

**АНТИПЛОСКИЙ ЗСУВ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЕЛІПТИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ  
ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА ПОВЕРХНЯХ ПОДІЛУ**

*Досліджено задачу про антиплоский зсув пружного тіла зі скінченною кількістю довільно розташованих і орієнтованих еліптичних включень у припущенні неідеального механічного контакту на поверхнях поділу фаз. Аналітичний розв'язок одержано методом мультипольних розвинень з використанням техніки комплексних потенціалів. Шляхом розвинення зумовлених включеннями збурень поля переміщень у ряд за системою еліптичних гармонік, використання формул їхнього перерозкладу і повного виконання контактних умов крайову задачу теорії пружності зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено застосовність до вказаної системи методу редукції, досліджено швидкість збіжності розв'язку і проведено порівняння з відомими в літературі даними. Наведені чисельні результати параметричного аналізу задачі демонструють суттєву залежність концентрації напружень від умов контакту на поверхні поділу, а також від розміру, форми і взаємного розміщення включень.*

**Вступ.** Дослідження концентрації напружень на структурних неоднорідностях є однією з класичних проблем теорії пружності, яка має значну бібліографію (наприклад, монографії [2, 4, 6, 15]) і є теоретичною основою розділу механіки композитів, присвяченого прогнозуванню пружних властивостей і міцності структурно-неоднорідних матеріалів. Втім, абсолютну більшість досліджень з цієї проблеми проведено в припущенні ідеального механічного контакту (неперервності векторів переміщень і напружень) включень з прилеглим матеріалом, тоді як міжфазні поверхні реальних композитних матеріалів є, як правило, недосконалими. Вказана обставина суттєво обмежує практичну застосовність відомих розв'язків і вимагає розробки теоретичних моделей, здатних врахувати вплив стану міжфазних поверхонь на концентрацію напружень у структурно-неоднорідних тілах і їх макроскопічні пружні властивості.

На сьогодні в літературі є ряд публікацій, присвячених аналізу впливу умов контакту на розподіл напружень в околі включень. Обмежуючись у рамках пропонованого дослідження двовимірною теорією пружності, вкажемо на роботу [7], де на підставі асимптотичного аналізу напружень у нескінченно тонкому проміжному шарі проведено класифікацію фізично можливих умов пружного контакту на поверхні поділу. Залежно від співвідношення пружних властивостей тонкого шару та матеріалів, які він розділяє, встановлено сім типів контактних умов, серед них: згаданий вище ідеальний контакт, два варіанти контакту пружинного («м'якого», за термінологією [7]) типу та чотири варіанти контакту мембранного, або «жорсткого» типу. Так званий «м'який» контакт, при якому стрибок переміщень (проковзування) на поверхні поділу пропорційний контактним напруженням, є найбільш відомою в літературі умовою неідеального контакту. При «жорсткому» контакті, навпаки, має місце стрибок напружень: він очікується, зокрема, в наноструктурних матеріалах, де поверхневі напруження є істотним фактором. Варто зазначити, що теорія поверхневих напружень [9], яку наразі широко використовують при моделюванні таких матеріалів (див. огляд [17]), відповідає одному з варіантів «жорсткого» контакту.

Відомі в літературі розв'язки (наприклад, [5, 8, 14]) стосуються переважно включень з постійною кривизною поверхні (сферичних і круглих), для яких врахування неідеального контакту у фізичній моделі не призводить до ускладнення відповідної математичної задачі. Для включень більш загальної форми відомі лише окремі результати. Так, задачу антиплоского зсуву простору з одним еліптичним включенням і контактними умовами

пружинного типу в [16] розв'язано методом конформних відображень. У [13] аналогічну задачу розглянуто для випадку контактних умов мембранного типу. У [12] одержано строгий розв'язок багаточастинкової модельної задачі з метою визначення зсувної жорсткості волокнистого композита за умови неідеального контакту волокон з матрицею.

Метою цієї роботи є подальший розвиток теоретичного підходу [12] і його застосування до аналізу концентрації напружень в околі еліптичних неоднорідностей за антиплоского зсуву з урахуванням умов контакту на поверхні поділу та ефекту взаємодії включень.

### 1. Постановка задачі.

**1.1. Фізична постановка.** Предметом розгляду є композитний матеріал, який є однорідним середовищем, або матрицею, яка армована однаково орієнтованими (наприклад, уздовж осі  $Ox_3$  декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$ ) довгими волокнами еліптичного профілю. Матеріали матриці і волокон є лінійно пружними та ізотропними. За умови макроскопічно-однорідного повздовжнього зсуву композита в напрямку волокон його напружений стан не залежить від  $x_3$  і, крім того, лише одна компонента вектора переміщень  $\mathbf{u}$  є ненульовою:  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = w(x_1, x_2)$ . У цьому випадку аналіз напруженого стану композита зводиться до розгляду антиплоскої задачі теорії пружності для площини з еліптичними включеннями. Дві ненульові компоненти тензора напружень  $\sigma_{13}$  і  $\sigma_{23}$  задовольняють рівняння рівноваги  $\partial\sigma_{13}/\partial x_1 + \partial\sigma_{23}/\partial x_2 = 0$ , де згідно з законом Гука  $\sigma_{i3} = 2\mu\epsilon_{i3} = \mu\partial w/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2$ . За вказаних умов переміщення  $w$  є гармонічною функцією, що уможливорює застосування до її пошуку методу комплексних потенціалів.

Метою роботи є дослідження впливу умов контакту на межі матриця – включення на концентрацію напружень в об'ємі композита. За антиплоского зсуву можливі два з визначених у [7] семи типів неідеального контакту. Один з них, вищезгаданий «м'який» контакт (у подальшому – контакт *першого типу*) передбачає неперервність нормального напруження  $\sigma_n = 2\mu\nabla w \cdot \mathbf{n} = 2\mu\partial w/\partial n$  на поверхні поділу, тоді як стрибок переміщень пропорційний нормальному напруженню з коефіцієнтом  $h_1$  розмірності  $[H/m^3]$ :

$$\llbracket \sigma_n \rrbracket_{L_q} = 0, \quad h_1 \llbracket w \rrbracket_{L_q} = \sigma_n. \quad (1)$$

Тут і надалі  $\llbracket f \rrbracket_{L_q} = (f^{(0)} - f^{(q)})|_{L_q}$ , де індекс «0» стосується матриці, а «q» – q-го включення. При «жорсткому» контакті (у подальшому – контакт *другого типу*), навпаки, має місце неперервність переміщень і стрибок нормальних напружень, величина якого пропорційна до похідної уздовж контуру від дотичного напруження  $\sigma_t = 2\mu\nabla w \cdot \mathbf{t} = 2\mu\partial w/\partial t$ . Ця умова є частковим випадком моделі Гуртіна – Мердока [9] і має вигляд (наприклад, [13])

$$\llbracket w \rrbracket_{L_q} = 0, \quad \llbracket \sigma_n \rrbracket_{L_q} = -\frac{\partial\sigma_t^s}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $\sigma_t^s = 2(\mu^s - \tau^0)\partial w/\partial t$  – поверхневе напруження,  $\mu^s$  і  $\tau^0$  – пружні модулі міжфазної поверхні (розмірності  $[H/m]$  [9]). Зазначимо, що розмірність матеріальних параметрів поверхні в обох випадках відрізняється від розмірності  $[H/m^2]$  пружних модулів як об'ємних характеристик. Це обумовлює характерний для композита з неідеальним контактом фаз «розмірний ефект»: залежність напруженого стану від розміру включень.

**1.2. Математична постановка.** За геометричну модель композита виберемо площину, яка містить  $N$  еліптичних включень довільного розмі-

ру, форми і орієнтації. Геометрію включення задають координати  $(X_{1q}, X_{2q})$  центру  $O_q$   $q$ -го,  $1 \leq q \leq N$ , еліпса з півосями  $\ell_{1q}$  і  $\ell_{2q}$  ( $\ell_{1q} > \ell_{2q}$ ), відстань між фокусами  $2D_q = 2\sqrt{\ell_{1q}^2 - \ell_{2q}^2}$  і кут  $\Theta_q$  між  $\ell_{1q}$  і віссю  $Ox_1$ . Поруч з глобальною декартовою системою координат  $Ox_1x_2$  введемо локальні координатні системи  $O_qx_{1q}x_{2q}$  з початком у центрі  $q$ -го включення, осі  $O_qx_{1q}$  та  $O_qx_{2q}$  яких паралельні відповідним осям глобальної системи координат. Глобальна  $z = x_1 + ix_2$  та локальні  $z_q = x_{1q} + ix_{2q}$  комплексні змінні пов'язані співвідношеннями  $z = z_q + Z_q$ ,  $Z_q = X_{1q} + iX_{2q}$ , взаємне положення включень визначає параметр  $Z_{pq} = Z_q - Z_p$ .

Поряд з традиційними комплексними змінними введемо пов'язані з  $q$ -м включенням «еліптичні» комплексні змінні  $\xi_q = \zeta_q + i\eta_q$  за формулою

$$z_q = d_q \omega(\xi_q) = D_q \Omega_q \cosh(\xi_q),$$

де  $\omega(\xi) = \cosh(\xi)$  і  $d_q = D_q \Omega_q = D_q \exp(i\Theta_q)$ . На поверхні  $L_q$   $q$ -го включення маємо  $\zeta_q = \zeta_{q0}$ .

Подамо переміщення  $w$  у вигляді  $w = \operatorname{Re} \varphi(z)$ , де  $\varphi(z)$  – комплексний потенціал. Тоді відповідне комплексне напруження буде  $\sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \overline{\mu \varphi'(z)}$ , де модуль зсуву  $\mu = \mu_0$  для площини і  $\mu = \mu_q$  для  $q$ -го включення. При записі умов контакту *першого типу* (1) у термінах комплексних потенціалів

$$\llbracket \mu \operatorname{Im} \varphi(z) \rrbracket_{L_q} = 0, \quad h_1 \llbracket \operatorname{Re} \varphi \rrbracket_{L_q} = \mu \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} \quad (3)$$

враховано, що умова неперервності нормальних напружень  $\llbracket \sigma_n \rrbracket_{L_q} = 0$  еквівалентна  $\llbracket \mu \operatorname{Im} \varphi(z) \rrbracket_{L_q} = 0$  [3]. Умова *другого типу* (2) набуває вигляду

$$\llbracket \operatorname{Re} \varphi \rrbracket_{L_q} = 0, \quad \llbracket \mu \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} \rrbracket_{L_q} = (\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}.$$

Перетворенням другої із цих рівностей з використанням умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t}$$

до

$$\llbracket \mu \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t} \rrbracket_{L_q} = (\mu^s - \tau) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}$$

і наступним її інтегруванням по  $t$  уздовж  $L_q$  отримуємо вираз, цілком аналогічний до (3):

$$\llbracket \operatorname{Re} \varphi \rrbracket_{L_q} = 0, \quad \llbracket \mu \operatorname{Im} \varphi \rrbracket_{L_q} = h_2 \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial t}, \quad (4)$$

де  $h_2 = \mu^s - \tau^0$ .

Напружений стан площини з еліптичними включеннями викликається заданим на нескінченності постійним напруженням  $\sigma^\infty = \sigma_{13}^\infty + i\sigma_{23}^\infty = 2\mu_0 \varepsilon^\infty$ , де  $\varepsilon^\infty = \varepsilon_{13}^\infty + i\varepsilon_{23}^\infty$ . З фізичних міркувань маємо, що  $w \rightarrow w^\infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , де  $w^\infty = \varepsilon_{13}^\infty x_1 + \varepsilon_{23}^\infty x_2 = \operatorname{Re}(\overline{\varepsilon^\infty z})$ .

## 2. Розв'язок крайової задачі.

**2.1. Загальний вигляд розв'язку.** Згідно з принципом суперпозиції (див., наприклад, [11]), переміщення  $w^{(0)}$  точок багатозв'язної області (матриці) можна подати у вигляді суми «дальнього» поля  $w^\infty$  і збурень  $w^{(p)}$  від кожного з включень:

$$w^{(0)} = \operatorname{Re} \varphi_0, \quad \varphi_0 = \varphi^\infty + \sum_{p=1}^N \varphi^{(p)}, \quad (5)$$

де

$$\varphi^\infty = \overline{\varepsilon^\infty} z, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} (v_p)^{-n}, \quad 1 \leq p \leq N, \quad (6)$$

$A_n^{(p)}$  – невідомі комплексні сталі [12], а  $v_p = v(z_p) = \exp \xi_p$ . Переміщення у  $q$ -му включенні запишемо як

$$w^{(q)} = \operatorname{Re} \varphi^{(q)}, \quad \varphi^{(q)} = \sum_k B_k^{(q)} (v_q)^{-k}. \quad (7)$$

Оскільки у включенні величини  $w^{(q)}$  є обмеженими, то для комплексних коефіцієнтів ряду (7) маємо умову  $B_k^{(q)} = B_{-k}^{(q)}$  [3].

**2.2. Локальне розвинення в околі  $q$ -го включення.** Загальний вираз  $w^{(0)}$  (5) містить доданки (6), записані в різних координатних системах. Для виконання контактних умов (3) чи (4) на  $L_q$  їх необхідно записати в термінах локальних еліптичних змінних  $q$ -го включення,  $v_q$ . Для  $\varphi^\infty$  таке перетворення є елементарним і дає

$$\varphi^\infty = \overline{\varepsilon^\infty} \left[ Z_q + \frac{d_q}{2} \left( v_q + \frac{1}{v_q} \right) \right]. \quad (8)$$

Потенціал  $\varphi^{(q)}$  уже записаний у змінних  $q$ -ї системи і перетворень не потребує. Для решти  $\varphi^{(p)}$  ( $p \neq q$ ) перетворення базується на формулах перерозкладу еліптичних гармонік  $(v_p)^{-n}$ ,  $n > 0$ , у термінах  $v_q$  [11, 18]:

$$(v_p)^{-n} = \sum_m \eta_{nm}^{pq} (v_q)^{-m}, \quad (9)$$

де коефіцієнти степеневого ряду  $\eta_{nm}^{pq} = \eta_{nm}(Z_{pq}, d_p, d_a)$  обчислюються за формулою

$$\eta_{nm}^{pq} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (v_p)^{-n} \Big|_{\zeta_q=0} \cos(m\eta_q) d\eta_q. \quad (10)$$

Підстановка (8)–(10) у (6) і потім в (5) дає бажане локальне розвинення:

$$\varphi_0 = \sum_k (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) (v_q)^{-k}, \quad (11)$$

де  $A_k^{(q)} \equiv 0$  для  $k \leq 0$ , а для коефіцієнтів регулярної частини розв'язку маємо

$$a_k^{(q)} = \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq q)}}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \eta_{nk}^{pq} + \delta_{k,\pm 1} \overline{\varepsilon^\infty} d_q \quad (12)$$

(при цьому  $a_{-k}^{(q)} = a_k^{(q)}$ ),  $\delta_{ij}$  – дельта-функція Кронекера.

**2.3. Виконання контактних умов.** Для конкретності розглянемо виконання контактних умов (3) для  $q$ -го включення. З першої з умов маємо

$$\tilde{\mu}_q(\varphi^{(q)} - \overline{\varphi^{(q)}}) = \varphi^{(0)} - \overline{\varphi^{(0)}}, \quad (13)$$

де  $\tilde{\mu}_q = \mu_q/\mu_0$ . На  $L_q$  маємо  $v_q = v_{0q}\tau$ ,  $v_{q0} = \exp \zeta_{q0}$ ,  $\tau = \exp i\eta_q$ , а також  $\bar{v} = v_0/\tau$ . Підстановка  $\varphi^{(q)}$  (7) і  $\overline{\varphi^{(q)}}$  (11) у (13) дає

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_q \left( \sum_k B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} \tau^{-k} - \sum_k \overline{B_k^{(q)}} v_{0q}^k \tau^{-k} \right) = \\ = \sum_k (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} \tau^{-k} - \sum_k (\overline{A_{-k}^{(q)}} + \overline{a_k^{(q)}}) v_{0q}^k \tau^{-k}. \end{aligned}$$

З огляду на ортогональність гармонік Фур'є  $\tau^k = \exp ik\eta_q$ , ця функціональна рівність еквівалентна нескінченній системі лінійних рівнянь ( $k > 0$ )

$$A_k^{(q)} v_{0q}^{-k} + (a_k^{(q)} - \tilde{\mu}_q B_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} - (\overline{a_k^{(q)}} - \tilde{\mu}_q \overline{B_k^{(q)}}) v_{0q}^k = 0. \quad (14)$$

На еліптичній поверхні  $\zeta_q = \zeta_{q0}$  нормальна похідна  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (g_{11})^{-1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_q}$ ,

де  $g_{11} = D_q^2 (\sinh^2 \zeta_q + \sin^2 \eta_q)$  – коефіцієнт Ляме  $q$ -ї еліптичної системи координат. Маємо

$$\beta_q (\varphi^{(0)} + \overline{\varphi^{(0)}} - \varphi^{(q)} - \overline{\varphi^{(q)}}) = \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \zeta_q} + \frac{\partial \overline{\varphi^{(0)}}}{\partial \zeta_q},$$

де  $\beta_q = \frac{h_1 \ell_{2q}}{\mu_0} \sqrt{1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q}$ ,  $\alpha_q = \frac{1}{\sinh^2 \zeta_{q0}}$ , а  $\ell_{2q} = D_q \sinh \zeta_{q0}$  – менша піввісь  $q$ -го еліпса. Враховуючи (11) і те, що  $\partial v_q / \partial \zeta_q = v_q$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_n \left[ \left[ n (A_n^{(q)} + a_n^{(q)}) - \beta_q (A_n^{(q)} + a_n^{(q)} - B_n^{(q)}) (v_q)^{-n} \right] + \right. \\ \left. + \left[ n (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}}) - \beta_q (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}} - \overline{B_n^{(q)}}) \right] \overline{(v_q)^{-n}} \right] = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Інтегруванням помноженого на  $\tau^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , рівняння (15) по  $0 \leq \eta_q \leq 2\pi$  отримуємо нескінченну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} k A_k^{(q)} v_{q0}^{-k} + k (a_k^{(q)} v_{q0}^{-k} + \overline{a_k^{(q)}} v_{q0}^k) - \sum_n \left[ \beta_{q,k-n} (A_n^{(q)} + a_n^{(q)} - B_n^{(q)}) + \right. \\ \left. + \beta_{q,k+n} (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}} - \overline{B_n^{(q)}}) \right] v_{q0}^{-n} = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$\beta_{qk} = \beta_{q,-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{L_q} \beta_q \tau^k dt = \frac{h_1 \ell_{2q}}{2\pi \mu_0} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q} \exp(ik\eta_q) d\eta_q.$$

Співвідношення (12), (14) і (16) у сукупності утворюють замкнену нескінченну систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A_k^{(q)}$  і  $B_k^{(q)}$ , чисельне розв'язання якої завершує процедуру розв'язку. Матриця цієї системи містить безрозмірний параметр  $\tilde{h}_1 = h_1 \ell_{2q} / \mu_0$  як характеристику контакту *першого типу*. З огляду на подібність математичних виразів контактних умов (3) і (4), процедура виконання умов (4) аналогічна викладеній вище і теж дає нескінченну систему рівнянь, де безрозмірним параметром контакту *другого типу* є вираз  $\tilde{h}_2 = h_2 / (\ell_{1q} \mu_0)$ .

### 3. Чисельний аналіз.

**3.1. Застосовність методу редукції і збіжність.** За неідеального контакту навіть у випадку одного еліптичного включення лінійна система містить нескінченну кількість невідомих і рівнянь. Для її чисельного розв'язання зазвичай використовують метод редукції, який полягає в утриманні в системі певної скінченної кількості невідомих і рівнянь. Застосовність такої процедури залежить від властивостей системи і має бути теоретично обґрунтована. Згідно з [1], розв'язок нескінченної лінійної системи

$$x_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

можна одержати з довільною точністю методом редукції за умови

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} (a_{kn})^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^2 < \infty. \quad (18)$$

Викладемо схему такого обґрунтування, взявши найбільш складний для чисельного аналізу випадок абсолютно жорсткого включення і поклавши для конкретності  $\varepsilon^\infty = 1$ . По-перше, за умови  $\mu_q = \infty$  з рівняння (14) маємо  $B_n^{(q)} = 0$ . По-друге, за вибраного навантаження маємо  $A_n^{(q)} = \overline{A_n^{(q)}}$ , а  $a_k^{(q)} = \delta_{k,\pm 1} D_q$ . По-третє, заміною  $x_k = k A_k^{(q)} v_{q0}^{-k}$  нескінченна система (16) зводиться до вигляду (17) з коефіцієнтами

$$a_{kn} = -(\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})/n, \\ b_k = -\delta_{k1} D_q v_{q0}^{-1} + D_q (\beta_{q,k-1} + \beta_{q,k+1}) (v_{q0} + v_{q0}^{-1}).$$

Оскільки  $\beta_{q,k-n} < \beta_{q,k+n}$  для довільних  $k, n > 0$ , то справджується оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})^2 < 4 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n})^2 < 4 \sum_k (\beta_{qk})^2. \quad (19)$$

З рівності Парсеваля для суми квадратів коефіцієнтів Фур'є маємо також

$$\sum_k (\beta_{qk})^2 = (\tilde{h}_1)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q) d\eta_q = (\tilde{h}_1)^2 \left(1 + \frac{\alpha_q}{2}\right), \quad (20)$$

тому

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{kn})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})^2 < (\tilde{h}_1)^2 \left(1 + \frac{\alpha_q}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

З огляду на формули (19), (20) скінченність другої суми у (18) є очевидною.<sup>1</sup>

Таким чином, наближений (з довільною точністю  $\varepsilon$ ) чисельний розв'язок задачі можна одержати методом редукції при утриманні належної кількості гармонік  $n_{\max}(\varepsilon)$ . Табл. 1 містить обчислені при різних  $n_{\max}$  значення коефіцієнта концентрації напружень (ККН)  $\tilde{\sigma}_{13} = \sigma_{13}/\sigma_{13}^\infty$  ( $\sigma_{23}^\infty = 0$ ) у точці  $z = \ell_1$  матриці на неідеальній поверхні *першого типу* ( $\tilde{h}_1 = 10$ ) з майже абсолютно жорстким ( $\tilde{\mu}_1 = \mu_1/\mu_0 = 10^6$ ) включенням. Як видно з табл. 1, швидкість збіжності розв'язку суттєво залежить від форми включення  $e = \ell_2/\ell_1$ : наприклад, для  $e = 0.05$  обчислення  $\sigma_{13}$  з відносно похибкою 0.001 вимагає  $n_{\max} \geq 100$ .

<sup>1</sup> У випадку багаточастинкової задачі елементи матриці лінійної системи містять додатково коефіцієнти перерозкладу (10), які є *de-facto* коефіцієнтами Фур'є і для підсумовування яких також можна використати рівність Парсеваля.

Таблиця 1. Збіжність  $\tilde{\sigma}_{13}$  по кількості гармонік.

$n_{\max}$	$\tilde{\sigma}_{13}$			
	$e = 0.5$	$e = 0.2$	$e = 0.1$	$e = 0.05$
10	2.3719	3.2215	4.0077	5.3099
20	2.3709	3.1343	3.5597	4.0678
40	2.3709	3.1297	3.4834	3.6615
60	2.3709	3.1297	3.4826	3.6451
80	2.3709	3.1297	3.4823	3.6338
100	2.3709	3.1297	3.4823	3.6311
150	2.3709	3.1297	3.4823	3.6301
200	2.3709	3.1297	3.4823	3.6300

**3.2 Аналіз концентрації напружень для одного включення.** У літературі наявні дані щодо концентрації напружень на одому еліптичному включенні з умовами неідеального контакту *першого* [16] і *другого* [13] типу, тому доречним є їх порівняння з одержаним нами строгим розв'язком. На рис. 1 наведено ККН  $\tilde{\sigma}_{13}$  у точці  $z = \ell_1$  матриці на неідеальній поверхні поділу *першого типу* як функцію від  $\tilde{h}_1$  для  $\tilde{\mu}_1 = 30.17/1.02$  [16]. Криві 1 ( $e = 1/2$ ) і 2 ( $e = 1/3$ ) одержано викладеним вище методом. Світлими трикутниками ( $e = 1/2$ ) і квадратами ( $e = 1/3$ ) показано значення  $\tilde{\sigma}_{13}$ , одержані незалежно методом скінченних елементів. Їх практичне співпадіння з нашими даними підтверджує достовірність останніх. Зазначимо також, що оскільки  $\tilde{h}_1$  є пропорційним  $\ell_2$ , то наведені на рис. 1 дані демонструють уже згаданий у вступі «розмірний ефект», тобто залежність напружень від розміру включення.

На рис. 2 подано значення ККН  $\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}/\sigma_{23}^\infty$  ( $\sigma_{13}^\infty = 0$ ) у точці  $z = \ell_1$  на поверхні еліптичної пори за наявності поверхневих напружень (частковий випадок контактних умов *другого типу* (2)) як функцію форми  $e$ . Для  $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_2/(\ell_{1q}\mu_0) = 0$  і  $e \rightarrow 0$ , коли еліпс вироджується у тріщину з вільною від напружень поверхнею, ККН очікувано зростає до нескінченності (крива 1). За наявності поверхневих напружень (кривим 2–4 відповідають значення  $\tilde{h}_2 = 0.001$ ,  $\tilde{h}_2 = 0.002$ ,  $\tilde{h}_2 = 0.004$ ) виконані обчислення прогнозують обмеженість  $\sigma_{23}$  при  $e \rightarrow 0$ . Такого ж висновку доходять автори роботи [10] на підставі аналізу напружень в околі тріщини з поверхневими напруженнями. За відсутності поверхневих напружень розв'язок задачі є елементарним (у виразі (6) лише  $A_1 \neq 0$ ).

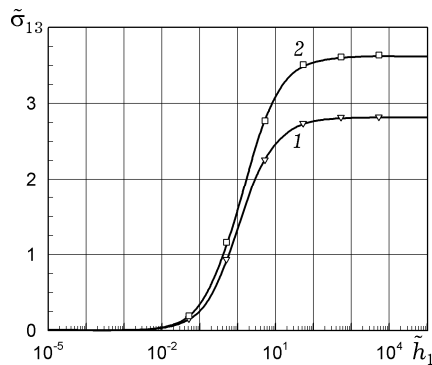


Рис. 1

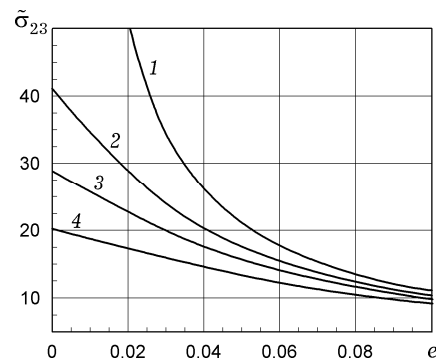


Рис. 2

Окрім вказаного вище розмірного ефекту, наслідком неідеальності контакту є неоднорідність поля напружень в об'ємі включення (що і зумовлює необхідність врахування вищих гармонік у (7)). Це демонструють наведені на рис. 3 графіки розподілу  $\tilde{\sigma}_{13}$  уздовж осі  $Ox_1$  у включенні та в матриці. Тут параметри задачі ті ж, що і на рис. 1,  $e = 1/3$ . Криві 1–3 розраховано для значень  $\tilde{h}_1 = 0.05, 0.5$  і  $5$  відповідно. Очікуваними винятками є  $\tilde{h}_1 = \infty$  (ідеальний контакт, крива 4) і  $\tilde{h}_1 = 0$  (відсутність контакту), для яких розв'язок задачі є елементарним. Принагідно зазначимо, що більшість інженерних формул механіки композитів базується на припущенні постійності напружень у включеннях, тому їх застосування до прогнозування властивостей композитів з недосконалим контактом фаз є некоректним.

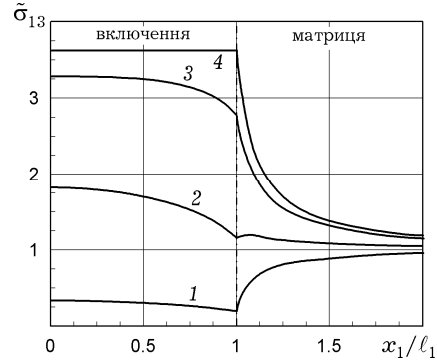


Рис. 3

Додатковим безрозмірним параметром тут є відносна відстань між центрами включень  $L = Z_{12}/\ell_1$ . На рис. 4 подано залежності ККН  $\tilde{\sigma}_{13}$  в точці  $z_1 = \ell_1$  матриці від безрозмірного параметра  $\tilde{h}_1$  неідеального контакту *першого типу* для різних значень  $L$ :  $L = \infty, 2.5, 2.1$  (яким відповідають криві 1–3) при  $e = 1/3$ . Коли  $L = \infty$ , взаємодія включень відсутня, тому крива 1 очікувано співпадає з кривою 2 на рис. 1. Розрахунки показують, що для  $\tilde{h}_1 \leq 0.5$  відстань між включеннями практично не впливає на величину концентрації напружень. Зі збільшенням  $\tilde{h}_1$  вплив взаємодії включень зростає і при  $\tilde{h}_1 \rightarrow \infty$  для  $L = 2.1$  напруження  $\tilde{\sigma}_{13}$  є майже в 2.5 рази більшим, ніж у випадку одного включення.

**3.3 Вплив взаємодії включень.** Для оцінки впливу взаємодії включень на концентрацію напружень повторимо розглянуті вище чисельні розрахунки для площини з двома однаковими і однаково орієнтованими ( $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ ) еліптичними включеннями, центри яких лежать на осі  $Ox_1$  ( $\text{Im } Z_{12} = 0$ ). Додатковим безрозмірним параметром тут є відносна відстань між центрами включень  $L = Z_{12}/\ell_1$ . На рис. 4 подано залежності ККН  $\tilde{\sigma}_{13}$  в точці  $z_1 = \ell_1$  матриці від безрозмірного параметра  $\tilde{h}_1$  неідеального контакту *першого типу* для різних значень  $L$ :  $L = \infty, 2.5, 2.1$  (яким відповідають криві 1–3) при  $e = 1/3$ . Коли  $L = \infty$ , взаємодія включень відсутня, тому крива 1 очікувано співпадає з кривою 2 на рис. 1. Розрахунки показують, що для  $\tilde{h}_1 \leq 0.5$  відстань між включеннями практично не впливає на величину концентрації напружень. Зі збільшенням  $\tilde{h}_1$  вплив взаємодії включень зростає і при  $\tilde{h}_1 \rightarrow \infty$  для  $L = 2.1$  напруження  $\tilde{\sigma}_{13}$  є майже в 2.5 рази більшим, ніж у випадку одного включення.

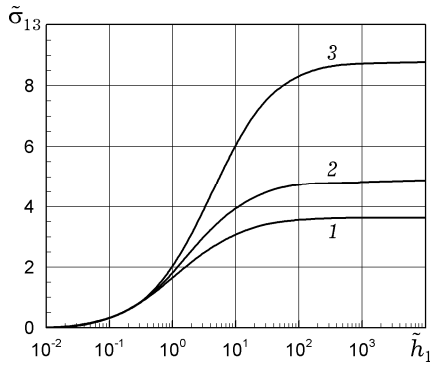


Рис. 4

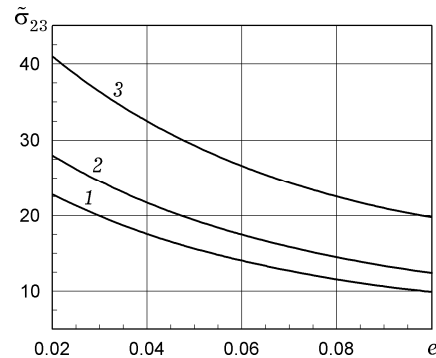


Рис. 5

На рис. 5 наведено залежності ККН  $\tilde{\sigma}_{23}$  в точці  $z_1 = \ell_1$  на поверхні першої еліптичної пори з поверхневими напруженнями: безрозмірний параметр контакту *другого типу*  $\tilde{h}_2 = 0.002$ . Як і на попередньому графіку, криві 1–3 відповідають значенням  $L = \infty, 2.5$  і  $2.1$ . Для  $L = \infty$  взаємодія включень відсутня, тому крива 1 очікувано співпадає з кривою 3 на рис. 2.



Зі зменшенням відстані між включеннями ККН зростає і для  $L = 2.1$  майже вдвічі перевищує значення ККН для одного включення. Наведені на рис. 4 і рис. 5 дані свідчать, що взаємодія включень суттєво впливає на концентрацію напружень, тому її врахування є необхідною передумовою прогнозування напруженого стану структурно-неоднорідного матеріалу. Одержаний у роботі теоретичний розв'язок забезпечує аналіз взаємодії скінченної множини довільно розміщених і орієнтованих еліптичних включень з неідеальним контактом на поверхнях поділу.

**Висновки.** Таким чином, в роботі досліджено задачу про антиплоский зсув пружного тіла зі скінченною кількістю довільно розміщених і орієнтованих еліптичних включень у припущенні неідеального контакту уздовж поверхонь поділу. Розглянуто два можливі за антиплоского зсуву типи неідеального контакту. Попри їх різну фізичну природу, вирази контактних умов у термінах комплексних потенціалів цілком подібні, що дозволило побудувати уніфікований аналітичний розв'язок задачі з використанням принципу суперпозиції та методу комплексних потенціалів. Шляхом розв'язання зумовлених включеннями збурень поля переміщень у ряд за системою еліптичних гармонік, використання формул їх перерозкладу та вичерпного виконання контактних умов крайову задачу теорії пружності зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено застосовність до вказаної системи методу редукції, досліджено швидкість збіжності розв'язку та проведено його порівняння з відомими в літературі даними. Наведені результати чисельного аналізу задачі демонструють обчислювальну ефективність методу, а також суттєвий вплив умов контакту фаз на рівень і концентрацію напружень в околі включень, зокрема наявність розмірного ефекту. Викладені в роботі теоретичні результати є достатніми для поширення розвинутого підходу на аналогічні задачі плоскої теорії пружності. Практичне значення роботи полягає в тому, що розвинута багаточастинкова модель може бути використана для прогнозування концентрації напружень, пружних властивостей і міцності композитів з урахуванням взаємодії включень і недосконалої міжфазних поверхонь.

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва–Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.  
Te same: *Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis.* – New York: Intersci., 1958. – xii + 681 p.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев–Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.  
Te same: *Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.  
Te same: *Savin G. N. Stress concentration around holes.* – Oxford: Pergamon Press, 1961. – xi + 430 p.
5. Семенюк М. П., Жукова Н. Б., Иванова Н. И. Про моделювання недосконалого контакту фаз при розрахунку ефективних механічних характеристик нанокompозитів // Доп. НАН України. – 2013. – № 12. – С. 74–81.
6. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
7. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // *Mech. Mater.* – 2001. – **33**, No. 6. – P. 309–323.
8. Duan H. L., Yi X., Huang Z. P., Wang J. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part I: Theoretical framework // *Mech. Mater.* – 2007. – **39**, No. 1. – P. 81–93.
9. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1975. – **57**, No. 4. – P. 291–323.

10. Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2010. – **77**, No. 2. – 021011-021011-7.
11. Kushch V. I. Micromechanics of composites: multipole expansion approach. – Elsevier / Butterworth-Heinemann, 2013. – xvi+489 p.
12. Kushch V. I., Chernobai V. S. Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface // Int. J. Solids Struct. – 2014. – **51**, No. 13. – P. 2529–2538.
13. Luo J., Wang X. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity // Eur. J. Mech. – A/Solids. – 2009. – **28**, No. 5. – P. 926–934.
14. Mogilevskaya S. G., Crouch S. L., Stolarski H. K. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects // J. Mech. Phys. Solids. – 2008. – **56**, No. 6. – P. 2298–2327.
15. Mura T. Micromechanics of defects in solids. – Dordrecht etc.,: M. Nijhoff Publ., 1987. – xiii+587 p.
16. Shen H., Schiavone P., Ru C. Q., Mioduchowski A. An elliptic inclusion with imperfect interface in anti-plane shear // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 33. – P. 4557–4575.
17. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mech. Solida Sin. – 2011. – **24**, No. 1. – P. 52–82.
18. Yardley J. G., McPhedran R. C., Nicorovici N. A., Botten L. C. Addition formulas and the Rayleigh identity for arrays of elliptical cylinders // Phys. Rev. E. – 1999. – **60**, No. 5. – P. 6068–6080.

#### АНТИПЛОСКИЙ СДВИГ УПРУГОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗДЕЛА

Исследована задача об антиплоском сдвиге упругого тела с конечным количеством произвольно расположенных и ориентированных эллиптических включений в предположении неидеального механического контакта вдоль поверхности раздела фаз. Аналитическое решение получено методом мультипольного разложения с использованием техники комплексных потенциалов. Путем разложения вызванных включениями возмущений поля перемещений в ряд по системе эллиптических гармоник, использования формул их переразложения и исчерпывающего выполнения контактных условий краевая задача теории упругости сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказана применимость к указанной системе метода редукции, исследована скорость сходимости решения и проведено сравнение с известными в литературе данными. Приведенные численные результаты параметрического анализа задачи демонстрируют существенную зависимость концентрации напряжений от условий контакта на поверхности раздела, а также от размера, формы и взаимного размещения включений.

#### ANTIPLANE SHEAR OF ELASTIC SOLID WITH ELLIPTICAL INCLUSIONS AND IMPERFECT INTERFACES

The antiplane shear problem for elastic solid containing a finite number of arbitrary placed and oriented elliptical inclusions with imperfect mechanical interface contact is considered. An analytical solution is obtained by the multipole expansion method combined with the complex potentials technique. By expanding the displacement field perturbation caused by inclusions into a series of elliptical harmonics, the use of re-expansion formulas and comprehensive implementation of the interface conditions the boundary-value problem of elasticity is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. Applicability of the reduction method to this system has been proven, the convergence rate of solution has been investigated and the comparison with the available in literature data has been made. Numerical results of the parametric study demonstrate that the imperfect interfaces as well as size, shape of inclusions and interaction between them affect the stress concentration quite significantly.

Ин-т надтвердих матеріалів  
ім. В. М. Бакуля НАН України, Київ

Одержано  
19.07.16