

УДК 517.95

## КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

Софія Репетило

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

repetylosofiya@gmail.com

Математичне моделювання багатьох реальних процесів призводить до дослідження задач з крайовими та нелокальними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема, рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною  $t$ , які виникають при математичному моделюванні деяких задач гідродинаміки. В області  $Q_T^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \Omega^p\}$ ,  $T > 0$ ,  $\Omega^p$  –  $p$ -вимірний тор  $(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , розглянуто задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s| \leq \infty} a_s^r \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial^{2j-2} u(t, x) / \partial t^{2j-2} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), & j=1, \dots, n, \\ \partial^{2j-1} u(t, x) / \partial t^{2j-1} \Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), & j=1, \dots, n, \end{cases} \quad (2)$$

де  $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \leq 2l} b_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$  — еліптичний оператор,  $a_s^r, b_s \in \mathbb{C}$ ,  $a_0^1 \neq 0$ ,

$s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ ,  $|s| = s_1 + \dots + s_p$ . Зауважимо, що вигляд області  $Q_T^p$  накладає умови  $2\pi$ -періодичності за просторовими координатами на розв'язок задачі  $u(t, x)$  та на функції  $\varphi_j(x)$ ,  $j=1, \dots, 2n$ .

Окремо розглянуто задачу у такій постановці: в області  $\Theta_T^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\}$  для рівняння (1) знайти майже періодичний за  $x_1, \dots, x_p$  із заданим спектром  $M$  розв'язок, який за змінною  $t$  задовольняє умови (2), де

$$M := \left\{ \mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} = \eta_{k_j}, \eta_{k_j} \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, p, k \in \mathbb{Z}^p \right\},$$

$$N := \left\{ \eta_k \in \mathbb{R} : \eta_{-n} = -\eta_n, \eta_0 = 0, d_1 |n|^\sigma \leq |\eta_n| \leq d_2 |n|^\sigma, d_2 \geq d_1 > 0, \sigma > 0, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

функції  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, 2n$ , є майже періодичними за просторовими координатами функціями зі спектром  $M$ , причому

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad j = 1, \dots, 2n,$$

$$\text{де } \varphi_{jk} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \int_{[0, h]^p} \varphi_j(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Встановлено умови однозначної розв'язності в обмеженій циліндричній області та в багатовимірному шарі задачі з умовами (2) за часовою змінною та умовами  $2\pi$ -періодичності або майже періодичності за просторовими координатами для рівняння (1). Розв'язки розглянутих задач побудовано у вигляді рядів за системами ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач використано метричний підхід.

Для рівнянь із частинними похідними, розв'язаних відносно старшої похідної за часом, задачі з умовами (2) вивчались, зокрема, у працях [2, 3]. Дана робота є дотичною до робіт [1-3], а отримані у ній результати доповнюють проведені у цих працях дослідження.

1. Білусяк Н.І., Комарницька Л.І., Пташник Б.Й. Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
2. Пташник Б.Й., Репетило С.М. Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 665–682.
3. Ptashnyk B.Yo., Repetylo S.M. Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, № 4. – P. 501–517.

#### BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WHICH ARE NOT SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER TIME DERIVATIVE

*We investigate the conditions for the unique solvability in the limited cylindrical domain and in the multidimensional layer of the problem with Dirichlet–Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of periodicity or almost periodicity with respect to spatial coordinates for equations with partial derivatives not solved on the highest derivative in time with constant coefficients were investigated. The solutions of the considered problems in the form of series according to the systems of orthogonal functions are constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solutions of the problems the metric approach is used.*