

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ПОВЕРХНІ, ПОКРИТОЇ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЙНИМ ШАРОМ

Розглянуто математичну модель для визначення температури поверхні, покритої тонким теплоізоляційним шаром, за даними вимірювання значень температур вільної поверхні покриття і зовнішнього середовища. У моделі враховано кондуктивний та радіаційний механізми перенесення енергії в об'ємі шару, кондуктивний і радіаційний теплообмін з поверхнею, яку він покриває, конвективний та радіаційний теплообмін із зовнішнім середовищем на вільній поверхні покриття, яка здатна поглинати і відбивати теплове електромагнітне випромінювання. Наведено результати числових досліджень розв'язків нелінійної задачі на основі розробленого ітераційного методу.

Ключові слова: складний теплообмін, математична модель, нелінійні задачі, ітераційний метод.

Вступ. У прикладних дослідженнях й інженерній практиці часто виникає необхідність визначення температури об'єктів високої теплопровідності, поверхня яких покрита теплоізоляційним шаром. До таких об'єктів можна віднести, зокрема, металеві елементи конструкцій і приладів із захисними тепло- та електроізоляційними покриттями. Їх часто використовують у машино- та приладобудуванні, енергетиці, будівництві [4, 10], а також для захисту поверхонь конструкцій літальних апаратів від нагрівання чи від переохолодження у космічному просторі [1, 2, 9].

Покриття унеможлиблює безпосередній контакт термометра із поверхнею об'єкта. Натомість вільна поверхня покриття, як правило, доступна для контактного вимірювання температури. Проте її температура істотно відрізняється від температури об'єкта. Перепад температури на поверхні покриття залежить від його товщини, теплофізичних і радіаційних характеристик матеріалу, а також від умов теплообміну покриття з об'єктом і з середовищем.

Температуру поверхні об'єкта під покриттям можна встановити розрахунковим способом з використанням даних вимірювання температури поверхні покриття контактним способом і відповідної математичної моделі теплообміну в системі «об'єкт – діелектричне покриття – зовнішнє середовище». За високих температур на тепловий стан системи істотно впливатиме радіаційний теплообмін. У цьому випадку температура поверхні покриття залежатиме як від потоків ІЧ-випромінювання в об'ємі покриття, так і від теплового випромінювання з поверхні у зовнішнє середовище [5].

Тому, щоб досягнути необхідної точності визначення температури об'єкта в такий спосіб, необхідно у математичній моделі врахувати як кондуктивний, так і радіаційний механізми теплообміну. Це істотно ускладнює задачу, оскільки потрібно розглядати систему рівнянь теплообміну, яка містить взаємозв'язані і нелінійні рівняння теплопровідності та перенесення випромінювання [3, 5, 8].

У цій статті розглянуто математичну модель для визначення температури плоскої поверхні об'єкту, покритої діелектричним шаром заданої товщини, за даними вимірювання температури вільної поверхні покриття. Поверхня обмінюється теплом із зовнішнім середовищем за радіаційним і конвективним механізмами, а протилежна поверхня покриття перебуває в ідеальному тепловому контакті з об'єктом. Для розв'язування задачі теплопровідності та перенесення випромінювання застосовано розроблений раніше ітераційний підхід, реалізований чисельно з використанням скінченно-елементної апроксимації [5, 8].

✉ v.chekurin@gmail.com

Отримані результати можна використати, зокрема, для розробки методики моніторингу температури поверхонь під теплоізоляційними покриттями в процесі експлуатації об'єктів.

1. Математична модель кондуктивно-променевого теплообміну. Розглянемо теплоізоляційний шар \mathcal{B} товщини $2b$, що розміщений на поверхні тіла \mathcal{B}_0 високої теплопровідності і перебуває з ним в ідеальному тепловому контакті (рис. 1).

Поверхню $y = -b$ контакту тіл \mathcal{B}_0 і \mathcal{B} вважаємо абсолютно чорною. Інша поверхня шару $y = b$ обмінюється теплом із зовнішнім середовищем (газ, температура якого дорівнює T_E) за конвективним і радіаційним механізмами. Приймаємо, що температура зовнішнього середовища T_E є малою порівняно з температурою T_0 поверхні $y = -b$ тіла \mathcal{B}_0 . Також приймаємо, що в зовнішньому середовищі ($y > b$) відсутні об'єкти, здатні відбивати ІЧ-радіацію, що виходить із тіла \mathcal{B} , чи випромінювати її, тому нехтуватимемо потоком радіації із зовнішнього середовища у тіло \mathcal{B} .

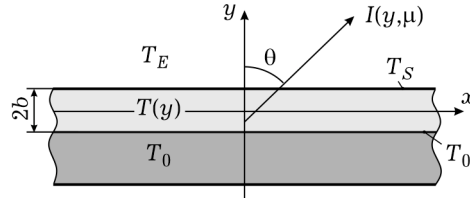


Рис. 1

За таких умов в об'ємі тіла \mathcal{B} встановлюється стаціонарне температурне поле $T = T(y)$, яке залежить лише від поперечної координати y і на поверхнях $y = b$, $y = -b$ набуває значень T_S та T_0 . Тут T_0 – температура поверхні тіла \mathcal{B}_0 , яку потрібно визначити, а T_S – значення температури, яке можна виміряти контактним способом.

Для опису теплового стану тіла \mathcal{B} застосуємо математичну модель, яка враховує кондуктивний і радіаційний механізми перенесення теплової енергії, розсіювання і поглинання ІЧ-випромінювання, як у його об'ємі, так і на поверхні [5, 8]. Ця модель містить взаємозв'язані рівняння теплопровідності (кондуктивний теплообмін)

$$\lambda \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} + 2\pi\alpha \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu - 4\pi\alpha I_B(T(y)) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (1)$$

і перенесення випромінювання (радіаційний теплообмін)

$$\mu \frac{\partial I(y, \mu)}{\partial y} + (\alpha + \sigma)I(y, \mu) - \alpha I_B(T(y)) - \frac{1}{2}\sigma \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu = 0, \quad (2)$$

які визначають теплообмін в об'ємі тіла \mathcal{B} у наближенні «сірого тіла» за стаціонарних умов [5, 8].

Ключовими функціями цієї моделі є температурне поле шару $T(y)$, яке залежить від поперечної координати y , та інтегральна інтенсивність ІЧ-випромінювання $I(y, \mu)$, залежна від координати y та напрямку поширення $\theta \in [0, 2\pi)$, визначеного параметром $\mu \equiv \cos \theta \in [-1, 1]$ (див. рис. 1).

Коефіцієнти рівнянь (1) і (2) мають такий зміст: λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу покриття, α та σ – коефіцієнти об'ємного поглинання і розсіювання середовища шару. Функція $I_B(T)$ визначена як

$$I_B(T) \equiv \sigma_{\text{SB}} n^2 T^4 / \pi,$$

де n – показник заломлення середовища шару, σ_{SB} – стала Стефана – Больцмана [3].

Другий доданок у рівнянні (1) враховує швидкість поглинання енергії ІЧ-випромінювання в одиниці об'єму тіла \mathcal{B} , а третій – швидкість втрати тілом енергії в об'ємі внаслідок випромінювання ним теплового електромагнітного поля. Сума цих двох доданків

$$g(y) \equiv 2\pi\alpha \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu - 4\pi\alpha I_B(T(y))$$

визначає локальну густину джерел тепла, які виникають в тілі \mathcal{B} внаслідок взаємодії матеріалу в об'ємі шару з тепловим електромагнітним полем. Інтенсивність локальних джерел $g(y)$ зменшується зі зниженням градієнтів температури. Звичайно в об'ємі тіл високої теплопровідності, наприклад у металах, $g(y) \approx 0$, оскільки зовнішнє теплове електромагнітне поле цілковито поглинається тонким поверхневим шаром матеріалу. Математичну модель, у якій покладають $g(y) = 0$, називають наближенням радіаційної рівноваги [3].

Рівняння (2) описує зміну інтенсивності випромінювання вздовж лінії його поширення (яку визначає параметр μ). Другий доданок у цьому рівнянні визначає зменшення інтенсивності випромінювання, яке поширюється у напрямку μ , зі зростанням координати y внаслідок його поглинання матеріалом (коефіцієнт α) і розсіювання на інші напрямки (коефіцієнт σ). Третій доданок визначає приріст $I(y, \mu)$ на напрямку μ у точці з координатою y , зумовлений випромінюванням теплового електромагнітного поля матеріальною точкою тіла з цією координатою (ця точка має температуру $T(y)$). Останній доданок у рівнянні (2) визначає приріст інтенсивності $I(y, \mu)$ внаслідок розсіювання з інших напрямків $\mu' \neq \mu$ на напрямку μ ¹.

На поверхні $y = -b$ тіла \mathcal{B} ключові функції $T(y)$ та $I(y, \mu)$ задовольняють співвідношення, що визначають умови його теплообміну із тілом \mathcal{B}_0 за умови ідеального теплового контакту з його поверхнею, яка є абсолютно чорною:

$$\begin{aligned} T|_{y=-b} &= T_0, \\ I|_{y=-b, \mu \in (0,1]} &= I_B(T_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Друге зі співвідношень (3) визначає інтегральну інтенсивність випромінювання, яке потрапляє в тіло \mathcal{B} з тіла \mathcal{B}_0 через поверхню $y = -b$. Оскільки ця поверхня є абсолютно чорною, то радіація, яку випромінює тіло \mathcal{B}_0 в область тіла \mathcal{B} , залежить лише від температури T_0 цієї поверхні.

Поверхню $y = b$ тіла розглядаємо як матеріальну поверхню \mathcal{S} , яка здатна ізотропно випромінювати, поглинати та розсіювати ІЧ-радіацію. Через цю поверхню відбувається обмін теплом і випромінюванням тіла \mathcal{B} із зовнішнім середовищем. На поверхні \mathcal{S} ключові функції $T(y)$ та $I(y, \mu)$ задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} \lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=b} &= -h(T_S - T_E) + 2\pi\epsilon(1 - \rho) \int_0^1 I_\mu d\mu \Big|_{y=b, \mu \in (0,1]} - \pi\epsilon I_B(T_S), \\ I|_{y=b, \mu \in [-1,0)} &= \epsilon I_B(T_S) + 2\rho \int_0^1 I|_{y=b} d\mu. \end{aligned} \quad (4)$$

¹ Розглядаємо випадок ізотропного розсіювання в об'ємі.

У співвідношеннях (4) використано такі позначення: h – коефіцієнт конвективного теплообміну, $\varepsilon \in (0,1)$ та $\rho \in (0,1)$ – коефіцієнти чорноти та розсіювання поверхні \mathcal{S} , які задовольняють умову $\varepsilon + \rho \leq 1$. Коефіцієнт пропускання поверхні визначається як $1 - \varepsilon - \rho$ [3].

Перше з рівнянь (4) виражає баланс енергії матеріальної поверхні \mathcal{S} . Воно містить доданки, які визначають: притік тепла до поверхні \mathcal{S} з об'єму тіла \mathcal{B} (ліва частина рівняння), втрату енергії поверхнею внаслідок конвективного теплообміну із середовищем (перший доданок у правій частині), притік енергії до поверхні \mathcal{S} внаслідок поглинання ІЧ-випромінювання, яка падає на неї з об'єму тіла \mathcal{B} (другий доданок у правій частині), а також втрату енергії поверхнею \mathcal{S} внаслідок випромінювання її матеріальними точками ІЧ-радіації у повному тілесному куті $\Omega = 4\pi$ (третій доданок у правій частині).

Друге з рівнянь (4) визначає значення інтенсивності випромінювання, яке поширюється від поверхні \mathcal{S} в об'єм тіла \mathcal{B} . Перший доданок у правій частині цього рівняння визначає випромінювання цієї поверхнею \mathcal{S} , яка має температуру T_S , в область тіла \mathcal{B} (у напрямках $\mu \in [-1,0)$). Другий доданок визначає внутрішнє випромінювання, що поширюється в області тіла в напрямках $\mu \in (0,1]$ і, досягнувши поверхні \mathcal{S} , розсіюється нею у зворотних напрямках $\mu \in [-1,0)^2$.

Співвідношення (1)–(4) визначають математичну модель складного (кондуктивно-променевого) теплообміну в теплоізоляційному покритті, яке обмінюється енергією із зовнішнім середовищем за кондуктивним, конвективним і радіаційним механізмами. Матеріал в об'ємі шару і на вільній поверхні здатен ізотропно випромінювати, поглинати і розсіювати ІЧ-радіацію.

Співвідношення (1), (2) складають нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь стосовно ключових функцій $T(y)$ та $I(y,\mu)$, якими визначаються процеси кондуктивного і променевого теплообміну та їхній взаємовплив в об'ємі тіла покриття $y \in (-b,b)$.

Співвідношення (3), (4) визначають взаємозв'язок ключових функцій $T(y)$ та $I(y,\mu)$ і враховують взаємовплив кондуктивного, радіаційного та конвективного механізмів теплообміну на поверхнях $y = \pm b$. Вони істотно нелінійні, оскільки містять функцію $I_B(T|_{y=\pm b})$ від значень ключової функції $T(y)$ на цих поверхнях.

2. Формулювання задачі. Введемо позначення

$$\begin{aligned} I^-(y,\mu) &\equiv I(y,\mu), & \mu &\in [-1,0), \\ I^+(y,\mu) &\equiv I(y,\mu), & \mu &\in (0,1], \quad y \in [-b,b], \end{aligned} \quad (5)$$

з урахуванням яких функція $I(y,\mu)$ визначиться як

$$I(y,\mu) = \begin{cases} I^-(y,\mu), & \mu \in [-1,0), \\ I^+(y,\mu), & \mu \in (0,1], \end{cases} \quad y \in [-b,b]. \quad (6)$$

Функції $I^+(y,\mu)$ і $I^-(y,\mu)$ задовольняють рівняння (2). Отже, замість двох рівнянь (1) і (2) отримуємо три взаємозв'язані рівняння стосовно трьох ключових функцій $T(y)$, $I^+(y,\mu)$ та $I^-(y,\mu)$:

² Розглядаємо випадок ізотропного розсіювання випромінювання поверхнею.

$$\lambda \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} + 2\pi\alpha \left(\int_{-1}^0 I^-(y, \mu) d\mu + \int_0^1 I^+(y, \mu) d\mu \right) - 4\pi\alpha I_B(T(y)) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^-(y, \mu)}{\partial y} + (\alpha + \sigma)I^-(y, \mu) - \alpha I_B(T(y)) - \\ - \frac{1}{2}\sigma \left(\int_{-1}^0 I^-(y, \mu) d\mu + \int_0^1 I^+(y, \mu) d\mu \right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^+(y, \mu)}{\partial y} + (\alpha + \sigma)I^+(y, \mu) - \alpha I_B(T(y)) - \\ - \frac{1}{2}\sigma \left(\int_{-1}^0 I^-(y, \mu) d\mu + \int_0^1 I^+(y, \mu) d\mu \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Диференціальний оператор рівняння (1) є другого порядку. За крайові умови для нього можна взяти перше зі співвідношень (3) і перше зі співвідношень (4), які з урахуванням позначень (5) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} T|_{y=-b} = T_0, \\ \lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=b} = -h(T|_{y=b} - T_E) + 2\pi\epsilon(1 - \rho) \int_0^1 I^+ \Big|_{y=b} \mu d\mu - \pi\epsilon I_B(T|_{y=b}). \end{aligned} \quad (10)$$

Рівняння (8) і (9) – диференціальні рівняння першого порядку за змінною y . Співвідношення (3)₂ та (4)₂ визначають крайові умови для цих рівнянь на поверхнях $y = -b$ та $y = b$ відповідно:

$$I^+ \Big|_{y=-b} = I_B(T_0), \quad (11)$$

$$I^- \Big|_{y=b} = \epsilon I_B(T|_{y=b}) + 2\rho \int_0^1 I^+ \Big|_{y=b} \mu d\mu. \quad (12)$$

Нехай температура T_0 відома. Тоді система звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку (7)–(9) разом із крайовими умовами (10)–(12) утворюють пряму крайову задачу для визначення температурного поля $T(y)$ та інтенсивностей випромінювання $I^+(y, \mu)$ та $I^-(y, \mu)$ за заданих значень температур T_0 і T_E об'єкта і зовнішнього середовища. Співвідношення (10)–(12) визначають чотири крайові умови для системи (7)–(9), дві з яких діють у точці $y = -b$, а інші дві – у точці $y = b$ відрізка визначення ключових функцій. Розв'язавши цю задачу, можемо обчислити, зокрема, температуру $T_S = T(b)$ вільної поверхні покриття.

Розглянемо тепер обернену задачу. Нехай відомі значення температур T_S і T_E поверхні \mathcal{S} і зовнішнього середовища. Потрібно визначити температуру T_0 поверхні $y = -b$. За таких вхідних даних замість крайових умов (10)–(12) маємо

$$\begin{aligned} T|_{y=b} = T_S, \\ \lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=b} = -h(T_S - T_E) + 2\pi\epsilon(1 - \rho) \int_0^1 I^+ \Big|_{y=b} \mu d\mu - \pi\epsilon I_B(T_S), \end{aligned} \quad (13)$$

$$I^+ \Big|_{y=-b} = I_B(T|_{y=-b}), \quad (14)$$

$$I^- \Big|_{y=b} = \epsilon I_B(T_S) + 2\rho \int_0^1 I^+ \Big|_{y=b} \mu d\mu. \quad (15)$$

Як бачимо, задача істотно змінилася. Якщо у прямій задачі крайові умови (10) на ключову функцію $T(y)$ визначені на обох кінцях $y = b$ і $y = -b$ відрізка її визначення, то в оберненій задачі обидві умови (13) діють на кінці $y = b$. Умова (11) на ключову функцію $I^+(y, \mu)$ цілком визначає її значення на кінці $y = -b$, тоді як умова (14) лише встановлює співвідношення між значеннями ключових функцій $I^+(y, \mu)$ та $T(y)$ у точці $y = -b$. Умовами (12) встановлюється співвідношення у точці $y = b$ між усіма трьома ключовими функціями, $I^-(y, \mu)$, $I^+(y, \mu)$ та $T(y)$, а умовою (15) – лише між двома: $I^-(y, \mu)$ та $I^+(y, \mu)$. Тепер із чотирьох крайових умов лише одна діє на поверхні $y = -b$, решта три – на поверхні $y = b$.

Розв'язавши обернену задачу (7)–(9), (13)–(15), можемо обчислити, зокрема, значення температури $T_0 = T(-b)$, що є розв'язком задачі про визначення температури поверхні об'єкта під теплоізоляційним покриттям.

Ітераційний метод розв'язування задачі (7)–(12) розглянутий у публікаціях [5, 8]. Далі зупинимося на розгляді задачі (7)–(9), (13)–(15).

3. Зведення задачі до безрозмірної форми. Введемо безрозмірну просторову координату $\bar{y} = \beta y$, нормовану на оптичну товщину $\ell_0 = 1/\beta$, де $\beta \equiv \alpha + \sigma$, а також нормовані температуру та інтенсивність випромінювання:

$$\bar{T}(\bar{y}) \equiv \frac{T(\beta y)}{T_S}, \quad J^\pm(\bar{y}, \mu) \equiv \frac{I^\pm(\beta y)}{I_B(T_S)},$$

і нормовані коефіцієнти

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda \beta}{\sigma_{SB} n^2 T_S^3}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\beta}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\sigma_{SB} n^2 T_S^3}.$$

У безрозмірних змінних рівняння (7)–(9) і крайові умови (13)–(15) набудуть вигляду

$$-\bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} - 2\bar{\alpha} \left(\int_{-1}^0 J^-(\bar{y}, \mu) d\mu + \int_0^1 J^+(\bar{y}, \mu) d\mu - 2\bar{T}^4(\bar{y}) \right) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial J^-(\bar{y}, \mu)}{\partial \bar{y}} + J^-(\bar{y}, \mu) - \bar{\alpha} \bar{T}^4(\bar{y}) - \\ - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \left(\int_{-1}^0 I^-(\bar{y}, \mu) d\mu + \int_0^1 I^+(\bar{y}, \mu) d\mu \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial J^+(\bar{y}, \mu)}{\partial \bar{y}} + J^+(\bar{y}, \mu) - \bar{\alpha} \bar{T}^4(\bar{y}) - \\ - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \left(\int_{-1}^0 I^-(\bar{y}, \mu) d\mu + \int_0^1 I^+(\bar{y}, \mu) d\mu \right) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{T}|_{\bar{y}=\bar{b}} = 1,$$

$$-\bar{\lambda} \left. \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \right|_{\bar{y}=\bar{b}} = \bar{h} (1 - \bar{T}_E) - \varepsilon \left(2(1 - \rho) \int_0^1 J^+|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu - 1 \right), \quad (19)$$

$$J^+|_{\bar{y}=\bar{b}} = \bar{T}^4|_{\bar{y}=\bar{b}}, \quad (20)$$

$$J^-|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon + 2\rho \int_0^1 J^+|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu. \quad (21)$$

Розв'язавши задачу (16)–(21), знайдемо ключові функції $\bar{T}(\bar{y})$, $J^+(\bar{y}, \mu)$ та $J^-(\bar{y}, \mu)$, потім обчислимо $\bar{T}_0 = \bar{T}(-b)$, звідки визначасмо розв'язок оберненої задачі $T_0 = T_S \bar{T}_0$.

4. Ітераційний метод розв'язування оберненої задачі. Крайова задача (16)–(21) є істотно нелінійною, оскільки рівняння (16)–(18), а також крайова умова (20) містять ключову функцію $\bar{T}(\bar{y})$ у четвертому степені. До того ж і рівняння, і крайові умови містять нелокальні складові – інтеграли від ключових функцій $J^+(\bar{y}, \mu)$ та $J^-(\bar{y}, \mu)$ за змінною μ , яка визначає напрям поширення випромінювання в шарі. Тому розв'язуємо цю задачу ітераційним методом, що дозволить звести її до послідовності лінійних крайових задач.

Як уже зазначалося, у публікаціях [5, 8] запропоновано ітераційний метод розв'язування крайової задачі (7)–(12). Модифікуємо його для задачі (16)–(21).

Введемо позначення

$$\Theta(\bar{T}, J^+, J^-) = \frac{2\bar{x}}{\lambda} \left(2(\bar{T}(\bar{y}))^4 - \int_{-1}^0 J^-(\bar{y}, \mu) d\mu - \int_0^1 J^+(\bar{y}, \mu) d\mu \right), \quad (22)$$

$$F(\bar{T}, J^+, J^-) = \bar{x}(\bar{T}(\bar{y}))^4 + \frac{1}{2}(1 - \bar{x}) \left(\int_{-1}^0 J^-(\bar{y}, \mu) d\mu + \int_0^1 J^+(\bar{y}, \mu) d\mu \right), \quad (23)$$

$$q \left(J^+ \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right) = -\frac{\varepsilon}{\lambda} \left[1 - 2(1 - \rho) \int_0^1 J^+ \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu \right] - \frac{\bar{h}}{\lambda} (1 - \bar{T}_E). \quad (24)$$

З використанням позначень (22)–(24) систему рівнянь (16)–(18) зведемо до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{y}^2} &= \Theta(\bar{T}, J^+, J^-), \\ \mu \frac{\partial J^+}{\partial \bar{y}} + J^+ &= F(\bar{T}, J^+, J^-), \quad \mu \frac{\partial J^-}{\partial \bar{y}} + J^- = F(\bar{T}, J^+, J^-). \end{aligned} \quad (25)$$

Крайові умови (19) (на ключову функцію $\bar{T}(\bar{y})$) перепишемо так:

$$\bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = 1, \quad \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = q \left(J^+ \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right), \quad (26)$$

а крайові умови (20) і (21) (на ключові функції $J^-(\bar{y}, \mu)$ та $J^+(\bar{y}, \mu)$) залишаються без змін:

$$J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = \bar{T}^4 \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}}, \quad J^- \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon + 2\rho \int_0^1 J^+ d\mu \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}. \quad (27)$$

Розглянемо формулу (22). Вираз у дужках у правій частині (22) визначає густину джерел тепла $g(y)$ в об'ємі тіла, які виникають внаслідок процесів поглинання та випромінювання матеріалом теплового електромагнітного поля. Як зазначалося раніше, за достатньо низьких градієнтів температурного поля величина $g(y)$ може бути достатньо малою. Тоді локальний тепловий стан тіла буде близьким до радіаційної рівноваги. За таких умов розв'язок задачі (25)–(27) можна шукати за допомогою відповідного ітераційного процесу.

Виходячи з рівнянь (25), запишемо

$$\frac{d^2 \bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}^2} = \Theta^{(k)}(\bar{y}),$$

$$\mu \frac{\partial J^{+(k+1)}}{\partial \bar{y}} + J^{+(k+1)} = F^{(k)}(\bar{y}), \quad \mu \frac{\partial J^{-(k+1)}}{\partial \bar{y}} + J^{-(k+1)} = F^{(k)}(\bar{y}), \quad (28)$$

а крайові умови (26), (27) в ітераційній формі матимуть вигляд

$$\bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = 1, \quad \frac{d\bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = q^{(k)}, \quad (29)$$

$$J^{+(k+1)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = (\bar{T}_0^{(k)})^4, \quad J^{-(k+1)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon + 2\rho J_S^{+(k+1)}. \quad (30)$$

У формулах (28)–(30) використано позначення:

$$\Theta^{(k)}(\bar{y}) \equiv \Theta(\bar{T}^{(k)}, J^{+(k)}, J^{-(k)}), \quad F^{(k)}(\bar{y}) \equiv F(\bar{T}^{(k)}, J^{+(k)}, J^{-(k)}),$$

$$q^{(k)} \equiv q\left(J_S^{+(k)}\right), \quad J_S^{+(k)} \equiv \int_0^1 J^{+(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} d\mu, \quad \bar{T}_0^{(k)} \equiv \bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}},$$

$$\bar{T}^{(k)} \equiv \bar{T}^{(k)}(\bar{y}), \quad J^{-(k)} \equiv J^{-(k)}(\bar{y}, \mu), \quad J^{+(k)} \equiv J^{+(k)}(\bar{y}, \mu), \quad (31)$$

верхній індекс у дужках вказує номер ітерації.

На кожній ітерації отримали три незалежні лінійні задачі Коші: перша – для рівняння другого порядку, а дві інші – для рівнянь першого порядку. Розв'язки цих задач в квадратурах легко отримати:

$$\bar{T}^{(k+1)}(\bar{y}) = \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} (\bar{y} - \bar{x}) \Theta^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x} - q^{(k)}(\bar{b} - \bar{y}) + 1, \quad (32)$$

$$J^{+(k+1)}(\bar{y}, \mu) = (\bar{T}_0^{(k)})^4 \exp\left(-\frac{\bar{b} + \bar{y}}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu} \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} F^{(k)}(\bar{x}) \exp\left(-\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\mu}\right) d\bar{x},$$

$$\mu \in (0, 1], \quad (33)$$

$$J^{-(k+1)}(\bar{y}, \mu) = (\varepsilon + 2\rho J_S^{+(k)}) \exp\left(\frac{\bar{b} - \bar{y}}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu} \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} F^{(k)}(\bar{x}) \exp\left(-\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\mu}\right) d\bar{x},$$

$$\mu \in [-1, 0). \quad (34)$$

Щоб реалізувати ітераційний процес за формулами (32)–(34), необхідно вибрати початкове наближення. З цією метою розглянемо розв'язки задач Коші для випадку радіаційної рівноваги, коли $\Theta^{(0)} = 0$. Тоді, щоб скористатися формулою (32) для обчислення $\bar{T}^{(0)}(\bar{y})$, необхідно додатково задати певне значення параметра $q^{(0)}$, яким визначається градієнт температури у такому стані. Виразимо $q^{(0)}$ через очікуване значення $\bar{T}_0^{(0)}$ температури поверхні контакту: $q^{(0)} = (\bar{T}_0^{(0)} - 1)/2\bar{b}$. В результаті маємо

$$\bar{T}^{(0)}(\bar{y}) = \frac{\bar{T}_0^{(0)} - 1}{2\bar{b}} (\bar{b} - \bar{y}) + 1. \quad (35)$$

Далі застосуємо формулу (33), щоб обчислити $J^{+(1)}(\bar{y}, \mu)$. Легко переконатися, що у наближенні радіаційної рівноваги маємо $F^{(0)}(\bar{y}) = (\bar{T}^{(0)}(\bar{y}))^4$. З урахуванням цього отримуємо

$$\begin{aligned}
J^{+(1)}(\bar{y}, \mu) &= (\bar{T}_0^{(0)})^4 \exp\left(-\frac{\bar{b} + \bar{y}}{\mu}\right) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \left(\frac{\bar{T}_0^{(0)} - 1}{2\bar{b}}(\bar{b} - \bar{x}) + 1\right)^4 \exp\left(-\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\mu}\right) d\bar{x}, \\
\mu &\in (0, 1]. \tag{36}
\end{aligned}$$

Формулу (35) застосуємо, щоб обчислити параметр $J_S^{+(1)}$, який визначає праву частину крайової умови (30)₂. Згідно з формулою (31)₄, маємо

$$\begin{aligned}
J_S^{+(1)} &= (\bar{T}_0^{(0)})^4 (\exp(-2\bar{b}) + 2\bar{b} \operatorname{Ei}(-2\bar{b})) - \\
&- \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \left(\frac{\bar{T}_0^{(0)} - 1}{2\bar{b}}(\bar{b} - \bar{x}) + 1\right)^4 \operatorname{Ei}(\bar{x} - \bar{b}) d\bar{x}. \tag{37}
\end{aligned}$$

Тут $\operatorname{Ei}(\cdot)$ – інтегральна експоненціальна функція.

Обчисливши параметр $J_S^{+(1)}$, тепер за формулою (34) можемо визначити перше наближення ключової функції $J^{-(1)}(\bar{y}, \mu)$:

$$\begin{aligned}
J^{-(1)}(\bar{y}, \mu) &= \left(\varepsilon + 2\rho J_S^{+(1)}\right) \exp\left(\frac{\bar{b} - \bar{y}}{\mu}\right) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} \left(\frac{\bar{T}_0^{(0)} - 1}{2\bar{b}}(\bar{b} - \bar{y}) + 1\right)^4 \exp\left(-\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\mu}\right) d\bar{x}, \\
\mu &\in [-1, 0). \tag{38}
\end{aligned}$$

Як бачимо, за запропонованим підходом, щоб стартувати ітераційний процес, достатньо задати лише початкове наближення $\bar{T}_0^{(0)}$ для температури \bar{T}_0 .

Використовуючи отримане перше наближення розв'язку $\bar{T}^{(1)}(\bar{y})$, $J^{+(1)}(\bar{y}, \mu)$, $J^{-(1)}(\bar{y}, \mu)$, ітераційний процес можемо продовжити, визначаючи за формулами (32)–(34) наступні наближення. Проте аналітичні обчислення вимагають послідовного багаторазового інтегрування складних виразів, що пов'язано зі значними обчислювальними затратами. Тому набагато ефективніше реалізувати ітераційний процес, що базується на формулах (32)–(34), із застосуванням чисельних методів.

Такий підхід опрацьовано для розв'язування прямої задачі типу (7)–(12). Він був реалізований шляхом скінченно-елементної апроксимації ключових функцій за змінною \bar{y} із використанням лінійних пробних функцій [5, 8]. В результаті, щоб отримати розв'язок на k -ітерації за формулами (32)–(34), замість k -разового інтегрування треба обчислити відповідні скінченні суми.

5. Чисельні дослідження. Ефективність запропонованого підходу до визначення температури поверхні тіла, покритої теплоізоляційним шаром, за відомим значенням температури поверхні покриття, оцінювали з використанням числових експериментів.

З цією метою задавали певні значення температури \bar{T}_0 цієї поверхні та температури \bar{T}_E зовнішнього середовища і за цими даними розв'язували пряму задачу (7)–(12), використовуючи алгоритм, описаний у публікаціях [5, 8]. За знайденим розв'язком визначали температуру T_S , яку використо-

ували в оберненій задачі (16)–(21) як «вимірне значення» температури поверхні покриття.

Під час обчислень відрізок $[-\bar{b}, \bar{b}]$ визначення ключових функцій задачі розбивали на $N = 100$ скінченних елементів. Проведені дослідження підтвердили високу обчислювальну ефективність запропонованого алгоритму: ітераційний процес із точністю 0.005 збігається вже за 5 кроків.

Для досліджень за матеріал покриття (товщини $2b = 2$ мм) вибрали Al_2O_3 з такими теплофізичними і радіаційними характеристиками [6, 7]: коефіцієнт конвективного теплообміну $h = 5$ Вт/(м²·К), коефіцієнт поглинання $\alpha = 1130$ м⁻¹, коефіцієнт розсіювання $\sigma = 115$ м⁻¹, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 6$ Вт/(м·К) і показник заломлення $n = 1.75$. Обчислення виконано для значення температури зовнішнього середовища $T_E = 300$ К.

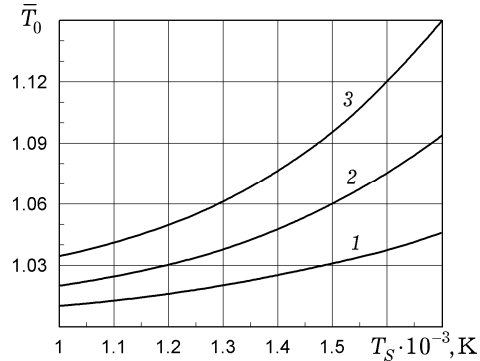


Рис. 2

Деякі результати проведених розрахунків подано на рис. 2 – рис. 4.

Залежності нормованої температури \bar{T}_0 поверхні об'єкта \mathcal{B}_0 від температури T_S поверхні покриття на рис. 2 наведено для значень коефіцієнта чорноти $\varepsilon = 0.2, 0.5, 0.9$ поверхні покриття (криві **1, 2, 3** відповідно), на рис. 3 – для значень коефіцієнта відбиття $\rho = 0.2, 0.5, 0.9$ поверхні покриття \mathcal{S} (криві **1, 2, 3** відповідно), на рис. 4 – для значень коефіцієнта теплопровідності покриття $\lambda = 6, 10, 20$ [Вт/(м·К)] (криві **1, 2, 3**).

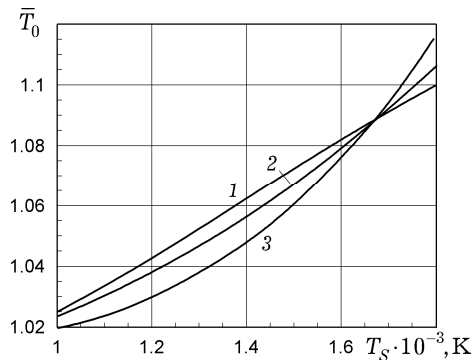


Рис. 3

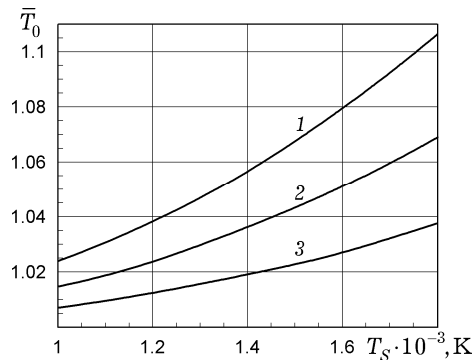


Рис. 4

Аналізуючи обчислені залежності, можемо простежити істотний вплив поверхневих радіаційних властивостей (коефіцієнтів чорноти ε і розсіювання ρ), а також теплопровідності матеріалу покриття λ на перепад температури, який виникає між поверхнею об'єкта \mathcal{B}_0 та поверхнею охолодження \mathcal{S} .

Висновки. Побудовано нелінійну математичну модель і сформульовано відповідну обернену задачу для визначення температури поверхні тіла високої теплопровідності, покритої теплоізоляційним шаром заданої товщини, за даними вимірювання температури вільної поверхні покриття і температури зовнішнього середовища, з яким це покриття обмінюється теплом. Модель враховує кондуктивний і променевий механізми теплоперенесення в об'ємі шару, кондуктивний і радіаційний теплообмін на поверхні його контакту з об'єктом, конвективний і променевий теплообмін із зовнішнім середовищем вільної поверхні покриття, яка здатна випромінювати, поглина-

ти і розсіювати теплове електромагнітне поле. Розроблено ітераційний алгоритм розв'язування сформульованої задачі.

З використанням числових експериментів проведено кількісні дослідження впливу поверхневих радіаційних властивостей покриття (коефіцієнтів чорноти ε і відбиття ρ) і його теплопровідності λ на процеси теплообміну в шарі, а також на температуру поверхні T_0 під покриттям, яка підлягає визначенню.

Встановлено, що радіаційна складова істотно впливає на температурне поле, яке виникає в об'ємі покриття, а отже, і на температуру T_0 , яку слід визначити. Виявлено також істотний вплив на T_0 теплопровідності і поверхневих радіаційних властивостей покриття.

Проведеними числовими експериментами підтверджено обчислювальну ефективність запропонованого ітераційного алгоритму (достатньо висока точність досягається за малих часових затрат).

Запропоновані математичну модель, метод розв'язування задачі та алгоритм його чисельної реалізації можна використати для розробки розрахунково-експериментального способу визначення температури поверхні об'єкта, покритої теплоізоляційним шаром, за результатами вимірювання температур T_S і T_E поверхні покриття і середовища.

1. *Бородай М. В., Коломієць І. Д., Бородай Д. М.* Дослідження впливу температури на оптичні характеристики теплозахисної ізоляції космічного корабля багаторазового використання // Вимір. та обчисл. техніка в технологічних процесах. – 2011. – № 1. – С. 29–34.
2. *Гусарова І. А., Манько Т. А.* Изучение теплоизоляционных свойств термостойких материалов для возвращаемых космических аппаратов // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Ракетно-косм. техніка. – 2014. – Вип. 17, т. 1. – С. 35–41.
3. *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен. – Москва: Мир, 1976. – 606 с.
Te same: *Özsisik M. N.* Radiative transfer and interactions with conduction and convection. – New York: Wiley Intersci. Publ., 1973. – 592 p.
4. *Розененкова В. А., Миронова Н. А., Солнцев С. С., Гаврилов С. В.* Керамические покрытия для градиентных высокотемпературных теплозащитных материалов // Стекло и керамика. – 2013. – № 1. – С. 29–32.
5. *Чекурін В. Ф., Бойчук Ю. В.* Математична модель для емісійної ІЧ-томографії температурного поля в ізотропному шарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 1. – С. 171–182.
Te same: *Chekurin V. F., Boichuk Yu. V.* Mathematical model for the emission infrared tomography of the temperature field in an isotropic layer // J. Math. Sci. – 2018. – **229**, No. 3. – P. 320–334.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3680-9>.
6. *Шелудяк Ю. Е., Кашпоров Л. Я., Малинин Л. А., Цалков В. Н.* Теплофизические свойства компонентов горючих систем: Справочник / Под ред. Н. А. Силина. – Москва: НПО «Информ ТЭИ», 1992. – 184 с.
7. *Bityukov V. K., Petrov V. A.* Absorption coefficient of molten aluminum oxide in semitransparent spectral range // Appl. Phys. Res. – 2013. – **5**, № 1. – P. 51–71.
– <https://doi.org/10.5539/apr.v5n1p51>.
8. *Chekurin V., Boichuk Yu.* An iterative method for solving of coupled equations for conductive-radiative heat transfer in dielectric layers // Adv. Math. Phys. – 2017. – **2017**. – Article ID 9139135. – 11 p. – <https://doi.org/10.1155/2017/9139135>.
9. *Daryabeigi K., Cunnington G. R., Knutson J. R.* Combined heat transfer in high-porosity high-temperature fibrous insulation: Theory and experimental validation // J. Thermophys. Heat Transfer. – 2011. – **25**, No. 4. – P. 536–546.
– <https://doi.org/10.2514/1.T3616>.
10. *Dehghan M., Rahmani Y., Ganji D. D., Saedodin S., Valipour M. S., Rashidi S.* Convection-radiation heat transfer in solar heat exchangers filled with a porous medium: Homotopy perturbation method versus numerical analysis // Renewable Energy. – 2015. – **74**. – P. 448–455.
– <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.08.044>.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ, ПОКРЫТОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫМ СЛОЕМ

Рассмотрена математическая модель для определения температуры поверхности, покрытой тонким теплоизоляционным слоем, по данным измерения значений температур свободной поверхности покрытия и внешней среды. В модели учтены кондуктивный и радиационный механизмы переноса энергии в объеме слоя, кондуктивный и радиационный теплообмен с поверхностью, которую он покрывает, конвективный и радиационный теплообмен с внешней средой на свободной поверхности покрытия, которая способна излучать, поглощать и отражать тепловое электромагнитное поле. Приведены результаты численных исследований решений нелинейной задачи на основе разработанного итерационного метода.

Ключевые слова: сложный теплообмен, математическая модель, нелинейные задачи, итерационный метод.

MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING THE TEMPERATURE OF SURFACE COATED WITH A HEAT-INSULATING LAYER

Mathematical model for determining the temperature of the surface covered with a thin heat-insulating layer, according to the data obtained by measuring the temperatures of the free surface of the coating and the external medium is considered. The model takes into account the conductive and radiative mechanisms of energy transfer in the volume of the layer, conductive and radiative heat exchange with the surface that it covers, convective and radiative heat exchange with the external environment on the free surface of the coating, which is able to emit, absorb and reflect the thermal electromagnetic radiation. The results of numerical investigations of the solutions of nonlinear problem on the basis of developed iterative method are presented.

Key words: complex heat transfer, mathematical model, nonlinear problems, iterative method.