

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЖОРСТКОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ПІВПРСТОРУ ЯК ОБЕРНЕНА

Розв'язано контактну задачу про втиснення штампа в пружний півпростір з урахуванням тертя за наявності зон зчеплення, ковзання і відриву. Використано підхід, що ґрунтується на постановці задачі як оберненої, в якій додатковою умовою є закон Кулона на ділянках тертя. Враховано наявність зон зчеплення, розміри яких є невідомими при постановці оберненої задачі. Досліджено коректність розв'язку оберненої задачі. У поєднанні з дискретизацією такий підхід дозволяє встановити зони мікроковзання, що чергуються із зонами зчеплення та відриву.

Вступ. Розглядається задача про втиснення жорсткого штампа в пружний півпростір у припущенні про наявність тертя і зчеплення, а також відриву. Вперше задачу про втиснення штампа за наявності тертя і зчеплення наближено розв'язано Л. А. Галінім. З використанням рівнянь класу Фукса [6] отримано аналогічний розв'язок задачі. Суттєві труднощі були пов'язані з необхідністю визначення додаткових констант, що вимагало введення спеціальних умов і обмежувало можливість розв'язання задачі у зазначеній постановці. У подальших дослідженнях задачі з односторонніми зв'язками застосовувались варіаційні нерівності на основі задачі Сінборіні [3]. Чисельні методи дослідження варіаційних нерівностей дозволяють забезпечити збіжність ітераційного процесу тільки за прямою змінною при обчисленні сідлової точки функціоналу Лагранжа [3, 4, 8]. Для отримання розв'язку застосовують модифікований функціонал Лагранжа, що вимагає визначення додаткових констант. Крім того, зазначена постановка не дозволяє розв'язувати задачу в припущенні про існування не лише ділянок ковзання й відриву, але й зчеплення.

Метод скінченних елементів [1, 2, 7, 10] та інші чисельні методи [11] широко застосовували для розв'язання такої задачі.

Пропонуємо підхід до розв'язання контактних задач з урахуванням зчеплення, тертя і відриву, що базується на постановці задачі як оберненої, де додатковою умовою є виконання закону Кулона на ділянках тертя з урахуванням наявності зон зчеплення, розміри яких є невідомими для оберненої задачі.

1. Математична модель. Система рівнянь теорії пружності для півпростору $\Omega = \{x : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ з кусково-гладкою межею Γ , утвореною об'єднанням неперетинних відкритих множин $\Gamma_U, \Gamma_\sigma, \Gamma_k$, має вигляд

$$L(U, F) \equiv (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \mu \nabla^2 U + F = 0, \quad (1)$$

де $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E / (2 + 2\nu)$ – коефіцієнти Ляме; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ – вектор навантажень, $U = \{U_1, U_2, U_3\}$ – вектор переміщень за напрямками осей x_1, x_2, x_3 відповідно; Γ_U, Γ_σ – ділянки, де задано відповідно переміщення і напруження; Γ_k – зайнята штампом ділянка, складена із зон зчеплення, відриву і тертя з невідомими межами. Таким чином, маємо

$$U(x) = U_0(x), \quad x \in \Gamma_U, \quad \sigma_{ij}(U)n_j = f_i(x), \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad (2)$$

де $n = \{n_1, n_2, n_3\}$ – одиничний вектор нормалі до межі Γ_σ ; σ_{ij} – напруження, $i, j = 1, 2$.

Для випадку плоскої задачі в зоні зчеплення Γ_k^C маємо

$$\begin{aligned} U_2 \leq \delta_1, \quad \sigma_{22} \leq 0, \quad U_2 \sigma_{22} = 0, \\ |\sigma_{12}| < k |\sigma_{22}|, \quad U_1' = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де k – коефіцієнт тертя, δ_1 – заглиблення штампа.

Коли $|\sigma_{12}| > k |\sigma_{22}|$, то маємо наявність зони тертя Γ_k^T . Тоді необхідно, щоб виконувались умови

$$k |\sigma_{22}| - |\sigma_{12}| = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_{22} \leq 0, \quad U_2 = \delta_1. \quad (4)$$

Якщо $\sigma_{22} > 0$, то виникає зона відриву Γ_k^O . Тоді умови є такими:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad U_2 > \delta_1. \quad (5)$$

При цьому значення $\pm x_1^T$, $\pm x_1^O$, що задають межі ділянок Γ_k^C , Γ_k^T і Γ_k^O , є невідомими (x_1^T , x_1^O відраховуються від $x_1 = 0$, а $\Gamma_k = \Gamma_k^C \cup \Gamma_k^T \cup \Gamma_k^O$).

2. Постановка оберненої задачі. Подамо розв'язок задачі (1)–(5) у вигляді ітераційної суми двох станів:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(x) = U^0(x) + \tilde{U}^{(m)}(x), \quad U^{(m)}(x) \in H_\Omega^2, \\ \tilde{U}^{(m)}(x) \in H_\Omega^2, \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (6)$$

де вектор-функція $U^0(x)$ описує стан, який відповідає повному зчепленню (1), (3), а $\tilde{U}^{(m)}(x)$ описує додатковий стан, що виникає внаслідок наявності зон ковзання і відриву, тобто такий, що $\tilde{U}^{(m)}(x)|_{\Gamma_k} = \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ задовольняє умови (4) або/і (5); H_Ω^2 – простір Соболева. Вектор-функцію $\tilde{U}^{(m)}(x)$ однозначно визначаємо із рівнянь (1) і заданих крайових умов $\tilde{U}^{(m)}(x)|_{\Gamma_k} = \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$.

Можна показати [5, 9], що для існування вектор-функції $\tilde{U}^{(m)} \in H_\Omega^2$ такої, що $\tilde{U}^{(m)}|_{\Gamma_k} = \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$, необхідно та достатньо, щоб $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in H_{\Gamma_k}^{(3/2)}$,

$$\frac{\partial U_{\Gamma_k}^{(m)}}{\partial n} \in H_{\Gamma_k}^{(1/2)}.$$

Введемо множину допустимих функцій

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in C_\Gamma^2, \quad x \in \Gamma_k, \quad L(U, F) = 0, \quad \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in H_{\Gamma_k}^{(3/2)}, \right. \\ \left. \frac{\partial \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}}{\partial n} \in H_{\Gamma_k}^{(1/2)}, \quad \underline{U} \leq \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \leq \bar{U} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $[\underline{U}, \bar{U}]$ – інтервал зміни $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$, n – нормаль до поверхні.

Сформулюємо задачу визначення функції $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ як обернену, в якій як додаткову інформацію вибираємо умови (4), (5), а як квазірозв'язок – функцію $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$.

Розглянемо випадок, коли умова (5) не виконується. Тоді $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ визначаємо на множині \mathcal{Q} як розв'язок задачі

$$\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} = \arg \min J(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}), \quad \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in \mathcal{Q}, \quad (8)$$

$$\text{де } J(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) = \int_{\Gamma_k} \left(\left| \sigma_{12}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \right| - k \left| \sigma_{22}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \right| \right)^2 d\Gamma.$$

Введемо функцію

$$\mu^{(m)}(x) = \begin{cases} 1, & \sigma_{12}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \geq \sigma_{22}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}), \quad x \in \Gamma_k^T, \\ 0, & \sigma_{12}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) < \sigma_{22}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}), \quad x \in \Gamma_k^C, \end{cases}$$

де $\sigma_{12}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)})$, $\sigma_{22}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)})$ – розв’язок прямої задачі (1) при крайових умовах $\tilde{U}^{(m)}(x)|_{\Gamma_k} = \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$. Тоді функціонал J набуває вигляду

$$J^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) = \int_{\Gamma_k} \left(\sigma_{12}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) - k \sigma_{22}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \right)^2 \mu^{(m)}(x) d\Gamma.$$

Під розв’язком прямої задачі розуміємо трійку $(x_1^T, x_1^O, U(x))$, де x_1^T , x_1^O – точки межі Γ_k , що визначають ділянки Γ_k^T , Γ_k^O відповідно до умов (4), (5):

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(m)}(x_1^T) - k \sigma_{22}^{(m)}(x_1^T) &\geq 0 && \text{для } \Gamma_k^T, \\ \sigma_{22}^{(m)}(x_1^O) &> 0, \quad \sigma_{12}^{(m)}(x_1^O) &= 0 && \text{для } \Gamma_k^O. \end{aligned}$$

3. Дослідження коректності розв’язку оберненої задачі. Визначена співвідношенням (7) множина допустимих функцій є компактом у просторі $H_{\Gamma}^{3/2}$. Тому з будь-якої послідовності $\{\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}\} \subset Q$ можна вибрати хоча б одну послідовність $\{\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m_n)}\} \subset \{\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}\}$, яка збігається у нормі простору $H_{\Gamma}^{3/2}$ до деякого елемента $\tilde{U}_{\Gamma_k}^0 \in Q$.

Дослідження коректності розв’язку оберненої задачі пов’язане з оцінкою неперервності функціоналу $J(\tilde{U}_{\Gamma_k})$, тобто із залежністю $\sigma_{ij}(\tilde{U}_{\Gamma_k})$, $i, j = 1, 2$.

Якщо розглянути інтегральне співвідношення для узагальненого розв’язку задачі (1), (2) для m -го та $(m-1)$ -го станів за наявності невідомої сили тертя, можна показати, що

$$\left\| \tilde{U}^{(m)} - \tilde{U}^{(m-1)} \right\|_{H_{\Omega}^2} \leq \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) \rightarrow 0,$$

при

$$\left\| \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} - \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m-1)} \right\|_{H_{\Omega}^{3/2}} \leq \delta, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Це означає, що існує послідовність розв’язків $\tilde{U}(x, \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \rightarrow \tilde{U}(x, \tilde{U}_{\Gamma_k}^0)$ в H_{Ω}^2 .

Отже, $\sigma_{ij}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}, x) \rightarrow \sigma_{ij}(U_{\Gamma_k}, x)$ в H_{Ω}^2 .

Визначимо слід функцій $\sigma_{ij}(U(x))$, $x \in \Omega$, на границі $\Gamma_k \subset \partial\Omega$. Відомо, що для функції $\sigma_{ij} \in H_{\Omega}$, що має похідну $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} \in H_{\Omega_{\delta}}^2$, де $\Omega_{\delta} = \Omega_{\delta}(\Gamma_k) = \{x \in \Omega, 0 \leq x_2 \leq \delta, (x_1, x_2) \in \Gamma_k\}$, існує слід, який визначається як елемент H_{Γ} , $\Gamma_k = \partial\Omega$, і є неперервним за $x_2 \in [0, \delta]$ у нормі простору H_{Γ} . Отже, на Γ_k існує слід функцій $\sigma_{ij}(\tilde{U}_{\Gamma_k}, x)$ такий, що належить H_{Γ_k} і є неперервним на $x_2 \in [0, \delta]$. Тому маємо збіжність функціоналу $J^{(m)}$:

$$\int_{\Gamma_k} \left(\sigma_{12}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) - k\sigma_{22}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \right)^2 \mu^{(m)}(x) d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_k} \left(\sigma_{12}(\tilde{U}_{\Gamma_k}) - k\sigma_{22}(\tilde{U}_{\Gamma_k}) \right)^2 \mu(x) d\Gamma$$

при $m \rightarrow \infty$. Крім того, функціонал $J(\tilde{U}_{\Gamma_k})$ є скінченним, якщо $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}(x) \in H_{\Gamma_k}^{3/2}$. Враховуючи, що множина \mathcal{Q} є компактом у $H_{\Gamma_k}^{3/2}$, з теореми Вейерштрасса випливає, що для функціоналу $J(\tilde{U}_{\Gamma_k})$ на множині \mathcal{Q} задача мінімізації має принаймні один розв'язок, і будь-яка мінімізуюча послідовність збігається до множини $\mathcal{Q}_* = \{\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in \mathcal{Q} : J(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) = J_*, J_* = \min J(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}), \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in \mathcal{Q}_*\}$ у нормі простору $H_{\Gamma_k}^{3/2}$.

Ґрунтуючись на топологічній лемі і враховуючи, що будь-яка послідовність $\sigma_{12}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) - k\sigma_{22}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)})$ збігається до деякої границі, встановлюємо, що $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in \mathcal{Q}$ збігається до елемента $\tilde{U}_{\Gamma_k} \in \mathcal{Q}_*$ у нормі простору $H_{\Gamma_k}^{3/2}$.

4. Метод розв'язування. Для розв'язання задачі нескінченновимірної оптимізації (8) переходимо до скінченновимірної шляхом апроксимації вектор-функції $U(x)$ за допомогою методу скінченних елементів.

Для опису невідомих функцій прямої і оберненої задач введемо сітку X_S , де $X_S = \{x_{1S}, x_{2S}\}$, $S = 1, \dots, N$, а невідомі функції $U(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $\mu(x)$, $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}(x)$ подамо у вигляді векторів, компоненти яких є вузловими значеннями функцій задачі:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(m)} &= \{\tilde{U}_{1S}^{(m)}, \tilde{U}_{2S}^{(m)}\}, & U^0 &= \{U_{1S}^0, U_{1S}^0\}, \\ \sigma_{ij}^{(m)} &= \{\sigma_{ijS}^{(m)}\}, & i, j &= 1, 2, & S &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Вузли, що належать межі Γ_k , нумеруються як $j = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ для $X_j = \{x_{1j}, x_{2j}\}$. При цьому $X_j \in \Gamma_k$, і можна сформувати множини $j^C = \{j_{m1}^C, j_{m2}^C, \dots, j_{ml}^C\}$, $j^O = \{j_{k1}^O, j_{k2}^O, \dots, j_{kd}^O\}$ і $j^T = \{j_{r1}^T, \dots, j_{rq}^T\}$, $j^T \cup j^O \cup j^C = j$, що описують координати зон зчеплення, тертя і відриву, $\mu = \{\mu_j\}$, $j = \{j_1, j_p\}$, $\tilde{U}_{\Gamma_k} = \{\tilde{U}_{1\Gamma_k}^j, \tilde{U}_{2\Gamma_k}^j\}$.

Після відповідних перетворень замість задачі (1)–(3) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді

$$KU^{(m)} = R^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}),$$

де K – матриця жорсткості, яка зберігається під час процесу оптимізації, $U^{(m)} = \{U_1^{1(m)}, U_2^{1(m)}, \dots, U_1^{N(m)}, U_2^{N(m)}\}^T$ – вектор вузлових переміщень, $R^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)})$ – вектор вузлових значень правих частин.

Задача (8) у дискретній формі матиме вигляд

$$\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} = \arg \min \Delta^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}) \Delta^{(m)T}(\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}), \quad \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} \in \mathcal{Q}, \quad (9)$$

де $\Delta^{(m)} = D(|\sigma_{12}^{(m)}| - k|\sigma_{22}^{(m)}|)$, $D = \text{diag} \{\mu_j^{(m)}, j = j_1, \dots, j_p\}$ – діагональна матриця, $\sigma_{k\ell}^{(m)} = \{\sigma_{k\ell j_1}^{(m)}, \sigma_{k\ell j_2}^{(m)}, \dots, \sigma_{k\ell j_p}^{(m)}\}^T$, $k, \ell = 1, 2$.

Для визначення функцій $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ з (9) використовуємо метод Ньютона:

$$\tilde{U}_{1\Gamma_k}^{(m)} = \tilde{U}_{1\Gamma_k}^{(m-1)} - [W(\tilde{U}_{1\Gamma_k}^{(m-1)})]^{-1} \cdot G(\tilde{U}_{1\Gamma_k}^{(m-1)}), \quad (14)$$

де

$$[W(\tilde{U}_1^{(m-1)})] = [A][A^T], \quad G = [A]\Delta^{(m-1)}, \quad A = \left\{ \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tilde{U}_{\Gamma_k j}} \right\}_{\tilde{U}_{\Gamma_k} = \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m-1)}},$$

$$i, j = 1, \dots, j_p.$$

Матрицю A обчислюємо як матрицю Фреше, де m – номер кроку ітераційного процесу. Перевірку умов (4), (5) здійснюємо за таким **алгоритмом** (рис. 1).

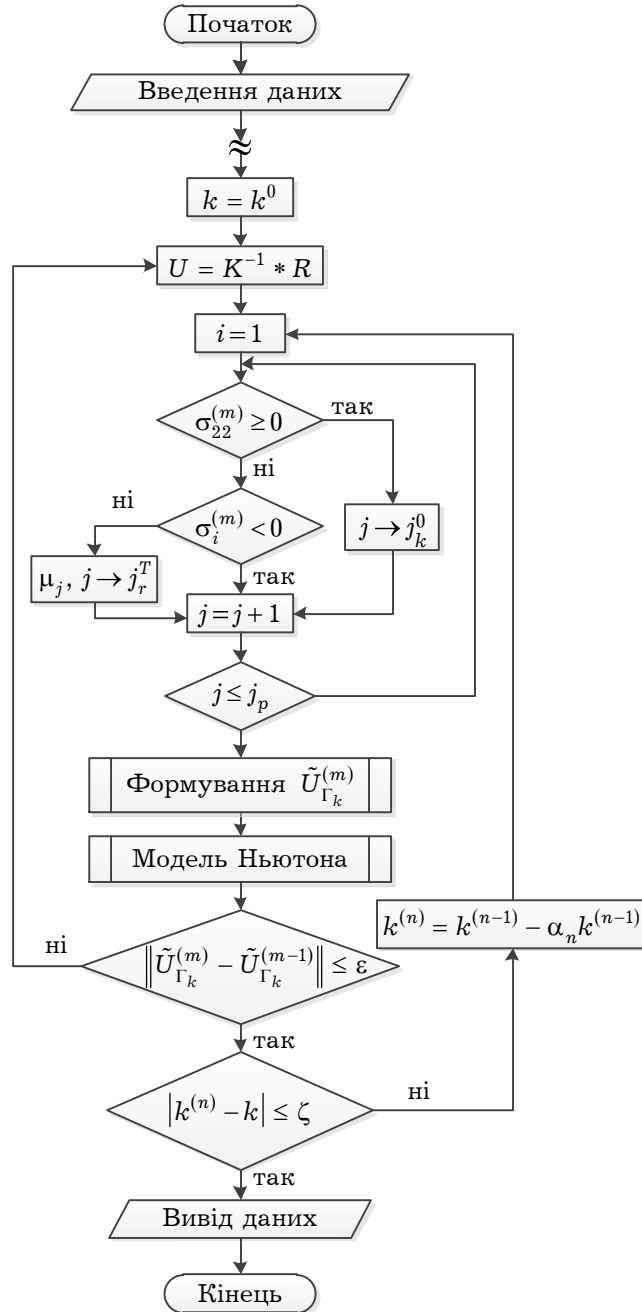


Рис. 1

Крок 1. Задаємо $U_2 = \delta_1$, $U_1|_{\Gamma_k} = 0$, $\sigma_{12}|_{\Gamma_\sigma} = 0$, $\sigma_{22}|_{\Gamma_\sigma} = 0$, коефіцієнт тертя k , точність ε , ζ , $n = 0$, малу величину α_n .

Крок 2. Формуємо множини j , визначаємо вектор $U^{(0)}$, обчислюємо $\sigma_{12}^{(0)}$, $\sigma_{22}^{(0)}$ на множині j .

Крок 3. Визначаємо $k^0 \approx \max_i \left[\left| \sigma_{12}^{j0} \right| / \left| \sigma_{22}^{j0} \right| \right]$.

Крок 4. Визначаємо $\Delta_j^{(m)} = \left| \sigma_{12j}^{(m)} \right| - k^{(n)} \left| \sigma_{22j}^{(m)} \right|$, $j = 1, \dots, p$.

Крок 5. Визначаємо множини j^O .

Крок 6. Визначаємо множини j^T , μ .

Крок 7. Формуємо вектор $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} = \{U_{1\Gamma_k}^{(m)}, \dots, U_{p\Gamma_k}^{(m)}\}$ відповідно до елементів множин j^T , j^O .

Крок 8. Визначаємо вектор $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ методом Ньютона, перевіряємо умову

$$\left\| \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} - \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m-1)} \right\| \leq \varepsilon.$$

Крок 9. Якщо $|k^{(n)} - k| \leq \zeta$, то завершуємо виконання. Інакше, переходимо до кроку 10.

Крок 10. Задаємо $n = n + 1$.

Крок 11. Обчислюємо $k^{(n)} = k^{(n-1)} - \alpha_n k^{(n-1)}$.

Крок 12. Перехід на крок 4.

5. Аналіз результатів. За допомогою наведеного алгоритму розв'язано класичні задачі про втиснення зі зсувом жорсткого штампа в пружний півпростір з механічними характеристиками $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.3$. Навантаження здійснено кінематично визначенням заглиблення $\delta_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ мм та зміщення $\delta_2 = 10^{-3}$ мм. Для скінченноелементного аналізу застосовано пакет типу COSMOS/M. Скінченноелементне розбиття здійснено автоматичним вибором кроку сітки для досягнення заданої відносної похибки 0.02. Загальна кількість елементів складала 1800, зона контакту – 36 елементів. Відношення розмірів $\ell / H = 0.3$, де H – розмір, що характеризує скінченноелементну модель півпростору, ℓ – розмір зони контакту.

На рис. 2 наведено результати ітераційного процесу (6) для значення $\delta_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ мм. Тертя спостерігається на крайових ділянках зони контакту.

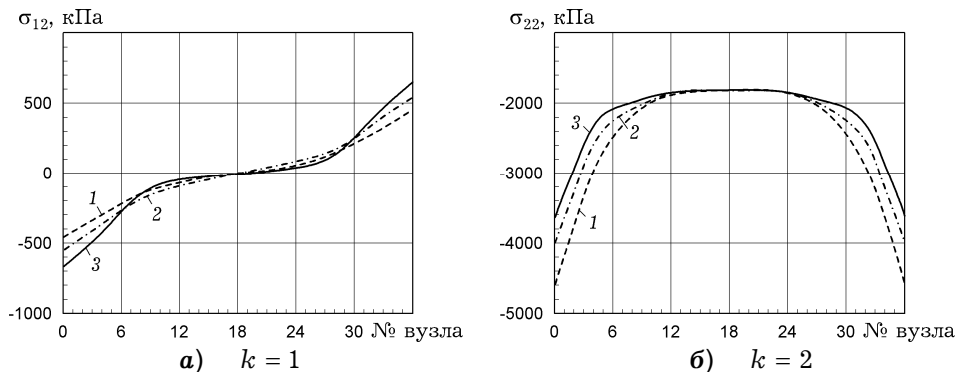


Рис. 2. Розподіл нормальних і дотичних напружень: $\sigma_{k2}^{(1)}$ – криві 1, $\sigma_{k2}^{(2)}$ – криві 2, $\sigma_{k2}^{(3)}$ – криві 3.

Бачимо, що врахування тертя знижує значення дотичних напружень та збільшує еквівалентну силу. Збіжність досягається за три ітерації методу Ньютона.

На рис. 3 наведено залежність розміру зони зчеплення a від коефіцієнта тертя. Вона практично збігається з результатами, отриманими Л. І. Галлінім та В. І. Мосаковським [6] (штрихова крива).

Досліджено випадок комбінованого впливу $\delta_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ мм, $\delta_2 = 10^{-3}$ мм. На рис. 4 наведено дотичні напруження за повного зчеплення (суцільна крива) і з урахуванням тертя (штрихова крива). Нормальні напруження практично не змінюються.

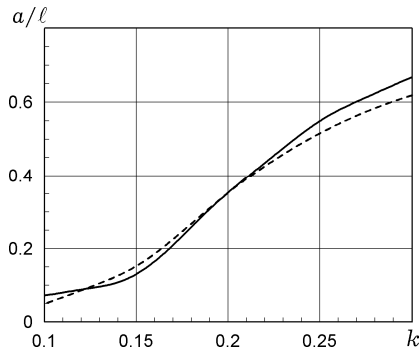


Рис. 3. Залежність розміру зони зчеплення від k .

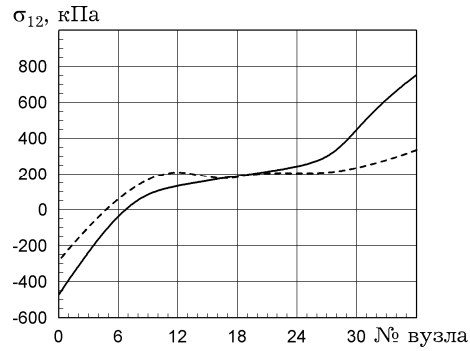


Рис. 4. Розподіл дотичних напружень у випадку комбінованого впливу.

Висновки. Контактна задача теорії пружності з урахуванням тертя і відриву може бути розв'язана як обернена, в якій невідомою функцією є відхилення тангенціальних переміщень від їхніх значень при повному зчепленні. У поєднанні з дискретизацією задачі такий підхід забезпечує достатню точність і не потребує великих обчислювальних затрат, на відміну від методу послідовних наближень, який застосовують для розв'язання варіаційних нерівностей. Крім того, запропонований підхід дозволяє встановити зони мікроковзання, зчеплення і відриву.

1. Алексеев А. Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – **43**, № 4. – С. 161–169.
The same: *Alekseev A. E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems of linear theory of elasticity // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 2002. – 43, No. 4. – P. 622–629.*
2. Гасанов А. И. Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов // Мат. моделирование. – 1989. – **1**, № 6. – С. 1–32.
3. Главачек И., Гаслинггер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. – Москва: Мир, 1986. – 270 с.
4. Кудашкина Д. А., Намм Р. В. Метод Удзавы для решения контактной задачи теории упругости с трением // Электр. науч. изд. «Ученые заметки ТОГУ». – 2014. – **5**, № 3. – С. 1–9.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
6. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Докл. АН СССР. – 1972. – **206**, № 5. – С. 1068–1070.
7. Моссаковский В. И., Петров В. В., Сладковский А. В. Исследование микроскольжения при сжатии и сдвиге упругого прямоугольника жесткими плитами // Трение и износ. – 1982. – **3**, № 4. – С. 596–602.
8. Намм Р. В., Сачков С. А. Решение квазивариационного неравенства Синьорини методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – **49**, № 5. – С. 805–814.

- Те саме: *Namm R. V., Sachkov S. A.* Solving the quasi-variational Signorini inequality by the method of successive approximations // *Comput. Math. Math. Phys.* – 2009. – **49**, No. 5. – P. 776–785.
9. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к крайним задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена.* – 1958. – **197**. – С. 54–112.
 10. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, No. 18-19. – P. 5779–5798.
 11. *Naveena, Ganesh Kumar J., Mathew M. D.* Finite element analysis of plastic deformation during impression creep // *J. Mater. Eng. Perform.* – 2015. – **24**, No. 4. – P. 1741–1753.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ШТАМПА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА КАК ОБРАТНАЯ

Решена контактная задача о вдавливании штампа в упругое полупространство с учетом трения при наличии зон сцепления, скольжения и отрыва. Использован подход, основанный на постановке задачи как обратной, где в качестве дополнительных условий использован закон Кулона на участках трения. Учитываются наличие зон сцепления, размеры которых являются неизвестными в постановке обратной задачи. Исследована корректность решения обратной задачи. В сочетании с дискретизацией такой подход позволяет установить зоны микро-скольжения, чередующиеся с зонами сцепления и отрыва.

A CONTACT PROBLEM ON A RIGID PUNCH AND AN ELASTIC HALF-SPACE AS THE INVERSE ONE

A contact problem on the indentation of a punch into an elastic half-space is solved when taking into account the friction and occurrence of adhesion, slip and detachment zones. Our approach is based on the formulation of the problem as the inverse one where the Coulomb law of friction is used as a supplement condition. The size of the adhesion zones are unknown in the formulation of the inverse problem. The correctness of the solution to the inverse problem is analyzed. In combination with a discretization technique, this method allows for the determination of the microslip zones those alternate the adhesion and the detachment zones.

Дніпропетр. нац. ун-т
ім. О. Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
18.07.15