УДК 517.5

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко

Інститут математики НАН України

serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Позначимо через $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}$ класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{\alpha,r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

з ядрами

$$P_{\alpha,r,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),\ \alpha > 0,\ r > 0,\ \beta_k \in \mathbb{R},$$

функцій $\varphi \in B_2^0 = \{g \in L_2 :\ \|g\|_{L_2} \le 1,\ g \perp 1\}$.

Якщо $\beta_k \equiv \beta, \beta \in \mathbb{R}$, то класи $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,2}$ позначаються через $C^{\alpha,r}_{\beta,2}$ і є відомими класами узагальнених інтегралів Пуассона (див. [1]).

Нехай K — опукла центрально-симетрична підмножина з простору C і B — одинична куля в просторі C. Нехай, далі, F_N — довільний N-вимірний підпростір простору C, $N \in \mathbb{N}$, і $\mathcal{L}(C, F_N)$ — множина всіх лінійних операторів, що діють з C в F_N. Через $\mathcal{P}(C, F_N)$ позначимо підмножину всіх проективних операторів із множини $\mathcal{L}(C, F_N)$, тобто множину всіх операторів A лінійного проектування у множину F_N таких, що $Af = f$, якщо $f \in F_N$. Величини

$$b_N(K, C) = \sup_{F_{N+1}} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap F_{N+1} \subset K\},$$

$$d_N(K, C) = \inf_{F_N} \sup_{f\in K} \inf_{u\in F_N} \|f-u\|_C,$$

$$\lambda_N(K, C) = \inf_{F_N} \inf_{A\in\mathcal{L}(C,F_N)} \sup_{f\in K} \|f - Af\|_C,$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_10.pdf

$$\pi_N(K, C) = \inf_{F_N} \inf_{A \in \mathcal{P}(C, F_N)} \sup_{f \in K} \|f - Af\|_C,$$

називаються, відповідно, бернштейнівським, колмогоровським, лінійним та проекційним N-поперечниками множини K в просторі C.

Теорема 1. *Нехай $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \beta_k \in \mathbb{R}$ і $\alpha > 0$, $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$ та задовольняють умову*

$$(n-1)^r > \frac{1}{\alpha}.$$

Тоді мають місце оцінки

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r} \left(1 - \gamma_1(\alpha, r, n) e^{-\alpha r (n-1)^{r-1}}\right) \le P_{2n}(C^{\alpha, r}_{\bar{\beta}, 2}, C) \le$$

$$\le P_{2n-1}(C^{\alpha, r}_{\bar{\beta}, 2}, C) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha n^r} \left(1 + \gamma_2(\alpha, r, n) e^{-\alpha r n^{r-1}}\right),$$

в яких P_N — будь-який із поперечників b_N, d_N, λ_N чи π_N,

$$\gamma_1(\alpha, r, n) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha r (n-1)^{r-1}} + \max\left\{\frac{e^{4\alpha}}{2}, \frac{e^2}{\alpha^{1+1/r}}\right\} e^{-2\alpha (n-1)^r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_2(\alpha, r, n) = \left(1 + \frac{1}{2\alpha r n^{r-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. *Stepanets A.I.* Methods of Approximation Theory. – Utrecht: VSP, 2005.

Робота частково підтримана Grant H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).

ESTIMATIONS OF THE WIDTHS OF CLASSES OF GENERALIZED POISSON INTEGRALS OF PERIODIC FUNCTIONS

We find two-sided estimates for Kolmogorov, Bernstein, linear and projection widths of the classes of convolutions of 2π-periodic functions φ, such that $\|\varphi\|_2 \le 1$, with fixed generated kernels

$$P_{\alpha, r, \bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \ \alpha > 0, \ r > 0, \ \beta_k \in \mathbb{R},$$

in the space C.