УДК 517.51

ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ФУНКЦІЇ, ЯКІ "ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ"E-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Олександр Барановський[1,2], **Микола Працьовитий**[2,1]

[1] *Інститут математики Національної академії наук України,*
[2] *Український державний університет імені Михайла Драгоманова*

baranovskyi@imath.kiev.ua, pratsiovytyi@imath.kiev.ua

У доповіді розглядається так зване E-зображення чисел з $(0,1]$ і вивчаються властивості деяких представників нескінченної сім'ї функцій, які «зберігають хвости» E-зображення. Ці функції використовуються для побудови перетворень півінтервалу $(0,1]$, які «зберігають хвости» E-зображення чисел.

Як відомо [4], для будь-якого числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність (q_n) натуральних чисел, $q_{n+1} \geq q_n$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_n+1)} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \ldots q_n \ldots}. \tag{1}$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля* і однозначно визначається неспадною послідовністю натуральних чисел (q_n). Його можна записати в іншому вигляді:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\ldots(2+g_1+g_2+\ldots+g_n)} \equiv \Delta^{E}_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}, \tag{2}$$

де $q_1 - 1 = g_1$, $q_{n+1} - q_n = g_{n+1} \in \mathbb{Z}_0 \equiv \{0,1,2,\ldots\}$.

Ряд (2) називається *E-представленням*, а скорочений символічний запис $\Delta^{E}_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}$ — *E-зображенням* числа x, при цьому $g_n = g_n(x)$ — n-ою цифрою (символом) цього зображення.

Означення 1. Казатимемо, що функція f, яка визначена на $(0,1]$ і набуває значень з $(0,1]$, *зберігає хвости* E-зображень чисел, якщо для будь-якого $x \in (0,1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_08.pdf

Теорема 1. *Нехай i — фіксований натуральний параметр, d_i — функція «збільшення першої цифри»: $d_i(x) = \Delta^E_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots}$, ω — функція зсуву цифр: $\omega(x) = \Delta^E_{g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots}$. Перетворення $(0,1]$, означене рівністю*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x), & \textit{якщо } 0 < x \leq x_1 \equiv \Delta^E_{0(i)}, \\ \omega(x), & \textit{якщо } x_1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

зберігає хвости E-зображення чисел.

При вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр у їхньому зображенні, важливу роль відіграють хвостові множини (множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень). У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною. Це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами у їхньому s-зображенні, Q-зображенні [2], зображеннях, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дроби, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота [6], а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го [1, 3] і 2-го виду, Люрота [5] тощо.

Тому природно виникає інтерес до неперервних функцій і перетворень $(0,1]$, які зберігають хвости зображення чисел.

1. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ: Наук. думка, 2013. — 288 с.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.
4. *Engel F.* Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913. — Leipzig: Teubner, 1914. — S. 190–191.
5. *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — P. 385–401.
6. *Zhykharyeva Yu. I., Pratsiovytyi M. V.* Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra Discrete Math. — 2012. — Vol. 14, no. 1. — P. 145–160.

TRANSFORMATIONS AND FUNCTIONS PRESERVING TAILS OF E-REPRESENTATION OF NUMBERS

We consider the so-called E-representation of numbers belonging to $(0,1]$ and study properties of some representatives of infinite family of functions that “preserve tails” of E-representation. These functions are used to construct transformations of $(0,1]$ that “preserve tails” of E-representation of numbers.