implicit RK methods are rational functions. The comparison of the analytical solution for the one-dimensional problem of nonstationary heat conduction with numerical solutions, obtained by different generalized implicit RK methods, is performed. It is demonstrated that in this case the using of the one-stage Radau methods with subsequent discretization of the problem in the spatial variable leads to a classical finite-difference scheme ahead (to the Laasonen scheme), and the use of single-stage method of Gauss – Legendre leads to six-point symmetric scheme (to the Crank – Nicolson scheme). It is shown that the diagonally implicit generalized Nørsett and Burrage methods are realized approximately in the same way as one-step Radau and Gauss – Legendre methods, but they have the accuracy in time step on one to three orders of magnitude more. It is established on the basis of a comparison of numerical and analytical solutions that to obtain practically suitable numerical solutions without any restriction on the time step it is advisable to use one- and three-stage generalized Radau methods or two- and four-stage Lobatto IIIC methods. All other implicit and explicit generalized RK methods require the imposing restrictions on the time step.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
29.01.16