

УДК 517.5

РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є НА КЛАСАХ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк

Інститут математики НАН України

sanatolii@ukr.net, stepaniuk.tet@gmail.com

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних невід'ємних чисел, і нехай β — фіксоване дійсне число. Позначимо через $C_{\beta,1}^{\psi}$ множину 2π -періодичних функцій, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_1, \quad \|\varphi\|_1 \leq 1, \quad \varphi \perp 1$$

з твірним ядром Ψ_{β} вигляду

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

таким, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty.$$

Нашою метою є знаходження розв'язку задачі Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є на класах $C_{\beta,1}^{\psi}$, яка полягає у відшуканні асимптотичних (при $n \rightarrow \infty$) рівностей величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \sup_{f \in C_{\beta,1}^{\psi}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C,$$

де $S_{n-1}(f; \cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f .

Має місце наступне твердження.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_11.pdf

Теорема 1. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при усіх $n \in \mathbb{N}$ має місце формула

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n), \quad (1)$$

де для величини $\Theta = \Theta(n, \beta, \psi)$ виконуються нерівності $-1 \leq \Theta \leq 0$.

Зазначимо, що формула (1) є асимптотичною рівністю при $n \rightarrow \infty$, якщо виконується граничне співвідношення

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Умова (2) має місце, зокрема, у випадку, коли $\psi(k)$ спадає до нуля при $n \rightarrow \infty$ швидше за довільну степеневу послідовність $\frac{1}{k^r}$, $r > 1$, забезпечуючи високу гладкість розглянутих класів $C_{\beta,1}^{\psi}$.

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: в 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, Київ, **40**, Ч. I, 2002. — 468 с.

UNIFORM APPROXIMATIONS BY FOURIER SUMS ON THE CLASSES OF CONVOLUTIONS OF PERIODIC FUNCTIONS OF HIGH SMOOTHNESS

We establish the asymptotic equalities for the exact upper boundaries of uniform approximations by Fourier sums on the classes of convolutions of the functions φ , which belong to the unit ball of the space L_1 and with fixed generated kernels

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty.$$