

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРІВ

Досліджено усталені осесиметричні коливання п'єзокерамічних циліндрів обмеженої довжини при електричному навантаженні. Побудову ключової системи рівнянь виконано шляхом зведення системи рівнянь електропружності в циліндричній системі координат до системи рівнянь гамільтоново-го типу або на основі умов стаціонарності функціоналу принципу Гамільтона – Остроградського. Перехід до звичайних диференціальних рівнянь в першому випадку здійснено за допомогою скінченнорізницевого виразу, а в другому – застосовано сплайн-апроксимації першого порядку. Для розв'язання отриманих крайових задач використано метод дискретної ортогоналізації. Наведено порівняння отриманих цими методами результатів. Досліджено залежність коливань від частоти навантаження для радіально поляризованого циліндра. Визначено резонансні частоти.

Вступ. Задачі динамічної електропружності набули актуальності у зв'язку з широким практичним застосуванням п'єзокерамічних перетворювачів енергії на резонансних режимах роботи [6, 8, 10]. У зв'язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення методів аналізу пружноелектричних коливань на основі просторових континуальних рівнянь електропружності та їх варіаційних тлумачень [8] із використанням сіткових або сплайн-апроксимацій за просторовою координатою, реалізація розроблених чисельних алгоритмів та аналіз коливань електромеханічного стану типових п'єзокерамічних елементів.

Раніше гармонічні коливання п'єзокерамічних тіл сферичної і циліндричної форми розглядалися в [3, 11, 13 та ін.]. У [8, 9] описано варіаційно-різницевий метод дослідження вимушених коливань п'єзокерамічних циліндрів. У роботі [7] отримано систему рівнянь типу Гамільтона та функцію Гамільтона для радіально поляризованих циліндрів шляхом розв'язання шуканих величин у тригонометричні ряди за координатами θ , z та описано умови знаходження резонансу. Сплайн-апроксимації застосовано для дослідження коливань позовжньо поляризованого циліндра у [4].

У роботі [12] використано рівняння гамільтонового типу для аналізу товщинних гармонічних коливань кулі, циліндру й плоского шару. Редукцію системи рівнянь гармонічних осесиметричних коливань п'єзокерамічного циліндра до системи рівнянь гамільтонового типу описано в [1]. Принцип Гамільтона – Остроградського із застосуванням сплайн-апроксимацій за позовжньою координатою використано в роботі [2].

1. Постановка задачі. Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань $f(r, z, t) = \text{Re } f^a(r, z) \exp i\omega t$ в циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E}^a = 0 \quad (2)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^a &= c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\
\sigma_{zz}^a &= c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\
\sigma_{rr}^a &= c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\
\sigma_{zr}^a &= c_{55}^E \left(\frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{51} \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\
D_z^a &= e_{51} \left(\frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\
D_r^a &= e_{31} \left(\frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Систему рівнянь доповнюємо умовами для механічних та електричних величин на граничній поверхні S :

$$u_S = \overset{\circ}{u}_S \vee \sigma_n = \overset{\circ}{\sigma}_n, \tag{4}$$

$$\varphi = \overset{\circ}{\varphi} \vee D_n = \overset{\circ}{D}_n. \tag{5}$$

Надалі верхні індекси « a », « E » і « K » будемо пропускати.

Для формулювання крайових задач електропружності (1)–(3) на основі енергетичних методів виходимо з інтегрального варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, що випливає з теореми про зміну кінетичної енергії. Використання цього принципу при гармонічному навантаженні з частотою ω [8] має на меті пошук набору значень $u_i^a(r, z_i)$, $\varphi_i^a(r, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, що забезпечують стаціонарність функціонала

$$\begin{aligned}
H(u, \varphi) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 u_k^2 - \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + e_{kij} E_k \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^S E_i E_j \right) dV + \right. \\
&\quad \left. + \oint (p_i u_i) dS \right) dt, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3. \tag{6}
\end{aligned}$$

Допустимі функції повинні задовольняти співвідношення Коші, градієнтні співвідношення (2) для електричного потенціалу та крайові умови (4), (5).

2. Ключова система рівнянь типу Гамільтона. Зведемо систему рівнянь (1)–(3) до операторної системи диференціальних рівнянь за радіальною координатою відносно u_r , u_z , $\bar{D}_r = rD_r$, φ , $\bar{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\bar{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$ [1].

Після необхідних перетворень одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r}, \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{r c_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} = -\frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) - \rho \omega^2 r \right) u_r + \\
&\quad + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} = & - \left(c_{12} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(c_{11} - \frac{c_{13}c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\
& + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho \omega^2 r u_z^a, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}
c_{j3}^* = c_{j3} + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}, & \quad e_{j3}^* = e_{j3} - c_{j3} \frac{e_{33}}{c_{33}}, \quad j = 1, 3, \\
\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + \frac{e_{42}^2}{c_{44}}, & \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}.
\end{aligned}$$

Систему (7) можна звести до гамільтонового типу розділенням змінних на групи p_i , q_i і записати її у вигляді [7]

$$q'_i = R_{ik}(r)q_k + Q_{ik}(r)p_k, \quad p'_i = -P_{ik}(r)q_k - R_{ki}(r)p_k,$$

з функцією Гамільтона $H = (P_{ik}q_i q_k + 2R_{ik}p_i q_k + Q_{ik}p_i p_k)/2$. Цих перетворень нема потреби виконувати, оскільки в обчисленнях факт гамільтоновості не використовується.

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , D_z , які не ввійшли в систему (7), визначимо через основні функції σ_{rr} , u_z , D_r , u_r , σ_{rz} , φ формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} = & \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \\
& + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\
\sigma_{zz} = & \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \\
& + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\
D_z = & \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr} - \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Обчислення виконуємо в безрозмірних змінних

$$\begin{aligned}
\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}, \\
\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^E}{\varepsilon_{33}^E}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}}, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{Rc_{33}}, \\
\bar{D}_r = \frac{D_r}{R\sqrt{c_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{R} \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}}{c_{33}}}.
\end{aligned}$$

При цьому вигляд рівнянь (7) не зміниться. Нижче знак безрозмірності опущено.

Зведемо ключову систему (7) до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою різницевих апроксимацій за осью координат.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < L$. Розіб'ємо відрізок $(0, L)$ по осі z на інтервали точками $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ і у формулах (7) похідні за z апроксимуємо скінченними різницями. В результаті одержимо систему $6(n-1)$ звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\sigma}_{rr,i}}{dr} &= A_{11}(r_i)u_{r,i} + A_{12} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + \\
&\quad + A_{13}(r_i)\bar{D}_{r,i} + A_{14} \frac{\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{r} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z}, \\
\frac{d\bar{\sigma}_{rz,i}}{dr} &= A_{21} \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} + \frac{A_{22}(r_i)}{\Delta z^2} (u_{z,i+1} - 2u_{z,i+1} + u_{z,i-1}) + \\
&\quad + A_{23} \frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta z} + A_{24} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta z} + A_{25}(r_i)u_z, \\
\frac{d\bar{D}_{r,i}}{dr} &= A_{31} \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z} + A_{32} \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta z^2}, \\
\frac{du_{r,i}}{dr} &= A_{41}(r_i)\bar{D}_{r,i} + A_{42}(r_i)u_{r,i} + A_{43} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + A_{44}(r_i)\bar{\sigma}_{rr,i}, \\
\frac{du_{z,i}}{dr} &= A_{51}\bar{\sigma}_{rz,i} - \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} + A_{52} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta z}, \\
\frac{d\varphi_i}{dr} &= A_{61}(r_i)\bar{\sigma}_{rr,i} + A_{62}(r_i)\bar{D}_{r,i} + A_{63}(r_i)u_{r,i} + A_{64} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z}, \\
&\quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти системи (9) співпадають з коефіцієнтами рівнянь (7).

Користуючись формулами (7) і апроксимаціями необхідних величин з матеріальних залежностей (8), з граничних умов на торцях знайдемо невідомі значення основних функцій $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{rz}$, \bar{D}_r , u_r , u_z , φ на границях $z = z_0 = 0$ і $z = z_n = L$. Граничні умови на циліндричних поверхнях записуємо в матричному вигляді, що дає змогу застосувати метод дискретної ортогоналізації.

3. Чисельний метод, побудований на варіаційних принципах і сплайн-апроксимаціях. Надалі за аналогією до варіаційно-різницевого методу (ВРМ) [8] називатимемо його варіаційно-сплайновим методом (ВСМ). Функціонал (6) для п'єзокерамічного циліндра з радіальною поляризацією набуває вигляду

$$\begin{aligned}
A = \int_{r_0}^{r_1} \int_0^L \left\{ 2c_{13}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \right. \\
+ c_{55}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{33}^S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + 2c_{12}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \\
+ c_{55}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \varepsilon_{11}^S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + 2c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
+ 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2c_{55}^E \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\
\left. - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) + c_{11}^E \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right\} rdz dr. \quad (10)
\end{aligned}$$

Подамо шукані функції на прямих у вигляді сплайну першого порядку [5], який є кусково-неперервною функцією

$$f(r, z) = f_i(1 - \xi_i) + f_{i+1}\xi_i,$$

$$\xi_i = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (11)$$

Похідні у цьому випадку будуть $dz = h_i d\xi$, $\frac{\partial f(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial f_i}{\partial r}(1 - \xi_i) + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial r} \xi_i$,
 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i)$.

Функціонал (10) при переході до змінних (11) набуде вигляду

$$\begin{aligned} A &= \int_{r_0}^{\eta_k} \int_0^L J dz dr = \int_{r_0}^{\eta_k} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dz dr = \\ &= \int_{r_0}^{\eta_k} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{r_0}^{\eta_k} \sum_{i=0}^{N-1} F_i dr. \end{aligned}$$

Ключова система рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу впливає з умов стаціонарності функціонала:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u_{ki}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u'_{ki}} \right) \sum_{i=0}^{N-1} F_i = F_{ki}(u_{rj}, u_{zj}, \Phi_j) = 0, \\ u_{ki} = u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i, \quad j = i-1, i, i+1. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = \{u_{r,1}, \dots, u_{r,n}, u_{z,1}, \dots, u_{z,n}, \Phi_1, \dots, \Phi_n\} = \\ = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}\}. \end{aligned}$$

Тоді систему (12) запишемо як

$$\begin{aligned} 2c_{33}^E r \left(\frac{1}{6} y''_{i-1} + \frac{2}{3} y''_i + \frac{1}{6} y''_{i+1} \right) + 2e_{33} r \left(\frac{1}{6} y''_{2n+i-1} + \frac{2}{3} y''_{2n+i} + \frac{1}{6} y''_{2n+i+1} \right) = \\ = - \left(2c_{33} \left(\frac{1}{6} y'_{i-1} + \frac{2}{3} y'_i + \frac{1}{6} y'_{i+1} \right) + \frac{1}{h} (c_{13} - c_{12}) \times \right. \\ \times (y_{n+i+1} - y_{n+i-1}) + \frac{1}{h} (c_{13} + c_{55}) r (y'_{n+i+1} - y'_{n+i-1}) + \\ \left. + 2(e_{33} - e_{13}) \left(\frac{1}{6} y'_{2n+i-1} + \frac{2}{3} y'_{2n+i} + \frac{1}{6} y'_{2n+i+1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{rc_{55}}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{2e_{15}r}{h^2} (y_{2n+i-1} - 2y_{2n+i} + \right. \\ \left. + y_{2n+i+1}) + \left(2\rho\omega^2 r - 2c_{11} \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{6} y_{i-1} + \frac{2}{3} y_i + \frac{1}{6} y_{i+1} \right) \right), \\ 2c_{55}^E r \left(\frac{1}{6} y''_{n+i-1} + \frac{2}{3} y''_{n+i} + \frac{1}{6} y''_{n+i+1} \right) = \\ = - \left(\frac{1}{h} (c_{13} + c_{55}) r (y'_{i+1} - y'_{i-1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h}(e_{13} + e_{15})r(y'_{2n+i+1} - y'_{2n+i-1}) + 2c_{55} \left(\frac{1}{6} y'_{n+i+1} + \right. \\
& + \frac{2}{3} y'_{n+i} + \frac{1}{6} y'_{n+i-1} \left. \right) + \frac{1}{h}(c_{12} + c_{55})(y_{i+1} - y_{i-1}) + \\
& + 2r \frac{c_{11}}{h^2} (y_{n+i+1} - 2y_{n+i} + y_{n+i-1}) + \frac{1}{h} e_{15} (y_{2n+i+1} - \\
& - y_{2n+i-1}) + 2\rho\omega^2 r \left(\frac{1}{6} y_{n+i+1} + \frac{2}{3} y_{n+i} + \frac{1}{6} y_{n+i-1} \right), \\
2\varepsilon_{33} r \left(\frac{1}{6} y''_{i-1} + \frac{2}{3} y''_i + \frac{1}{6} y''_{i+1} \right) - 2\varepsilon_{33} r \left(\frac{1}{6} y''_{2n+i-1} + \frac{2}{3} y''_{2n+i} + \frac{1}{6} y''_{2n+i+1} \right) = \\
& = - \left(2(e_{13} + e_{33}) \left(\frac{1}{6} y'_{i+1} + \frac{2}{3} y'_i + \frac{1}{6} y'_{i-1} \right) + \right. \\
& + e_{13} \frac{1}{h} (y_{n+i+1} - y_{n+i-1}) + \frac{1}{h} (e_{13} + e_{15}) r (y'_{n+i+1} - y'_{n+i-1}) - \\
& - 2\varepsilon_{33} \left(\frac{1}{6} y'_{2n+i+1} + \frac{2}{3} y'_{2n+i} + \frac{1}{6} y'_{2n+i-1} \right) + \frac{2}{h^2} e_{15} r (y_{i+1} - \\
& - 2y_i + y_{i-1}) - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{11} r (y_{2n+i+1} - 2y_{2n+i} + y_{2n+i-1}) \left. \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Систему (13) подамо в матричному вигляді та доповнимо до замкнутої системи рівнянь першого порядку, увівши вектор $\mathbf{V} = \mathbf{Y}'$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}r \frac{d\mathbf{V}}{dr} &= \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{V} \rightarrow \frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \mathbf{V} \\
\frac{d\mathbf{V}}{dr} &= \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{V}) \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

4. Порівняння методів. Кожен із розглянутих методів має свої переваги та недоліки. Очевидним плюсом системи (7) є наявність у ключових функціях напружень та електричної індукції, що значно спрощує постановку граничних умов, у тому числі імпедансних. При умовах (4), (5) матриця граничних умов є діагональною. У цьому підході наявні лише перші похідні за просторовими координатами, що є однією з переваг методу. Як і для всіх явних методів, для його збіжності між кроком за r та z повинна виконуватися певна залежність (пропорція), яку визначають з чисельного експерименту. Але це не є проблемою при сучасних обчислювальних технологіях.

У свою чергу, ВСМ, як і всі методи, засновані на енергетичних принципах, повинен достовірніше (в певному класі задач) описувати електромеханічний стан тіла. Використання сплайн-апроксимацій підвищує точність методу порівняно з варіаційно-різницеvim методом. Але ключова система, по суті, містить другі похідні від переміщень. Тому відбувається подвійне інтегрування, що може вносити додаткову похибку. Ця похибка зменшується при зростанні кількості точок розбиття. Для цього методу зручнішими є граничні умови, що накладаються на переміщення та електричний потенціал (маємо діагональну матрицю), тоді як матриця для напружень та електричної індукції матиме блочну структуру і потрібно слідкувати за її виродженістю.

Обчислення одночасно двома суттєво різними методами гарантує достовірність отриманих результатів, тому необхідно розвивати обидва методи. Результати обчислень для різних граничних умов істотно відрізняються, тому при зміні граничних умов необхідно домагатися подібних (відхилення $< 5\%$) значень. Детально порівняємо отримані результати.

Розглядається виготовлений з кераміки PZT-4 [8] циліндр довжини L з внутрішнім радіусом R_0 , зовнішнім R_1 , $R = R_1$, з закріпленими закороченими торцями та вільними циліндричними поверхнями із заданою різницею потенціалів $2V_0$ на них. Для обчислень вибрано $R_0/R_1 = 0.6$, $L = 2R$ і $2V_0 = 2$.

На рис. 1 наведено криві розподілу по висоті радіальних і поздовжніх переміщень внутрішньої поверхні циліндра. Результати отримано обома методами при $m = 30$, $c = 5$, $d = 10$, де $m + 2$ – кількість точок розбиття за z , d – кількість точок ортогоналізації, c – кількість точок інтегрування методом Рунге – Кутта на інтервалі ортогоналізації. Бачимо повне візуальне співпадіння кривих, що відповідає відхиленню між розв’язками в межах 0.5%, звідки робимо висновок про достовірність результатів і необхідну кількість точок розбиття. Розраховані за ВСМ максимальні значення радіальних та осевих переміщень $u_{r \max} = 11.72$ і $u_{z \max} = 2.815$. Аналогічно, за системою Гамільтона маємо $u_{r \max} = 11.68$ і $u_{z \max} = 2.795$.

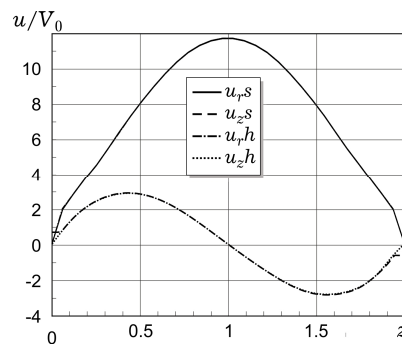


Рис. 1

На рис. 2 наведено залежність безрозмірних амплітудних значень радіальних переміщень u_r у точці $(R_1, \ell_z/2)$ і поздовжніх переміщень u_z у точці $(R_1, \ell_z/4)$ від частоти ω , отримані двома методами. Спостерігається співпадіння результатів до другої власної частоти включно. З системи (7) маємо $\omega_1 = 1.207$, $\omega_2 = 2.097$, а ВСМ дає $\omega_1 = 1.207$, $\omega_2 = 2.108$. Відхилення між значеннями другої власної частоти складає 0.5%, що є допустимим. Перша власна частота викликає радіально-поздовжні коливання, друга частота – переважно радіальні коливання.

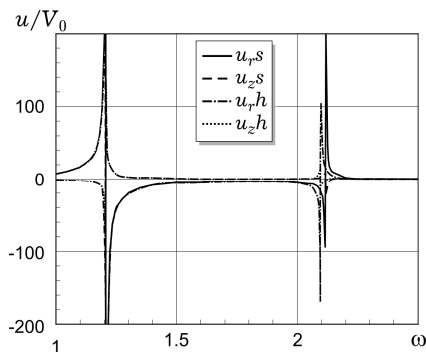


Рис. 2

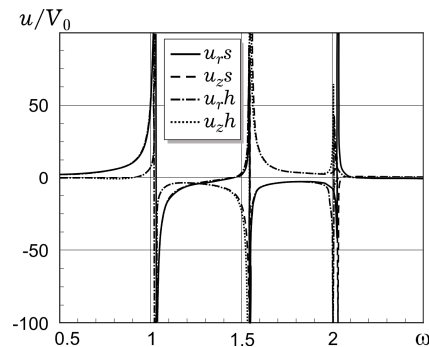


Рис. 3

Результати обчислень двома методами при інших граничних умовах продемонстровано на рис. 3, де наведено амплітудні значення переміщень для циліндра з шарнірно закріпленими закороченими торцями $u_r(r, 0) =$

$= u_r(r, L) = 0, \quad \sigma_z(r, 0) = \sigma_z(r, L) = 0, \quad \varphi(r, 0) = \varphi(r, L) = 0$. Відхилення між розв'язками є максимальним на третій власній частоті, причому різниця між резонансами не перевищує 0.5 %.

Висновки. Розглянуто методи дослідження гармонічних електропружних коливань п'єзокерамічних циліндрів шляхом редукції рівнянь електропружності в циліндричних координатах із застосуванням різницевих апроксимацій за осью координатою до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно радіальної координати та на основі принципу Гамільтона – Остроградського із застосуванням сплайн-апроксимацій за координатою z . Порівняння отриманих результатів дозволяє стверджувати про достовірність отриманих результатів і стійкість, збіжність і відповідність сформульованій крайовій задачі розвинутих чисельних схем. Представлені методи дають змогу ефективно досліджувати вимушені коливання п'єзокерамічних циліндрів при різних граничних умовах, зокрема резонансні режими роботи з урахуванням дисипації енергії в матеріалі.

1. *Безверхий О. І.* Про один метод дослідження осесиметричних гармонічних коливань електропружності // Зб. наук. праць Дніпродзерж. держ. техн. ун-ту. Техн. науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 130–135.
2. *Безверхий О. І.* Про один метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф. (Донецк–Мелекино, 11-14 июня, 2013). – Т. 1. – Донецк: Донецк. нац. ун-т, 2013. – С. 65–69.
3. *Болкисев А. М., Шульга Н. А.* Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация) // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 5. – С. 118–121.
4. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А.* Исследование свободных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 6. – С. 17–26.
Te same: *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A.* Free vibrations of axially polarized piezoceramic hollow cylinders of finite length // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 6. – P. 625–633.
5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 353 с.
6. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
7. *Шульга В. М.* Неосесимметричные электроупругие колебания полого цилиндра с радиальной осью симметрии физико-механических свойств // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 7. – С. 68–72.
Te same: *Shul'ga V. M.* Nonaxisymmetric electroelastic vibrations of a hollow cylinder with radial axis of physicommechanical symmetry // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 7. – P. 766–769.
8. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
9. *Шульга Н. А., Борисенко Л. В.* Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 11. – С. 15–19.
Te same: *Shul'ga N. A., Borisenko L. V.* Vibrations of an axially polarized piezoceramic cylinder during electrical loading // Sov. Appl. Mech. – 1989. – **25**, No. 11. – С. 1070–1074.
10. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
11. *Chiroiu V., Munteanu L.* On the free vibrations of a piezoceramic hollow sphere // Mech. Res. Commun. – **34**, No. 2. – 2007. – P. 123–129.
12. *Shulga M. O., Grigoryeva L. O.* Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis / Ed. A. L. Galloway. – New York: Nova Sci. Publishers, Inc., 2011. – P. 179–204.
13. *Yu J., Ma Q., Su Sh.* Wave propagation in non-homogeneous magneto-electroelastic hollow cylinders // Ultrasonics. – **48**, No. 8. – 2008. – P. 664–677.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРОВ

Исследуются устоявшиеся осесимметричные колебания пьезокерамических цилиндров конечной длины при электрическом нагружении. Построение разрешающей системы уравнений выполняется путем преобразования системы уравнений электроупругости в цилиндрической системе координат к системе уравнений типа Гамильтона или же вытекает из условий стационарности функционала принципа Гамильтона–Остроградского. Переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям в первом случае выполняется с помощью конечно-разностных выражений, во втором применяются сплайн аппроксимации первого порядка. Для решения полученных краевых задач применяется метод дискретной ортогонализации. Проведено тестирование полученных результатов, сравнение методов между собой. Исследована зависимость колебаний от частоты нагрузки для радиально поляризованного цилиндра, определены резонансные частоты.

COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO RESEARCH METHODS OF HARMONIC OSCILLATIONS OF PIEZOCERAMIC CYLINDERS

We study steady-state axisymmetric vibrations of finite-length piezoceramic cylinders subjected to electrical loading. The system of governing equations is constructed either by transforming the system of electroelasticity equations in cylindrical coordinate system into the system of Hamilton equations or by employing the stationary condition for the functional in the principle of Hamilton–Ostrogradski. The transition to ordinary differential equations, in the first case, is performed using the finite-difference expressions. In the second case, the spline approximation of the first order is applied. For the solution of obtained boundary-value problems, the method of discrete orthogonalization is used. The obtained results are verified and compared to one another. The dependence of the oscillation on the load frequency is analyzed for the radially polarized cylinder. The resonant frequencies are determined.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
03.04.16