УДК 517.54

ОЦІНКИ ДОБУТКІВ ДЕЯКИХ СТЕПЕНІВ КОНФОРМНИХ РАДІУСІВ ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

Ярослав Заболотний

Інститут математики НАН України

yaroslavzabolotnii@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$.

Означення 1. Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.

В цій доповіді вивчається наступна проблема, вперше сформульована в роботі [1]:

Проблема 1. *Нехай n - деяке натуальне число, $n \geq 3$, α_k, $k = \overline{1,n}$ - деякі додатні дійсні числа; a_k, $k = \overline{1,n}$ - деякий набір точок комплексної площини. Знайти максимум наступного добутку:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\alpha_k}. \tag{1}$$

де B_k, $k = \overline{1,n}$, - довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Правильними є наступні результати.

Теорема 1. *[2] Нехай n - деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$, деякий набір фіксованих точок комплексної площини і нехай γ_k, $k = \overline{1,n}$ - деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_12.pdf

Теорема 2. *Нехай n - деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$ – деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k, θ_k, $k = \overline{1,n}$ – деякі додатні дійсні числа, причому $\alpha_k \geq \theta_k$ $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k - \theta_k)}{4}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k - \theta_k)}{n-1}\right)} \prod_{k=1}^{n} \left(R(B_k, a_k)\right)^{\theta_k}. \tag{2}$$

Нерівність, наведена в теоремі 2, дозволяє оцінювати вираз (1) для деякого набору степенів α_k, маючи значення даного виразу для іншого набору степенів.

1. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
2. *Бахтін О.К., Заболотний Я.В.* Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 9. – С. 1155–1169.

Estimates of the products of some powers of the conformal radii of simply-connected domains

In this talk one problem of geometric function theory about the extreme partition of the complex plane is considered, and as a result some estimates of maximum of the product of some powers of conformal radii of n disjoint simply-connected domains with respect to n arbitrary points of complex plane are obtained.