УДК 539.375

В. Л. Богданов*, А. Л. Кипнис

К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРУШЕНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА ПРИ СЖАТИИ ВДОЛЬ МЕЖФАЗНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассмотрена задача о сжатии кусочно-однородной полуплоскости усилиями, направленными вдоль расположенной на границе раздела двух материалов приповерхностной трещины. Задача относится к неклассическим проблемам механики разрушения, поскольку при такой схеме нагружения реализующееся в теле напряженно-деформированное состояние является однородным и в соответствующих представлениях для напряжений и перемещений в окрестности трещины отсутствуют сингулярные составляющие. Вследствие равенства нулю коэффициентов интенсивности напряжений классические критерии разрушения Гриффитса – Ирвина для рассматриваемой задачи оказываются неприменимыми. В указанной ситуации начало развития трещины связывается с локальной потерей устойчивости состояния равновесия части материала в области, примыкающей к трещине. С использованием подходов трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел выполнена математическая постановка задачи и предложен подход к ее исследованию. При использовании представления напряжений и перемещений через комплексные потенциалы рассмотрен случай, когда для каждого из материалов корни соответствующего характеристического уравнения являются равными.

Ключевые слова: *механика разрушения, сжатие вдоль трещины, межфазная приповерхностная трещина, критерий разрушения.*

Введение. Важной задачей механики разрушения является исследование вопросов, связанных с разрушением материалов, которые находятся в условиях сжатия вдоль расположенных в них трещин [2, 4, 5, 10, 20, 25]. Как отмечалось в [10, 21], подобные вопросы относятся к неклассическим проблемам механики разрушения, поскольку в рамках классических критериев разрушения Гриффитса – Ирвина и его обобщений коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности трещин и величины, характеризующие раскрытие трещин, при указанной схеме нагружения обращаются в нуль [15, 16].

Особую актуальность такая постановка проблемы приобретает при исследовании слоистых композитных материалов, а также материалов с тонким покрытием (теплоизоляционным, антикоррозионным и т.д.), когда сжатие происходит вдоль прямолинейной границы раздела сред, содержащей межфазные трещины. В частности, для композитов такая ситуация является типичной, поскольку, во-первых, уменьшение адгезионной прочности зачастую связано с наличием дефектов, расположенных на границе раздела сред, и, во-вторых, детали конструкций из композитов в основном проектируются так, чтобы обеспечить нагружение именно вдоль армирующих элементов [5, 19, 20, 11].

Для исследования таких проблем в работах А. Н. Гузя с привлечением подходов трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) был предложен критерий разрушения, в соответствии с которым начало (старт) процесса разрушения материала связывается с локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала вблизи трещины [3–5, 10, 21]. При этом теоретическому пределу прочности и значению предельного укорочения соответствует величина критической сжимающей нагрузки и критического значения укорочения, вычисляемые при помощи указанного критерия. В указанных работах были исследованы

* Bogdanov@nas.gov.ua

плоские и пространственные задачи о сжатии изотропных, трансверсально-изотропных (для пространственных задач) и ортотропных (для плоских задач) однородных тел, содержащих изолированные (невзаимодействующие) трещины и системы параллельных (взаимодействующих) трещин.

Пространственные задачи о сжатии однородных изотропных и трансверсально-изотропных полуограниченных тел, ослабленных приповерхностными круговыми трещинами, рассмотрены в работах [1, 2, 10, 17, 18, 23, 24]. При этом трансверсально-изотропные материалы также моделируют в континуальном приближении и композитные материалы с усредненными механическими характеристиками.

Первые результаты по механике разрушения слоистых композитных материалов при сжатии вдоль трещин, расположенных в плоскостях раздела сред, с применением ТЛТУДТ были получены в публикациях [12, 13] для хрупкого разрушения в случае наличия на границе раздела материалов одной трещины в рамках модели линейного упругого изотропного тела. С привлечением методов конечных разностей получено выражение для теоретического значения предельного укорочения для композитного слоистого материала с одной трещиной, расположенной на границе раздела сред.

В работах [6–9, 22] изложены результаты по исследованию устойчивости слоистого композита (в рамках модели кусочно-однородного тела), ослабленного произвольным конечным числом трещин, расположенных на прямолинейной границе раздела сред, для хрупкого и пластического разрушения изотропных и ортотропных сжимаемых и несжимаемых материалов наполнителя (армирующих элементов) и связующего (матрицы), которые представлены в единой общей форме для упругих и упругопластических тел, для конечных и малых докритических деформациях. Метод, предложенный авторами, заключается в сведении задачи ТЛТУДТ на собственные значения к однородной задаче сопряжения двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости. Указанный метод является развитием метода Мусхелишвили [14], разработанного для краевых задач статики классической линейной теории упругости.

В указанных публикациях [6–9, 22] осуществлён переход от представления напряжений и перемещений плоской статической задачи ТЛТУДТ для каждого из материалов композита через функции комплексных переменных, которые являются аналитическими в областях, занимаемых соответствующим материалом, к аналогичному представлению указанных величин через одну функцию комплексного переменного, которая задана во всей плоскости и является аналитической во всей плоскости. С использованием полученных представлений плоская статическая задача ТЛТУДТ сведена к однородной задаче сопряжения для двух голоморфных во всей плоскости функций для следующих трех случаев компоновки слоистого композитного материала:

1) для материала верхней полуплоскости имеет место случай неравных корней (соответствующего характеристического уравнения) и для материала нижней полуплоскости – также случай неравных корней;

2) для материала верхней полуплоскости имеет место случай равных корней и для материала нижней полуплоскости – также случай равных корней;

3) для материала верхней полуплоскости имеет место случай неравных корней, а для материала нижней полуплоскости – случай равных корней.

На основе точного решения указанной однородной задачи сопряжения двух голоморфных во всей плоскости функций для произвольного количества трещин получены выражения для определения теоретического значения предельного укорочения и разрушающей нагрузки для вышеуказанных трех случаев компоновки слоистого композита в общем виде для сжимаемых и несжимаемых, упругих и упругопластических тел, для конечных и малых докритических деформаций.

Вышесказанное свидетельствует о том, что в литературе по механике разрушения материалов при сжатии вдоль трещин достаточно подробно рассмотрены задачи для приповерхностных трещин в *однородных* полуограниченных телах, а также задачи для межфазных трещин, расположенных на границе раздела двух полуплоскостей из разных материалов (в последнем случае моделируются задачи о сжатии слоистых композитных материалов с расположенными на границах раздела сред плоскими микротрещинами). В то же время задачи о сжатии вдоль трещин, расположенных в кусочно-однородных телах на границе раздела тонкой полосы и полуплоскости из различных материалов, до сих пор не исследовались.

В настоящей работе для случая плоской деформации рассмотрена задача о сжатии тела, представляющего собой композицию жестко скрепленных (вне трещины) полуплоскости и полосы, усилиями, направленными вдоль межфазной трещины. С привлечением представлений общих решений для напряжений и перемещений через аналитические функции выполнена математическая постановка задачи и обсуждена методика ее дальнейшего решения.

1. Задача об одноосном сжатии кусочно-однородной полуплоскости вдоль межфазной приповерхностной трещины. Рассматривается композит (или материал с покрытием), представляющий собой композицию тонкослойного материала «1» и полуограниченного материала «2», находящийся под действием сжимающей нагрузки, направленной вдоль плоской, бесконечной в направлении Ox_3 трещины (постоянной ширины вдоль оси Ox_1), которая расположена на границе раздела материалов (расчетная схема задачи приведена на рис. 1). В условиях плоской деформации рассмотрим кусочно-однородную полуплоскость $x_2 \le h$ со свободной от нагрузки граничной поверхностью $x_2 = h$ и прямолинейной границей раздела сред $x_2 = 0$, составленную из двух различных, жестко сцепленных между собой (в области вне трещины) материалов: материала «1», занимающего область, представляющую собой полосу $0 \le x_2 \le h$ толщины h, и материала «2», занимающего область в виде полуплоскости $x_2 \le 0$ (рис. 1). Граница раздела материалов «1» и «2» $x_2 = 0$ содержит открытую трещину длины $2a$, свободную от напряжений.

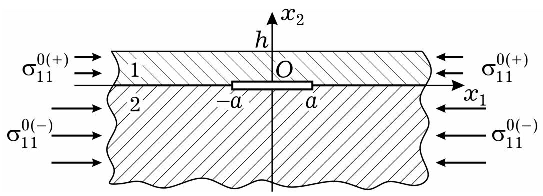

Рис. 1

Пусть материалы сжимаются на бесконечности вдоль оси Ox_1 равномерно распределенными усилиями

$$\sigma_{11}^{0(\pm)} = \text{const}, \qquad \sigma_{11}^{0(+)} \ne \sigma_{11}^{0(-)}, \qquad \sigma_{22}^{0(-)} = 0\,,$$

таким образом, что обеспечивается одинаковое укорочение вдоль оси Ox_1 для материалов слоя и полупространства

$$\varepsilon_{11}^{0(+)} = \varepsilon_{11}^{0(-)}, \qquad \lambda_1^{(+)} = \lambda_1^{(-)} = \lambda_1^{(\pm)} = \text{const}\,,$$

где $\lambda_1^{(\pm)}$ – коэффициенты укорочения вдоль оси Ox_1, обусловленные сжимающими усилиями $\sigma_{11}^{0(\pm)}$. (Здесь и далее верхним индексом « + » в скобках обозначены величины, относящиеся к материалу полосы «1», а верхним индексом «−» в скобках − полуплоскости «2»). В этом случае докритическое напряженно-деформированное состояние в каждой из областей «1» и «2» является статически определенным однородным и определяется выражениями для перемещений

$$u_1^{0(\pm)} = (\lambda_1^{(\pm)} - 1)x_1 .$$

С учетом однородности докритического состояния справедливыми являются следующие представления для возмущений компонент несимметричного тензора напряжений Пиолы − Кирхгофа $\tilde{t}$ через производные от возмущений компонент вектора перемещений $\vec{u}$ в случае плоской задачи для сжимаемых тел [5, 21]:

$$t_{11}^{(\pm)} = \omega_{1111}^{(\pm)} \frac{\partial u_1^{(\pm)}}{\partial x_1} + \omega_{1122}^{(\pm)} \frac{\partial u_2^{(\pm)}}{\partial x_2} ,$$

$$t_{12}^{(\pm)} = \omega_{1221}^{(\pm)} \frac{\partial u_2^{(\pm)}}{\partial x_1} + \omega_{1212}^{(\pm)} \frac{\partial u_1^{(\pm)}}{\partial x_2} ,$$

$$t_{21}^{(\pm)} = \omega_{2121}^{(\pm)} \frac{\partial u_2^{(\pm)}}{\partial x_1} + \omega_{2112}^{(\pm)} \frac{\partial u_1^{(\pm)}}{\partial x_2} ,$$

$$t_{22}^{(\pm)} = \omega_{2211}^{(\pm)} \frac{\partial u_1^{(\pm)}}{\partial x_1} + \omega_{2222}^{(\pm)} \frac{\partial u_2^{(\pm)}}{\partial x_2} .$$

Величины $\omega_{ijk\ell}^{(\pm)} = \omega_{ijk\ell}^{(\pm)}(\lambda_1, \lambda_2)$ являются компонентами тензоров четвертого ранга $\tilde{\omega}^{(\pm)}$ и характеризуют выбранную модель материала. Аналогичные представления получены [5, 21] и для случая несжимаемых тел. Отметим преимущество применяемого здесь подхода, предложенного в [5, 21], в рамках которого конкретизация модели материала происходит лишь на финальной стадии решения задачи, что позволяет проводить исследование в общем виде для упругих и упруго-пластических, изотропных и ортотропных тел, при малых и конечных докритических деформациях.

Уравнения равновесия в перемещениях в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел в случае плоской деформации имеют вид:

$$L_{11}^{(\pm)} u_1^{(\pm)} + L_{12}^{(\pm)} u_2^{(\pm)} = 0 ,$$

$$L_{21}^{(\pm)} u_1^{(\pm)} + L_{22}^{(\pm)} u_2^{(\pm)} = 0 ,$$

$$L_{11}^{(\pm)} = \omega_{1111}^{(\pm)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2112}^{(\pm)} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} ,$$

$$L_{12}^{(\pm)} \equiv L_{21}^{(\pm)} = \left(\omega_{1122}^{(\pm)} + \omega_{1212}^{(\pm)}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} ,$$

$$L_{22}^{(\pm)} = \omega_{1221}^{(\pm)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2222}^{(\pm)} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} .$$

Граничные условия сформулированной задачи запишутся следующим образом:

$$t_{22}^{(\pm)} = 0, \qquad t_{21}^{(\pm)} = 0 \qquad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| < a,$$

$$t_{22}^{(+)} = t_{22}^{(-)}, \qquad t_{21}^{(+)} = t_{21}^{(-)},$$

$$u_1^{(+)} = u_1^{(-)}, \qquad u_2^{(+)} = u_2^{(-)}, \qquad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| \ge a; \tag{1}$$

$$t_{22}^{(+)} = 0, \qquad t_{21}^{(+)} = 0 \qquad \text{при} \quad x_2 = h. \tag{2}$$

Рассматривая лишь те формы потери устойчивости, которые «на бесконечности» затухают так же, как и соответствующие решения плоских статических задач линейной теории упругости [14], два последних условия в (1) запишем в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial u_1^{(+)}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^{(-)}}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_2^{(+)}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^{(-)}}{\partial x_1} \qquad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| > a. \tag{3}$$

Следуя [4], введем в рассмотрение комплексные переменные

$$z_k^{(+)} = x_1 + \mu_k^{(+)} x_2, \qquad k = 1, 2,$$

для материала «1» и

$$z_k^{(-)} = x_1 + \mu_k^{(-)} x_2, \qquad k = 1, 2,$$

для материала «2», где величины $\mu_{1,2}^{(\pm)}$ для каждого из материалов являются корнями соответствующего характеристического уравнения [4]

$$\mu^{(\pm)^4} + 2A^{(\pm)}\mu^{(\pm)^2} + A_1^{(\pm)} = 0,$$

$$2A^{(\pm)} = \frac{\omega_{1111}^{(\pm)}\omega_{2222}^{(\pm)} + \omega_{2112}^{(\pm)}\omega_{1221}^{(\pm)} - \left(\omega_{1122}^{(\pm)} + \omega_{1212}^{(\pm)}\right)^2}{\omega_{2222}^{(\pm)}\omega_{2112}^{(\pm)}},$$

$$A_1^{(\pm)} = \frac{\omega_{1111}^{(\pm)}\omega_{1221}^{(\pm)}}{\omega_{2222}^{(\pm)}\omega_{2112}^{(\pm)}}. \tag{4}$$

Исходя из возможных значений корней характеристических уравнений (4), для рассмотрения представляются четыре возможных случая комбинации корней указанных уравнений для материалов «1» и «2»:

1°) $\mu_1^+ = \mu_2^+, \qquad \mu_1^- = \mu_2^-;$

2°) $\mu_1^+ \ne \mu_2^+, \qquad \mu_1^- \ne \mu_2^-;$

3°) $\mu_1^+ = \mu_2^+, \qquad \mu_1^- \ne \mu_2^-;$

4°) $\mu_1^+ \ne \mu_2^+, \qquad \mu_1^- = \mu_2^-.$

2. Об использовании аналитических функций комплексного переменного для построения решения в случае равных корней. Рассмотрим случай, когда для каждого из материалов «1», «2» соответствующее ему характеристическое уравнение (4) имеет равные корни ($\mu_1^+ = \mu_2^+$, $\mu_1^- = \mu_2^-$). Как показано в [3], в этом случае

$$\bar{\mu}_1 = -\mu_1, \qquad \operatorname{Re}\mu_1^{(\pm)} = 0.$$

Тогда имеют место следующие представления:

$$t_{22} = \operatorname{Re}\left\{[\Psi(z_1) + \overline{z_1}\,\Phi'(z_1)] + \gamma_{22}^{(2)}\Phi(z_1)\right\},$$

$$t_{21} = \mathrm{Re}\left\{\mu_1\gamma_{21}^{(1)}[\Psi(z_1) + \overline{z_1}\,\Phi'(z_1)] + \gamma_{21}^{(2)}\Phi(z_1)\right\},$$

$$t_{21} = \mathrm{Re}\left\{-\mu_1[\Psi(z_1) + \overline{z_1}\,\Phi'(z_1)] + \gamma_{12}^{(2)}\Phi(z_1)\right\},$$

$$t_{21} = \mathrm{Re}\left\{\mu_1^2\gamma_{11}^{(1)}[\Psi(z_1) + \overline{z_1}\,\Phi'(z_1)] + \gamma_{11}^{(2)}\Phi(z_1)\right\},$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} = \mathrm{Re}\left\{\gamma_k^{(1)}[\Psi(z_1) + \overline{z_1}\,\Phi'(z_1)] + (\gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)})\Phi(z_1)\right\}, \qquad k = 1,2, \qquad (5)$$

определяющие напряжения и производные от перемещений в материалах «1» и «2» (необходимо только поставить во всех величинах индекс «+» или «−») через две аналитические функции соответствующих комплексных переменных в случае равных корней. Коэффициенты $\gamma_{ij}^{k(\pm)}$, $\gamma_j^{k(\pm)}$, $i, j, k = 1,2$, представляют собой известные функции компонент тензоров $\tilde{\omega}^{(\pm)}$ [5, 21]. При этом функции $\Phi^{(+)}$, $\Psi^{(+)}$ являются аналитическими в полосе $0 < \mathrm{Im}\, z_1^{(+)} < \left|\mu_1^{(+)}\right| h$, а функции $\Phi^{(-)}$, $\Psi^{(-)}$ являются аналитическими в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z_1^{(-)} < 0$.

Подставляя представления (5) в граничные условия (1)–(3), получаем граничные условия задачи, записанные через аналитические функции, в следующем виде:

$$\mathrm{Re}\left\{[\Psi^{(\pm)}(x_1) + x_1\Phi^{(\pm)\prime}(x_1)] + \gamma_{22}^{(2)(\pm)}\Phi^{(\pm)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\mu_1^{(\pm)}\gamma_{21}^{(1)(\pm)}[\Psi^{(\pm)}(x_1) + x_1\Phi^{(\pm)\prime}(x_1)] + \gamma_{21}^{(2)(\pm)}\Phi^{(\pm)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$|x_1| < a;$$

$$\mathrm{Re}\left\{[\Psi^{(+)}(x_1) + x_1\Phi^{(+)\prime}(x_1)] - [\Psi^{(-)}(x_1) + x_1\Phi^{(-)\prime}(x_1)] + \right.$$
$$\left. + \gamma_{22}^{(2)(+)}\Phi^{(+)}(x_1) - \gamma_{22}^{(2)(-)}\Phi^{(-)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\mu_1^{(+)}\gamma_{21}^{(1)(+)}[\Psi^{(+)}(x_1) + x_1\Phi^{(+)\prime}(x_1)] - \mu_1^{(-)}\gamma_{21}^{(1)(-)}[\Psi^{(-)}(x_1) + \right.$$
$$\left. + x_1\Phi^{(-)\prime}(x_1)] + \gamma_{21}^{(2)(+)}\Phi^{(+)}(x_1) - \gamma_{21}^{(2)(-)}\Phi^{(-)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_1^{(1)(+)}[\Psi^{(+)}(x_1) + x_1\Phi^{(+)\prime}(x_1)] - \gamma_1^{(1)(-)}[\Psi^{(-)}(x_1) + x_1\Phi^{(-)}(x_1)] + \right.$$
$$\left. + (\gamma_1^{(1)(+)} + \gamma_1^{(2)(+)})\Phi^{(+)}(x_1) - (\gamma_1^{(1)(-)} + \gamma_1^{(2)(-)})\Phi^{(-)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_2^{(1)(+)}[\Psi^{(+)}(x_1) + x_1\Phi^{(+)\prime}(x_1)] - \gamma_2^{(1)(-)}[\Psi^{(-)}(x_1) + x_1\Phi^{(-)}(x_1)] + \right.$$
$$\left. + (\gamma_2^{(1)(+)} + \gamma_2^{(2)(+)})\Phi^{(+)}(x_1) - (\gamma_2^{(1)(-)} + \gamma_2^{(2)(-)})\Phi^{(-)}(x_1)\right\} = 0,$$

$$|x_1| \ge a;$$

$$\mathrm{Re}\left\{[\Psi^{(+)}(x_1 + \mu_1^{(+)}h) + (x_1 + \mu_1^{(+)}h)\Phi^{(+)\prime}(x_1 + \mu_1^{(+)}h)] + \right.$$
$$\left. + \gamma_{22}^{(2)(+)}\Phi^{(+)}(x_1 + \mu_1^{(+)}h)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\mu_1^{(+)}\gamma_{21}^{(1)(+)}[\Psi^{(+)}(x_1 + \mu_1^{(+)}h) + (x_1 + \mu_1^{(+)}h)\Phi^{(+)\prime}(x_1 + \mu_1^{(+)}h)] + \right.$$
$$\left. + \gamma_{21}^{(2)(+)}\Phi^{(+)}(x_1 + \mu_1^{(+)}h)\right\} = 0. \qquad (6)$$

Стоит отметить, что все выражения, представленные выше, для каждой из областей «1» и «2» записаны через две функции комплексного переменного, аналитические в области, занимаемой соответствующим материалом. Одним из возможных подходов к решению поставленной задачи является переход в указанных выражениях к одной (для каждого из материалов) функции, аналитической во всей комплексной плоскости, что позволит выполнить сведение краевой задачи к задаче сопряжения двух аналитических функций, заданных во всей плоскости [14]. Существенной сложностью на пути реализации этого подхода является тот факт, что сопряжение аналитических функций выполняется не на границе полуплоскости, а на внутренней линии раздела сред $x_2 = 0$, что приводит к появлению дополнительного условия, вытекающего из последнего из условий (6), уже на самой границе полуплоскости.

1. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Исследование неклассических проблем механики разрушения композитов со взаимодействующими трещинами // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 1. – С. 79–104.
   То же: *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Nonclassical problems in the fracture mechanics of composites with interacting cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, No. 1. – P. 64–84.
   – https://doi.org/10.1007/s10778-015-0673-y.
2. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Пространственные задачи механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий (обзор) // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 5. – С. 3–89.
   То же: *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, No. 5. – P. 489–560.
   – https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x.
3. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин (плоская задача) // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315–1318.
4. *Гузь А. Н.* О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 1. – С. 5–88.
   То же: *Guz A. N.* Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 1–57. – https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y.
5. *Гузь А. Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2 т. – Киев: «Литера», 2008. – Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.; Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
6. *Гузь А. Н., Гузь И. А.* Устойчивость границы раздела двух тел при сжатии вдоль трещин, расположенных на границе раздела. Точные решения. 1. Случай неравных корней // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 3. – С. 28–35.
   То же: *Guz' A. N., Guz' I. A.* Stability of the interface between two bodies under compression along cracks located at the interface. Exact solutions. 1. Case of unequal roots // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 3. – P. 194–200.
7. *Гузь А. Н., Гузь И. А.* Устойчивость границы раздела двух тел при сжатии вдоль трещин, расположенных на границе раздела. Точные решения. 2. Случай равных корней // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 4. – С. 3–10.
   То же: *Guz' A. N., Guz' I. A.* Stability of the interface between two bodies under compression along cracks located at the interface. Exact solutions. 2. Case of equal roots // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 4. – P. 281–286.
   https://doi.org/10.1007/BF02700564.
8. *Гузь А. Н., Гузь И. А.* Устойчивость границы раздела двух тел при сжатии вдоль трещин, расположенных на границе раздела. 1. Точные решения для случая неравных корней // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 4. – С. 69–79.
   То же: *Guz' A. N., Guz' I. A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 1. Exact solutions for the case of unequal roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 4. – P. 482–491.
   https://doi.org/10.1007/BF02681971.
9. *Гузь А. Н., Гузь И. А.* Устойчивость границы раздела двух тел при сжатии вдоль трещин, расположенных на границе раздела. 2. Точные решения для случая равных корней // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 5. – С. 66–73.

То же: *Guz' A. N., Guz' I. A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solutions for the case of equal roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 5. – P. 615–622.
https://doi.org/10.1007/BF02682075.

10. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4: В 2 кн.; Кн. 1.
11. *Гузь И. А.* Композиты с межслойными трещинами: устойчивость при сжатии вдоль двух микротрещин между ортотропными слоями // Механика композит. материалов. – 1993. – № 6. – С. 791–798.
    То же: *Guz' I. A.* Composites with interlamination cracks: stability under compression along two microcracks between orthotropic layers // Mech. Compos. Mater. – 1994. – **29**, No. 6. – P. 581–586.
    – https://doi.org/10.1007/BF00616323.
12. *Гузь И. А.* Об устойчивости композита, образованного продольно-поперечной укладкой ортотропных слоев с трещиной на границе раздела // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 11. – С. 53–56.
    То же: *Guz' I. A.* The strength of a composite formed by longitudinal-transverse stacking of orthotropic layers with a crack at the boundary // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, No. 11. – P. 921–924.
    – https://doi.org/10.1007/BF00848275.
13. *Гузь И. А.* Устойчивость композита при сжатии вдоль трещины на границе раздела слоев // Докл. АН СССР. – 1992. – **325**, № 3. – С. 455–458.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
15. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с. – Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. / Под ред. В. В. Панасюка. – Т. 1.
16. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
    То же: *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – xiv+939 p.
17. *Bogdanov V. L.* Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2008. – **15**, No. 6-7. – P. 453–460.
    https://doi.org/10.1080/15376490802138427.
18. *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace // Theor. Appl. Frac. Mech. – 1995. – **22**, No. 3. – P. 239–247.
    https://doi.org/10.1016/0167-8442(94)00062-6.
19. *Bolotin V. V.* Delaminations in composite structures: its origin, buckling, growth and stability // Compos. Part B – Eng. – 1996. – **27**, No. 2. – P. 129–145.
    https://doi.org/10.1016/1359-8368(95)00035-6.
20. *Dvorak G. J.* Composite materials: inelastic behavior, damage, fatigue and fracture // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, No. 1-2. – P. 155–170.
    https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00085-2.
21. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag , 1999. – xvi+557 p.
22. *Guz A. N., Guz I. A.* Analytical solution of stability problem for two composite half-planes compressed along interfacial cracks // Compos. Part B – Eng. – 2000. – **31**, No. 5. – P. 405–418.
    https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00013-5.
23. *Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L.* Combined analysis of fracture under stresses acting along cracks // Arch. Appl. Mech. – 2013. – **83**, No. 9. – P. 1273–1293. – https://doi.org/10.1007/s00419-013-0746-5.
24. *Guz' A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: approach, concept and results // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **48**, No. 3. – P. 285–303.
    – https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2007.08.001
25. *Wang E. Z., Shrive N. G.* Brittle fracture in compression: mechanisms, models, and criteria // Eng. Fract. Mech. – 1995. – **52**, No. 6. – P. 1107–1126.
    https://doi.org/10.1016/0013-7944(95)00069-8.

ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РУЙНУВАННЯ НАПІВОБМЕЖЕННОГО ТІЛА ПРИ СТИСКАННІ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРІЩИНИ

Розглянуто задачу про стискання кусково-однорідної півплощини зусиллями, які спрямовані вздовж розташованої на межі поділу двох матеріалів приповерхневої тріщини. Задача відноситься до некласичних проблем механіки руйнування, оскільки за такої схеми навантаження напружено-деформований стан, що реалізується в тілі, є однорідним і у відповідних представленнях для напружень та переміщень в околі тріщини відсутні сингулярні складові. Внаслідок рівності нулеві коефіцієнтів інтенсивності напружень класичні критерії руйнування Гріффітса – Ірвіна для задачі, що розглядається, виявляються непридатними. У зазначеній ситуації початок розвитку тріщини пов'язується з локальною втратою стійкості стану рівноваги частини матеріалу в області, що примикає до тріщини. З використанням підходів тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл виконано постановку задачі та запропоновано підхід до її дослідження. При використанні представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали розглянуто випадок, коли для кожного з матеріалів корені відповідного характеристичного рівняння є рівними.

***Ключові слова**: механіка руйнування, стиснення вздовж тріщини, міжфазна приповерхнева тріщина, критерій руйнування.*

INVESTIGATION OF FRACTURE OF SEMI-BOUNDED BODY COMPRESSED ALONG INTERFACIAL NEAR-SURFACE CRACK

In the present paper, a problem of compression of a piece-homogeneous half-plane by forces directed along a near-surface crack located in the interface of two materials is considered. This problem is related to non-classical problems of fracture mechanics since under such a loading scheme the stress-strain state realized in the body is homogeneous and in the corresponding expressions for stresses and displacements near the crack there are no singular components. Due to the fact that the stress intensity factors are equal to zero, the classical Griffith – Irwin fracture criterion are inapplicable for the problem under consideration. In this situation, the start of crack propagation is associated with the local stability loss of the equilibrium state of a part of the material in the region adjacent to the crack. Using the approaches of the three-dimensional linearized theory of deformed bodies stability, the mathematical formulation of the problem was carried out and an approach to its investigation was proposed. When using the representation of stresses and displacements through complex potentials, a case is considered when for each of the materials the roots of the corresponding characteristic equation are equal.

***Key words:** mechanics of fracture, compression along crack, interfacial near-surface crack, fracture criterion.*

Ин-т механики
им. С. Тимошенко НАН Украины, Киев

Получено
08.05.18