УДК 517.9

ЗБЕРЕЖЕННЯ РЕГУЛЯРНОСТІ ПРИ ЗБУРЕННЯХ В ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕННЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Віктор Кулик, Ганна Кулик, Наталія Степаненко

Сілезький Технологічний Університет (Сілезька Політехніка в Глівіце, Польща),
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Viktor.Kulyk@polsl.pl, KulikGanna1953@gmail.com, nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

Розглянуто питання збереження властивості регулярності при збуреннях системи диференціальних рівнянь

$$d\varphi / dt = a(\varphi), \quad dx / dt = A(\varphi), \tag{1}$$

де вектор-функція $a(\varphi) \in C^0(T_m)$, $C^0(T_m)$ – простір неперервних функцій, 2π-періодичних за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1, m}$, тобто визначених на *m*-вимірному торі T_m, $A(\varphi)$ – $n \times n$-вимірна матриця $A(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Додатково припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi)$ така, що розв'язок задачі Коші $d\varphi / dt = a(\varphi)$, $\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0$ є єдиним. Позначимо його через $\varphi_t(\varphi_0)$.

Матрицант лінійної системи $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ з вектором параметрів φ_0, позначимо $\Omega^t_\tau(\varphi_0)$, $\Omega^t_\tau(\varphi_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, де I_n-одинична *n*-вимірна матриця.

Використовуватимемо позначення: $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ – норма матриці *A*, $C^1(T_m)$ – підпростір $C^0(T_m)$ неперервно диференційовних функцій, $C'(T_m; a)$ –підпростір $C^0(T_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що суперпозиція $F(\varphi_t(\varphi_0))$ є неперервно диференційовною за змінною *t*. За означенням $\dot F(\varphi_0) = \frac{d}{dt} F(\varphi_t(\varphi_0))\big|_{t=0}$. Отже, крапкою зверху позначимо похідну за напрямком, якщо, наприклад, функція $F(\varphi)$ є неперервно диференційовною, $F(\varphi) \in C^1(T_m)$, то $\dot F(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$.

В роботі [1] доведено, що у випадку, коли модуль неперервності $\sup_{\|\varphi - \overline{\varphi}\| \le \sigma} \|a(\varphi) - \overline{a}(\varphi)\| = \mu(\sigma; a)$ функції $a(\varphi)$, і модуль неперервності $\mu(\sigma; F)$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_08.pdf функції $F(\varphi) \in C'(T_m; a)$ задовольняють умову $\lim\limits_{\sigma \to +0} \mu(\sigma; a)\mu(\sigma; F) / \sigma = 0$, то $F(\varphi)$ можна наблизити диференційовними функціями $F_n(\varphi) \in C^1(T_m)$ так, щоб $\dot{F}_n(\varphi) \to \dot{F}(\varphi)$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що якщо для функції $a(\varphi)$ виконується умова Ліпшиця, то будь-яку функцію $F(\varphi) \in C'(T_m; a)$ завжди можна наблизити диференційовними функціями $F_n(\varphi)$ зі збереженням близкості $\dot{F}_n(\varphi)$ і $\dot{F}(\varphi)$.

Теорема. *Нехай в системі (1)* $n = 1$ *і ця система є регулярною, тоді збурена система* $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dx/dt = [A(\varphi) + A_1(\varphi)]x$ *буде регулярною, якщо рівняння* $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = A_1(\varphi)$ *має розв'язок* $\sigma = \sigma_0(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, *який є неперервно диференційовним і визначеним при всіх* $\varphi \in T_m$.

Користуючись теоремою можна встановити що, наприклад, система рівнянь вигляду

$$d\varphi_1 / dt = 1 + 2\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \,, \quad d\varphi_2 / dt = 1 - \sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2,$$

$$dx / dt = \left[3\cos^2\varphi_1 + 4\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 5\cos^2\varphi_2 - \sin\varphi_1 - 13\sin\varphi_2\right]x.$$

має єдину функцію Гріна – Самойленка. Розглядаючи збурені системи при $n \geq 2$, встановлено, що система

$$d\varphi / dt = \omega \,, \quad dx_1 / dt = a_{11}(\varphi)x_1 + a_{12}(\varphi)x_2, \quad dx_2 / dt = a_{21}(\varphi)x_1 + a_{22}(\varphi)x_2 \,,$$

де $\omega = \text{const} \in \mathbb{R}$, $a_{11}(\varphi) = \sin\varphi / (2 + \cos\varphi)$, $a_{22}(\varphi) = 2\sin\varphi / (4 + 3\cos\varphi)^2$, $a_{21}(\varphi) = \cos^2\varphi / (5 + 4\cos\varphi)^2$, $a_{12}(\varphi) = \cos^8\varphi - 1.99\cos^6\varphi + \cos^4\varphi$, також має єдину функцію Гріна – Самойленка.

1. *Кулик А.Н.* О приближениях непрерывных периодических функций, дифференцируемых вдоль траекторий динамических систем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 111–114.
2. *Кулик В.Л., Кулик Г.М., Степаненко Н.В.* Про деякі конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі // Нелінійні коливання. – 2023. – **26**, № 1. – С. 77–94.

CONSERVATION OF REGULARITY UNDER PERTURBATION IN LINEAR EXTENSIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE TORUS

The question of regularity for linear expansions of dynamical systems on a torus is very important, since multi-frequency nonlinear oscillations that arise in many problems of mathematical physics are described with the help of such systems. Most such systems are very difficult or impossible to solve. Therefore, the question arises on the existence of sets of bounded solutions and their dependence on parameters. The proposed report considers the possibilities of perturbation of the initial system, in which the property of regularity is preserved.