

**ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ВРАХУВАННЯ ІНЕРЦІЙНОСТІ МАТЕРІАЛУ**

*Розглянуто задачу про граничну рівновагу довгої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за дії навантаження, що змінюється в часі за експоненціальним законом. Для випадку симетричного навантаження тріщини побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено вплив швидкості зміни навантаження на значення коефіцієнта інтенсивності зусиль в околі кінців тріщини.*

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, поздовжня тріщина, змінне навантаження, експоненціальна залежність від часу, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнт інтенсивності зусиль.

**Вступ.** Сучасні тенденції технічного прогресу ставлять надзвичайно строгі вимоги до прогнозування міцності та надійності машин чи споруд. Це спричиняє підвищене зацікавлення механікою руйнування матеріалів і проблеми забезпечення цілісності конструкцій і довговічності робочих елементів механізмів під дією як статичних, так і змінних в часі навантажень [2–4, 10–13, 16, 17].

Нестационарний характер навантажень функціональних елементів конструкцій (зокрема, елементів оболонкового типу, що широко використовуються в хімічному машинобудуванні, авіа- та ракетобудуванні, промисловому будівництві, атомній енергетиці тощо) зумовлює виникнення у них швидкозмінних напружень. У свою чергу, ці напруження сприяють розвитку руйнування в околі концентраторів напружень (гострокінцеві технологічні розрізи, дефекти типу тріщин чи включень), а в багатьох випадках його і спричиняють. Тому прогнозування та оцінка надійності, працездатності і довговічності елементів з концентраторами напружень потребує побудови відповідних адекватних математичних моделей (зокрема таких, що враховують інерційні властивості матеріалу та зміну в часі навантаження), а також розвитку методів розв'язування задач динамічної теорії руйнування [2, 4, 11].

У цій статті увага зосереджена на напруженому стані циліндричних елементів оболонкового типу з дефектами типу тріщин, що відіграють роль концентраторів напружень і перебувають під дією змінного в часі навантаження. З оглядом методів і результатів вивчення напружено-деформованого стану різного роду оболонок з дефектами та без них можна ознайомитись у працях [1, 3, 5–8, 11, 17], у яких результати були отримані за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, застосованого до ізотропних і анізотропних, однорідних і кусково-однорідних оболонок, що перебували під дією статичного навантаження. Окремі динамічні задачі для конструкційних елементів оболонкового типу розглянуто у [2, 10–17].

Сучасний математичний апарат надає змогу побудувати адекватну математичну модель для довільного навантаження, однак практично відсутні роботи, що стосуються вивчення поведінки циліндричних оболонок із дефектами типу тріщин під дією змінного в часі навантаження з урахуванням інерційних властивостей матеріалу. Враховуючи, що такі елементи, як правило, при експлуатації піддаються інтенсивним навантаженням, що змінюються в часі, вивчення їх поведінки є важливою складовою прогнозування міцності та надійності різного роду конструкцій. Нижче запропоновано математичну модель для визначення напруженого стану безмежної циліндричної оболонки з наскрізною поздовжньою тріщиною. Також проаналізо-

<sup>✉</sup> mahorkin@ukr.net

вано вплив урахування інерційності матеріалу та інтенсивності зміни навантаження на значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль в околах вершин тріщини.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо безмежну циліндричну оболонку радіуса  $R$  з наскрізною поздовжньою тріщиною довжини  $2\ell$  (рис. 1). Вважаємо, що поверхневе навантаження, під дією якого перебуває оболонка, змінюється за експоненціальним законом  $e^{\tilde{\gamma}\tau}$ , а розташування тріщини не порушує принципу Сен-Венана.

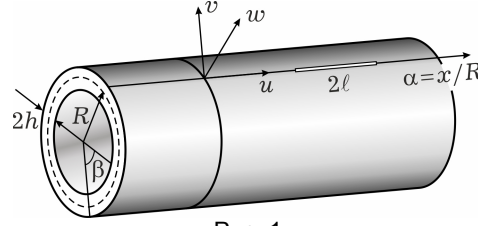


Рис. 1

З огляду на те, що зовнішні навантаження змінюються в часі за експоненціальним законом, і використовуючи методику, подану в [6–9], відповідні зусилля, що виникатимуть в оболонці, запишемо так [6, 7]:

$$\begin{aligned} N_2^i(\alpha, \beta, \tau) &= N_2^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & S^i(\alpha, \beta, \tau) &= S^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\ M_2^i(\alpha, \beta, \tau) &= M_2^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & Q_2^{i*}(\alpha, \beta, \tau) &= Q_2^{i**}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \quad i = 0, 1, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $N_2^0$ ,  $S^0$ ,  $Q_2^{0*}$ ,  $M_2^0$  – відповідно нормальне, зсувне, узагальнене перерізує зусилля і згинний момент в оболонці без тріщини;  $N_2^1$ ,  $S^1$ ,  $Q_2^{1*}$ ,  $M_2^1$  – ці самі зусилля і згинний момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $\tilde{\gamma}$  – деякий коефіцієнт, що характеризує зміну навантаження в часі, розмірності  $[c^{-1}]$  (називатимемо його швидкістю навантаження);  $\tau$  – час.

Поле вільних від напружень деформацій, несумісність яких зумовлює стрибки переміщень і кутів повороту вздовж тріщини, запишемо так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^* e^{\tilde{\gamma}\tau} = R^{-1}[v(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \varepsilon_{\alpha\beta}^* e^{\tilde{\gamma}\tau} = R^{-1}[u(\alpha, \tau)]\delta(\alpha), \\ \alpha_{\beta\beta}^0 &= \alpha_{\beta\beta}^* e^{\tilde{\gamma}\tau} = -R^{-1}\{[\theta_\beta(\alpha, \tau)]\delta(\beta) - R^{-2}[w(\alpha, \tau)]\partial_\beta\delta(\beta)\}, \\ \alpha_{\alpha\beta}^0 &= \alpha_{\alpha\beta}^* e^{\tilde{\gamma}\tau} = -R^{-2}\partial_\alpha[w(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 &= \alpha_{\alpha\alpha}^0 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Умови на берегах тріщини [6, 7] у загальному вигляді подамо так:

$$\begin{aligned} N_2^+(\alpha, 0, \tau) &= N_2^-(\alpha, 0, \tau) = f_1(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & S^+(\alpha, 0, \tau) &= S^-(\alpha, 0, \tau) = f_2(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\ M_2^+(\alpha, 0, \tau) &= M_2^-(\alpha, 0, \tau) = f_3(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & Q_2^{+*}(\alpha, 0, \tau) &= Q_2^{-*}(\alpha, 0, \tau) = f_4(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= N_2^{1*}(\alpha, +0) - N_2^{0*}(\alpha, +0), & f_2(\alpha) &= S^{1*}(\alpha, +0) - S^{0*}(\alpha, +0), \\ f_3(\alpha) &= M_2^{1*}(\alpha, +0) - M_2^{0*}(\alpha, +0), & f_4(\alpha) &= Q_2^{1**}(\alpha, +0) - Q_2^{0**}(\alpha, +0). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\alpha_{ij}^*$ ,  $i, j = \alpha, \beta$ , – функції координат;  $[u(\alpha, \tau)] = [u^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[v(\alpha)] = [v^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[w(\alpha, \tau)] = [w^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[\theta_\beta(\alpha)] = [\theta_\beta^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$  – стрибки переміщень і кутів повороту;  $\delta(\beta)$  – дельта-функція Дірака;  $\partial_j^n = \frac{\partial^n}{\partial j^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $j = \alpha, \beta, \tau$ ;  $N_2^{i*}$ ,  $S^{i*}$ ,  $Q_2^{i**}$ ,  $M_2^{i*}$ ,  $i = 0, 1$ , визначаються на підставі (1); індексами «+» та «-» позначено відповідні зусилля і моменти на берегах розрізу  $\beta = \pm 0$ .

**2. Ключові функції задачі.** Система рівнянь рівноваги в переміщеннях, отримана на підставі поданих у [6] виразів, має вигляд [15]

$$\sum_{i=1}^3 L_{\ell i} g_i - R^2 c_{\tau}^{-2} \ddot{g}_{\ell} = q_{\ell}^{0*}, \quad \ell = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тут

$$L_{11} = \partial_{\alpha}^2 + 0.5v_{-}^{-1}\partial_{\beta}^2, \quad L_{12} = L_{21} = 0.5v_{+}^{-1}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}, \quad L_{13} = L_{31} = v\partial_{\alpha},$$

$$L_{22} = 0.5v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}^2 + \partial_{\beta}^2 + c_1^2[2v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}^2 + \partial_{\beta}^2],$$

$$L_{23} = L_{32} = \partial_{\beta} - c_1^2[(2-v)\partial_{\alpha}^2\partial_{\beta} + \partial_{\beta}^3], \quad L_{33} = 1 + c_1^2\nabla^2\nabla^2,$$

$$q_1^{0*} = R(v\partial_{\alpha}\varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0.5v_{-}^{-1}\partial_{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^0),$$

$$q_2^{0*} = R(\partial_{\beta}\varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0.5v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}^0) + \frac{h^2}{3}[\partial_{\beta}\mathbf{x}_{\beta\beta}^0 + 2v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}\mathbf{x}_{\alpha\beta}^0],$$

$$q_3^{0*} = R\varepsilon_{\beta\beta}^0 - \frac{h^2}{3}[v\partial_{\alpha}^2\mathbf{x}_{\beta\beta}^0 + 2v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\mathbf{x}_{\alpha\beta}^0 + \partial_{\alpha}^2\mathbf{x}_{\beta\beta}^0],$$

$$\{g_1, g_2, g_3\} = \{u, v, w\}, \quad \nabla^2 = \partial_{\alpha}^2 + \partial_{\beta}^2, \quad \partial_j^n \partial_{\ell}^k = \frac{\partial^{n+k}}{\partial j \partial \ell}, \quad j, \ell = \alpha, \beta, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

$c_{\tau}^2 = \frac{E(1-v^2)^2}{\rho}$ ,  $c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}$ ,  $v_{\pm} = \frac{1}{1 \pm v}$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – густина матеріалу.

Застосувавши до розв'язування системи диференціальних рівнянь (5) операторний метод [9], розв'язок цієї системи подамо у такому вигляді [15]:

$$g_{\ell}(\alpha, \tau) = g_{\ell}^*(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{j\ell}^* \varphi_j + P_{j\ell}^* \psi_j) e^{\tilde{\gamma}\tau}. \quad (7)$$

де ключові функції  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$  задовольняють рівняння

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad D\varphi_3 = \varepsilon_{12}^*, \quad D\psi_2 = R\mathbf{x}_{22}^*, \quad D\psi_3 = R\mathbf{x}_{12}^*, \quad (8)$$

У рівності (7)

$$L_{k\ell}^* = L_{k\ell} + L_{k\ell}^{**}, \quad P_{k\ell}^* = P_{k\ell} + P_{k\ell}^{**}, \quad (8)$$

де  $L_{k\ell}$ ,  $P_{k\ell}$  – оператори, тотожні наведеним у [6, 7] для випадку статичного навантаження, а  $L_{k\ell}^{**}$ ,  $P_{k\ell}^{**}$  – зумовлені залежністю навантаження від часу оператори, що мають вигляд, описаний у [15];  $D = D^0 + D^* + D^{**}$ ;  $D^0 = \nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2$ ,  $D^* = (8 - 2v^2)\partial_{\alpha}^4\partial_{\beta}^2 + 8\partial_{\alpha}^2\partial_{\beta}^4 + 2\partial_{\beta}^6 + \frac{1-v^2}{c_1^2}\partial_{\alpha}^4 + 4\partial_{\alpha}^2\partial_{\beta}^2 + \partial_{\beta}^4$  – оператори, вигляд яких збігається із наведеними у [7] для випадку статичного навантаження;  $D^{**}$  – оператор, зумовлений залежністю навантаження від часу:

$$\begin{aligned} D^{**} = & 2\gamma_1^6 v_{-} c_1^{-2} + 2\gamma_1^4 v_{-} c_1^{-2} \{1 + 0.5(v-3)\nabla^2 + c_1^2[\nabla^2\nabla^2 - \partial_{\beta}^2 - \\ & - 2v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}^2]\} + \gamma_1^2 c_1^{-2} \{[\nabla^2\nabla^2 - \partial_{\beta}^2 - (3+2v)\partial_{\alpha}^2] + \\ & + 2v_{-} c_1^2[0.5(v-3)\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - 0.5(3+v)\partial_{\beta}^4 + 2v_{-}^{-1}(\partial_{\alpha}^4 - \partial_{\beta}^2) - \\ & - (2-v^2)\partial_{\alpha}^2\partial_{\beta}^2] - 2c_1^4[2v_{-}^{-1}\partial_{\alpha}^6 + v_{-}^{-1}v_{+}^{-1}\partial_{\alpha}^4\partial_{\beta}^2]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язки  $\varphi_j$ ,  $\Psi_j$ ,  $j = 2, 3$ , рівнянь (6) шукаємо подібно до того, як це детально описано у [7]. Опустивши викладки, запишемо аналогічно до [15]

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\alpha, \beta) &= \\
&= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [v^{*'}(\xi)] \Psi_0(\xi - \alpha) d\xi + \frac{1}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [v^{*'}(\xi)] \Psi_n(\xi - \alpha) d\xi, \\
\varphi_3(\alpha, \beta) &= \\
&= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [u^{*'}(\xi)] \Psi_0(\xi - \alpha) d\xi + \frac{1}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [u^{*'}(\xi)] \Psi_n(\xi - \alpha) d\xi, \\
\Psi_2(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\theta^{*'}(\xi)] \Psi_0(\xi - \alpha) d\xi - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\theta^{*'}(\xi)] \Psi_n(\xi - \alpha) d\xi + \\
&+ \frac{1}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [w^{*'}(\xi)] \Psi_n(\xi - \alpha) d\xi, \quad (10) \\
\Psi_3(\alpha, \beta) &= \\
&= -\frac{1}{2\pi R} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [w^{*'}(\xi)] \Psi_0(\xi - \alpha) d\xi - \frac{1}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [w^{*'}(\xi)] \Psi_n(\xi - \alpha) d\xi,
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\Psi_n(z) &= \frac{A_{1n} a_{1n} - B_{1n} b_{1n}}{a_{1n}^2 + b_{1n}^2} \operatorname{sgn} z + \left( A_{2n} \frac{1 - e^{-a_{2n}|z|}}{a_{2n}} + B_{2n} \frac{1 - e^{-b_{2n}|z|}}{b_{2n}} \right) \operatorname{sgn} z + \\
&+ \left( \frac{A_{1n} b_{1n} - B_{1n} a_{1n}}{a_{1n}^2 + b_{1n}^2} \sin b_{1n} z - \right. \\
&\left. - \frac{B_{1n} b_{1n} - A_{1n} a_{1n}}{a_{1n}^2 + b_{1n}^2} \cos b_{1n} z \operatorname{sgn} z \right) e^{-a_{1n}|z|}, \quad 0 \leq n < k, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \left\{ e^{-a_{jn}|z|} [C_{jn}^0 \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + B_{jn}^0 \sin b_{jn} z] - C_{jn}^0 \operatorname{sgn} z \right\}, \quad n \geq k, \quad (12)$$

$$C_{jn}^0 = \frac{q_{jn} C_{jn} - p_{jn} B_{jn}}{q_{jn} (a_{jn}^2 + b_{jn}^2)}, \quad B_{jn}^0 = \frac{p_{jn} C_{jn} + q_{jn} B_{jn}}{q_{jn} (a_{jn}^2 + b_{jn}^2)}, \quad X_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2),$$

$$C_{1n} = (p_{2n}^- - p_{1n}^-)^2 + q_{2n}^2 - q_{1n}^2, \quad C_{2n} = (p_{1n}^- - p_{2n}^-)^2 + q_{1n}^2 - q_{2n}^2,$$

$$A_{1n} = \frac{5a_{1n}^4 + (a_{2n}^2 + b_{2n}^2)(b_{10}^2 + b_{2n}^2) - a_{1n}^2(3p_{2n}^+ + 10b_{1n}^2)}{4a_{1n} p_{1n}^+ r_1 s_1}, \quad A_{2n} = -\frac{1}{2a_{2n} p_{2n}^- r_1},$$

$$B_{1n} = [5b_{1n}^4 + (a_{1n}^2 - a_{2n}^2)(a_{1n}^2 + b_{2n}^2) - b_{1n}^2(3p_{2n}^+ - 10a_{1n}^2)](4b_{1n} p_{1n}^+ r_1 s_1)^{-1},$$

$$0 \leq n < k,$$

$$B_{1n} = 2(p_{2n}^- - p_{1n}^-)q_{1n}, \quad n \geq k, \quad B_{2n} = \begin{cases} (2b_{2n} p_{2n}^- s_1)^{-1}, & 0 \leq n < k, \\ 2(p_{1n}^- - p_{2n}^-)q_{2n}, & n \geq k, \end{cases}$$

$$p_{jn}^{\pm} = a_{jn}^2 \pm b_{jn}^2, \quad q_{jn} = 2a_{jn} b_{jn}, \quad \gamma_1 = R^2 \tilde{\gamma}^2 c_{\tau}^{-2},$$

$$r_1 = 4a_{2n}^2 b_{1n}^2 + (a_{1n}^2 + b_{1n}^2 - a_{2n}), \quad s_1 = 4b_{2n}^2 b_{1n}^2 + (p_{1n}^+ - b_{1n}).$$

Значення  $a_{in}$ ,  $b_{in}$   $i = 1, 2$ , і величини  $k$  отримуємо на основі аналізу розв'язків характеристичного рівняння для диференціального рівняння (6):

$$y^8 - A_6 y^6 + A_4 y^4 - A_2 y^2 + A_0 = 0, \quad (13)$$

де

$$A_0 = n^4(n^2 - 1)^2 + v_- [2\gamma_1^6 c_1^{-2} + \gamma_1^4(n^2(3-v)c_1^{-2} + 2n^4)] + \gamma_1^2 c_1^{-2}(n^2 + n^4),$$

$$A_2 = 4n^2(n^2 - 1)^2 + \gamma_1^4 v_- [c_1^{-2}(3-v) + 4n^2] + \gamma_1^2 [n^2 2c_1^{-2} + 3n^4(3-v)v_-],$$

$$A_4 = 6n^4 + (c_1^2 v_- v_+)^{-1} + 2\gamma_1^4 v_- + \gamma_1^2 [c_1^{-2} + n^2 3(3-v)v_-],$$

$$A_6 = 4n^2 + \gamma_1^2(3-v)v_-.$$

Розв'язки характеристичного рівняння (13) запишемо у такому вигляді:

$$y_{1,2,3,4}^{(n)} = \pm b_{1n} \pm ia_{1n}, \quad y_{5,6} = \pm ib_{2n}, \quad y_{7,8} = \pm ia_{2n}, \quad 0 \leq n < k,$$

$$y_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n}), \quad y_{5,6,7,8} = \pm(b_{2n} \pm ia_{2n}), \quad k \leq n.$$

На відміну від випадку статичного навантаження ( $\gamma = 0$ ), характеристичне рівняння (13) має не лише комплексні, але і чисто уявні корені, що зумовлює складніший загальний вигляд ключових функцій (10).

Для виділення особливостей ключових функцій (10) на лінії розрізу подамо їх у вигляді суми

$$\varphi_j(\alpha, \beta) = \varphi_j^0(\alpha, \beta) + \varphi_j^*(\alpha, \beta), \quad \psi_j(\alpha, \beta) = \psi_j^0(\alpha, \beta) + \psi_j^*(\alpha, \beta), \quad (14)$$

де  $\varphi_j^*(\alpha, \beta) = \varphi_j(\alpha, \beta) - \varphi_j^0(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j^*(\alpha, \beta) = \psi_j(\alpha, \beta) - \psi_j^0(\alpha, \beta)$  – регулярні функції, а  $\varphi_j^0(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j^0(\alpha, \beta)$  – сингулярні частини ключових функцій, які задовольняють рівняння

$$D^0 \varphi_2^0 = \varepsilon_{22}^*, \quad D^0 \varphi_3^0 = \varepsilon_{12}^*, \quad D^0 \psi_2^0 = R\alpha_{22}^*, \quad D^0 \psi_3^0 = R\alpha_{12}^*,$$

їх визначення докладно описано у [6, 7], там подано також загальний вигляд сингулярних частин ключових функцій.

**3. Побудова сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).** Для визначення невідомих стрибків переміщень і кутів повороту, що містяться у виразах для ключових функцій використаємо крайові умови (3).

Вирази для зусиль і моментів в оболонці [1, 7], зважаючи на подання (2), (7), запишемо у такому вигляді [15]:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^* e^{\tilde{t}t}, & N_2 &= N_2^* e^{\tilde{t}t}, & M_1 &= M_1^* e^{\tilde{t}t}, \\ M_2 &= M_2^* e^{\tilde{t}t}, & S &= S^* e^{\tilde{t}t}, & H &= H^* e^{\tilde{t}t}, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $M_1^*$ ,  $M_2^*$ ,  $S^*$ ,  $H^*$  обчислюються згідно з виразами для зусиль і моментів в оболонці за статичного навантаження [1, 6].

У випадку симетричного відносно тріщини навантаження оболонки умови (3) з урахуванням (4) спрощуються:

$$N_2^{*+}(\alpha, 0) = N_2^{*-}(\alpha, 0) = f_1(\alpha), \quad M_2^{*+}(\alpha, 0) = M_2^{*-}(\alpha, 0) = f_3(\alpha). \quad (16)$$

Використовуючи у виразах (15) подання (7), отримаємо

$$\begin{aligned} N_2^* &= C_{N\varphi} \varphi_2 + D_{N\varphi} \varphi_3 + C_{N\psi} \psi_2 + D_{N\psi} \psi_3, \\ M_2^* &= C_{M\varphi} \varphi_2 + D_{M\varphi} \varphi_3 + C_{M\psi} \psi_2 + D_{M\psi} \psi_3, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $C_{N\phi}$ ,  $D_{N\phi}$ ,  $C_{N\psi}$ ,  $D_{N\psi}$ ,  $C_{M\phi}$ ,  $C_{M\psi}$ ,  $D_{M\phi}$ ,  $D_{M\psi}$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  – оператори, загальний вигляд яких наведено в [15].

Підставивши у (16) подання (17) з урахуванням (10), отримаємо систему двох інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [F_1(\xi)\mathcal{K}_{11}(\xi - \alpha) + F_3(\xi)\mathcal{K}_{13}(\xi - \alpha)] d\xi &= f_1^*(\alpha), \\ \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [F_1(\xi)\mathcal{K}_{31}(\xi - \alpha) + F_3(\xi)\mathcal{K}_{33}(\xi - \alpha)] d\xi &= f_3^*(\alpha), \end{aligned} \quad (18)$$

де  $F_1(\xi) = \frac{1}{R} [v'(\xi)]$ ,  $F_3(\xi) = -[\theta_2'(\xi)]$ ,  $f_1^*(\alpha) = \frac{\pi}{D_0} f_1(\alpha)$ ,  $f_3^*(\alpha) = \frac{\pi}{D_0 R} f_3(\alpha)$ .

Систему (18) зведемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь (з ядром типу Коші:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_1(u)}{u-s} du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_1(u)\mathcal{K}_0^{11}(z) du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_3(u)\mathcal{K}_0^{13}(z) du &= f_1^*(\alpha_0 s), \\ \int_{-1}^1 \frac{\Omega_3(u)}{u-s} du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_1(u)\mathcal{K}_0^{31}(z) du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_3(u)\mathcal{K}_0^{33}(z) du &= f_3^*(\alpha_0 s), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\mathcal{K}_0^{11}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{\Delta} [a_{33}\mathcal{K}_{11}^0(z) - a_{13}\mathcal{K}_{13}^0(z)],$$

$$\mathcal{K}_0^{13}(z) = \frac{1}{\Delta} [a_{11}\mathcal{K}_{13}^0(z) - a_{13}\mathcal{K}_{11}^0(z)],$$

$$\mathcal{K}_0^{31}(z) = \frac{1}{\Delta} [a_{33}\mathcal{K}_{33}^0(z) - a_{13}\mathcal{K}_{13}^0(z)],$$

$$\mathcal{K}_0^{33}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{\Delta} [a_{11}\mathcal{K}_{33}^0(z) - a_{13}\mathcal{K}_{13}^0(z)],$$

$$\Omega_m(u) = a_{m1}F_1(\alpha_0 u) + a_{m3}F_3(\alpha_0 u), \quad u = \frac{\xi}{\alpha_0}, \quad s = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad z = \alpha_0(u - s),$$

$$\Delta = a_{11}a_{33} - a_{13}^2, \quad a_{11} = 1, \quad a_{13} = -(1 - \nu)(3 + \nu)c_1^2 \frac{1}{8(1 + \nu)}, \quad a_{33} = (1 - \nu)(3 + \nu).$$

Тут  $\mathcal{K}_{11}^0$ ,  $\mathcal{K}_{13}^0$ ,  $\mathcal{K}_{33}^0$  – регулярні частини ядер системи СІР (18), які мають структуру, подібну до наведених у [7]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^0(z) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{\operatorname{sh} z} \right) \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \operatorname{sgn} z - 2(\mathcal{K}_{11}^0)_0 - \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{11}^0)_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-n|z|} \left( \frac{1}{2} n z - \operatorname{sgn} z \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут у випадку, якщо характеристичне рівняння (13) має уявні та комплексні корені ( $n = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ ) маємо

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_{11}^0)_n &= \sum_{i=1}^2 \operatorname{sgn} z \left\{ A_{in}^{(01)} \omega_{1in} + A_{in}^{(02)} \omega_{2in} + \gamma_1^2 \frac{1}{c_1^2} (A_{in}^{(21)} \omega_{1in} + A_{in}^{(22)} \omega_{2i}) + \right. \\ &\quad + \gamma_1^4 c_1^{-2} \frac{1}{1 - \nu^2} (A_{in}^{(40)} + A_{in}^{(41)} \omega_{1in} + A_{in}^{(42)} \omega_{2in}) + \gamma_1^6 2c_1^{-2} \frac{1}{1 - \nu} \times \\ &\quad \left. \times \frac{1}{1 - \nu^2} (A_{in}^{(60)} + A_{in}^{(61)} \omega_{1in} + A_{in}^{(62)} \omega_{2in}) \right\}, \quad 0 \leq n < k, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned}
A_{1n} &= \frac{5a_{1n}^4 + (a_{2n}^2 + b_{1n}^2)(b_{1n}^2 + b_{2n}^2) - a_{1n}^2(3p_{2n}^+ + 10b_{1n}^2)}{4a_{1n}p_{1n}^+[4a_{2n}^2b_{1n}^2 + (p_{1n}^+ - a_{2n}^2)b_{1n}^2][4b_{1n}^2b_{2n}^2 + (p_{1n}^+ - b_{2n}^2)^2]}, \\
B_{1n} &= \frac{5b_{1n}^4 + (a_{1n}^2 - a_{2n}^2)(a_{1n}^2 - b_{2n}^2) + b_{1n}^2(3p_{2n}^+ - 10a_{1n}^2)}{4b_{1n}p_{1n}^+[4a_{2n}^2b_{1n}^2 + (p_{1n}^+ - a_{2n}^2)^2][4b_{1n}^2b_{2n}^2 + (p_{1n}^+ - b_{2n}^2)^2]}, \\
A_{2n} &= -\frac{1}{2a_{2n}p_{2n}^-[4a_{2n}^2b_{1n}^2 + (p_{1n}^+ - a_{2n}^2)^2]}, \\
B_{2n} &= \frac{1}{2b_{2n}p_{2n}^-[4b_{1n}^2b_{2n}^2 + (p_{1n}^+ - b_{2n}^2)^2]}, \\
A_{1n}^{(01)} &= B_{10n} \left\{ b_{1n} \left[ b_{1n}^6 + \frac{7}{4}a_{1n}^2(q_{1n}^2 - 4h_{1n}p_{1n}^-) \right] - b_{1n}t_{1n}n^4 + 2b_{1n}n^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times (t_{1n}^2 - 4a_{1n}^2p_{1n}^+) \right\} + A_{1n} \left\{ a_{1n} \left[ a_{1n}^6 + \frac{7}{4}b_{1n}^2(q_{1n}^- - 4p_{1n}^+t_{1n}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + a_{1n}h_{1n}n^4 - 2a_{1n}n^2(h_{1n}^2 - 4b_{1n}^2p_{1n}^+) \right\}, \\
A_{2n}^{(01)} &= A_{1n} \left\{ b_{1n}t_{1n}n^4 - 2b_{1n}n^2(t_{1n}^2 - 4a_{1n}^2p_{1n}^+) - b_{1n} \left[ b_{1n}^6 - \frac{7}{4}a_{1n}^2(4h_{1n}p_{1n}^- - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q_{1n}^2) \right] \right\} + B_{1n} \left\{ a_{1n}h_{1n}n^4 - 2a_{1n}n^2(h_{1n}^2 - 4b_{1n}^2p_{1n}^+) + \right. \\
&\quad \left. + a_{1n} \left[ a_{1n}^6 - \frac{7}{4}b_{1n}^2(4p_{1n}t_{1n} - q_{1n}^2) \right] \right\}, \\
A_{1n}^{(02)} &= a_{2n}^7 A_{2n} - 2a_{2n}^5 A_{2n} n^2 + a_{2n}^3 A_{2n} n^4, \\
A_{2n}^{(02)} &= b_{2n}^7 B_{2n} - 2b_{2n}^5 B_{2n} n^2 + b_{2n}^3 B_{2n} n^4, \\
A_{1n}^{(60)} &= -(A_{2n}b_{2n} + a_{2n}B_{2n}) \frac{1}{a_{2n}b_{2n}} - (a_{1n}A_{1n} + b_{1n}B_{1n}) \frac{1}{p_{1n}^+}, \\
A_{2n}^{(60)} &= 0, \quad A_{1n}^{(61)} = (a_{1n}A_{1n} + b_{1n}B_{1n}) \frac{1}{p_{1n}^+}, \quad A_{2n}^{(61)} = (a_{1n}B_{1n} - A_{1n}b_{1n}) \frac{1}{p_{1n}^+}, \\
A_{1n}^{(62)} &= A_{2n} \frac{1}{a_{2n}}, \quad A_{2n}^{(62)} = B_{2n} \frac{1}{b_{2n}}, \quad A_{1n}^{(21)} = a_{1n}A_{1n}h_{1n} - b_{1n}B_{1n}t_{1n}, \\
A_{2n}^{(21)} &= a_{1n}B_{1n}h_{1n} + A_{1n}b_{1n}t_{1n}, \quad A_{1n}^{(22)} = a_{2n}^3 A_{2n}, \quad A_{2n}^{(22)} = b_{2n}^3 B_{2n}, \\
A_{1n}^{(40)} &= n^2 \left[ -(a_{1n}A_{1n} + b_{1n}B_{1n}) \frac{1}{p_{1n}^+} - (b_{2n}A_{2n} + a_{2n}B_{2n}) \frac{1}{a_{2n}b_{2n}} \right], \quad A_{2n}^{(40)} = 0, \\
A_{1n}^{(41)} &= a_{1n}A_{1n} \left[ n^2 \frac{1}{p_{1n}^+} - (3 + 2\nu) \right] + b_{1n}B_{1n} \left[ n^2 \frac{1}{p_{1n}^+} + (3 + 2\nu) \right], \\
A_{2n}^{(41)} &= a_{1n}B_{1n} \left[ n^2 \frac{1}{p_{1n}^+} - (3 + 2\nu) \right] - b_{1n}A_{1n} \left[ n^2 \frac{1}{p_{1n}^+} + (3 + 2\nu) \right], \\
A_{1n}^{(42)} &= A_{2n} \frac{1}{a_{2n}} n^2 - a_{2n}A_{2n} (3 + 2\nu), \\
A_{2n}^{(42)} &= B_{2n} \frac{1}{b_{2n}} n^2 - b_{2n}B_{2n} (3 + 2\nu).
\end{aligned}$$

У випадку лише комплексних коренів характеристичного рівняння (13) ( $n = k, k + 1, k + 2, \dots$ ) маємо

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{11}^0)_n = & -\sum_{i=1}^2 \frac{1}{X_n} \operatorname{sgn} z \left\{ \omega_{1in} A_{in}^{01} + \omega_{2in} A_{in}^{02} + \frac{\gamma_1^2(1-\nu)}{A_{1n}^*} (A_{in}^2 + \omega_{1in} A_{in}^{21} + \right. \\
& + \omega_{2in} A_{in}^{22}) + \frac{\gamma_1^4}{A_{1n}^*} (A_{in}^4 + \omega_{1in} A_{in}^{41} + \omega_{2in} A_{in}^{42}) + \\
& \left. + \frac{\gamma_1^6}{A_{1n}^*} (A_{in}^6 + \omega_{1in} A_{in}^{61} + \omega_{2in} A_{in}^{62}) \right\}, \quad k \leq n, \quad (22)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
A_{in}^{(01)} &= \frac{1}{q_{in}} [E_{in}(n^4 + t_{in}) - 2n^2 C_{in} s_{in} - H_{in} s_{in} - 2n^2 B_{in} t_{in}], \\
A_{in}^{(02)} &= \frac{1}{q_{in}} [H_{in}(n^4 + t_{in}) - 2n^2 B_{in} s_{in} + E_{in} s_{in} + 2n^2 C_{in} t_{in}], \\
A_{1n}^* &= c_1^2(1-\nu)(1-\nu^2)q_{1n}(p_{1n}^+)^2, \quad A_{in}^{(2)} = -n^6(B_{in} p_{in}^- - C_{in} q_{in}), \\
A_{in}^{(21)} &= A_{4n}^* E_{in} \frac{1}{c_1^2} - n^6(q_{in} C_{in} - p_{in}^- B_{in}), \\
A_{in}^{(22)} &= A_{4n}^* H_{in} \frac{1}{c_1^2} - n^6(q_{in} B_{in} + p_{in}^- C_{in}), \\
A_{4n}^* &= [1 - \nu^2 + c_1^2 n^2(7 + 4\nu)](p_{in}^+)^2, \quad A_{in}^4 = -A_{2n}^*(B_{in} p_{in}^- - C_{in} q_{in}), \\
A_{in}^{(21)} &= -B_{in}(A_{3n}^* - A_{2n}^* p_{in}^-) + 2c_1^2 E_{in} (p_{in}^+)^2 - A_{2n}^* C_{in} q_{in}, \\
A_{in}^{(22)} &= C_{in}(A_{3n}^* - A_{2n}^* p_{in}^-) + 2c_1^2 H_{in} (p_{in}^+)^2 - A_{2n}^* B_{in} q_{in}, \\
A_{2n}^* &= n^2(1-\nu + 2c_1^2 n^2), \quad A_{3n}^* = (3-\nu - 2\nu^2 + 4c_1^2 n^2)(p_{in}^+)^2, \\
A_{in}^{(6)} &= -2(B_{in} p_{in}^- - C_{in} q_{in}), \quad A_{in}^{(61)} = 2(B_{in} p_{in}^- - C_{in} q_{in}), \\
A_{in}^{(62)} &= -2(C_{in} p_{in}^- + B_{in} q_{in}), \quad E_{in} = p_{in}^- B_{in} + q_{in} C_{in}, \\
H_{in} &= q_{in} B_{in} - p_{in}^- C_{in}, \quad s_{in} = 2p_{in}^- q_{in}, \\
t_{in} &= \begin{cases} t_{in} = 3a_{in}^2 - b_{in}^2, & n < k, \\ (p_{in}^-)^2 - q_{in}^2, & n \geq k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Інші ядра системи СІР (18) мають аналогічну структуру. Їхній загальний вигляд опускаємо через громіздкість.

При побудові алгоритму розв'язування системи (19) важливо знати особливості поведінки ядер СІР при різних значеннях геометричних і фізичних характеристик оболонки. Для з'ясування цих особливостей здійснено низку числових досліджень. Типові значення ядер СІР подані на рис. 2 для кількості членів ряду  $k = 50$  за таких геометричних і фізичних характеристик оболонки:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 100, \quad R = 0.15 \text{ м}, \quad h = 0.15 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\
\rho &= 8 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad \nu = 0.3. \quad (23)
\end{aligned}$$



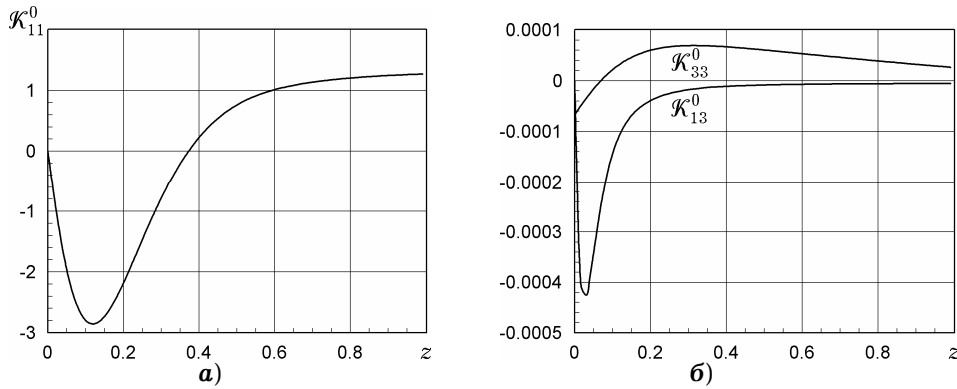


Рис. 2

На рис. 2 подано залежності від аргументу  $z$  ядра  $K_{11}^0$  (рис. 2а), а на рис. 2б – ядер  $K_{13}^0$  і  $K_{33}^0$ . Як засвідчили ці та інші дослідження, збіжність ядер залежить від значення аргументу і з його зменшенням необхідно брати все більшу кількість членів ряду. Оскільки з'ясовано, що значення  $K_{13}^0(z)$  і  $K_{33}^0(z)$  набагато (більш ніж у  $10^4$ ) менші від значень  $K_{11}^0(z)$  (рис. 2), то при розв'язуванні системи СІР (19) вважатимемо їх рівними нулеві.

**4. Числові дослідження.** Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів подамо у такому вигляді [6]:

$$K_N = \frac{1}{2} \sqrt{\ell} K_N^0 e^{\tilde{\gamma} t}, \quad K_M = \frac{1}{2} R c \sqrt{\ell} K_M^0 e^{\tilde{\gamma} t}, \quad (24)$$

де

$$K_N^0 = \lim_{u \rightarrow 1} [\sqrt{1-u^2} \Omega_1(u)], \quad K_M^0 = \lim_{u \rightarrow 1} [\sqrt{1-u^2} \Omega_3(u)] \quad (25)$$

Як видно з (24), зміну величини коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів у часі характеризує множник  $e^{\tilde{\gamma} t}$ , а швидкість зміни навантаження і геометричні та фізичні параметри оболонки враховуються множниками  $\frac{1}{2} \sqrt{\ell} K_N^0$  та  $\frac{1}{2} R c \sqrt{\ell} K_M^0$ . Для оцінки інтенсивності зусиль і моментів у початковий момент (при малих  $t$ ) часу доцільно використовувати множники  $K_N^0$  і  $K_M^0$ , які, за аналогією з [6, 7], називатимемо відносними коефіцієнтами інтенсивності зусиль і моментів при динамічному навантаженні. З використанням розв'язків системи (19) і співвідношення (25) досліджено залежність відносних коефіцієнтів зусиль від швидкості зміни навантаження і довжини тріщини (результати обчислень подано графічно на рис. 3, рис. 4). При дослідженнях вважали, що на берегах вирізу прикладені зусилля і моменти постійної інтенсивності  $N_2(\alpha, 0) = -N^0 = 1$  та  $M_2(\alpha, 0) = -M^0 = 0$ , а механічні та геометричні параметри оболонки задані співвідношеннями (23).

На рис. 3 наведено залежності відносного коефіцієнта інтенсивності зусиль  $K_N^0$  від швидкості зміни навантаження  $\tilde{\gamma}$  для різних значень довжини тріщини  $\ell = \alpha_0 R$ . Кривим 1–5 відповідають значення  $\alpha_0 = \{0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3\}$ . З графіків бачимо, що для змінного навантаження при малих швидкостях зміни навантаження,  $\tilde{\gamma} < 100$ , значення  $K_N^0$  коефіцієнта інтенсивності зусиль у початковий момент часу близькі до їх значень у статичному випадку (відносна похибка

$$\frac{|K_{Nst} - K_N^0|}{K_{Nst}} < 5\% \text{ [7]}, \text{ що, в свою чер-}$$

гу, непрямо підтверджує достовірність здійснених обчислень. Збільшення швидкості зміни навантаження  $\tilde{\gamma}$  призводить до зменшення значення  $K_N^0$ . При цьому для швидкості зростання навантаження  $\tilde{\gamma} < 1000$  можемо стверджувати, що чим більша відносна довжина тріщини  $\alpha_0$ , тим більшим є відносний коефіцієнт інтенсивності зусиль, а при  $\tilde{\gamma} > 1500$  спостерігаємо обернену картину. При відносній довжині тріщини  $\alpha_0 < 0.05$  значення коефіцієнтів  $K_N^0$  мало відрізняються для різних  $\alpha_0$ .

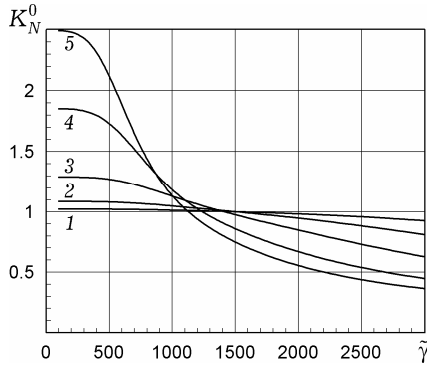


Рис. 3

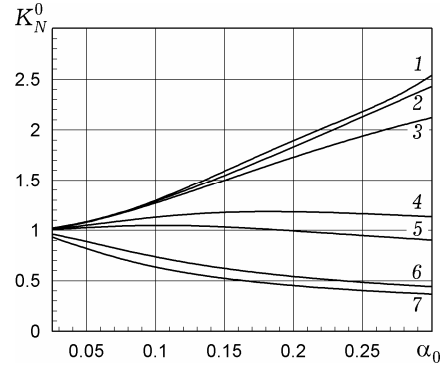


Рис. 4

На рис. 4 наведено графіки залежності відносного коефіцієнта інтенсивності  $K_N^0$  від відносної довжини тріщини  $\alpha_0 = \ell/R$  для різних значень швидкості зміни навантаження  $\tilde{\gamma}$ . Кривим 1–7 відповідають значення  $\tilde{\gamma} = \{0, 300, 500, 1000, 1250, 2500, 3000\}$ . Як і на рис. 3, з графіків, наведених на рис. 4, бачимо, що при швидкості зміни навантаження  $\tilde{\gamma} < 100$  значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль для змінного в часі навантаження мало відрізняються від значень для статичного навантаження [7], причому значення тим ближчі, чим менша довжина тріщини. Зберігається тенденція, виявлена при аналізі графіків на рис. 3, згідно з якою для  $\tilde{\gamma} < 1000$  коефіцієнт інтенсивності зусиль зростає зі збільшенням відносної довжини тріщини  $\alpha_0$ , а для  $\tilde{\gamma} > 1500$ , навпаки, спадає зі зростанням відносної довжини тріщини.

**Висновки.** Записано у явному вигляді систему сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за змінного в часі навантаження, достовірність яких підтверджена їх збігом при переході до випадку статичного навантаження із відомими співвідношеннями [6, 7].

Побудовано алгоритм числового розв'язання отриманої системи та виконано дослідження коефіцієнта інтенсивності зусиль при змінних в часі навантаженнях. Здійснено верифікацію отриманих результатів шляхом порівняння коефіцієнтів інтенсивності зусиль при малих швидкостях зміни навантаження з коефіцієнтами у статичному випадку, поданими у [6]. На основі виконаних досліджень з'ясовано, що при невисоких швидкостях зміни навантаження впливом врахування інерційності матеріалу при обчисленні відносних коефіцієнтів інтенсивності зусиль можна знехтувати.

Отримані співвідношення успішно можна використовувати для з'ясування напружено-деформованого стану циліндричних оболонок із поздовжніми розрізами, що перебувають під дією змінного в часі навантаження. Також отримані співвідношення можуть бути використані як базові при визначенні напруженого стану, коли навантаження змінюється за гармонічним законом.

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
2. Гузь А. Н., Гузь И. А., Меньшиков А. В., Меньшиков В. А. Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 3–13.  
Te same: Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 10. – P. 1093–1100.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0401-1>.
3. Довбня К. М., Шевцова Н. А. Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 138–142.  
Te same: Dovbnya K. M., Shevtsova N. A. Investigation of the stressed state of an orthotropic shell of arbitrary curvature with an internal crack // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 708–715.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1095-6>.
4. Кіт Г. С., Кушнір Р. М., Михаськів В. В., Николишин М. М. Методи визначення статичних і динамічних напружень у тілах з підповерхневими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 56–66.  
Te same: Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolyslyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with subsurface cracks // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 2. – P. 177–187.  
– <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9382-9>.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М. Напружений стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 60–74.
6. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
7. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
8. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
9. Підстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
10. Тітова О. О., Ланько В. П. Аналіз пружних коливань циліндричних оболонок з поздовжніми тріщинами // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту: Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 1. – С. 161–166.
11. Breslavsky I. D., Amabili M., Legrand M. Static and dynamic behavior of circular cylindrical shell made of hyperelastic arterial material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2016. – **83**, No. 5. – 051002 (9 pages).  
– doi: 10.1115/1.4032549.
12. Chen Y., Ji C., Long Y., Ji M.-R., Gao F.-Y., Ding W. Research on dynamic behaviors of cylindrical shells with different wall-thickness under explosion loading // Chinese J. High Press. Phys. – 2014. – **28**, No. 5. – P. 525–532.
13. Hamzah A. A., Jobair H. K., Abdullah O. I., Hashim E. T., Sabri L. A. An investigation of dynamic behavior of the cylindrical shells under thermal effect // Case Studies Therm. Eng. – 2018. – **12**. – P. 537–545.  
– <https://doi.org/10.1016/j.csite.2018.07.007>.
14. Han X. F., Wang Y. D., Wang T., Ding T. Ch., Jia H. G. Study on dynamic response of cylindrical shells under combined load // Appl. Mech. Mater. – 2013. – **333-335**. – P. 2151–2155.  
– <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.333-335.2151>.
15. Makhorkin M. I., Nykolyslyn M. M. Construction of integral equations describing limit equilibrium of cylindrical shell with a longitudinal crack under time-varying load // Econtechmod (PAN, Lublin, Polish). – 2016. – **5**, No. 3. – P. 141–146.
16. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave // CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2009. – **48**, No. 2. – P. 107–120.
17. Pothula S. G. Dynamic response of composite cylindrical shells under external impulsive loads. – MSc thesis, Univ. of Akron, 2009. – 71 p.

### ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННОСТИ МАТЕРИАЛА

Рассмотрена задача о предельном равновесии длинной цилиндрической оболочки с продольной трещиной при действии нагрузки, изменяющейся со временем по экспоненциальному закону. Для случая симметричной нагрузки трещины построена система сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние скорости изменения нагрузки на значение коэффициента интенсивности усилий в окрестности концов трещины.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, продольная трещина, переменная нагрузка, экспоненциальная зависимость от времени, сингулярные интегральные уравнения, коэффициент интенсивности усилий.

### LIMIT EQUILIBRIUM OF CYLINDRICAL SHELL WITH LONGITUDINAL CRACK TAKING INTO ACCOUNT THE MATERIAL INERTIA

The problem on limit equilibrium of a long cylindrical shell with a longitudinal crack under the action of load, which varies with time according to the exponential law, is considered. For the case of symmetric load of a crack, a system of singular integral equations is constructed. The influence of the rate of load change on the value of the force intensity factor in the vicinity of the ends of the crack is studied.

**Key words:** cylindrical shell, longitudinal crack, varying load, exponential dependence on time, singular integral equations, force intensity factor.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
21.11.17