УДК 517.98

ЧИСЛЕННЯ ВЕЙЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ПІВГРУП

Віра Лозинська

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

vlozynska@yahoo.com

Числення Вейля і зірковий добуток Мойала відіграють центральну роль у квантовій механіці на фазових просторах. Закон композиції функцій на фазовому просторі, що відповідає добутку операторів у гільбертовому просторі, був записаний ще фон Нейманом (1931 р.) в термінах сплетеної згортки. Моделі некомутативної теорії поля конструюються заміною звичайних добутків полів у функціональні операції із зірковими добутками. Дослідженням у цьому напрямку присвячено роботи, зокрема, Neerven J.V., Portal P. Інші дослідження, що стосуються тематики роботи, можна знайти у Лопушанського О.В., Шарина С.В. [1], [2].

Нехай $S^{\alpha,\beta}$ є банаховим простором комплексних функцій φ на $\mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}} = \max_{0\le m\le\alpha,\, 0\le n\le\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|t^m\partial^n\varphi(t)\big|, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\partial^n := d^n/dt^n$ $(n\in\mathbb{N})$. Кожне включення $S^{\alpha,\beta}\hookrightarrow S^{\alpha_1,\beta_1}$ є компактним, де $\alpha_1<\alpha$ і $\beta_1<\beta$. Розглянемо простір Шварца $S:=\bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+} S^{\alpha,\beta}$ основних функцій, наділений топологією проективної границі $\varprojlim S^{\alpha,\beta}$ відносно цих включень. Спряжений до S простір S' називають простором розподілів (узагальнених функцій) повільного росту. Відомо [3, IV], що S і S' – монтелеві ядерні простори. Більше того, S є так званим FS-простором, а S' – DFS-простором. Нехай $S'(\mathbb{R}_+)$– замкнений підпростір S' тих розподілів, носії яких містяться в $[0,\infty)$. $S'(\mathbb{R}_+)$ є монтелевим ядерним DFS-простором.

Нехай $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ є генераторами аналітичних півгруп $e^{-\mathrm{i}\xi\mathbf{P}}$ і $e^{\mathrm{i}\eta\mathbf{Q}}$ у банаховому просторі E. Числення Вейля є відображенням

$$f(x,y)\to f(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \widetilde{f}(\zeta)\mathbf{T}_\zeta d\zeta,$$

$$\mathbf{T}_\zeta := e^{\mathrm{i}(\eta\mathbf{Q}-\xi\mathbf{P})} = e^{-\mathrm{i}\eta\xi/2}e^{\mathrm{i}\eta\mathbf{P}}e^{-\mathrm{i}\xi\mathbf{Q}}, \quad \zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_06.pdf

де $f(x,y)$ належить до $S'(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$. $\widetilde{f}(\xi,\eta):=\widehat{f}(\eta,-\xi)$ і

$$\widehat{f}(\zeta):=\frac{1}{(2\pi)^2}\int f(x,y)e^{-\mathrm{i}(\eta y-\xi x)}\,dx\,dy,\quad (x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$$

є симплектичним перетворенням Фур'є-Лапласа. Для сплетеної згротки маємо:

$$\widetilde{f}*_\hbar\widetilde{g}\to\frac{1}{(2\pi)^4}\int\widetilde{f}(\zeta')\,\widetilde{g}(\zeta'')\mathbf{T}_{\zeta'}\mathbf{T}_{\zeta''}\,d\zeta'\,d\zeta''=f(\mathbf{P},\mathbf{Q})\cdot g(\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

де $\cdot$ – операторне множення в комутативній підалгебрі в $\mathcal{L}\left(\mathfrak{A}_{\mathbf{P}}\times\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}},E\right)$, $\mathfrak{A}_{\mathbf{P}}:=\varprojlim\mathfrak{D}(\mathbf{P}^\alpha),\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}:=\varprojlim\mathfrak{D}(\mathbf{Q}^\alpha)$.

Для стандартної симплектичної структури $\theta(\zeta,\zeta')=\zeta\cdot J\zeta'=\eta\xi'-\xi\eta'$, $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, що визначена на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, виконується $\mathbf{T}_\zeta\mathbf{T}_{\zeta'}=e^{-\mathrm{i}\zeta\cdot J\zeta'/2}\mathbf{T}_{\zeta+\zeta'}=e^{-\mathrm{i}(\eta\xi'-\xi\eta')/2}\mathbf{T}_{\zeta+\zeta'}$.

Для всіх $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ коректно визначеними є степені операторів $\mathbf{P}^{\pm\alpha}$ і $\mathbf{Q}^{\pm\alpha}$ із відповідними щільними областями визначення $\mathfrak{D}(\mathbf{P}^{\pm\alpha})$ і $\mathfrak{D}(\mathbf{Q}^{\pm\alpha})$. Визначимо простір

$$\mathfrak{D}_A^\alpha:=\mathfrak{D}(A^\alpha)\cap\mathfrak{D}(A^{-\alpha}),\quad\|w\|_{\mathfrak{D}^\alpha}:=\sum_{m=-\alpha}^{\alpha}\|A^m w\|,\ \text{де } A^\alpha=\begin{cases}\mathbf{P}^{\pm\alpha},\\ \mathbf{Q}^{\pm\alpha}.\end{cases}$$

Із замкненості операторів $\mathbf{P}^{\pm\alpha}$ and $\mathbf{Q}^{\pm\alpha}$ слідує, що простори $\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}^\alpha$ and $\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}}^\alpha$ є повними для довільних $\alpha\in\mathbb{Z}_+$. Включення

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}^\alpha\looparrowright\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}^\beta\looparrowright E,\qquad\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}}^\alpha\looparrowright\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}}^\beta\looparrowright E,\qquad 0<\beta<\alpha,\tag{1}$$

є неперервними і щільними. Проективні границі

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{P}}:=\varprojlim\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}^\alpha=\bigcap\left\{\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}^\alpha\colon\alpha\in\mathbb{Z}_+\right\},\quad\mathfrak{A}_{\mathbf{Q}}:=\varprojlim\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}}^\alpha=\bigcap\left\{\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}}^\alpha\colon\alpha\in\mathbb{Z}_+\right\}$$

є просторами Фреше відносно включень (1).

1. *Лопушанський О. В., Шарин С.В.* Застосування перетворення Лапласа узагальнених функцій повільного росту до побудови функціонального числення // Укр. мат. журн. – 2015. –Т. 67, № 11. – С. 1498– 1511.
2. *Лопушанский О. В., Шарин С.В.* Обобщенное функциональное исчисление типа Хилле-Филлипса для многопараметрических полугрупп // Сиб. мат. журн. – 2014. –55, № 1. – С. 131– 146.
3. *Schaefer H.* Topological vector spaces. - Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 294 p.

WEYL CALCULUS OF ANALYTIC SEMIGROUPS

We use the symplectic Fourier-Laplace transform of tempered distributions whose supports are located in $\mathbb{R}_+$ to construct a Weyl calculus for generators of analytic semigroups.