

### 3D DYNAMIC ANALYSIS OF LAYERED ELASTIC SHELLS

*Three-dimensional dynamic problem for a layered orthotropic elastic shell with free upper face is considered. The interfaces between the layers are assumed to be in perfect contact and the displacements on one of the interfaces are prescribed. A long-wave asymptotic solution is constructed and the thickness resonances are determined. The obtained results can be applied in evaluation of certain parameters of earthquakes.*

**Key words:** 3D elastodynamics, layered shell, asymptotic method.

**Introduction.** Mathematical modeling of thin elastic multi-layered solids with various boundary conditions on the faces is of significant importance for many applications. Among the latter we mention the theories related to earthquake prediction [19, 22, 25], relying on the data of displacements measured at certain points of the region under investigation. It is emphasized that restoration of associated dynamic parameters of the stress-strain state using the measured discrete data and taking into account possible curvature of the layers is of crucial importance for seismological theories.

Problems of mechanics of multi-layered elastic plates and shells with non-classical boundary conditions, i.e. conditions imposed not only on the stress tensor component, have been studied in various publications, see e.g. a monograph [6], as well as journal papers including both analyses of free [1, 7, 8] and forced vibrations [2, 9, 14]. We also mention important contributions to the study of free vibrations of single-layer plates and shells in the case where one or both faces is fixed [15, 17, 20, 23, 26]. The associated long-wave high-frequency motions, investigated in these papers, have also been thoroughly studied in the case of classical boundary conditions (formulated in terms of stresses), see [3, 5, 21].

The current paper is devoted to the further developing results obtained in the above-mentioned works. The approach relies on the asymptotic method, widely used in statics and dynamics of thin-walled elastic structures, see e.g. [4, 16], as well as recent monographs [10, 25], and publications [11–13, 18, 24] to name a few, accounting for the effects of pre-stress, nonlocality, high contrast, and also in contact problems for coated solids.

The asymptotic technique employed in this paper starts with a scaling typical for non-classical face boundary conditions. 3D dynamic problems for two- and three-layered elastic orthotropic shells with a traction-free upper face are considered. In addition, it is assumed that the displacements are prescribed on one of the contact surfaces between the layers; in particular, for a two-layered shell they are imposed on the contact surface between the first and second layers, whereas for a three-layered shell both situations are considered, namely when the displacements are given on the contact surface between the first and second layers, and between second and third layers. The layers are supposed to be in perfect contact. Within the current consideration, it is also assumed that the wave length exceeds substantially the thickness, thus providing a natural geometrical small parameter. The frequency range covers the thickness resonances. The parameters of the stress-strain state are expanded into asymptotic series. The iterative formulae for the coefficients of these series are derived. It is remarked that in the case of the excitation frequency coinciding with one of the thickness resonant frequencies, further investigation is required, according to the procedure

---

✉ d.prikazchikov@keele.ac.uk

presented in [15] etc. Explicit asymptotic results for the displacements are obtained, which could be useful for estimates of certain parameters of earthquakes.

**1. Forced vibrations of a two-layered elastic shell.** Consider a two-layered elastic orthotropic shell (Fig. 1), occupying the domain  $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, 0 \leq \gamma \leq h_1 + h_2\}$ , where  $D_0$  is the face surface of the first layer,  $\alpha, \beta$  are lines of curvature of the surface  $D_0$ ,  $\gamma$  is rectangular axis directed downward to the surface  $D_0$ . The non-trivial solutions are sought for the problem of elastodynamics in the given triorthogonal coordinate system. The shell is under non-classical boundary conditions (which will be formulated below). In order to reduce the length of algebraic computations, the analysis below is presented in terms of the components  $\tau_{ij}$  of non-symmetric stress tensor, see [4, 25].

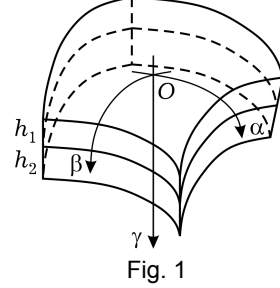


Fig. 1

The formulation of the problem includes:

– *equations of motion*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \tau_{\alpha\alpha}^{(j)}) - k_{\beta} \tau_{\beta\beta}^{(j)} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (A \tau_{\beta\alpha}^{(j)}) + k_{\alpha} \tau_{\alpha\beta}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial \gamma} + \\ & + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1} = \rho^{(j)} \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial^2 U^{(j)}}{\partial t^2}, \\ & (A \leftrightarrow B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1, R_2; U, V), \quad j = \mathbf{I}, \mathbf{II}, \\ & \frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial \gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right) + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial \beta} + \\ & + k_{\beta} \tau_{\alpha\gamma}^{(j)} + k_{\alpha} \tau_{\beta\gamma}^{(j)} = \rho^{(j)} \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \tau_{\alpha\beta}^{(j)} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau_{\beta\alpha}^{(j)} \quad (\text{symmetry relation});$$

– *constitutive relations for an orthotropic elastic solid:*

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \alpha} + k_{\alpha} V^{(j)} + \frac{W^{(j)}}{R_1}\right) = \\ & = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{11}^{(j)} \tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) a_{12}^{(j)} \tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}, \\ & (A, B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U \leftrightarrow V; a_{11}, a_{22}; a_{13}, a_{23}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\gamma^2}{R_1 R_2}\right] \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \gamma} = \\ & = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{13}^{(j)} \tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) a_{23}^{(j)} \tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \beta} - k_{\beta} V^{(j)}\right) + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial \alpha} - k_{\alpha} U^{(j)}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{66}^{(j)} \tau_{\alpha\beta}^{(j)}, \\
&\left[1 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\gamma^2}{R_1 R_2}\right] \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \gamma} - \\
&\quad - \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{U^{(j)}}{R_1} + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{55}^{(j)} \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}, \\
&(A, B; \alpha, \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U, V; a_{55}, a_{44}), \tag{2}
\end{aligned}$$

where  $k_\alpha, k_\beta$  denote geodesic curvatures,  $A, B$  are coefficients of the first quadratic form,  $R_1, R_2$  are main curvature radii of surface  $D_0$ ,  $\rho^{(j)}$  are mass volume densities of the layers,  $a_{ik}^{(j)}$  are elastic constants,  $a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$ , and  $j$  is number of the layer.

Let the upper face  $\gamma = 0$  be traction-free:

$$\tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, 0, t) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, 0, t) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, 0, t) = 0, \tag{3}$$

and assume that on the contact surface between the first and second layers the prescribed displacements are given by:

$$U^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^+(\alpha, \beta) \exp(i\Omega t), \quad (U, V, W), \tag{4}$$

where  $\Omega$  is a given excitation frequency of forced vibrations. Perfect contact between the layers is assumed:

$$\tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, h_1, t) = \tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\gamma}), \tag{5}$$

$$U^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (U, V, W). \tag{6}$$

If the displacements were prescribed on the traction-free surface, then in addition to conditions (3) the equation

$$U^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, 0, t) = U^+(\alpha, \beta) \exp(i\Omega t), \quad (U, V, W),$$

should hold, i.e. at  $\gamma = 0$  there would be six conditions, whereas in classical elasticity there are usually only three conditions. Also, at  $\gamma = h_1$ , conditions (5), (6) should hold, as well as three more conditions (4), so once again we have non-classical boundary conditions. As demonstrated in [7], the solution of the formulated boundary value problem always exists, moreover, it coincides with the solution of some problem with classical boundary conditions.

Let us introduce the scaling

$$\alpha = R\xi, \quad \beta = R\eta, \quad \gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta,$$

$$U = Ru, \quad V = Rv, \quad W = Rv, \quad \tau_{mk}^{(j)} = \mu \tilde{\tau}_{mk}^{(j)}, \quad \rho^{(j)} = \rho \tilde{\rho}^{(j)},$$

where  $R$  is a typical linear size of the shell, total thickness  $h = h_1 + h_2$  (e.g. the least of the radii of curvature and associated with linear sizes of surface  $D_0$ ,  $h \ll R$ ),  $\mu$  and  $\rho$  are typical values of elastic moduli and density, respectively, and

$$\varepsilon = h/R$$

as a small geometrical parameter.

The solutions are sought for in the form:

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(j)} = \mathcal{Q}_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t) \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad m, k = 1, 2, 3, \quad j = \mathbf{I}, \mathbf{II}, \tag{7}$$

where  $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$  denotes any of the stress or displacement components. As a result, we arrive at a singularly perturbed system with respect to  $Q_{mk}^{(j)}$  with a small parameter  $\varepsilon$ . The stresses and displacements are now represented in asymptotic form as

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) &= \varepsilon^{-1+s} \tilde{\tau}_{mk}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1, 2, 3, \quad s = 0, \dots, N, \quad j = \mathbf{I}, \mathbf{II}, \\ (u^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)) &= \\ &= \varepsilon^s (u^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta)).\end{aligned}\quad (8)$$

As follows from (8), there is a significant distinction from the conventional classical problem, related to relative orders, in particular, all stress components are asymptotically of the same order, and so are all displacements, therefore the traditional assumptions of plate and shell theory are invalid.

Substituting (8) into the dimensionless forms of the governing equations (1), (2), we arrive at a system of the equations for determining the unknown coefficients of expansion  $Q_{mk}^{(j,s)}$  in the form

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{12}^{(j,s)} &= P_{1\tau}^{(j,s-1)}, \quad \tilde{\tau}_{21}^{(j,s)} = P_{1\tau}^{(j,s-1)} - r_2 \zeta \tilde{\tau}_{21}^{(j,s-1)} + r_1 \zeta \tilde{\tau}_{12}^{(j,s-1)}, \\ e_1^{(j,s)} &= P_{2\tau}^{(j,s-1)}, \quad e_2^{(j,s)} = P_{3\tau}^{(j,s-1)}, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{13}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\Omega}_*^2 \tilde{\rho}^{(j)} u^{(j,s)} &= P_{6\tau}^{(j,s-1)}, \quad \tilde{\Omega}_*^2 = \frac{\rho}{\mu} h^2 \Omega^2, \quad \tilde{a}_{mk}^{(j)} = \mu a_{mk}^{(j)}, \\ (13, 23, 33; \quad u, v, w; \quad 6\tau, 5\tau, 4\tau), \\ \frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \zeta} - \tilde{a}_{55}^{(j)} \tilde{\tau}_{13}^{(j,s)} &= P_u^{(j,s-1)}, \quad \frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial \zeta} - \tilde{a}_{44}^{(j)} \tilde{\tau}_{23}^{(j,s)} = P_v^{(j,s-1)}, \\ \frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial \zeta} - e_3^{(j,s)} &= P_w^{(j,s-1)},\end{aligned}\quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}P_{1\tau}^{(j,s-1)} &= \frac{1}{\tilde{a}_{66}^{(j)}} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R v^{(j,s-1)} + \right. \\ &\quad + r_1 \zeta \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \eta} - k_\beta R v^{(j,s-2)} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(j,s-1)} + \\ &\quad \left. + r_2 \zeta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(j,s-2)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(j,s-2)} \right) - r_1 \zeta \tilde{a}_{66}^{(j)} \tilde{\tau}_{12}^{(j,s-1)} \right], \\ P_{2\tau}^{(j,s-1)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + k_\alpha R v^{(j,s-1)} + r_1 w^{(j,s-1)} - r_1 \zeta \tilde{a}_{11}^{(j)} \tilde{\tau}_{11}^{(j,s-1)} + \\ &\quad + r_2 \zeta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \xi} + k_\alpha R v^{(j,s-2)} + r_1 w^{(j,s-2)} \right) - \\ &\quad - r_2 \zeta \tilde{a}_{12}^{(j)} \tilde{\tau}_{22}^{(j,s-1)}, \\ (2\tau, 3\tau; \quad A, B; \quad \alpha, \beta; \quad r_1 \leftrightarrow r_2; \quad \xi, \eta; \quad u \leftrightarrow v; \quad \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22}; \quad a_{11}, a_{22});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{4\tau}^{(j,s-1)} &= r_1 \tilde{\tau}_{11}^{(j,s-1)} + r_2 \tilde{\tau}_{22}^{(j,s-1)} - \frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{\tau}_{13}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{\tau}_{23}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R \tilde{\tau}_{13}^{(j,s-1)} - \\
&\quad - k_\alpha R \tilde{\tau}_{23}^{(j,s-1)} - \tilde{\rho}^{(j)} (r_1 + r_2) \zeta \tilde{\Omega}_*^2 w^{(j,s-1)} - \tilde{\rho}^{(j)} r_1 r_2 \zeta^2 \tilde{\Omega}_*^2 w^{(j,s-2)}, \\
P_{5\tau}^{(j,s-1)} &= -\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \eta} (A \tilde{\tau}_{22}^{(j,s-1)}) + k_\alpha R \tilde{\tau}_{11}^{(j,s-1)} - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \xi} (B \tilde{\tau}_{12}^{(j,s-1)}) - \\
&\quad - k_\beta R \tilde{\tau}_{21}^{(j,s-1)} - r_2 \zeta \frac{\partial \tilde{\tau}_{23}^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} - 2r_2 \tilde{\tau}_{23}^{(j,s-1)} - \\
&\quad - (r_1 + r_2) \zeta \tilde{\rho}^{(j)} \tilde{\Omega}_*^2 v^{(j,s-1)} - \tilde{\rho}^{(j)} r_1 r_2 \zeta^2 \tilde{\Omega}_*^2 v^{(j,s-2)}, \\
(5\tau, 6\tau; A \leftrightarrow B; \alpha \leftrightarrow \beta; r_2, r_1; v, u; \xi \leftrightarrow \eta; \\
&\quad \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22}; \tau_{12} \leftrightarrow \tau_{21}; \tau_{23}, \tau_{13});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_u^{(j,s-1)} &= -\zeta (r_1 + r_2) \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2 \frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \zeta} + r_1 u^{(j,s-1)} + \\
&\quad + \zeta r_1 r_2 u^{(j,s-2)} - \frac{1}{A} \frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{r_2 \zeta}{A} \frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial \xi} + r_1 \zeta \tilde{a}_{55}^{(j)} \tilde{\tau}_{13}^{(j,s-1)}, \\
(u, v; A, B; r_1 \leftrightarrow r_2; \xi, \eta; \tau_{13}, \tau_{23}; a_{55}, a_{44});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_w^{(j,s-1)} &= -\zeta (r_1 + r_2) \frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2 \frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial \zeta} + \\
&\quad + r_1 \zeta \tilde{a}_{13}^{(j)} \tilde{\tau}_{11}^{(j,s-1)} + r_2 \zeta \tilde{a}_{23}^{(j)} \tilde{\tau}_{22}^{(j,s-1)},
\end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{R}{R_1}, \quad r_2 = \frac{R}{R_2},$$

$$e_i^{(j,s)} = \tilde{a}_{i1}^{(j)} \tilde{\tau}_{11}^{(j,s)} + \tilde{a}_{i2}^{(j)} \tilde{\tau}_{22}^{(j,s)} + \tilde{a}_{i3}^{(j)} \tilde{\tau}_{33}^{(j,s)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = \mathbf{I}, \mathbf{II}. \quad (10)$$

In view of (9), stress tensor components may be expressed in terms of  $u^{(j,s)}, v^{(j,s)}, w^{(j,s)}$  as

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{13}^{(j,s)} &= \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{(j)}} \left[ \frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \zeta} - P_u^{(j,s-1)} \right], \quad \tilde{\tau}_{23}^{(j,s)} = \frac{1}{\tilde{a}_{44}^{(j)}} \left[ \frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial \zeta} - P_v^{(j,s-1)} \right], \\
\tilde{\tau}_{12}^{(j,s)} &= P_{1\tau}^{(j,s-1)}, \quad \tilde{\tau}_{21}^{(j,s)} = P_{1\tau}^{(j,s-1)} - r_2 \zeta \tilde{\tau}_{21}^{(j,s-1)} + r_1 \zeta \tilde{\tau}_{12}^{(j,s-1)}, \\
\tilde{\tau}_{11}^{(j,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(j)}} \left[ \Delta_2^{(j)} \frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \Delta_{23}^{(j)} P_{2\tau}^{(j,s-1)} + \Delta_1^{(j)} P_{3\tau}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)} P_w^{(j,s-1)} \right], \\
(11, 22, 33; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12}; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3), \quad (11)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{(j)} &= \tilde{a}_{13}^{(j)} \tilde{a}_{23}^{(j)} - \tilde{a}_{33}^{(j)} \tilde{a}_{12}^{(j)}, \quad \Delta_2^{(j)} = \tilde{a}_{12}^{(j)} \tilde{a}_{23}^{(j)} - \tilde{a}_{22}^{(j)} \tilde{a}_{13}^{(j)}, \\
\Delta_3^{(j)} &= \tilde{a}_{13}^{(j)} \tilde{a}_{12}^{(j)} - \tilde{a}_{11}^{(j)} \tilde{a}_{23}^{(j)}, \quad \Delta^{(j)} = \tilde{a}_{11}^{(j)} \Delta_{23}^{(j)} + \tilde{a}_{13}^{(j)} \Delta_2^{(j)} + \tilde{a}_{12}^{(j)} \Delta_1^{(j)}, \\
\Delta_{ik}^{(j)} &= \tilde{a}_{ii}^{(j)} \tilde{a}_{kk}^{(j)} - (\tilde{a}_{ik}^{(j)})^2, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (12)
\end{aligned}$$

According to (9), displacement components satisfy the following equations:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \tilde{a}_{55}^{(j)} \tilde{\Omega}_*^2 \tilde{\rho}^{(j)} \mathbf{u}^{(j,s)} &= \tilde{a}_{55}^{(j)} P_{6\tau}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_u^{(j,s-1)}}{\partial \zeta}, \\
(\mathbf{u}, \mathbf{v}; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau), \\
\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}} \tilde{\Omega}_*^2 \tilde{\rho}^{(j)} \mathbf{w}^{(j,s)} &= F_w^{(j,s-1)}, \\
F_w^{(j,s-1)} &= \frac{1}{\Delta_{12}^{(j)}} \left[ \Delta^{(j)} P_{4\tau}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)} \frac{\partial P_{2\tau}^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} - \Delta_3^{(j)} \frac{\partial P_{3\tau}^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{12}^{(j)} \frac{\partial P_w^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} \right], \quad j = \mathbf{I}, \mathbf{II}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Solutions of (13) are given by

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= C_1^{(j,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(j,u)} \zeta + C_2^{(j,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(j,u)} \zeta + \bar{\mathbf{u}}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}; 1, 3, 5; 2, 4, 6), \quad j &= \mathbf{I}, \mathbf{II}, \tag{14}
\end{aligned}$$

where

$$\chi^{(j,u)} = \sqrt{\tilde{a}_{55}^{(j)} \tilde{\rho}^{(j)} \tilde{\Omega}_*}, \quad \chi^{(j,v)} = \sqrt{\tilde{a}_{44}^{(j)} \tilde{\rho}^{(j)} \tilde{\Omega}_*}, \quad \chi^{(j,w)} = \sqrt{\frac{\Delta^{(j)} \rho^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}} \tilde{\Omega}_*},$$

with  $\bar{\mathbf{u}}^{(j,s)}, \bar{\mathbf{v}}^{(j,s)}, \bar{\mathbf{w}}^{(j,s)}$  being particular solutions of equations (13).

Satisfying the conditions (3)–(6), we obtain algebraic systems with respect to the unknowns  $C_i^{(j,s)}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = \mathbf{I}, \mathbf{II}$ , that have finite solutions provided

$$\cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \neq 0, \quad \zeta_1 = h_1/h, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{15}$$

Solving these systems, we get the displacements

– for the first layer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta + B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} (\zeta - \zeta_1)}{\cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1} + \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}); \tag{16}
\end{aligned}$$

– for the second layer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta) &= (B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) - B_4^{(u,s)}(\xi, \eta)) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} (\zeta - \zeta_1) - \\
&\quad - \frac{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \sin \chi^{(\mathbf{II},u)} (\zeta - \zeta_1)}{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1} \times (\tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} B_3^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 - \\
&\quad - \chi^{(\mathbf{I},u)} B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) + \chi^{(\mathbf{I},u)} B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1) + \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}), \tag{17}
\end{aligned}$$

where

$$B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\chi^{(\mathbf{I},u)}} \left( P_u^{(\mathbf{I},s-1)}(\xi, \eta, 0) - \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, 0)}{\partial \zeta} \right),$$

$$B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) = \mathbf{u}^{+(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta_1),$$

$$B_3^{(u,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \zeta} - P_u^{(\mathbf{II},s-1)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right) - \\ - \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \zeta} - P_u^{(\mathbf{I},s-1)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right),$$

$$B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) = \bar{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \bar{u}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta_1),$$

$$u^{+(\mathbf{I},0)} = U^+ / R, \quad u^{+(\mathbf{I},s)} = 0, \quad s > 0,$$

$$(u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}).$$

The stress tensor components may now be calculated by (11).

In particular, the resulting two-term approximation for the displacements may be presented as

$$U^{(\mathbf{I})}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1} \left( (U^+ - h \bar{u}^{(\mathbf{I},1)}(\xi, \eta, \zeta_1)) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta + \right. \\ \left. + \frac{h}{\chi^{(\mathbf{I},u)}} B_1^{(u,1)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} (\zeta - \zeta_1) \right) + \\ + h \bar{u}^{(\mathbf{I},1)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w), \\ U^{(\mathbf{II})}(\xi, \eta, \zeta) = \left[ (U^+ - h \bar{u}^{(\mathbf{II},1)}(\xi, \eta, \zeta_1)) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} (\zeta - \zeta_1) + \right. \\ \left. + \frac{a_{55}^{\mathbf{II}}}{a_{55}^{\mathbf{I}}} \left( \frac{U^+ \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1}{\chi^{(\mathbf{II},u)}} + h a_{55}^{\mathbf{I}} B_3^{(u,1)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - h \frac{\partial \bar{u}^{(\mathbf{I},1)}(\xi, \eta, 0)}{\partial \zeta} - h \chi^{(\mathbf{I},u)} \bar{u}^{(\mathbf{I},1)}(\xi, \eta, \zeta_1) \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \chi^{(\mathbf{II},u)} (\zeta - \zeta_1)}{\cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1} \right] + h \bar{u}^{(\mathbf{II},1)}(\xi, \eta, \zeta), \\ (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}). \quad (18)$$

It should be noted that the relation  $\cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 = 0$ ,  $(u, v, w)$ , in (15) coincides with the resonances for a single-layered elastic shell in the case of classical boundary conditions, see e.g. [2], i.e. when the upper surface is free and the time-harmonic displacement is prescribed at the lower face. The same conditions are associated with thickness resonances, and moreover, it is known that in the vicinity of these resonances the asymptotic solution degenerates, requiring a special treatment, see [5, 16].

**2. Forced vibrations of a three-layered elastic shell with prescribed displacements on the contact surface between the first and second layers.** Consider a three-layered elastic orthotropic shell occupying the domain  $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, 0 \leq \gamma \leq h_1 + h_2 + h_3\}$ , where as above  $D_0$  is the upper surface of the first layer, and  $\alpha, \beta$  are lines of curvature of the surface  $D_0$ . The governing equations of elastodynamics are given by (1), (2), where now  $j = \mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$ . The boundary and contact conditions are as follows: the upper

face  $\gamma = 0$  is traction-free (3), and the layers are assumed to be in perfect contact:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, h_1, t) &= \tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\gamma}), \\ U^{\mathbf{I}}(\alpha, \beta, h_1, t) &= U^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (U, V, W),\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t) &= \tau_{\alpha\gamma}^{\mathbf{III}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t), \quad (\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\gamma}), \\ U^{\mathbf{II}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t) &= U^{\mathbf{III}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t), \quad (U, V, W),\end{aligned}\quad (20)$$

with time-harmonic displacement field (4) prescribed at the contact surface between the first and second layers.

The solution procedure is pretty similar to that presented in the previous Section 1. Satisfying the conditions (3), (4), (19), (20), the resulting displacements  $u^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta)$  and  $u^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta)$  for the first and second layers coincide with (16) and (17), respectively, whereas the displacements for the third layer are

$$\begin{aligned}u^{(\mathbf{III},s)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1} \left( M_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \chi^{(\mathbf{III},u)} \times \right. \\ &\quad \times \cos \chi^{(\mathbf{III},u)}(\zeta - \zeta_2) - T_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \tilde{a}_{55}^{\mathbf{III}} \chi^{(\mathbf{II},u)} \times \\ &\quad \left. \times \sin \chi^{(\mathbf{III},u)}(\zeta - \zeta_2) \right) + \bar{u}^{(\mathbf{III},s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}), \quad \zeta_2 &= \frac{h_1 + h_2}{h},\end{aligned}\quad (21)$$

where

$$\begin{aligned}M_1^{(u,s)}(\xi, \eta) &= -\tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{II},u)} B_5^{(u,s)}(\xi, \eta) + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \left( B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) - \right. \\ &\quad \left. - B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \right) \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) + \\ &\quad + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \left( \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{III},u)} - \right. \\ &\quad \left. - B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} / \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 + \right. \\ &\quad \left. + B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} \operatorname{tg} \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \right), \\ T_1^{(u,s)}(\xi, \eta) &= \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_6^{(u,s)}(\xi, \eta) + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \left( B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) - \right. \\ &\quad \left. - B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \right) \chi^{(\mathbf{II},u)} \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) + \\ &\quad + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \left( \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{III},u)} - \right. \\ &\quad \left. - B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} / \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 + B_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} \operatorname{tg} \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \right), \\ B_5^{(u,s)}(\xi, \eta) &= \bar{u}^{(\mathbf{III},s)}(\xi, \eta, \zeta_2) - \bar{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_2),\end{aligned}$$



and

$$B_6^{(u,s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{\text{III}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(\text{III},s)}(\xi, \eta, \zeta_2)}{\partial \zeta} - P_u^{(\text{III},s-1)}(\xi, \eta, \zeta_2) \right) - \\ - \frac{1}{\tilde{a}_{55}^{\text{II}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(\text{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_2)}{\partial \zeta} - P_u^{(\text{II},s-1)}(\xi, \eta, \zeta_2) \right), \\ (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}).$$

The solutions will be finite provided there is no resonance, i.e.

$$\cos \chi^{(\text{I},u)} \zeta_1 \neq 0, \quad \zeta_1 = h_1/h, \quad (u, v, w). \quad (22)$$

The two-term resulting displacements for the first and second layers coincide with (18), whereas for the third layer

$$U^{(\text{III})}(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \left( RM_1^{(u,0)}(\xi, \eta) + hM_1^{(u,1)}(\xi, \eta) \right) a_{55}^{\text{II}} \chi^{(\text{III},u)} \times \right. \\ \times \cos \chi^{(\text{III},u)}(\zeta - \zeta_2) - \left( RT_1^{(u,0)}(\xi, \eta) + hT_1^{(u,1)}(\xi, \eta) \right) \times \\ \left. \times a_{55}^{\text{III}} \chi^{(\text{II},u)} \sin \chi^{(\text{III},u)}(\zeta - \zeta_2) \right] / \left( a_{55}^{\text{I}} \chi^{(\text{II},u)} \cos \chi^{(\text{I},u)} \zeta_1 \right) + \\ + h\bar{u}^{(\text{III},1)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta^j}{\Delta_{12}^j}). \quad (23)$$

The stresses may be calculated using (11). Note that the conditions (22) predictably coincide with (15) for a two-layered shell, and the resonant conditions involve only the parameters of the first layer, whereas the overall stress-strain state is obviously affected by the parameters of all three layers.

**3. Forced vibrations of a three-layered elastic shell with prescribed displacements on the interface of the second and third layers.** Consider now the situation when for the same three-layered orthotropic elastic shell  $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, 0 \leq \gamma \leq h_1 + h_2 + h_3\}$ , the displacements are imposed on the contact surface between the second and third layers :

$$U^{\text{II}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t) = U^{\text{III}}(\alpha, \beta, h_1 + h_2, t) = U^+(\alpha, \beta) \exp(i\Omega t), \\ (U, V, W). \quad (24)$$

As before, conditions (19), (20) of perfect contact between the layers are supposed, and the upper face  $\gamma = 0$  is traction-free, i.e. conditions (3) hold.

Satisfying the boundary conditions (3), (24), (19), (20), we get the solutions for displacements

for the first layer:

$$u^{(\text{I},s)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\Delta_{u3}} \left( \tilde{a}_{55}^{\text{I}} (\chi^{(\text{II},u)} B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) + \right. \\ + \chi^{(\text{II},u)} B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\text{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) - \\ - \tilde{a}_{55}^{\text{II}} B_3^{(u,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\text{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2)) \cos \chi^{(\text{I},u)} \zeta + \\ \left. + \chi^{(\text{II},u)} \tilde{a}_{55}^{\text{I}} B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\text{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \sin \chi^{(\text{I},u)}(\zeta - \zeta_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)}(\zeta - \zeta_1) \Big) + \\
& + \bar{u}^{(\mathbf{I},s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w), \tag{25}
\end{aligned}$$

where

$$B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) = u^{+(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_2) - \bar{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad (u, v, w).$$

for the second layer:

$$\begin{aligned}
u^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{\Delta_{u3}} \left( \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{II},u)} B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta - \zeta_1) - \right. \\
& - \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta - \zeta_1) - \\
& - \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} (-B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} B_3^{(u,s)}(\xi, \eta)) \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 + \\
& + B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \Big) \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta - \zeta_2) + \\
& + \bar{u}^{(\mathbf{II},s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta_{12}^j}{\Delta_{12}^j}), \tag{26}
\end{aligned}$$

and for the third layer:

$$\begin{aligned}
u^{(\mathbf{III},s)}(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{\tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}}}{\chi^{(\mathbf{III},u)} \Delta_{u3}} \left( P_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\mathbf{III},u)}(\zeta - \zeta_2) + \right. \\
& + Q_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{III},u)}(\zeta - \zeta_2) \Big) + \bar{u}^{(\mathbf{III},s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
& (u, v, w; a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta_{12}^j}{\Delta_{12}^j}), \tag{27}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
Q_1^{(u,s)}(\xi, \eta) = & \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \chi^{(\mathbf{III},u)} \left( B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) - B_5^{(u,s)}(\xi, \eta) \right) \times \\
& \times \left( \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{I},u)} \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) + \right. \\
& + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1^{(u,s)}(\xi, \eta) = & \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \tilde{a}_{55}^{\mathbf{III}} \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \left( -\tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_3^{(u,s)}(\xi, \eta) - \right. \\
& - \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_6^{(u,s)}(\xi, \eta) \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) + \\
& + B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{II},u)} \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \Big) + \\
& + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \tilde{a}_{55}^{\mathbf{III}} \chi^{(\mathbf{I},u)} \left( B_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{II},u)} - \right. \\
& - \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 (B_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{II},u)} + \\
& + B_{21}^{(u,s)}(\xi, \eta) \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) + \\
& + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} B_6^{(u,s)}(\xi, \eta) \sin \chi^{(\mathbf{II},u)}(\zeta_1 - \zeta_2) \Big).
\end{aligned}$$

The non-resonant condition allowing the finite solution is given by

$$\begin{aligned} \Delta_{u3} = & \tilde{a}_{55}^{\mathbf{I}} \chi^{(\mathbf{II},u)} \cos \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \cos \chi^{(\mathbf{II},u)} (\zeta_1 - \zeta_2) + \\ & + \tilde{a}_{55}^{\mathbf{II}} \chi^{(\mathbf{I},u)} \sin \chi^{(\mathbf{I},u)} \zeta_1 \sin \chi^{(\mathbf{II},u)} (\zeta_1 - \zeta_2) \neq 0, \\ (u, v, w; & a_{55}^j, a_{44}^j, \frac{\Delta_{12}^j}{\Delta_{12}^j}). \end{aligned} \quad (28)$$

Once again, the stresses may now be calculated from (11).

It is worth noting that formulae (28) in fact coincides with the corresponding non-resonant conditions for a two-layered orthotropic shell within the conventional formulation, see [1], i.e. when the upper face is free, and the excitation in the form of associated displacements is applied at the lower face (provided the layers are in perfect contact).

Once again, we observe that relations (28) imply that the parameters of the first two layers are only involved in the resonant conditions, whereas the overall stress-strain state includes the parameters of all three layers. Thus, as expected, the resonant conditions involve only the parameters of the layers above the contact surface at which the displacements were prescribed.

Once the stresses and strains are determined, the potential energy of the deformation can be determined by a well-known formula

$$E = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dv, \quad (29)$$

whereas the relation

$$\log E = 11.8 + 1.5M \quad (30)$$

gives estimate for the magnitude  $M$  of the anticipated earthquake, see [19] for more details.

**Conclusion.** In this paper, the asymptotic solutions of 3D dynamic problems for multi-layered orthotropic elastic shells with a traction-free upper face and prescribed displacements on one of the contact inter-layer surfaces have been obtained in assumption of perfect contact between the layers. The solutions for displacements and stresses have been derived in the form of asymptotic series along the small geometrical parameter, which is a natural feature of thin shells.

The results may be applied to estimate the possibility of delamination, as well as to calculate the deformation energy required for seismological applications [19].

The developed methodology may be extended to transient vibrations. Another potential development is related to analysis of shells of finite size, in which accounting for static and, in general, dynamic boundary layers would be required, for more details see [4]. The proposed technique may also be implemented for the case of non-perfect contact between the layers, as well as a shell laminate containing more layers. Finally, we not a less trivial generalisation for layered shells with layers of variable thickness.

**Acknowledgement.** LGG acknowledges support by the Erasmus+ICM program within the framework of collaboration between ASPU after Kh. Abovyan, Armenia, and Keele University, UK.

1. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л., Тагворян В. В. О решениях динамических трёхмерных задач теории упругости по моделированию землетрясений // Изв. НАН Армении. Механика. – 2018. – **71**, № 4. – С. 17–29.  
– <https://www.doi.org/10.33018/71.4.2>
2. Агаловян Л. А., Гулгазрян Л. Г. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 8. – С. 105–122.

- Те саме: *Agalovyan L. A., Gulgazaryan L. G.* Forced vibrations of orthotropic shells: nonclassical boundary-value problems // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 8. – P. 888–904. – <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0231-6>.
3. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин // Докл. АН СССР. – 1977. – **236**, № 6. – С. 1319–1322.  
Те саме: *Berdichevskii V. L.* High-frequency long-wave vibrations of plates // *Sov. Phys. Dokl.* – 1977. – **22**, No. 10. – P. 604–606.
  4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
  5. *Каплунов Ю. Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1990. – № 5. – С. 147–157.
  6. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore–London: World Scientific, 2015. – 376 p.
  7. *Aghalovyan L. A.* On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates // *Proc. Razmadze Math. Inst. [Georgia]*. – 2011. – **155**. – P. 1–8.
  8. *Aghalovyan L. A., Aghalovyan M. L.* Monitoring of stress-strain state of plate-like packet of base-foundation constructions on the base of the data of seismic stations and GPS systems // *Proc. 5th Europ. Conf. Struct. Control, EACS-2012 (18–20 June 2012, Genoa, Italy)*. – 2012. – Paper No. 069. – 8 p.
  9. *Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G.* Forced vibrations of a two-layered shell in the case of viscous resistance // *IOP J. Phys: Conf. Ser.* – 2018. – **991**. – 012002. – 10 p. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012002>.
  10. *Argatov I., Mishuris G.* Contact mechanics of articular cartilage layers. – Springer, Cham, 2015. – xviii+335 p.
  11. *Borodich F. M., Galanov B. A., Perepelkin N. V., Prikazchikov D. A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math. Mech. Solids.* – 2019. – **24**, No. 5. – P. 1405–1424.  
– <https://doi.org/10.1177/1081286518797378>.
  12. *Chebakov R., Kaplunov J., Rogerson G. A.* Refined boundary conditions on the free surface of an elastic half-space taking into account non-local effects // *Proc. R. Soc. A: Math., Phys. Eng. Sci.* – 2016. – **472**, No. 2186. – Art. 20150800.  
– <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0800>.
  13. *Erbaş B., Yusufoglu E., Kaplunov J.* A plane contact problem for an elastic orthotropic strip // *J. Eng. Math.* – 2011. – **70**, No. 4. – P. 399–409.  
– <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9422-8>.
  14. *Ghulghazaryan L. G., Khachatryan L. V.* Forced vibrations of a two-layer orthotropic shell with an incomplete contact between layers // *Mech. Compos. Mater.* – 2018. – **53**, No. 6. – P. 821–826. – <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9707-y>.
  15. *Kaplunov J. D.* Long-wave vibrations of a thinwalled body with fixed faces // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1995. – **48**, No. 3. – P. 311–327.  
– <https://doi.org/10.1093/qjmam/48.3.311>.
  16. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. – San Diego: Acad. Press, 1998. – 226 p.
  17. *Kaplunov J. D., Nolde E. V.* Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2002. – **55**, No. 3. – P. 345–356. – <https://doi.org/10.1093/qjmam/55.3.345>.
  18. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler–Fuss hypothesis // *Z. angew. Math. Phys.* – 2018. – **69**, No. 3. – Art. 80. – <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1>.
  19. *Kasahara K.* Earthquake mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981. – xiii+248 p.
  20. *Lashhab M. I., Rogerson G. A., Prikazchikova L. A.* Small amplitude waves in a pre-stressed compressible elastic layer with one fixed and one free face // *Z. angew. Math. Phys.* – 2015. – **66**, No. 5. – P. 2741–2757.  
– <https://doi.org/10.1007/s00033-015-0509-y>.
  21. *Le Khanh C.* High frequency vibrations and wave propagation in elastic shells: Variational-asymptotic approach // *Int. J. Solids Struct.* – 1997. – **34**, No. 30. – P. 3923–3939. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00011-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00011-5).
  22. *Le Pichon X., Francheteau J., Bonnin J.* Plate tectonics. – Amsterdam: Elsevier, 1973. – 314 p.
  23. *Nolde E. V., Rogerson G. A.* Long wave asymptotic integration of the governing equations for a pre-stressed incompressible elastic layer with fixed faces // *Wave motion.* – 2002. – **36**, No. 3. – P. 287–304.  
– [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00017-3](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00017-3).

24. Pichugin A. V., Rogerson G. A. An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate // Proc. R. Soc. London. Ser. A: Math., Phys. Eng. Sci. – 2002. – **458**, No. 2022. – P. 1447–1468.  
– <https://www.jstor.org/stable/3067470>.
25. Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. – 357 p.
26. Rogerson G. A., Sandiford K. J., Prikazchikova L. A. Abnormal long wave dispersion phenomena in a slightly compressible elastic plate with non-classical boundary conditions // Int. J. Nonlin. Mech. – 2007. – **42**, No. 2. – P. 298–309.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.01.005>.

#### ТРИВИМІРНИЙ ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ШАРУВАТИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

*Розглянуто тривимірні динамічні задачі для шаруватих ортотропних пружних оболонок із вільною верхньою поверхнею і заданими переміщеннями на одній із меж поділу шарів за умови ідеального контакту. Побудовано довгохвильовий асимптотичний розв'язок і визначено резонанси товщини. Отримані результати можуть знайти подальше застосування при оцінці певних параметрів землетрусів.*

**Ключові слова:** пружна 3-D динаміка, шарувата оболонка, асимптотичний метод.

<sup>1</sup> Institute of Mechanics of NAS RA, Armenia,

<sup>2</sup> Kh. Abovyan Armenian State Pedagogical University, Armenia,

<sup>3</sup> School of Computing and Mathematics, Keele University, Keele, UK

Received

15.12.20

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ЕТАПУ РУЙНУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ СТИСКАННІ ВЗДОВЖ МЕЖІ ПОДІЛУ

*Розглядається початковий етап процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. Виконано аналітичний розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі поблизу вершин. Знайдено величину розходження меж зони, яка використовується в подальшому в деформаційному критерії утворення в ній вторинної мікротріщини. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає її злиття зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження.*

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, стискання уздовж межі поділу, контакт берегів, зона передруйнування, вторинна мікротріщина, механізм зрушення тріщини.

**Вступ.** Однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла є дослідження механізму руйнування тіл при стисканні. До цього класу проблем відноситься задача про зрушення тріщини при стисканні тіла в напрямку, паралельному площині її розташування. При такому навантаженні в полі напружень біля вершин тріщини відсутні сингулярні складові (коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють нулеві), що виключає можливість застосування критеріїв лінійної механіки руйнування.

Дослідженнями поведінки тріщин при стисканні тіла паралельно до площини їх розміщення було з'ясовано, що причиною руйнування тіла в цьому випадку є локальна втрата стану рівноваги біля вершин тріщини [2, 12]. Наслідком втрати стійкості може стати вигин берегів тріщини в різні сторони, в одну сторону з контактом берегів або в одну сторону з утворенням зазору між берегами. Ці процеси призводять до концентрації напружень та утворення зон передруйнування в околі вершин, що на даному етапі допускає застосування традиційних методів дослідження умов зрушення тріщини в рамках лінійної механіки руйнування.

У цій статті розглядаємо початковий етап процесу руйнування кусково-однорідного тіла при його стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. У припущенні, що внаслідок втрати стійкості рівноважного стану відбувається спільне викривлення тріщини з контактом її берегів в сторону менш жорсткого матеріалу, виконано розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершин тріщини. Знайдено величину розходження меж зони, яку використовуємо в подальшому у деформаційному критерії утворення вторинної мікротріщини в зоні. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає її злиття зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. Аналогічний механізм зрушення міжфазної тріщини в умовах зсувних навантажень описано в [6].

**1. Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини, розміщеної на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і сталими коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  відповідно. Досліджуване кусково-однорідне тіло піддається стисканню у напрямку, паралельному до площини з'єднання і берегів тріщини, що призводить до вигину берегів тріщини в бік менш жорсткого

✉ dudik\_m@hotmail.com

матеріалу (для визначеності – першого,  $E_1 < E_2$ ), появи концентрації напружень і утворення зон передруйнування в тонкому шарі з'єднувального матеріалу в околі вершин, який передбачається менш тріщиностійким порівняно з матеріалами з'єднаних частин тіла (рис. 1а). Будемо вважати, що прикладені навантаження не порушують прямолінійності межі поділу поза тріщиною, що у випадку рівномірно розподіленого стискального навантаження, прикладеного до торців тіла, вимагає виконання умови, встановленої J. R. Rice, G. C. Sih [14]:

$$p_2 = \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} p_1.$$

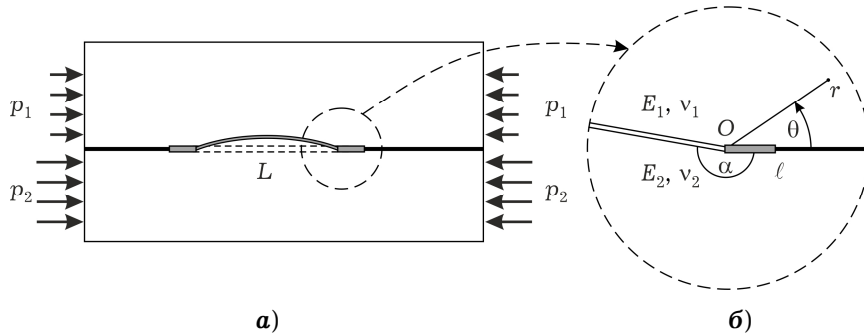


Рис. 1. а) – Кусково-однорідне тіло з міжфазної тріщиною в умовах стиснення; б) – Розрахункова схема задачі.

На початковому етапі навантаження розміри зон передруйнування малі, тому довжину  $\ell$  кожної з зон вважатимемо набагато меншою порівняно з довжиною тріщини  $L$ . Це дозволяє обмежитися дослідженням напружено-деформованого стану тільки локальної області в околі однієї з вершин і звести вихідну задачу до задачі про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини півнескінченної міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу (рис. 1б).

Оскільки розвиток тріщини відбувається за крихким механізмом, зону передруйнування моделюватимемо прямою лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу  $\sigma_0$ . Припускаючи наявність контакту берегів тріщини з тертям за законом Кулона, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta = \sigma_1, \\ \theta = 0, \quad r > \ell: \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ ;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між берегами тріщини.

Для формулювання умови на нескінченності використовуємо метод зрощування асимптотичних розв'язків [13], який передбачає зшивання на відстанях  $\ell \ll r \ll L$  шуканого розв'язку з відомим розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без зони передруйнування [3]:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta = CF(\alpha)r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= (1-e)^2 f_1 + (1-e)(1+x_2)f_2 + e(1-e)(1+x_2)f_3 + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)f_4 + e^2(1+x_2)^2 f_5, \\
f_1 &= -4\mu\delta_{11}t_1, \quad f_2 = 4t_1[\cos\lambda\beta - \mu\sin(\lambda+2)\beta], \\
f_3 &= \delta_{11}\delta_{32} - 2\lambda\delta_{22}\delta_1(\beta) + \mu[(\lambda+2)\delta_{12}\delta_{31} + 2\delta_{21}\delta_1(\beta) + 4\delta_{11}\delta_1(\alpha)], \\
f_4 &= 2\sin\lambda\pi[2\sin\lambda(\pi-\alpha)\delta_1(\alpha) - \delta_{31}\cos\lambda(\pi-\alpha) + \\
&\quad + \sin(\lambda+2)\beta[\delta_{23}\sin\lambda(\pi-\alpha) + \lambda\delta_{22}\cos\lambda(\pi-\alpha) - 2\mu\delta_2]], \\
f_5 &= 4\sin\lambda\pi\delta_2[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha], \\
t_1 &= (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_{11} &= \lambda\sin(\lambda+2)\beta - (\lambda+2)\sin\lambda\beta, \quad \delta_{12} = \cos\lambda\beta - \cos(\lambda+2)\beta, \\
\delta_{21} &= \lambda\sin(\lambda+2)\alpha - (\lambda+2)\sin\lambda\alpha, \quad \delta_{22} = \cos\lambda\alpha - \cos(\lambda+2)\alpha, \\
\delta_{23} &= (\lambda+2)\sin(\lambda+2)\alpha - \lambda\sin\lambda\alpha, \\
\delta_{31} &= -(\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_{32} &= (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_1(x) &= (\lambda+1)\sin^2 x + \sin^2(\lambda+1)x, \\
\delta_2 &= (\lambda+1)\sin\alpha\cos(\lambda\pi+\alpha) - \sin(\lambda+1)\alpha\cos[(\lambda+1)\alpha - \lambda\pi], \\
\beta &= 2\pi - \alpha, \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+v_2}{1+v_1}, \quad x_{1(2)} = 3 - 4v_{1(2)},
\end{aligned}$$

де  $\lambda$  – показник сингулярності напружень, який визначаємо як найменший на інтервалі  $(-1, 0)$  корінь характеристичного рівняння задачі

$$D_0(\lambda) = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
D_0(\lambda) &= D_{01}(\lambda) + \mu D_{02}(\lambda), \\
D_{01}(\lambda) &= (1-e)[0.5(1+x_1)D_{11}t_1 - 0.5e(1+x_2)D_{12}t_3 + e(1+x_1)(1+x_2)d_3] + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)D_{13}, \\
D_{02}(\lambda) &= (1-e)\{(1+x_1)D_{21}t_1 - e(1+x_2)[D_{22}t_3 - (1+x_1)d_4] + 2(1-e)^2t_1t_3\} + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)D_{23}, \\
D_{11}(\lambda) &= (1-e)d_5 + (1+x_1)\sin 2(\lambda+1)(2\pi-\alpha), \\
D_{12}(\lambda) &= e(1+x_2)\sin 2(\lambda+1)\alpha + (1-e)d_2, \\
D_{13}(\lambda) &= \sin^2\lambda\pi[(1+x_1)d_7 - e(1+x_2)d_9], \\
D_{21}(\lambda) &= (1-e)d_6 - (1+x_1)t_2, \\
D_{22}(\lambda) &= e(1+x_2)t_4 + (1-e)d_1, \\
D_{23}(\lambda) &= \sin^2\lambda\pi[(1+x_1) - e(1+x_2)]d_8,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)\beta, & t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - t_2, & t_4 &= \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
d_1 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_4, & d_2 &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha, \\
d_3 &= [(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin 2(\lambda + 1)(\alpha - \pi) - \\
&\quad - 2(\lambda + 1) \sin^2 \lambda \pi \sin 2\alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha), \\
d_4 &= 2[(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - \\
&\quad - 4 \sin^2 \lambda \pi [(\lambda + 1) \sin^2 \alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + \\
&\quad + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta], \\
d_5 &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\beta, & d_6 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_2, \\
d_7 &= (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha - \sin(\lambda + 1)\alpha \cos(\lambda + 1)\beta, \\
d_8 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta, \\
d_9 &= (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha + \cos(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta.
\end{aligned}$$

Під дією стискальних навантажень більш м'який верхній матеріал в околі правої вершини тріщини (рис. 1а) зміщується вліво відносно нижнього матеріалу, тому коефіцієнт тертя  $\mu$  повинен бути від'ємним. Сталу  $C$ , аналогічну за смислом до коефіцієнта інтенсивності напружень біля вершини тріщини, вважаємо заданою за умовою. Передбачається, що в задачі, яка відповідає тому етапу процесу деформування, коли зона передруйнування ще не появилася, нормальне напруження при  $\theta = 0$  в околі вершини тріщини є розтягувальним ( $\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta > 0$ ). Це вимагає виконання умови  $CF(\alpha) > 0$  додатково до вимоги існування стискального напруження  $\sigma_\theta < 0$  на берегах тріщини  $\theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha)$ , необхідного для контакту берегів.

У кінці лінії розриву, яка моделює зону передруйнування, відповідно до загальних положень про напружено-деформований стан в околі гострокінцевих концентраторів [9], напруження мають кореневу особливість:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \ell + 0: \quad \sigma_\theta \sim \frac{1 + \alpha_1 + e(1 + \alpha_2)}{2(1 + \alpha_1)} \frac{k}{\sqrt{2\pi(r - \ell)}}, \quad (5)$$

де  $k$  – коефіцієнт інтенсивності напружень, який підлягає розрахунку в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді суми наступних двох задач. *Перша задача* відрізняється від сформульованої тим, що в (2) замість першої умови покладаємо

$$\theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 - CF(\alpha)r^\lambda, \quad (6)$$

а на нескінченості напруження спадають, як  $o(1/r)$ . *Другою задачею* є аналогічна *першій* задачі без лінії розриву, розв'язок якої отримано в [3], тому завдання зводиться до розв'язання першої задачі.

**2. Розв'язання задачі.** Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука та граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [8] і використавши другу з умов (2) і умову (6), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа першої задачі:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma_0}{p+1} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+1+\lambda} = A \operatorname{ctg} p\pi G(p)\Phi^-(p), \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2, \quad (7)$$

де

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho\ell, 0)\rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-v_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho d} \Big|_{\theta=0} \rho^p d\rho,$$

$$A = \frac{(1+x_1)[1+x_1+e(1+x_2)]}{2(e+x_1)(1+ex_2)}, \quad G(p) = \frac{(1+x_1)D_1(p) \sin p\pi}{2AD_0(-1-p) \cos p\pi},$$

$$D_1(p) = -(1+x_1)^2 \cos(p+1)\beta\Delta_1\Delta_5 - e^2(1+x_2)^2 \cos(p+1)\alpha\Delta_4\Delta_6 + \\ + \mu(1-e)(1+x_1)\Delta_1\Delta_3 - \mu e(1-e)(1+x_2)\Delta_2\Delta_4 + \\ + 2e(1+x_1)(1+x_2)[\cos(p+1)(\pi-\alpha)\Delta_7\Delta_8 + \sin^2 p\pi\Delta_9],$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\beta, \quad \Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\beta,$$

$$\Delta_5(p) = \cos(p-1)\beta + \mu \sin(p-1)\beta, \quad \Delta_6(p) = \cos(p-1)\alpha - \mu \sin(p-1)\alpha,$$

$$\Delta_7(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta,$$

$$\Delta_8(p) = \cos(p-1)(\pi-\alpha) + \mu \sin(p-1)(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_9(p) = p^2 \sin^2 \alpha - 2\mu p \sin \alpha \cos p(\pi-\alpha) \cos[p(\pi-\alpha)-\alpha] - \\ - \sin p\alpha \sin p\beta,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі додатні числа.

Розв'язок функціонального рівняння (7), знайдений за допомогою методу Вінера – Гопфа [7] подібно до розв'язків аналогічних рівнянь у роботах [4–6], має вигляд

$$\Phi^+(p) = -\mathcal{K}^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right] \right\}, \\ \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{A\mathcal{K}^-(p)} \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \right. \\ \left. - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+\lambda+1} \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (8)$$

де

$$\mathcal{K}^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0.5 \mp p)},$$

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases}$$

$\Gamma(p)$  – гамма-функція Ейлера.

**3. Визначення параметрів зони передруйнування.** Застосувавши до асимптотики (5) теорему абелевого типу [7], отримаємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{x_1 + 1 + e(1 + x_2)}{2(e + x_1)} \frac{k}{\sqrt{-2p\ell}}, \quad p \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} p < 0.$$

Порівнюючи цю асимптотику з асимптотикою розв'язку (8) при  $p \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} p < 0$ :

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\},$$

знайдемо коефіцієнт інтенсивності напружень біля кінця лінії розриву нормального переміщення:

$$k = \sqrt{2\ell} \frac{2(e + x_1)}{x_1 + 1 + e(1 + x_2)} \left\{ \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\}.$$

Відповідно до вимоги обмеженості напружень у кінці зони передруйнування, покладаємо коефіцієнт інтенсивності  $k$  рівним нулеві, звідки отримуємо аналітичний вираз для довжини зони:

$$\ell = \left( \frac{2CF(\alpha)J(0)}{\sqrt{\pi}\sigma_0\mathcal{K}^+(-\lambda-1)J(\lambda)} \right)^{-1/\lambda}, \quad (9)$$

де

$$J(x) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x+1) \ln |G(it)| + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + (x+1)^2} dt \right].$$

Згідно з (9), довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, до якого множник  $C$  є прямо пропорційним. Крім того, довжина зони передруйнування є тим більшою, чим меншим є опір відриву з'єднувального матеріалу  $\sigma_0$ .

Знайдений розв'язок (8) рівняння Вінера – Гопфа задачі із залученням оберненого перетворення Мелліна і теореми про лишки дозволяє визначити поле напружень в околі вершини тріщини, яке змінилося в результаті утворення зони передруйнування. Загальна структура тензора напружень на відстанях  $r \ll \ell$  має вигляд

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_i g_{mn}(\theta, \lambda'_i) r^{\lambda'_i}, \quad r \rightarrow 0, \quad (10)$$

де  $\sigma_{mn}^0(\theta)$ ,  $g_{mn}(\theta, \lambda'_i)$  – відомі функції,  $\lambda'_i$  – корені рівняння

$$D_1(-1-x) = 0, \quad (11)$$

які внаслідок вимоги обмеженості переміщень задовольняють умову  $\operatorname{Re} \lambda'_i > -1$ . Зокрема, кореням рівняння (11) у смугі  $-1 < \operatorname{Re} \lambda'_i < 0$  відповідатимуть сингулярні складові в розвиненні (10), що зумовлюють концентрацію напружень біля вершини тріщини.

На досліджуваному початковому етапі розвитку зони передруйнування розкриття тріщини в її вершині, згідно з прийнятими в (1) граничними умовами, дорівнює нулеві, тому, відповідно до деформаційного критерію руйнування, зрушення тріщини здається неможливим. Однак можна уявити механізм її зрушення, за яким спочатку відбудеться розрив міжчастинкових зв'язків у зоні передруйнування у місці максимального розходження меж зони, яке дорівнює стрибку нормального переміщення  $\delta u(r) = \langle u_\theta(r, 0) \rangle$ , при досягненні ним деякого критичного значення  $\delta u_{cr}$ , що є характеристикою

з'єднувального матеріалу. В результаті всередині зони передруйнування утворюється мікротріщина (див. рис. 2), яка збільшується за розмірами зі збільшенням навантаження аж до досягнення нею вершини початкової тріщини, що і призводить до зрушення тріщини.

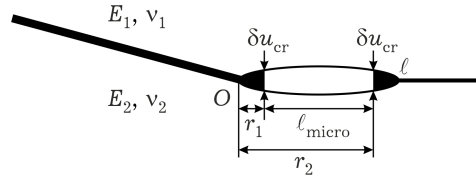


Рис. 2. Модель структури зони передруйнування з мікротріщиною.

Використовуючи розв'язок (8) рівняння Вінера – Гопфа задачі, знаходимо залежність  $\delta u(r)$ :

$$\delta u(r) = \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} r \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{D_0(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1 - \lambda'_i) J(\lambda'_i) \lambda}{D'_1(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1) J(0) \lambda'_i (1 + \lambda'_i) (\lambda'_i - \lambda)} \times \left( \frac{r}{\ell} \right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} \right\}. \quad (12)$$

Умова максимуму розходження меж зони передруйнування  $\delta u(r)$  приводить до рівняння для розрахунку відстані  $r_m$ , на якій слід очікувати утворення мікротріщини:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{D_0(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1 - \lambda'_i) J(\lambda'_i) \lambda}{D'_1(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1) J(0) \lambda'_i (\lambda'_i - \lambda)} \left( \frac{r}{\ell} \right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} = 0. \quad (13)$$

Відповідно значення найбільшого розходження меж зони дорівнюватиме  $\delta u(r_m)$ . Прирівнявши максимальне розходження і критичне значення, яке відповідає цілковитому розриву міжчастинкових зв'язків у досліджуваній частині зони передруйнування, отримуємо рівняння  $\delta u(r_m) = \delta u_{cr}$ , з якого можна визначити навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини. Подальше збільшення навантаження буде супроводжуватися зміною кута відхилення  $\alpha$  тріщини від площини межі поділу матеріалів і зростанням довжини мікротріщини. Положення кінців мікротріщини та її довжину можна визначити з рівнянь  $\delta u(r_{1(2)}) = \delta u_{cr}$ , де  $0 < r_1 \leq r_m \leq r_2 < \ell$ , і  $\ell_{micro} = r_2 - r_1$  (рис. 2). При цьому слід мати на увазі, що наявна мікротріщина буде істотно впливати на напружено-деформований стан в області зони передруйнування. Тому розглянута вище модель зони передруйнування і знайдений розв'язок задачі про її параметри є коректними лише за виконання умови  $\ell_{micro} \ll \ell$ .

Відмітимо, що в (12), (13) підсумовування передбачається за всіма коренями рівняння (11), які задовольняють умову  $\text{Re } \lambda'_i > -1$ . Проте в дійсності виявляється, що внаслідок підвищеного рівня напружень в околі вершини тріщини справджується нерівність  $r_m \ll \ell$ , тому достатня точність визначення  $r_m$  досягається при врахуванні всього лише 4÷6 перших коренів, і тільки на відстанях одного порядку з  $\ell$  у сумі ряду (12) потрібно брати набагато більше доданків.

**4. Аналіз отриманих результатів.** Як впливає з попереднього розгляду, обчислення параметрів маломасштабної зони передруйнування вимагає знання кута відхилення тріщини від початкового напрямку і коефіцієнта  $C$

в умові (3) при заданій величині стискального навантаження. У зв'язку з цим будемо вважати, що виконуються такі припущення. Зовнішнє навантаження будемо задавати безрозмірним параметром  $\sigma = |C|L^\lambda/\sigma_0$ . Кут відхилення тріщини  $\alpha$  залежить як від величини стискального навантаження, так і від пружних характеристик з'єднаних матеріалів. Оскільки відсутні достовірні відомості про таку залежність, то приймемо за перше наближення лінійне співвідношення  $\alpha(\sigma, e) = 180^\circ + \eta(e)\sigma$ , де  $\eta(e)$  – деяка невідома функція біматеріального параметра  $e$ , означеного у блоці формул після (3).

Результати обчислень параметрів зони передруйнування і мікротріщини: кута  $\alpha$ , відносних довжин зони передруйнування  $x = \ell/L$  і мікротріщини  $x_{\text{micro}} = (r_2 - r_1)/L$ , відстані  $r_m/L$  до положення максимального розходження меж зони і нормоване значення цього розходження  $\delta\tilde{u}_m = \frac{\delta u(r_m)E_1}{2(1 + \nu_1)L\sigma_0}$ , положення вершин мікротріщини  $r_1/L$ ,  $r_2/L$ , наведені у табл. 1 і на рис. 3 для таких значень характеристик з'єднаних матеріалів:

$$E_1/E_2 = 0.5, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \quad \mu = -0.5, \quad \eta = 400,$$

нормоване значення критичного розходження  $\delta\tilde{u}_{\text{cr}} = 8 \cdot 10^{-5}$ .

Таблиця 1. Параметри зони передруйнування і мікротріщини.

| $\sigma$ | $\alpha, ^\circ$ | $x$                  | $r_m/L$              | $\delta\tilde{u}_m$  | $r_1/L$                     | $r_2/L$              | $x_{\text{micro}}$   |
|----------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|----------------------|
| 0.001    | 180.2            | $2.42 \cdot 10^{-8}$ | $2.07 \cdot 10^{-9}$ | $6.63 \cdot 10^{-9}$ | Мікротріщина не утворюється |                      |                      |
| 0.002    | 180.4            | $4.19 \cdot 10^{-7}$ | $3.59 \cdot 10^{-8}$ | $1.15 \cdot 10^{-7}$ |                             |                      |                      |
| 0.003    | 180.6            | $2.22 \cdot 10^{-6}$ | $1.90 \cdot 10^{-7}$ | $6.07 \cdot 10^{-7}$ |                             |                      |                      |
| 0.004    | 180.8            | $7.22 \cdot 10^{-6}$ | $6.19 \cdot 10^{-7}$ | $1.98 \cdot 10^{-6}$ |                             |                      |                      |
| 0.005    | 181.0            | $1.80 \cdot 10^{-5}$ | $1.55 \cdot 10^{-6}$ | $4.93 \cdot 10^{-6}$ |                             |                      |                      |
| 0.006    | 181.2            | $3.81 \cdot 10^{-5}$ | $3.26 \cdot 10^{-6}$ | $1.04 \cdot 10^{-5}$ |                             |                      |                      |
| 0.007    | 181.4            | $7.16 \cdot 10^{-5}$ | $6.13 \cdot 10^{-6}$ | $1.96 \cdot 10^{-5}$ |                             |                      |                      |
| 0.008    | 181.6            | $1.24 \cdot 10^{-4}$ | $1.06 \cdot 10^{-5}$ | $3.38 \cdot 10^{-5}$ |                             |                      |                      |
| 0.009    | 181.8            | $2.00 \cdot 10^{-4}$ | $1.72 \cdot 10^{-5}$ | $5.47 \cdot 10^{-5}$ |                             |                      |                      |
| 0.010    | 182.0            | $3.08 \cdot 10^{-4}$ | $2.64 \cdot 10^{-5}$ | $8.42 \cdot 10^{-5}$ | $1.28 \cdot 10^{-5}$        | $4.81 \cdot 10^{-5}$ | $3.54 \cdot 10^{-5}$ |
| 0.011    | 182.2            | $4.55 \cdot 10^{-4}$ | $3.90 \cdot 10^{-5}$ | $1.24 \cdot 10^{-4}$ | $3.09 \cdot 10^{-6}$        | $1.67 \cdot 10^{-4}$ | $1.64 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.012    | 182.4            | $6.50 \cdot 10^{-4}$ | $5.56 \cdot 10^{-5}$ | $1.77 \cdot 10^{-4}$ | $1.36 \cdot 10^{-6}$        | $3.25 \cdot 10^{-4}$ | $3.23 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.013    | 182.6            | $9.02 \cdot 10^{-4}$ | $7.71 \cdot 10^{-5}$ | $2.46 \cdot 10^{-4}$ | $7.14 \cdot 10^{-7}$        | $5.37 \cdot 10^{-4}$ | $5.36 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.014    | 182.8            | $1.22 \cdot 10^{-3}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $3.33 \cdot 10^{-4}$ | $4.13 \cdot 10^{-7}$        | $8.13 \cdot 10^{-4}$ | $8.13 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.015    | 183.0            | $1.62 \cdot 10^{-3}$ | $1.38 \cdot 10^{-4}$ | $4.41 \cdot 10^{-4}$ | $2.56 \cdot 10^{-7}$        | $1.16 \cdot 10^{-3}$ | $1.17 \cdot 10^{-3}$ |

Розрахунки підтверджують попередній висновок про нелінійне зростання довжини зони передруйнування при збільшенні навантаження, отриманий на основі аналізу формули (9). Пропорційно до довжини зони передруйнування збільшуються відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони  $r_m/\ell \approx \text{const}$  і величина цього розходження  $\delta_m/\ell \approx \text{const}$ .

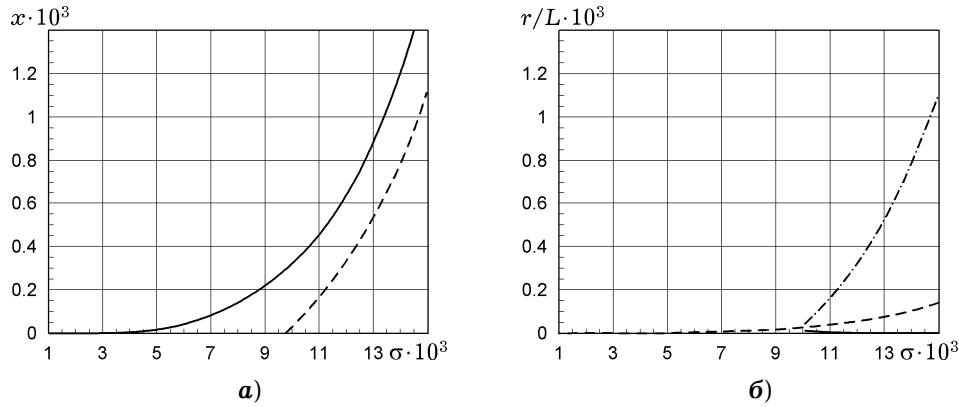


Рис. 3. Залежність від безрозмірного параметра навантаження  $\sigma$ : **а)** – відносних довжин зони передруйнування  $x = \ell/L$  (суцільна лінія) і мікротріщини  $x_{\text{micro}}$  (штрихова лінія); **б)** – відносних відстаней  $r_m/L$  (штрихова лінія),  $r_1/L$  (суцільна лінія),  $r_2/L$  (штрихпунктирна лінія) для  $E_1/E_2 = 0.5$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\mu = -0.5$ ;  $\eta = 400$ .

Після утворення мікротріщини її довжина  $\ell_{\text{micro}}$  зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування (рис. 3а), досягаючи значення більше половини довжини зони при розглянутому максимальному навантаженні. При цьому ближній кінець мікротріщини істотно зближується з вершиною початкової тріщини ( $r_1 \rightarrow 0$ , рис. 3б), і подальші розрахунки стають некоректними через необхідність урахування впливу мікротріщини на напружено-деформований стан в околі вершини і її можливого злиття з початковою тріщиною. Відстань  $r_2$  від вершини початкової тріщини до віддаленого кінця мікротріщини зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж  $r_m$  і  $\ell$  (рис. 3б), і при досить високих навантаженнях визначає довжину мікротріщин ( $r_2 \approx \ell_{\text{micro}}$ ).

Згідно з результатами, наведеними у табл. 1 і на рис. 3б, порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з вершиною початкової тріщини, що призводить до розкриття початкової тріщини, подальшого поширення шляхом злиття з мікротріщиною і можливого руйнування кусково-однорідного тіла шляхом його поділу по межі поділу матеріалів. Це припущення дозволяє оцінити граничне навантаження, при якому відбувається зрушення тріщини, за значенням критичного навантаження  $\sigma_{\text{cr}}$ , що визначається з умови  $\delta u(r_m) = \delta u_{\text{cr}}$ , при якому відбувається зародження мікротріщини. Рис. 4а демонструє, як безрозмірне критичне навантаження залежить від відношення пружних параметрів з'єднаних матеріалів. Виявляється, значення  $\sigma_{\text{cr}}$ , так само, як і відповідний кут відхилення тріщини від початкового напрямку  $\Delta\alpha_{\text{cr}} = \alpha(\sigma_{\text{cr}}, e) - 180^\circ$  (рис. 4б), зменшуються при зближенні модулів Юнга з'єднаних матеріалів ( $E_1/E_2 \rightarrow 1$ ). Проте ці висновки не є остаточними, тому що через невідому залежність  $\eta(e)$  під час розрахунків параметр  $\eta$  покладалася сталим. Як бачимо на рис. 4, більшим значенням  $\eta$  ( $\eta = 400$ , суцільні криві) відповідають менші значення критичного навантаження  $\sigma_{\text{cr}}$  та більші значення кута відхилення  $\Delta\alpha_{\text{cr}}$  тріщини від початкового напрямку.

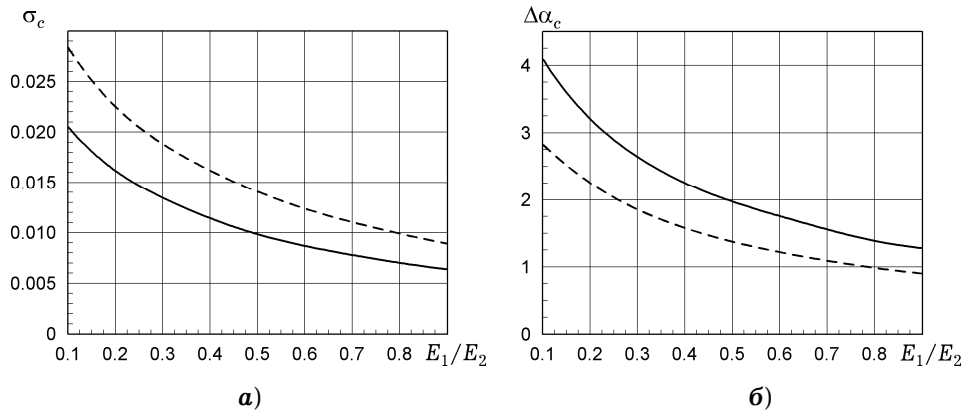


Рис. 4. Залежність від відношення модулів Юнга  $E_1 / E_2$ : **а)** – критичного навантаження  $\sigma_{cr}$ ; **б)** – критичного кута відхилення тріщини  $\Delta\alpha_{cr}$  для  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\mu = -0.5$  ( $\eta = 200$  – пунктирні лінії,  $\eta = 400$  – суцільні лінії).

У процесі навантаження тіла з подальшим вигином тріщини і утворенням зони передруйнування відбувається зміна показника сингулярності напружень. Результати розрахунків коренів рівнянь (4) і (11) показують, що наявність зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень: найменший на інтервалі  $(-1, 0)$  корінь  $\lambda'_1$  рівняння (11) виявляється меншим, ніж аналогічний корінь  $\lambda_1 \equiv \lambda$  рівняння (4) (рис. 5).

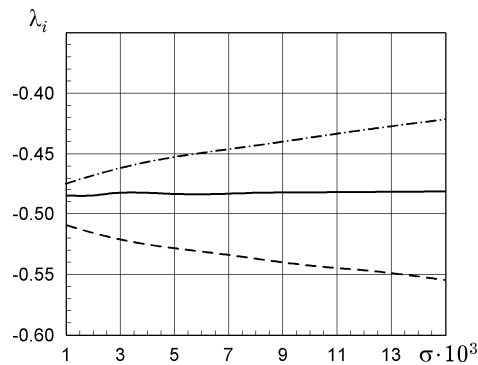


Рис. 5. Залежність від навантаження  $\sigma$  показників сингулярності напружень в околі вершини вигнутої тріщини при відсутності зони передруйнування ( $\lambda_1$  – суцільна лінія) та її наявності ( $\lambda'_1$  – штрихова лінія;  $\lambda'_2$  – штрихпунктирна лінія).

Якщо показник сингулярності  $\lambda_1$  незначно зростає при збільшенні навантаження, залишаючись близьким за величиною до показника сингулярності

$$\lambda_c = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{(1 + e\alpha_2) - (e + \alpha_1)}{(1 + e\alpha_2) + (e + \alpha_1)}$$

в кінці тріщини на плоскій межі поділу в рамках моделі Comninou з фрикційним контактом берегів [10], то показник  $\lambda'_1$ , навпаки, знижується, що призводить до подальшого посилення концентрації напружень (рис. 5). Крім того, у виразі (10) для компонент тензора напружень при утворенні зони передруйнування появляється ще один істотний сингулярний доданок з по-

казником сингулярності  $\lambda'_2 > \lambda_1$ , що призводить до додаткового посилення концентрації напружень. Відмітимо, що рівняння (4) і (11) мають також досить близькі до нуля від'ємні корені  $\lambda_2$  і  $\lambda'_3$  відповідно, які не впливають істотно на напружено-деформований стан в околі вершини тріщини і параметри зони передруйнування.

Утворення зони передруйнування в околі концентратора напружень зазвичай супроводжується розвантаженням матеріалу в цій області. Проте, як встановлено вище, в цій моделі спостерігається зворотний процес – зростання рівня напружень, наслідком якого є утворення і розвиток мікротріщини. Але, крім утворення мікротріщини, можливим є також механізм зниження рівня концентрації напружень, який полягає в утворенні безпосередньо біля вершини початкової тріщини зони деструкції матеріалу (зони процесу руйнування). На відміну від описаної вище моделі зони передруйнування, в зоні деструкції високого рівня досягають не тільки деформації відриву, але і деформації зсуву. Зокрема, комплексна модель зони передруйнування, яка враховує наявність в ній маломасштабної зони деструкції, для міжфазної тріщини на плоскій межі поділу середовищ реалізована в роботах [6, 11]. Для дослідженої в цій роботі проблеми руйнування при стисканні розгляд задачі про утворення зони деструкції може бути актуальним для пояснення власне зрушення початково закритої тріщини.

**Висновки.** Запропоновано модель початкового етапу процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. В її основі лежить припущення про спільний вигин берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу, у поєднанні з їх фрикційним контактом і утворенням зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершини тріщини. Моделюванням зони передруйнування лінією розриву нормального переміщення отримано розв'язок задачі про розрахунок параметрів зони, за яким встановлено співвідношення, які визначають довжину і розходження меж зони. За допомогою деформаційного критерію сформульовано умову зародження мікротріщини в зоні передруйнування, яке використано для визначення граничного навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини, та для дослідження залежності її розмірів від навантаження. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини і подальшого руйнування тіла при стисканні, що передбачає злиття тріщини зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. У рамках дослідженої моделі виконано числовий розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування і мікротріщини, аналіз яких привів до наступних висновків:

- Дія стискального навантаження уздовж плоскої межі поділу матеріалів кусково-однорідного тіла, що містить міжфазну тріщину, призводить до відхилення берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу на кут, який зростає зі збільшенням навантаження.
- Довжина зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі і розходження її меж нелінійно зростають зі збільшенням стискального навантаження. Відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони і величина цього розходження майже прямо пропорційні до довжини зони передруйнування.
- Після досягнення критичного розходження берегів зони передруйнування відбувається утворення мікротріщини, довжина якої зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування. При цьому порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з початковою тріщиною.
- Критичне навантаження, що відповідає моменту утворення мікротріщини, є тим більшим, чим сильніше відрізняються пружні характеристики з'єднаних матеріалів.



- Утворення зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень біля вершини тріщини, яке можна усунути деструкцією матеріалу в околі вершини тріщини.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.  
Te same: *Gakhov F. D.* Boundary value problems. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1966. – xix+564 p.
2. *Гузь А. Н.* О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикладная механика. – 2014. – **50**, № 1. – С. 5–88.  
Te same: *Guz' A. N.* Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 1–57. – <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>.
3. *Дудик М. В., Решитник Ю. В., Феньків В. М.* Асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу матеріалів // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2020. – № 1. – С. 27–37.  
– <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>.
4. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 136–144.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0068-1>.
5. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* Initial kinking of an interface crack between two elastic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1090–1099. – <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0109-4>.
6. *Каминський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А.* Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 95–108.  
Te same: *Kamins'kyi A. O., Dudyk M. V., Kipnis L. A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 117–132. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3171-9>.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
Te same: *Noble B.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. – New York: Chelsea, 1958. – 246 p.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.  
Te same: *Uflyand Ya. S.* Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity. – North Carolina State Univ., 1965. – 402 p.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.  
Te same: *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
10. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781. – <https://doi.org/10.1115/1.3424179>.
11. *Dudyk M. V., Kipnis L. A.* Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, No. 1. – P. 31–50. – DOI: 10.3233/SFC-180211.
12. *Guz A. N., Bogdanov V. L., Nazarenko V. M.* Fracture of materials under compression along cracks. – Ser. Advanced Structured Materials. Vol. 138. – Springer, 2020. –xvi+490 p. – DOI: 10.1007/978-3-030-51814-1.
13. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. – New York: J. Wiley & Sons, 1973. – xii+425 p.
14. *Rice J. R., Sih G. C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 418–423. – <https://doi.org/10.1115/1.3625816>.

**INVESTIGATION OF THE INITIAL STAGE OF FRACTURE OF A PIECE-HOMOGENEOUS BODY WITH INTERFACE CRACK UNDER COMPRESSION ALONG THE INTERFACE**

*The initial stage of the fracture process of a piecewise homogeneous body under compression along a flat interface of materials, containing an interface crack, is considered. An analytical calculation of parameters of a small-scale pre-fracture zone in the joint material near the tips is performed. The value of zone boundaries deviation is found. It is used later in the deformation criterion for the formation of a secondary microcrack in it. The mechanism of a crack starting is proposed, which provides its coalescence with a growing microcrack under an increasing load.*

**Key words:** *interfacial crack, compression along interface, faces contact, pre-fracture zone, secondary microcrack, crack starting mechanism.*

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,  
<sup>2</sup> Уманськ. держ. пед. ун-т ім. П. Тичини, Умань

Одержано  
01.10.20