УДК 517.54; 517.12

ПРО ГЛОБАЛЬНЕ СКІНЧЕННЕ СЕРЕДНЄ КОЛИВАННЯ ТА РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Руслан Салімов, Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $\mu : D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в D. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні f по x та y. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним співвідношенням рівняння (1). Рівняння Бельтрамі (1) називається *виродженим*, якщо $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Будемо говорити, що функція $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ має *глобальне скінченне середнє коливання в точці* $z_0 \in \mathbb{C}$, скорочено $\varphi \in GFMO(z_0)$ (*global finite mean oscillation*), якщо

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |\varphi(z) - \overline{\varphi}_R|\, dxdy < \infty, \tag{2}$$

де

$$\overline{\varphi}_R = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} \varphi(z)\, dxdy$$

середнє значення функції φ по кругу $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$ та умова (2) включає припущення, що φ інтегровна у $B(z_0, R)$, $R > 0$ [1].

Лема 1. *Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Якщо невід'ємна функція $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ має глобальне скінченне середнє коливання в точці z_0, то для $R > e^e$,*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,e,R)} \frac{\varphi(z)\, dxdy}{\left(|z - z_0| \log |z - z_0|\right)^2} \leqslant C \cdot \log\log R,$$

де

$$C = \frac{\pi}{6}((24+\pi^2)e^2\delta_\infty + 2\pi^2\varphi_0),$$

φ_0 *— середнє значення* φ *по кругу* $B(z_0, e)$ *і*

$$\delta_\infty = \delta_\infty(\varphi) = \sup_{R\in(e,+\infty)} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |\varphi(z) - \overline{\varphi}_R|\, dxdy.$$

Для відображення $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ та функції K_μ, ми покладемо

$$l_f(z_0, e) = \min_{|z-z_0|=e} |f(z) - f(z_0)|,$$

$$\delta_\infty = \sup_{R\in(e,+\infty)} \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} |K_\mu(z) - K_{\mu,z_0}(R)|\, dxdy, \quad k_0 = K_{\mu,z_0}(e),$$

де

$$K_{\mu,z_0}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(z_0,R)} K_\mu(z)\, dxdy.$$

Теорема 1. *Нехай* $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— вимірна функція з* $|\mu(z)| < 1$ *м.с. і* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі* (1)*, який належить класу Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$*. Якщо* $K_\mu \in GFMO(z_0)$*,* $z_0 \in \mathbb{C}$*, то*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|}{(\log R)^{\frac{2\pi}{C}}} \geqslant l_f(z_0, e)\,,$$

де C *— додатна стала, що залежить тільки від* δ_∞ *і* k_0*.*

1. *Salimov R., Stefanchuk M.* Global finite mean oscillation and the Beltrami equation. (Hyper)complex seminar 2021 in memoriam of Prof. Julian Lawrynowicz. A monograph. Charter VIII, published online 30.12.2022, DOI: 10.26485/978-83-60655-92-4/8.

ON THE GLOBAL FINITE MEAN OSCILLATION AND THE BELTRAMI EQUATION

The estimate for growth of homeomorphic solutions of the Beltrami equation at infinity is obtained, provided that the dilatation quotient has a global finite mean oscillation.