УДК 517.524

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ У КУТОВИХ ОБЛАСТЯХ

Дмитро Боднар, Ірина Біланик

Західноукраїнський національний університет

Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка

bodnar4755@ukr.net, i.bilanyk@ukr.net

Кутові області збіжності неперервних дробів вперше досліджували Е.Б. Ван Флек, Йо.Л. Йенсен, О. Перрон. У роботі В.Б. Ворнера та Д.Д. Ґраґґа ця тематика отримала подальше розвинення – були встановлені оцінки швидкості збіжності неперервних дробів у цих областях.

Багатовимірні узагальнення класичної теореми Ван Флека про кутову область збіжності розглядалися для різних типів гіллястих ланцюгових дробів (гіллястих ланцюгових дробів з N-гілками розгалуження, двовимірних неперервних дробів, гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду) у роботах Д.І. Боднара, Х.Й. Кучмінської, Т.М. Антонової, О.М. Сусь та І.Б. Біланик.

При встановленні оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів виникають певні труднощі, що спричиняють до звуження множин збіжності, де ці оцінки справджуються. У випадку необмежених множин збіжності оцінки даються, як правило, на деяких обмежених їх підмножинах.

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду оцінки швидкості збіжності вдалося встановити для необмежених підмножин кутових областей, які, однак, повинні бути розташованими на певній відстані від початку координат. Цю вимогу можна послабити, якщо розглядати послідовність підмножин, відстань від яких до початку координат прямує до нуля із певною швидкістю.

Цілком очікувано, що найефективніші результати для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду отримано у двовимірному випадку. Це зумовлено ускладненням конструкції дробу при збільшенні його розмірності.

Зокрема, для двовимірного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma08_13.pdf

$$b_0+\sum_{i_1=1}^{2}\frac{1}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}}\frac{1}{b_{i(2)}+\sum\limits_{i_3=1}^{i_2}\dfrac{1}{b_{i(3)}+\ddots}} \qquad (1)$$

де $b_0,\ b_{i(k)}\in\mathbb{C},\ i(k)\in\mathcal{I}$,

$$\mathcal{I}=\{i(k)=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\ :1\le i_k\le i_{k-1}\le ...\le i_0;\ k\ge 1;\ i_0=2\},$$

справджується твердження.

Теорема 1. *Нехай елементи гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду* (1) *задовольняють умови*

$$\Re(b_{i(k)})\ge\frac{\delta}{k^\beta},\ \left|\arg b_{i(k)}\right|\le\theta,\ \theta<\frac{\pi}{4},\ 0\le\beta\le\frac{1}{2},\ \delta^2>\frac{1+\beta}{2\beta\cos 2\theta},\ i(k)\in\mathcal{I}.$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб (1) *збігається і справджується оцінка швидкості збіжності*

$$\left|f_m-f_{s(n)}\right|<\frac{K}{\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{1-\beta}\left((n+1)^{1-\beta}-1\right)\right)},\ m\ge s(n),$$

$$s(n)\ge\sqrt[1-\beta]{(n+1)^{1+\beta}+(n+1)^{1-\beta}},$$

де K, α *— деякі додатні сталі, що не залежать від* m *і* n.

1. *Біланик І.Б., Боднар Д.І.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 4. – С. 72-82.
2. *Gragg W.B. Warner D.D.* Two constructive results in continued fractions // SCIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20**, No. 3. – P. 1187-1197.
3. *Jensen J.L.W.V.* Bidrag til Kaedebrekernes Teori // Festskrift til H.G. Zeuthen. – 1909. – P. 78-87.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruhen.— Stuttgart : Teubner, 1957.— Bd. **2.**— 524 s.
5. *Van Vleck E.B.* On the convergence of continued fractions with complex elements // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**, No. 3. — P. 215–233.

ON CONVERGENCE OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM IN ANGULAR DOMAINS

The angular domains of convergence of branched continued fractions of the special form with complex elements are investigated. The estimates for the rate of convergence in some subsets of angular regions are obtained.