УДК 512.643.4

В. М. Прокіп

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ СИСТЕМИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ $AX = B$, $BY = A$ НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Установлено необхідні та достатні умови розв'язності системи матричних рівнянь $AX = B$, $BY = A$ над асоціативними кільцями.

Вступ. Нехай K – асоціативне кільце з одиницею $e \neq 0$. Позначимо: $M_{m,n}(K)$ – множина $(m \times n)$-матриць над K; I_n – одинична матриця порядку n; $0_{m,k}$ – нульова $(m \times k)$-матриця.

Розглянемо систему рівнянь

$$AX = B, \quad BY = A, \tag{1}$$

де A і B – відомі $(m \times n)$- і $(m \times k)$-матриці, а X та Y – невідомі $(n \times k)$- і $(k \times n)$-матриці відповідно над K. Дослідження умов розв'язності та опис структури розв'язків системи рівнянь (1) привертали увагу багатьох математиків. Вперше цю задачу, яка виникла при дослідженні структурних властивостей модулів над комутативними кільцями, вивчав E. Steinitz [12]. Пізніше B. M. Stewart [13] встановив, що система рівнянь (1) має застосування при дослідженні структури спільних дільників матриць над областю головних ідеалів. У роботі [10 розглядається випадок, коли A і B є матрицями розміру $n \times n$ над областю головних ідеалів. Доведено, що, коли система рівнянь (1) сумісна, то матриці A і B – правоеквівалентні.

Якщо $K = F$ – поле дійсних або комплексних чисел, то система рівнянь (1) відіграє вагому роль при дослідженні структури напівгруп і стохастичних процесів [3–8]. Умови, за яких ця система має стохастичні розв'язки у напівгрупі матриць, отримали назву «умов Ґріна»[10, 14]. Серед цих результатів відмітимо твердження, доведене у роботі [4]: якщо A і B – відомі $(m \times n)$-матриці над полем дійсних чисел R, то система рівнянь (1) має стохастичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли $A = BU$, де U – матриця перестановок. Подальші дослідження системи рівнянь (1) при тих чи інших обмеженнях наведено у роботах [12, 13].

Закономірно виникає задача про встановлення умов сумісності системи рівнянь (1) над асоціативними кільцями. Очевидно, що, коли A і B – правоеквівалентні $(m \times n)$-матриці, тобто $A = BV$, де V – оборотна $(n \times n)$-матриця, то система рівнянь (1) сумісна. У зв'язку з цим природньо виникає задача про встановлення умов, за яких із сумісності системи рівнянь (1) випливає одностороння еквівалентність матриць A і B. У цій статті встановлено необхідні та достатні умови сумісності системи рівнянь (1) над асоціативними кільцями. У випадку, коли K – область Безу, в термінах форм Ерміта матриць A і B запропоновано критерій сумісності системи рівнянь (1). На підставі отриманих результатів описано структуру лівих найбільших спільних дільників матриць над областю Безу та структуру односторонніх ідеалів у кільці матриць над областю Безу.

1. Основний результат. Встановимо необхідні та достатні умови розв'язності системи рівнянь (1) над асоціативним кільцем K.

Теорема 1. *Нехай $A \in M_{m,n}(K)$ і $B \in M_{m,k}(K)$ є відомими матрицями. Система лінійних рівнянь (1) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці $\left\| A \quad 0_{m,k} \right\|$ і $\left\| B \quad 0_{m,n} \right\|$ є правоеквівалентними.*

Д о в е д е н н я. Нехай матриці $X_0 \in M_{n,k}(K)$ і $Y_0 \in M_{k,n}(K)$ – розв'язки системи рівнянь (2). На підставі наслідку 1 із [14] матриці $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і $\|B \quad 0_{m,n}\|$ є правоеквівалентними до матриці $\|A \quad B\|$, тобто

$$\|A \quad B\| V_1 = \|A \quad 0_{m,k}\| \qquad \text{і} \qquad \|A \quad B\| V_1 = \|B \quad 0_{m,n}\|,$$

де $V_1 \in GL(n+k, K)$, $V_2 \in GL(n+k, K)$. З двох останніх рівностей отримуємо

$$\|A \quad 0_{m,k}\| V_1^{-1} = \|A \quad B\| = \|B \quad 0_{m,n}\| V_2^{-1}.$$

Отже, $\|A \quad 0_{m,k}\| = \|B \quad 0_{m,n}\| W$, де $W = V_2^{-1} V_1 \in GL(n+k, K)$, тобто матриці $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і $\|B \quad 0_{m,n}\|$ є провоеквівалентними.

Навпаки, якщо матриці $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і $\|B \quad 0_{m,n}\|$ провоеквівалентні, то

$$\|A \quad 0_{m,k}\| = \|B \quad 0_{m,n}\| W, \tag{2}$$

де $W \in GL(n+k, K)$. Матрицю W запишемо у вигляді $W = \begin{Vmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{Vmatrix}$, де $W_{11} \in M_{k,n}(K)$ і $W_{12} \in M_{k,k}(K)$. Тоді з рівності (2) отримуємо

$$BW_{11} = A,$$

$$BW_{12} = 0_{m,k}.$$

Отже, рівняння $BY = A$ розв'язне.

Оскільки $W \in GL(n+k, K)$, то з рівності (2) випливає, що

$$\|A \quad 0_{m,k}\| W^{-1} = \|B \quad 0_{m,n}\|. \tag{3}$$

Запишемо тепер матрицю W^{-1} у вигляді $W^{-1} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Vmatrix}$, де $T_{11} \in M_{n,k}(K)$ і $T_{12} \in M_{n,n}(K)$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, із рівності (3) отримуємо

$$AT_{11} = B,$$

$$AT_{11} = 0_{m,k}.$$

Отже, рівняння $AX = B$ теж є розв'язним. Теорему доведено. ♦

Зрозуміло, що теорема 1 пов'язана з задачею про канонічну форму матриці відносно еквівалентних перетворень її стовпчиків. Отже, задача про сумісність системи рівнянь (1) має позитивний розв'язок для матриць над асоціативними кільцями, в яких кожна матриця еквівалентними перетвореннями стовпчиків зводиться до канонічної форми. Прикладами таких кілець є тіло (некомутативне поле) та область Безу. Зауважимо, що області Безу є доволі широким класом кілець, які містять області Евкліда та області головних ідеалів.

2. Сумісність системи лінійних рівнянь у термінах форм Ерміта. Надалі розглянемо випадок, коли $K = R$ – область Безу. Нагадаємо, що областю Безу називають комутативне кільце R без дільників нуля з одиницею $e \neq 0$, якщо кожен скінченнопороджений ідеал області Безу є головним. Отже, для скінченної множини елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ з області Безу R існує їх найбільший спільний дільник (н.с.д.) $d = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in R$, причому н.с.д. d допускає зображення у вигляді $d = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$, де $b_i \in R$. Якщо елементи $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$ взаємно прості, тобто $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = e$, то цей рядок доповнюється до оборотної матриці, тобто існує матриця $U \in GL(k, R)$, першим рядком якої є елементи $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ця властивість дає можливість виконувати еквівалентні перетворення над рядками та стовпчиками для матриць над областю Безу. З огляду на це нагадаємо відомий факт (див. [11]).

Нехай $C \in M_{m,n}(R)$ − матриця рангу r, $\operatorname{rank} C = r$, над областю Безу R. Для матриці $C \in M_{m,n}(R)$ існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що

$$H_C = CW = \begin{Vmatrix} 0_{k,1} & 0_{k,n-1} \\ H_1 & 0_{m_1,n-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n-2} \\ \ldots & \ldots \\ H_r & 0_{m_r,n-r} \end{Vmatrix},$$

є нижньою блочно-трикутною матрицею, де k − кількість перших нульових рядків матриці C. Матриці H_i означені таким чином:

$$H_1 = \begin{Vmatrix} h_1 \\ * \end{Vmatrix} \in M_{m_1,1}(R), \qquad H_2 = \begin{Vmatrix} h_{21} & h_2 \\ * & * \end{Vmatrix} \in M_{m_2,2}(R), \qquad \ldots,$$

$$H_r = \begin{Vmatrix} h_{r1} & \ldots & h_{r,r-1} & h_r \\ * & \ldots & * & * \end{Vmatrix} \in M_{m_r,r}(R), \qquad k + m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m.$$

Елементи h_i належать повній множині неасоційовних елементів області R для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$. Крім цього, в перших рядках $\begin{Vmatrix} h_{i1} & \ldots & h_{i,i-1} & h_i \end{Vmatrix}$ матриць H_i, $i \geq 2$, елементи h_{ij} належать повній системі лишків за модулем елемента h_i для всіх $j = 1, 2, \ldots, r-1$. Матрицю H_C називають (правою) формою Ерміта матриці C і для матриці C вона визначається однозначно.

Надалі під терміном «форма Ерміта матриці» будемо розуміти, що матриця $C \in M_{m,n}(R)$ еквівалентними перетвореннями стовпчиків зводиться до нижньої трикутної матриці H_C. Тепер форму Ерміта H_C матриці C запишемо у вигляді

$$H_C = \begin{Vmatrix} H(C) & 0_{m,n-r} \end{Vmatrix}, \qquad H(C) = \begin{Vmatrix} 0_{k,1} & 0_{k,r-1} \\ H_1 & 0_{m_1,r-1} \\ H_2 & 0_{m_1,r-2} \\ \ldots & \ldots \\ H_{r-1} & 0_{m_{r-1},1} \\ & H_r \end{Vmatrix} \in M_{m,r}(R),$$

де k − кількість перших нульових рядків у матриці C. Матрицю $H(C)$ будемо називати *головною частиною форми Ерміта* H_C матриці C.

Доведення основних результатів цієї частини статті базується на умові сумісності матричного рівняння $AX = B$, де $A \in M_{m,n}(R)$ і $B \in M_{m,k}(R)$ − матриці над областю Безу R. Нижче встановимо умови сумісності матричного рівняння $AX = B$ над областю Безу в термінах форм Ерміта. На підставі наслідку 1 із [14] рівняння $AX = B$ є сумісним над областю Безу R тоді й тільки тоді, коли матриця $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і розширена матриця $\|A \quad B\|$ є правоеквівалентними над R, тобто, коли форми Ерміта цих матриць співпадають. Наведене вище означення головної частини форми Ерміта матриці дає можливість сформулювати критерій розв'язності рівняння $AX = B$.

Твердження 1. *Рівняння $AX = B$ над областю Безу є сумісним тоді й тільки тоді, коли головні частини форм Ерміта $H(A)$ матриці A і $H(\bar{A})$ розширеної матриці $\bar{A} = \|A \quad B\|$ співпадають.*

Нехай A і B − матриці над областю Безу R, $A \in M_{m,n}(R)$, $B \in M_{m,k}(R)$. Наступним твердженням встановимо умови сумісності системи рівнянь

$$AX = B, \qquad BY = A \tag{4}$$

та опишемо структуру її розв'язків.

Теорема 2. *Система рівнянь* (4) *сумісна над областю Безу тоді й тільки тоді, коли головні частини форм Ерміта $H(A)$ і $H(B)$ матриць A і B відповідно співпадають.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, що необхідною умовою сумісності системи рівнянь (4) є рівність рангів, тобто $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = r$. На підставі теореми 1 система рівнянь (4) сумісна тоді й тільки тоді, коли матриці $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і $\|B \quad 0_{m,n}\|$ є правоеквівалентними. Для матриць A і B існують матриці $W_1 \in GL(n, R)$ і $W_2 \in GL(k, R)$ такі, що

$$AW_1 = H_A = \|H(A) \quad 0_{m,n-r}\| \qquad \text{і} \qquad BW_2 = H_B = \|H(B) \quad 0_{m,k-r}\|.$$

З останніх двох рівностей випливає, що матриці $\|A \quad 0_{m,k}\|$ і $\|B \quad 0_{m,n}\|$ правоеквівалентні тоді й тільки тоді, коли головні частини форм Ерміта $H(A)$ і $H(B)$ матриць A і B відповідно співпадають.

Розглянемо систему сумісних рівнянь

$$\|H(A) \quad 0_{m,n-r}\| X_1 = \|H(B) \quad 0_{m,k-r}\|, \qquad \|H(B) \quad 0_{m,k-r}\| Y_1 = \|H(A) \quad 0_{m,n-r}\|. \tag{5}$$

Легко перевірити, що для довільних матриць $P \in M_{n-r,k-r}(R)$ та $Q \in M_{k-r,n-r}(R)$ матриці $\tilde{X}_1 = \left\|\begin{matrix} I_r & 0_{r,k-r} \\ 0_{n-r,r} & P \end{matrix}\right\|$ і $\tilde{Y}_1 = \left\|\begin{matrix} I_r & 0_{r,k-r} \\ 0_{k-r,r} & Q \end{matrix}\right\|$ є розв'язками системи рівнянь (5).

Отже, матриці $X_0 = W_1 \tilde{X}_1 W_2^{-1}$ і $Y_0 = W_2 \tilde{Y}_1 W_1^{-1}$ є розв'язками системи рівнянь (4). Очевидно, якщо матриці X_0 та Y_0 є розв'язками системи рівнянь (4), то $\operatorname{rank} X_0 \geq r$ і $\operatorname{rank} Y_0 \geq r$. Теорему доведено. ♦

Із теореми 2 отримуємо твердження, яке узагальнює теорему 2 із роботи [10].

Наслідок 1. *Нехай $A \in M_{m,n}(R)$, $B \in M_{m,n}(R)$. Система рівнянь* (4) *є сумісною над областю Безу R тоді й тільки тоді, коли матриці A і B є правоеквівалентними, тобто, коли форми Ерміта матриць A і B співпадають.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, якщо матриці $A, B \in M_{m,n}(R)$ правоеквівалентні, то рівняння $AX = B$ і $BY = A$ розв'язні.

Навпаки, нехай рівняння $AX = B$ і $BY = A$ розв'язні. Нехай, далі, матриці $W_1 \in GL(n,R)$, $W_2 \in GL(n,R$ такі, що

$$AW_1 = H_A = \left\| H(A) \quad 0_{m,n-r} \right\| \quad \text{і} \quad BW_2 = H_B = \left\| H(B) \quad 0_{m,n-r} \right\|.$$

Аналогічно, як при доведенні теореми 2, отримуємо, що для довільної матриці $P \in GL(n-r,R)$ матриці $\tilde{X}_1 = \operatorname{diag}\left(I_r \quad P\right)$ і $\tilde{Y}_1 = \operatorname{diag}\left(I_r \quad P^{-1}\right)$ є розв'язками системи рівнянь

$$\left\| H(A) \quad 0_{m,n-r} \right\| X_1 = \left\| H(B) \quad 0_{m,n-r} \right\|,$$

$$\left\| H(B) \quad 0_{m,n-r} \right\| Y_1 = \left\| H(A) \quad 0_{m,n-r} \right\|.$$

Отже, серед розв'язків рівнянь $AX = B$ і $BY = A$ є розв'язки вигляду

$$X_0 = W_1 \tilde{X}_1 W_2^{-1} \text{ і } Y_0 = W_2 \tilde{Y}_1 W_1^{-1}.$$

Оскільки $X_0 Y_0 = Y_0 X_0 = I_n$, то матриці A і B є правоеквівалентними. Наслідок доведено. ♦

Наведемо застосування наслідку 1 до опису структури спільних дільників матриць над областю Безу. Зауважимо, що структура спільних дільників матриць над областю головних ідеалів описана у [2].

Кажуть, що матриця $D \in M_{m,m}(R)$ є спільним лівим дільником матриць $A \in M_{m,n}(R)$ і $B \in M_{m,k}(R)$, якщо $A = DA_1$ і $B = DB_1$. Якщо ж кожен спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці D, то D називають найбільшим спільним лівим дільником матриць A і B. Для матриці $C = \|A \quad B\|$ (див., наприклад, [2]) існує матриця $W \in GL(n+k,R)$ така, що $CW = H_C = \left\| H(C) \quad 0_{m,n+k-r} \right\|$.

Покладемо

$$D = \begin{cases} H(C), & m = r, \\ \left\| H(C) \quad 0_{m,m-r} \right\|, & m < r. \end{cases}$$

Запишемо матриці W і W^{-1} у вигляді

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \qquad W_{11} \in M_{n,m}(R), \quad W_{21} \in M_{k,m}(R),$$

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \qquad T_{11} \in M_{m,n}(R), \quad T_{12} \in M_{m,k}(R).$$

Із рівностей $\|A \quad B\| = \left\| D \quad 0_{m,n+k-m} \right\| W^{-1}$ і $\left[A \quad B\right] W = \left[D \quad 0_{m,n+k-m}\right]$ отримуємо, що

$$A = DT_{11},$$

$$B = DT_{12},$$

$$D = AW_{11} + BW_{21}.$$

Згідно з означенням матриця D є найбільшим лівим спільним дільником матриць A і B.

На підставі наведених міркувань і наслідку 1 отримуємо твердження, яке узагальнює теорему 3 з [2]. Одночасно це твердження розширює клас кілець, над якими лівий (правий) н.с.д. означений однозначно з точністю до асоційовності.

Наслідок 2. *Лівий н.с.д. матриць $A \in M_{m,n}(R)$ і $B \in M_{m,k}(R)$ над областю Безу R означений однозначно з точністю до асоційовності справа.*

Кожен односторонній ідеал у кільці матриць $M_{m,m}(R)$ над областю головних ідеалів R є головним одностороннім ідеалом (див. [9], Теорема II.5). Покажемо, що задача про спільні односторонні дільники матриць тісно пов'язана з дослідженням структури односторонніх ідеалів в кільці $(m \times m)$-матриць над областю Безу. Враховуючи наслідок 2, отримуємо

Наслідок 3. *Кожен правий скінченнопороджений ідеал J у кільці матриць $M_{m,m}(R)$ над областю Безу R є правим головним ідеалом.*

Д о в е д е н н я. Нехай правий ідеал J кільця $M_{m,m}(R)$ є скінченнопородженим. Тоді кожен елемент $A \in J$ допускає зображення у вигляді $A = D_1B_1 + D_2B_2 + \ldots + D_kB_k$, де $D_1, D_2, \ldots, D_k \in J$ − база ідеалу J і $B_i \in M_{m,m}(R)$. Очевидно, що $k \le m^2$. Для матриць $D_1, D_2, \ldots, D_k$ існує лівий н.с.д. $D \in J$, який визначений однозначно з точністю до асоційовності справа. На підставі цього отримуємо, що $A = DB$, де $B \in M_{m,m}(R)$ і $D \in J$. Наслідок доведено. ♦

3. Система лінійних рівнянь над тілом. Надалі $R = \mathbf{D}$ − тіло з одиницею e. Під терміном ранг матриці будемо розуміти правий ранг матриці, тобто кількість лінійно незалежних її стовпчиків. Для матриць над тілом будемо виконувати наступні елементарні перетворення над її стовпчиками: переставлення місцями двох її стовпців; множення елементів стовпця матриці справа на відмінний від нуля елемент $\alpha \in \mathbf{D}$; додавання до деякого стовпця матриці іншого її стовпця, помноженого справа на відмінний від нуля елемент $\beta \in \mathbf{D}$. Легко переконатись в тому, що матриця $C \in M_{m,n}(\mathbf{D})$ рангу $\operatorname{rank} C = r$ над тілом $\mathbf{D}$ за допомогою елементарних перетворень її стовпчиків зводиться до форми Ерміта, тобто для C існує матриця $W \in GL(n, \mathbf{D})$ така, що

$$H_C = CW = \begin{Vmatrix} 0_{k,1} & 0_{m_1,n-1} \\ H_1 & 0_{m_1,n-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n-2} \\ \vdots & \vdots \\ H_r & 0_{m_r,n-r} \end{Vmatrix}$$

− нижня блочно-трикутна матриця, де k − кількість перших нульових рядків матриці C. Матриці H_i визначаються наступним чином:

$$H_1 = \begin{Vmatrix} e \\ * \end{Vmatrix} \in M_{m_1,1}(\mathbf{D}), \qquad H_2 = \begin{Vmatrix} 0 & e \\ * & * \end{Vmatrix} \in M_{m_2,2}(\mathbf{D}), \qquad \ldots,$$

$$H_r = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & e \\ * & * & * & * \end{Vmatrix} \in M_{m_r,r}(\mathbf{D}), \qquad k + m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m.$$

Матрицю H_C називають (правою) формою Ерміта матриці C над тілом $\mathbf{D}$ і для матриці C вона означена однозначно.

Д о в е д е н н я наступної теореми проводиться так само, як і доведення теореми 2.

Теорема 3. *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbf{D})$ і $B \in M_{m,k}(\mathbf{D})$. Система рівнянь*

$$AX = B,$$

$$BY = A$$

сумісна над тілом $\mathbf{D}$ тоді й тільки тоді, коли головні частини $H(A)$ і $H(B)$ форми Ерміта матриць A і B відповідно співпадають.

Наслідок 4. *Нехай* $A \in M_{m,n}(\mathbf{D})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{D})$. *Система рівнянь*

$$AX = B,$$
$$BY = A$$

сумісна над тілом $\mathbf{D}$ *тоді й тільки тоді, коли матриці* A *і* B *правоеквівалентні над тілом* $\mathbf{D}$, *тобто, коли форми Ерміта матриць* A *і* B *співпадають.*

1. *Прокіп В. М.* Про розв'язність системи лінійних рівнянь над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 566–570.
   Те саме: *Prokip V. M.* On the solvability of a system of linear equations over the domain of principal ideals // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 4. – P. 633–637.
2. *Friedland S.* Matrices: Algebra, analysis and applications. – Singapore: World Sci. Publ. Co., 2015. – xii+584 p.
3. *Green J. A.* On the structure of semigroups // Ann. Math. Second Series. – 1951. – **54**, No. 1. – P. 163–172. – http://www.jstor.org/stable/1969317.
4. *Hartwig R. E., Putcha M. S.* Semisimilarity for matrices over a division ring // Linear Algebra Appl. – 1981. – **39**. – P. 125–132.
5. *Mary X.* Reprint of: On generalized inverses and Green's relations // Linear Algebra Appl. – 2013. – **438**, No. 4. – P. 1532–1540.
6. *Montague J. S., Plemmons R. J.* Convex matrix equations // Bul. Amer. Math. Soc. – 1972. – **78**, No. 6. – P. 965–968. – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1972-13070-2.
7. *Montague J. S., Plemmons R. J.* Doubly stochastic matrix equations // Israel J. Math. – 1973. – **15**, No. 3. – P. 216–229.
8. *Newman M.* A note on matrix equivalence // Linear Multilinear Algebra. – 1978. – **5**, No. 4. – P. 265–266.
9. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p. – Ser. Pure and Applied Mathematics. – Vol. 45.
10. *Robinson C. E. (Jr.)* Green's relations for substochastic matrices // Linear Algebra Appl. – 1986. – **80**. – P. 39–53.
11. *Shangjun Yang, Ronghua Zhang.* Green's relations in the matrix semigroup $M_n(S)$ // Linear Algebra Appl. – 1995. – **222**. – P. 63–76.
12. *Steinitz E.* Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern // Math. Ann. – 1911. – **71**, No. 3. – P. 328–354. – https://doi.org/10.1007/BF01456849.
13. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, No. 6. – P. 587–591.
14. *Wall J. R.* Green's relations for stochastic matrices // Czechoslovak Math. J. – 1975. – **25**, No. 2. – P. 247–260. – https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/101315.

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ $AX = B$, $BY = A$ НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости системы матричных уравнений $AX = B$, $BY = A$ *над ассоциативными кольцами.*

ON SOLVABILITY OF THE SYSTEM OF MATRIX EQUATIONS $AX = B$, $BY = A$ OVER ASSOCIATIVE RINGS

The necessary and sufficient conditions of solvability of the system of matrix equations $AX = B$, $BY = A$ *over associative rings are established.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.02.16